Question 1

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \gamma^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

On a,

$$\frac{\partial^2 U(x)\cos(\omega t)}{\partial t^2} - \gamma^2 \frac{\partial^2 U(x)\cos(\omega t)}{\partial x^2} = 0$$

$$U''(x) - \beta^2 U(x) = 0, \qquad avec \beta^2 = \frac{\omega^2}{\gamma^2}$$

Ce qui nous donne l'équation différentielle suivante :

$$U(x) = \lambda \cos(\beta x) + \mu \sin(\beta x), \quad \lambda, \mu \in \Re$$

Par les conditions aux limites :

$$u(0,t) = u(L,t) = 0$$

$$U(0) = \lambda \cos(0) + \mu \sin(0) = \lambda + 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda = 0$$

Donc :

$$U(x) = \mu \sin(\beta x)$$

Or,

$$U(L) = \mu \sin(\beta L) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \beta = \frac{n\pi}{L}$$

On obtient bien :

$$U_n(x) = B_n \sin\left(n\pi \frac{x}{L}\right), \quad \omega_n = n\pi \frac{\gamma}{L} \Leftrightarrow f_n = n\frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

Par le principe de superpostion des ondes propres on a,

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n sin(n\pi \frac{x}{L}) cos(n\pi \frac{\gamma t}{L})$$

Et par la condition aux limites :

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n sin(n\pi \frac{x}{L})$$

Avec Fourier on obtient que :

$$B_n = \frac{2}{L}\int_0^L u(x,t) sin(n\pi \frac{x}{L}) dx$$

Lorsque la longueur de la corde augmente, la fréquence fondamentale diminue. Lorsque la longueur est divisé par 2 on a $f_n = n\sqrt{\frac{T}{\mu}}$ et donc pour la fréquence fondamentale $f_1 = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$. Lorsque la masse linéique aumente, la fréquence fondamentale diminue et lorsque la tension augment la fréquence fondamentale augmente également.

Question 2

A) On a,

$$u(x+h,t)+u(x-h,t)=2u(x,t)+h^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)+o(h^2)$$

$$u(x,t+k)+u(x,t-k)=2u(x,t)+k^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)+o(k^2)$$

Ce qui nous donne :

$$-h^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)=2u(x,t)-u(x+h,t)-u(x-h,t)+o(h^2)$$

$$-k^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)=2u(x,t)-u(x,t+k)-u(x,t-k)+o(k^2)$$

Donc,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)=\frac{2u(x,t)-u(x+h,t)-u(x-h,t)}{h^2}+o(1)$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)=\frac{2u(x,t)-u(x,t+k)-u(x,t-k)}{k^2}+o(1)$$

Par changement de notation on a bien :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_l,t_k)\approx\frac{1}{h^2}(u_{l+1}^n-2u_l^n+u_{l-1}^n)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_l,t_k)\approx\frac{1}{k^2}(u_l^{n+1}-2u_l^n+u_l^{n-1})$$

B)

$$u(x+2h,t)+u(x-2h,t)=2u(x,t)+4h^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)+\frac{4}{3}h^4\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x,t)+o(h^4)$$

$$-4[u(x+h,t)+u(x-h,t)]=-8u(x,t)-4h^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)-\frac{h^3}{3}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x,t)-o(h^4)$$

Donc,

$$u(x+2h,t)+u(x-2h,t)-4[u(x+h,t)+u(x-h,t)]+6u(x,t)=h^4\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x,t)$$

Par simple changement de notation on a bien,

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_l,t_k)\approx\frac{1}{h^4}(u_{l+2}^n-4u_{l+1}^n+6u_l^n-4u_{l-1}^n+u_{l-2}^n)$$

C) On a

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x+h,t)=\frac{u(x+h,t+k)-u(x+h,t-k)}{2k}+o(1)\approx\frac{u_{l+1}^{n+1}-u_{l+1}^{n-1}}{2k}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x-h,t)=\frac{u(x-h,t+k)-u(x-h,t-k)}{2k}+o(1)\approx\frac{u_{l-1}^{n+1}-u_{l-1}^{n-1}}{2k}$$

$$\frac{\partial 2u}{\partial t}(x,t) = \frac{2u(x,t+k) - 2u(x,t-k)}{2k} + o(1) \approx \frac{2u_l^{n+1} - 2u_l^{n-1}}{2k}$$

D'où,

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) \approx \frac{1}{2kh^2}(u_{l+1}^{n+1} - 2u_l^{n+1} + u_{l-1}^{n+1} - u_{l+1}^{n-1} + 2u_l^{n-1} - u_{l-1}^{n-1})$$

D) On réécris l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \gamma^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \kappa^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2\sigma_0 \frac{\partial u}{\partial t} - 2\sigma_1 \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} = 0$$

