파이썬 수치해석

Chapter 2. 비선형 방정식의 근 찾기

박형묵

명신여자고등학교

Update 20250507

강의 자료 다운로드

파이썬 수치해석 강의 자료

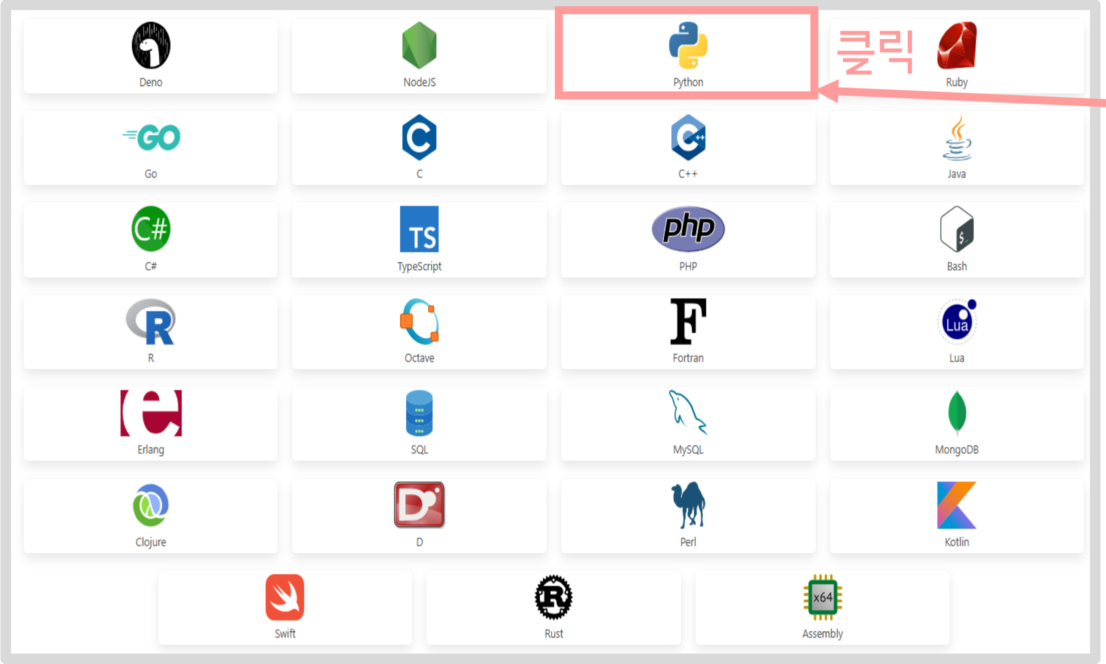
https://github.com/PigeonDove/PythonNumericalAnalysis

