

# Fundamentos de Organización de Datos

Clase 6

# Agenda

## Arboles

- Binarios
- AVL
- Multicamino
- Balanceados

## Arboles Balanceados

- Características
- B, B\*, B+
- Operaciones
- Prefijos simples

# Arboles → introducción

## Problemas con los índices?

- La búsqueda binaria aun es costosa
- Mantener los índices ordenados es costoso
- Solución → RAM
- Objetivo → persistencia de datos

## Árboles

- Estructuras de datos que permiten localizar en forma más rápida información de un archivo, tienen intrínsecamente búsqueda binaria

# Arboles binarios

## Que es un árbol binario?

- Estructuras de datos donde cada nodo tiene dos sucesores, a izquierda y a derecha

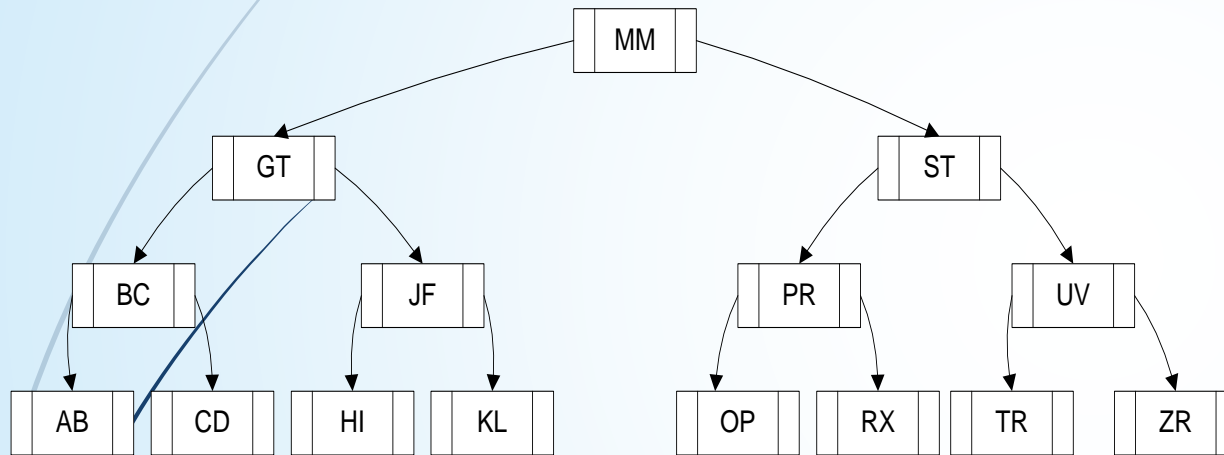
## Un árbol binario, puede implantarse en disco?

- Como lograr la persistencia?

## Ejemplo → supongamos estas claves

- MM ST GT PR JF BC UV CD HI AB KL TR OP RX ZR

# Arboles binarios



Raíz → 0

	Clave	Hijo izq	Hijo Der
0	MM	1	2
1	GT	3	4
2	ST	8	11
3	BC	5	6
4	JF	7	14
5	AB	-1	-1
6	CD	-1	-1
7	HI	-1	-1

	Clave	Hijo izq	Hijo Der
8	PR	9	10
9	OP	-1	-1
10	RX	-1	-1
11	UV	12	13
12	TR	-1	-1
13	ZR	-1	-1
14	KL	-1	-1

# Construccion de un arbol binario

```
Type arbol = record;
```

```
    elemento: tipodedato;
```

```
    hijo_izq, hijo_derecha: ^arbol;
```

```
End
```

```
Type arbol = record
```

```
    elemento: tipodedato;
```

```
    hijo_izq, hijo_derecha: integer;
```

```
End
```

```
indice: file of arbol;
```

# Construccion de un arbol binario

Al principio

elemento	H Izq	H Derecha
----------	-------	-----------

Llega el primer elemento MM

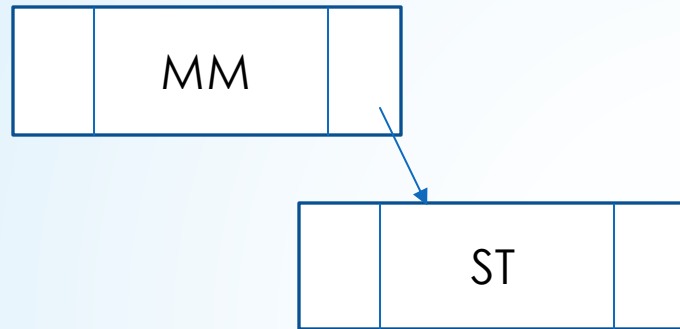
	MM	
--	----	--

Raiz --> 0

	elemento	H Izq	H Derecha
0	MM	-1	-1

# Construccion de un arbol binario

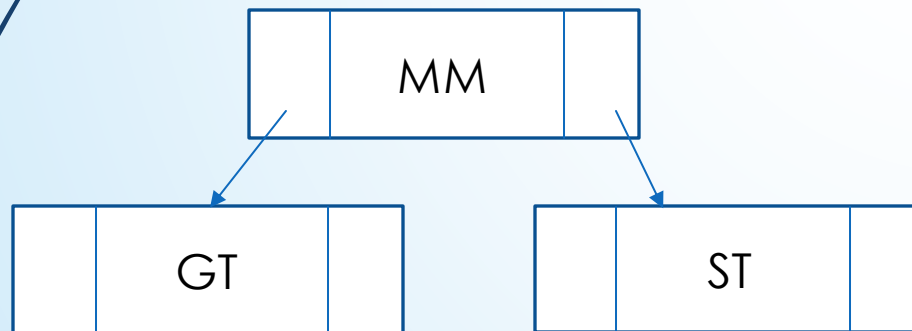
Llega el elemento ST



Raiz --> 0

	elemento	H Izq	H Derecha
0	MM	-1	-1 1
1	ST	-1	-1

Llega el elemento GT



Raiz --> 0

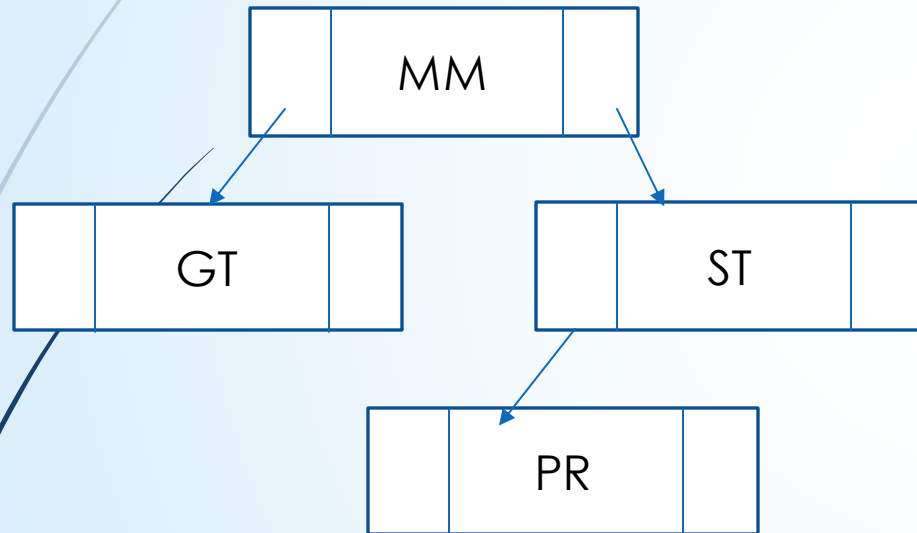
	elemento	H Izq	H Derecha
0	MM	-1 2	1
1	ST	-1	-1
2	GT	-1	-1