En développant les termes, on obtient :

$$\begin{aligned} & -\frac{\sigma_1}{kh^2}u_{l-1}^{n+1} + (\frac{1}{k^2} + \frac{\sigma_0}{k} + \frac{2\sigma_1}{kh^2})u_l^{n+1} - \frac{\sigma_1}{kh^2}u_{l+1}^{n+1} \\ + \quad & \frac{\kappa^2}{h^4}u_{l-2}^n + (-\frac{\gamma^2}{h^2} - \frac{4\kappa^2}{h^4})u_{l-1}^n + (-\frac{2}{k^2} + \frac{2\gamma^2}{h^2} + \frac{6\kappa^2}{h^4})u_l^n + (-\frac{\gamma^2}{h^2} - \frac{4\kappa^2}{h^4})u_{l+1}^n + \frac{\kappa^2}{h^4}u_{l+2}^n \\ + \quad & \frac{\sigma_1}{kh^2}u_{l-1}^{n-1} + (\frac{1}{k^2} - \frac{\sigma_0}{k} - \frac{2\sigma_1}{kh^2})u_l^{n-1} + \frac{\sigma_1}{kh^2}u_{l+1}^{n-1} \\ & = 0 \end{aligned}$$

En multipliant l'équation par k^2 puis en remplacant les coefficients, on obtient le schéma implicite associé à l'EDP.

Question 3

En considérant :

$$u(0,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0,t) = \frac{1}{h^2}(u_1 - 2u_0 + u_{-1}) = 0$$

$$u(L,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(L,t) = \frac{1}{h^2}(u_{N+1} - 2u_N + u_{N-1}) = 0$$

On obtient que,

$$u_1 = -u_{-1} + 2u_0, \quad Or \quad u_0 = 0$$

$$u_{N+1} = -u_{N-1} + 2u_N, \quad Or \quad u_N = 0$$

D'où,

$$u_1 = -u_{-1} \qquad u_{N+1} = -u_{N-1}$$

Si l'on considère i $\in$ [1 ;N], on a

$$\overline{\mathbf{A}}\overline{\mathbf{u}}^{n+1} : a_1 u_{i-1}^{n+1} + a_2 u_i^{n+1} + a_1 u_{i+1}^{n+1}$$

$$\overline{\mathbf{C}}\overline{\mathbf{u}}^{n-1} : c_1 u_{i-1}^{n+1} + c_2 u_i^{n+1} + c_1 u_{i+1}^{n+1}$$

Avec i $\in$ [2 ;N-1], on a

$$\overline{\mathbf{B}}\overline{\mathbf{u}}^{n} : b_1 u_{i-2}^n + b_2 u_{i-1}^n + b_3 u_i^n + b_2 u_{i+1}^n + b_1 u_{i+2}^n$$

Puis si $i = 1$,

$$\overline{\mathbf{B}}\overline{\mathbf{u}}^{n} : b_2 u_0^n + b_3 u_1^n - b_1 u_1^n + b_2 u_2^n + b_1 u_3^n$$

$$= b_2 u_0^n + b_3 u_1^n + b_1 u_{-1}^n + b_2 u_2^n + b_1 u_3^n$$
$$car - b_1 u_1^n = b_1 u_{-1}$$

Et si $i = N$,

$$\overline{\mathbf{B}}\overline{\mathbf{u}}^n : b_1 u_{N-3}^n + b_2 u_{N-2}^n - b_1 u_{N-1}^n + b_3 u_{N-1}^n + b_2 u_N^n$$
$$= b_1 u_{N-3}^n + b_2 u_{N-2}^n + b_3 u_{N-1}^n + b_2 u_N^n + b_1 u_{N+1}^n$$
$$car - b_1 u_{N-1}^n = b_1 u_{N+1}$$

Enfin, pour $i = 0$

$$\overline{\mathbf{A}}\overline{\mathbf{u}}^{n+1} + \overline{\mathbf{B}}\overline{\mathbf{u}}^n + \overline{\mathbf{C}}\overline{\mathbf{u}}^{n-1} : u_0^{n+1} + u_0^n + u_{n-1}^{n-1} = 0$$

$i = N + 1$

$$\overline{\mathbf{A}}\overline{\mathbf{u}}^{n+1} + \overline{\mathbf{B}}\overline{\mathbf{u}}^n + \overline{\mathbf{C}}\overline{\mathbf{u}}^{n-1} : u_N^{n+1} + u_N^n + u_N^{n-1} = 0$$

La forme matricielle proposée permet donc de caractériser le shéma numérique.