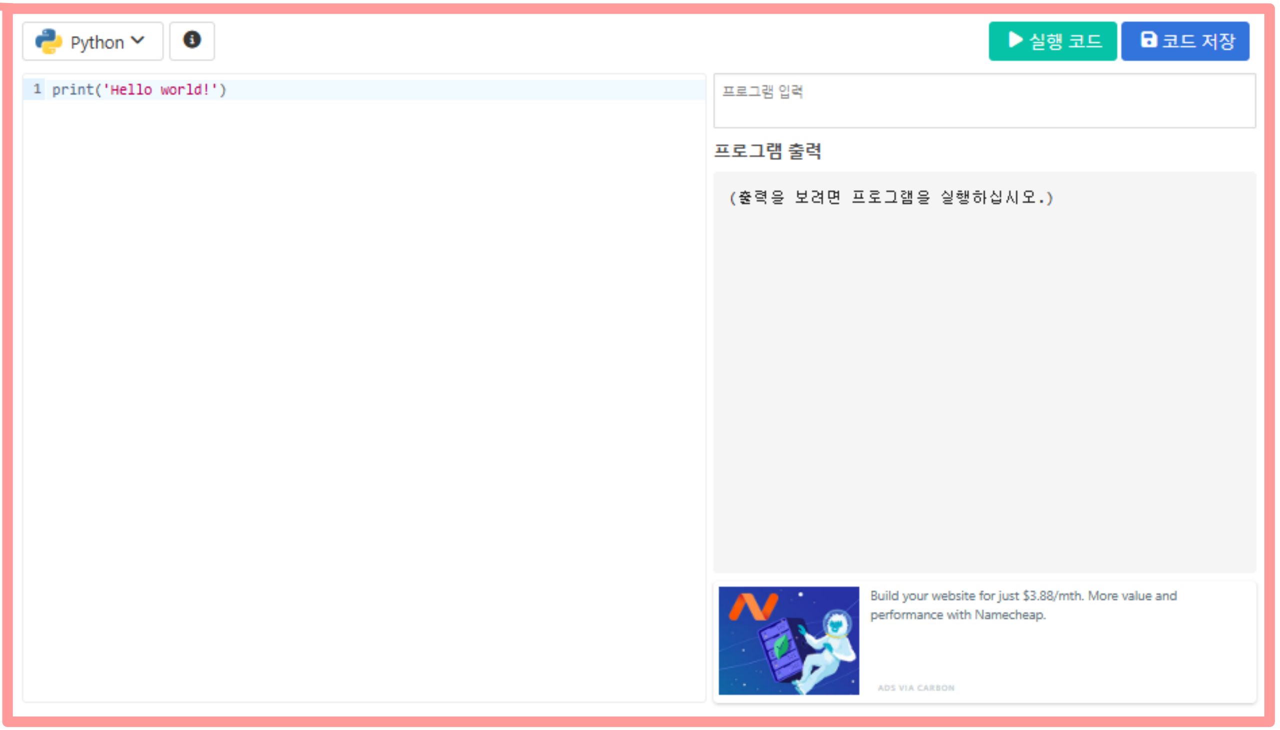
개발 환경

myCompiler 의 Python

파이썬 코딩 웹 사이트

https://www.mycompiler.io/ko/new/python

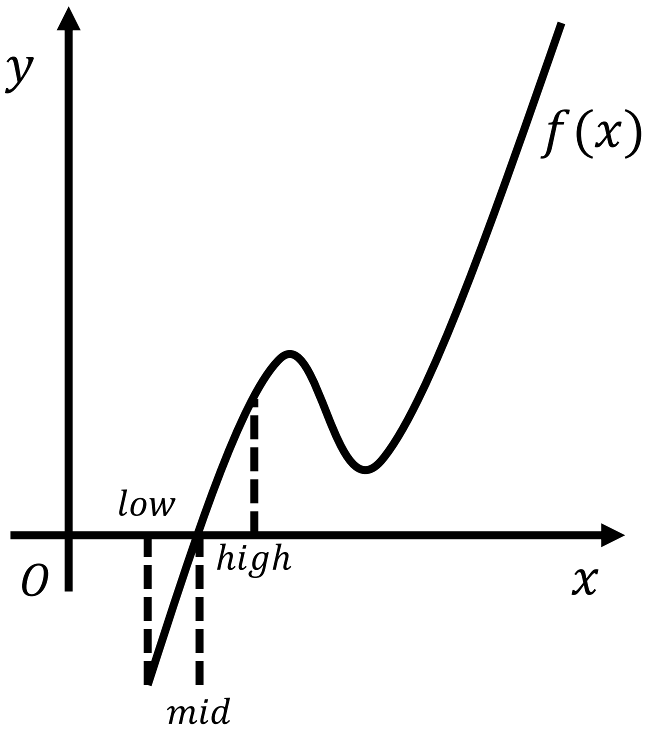




비선형 방정식의 근 찾기

이분법

기본 개념 학습



방정식 $f(x) = 0$의 근을 찾는 수치적인 방법

$f(mid) = 0$ *이라면,*