# Construccion de un arbol binario

Llega el elemento PR

Raiz --> 0

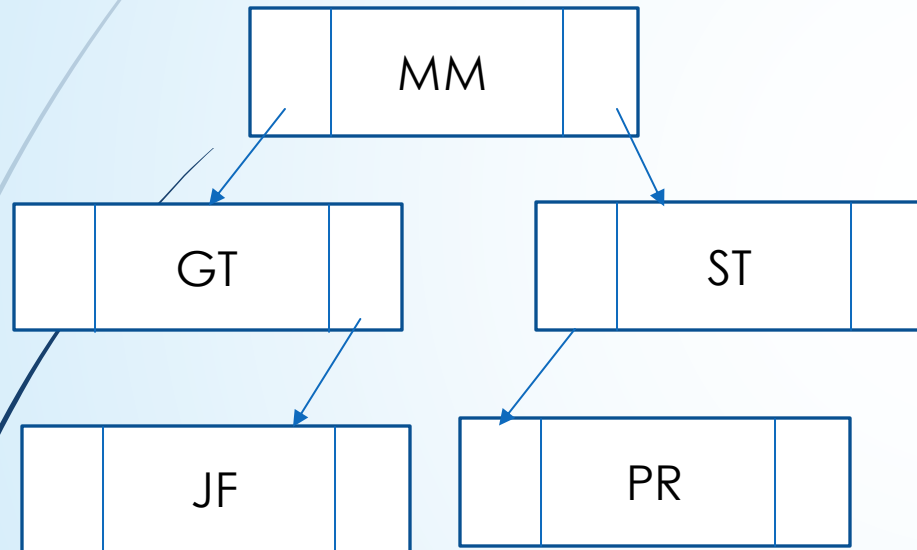


	elemento	H Izq	H Derecha
0	MM	2	1
1	ST	-1 3	-1
2	GT	-1	-1
3	PR	-1	-1

# Construccion de un arbol binario

Llega el elemento JF

Raiz --> 0

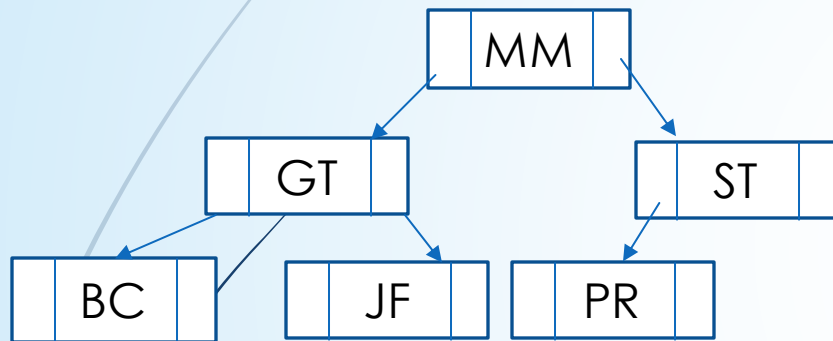


	elemento	H Izq	H Derecha
0	MM	2	1
1	ST	3	-1
2	GT	-1	-1 4
3	PR	-1	-1
4	JF	-1	-1

# Construccion de un arbol binario

Llega el elemento BC

Raiz --> 0

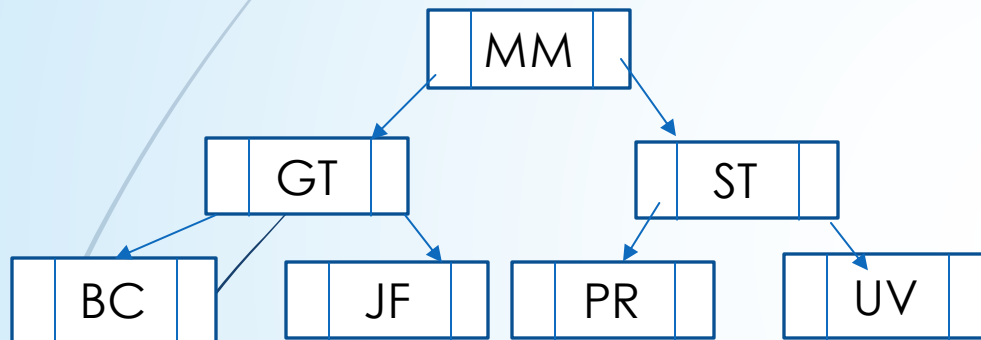


	elemento	H Izq	H Derecha
0	MM	2	1
1	ST	3	-1
2	GT	-1 5	4
3	PR	-1	-1
4	JF	-1	-1
5	BC	-1	-1

# Construccion de un arbol binario

Llega el elemento UV

Raiz --> 0

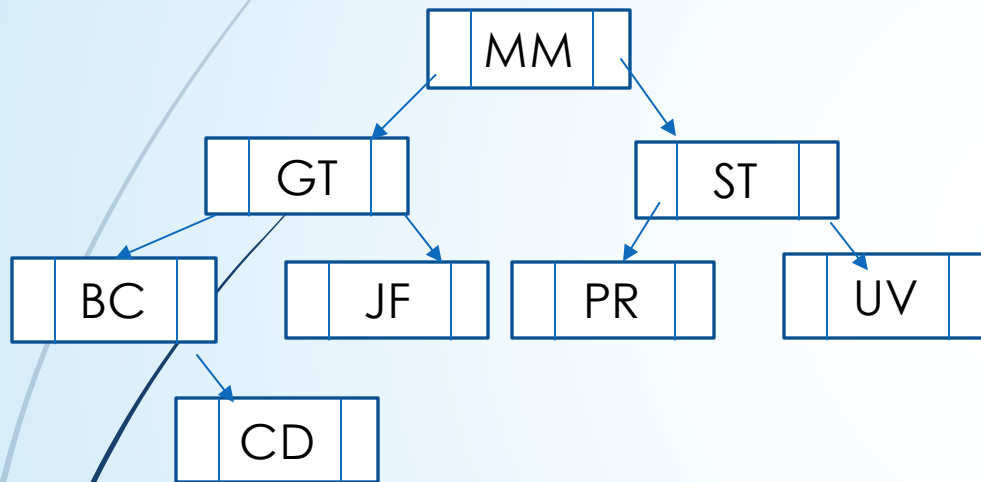


	elemento	H Izq	H Derecha
0	MM	2	1
1	ST	3	-1 6
2	GT	5	4
3	PR	-1	-1
4	JF	-1	-1
5	BC	-1	-1
6	UV	-1	-1

# Construccion de un arbol binario

Llega el elemento CD

Raiz --> 0

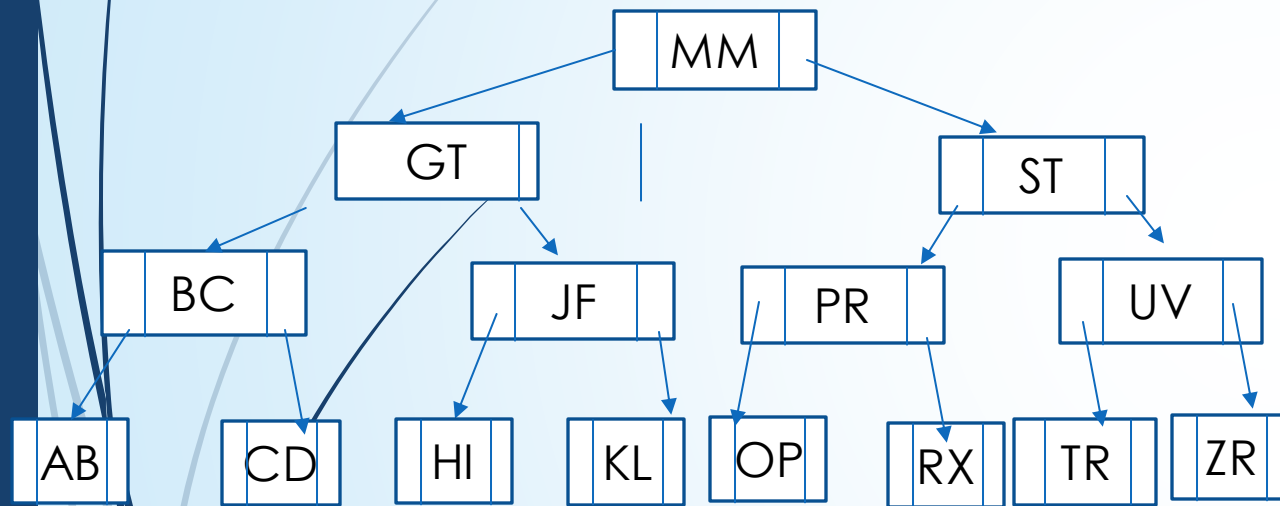


	elemento	H Izq	H Derecha
0	MM	2	1
1	ST	3	6
2	GT	5	4
3	PR	-1	-1
4	JF	-1	-1
5	BC	-1	-1 7
6	UV	-1	-1
7	CD	-1	-1