Question 4

$\mathbf{A} = (1 + \sigma_0 k)\mathbf{I} - \sigma_1 k \mathbf{D}_{xx}$

$$a_{i,i-1} = -\frac{\sigma_1 k}{h^2} = a_1$$
$$a_{i,i} = 1 + \sigma_0 k + \frac{2\sigma_1 k}{h^2} = a_2$$
$$a_{i,i+1} = -\frac{\sigma_1 k}{h^2} = a_1$$

$\mathbf{C} = (1 - \sigma_0 k)\mathbf{I} + \sigma_1 k \mathbf{D}_{xx}$

$$c_{i,i-1} = \frac{\sigma_1 k}{h^2} = c_1$$
$$c_{i,i} = 1 - \sigma_0 k - \frac{2\sigma_1 k}{h^2} = c_2$$
$$c_{i,i+1} = \frac{\sigma_1 k}{h^2} = c_1$$

$$\mathbf{D}_{xxxx} = \frac{1}{h^4}\begin{bmatrix} 5 & -4 & 1 & & & \mathbf{0} \\ -4 & 6 & -4 & 1 & & \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & 1 & -4 & 6 & -4 \\ \mathbf{0} & & & 1 & -4 & 5 \end{bmatrix},$$

$\mathbf{B} = -2\mathbf{I} - \gamma^2 k^2 \mathbf{D}_{xx} + \kappa^2 k^2 \mathbf{D}_{xxxx}$

Pour $i \in [1; N-2]$,

$$b_{i,i} = -2 + \frac{2\gamma^2 k^2}{h^2} + \frac{6\kappa^2 K^2}{h^4}$$

Et avec $i \in [0; N-1]$

$$b_{i,i-2} = \frac{\kappa^2 k^2}{h^4}$$

$$b_{i,i-1} = -\frac{\gamma^2 k^2}{h^2} - \frac{4\kappa^2 k^2}{h^4}$$
$$b_{i,i+1} = -\frac{\gamma^2 k^2}{h^2} - \frac{4\kappa^2 k^2}{h^4}$$
$$b_{i,i+2} = \frac{\kappa^2 k^2}{h^4}$$

Enfin, pour $i = 0$ et $i = N-1$

$$b_{i,i} = -2 + \frac{2\gamma^2 k^2}{h^2} + \frac{5\kappa^2 k^2}{h^4}$$

Or,

$$b_3 - b_1 = (-2 + \frac{2\gamma^2 k^2}{h^2} + \frac{6\kappa^2 K^2}{h^4}) - \frac{\kappa^2 k^2}{h^4} = -2 + \frac{2\gamma^2 k^2}{h^2} + \frac{5\kappa^2 k^2}{h^4}$$

CQFD

Question 5

Par injection de $\tilde{u}(x,t) = e^{st+j\beta x}$

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2} = s^2 \tilde{u} \qquad \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x^2} = -\beta^2 \tilde{u}$$
$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x^4} = \beta^4 \tilde{u} \qquad \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} = s\tilde{u}$$
$$\frac{\partial^3 \tilde{u}}{\partial t \partial x^2} = -s\beta^2 \tilde{u}$$

On a alors :

$$s^2 = -\gamma^2\beta^2 - \kappa^2\beta^4 - 2s\sigma_0 - 2s\beta^2\sigma_1$$

Ce qui nous donne l'équation de degré 2 suivante :

$$s^2 + 2(\sigma_0 + \beta^2\sigma_1)s + (\gamma^2\beta^2 + \kappa^2\beta^4) = 0$$

Ainsi,

$$\Delta = 4(\sigma_0 + \beta^2\sigma_1)^2 - 4(\gamma^2\beta^2 + \kappa^2\beta^4)$$

Or, puisque l'on a $\sigma_0, \sigma_1 \leqslant 0$ et petits, s possède deux racines complexes :

$$\frac{-2(\sigma_0 + \beta^2\sigma_1) \pm 2j\sqrt{\gamma^2\beta^2 + \kappa^2\beta^4 - (\sigma_0 + \beta^2\sigma_1)^2}}{2}$$

CQFD

B) On considère l'expression suivante

$$\omega^2 = \gamma^2\beta^2 + \kappa^2\beta^4 - \sigma_0^2 - \beta^4\sigma_1^2 - 2\beta^2\sigma_0\sigma_1$$

Ce qui nous donne une expression de β^2

$$(\kappa^2 - \sigma_1)(\beta^2)^2 + (\gamma^2 - 2\sigma_0\sigma_1)\beta^2 - (\omega^2 + \sigma_0^2) = 0$$
$$\Delta = (\gamma^2 - 2\sigma_0\sigma_1)^2 - 4(\kappa^2 - \sigma_1)(-\omega^2 - \sigma_0^2)$$

β^2 admet donc deux racines réelles, on ne considère que la racine positive :

$$\frac{-(\gamma^2 - 2\sigma_0\sigma_1) + \sqrt{(\gamma^2 - 2\sigma_0\sigma_1)^2 + 4(\omega^2 + \sigma_0^2)(\kappa^2 + \sigma_1^2)}}{2(\kappa^2 - \sigma_1^2)}$$

Et puisque σ_0 et σ_1 sont proches de 0, on obtient bien :

$$\beta^2 = \frac{-\gamma^2 + \sqrt{\gamma^4 + 4\kappa^2\omega^2}}{2\kappa^2}$$

C) On considère,

$$\sigma(\omega_1) = -\sigma_0 - \sigma_1\xi(\omega_1)$$
$$\sigma(\omega_2) = -\sigma_0 - \sigma_1\xi(\omega_2)$$