$f(low) < f(mid) < f(high)$ *이고,*

$f(low) < 0,\ f(high) > 0$ *이다.*

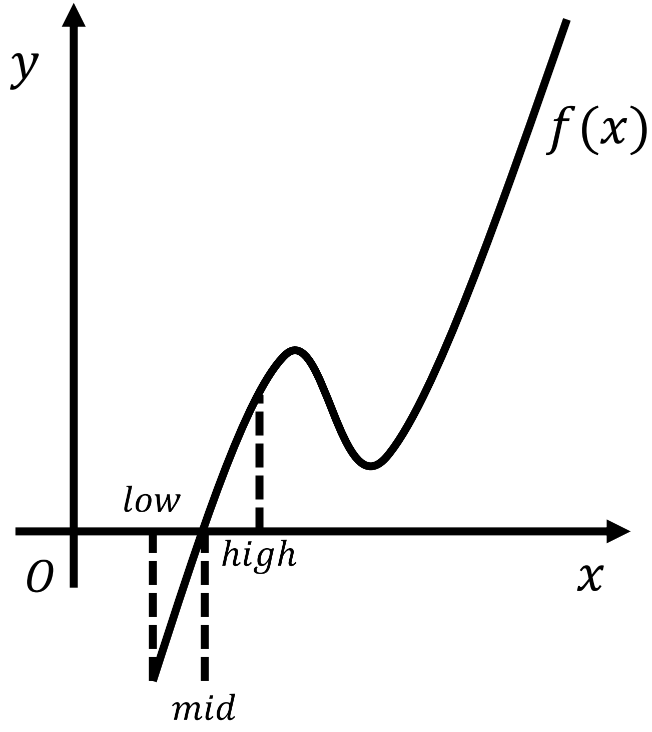
따라서 $f(low)f(mid) < 0$

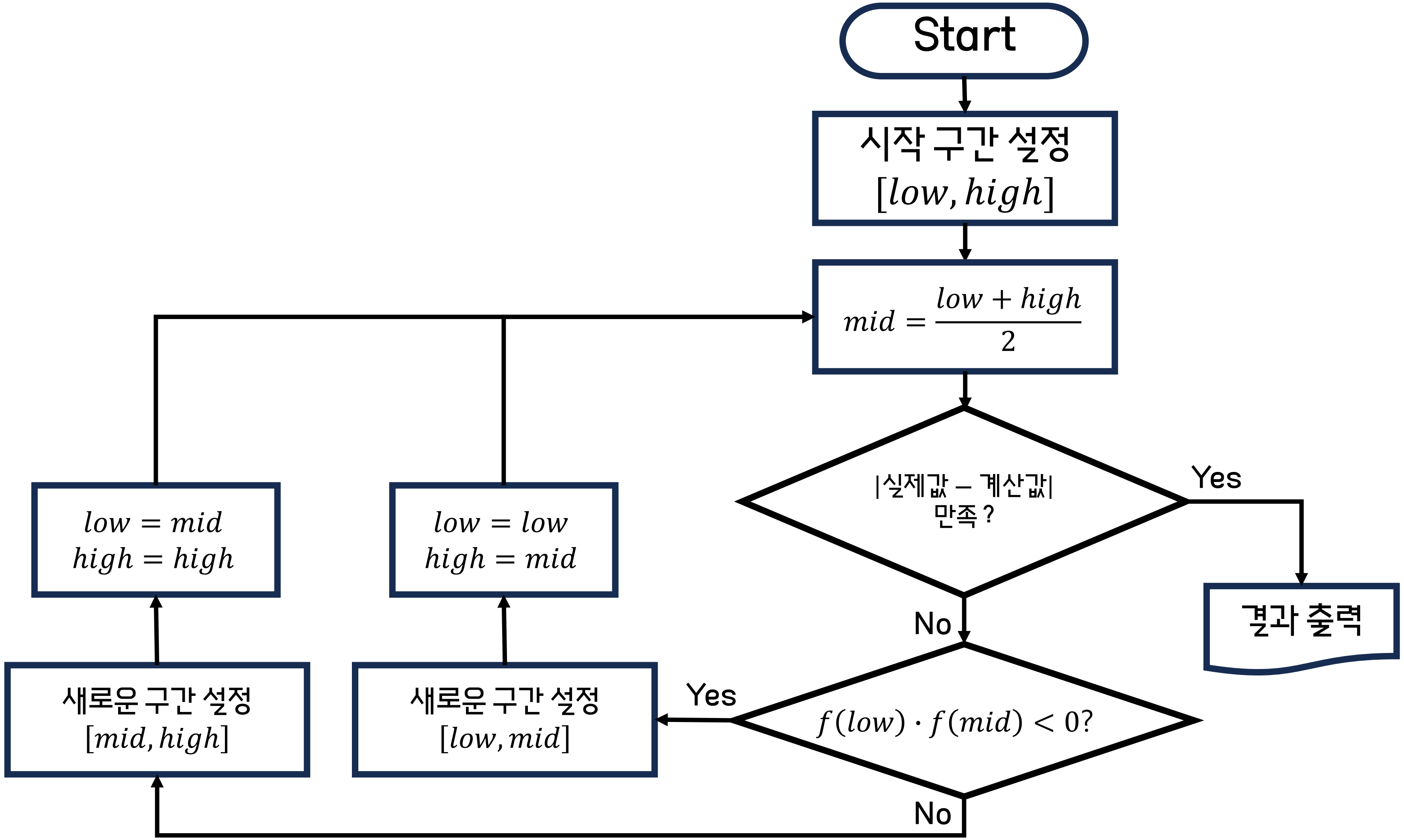
⇒ 두 지점의 값에서 음수에서 양수로 바뀌거나, 양수에서 음수로 바뀐다는 건, 중간에 0이 있다는 뜻