# Construccion de un arbol binario

Llega el elemento HI AB KL TR OP RX ZR

Raiz --> 0



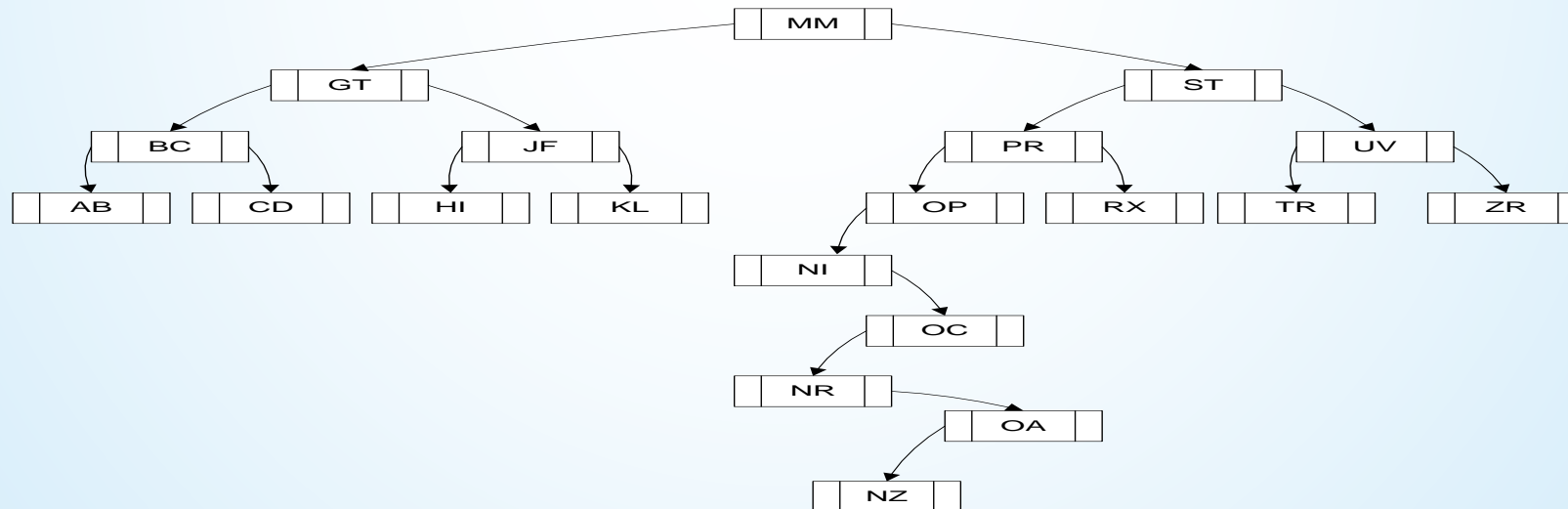
	elemento	H Izq	H Derecha
0	MM	2	1
1	ST	3	6
2	GT	5	4
3	PR	-1 12	-1 13
4	JF	-1 8	-1 10
5	BC	-1 9	7
6	UV	-1 11	-1 14
7	CD	-1	-1
8	HI	-1	-1
9	AB	-1	-1
10	KL	-1	-1
11	TR	-1	-1
12	OP	-1	-1

# Arboles binarios

Árbol balanceado: un árbol está balanceado cuando la altura de la trayectoria más corta hacia una hoja no difiere de la altura de la trayectoria más grande.

Inconveniente de los binarios: se **desbalancean** fácilmente.

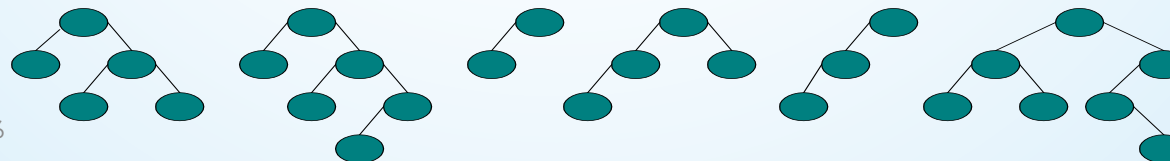
Supongamos que llegan las claves : NI OC NR OA NZ



# Árboles AVL

## Árboles AVL

- Árbol binario balanceado en altura (BA(1)) en el que las inserciones y eliminaciones se efectúan con un mínimo de accesos.
- Árbol balanceado en altura:
  - Para cada nodo existe un límite en la diferencia que se permite entre las alturas de cualquiera de los subárboles del nodo (BA(k)), donde k es el nivel de balance)
  - Ejemplos:





# Arboles AVL y Binarios

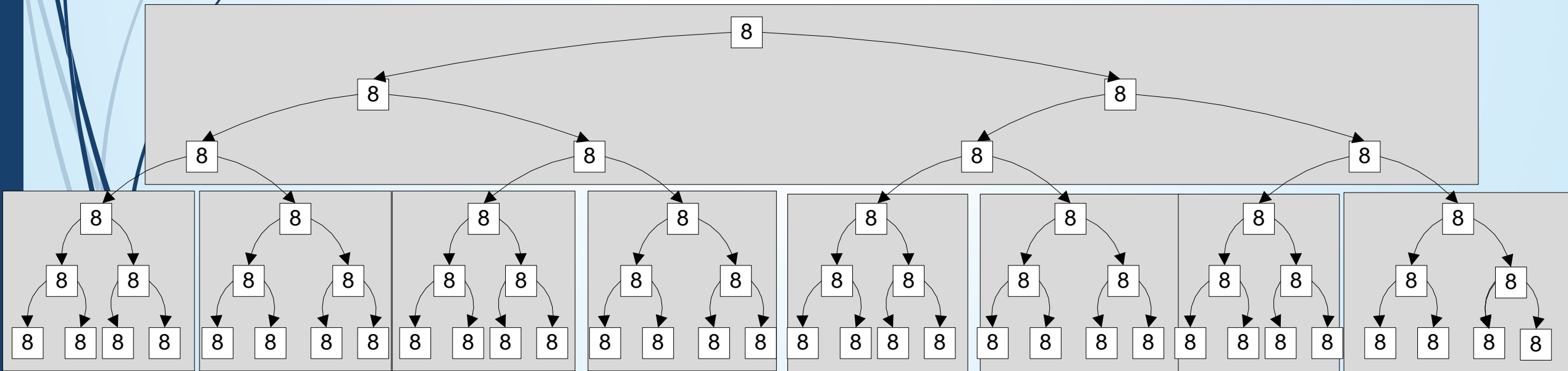
## Características/Conclusiones

- Estructura que debe ser respetada
- Mantener árbol, rotaciones restringidas a un área local del árbol
  - Binario: → Búsqueda:  $\log_2(N+1)$
  - AVL: → Búsqueda:  $1.44 \log_2(N+2)$
  - Ambas performance por el peor caso posible