Ainsi,

$$\sigma(\omega_1) - \sigma(\omega_2) = \sigma_1(\xi(\omega_2) - \xi(\omega_1))$$

Et,

$$-\frac{6\ln 10}{T_{60}(\omega_1)} + \frac{6\ln 10}{T_{60}(\omega_2)} = \sigma_1(\xi(\omega_2) - \xi(\omega_1))$$

D'où,

$$\frac{6\ln 10}{\xi(\omega_2) - \xi(\omega 1)}(-\frac{1}{T_{60}(\omega_1)} + \frac{1}{T_{60}(\omega_2)}) = \sigma_1$$

On a maintenant

$$\sigma(\omega_1) = -\sigma_0 - \frac{6\ln 10}{\xi(\omega_2) - \xi(\omega_1)}(-\frac{\xi(\omega_1)}{T_{60}(\omega_1)} + \frac{\xi(\omega_1)}{T_{60}(\omega_2)})$$

Et

$$-\frac{6\ln 10}{T_{60}(\omega_1)} = \sigma(\omega_1) = -\sigma_0 - \frac{6\ln 10}{\xi(\omega_2) - \xi(\omega_1)}(-\frac{\xi(\omega_1)}{T_{60}(\omega_1)} + \frac{\xi(\omega_1)}{T_{60}(\omega_2)})$$

Donc

$$\sigma_0 = -\frac{6\ln 10}{\xi(\omega_2) - \xi(\omega_1)}(-\frac{\xi(\omega_1)}{T_{60}(\omega_1)} + \frac{\xi(\omega_1)}{T_{60}(\omega_2)} - \frac{\xi(\omega_2) - \xi(\omega_1)}{T_{60}(\omega_1)})$$

Ce qui nous donne finalement,

$$\sigma_0 = \frac{6\ln 10}{\xi(\omega_2) - \xi(\omega_1)}\left(\frac{\xi(\omega_2)}{T_{60}(\omega_1)} - \frac{\xi(\omega_1)}{T_{60}(\omega_2)}\right),$$