비선형 방정식의 근 찾기

이분법

기본 개념 학습



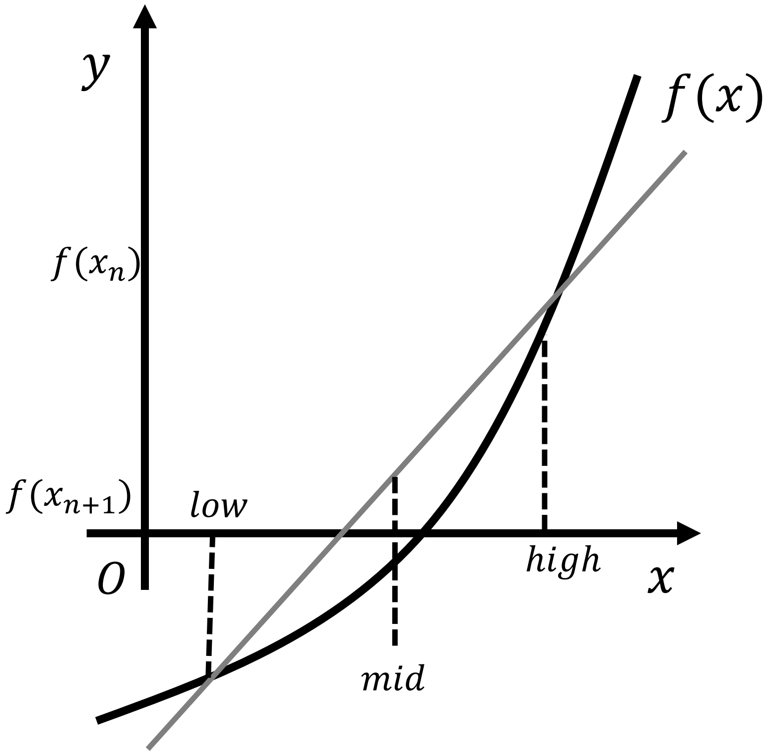


비선형 방정식의 근 찾기

이분법

기본 개념 적용

$\sqrt{2}$ 값 계산해보기



구하고자 하는건 $\sqrt{2}$의 값이므로

$x^2 = 2 \rightarrow f(x) = x^2 - 2$

$x^2 - 2 = 0$의 해는

$f(1) = -1, f(2) = 2$ 사이에 있으므로 시작구간을 $[1,2]$로 설정

$Step$	low	$high$	mid	$f(mid)$
1	1.0	2.0	1.5	0.25
2	1.0	1.5	1.25	-0.4375
3	1.25	1.5	1.375	-0.109375
4	1.375	1.5	1.4375	0.066406
5	1.375	1.4375	1.40625	-0.022461
6	1.40625	1.4375	1.421875	0.021729
7	1.40625	1.421875	1.414062	-0.000427