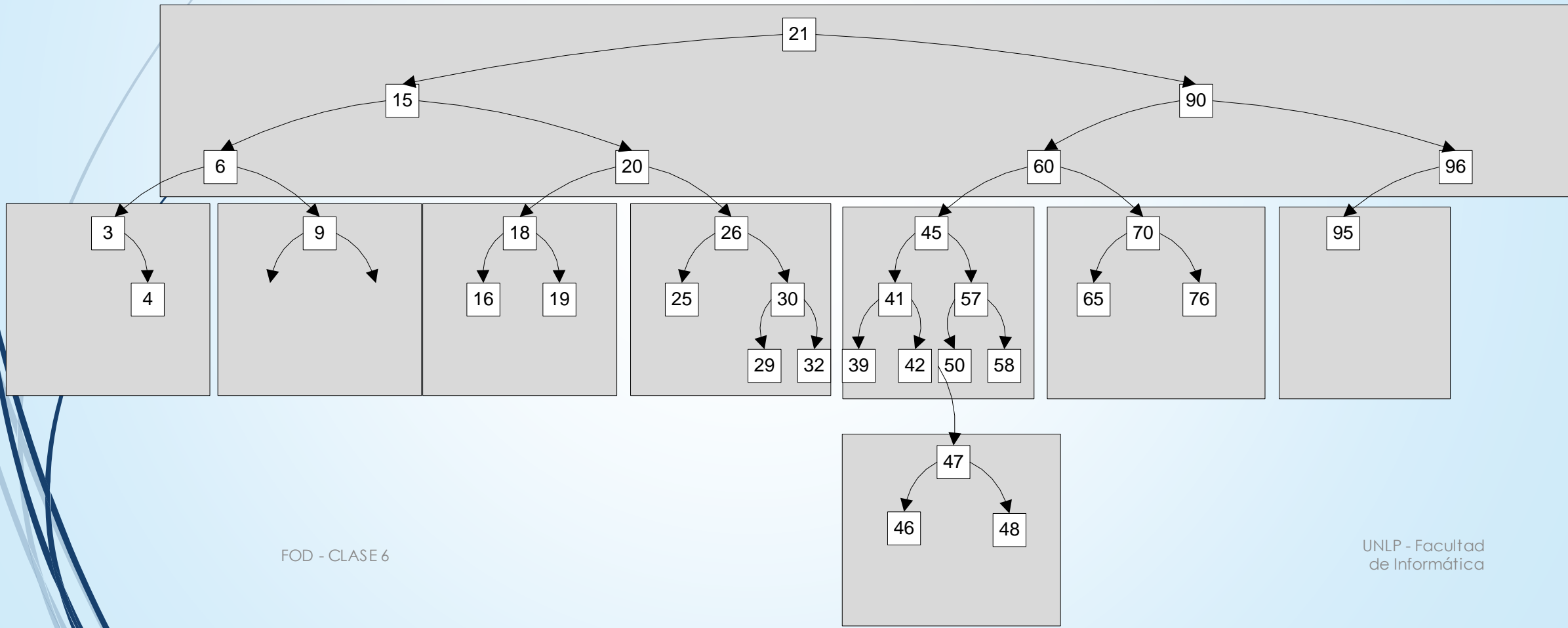
# Árboles Binarios Paginados

## Árboles binarios paginados

- Problemas de almacenamiento secundario, buffering, páginas de memoria, varios registros individuales, minimiza el número de accesos
- Problema: construcción descendente, como se elige la raíz?, cómo va construyendo balanceado?



# Árboles Binarios Paginados

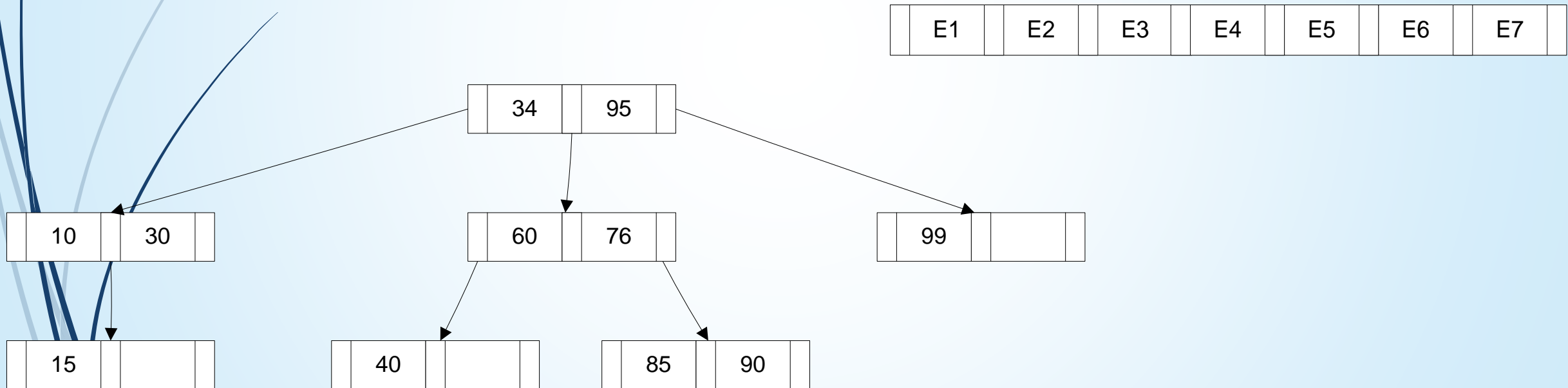


# Árboles multcamino



Generalización de árboles binarios, c/nodo tiene  $k$  punteros y  $k-1$  claves (o registros), disminuye la profundidad del árbol,

- Orden del árbol.



# Arboles balanceados

Son árboles multicamino con una construcción especial en forma ascendente que permite mantenerlo balanceado a bajo costo.

Propiedades de un árbol B de orden  $M$ :

- Ningún nodo tiene más de  $M$  hijos
- C/nodo (menos raíz y los terminales) tienen como mínimo  $\lceil M/2 \rceil$  hijos
- La raíz tiene como mínimo 2 hijos (o sino ninguno)
- Todos los nodos terminales a igual nivel
- Nodos no terminales con  $K$  hijos contienen  $K-1$  registros. Los nodos terminales tienen:
  - Mínimo  $\lceil M/2 \rceil - 1$  registros
  - Máximo  $M - 1$  registros

PO	R1	P1	R2	P2	R3	P3	R4	P4	R5	P5	Nro de registros
----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	------------------

# Arbol balanceado

## ► Estructura

Type arbolb = record;

    claves: array[ 1.. N ] of tipodeclave;

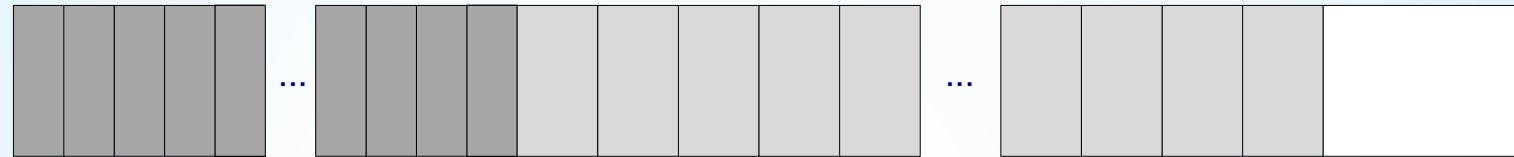
    punteros: array [0.. N] of integer;

    Cantelementos: integer;

End;

# Arboles Balanceados

## Formato del nodo

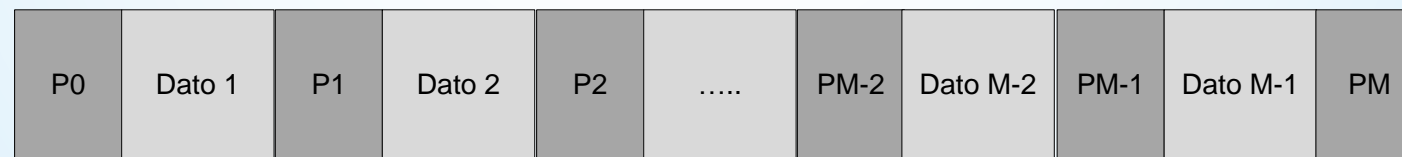


Hijos (M celdas)

Datos ( M -1 celdas)