Question 6

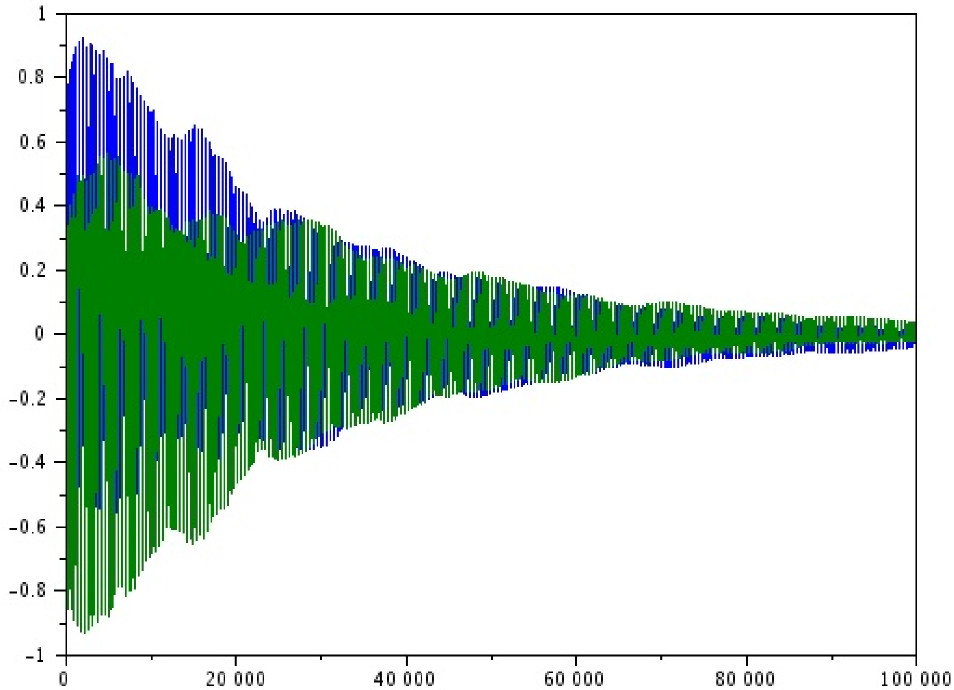


Figure 1 – Vecteur son pour 100000 iterations

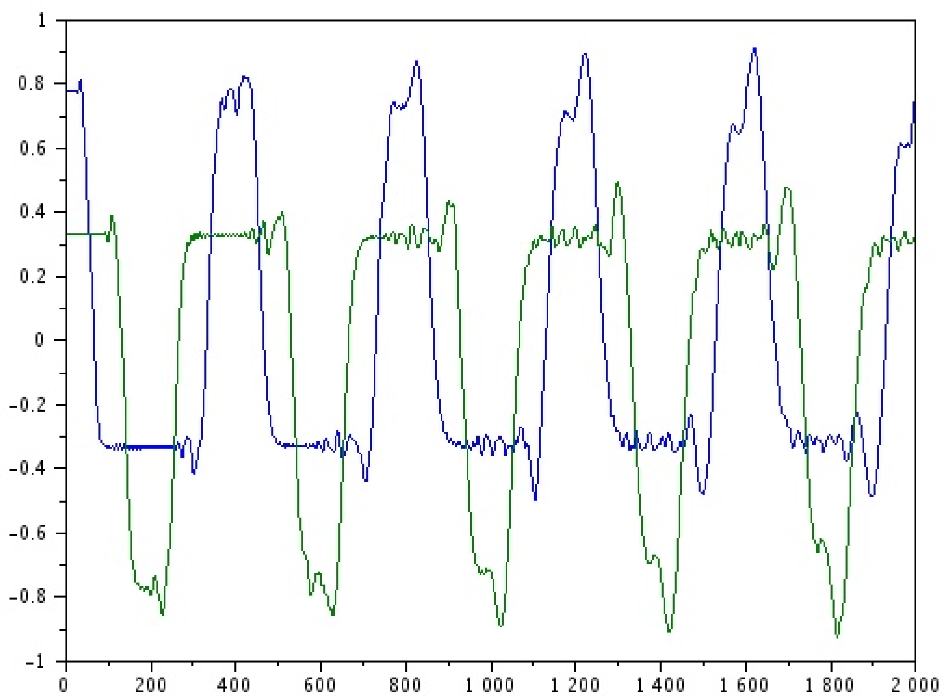


Figure 2 – Vecteur son pour 2000 itérations

Question 7

Quantitativement

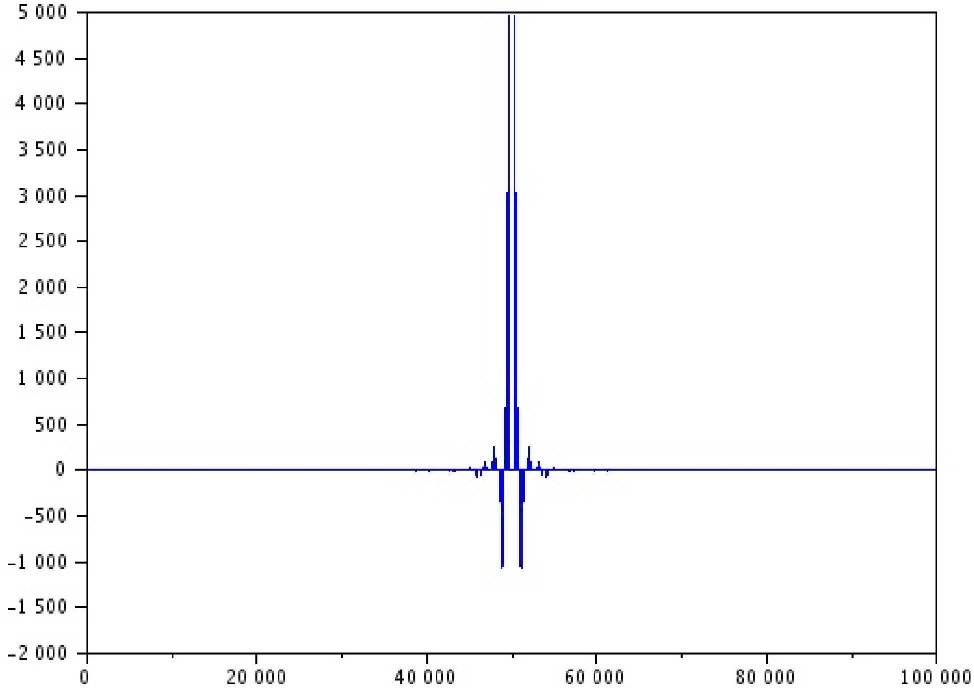


FIGURE 3 – Spectre du vecteur out

Qualitativement

On voit que plus le paramètre d'inharmonicité est faible plus la timbre de la note est basse. Symétriquement, plus la valeur de B est élevée plus la timbre de la note est haute.
La position x0 ne semble pas vraiment impacter le timbre.

Question 8

Le laplacien s'exprime en coordonnées polaires de la manière suivante :

$$\Delta w = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial w}{\partial r}) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}$$

En effet :

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial w}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x})+\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial w}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial y})\\
&= \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial w}{\partial r}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{\partial w}{\partial \theta}\frac{-y}{x^2+y^2})+\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial w}{\partial r}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{\partial w}{\partial \theta}\frac{x}{x^2+y^2})
\end{aligned}
$$

Or :

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial w}{\partial r} = \dfrac{1}{a}\dfrac{\partial w}{\partial \eta}\\
\dfrac{\partial^2 w}{\partial r^2} = \dfrac{1}{a^2}\dfrac{\partial^2 w}{\partial \eta^2}\\
\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{c^2}{a^2}\dfrac{\partial^2 w}{\partial \tau^2}\\
\qquad\; = \dfrac{T}{\rho a^2}\dfrac{\partial^2 w}{\partial \tau^2}
\end{cases}
$$