2_1Table.txt

소스코드 2-1.py

비선형 방정식의 근 찾기

이분법

문제점

1. 함수 부호가 바뀌는 구간만 가능

ex) $f(x) = x^2 + 1$의 경우 실수해가 없기 때문에 이분법이 불가능함.

2. 항상 절반씩 줄이면서 근에 접근하기 때문에, 아주 정확한 값을 얻으려면 많은 반복이 필요하기 때문에 느리다 .

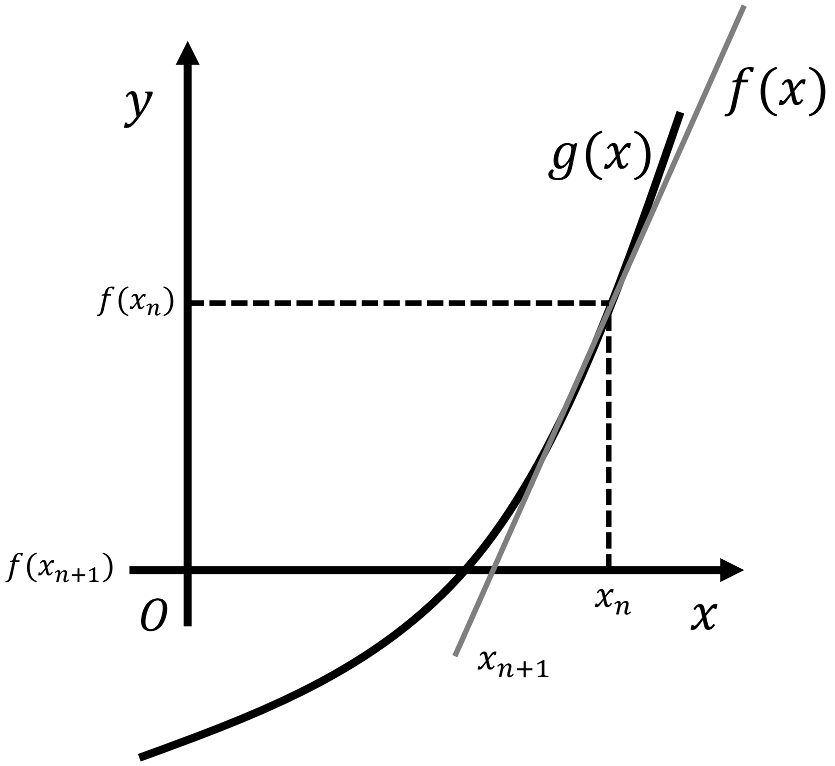
→ 뉴턴 랩슨법 사용

비선형 방정식의 근 찾기

뉴턴 랩슨법

기본 개념 학습

함수의 기울기를 이용하여 근을 찾는 방법



기울기의 공식에서 출발하여

$$f'(x_n) = \frac{f(x_n) - f(x_{n+1})}{x_n - x_{n+1}} = \frac{f(x_n)}{x_n - x_{n+1}} \qquad \because g'(x) = f(x)$$

$$\Rightarrow \ x_n - x_{n+1} = \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