Nro de Registros

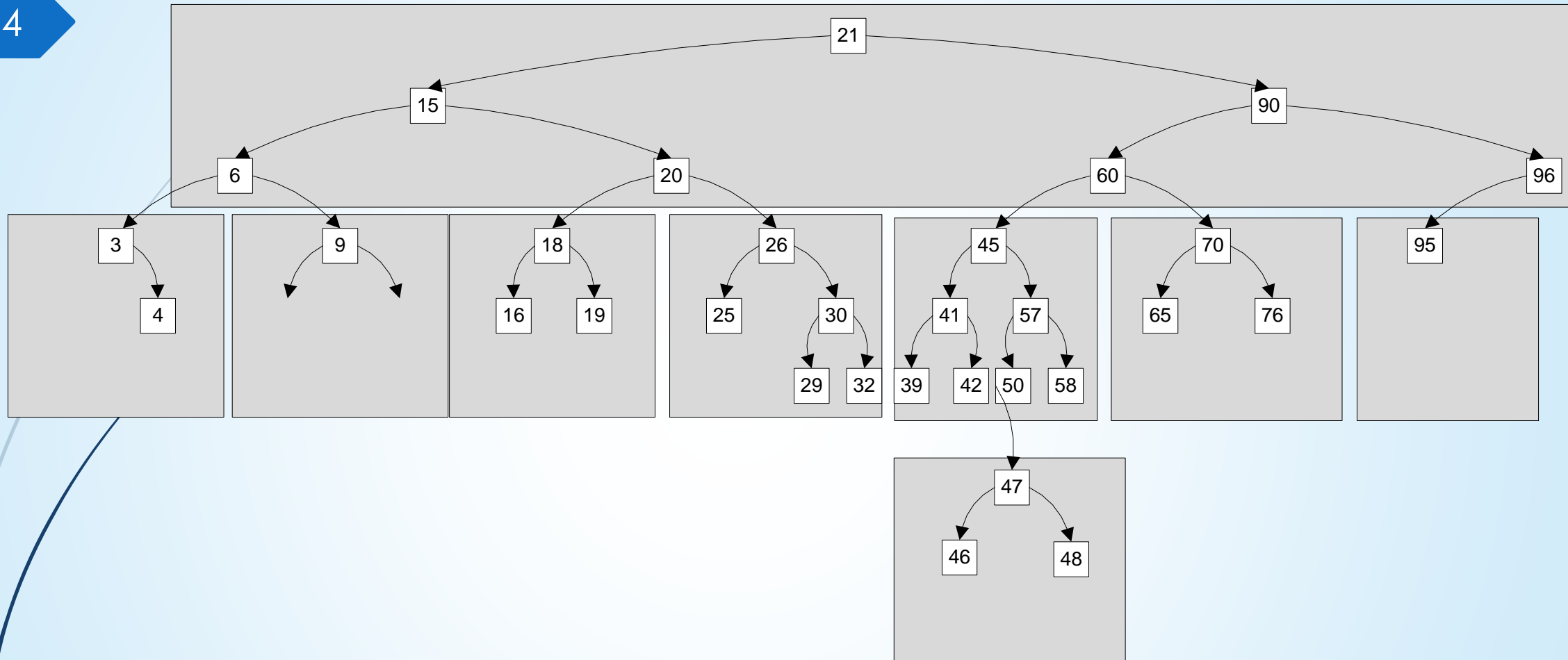
## Formato del Nodo para archivo del índice arbol b



## Formato Gráfico del Nodo del índice arbol B

# Árboles Binarios Paginados

24



6	15	20	21	60	90	96
---	----	----	----	----	----	----



# Arboles balanceados

## Creacion:

- Dadas las claves: 43 2 53 88 75 80  
15 49 60 20 57 24
- Como se construye el árbol?
- Como se genera el archivo de datos que persiste el árbol?

# Arboles Balanceados

	Nodo Raiz: 7							
	Punteros				Datos			Nro Datos
0	-1	-1	-1		2	15		2
1	-1	-1	-1	-1	57	60	75	3
2	0	5	3		20	43		2
3	-1	-1			49			1
4	-1	-1			88			1
5	-1	-1			24			1
6	1	4			80			1
7	2	6			53			1

**HEA!** Herramienta de Software para enseñanza de árboles B

Tipo de Árbol

Orden

Nº a insertar

Nº a eliminar

Nº a buscar

ARBOL B

4

CREAR

+

24

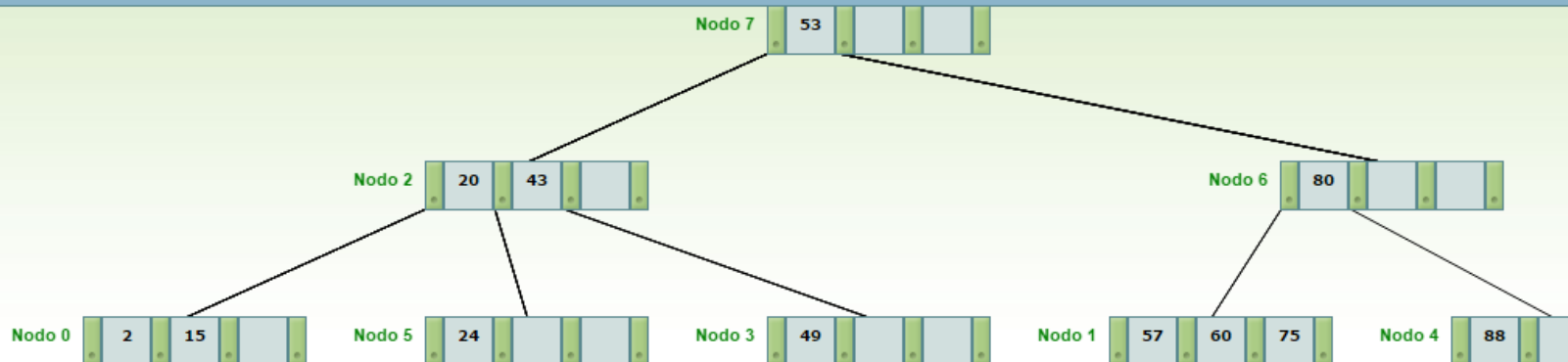
>>

-

>>

BUSCAR

LIMPIAR



# Arbol Balanceado

Raiz = ??								
	punteros				clave (datos)			#reg
Nodo 0								

Llega el elemento 43

43			
----	--	--	--

Nodo 0

2	43		
---	----	--	--

Nodo 0

FOD - CLASE 6

Raiz = 0								
	punteros				clave (datos)			#reg
Nodo 0	-1	-1			43			1

Llega el elemento 2

Raiz = 0								
	punteros				clave (datos)			#reg
Nodo 0	-1	-1	-1		2	43		2

# Arbol Balanceado

28



Nodo 0



Nodo 0 esta lleno

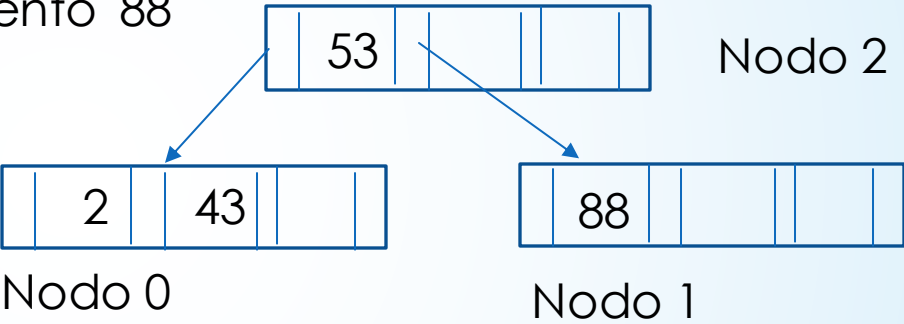
Llega el elemento 53

Raiz = 0								
	punteros				clave (datos)			#reg
Nodo 0	-1	-1	-1	-1	2	43	53	3

Llega el elemento 88



Se divide en 2



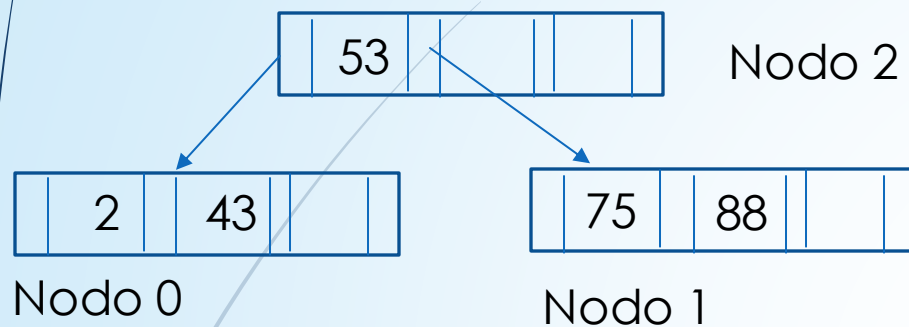
2 43 53 88

Raiz = 2								
	punteros				clave (datos)			#reg
Nodo 0	-1	-1	-1		2	43		2
Nodo 1	-1	-1			88			1
Nodo 2	0	1			53			1

# Arbol Balanceado

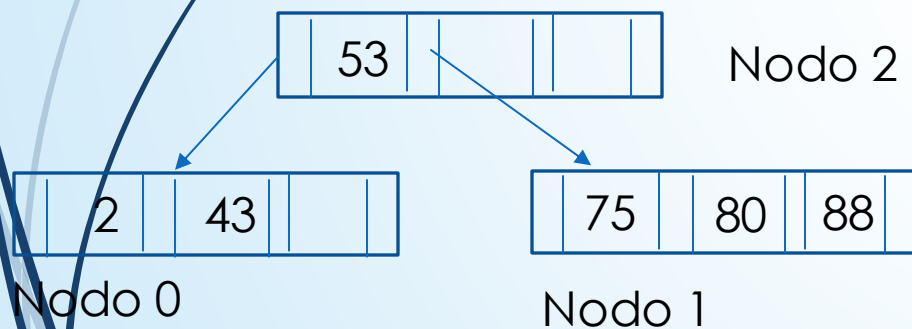
29

Llega el elemento 75



Raiz = 2								
	punteros				clave (datos)			#reg
Nodo 0	-1	-1	-1		2	43		2
Nodo 1	-1	-1	-1		75	88		2
Nodo 2	0	1			53			1