Donc :

$$
\begin{aligned}
\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = T\Delta w \Leftrightarrow \rho\frac{T}{\rho a^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} &= T(\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2}+\frac{1}{a\eta}\frac{1}{a}\frac{\partial w}{\partial \eta}+\frac{1}{\eta^2 a^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2})\\
\Leftrightarrow \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} &= \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2}+\frac{1}{\eta}\frac{\partial w}{\partial \eta}+\frac{1}{\eta^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}
\end{aligned}
$$

Question 9

En $\eta = 0$, le laplacien diverge donc la discrétisation aussi. On se place donc dans le cas $i > 1$.

w est deux fois dérivable par rapport à chacun de ses paramètres. On peut donc lui appliquer un développement de Taylor :

$$
\begin{cases}
w(\eta_{i+1},\theta_j,\tau_n) = w(\eta_i + d\eta,\theta_j,\tau_n)\\
\qquad = w(\eta_i,\theta_j,\tau_n) + d\eta\dfrac{\partial w}{\partial \eta}(\eta_i,\theta_j,\tau_n) + \dfrac{d\eta^2}{2}\dfrac{\partial^2 w}{\partial \eta^2}(\eta_i,\theta_j,\tau_n) + o(d\eta^2)\ (1)\\
w(\eta_{i-1},\theta_j,\tau_n) = w(\eta_i - d\eta,\theta_j,\tau_n)\\
\qquad = w(\eta_i,\theta_j,\tau_n) - d\eta\dfrac{\partial w}{\partial \eta}(\eta_i,\theta_j,\tau_n) + \dfrac{d\eta^2}{2}\dfrac{\partial^2 w}{\partial \eta^2}(\eta_i,\theta_j,\tau_n) + o(d\eta^2)\ (2)
\end{cases}
$$

Donc :

$$\begin{cases} \dfrac{w(\eta_{i+1},\theta_j,\tau_n)-w(\eta_{i-1},\theta_j,\tau_n)}{2d\eta} = \dfrac{\partial w}{\partial \eta}(\eta_i,\theta_j,\tau_n)+o(d\eta) \ (1)-(2) \\ \dfrac{w(\eta_{i+1},\theta_j,\tau_n)-2w(\eta_i,\theta_j,\tau_n)+w(\eta_{i-1},\theta_j,\tau_n)}{d\eta^2} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial \eta^2}(\eta_i,\theta_j,\tau_n)+o(1) \ (1)+(2) \end{cases}$$

On a un résultat analogue pour les dérivées par rapport à θ et τ, donc on en déduit l'équation discrétisée.

Question 10

Equation	Discrétisation
$w(1,\theta,\tau)=0$	$w_{1,j}^n = 0$
$w(\eta,\theta,0)=w_0(\eta\cos(\theta),\eta\sin(\theta))$	$w_{i,j}^0 = w_0(\eta_i\cos(\theta_j),\eta_i\sin(\theta_j))$
$\dfrac{\partial w(\eta,\theta,0)}{\partial \tau}=0$	$\dfrac{w_{i,j}^1 - w_{i,j}^{-1}}{2d\tau}=0$

Question 11

En coordonnées cartésiennes, le laplacien est défini de partout, donc on peut exprimer le schéma explicite pour tout indice :

$$\rho\frac{W_{k,l}^{m+1}-2W_{k,l}^m+W_{k,l}^{m-1}}{dt^2} = T\times\left(\frac{W_{k+1,l}^m-2W_{k,l}^m+W_{k-1,l}^m}{dx^2}+\frac{W_{k,l+1}^m-2W_{k,l}^m+W_{k,l-1}^m}{dy^2}\right)$$

On l'étudie en $(k,l)=(1,1)$ pour avoir $\eta=0$:

$$\rho\frac{W_{1,1}^{m+1}-2W_{1,1}^m+W_{1,1}^{m-1}}{dt^2} = T\times\left(\frac{W_{2,1}^m-2W_{1,1}^m+W_{0,1}^m}{dx^2}+\frac{W_{1,2}^m-2W_{1,1}^m+W_{1,0}^m}{dy^2}\right)$$

Pour $N_\theta=8$, en prenant $dx=dy=dr=d\eta * a$, on a :

$$\begin{cases} W_{1,1}=w_{1,1} \\ W_{2,1}=w_{2,1} \\ W_{0,1}=w_{2,5} \\ W_{1,2}=w_{2,3} \\ W_{1,0}=w_{2,7} \end{cases}$$

Comme $d\tau^2=\frac{c^2}{a^2}dt^2$, on en déduit la première équation. La deuxième se retrouve en considérant un repère cartésien (O,x',y') rotation de $45°$ du repère (O,x,y).