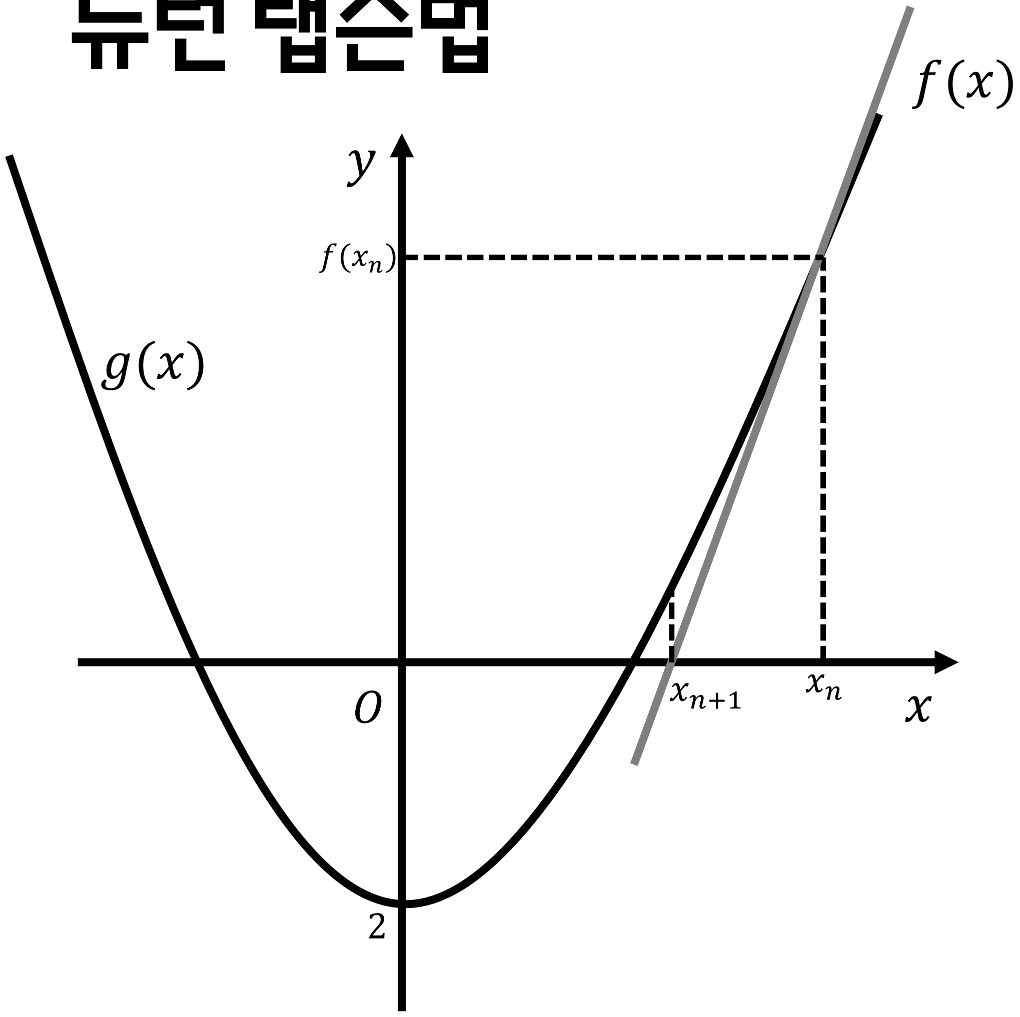
$$\Rightarrow \ x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

뉴턴 랩슨법 공식

비선형 방정식의 근 찾기

뉴턴 랩슨법

기본 개념 적용



구하고자 하는건 $\sqrt{2}$의 값이므로

$x^2 = 2 \quad \rightarrow \quad x^2 - 2 = 0 \qquad f'(x) = 2x$

$x^2 - 2 = 0$의 해는 $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ 를 사용하여 계산

$x_1 = 2$로 출발해보자

$\boldsymbol{Step}$	$\boldsymbol{x_n}$	$\boldsymbol{f(x_n)}$	$\boldsymbol{f'(x_n)}$
1	2	2	4
2	1.5	0.25	3.0
3	1.416667	0.006944	2.833
4	1.414216	0.000006	2.828427

소스코드 2-2.py

비선형 방정식의 근 찾기

뉴턴 랩슨법

문제점

1. 도함수를 직접 구해야한다.