Llega el elemento 80

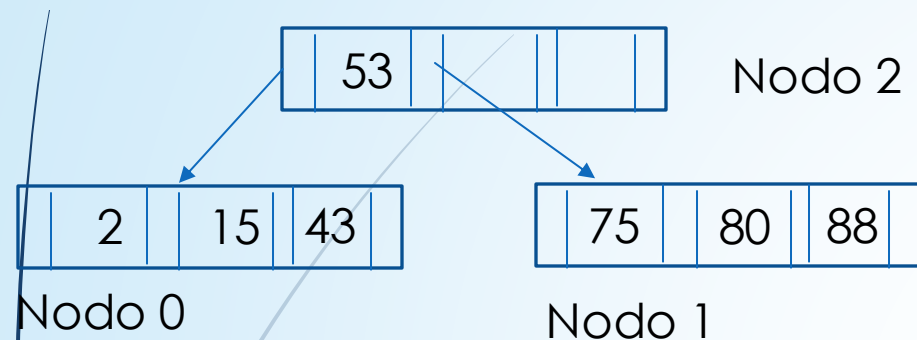


Raiz = 2								
	punteros				clave (datos)			#reg
Nodo 0	-1	-1	-1		2	43		2
Nodo 1	-1	-1	-1	-1	75	80	88	3
Nodo 2	0	1			53			1

# Arbol Balanceado

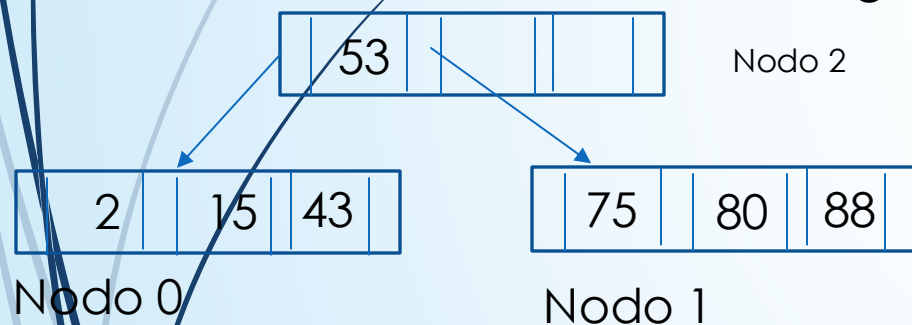
30

Llega el elemento 15

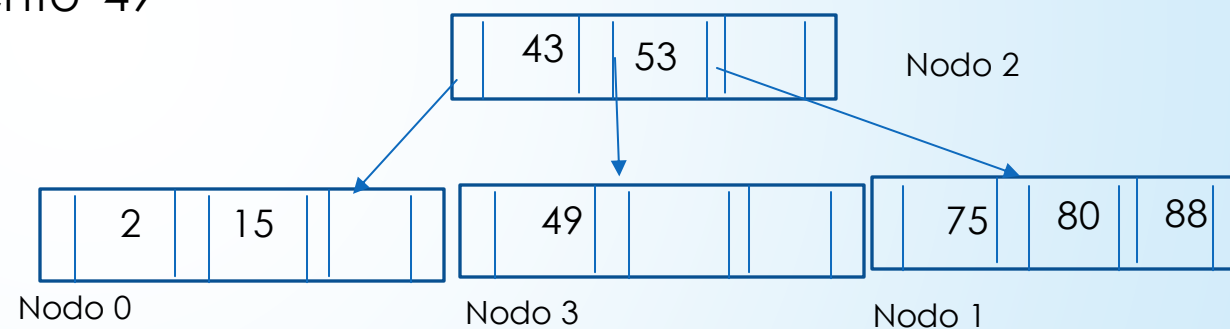


Raiz = 2								
	punteros				clave (datos)			#reg
Nodo 0	-1	-1	-1	-1	2	15	43	3
Nodo 1	-1	-1	-1	-1	75	80	88	3
Nodo 2	0	1			53			1

Llega el elemento 49



Se divide el nodo 0



Raiz = 2

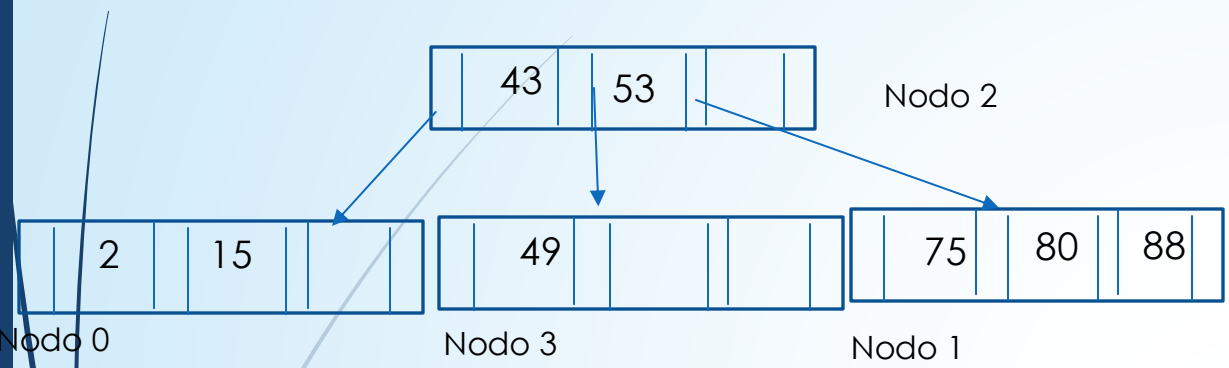
	punteros				clave (datos)			#reg
Nodo 0	-1	-1	-1		2	15		2
Nodo 1	-1	-1	-1	-1	75	80	88	3
Nodo 2	0	3	1		43	53		2
Nodo 3	-1	-1			49			1