En sommant les deux équations, on obtient l'égalité de la condition limite en $\eta = 0$ pour $N_\theta = 8$.

Ce résultat se généralise facilement pour $N_\theta = 4n$, puisqu'il suffit de considérer les repères cartésiens pivotés d'un angle $i * \frac{90}{n}$ degrés, $0 \leq i \leq n-1$.

Question 12

Question 13

Avec un développement de Taylor à l'ordre 4, on obtient :

$$w_{i,j}^{n+1} + w_{i,j}^{n-1} = 2w_{i,j}^{n} + d\tau^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2}(\eta_i, \theta_j, \tau_n) + \frac{d\tau^4}{12} \frac{\partial^4 w}{\partial \tau^4}(\eta_i, \theta_j, \tau_n) + o(d\tau^4)$$

Donc :

$$\frac{w_{i,j}^{n+1} - 2w_{i,j}^{n} + w_{i,j}^{n-1}}{d\tau^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2}(\eta_i, \theta_j, \tau_n) + \frac{d\tau^2}{12} \frac{\partial^4 w}{\partial \tau^4}(\eta_i, \theta_j, \tau_n) + o(d\tau^2)$$

Or $\frac{\partial^4 w}{\partial \tau^4}$ est continue donc bornée sur un compact borné. Donc $\frac{\partial^4 w}{\partial \tau^4} = \mathcal{O}(d\tau^2)$

Donc le schéma est d'ordre 2 en temps.

De plus, on obtient le même résultat pour les dérivées secondes en espace. Pour la dérivée première en η, on développe jusqu'à l'ordre 3, ce qui donne un ordre 2 une fois qu'on divise par $d\eta$.

Question 14

On a donc $\omega(\eta, \theta, \tau) = F(\eta, \theta) cos(\omega\tau)$. On commence par remplacer $\omega(\eta, \theta, \tau)$ dans l'EDP.

$$-F(\eta, \theta)\omega^2 cos(\omega\tau) = \frac{\partial^2 F(\eta, \theta)}{\partial \eta^2} cos(\omega\tau) + \frac{1}{\eta^2} \frac{\partial^2 F(\eta, \theta)}{\partial \theta^2} cos(\omega\tau) + \frac{1}{\eta} \frac{\partial F(\eta, \theta)}{\partial \eta} cos(\omega\tau)$$

En simplifiant on a :

$$-\omega^2 F(\eta, \theta) = \frac{\partial^2 F(\eta, \theta)}{\partial \eta^2} + \frac{1}{\eta^2} \frac{\partial^2 F(\eta, \theta)}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial F(\eta, \theta)}{\partial \eta}$$

On injecte alors dans l'équation $F(\eta, \theta) = \sum_n F_n(\eta) cos(n\theta)$ et on divise par $cos(n\theta)$

$$-\omega^2 \sum_n F_n(\eta) = \sum_n \frac{d^2 F_n(\eta)}{d\eta^2} - \frac{n^2}{\eta^2} \sum_n F_n(\eta) + \frac{1}{\eta} \frac{dF_n(\eta)}{d\eta}$$

En divisant par ω^2 on obtient,

$$\sum_n F_n(\eta) \frac{d^2 F_n(\eta)}{d\eta^2 \omega^2} - \frac{n^2}{\omega^2 \eta^2} F_n(\eta) + \frac{1}{\omega\eta} \frac{dF_n(\eta)}{d\eta\omega} = 0$$

On obtient bien l'équation de Bessel suivante :

$$\sum_n \frac{d^2 F_n}{d\alpha^2} + \frac{1}{\omega\eta} \frac{dF_n}{d\alpha} + (1 - \frac{n^2}{\alpha^2}) F_n = 0$$

Question 15

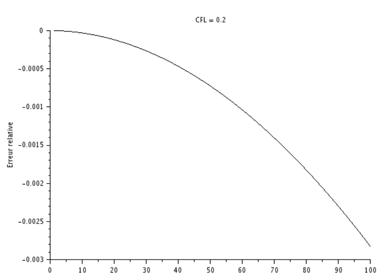
Se référer au fichier `animation15.gif`.

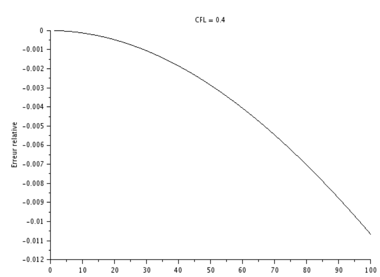
Question 16

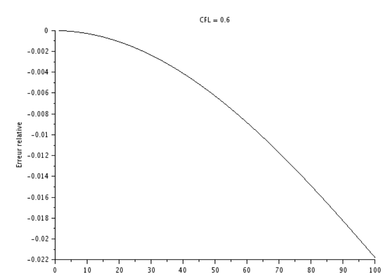
L'animation de la solution exacte est dans le fichier `animation16.gif`.