함수가 복잡하거나 도함수가 없으면 사용하기 어렵다.
→ Secant Method (할선법) 사용

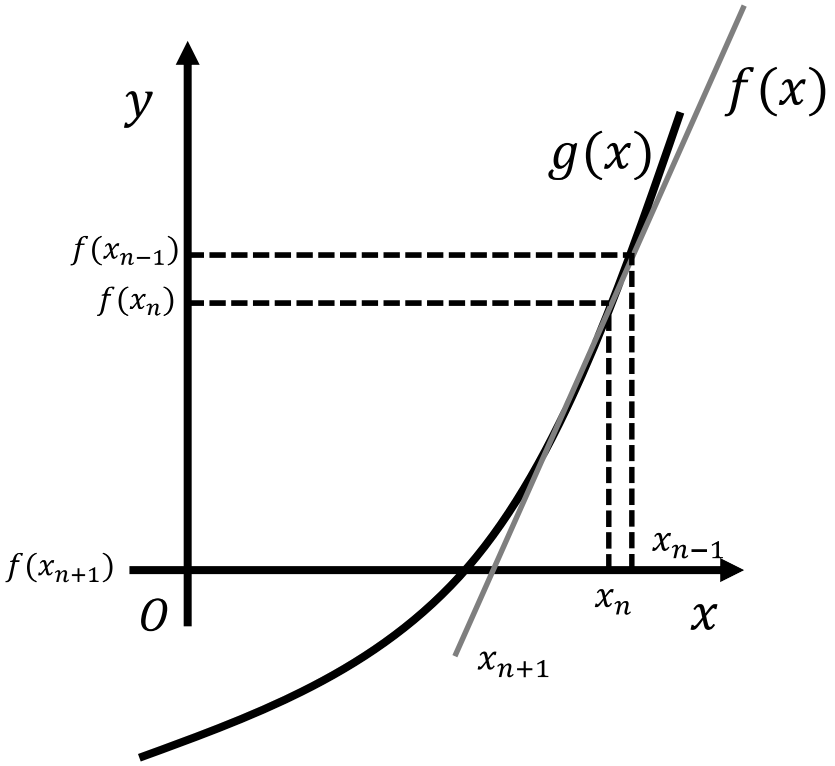
2. 초기값을 잘못 잡으면 발산하거나 진동할 수 있다

ex) 함수의 극값 근처에서 시작하면 → 기울기(도함수)가 0에 가까워져서 계산이 튐

비선형 방정식의 근 찾기

할선법

기본 개념 학습



함수의 기울기를 이용하여 근을 찾는 방법

기울기의 공식에서 출발하여

$$f'(x_n) = \frac{f(x_n) - f(x_{n+1})}{x_n - x_{n+1}} = \frac{f(x_n)}{x_n - x_{n+1}} \qquad \because g'(x) = f(x)$$

$$\Rightarrow x_n - x_{n+1} = \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$\Rightarrow x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$\Rightarrow$ 도함수를 모른다면?

x_{n-1} 을 결정하여 기울기를 근사치로 계산한다.