2 15 43 49

# Arbol Balanceado

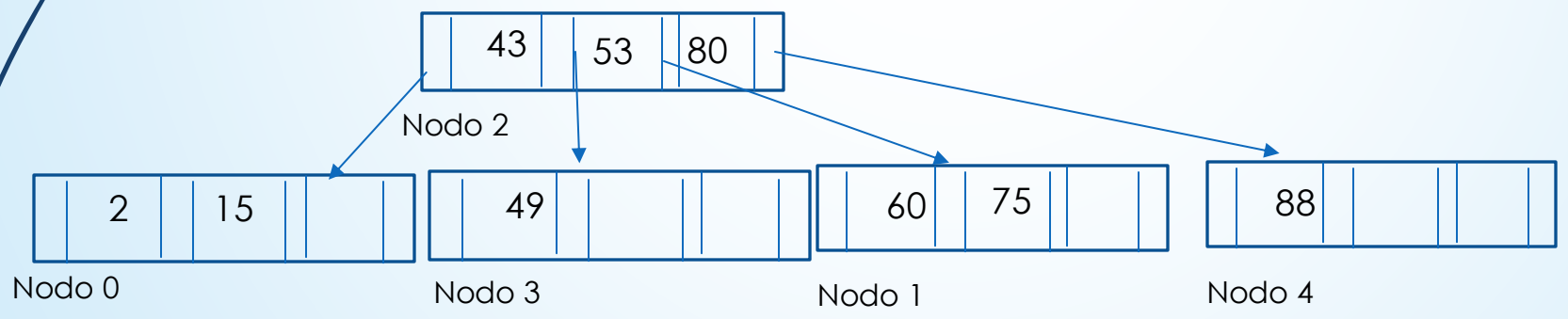
31

Llega el elemento 60



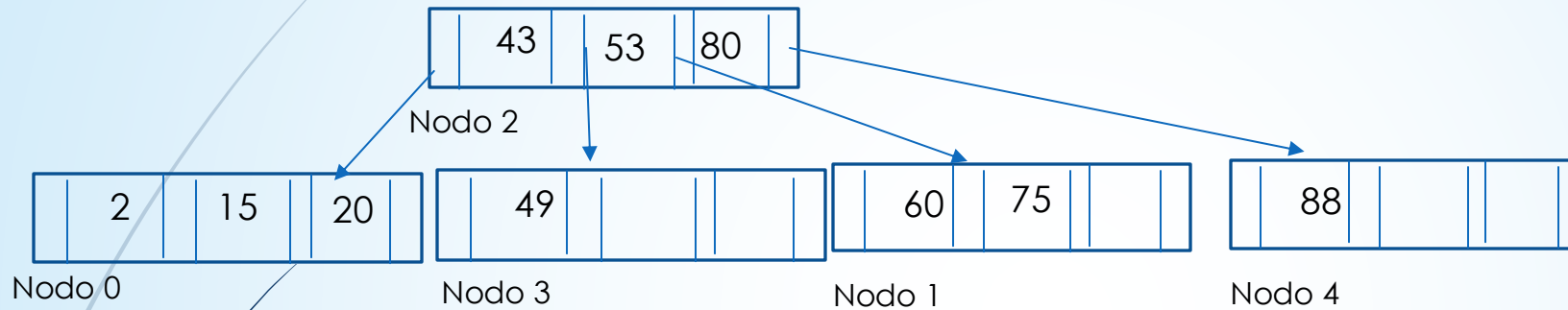
Raiz = 2								
	punteros				clave e (datos)			#reg
Nodo 0	-1	-1	-1		2	15		2
Nodo 1	-1	-1	-1		60	75		2
Nodo 2	0	3	1	4	43	53	80	3
Nodo 3	-1	-1			49			1
Nodo 4	-1	-1			88			1

60 75 80 88



## 32

32

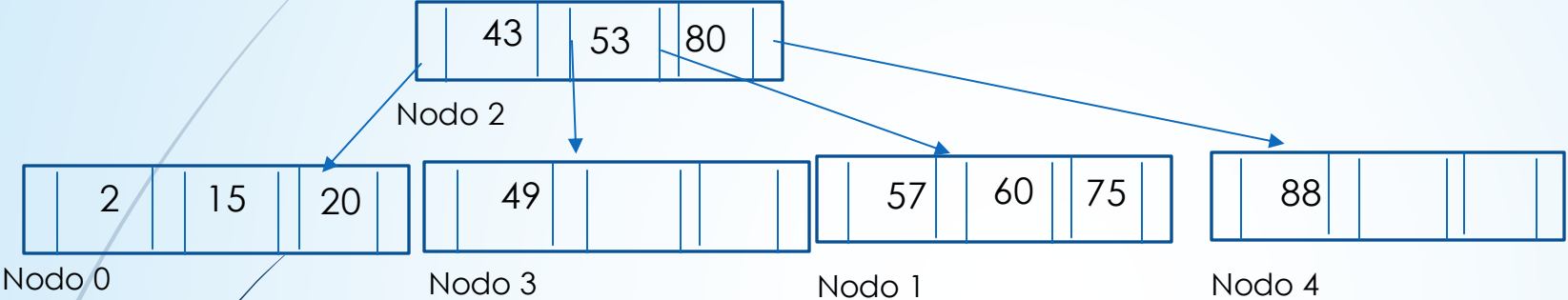


Raiz = 2								
	punteros				clave (datos)			#reg
Nodo 0	-1	-1	-1	-1	2	15	20	3
Nodo 1	-1	-1	-1		60	75		2
Nodo 2	0	3	1	4	43	53	80	3
Nodo 3	-1	-1			49			1
Nodo 4	-1	-1			88			1



# Arbol Balanceado

Llega el elemento 57

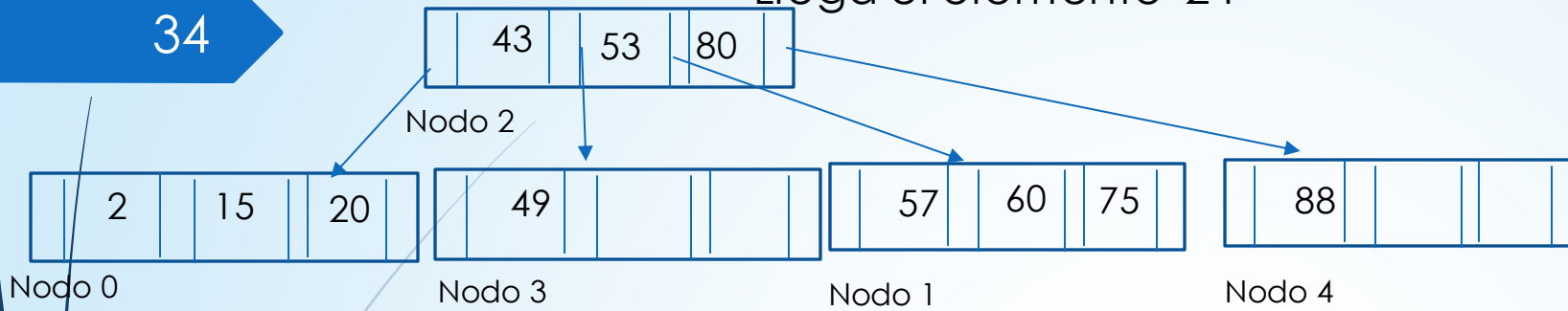


Raiz = 2								
	punteros				clave (datos)			#reg
Nodo 0	-1	-1	-1	-1	2	15	20	3
Nodo 1	-1	-1	-1	-1	57	60	75	3
Nodo 2	0	3	1	4	43	53	80	3
Nodo 3	-1	-1			49			1
Nodo 4	-1	-1			88			1