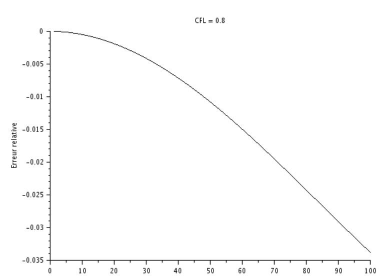
Les erreurs relatives ont été calculées selon la formule :

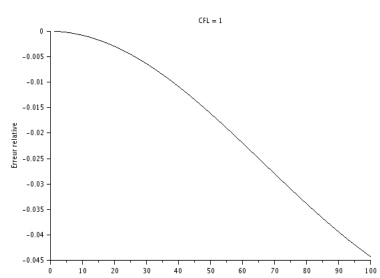
$$\frac{w_{num} - w_{ex}}{|w_{ex}|}$$





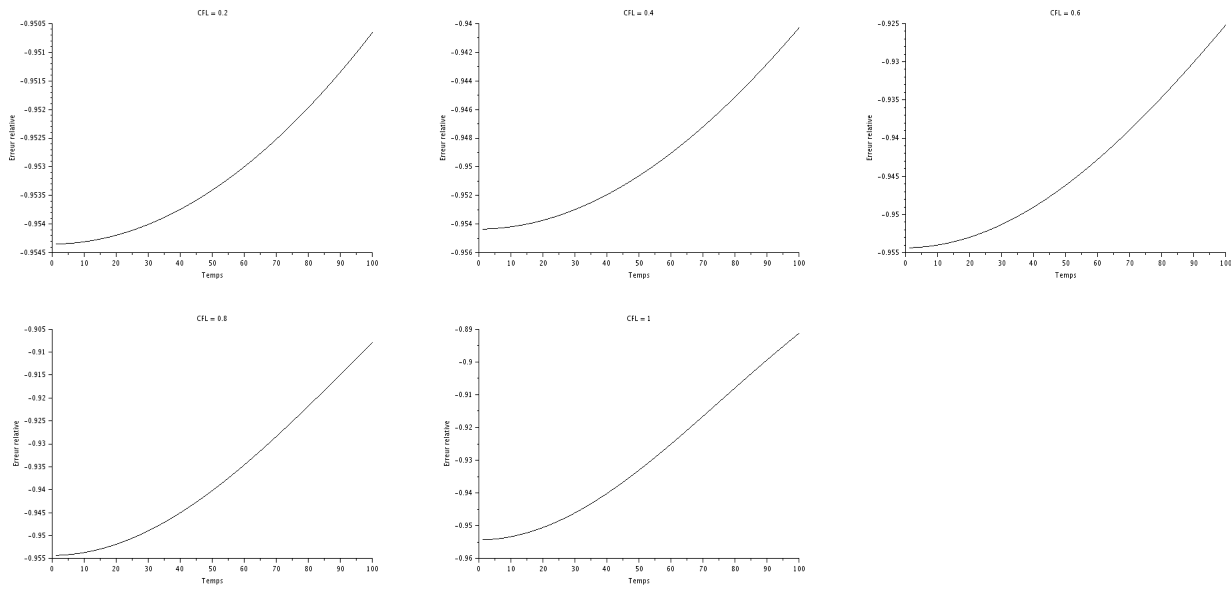






L'erreur relative décroit avec le CFL, ce qui coïncide avec le fait que le schéma est consistant en temps.

Question 17



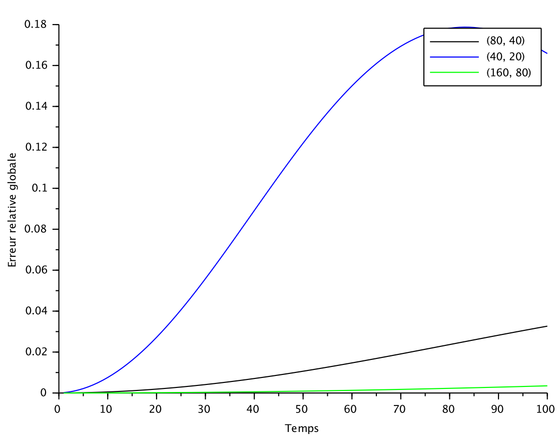
La valeur du CFL n'influe pas sur l'erreur relative, laquelle augmente : le schéma n'est pas stable.

Question 18

Dans la question 16, l'erreur dépendait uniquement de η et τ et elle décroissait avec le CFL. En 17, où on introduit un terme en θ, on remarque que l'erreur ne diminue pas.

On en déduit que l'instabilité provient du terme en θ, même si le changement de formule peut également avoir une influence.

Question 19



On lit sur le schéma que lorsque N_θ et N_η sont multipliés par deux, l'erreur l'est par quatre. Quand ils sont multipliés par quatre, l'erreur l'est par seize.

Il aurait été judicieux de tracer le rapport des erreurs relatives pour deux grilles.

Question 20

La simulation donne des résultats étranges, différents de l'animation fournie.