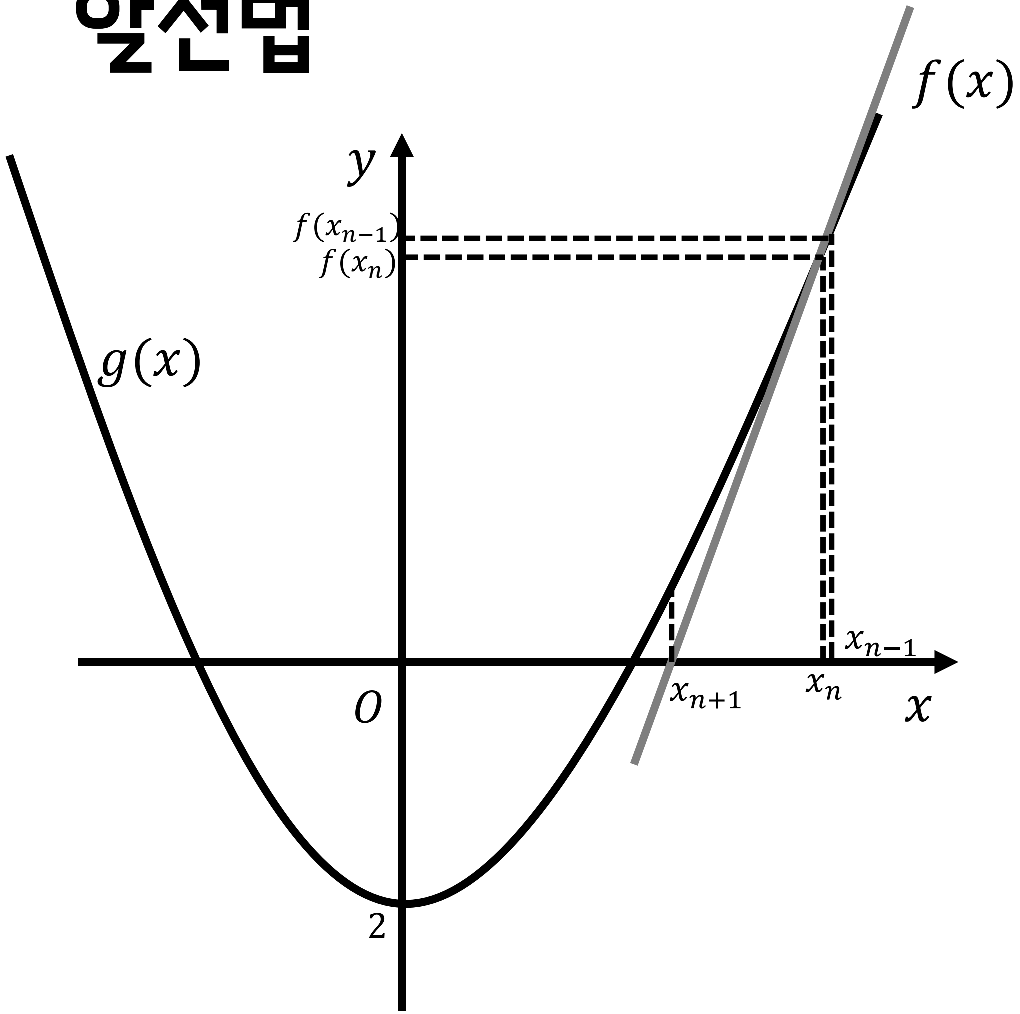
$$\Rightarrow x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{\frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}}$$

$$\Rightarrow x_{n+1} = x_n - f(x_n)\frac{(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

할선법 공식

비선형 방정식의 근 찾기

할선법



기본 개념 적용

구하고자 하는건 $\sqrt{2}$의 값이므로

$$x^2 = 2 \quad \rightarrow \quad x^2 - 2 = 0$$

$x^2 - 2 = 0$의 해는 $x_{n+1} = x_n - f(x_n)\dfrac{(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$ 를 사용하여 계산

$x_1 = 2, x_0 = 2.1$ 로 출발해보자

$Step$	x_n	x_{n-1}	$f(x_n)$	$f(x_{n-1})$
1	2	2.1	2	2.41
2	1.512195	2	0.286734	2
3	1.430556	1.512195	0.046489	0.286734
4	1.414758	1.430556	0.001539	0.046489
5	1.414217	1.414758	0.000009	0.001539

소스코드 2-3.py

비선형 방정식의 근 찾기

할선법

문제점

1. 초기값 민감

   초기 두 점이 적절하지 않으면 발산하거나 매우 느리게 수렴할 수 있음

2. 초기값을 잘못 잡으면 발산하거나 진동할 수 있다

   함수의 극값 근처에서 시작하면 → 기울기가 0에 가까워져서 계산이 튐

감사합니다

박형묵

명신여자고등학교