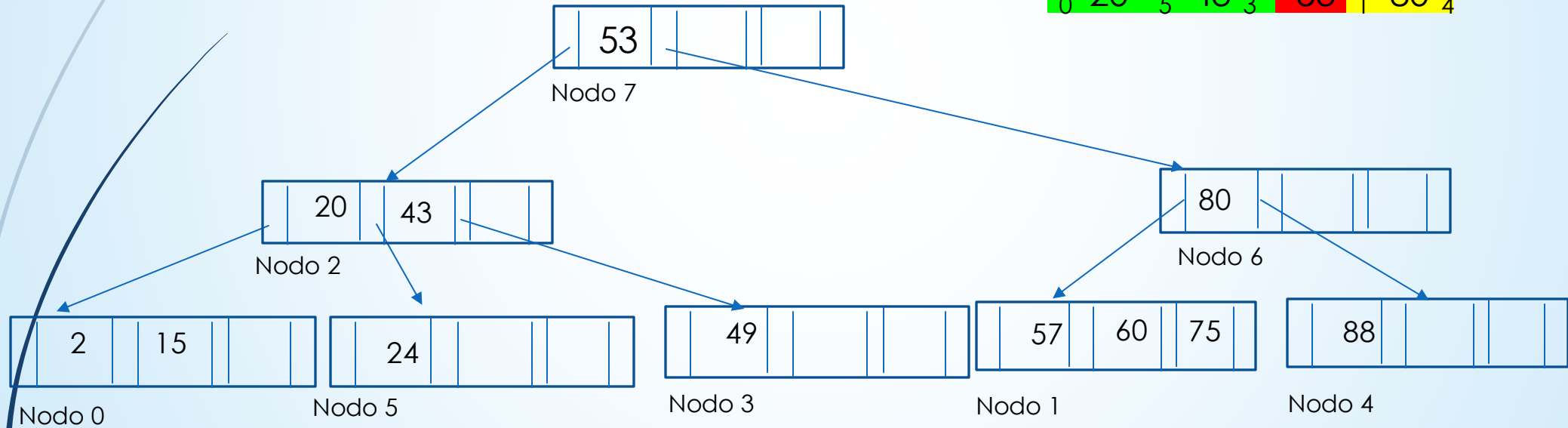
# Arbol Balanceado

Llega el elemento 24

34



0 20 5 43 3 53 1 80 4



2 15 20 24

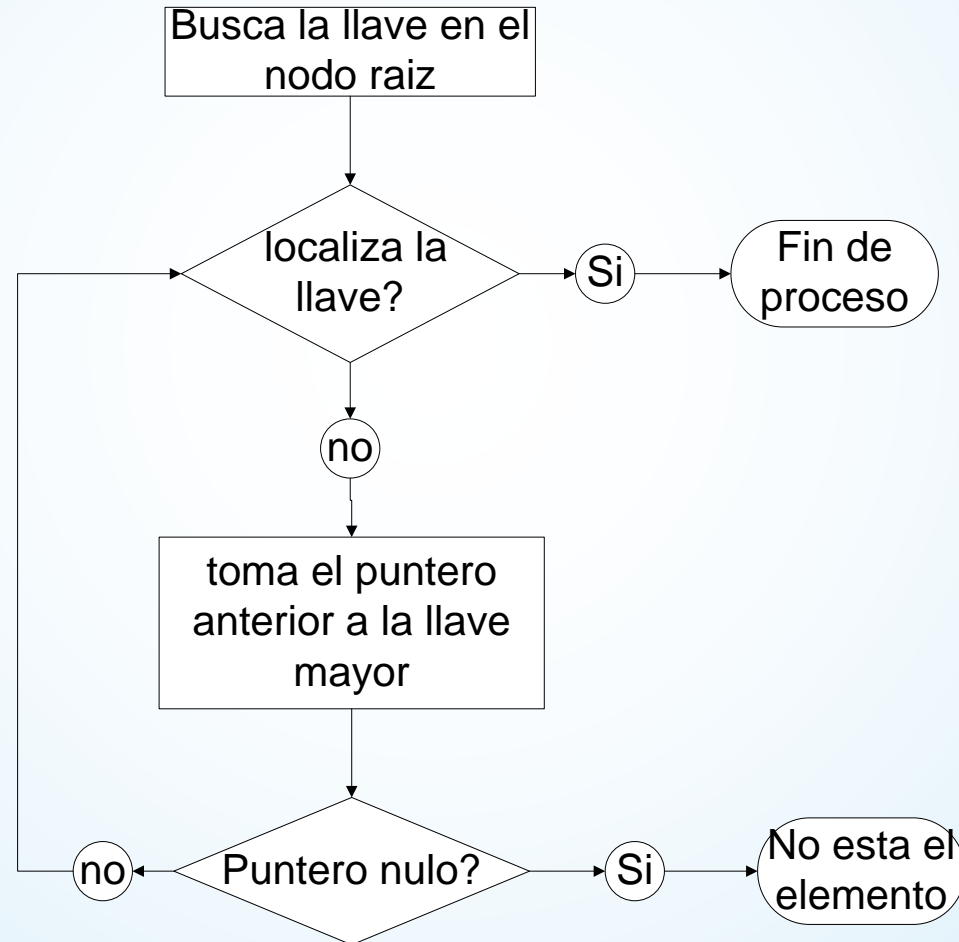
# Arbol Balanceado

35

Raiz = 7								
	punteros				clave (datos)			#reg
Nodo 0	-1	-1	-1		2	15		2
Nodo 1	-1	-1	-1	-1	57	60	75	3
Nodo 2	0	5	3		20	43		2
Nodo 3	-1	-1			49			1
Nodo 4	-1	-1			88			1
Nodo 5	-1	-1			24			1
Nodo 6	1	4			80			1
Nodo 7	2	6			53			1

# Árboles Balanceados

- Búsqueda de información:



# Arboles Balanceados

## Performance de búsqueda

- Mejor caso: 1 lectura
- Pero caso:  $h$  lecturas (con  $h$  altura del árbol)
- Cual es el valor de  $h$ ?
  - Axioma: árbol balanceado de Orden  $M$ , si el número de elementos del árbol es  $N \rightarrow$  hay  $N+1$  punteros nulos en nodos terminales.

# Árboles Balanceados

Cota  
para  
h

Nivel	# mínimo de descendientes
1	2
2	$2 * [M/2]$
3	$2 * [M/2] * [M/2]$
.....	
h	$2 * [M/2]^{h-1}$

**Relación entre h y # de nodos**

$$N+1 \geq 2 * [M/2]^{h-1}$$

$$h \leq [ 1 + \log_{[M/2]} ((N+1)/2) ]$$

Si  $M = 512$  y  $N = 1000000 \rightarrow h \leq 3.37$  (4 lecturas encuentra un registro)

# Arbol balanceado

- La raíz tiene como minimo 2 descendientes



- El nodo verde tiene como minimo  $\lceil M/2 \rceil$  lo mismo el amarillo
  - Por ende luego del nivel 2 hay  $\rightarrow 2 * \lceil M/2 \rceil$  hijos posibles
- Luego cada nodo del nivel tres tendra como minimo  $\lceil M/2 \rceil$  hijos
  - En el nivel 3 hay  $2 * \lceil M/2 \rceil$  nodos
  - Por ende luego del nivel 3 hay  $2 * \lceil M/2 \rceil * \lceil M/2 \rceil$  hijos
- Esto se repite hasta el nivel h
  - En el nivel h hay  $2 * \lceil M/2 \rceil * \dots * \lceil M/2 \rceil$  punteros nulos (hijos) y eso es  $2 * \lceil M/2 \rceil^{h-1}$

# Árboles Balanceados

## Performance de la inserción

- Mejor caso (sin overflow)
  - $H$  lecturas
  - 1 escritura
- Peor caso (overflow hasta la raíz, aumenta en uno el nivel del árbol)
  - $H$  lecturas
  - $2h+1$  escrituras (dos por nivel más la raíz)
- Estudios realizados
  - $M = 10$     25% divisiones
  - $M = 100$     2% divisiones



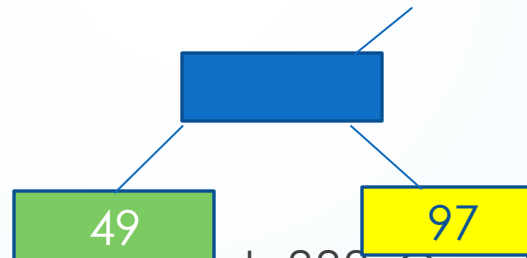
# Árboles Balanceados

## Eliminación

- Siempre eliminar de nodos terminales (trabajamos con árboles)
- Si se va a eliminar un elemento que no está en nodo terminal → llevarlo primero a nodo terminal
- Posibilidades ante eliminación
  - Mejor caso: borra un elemento del nodo y no produce underflow, solo reacomoda ( # elementos  $\geq [M/2]-1$ )
  - Peor caso: se produce underflow, #elementos  $< [M/2] - 1$
- Dos soluciones
  - Redistribuir
  - concatenar

# Arboles balanceados

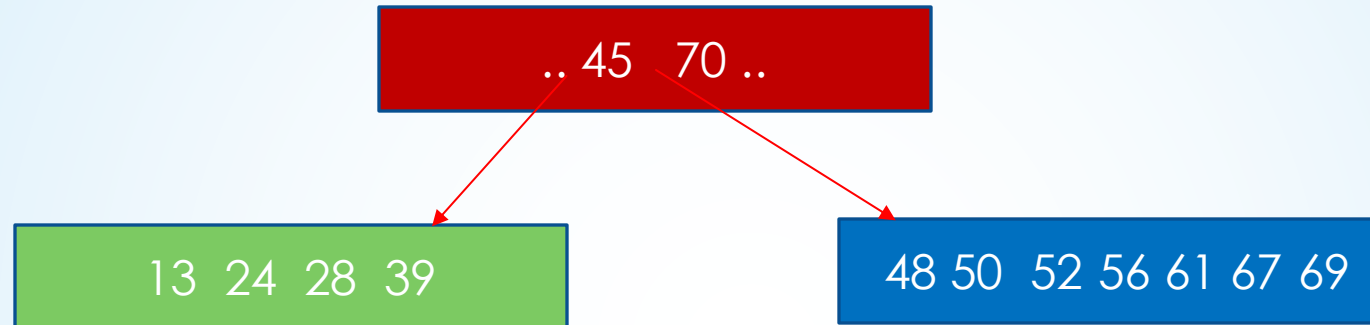
- Definición: nodo adyacente hermano
  - Dos nodos son adyacentes hermanos si tienen el mismo padre y son apuntados por punteros adyacentes en el padre.
- Supongamos el siguiente caso orden del arbol 100, minima cantidad de elementos en un terminal 49



- Que pasa si borramos del verde??? Quedan 48 → underflow
  - Lo opuesto del overflow
  - Juntar con el amarillo → imposible  $48 + 97 + \text{elemento del padre} = 146$

# Arboles balanceados

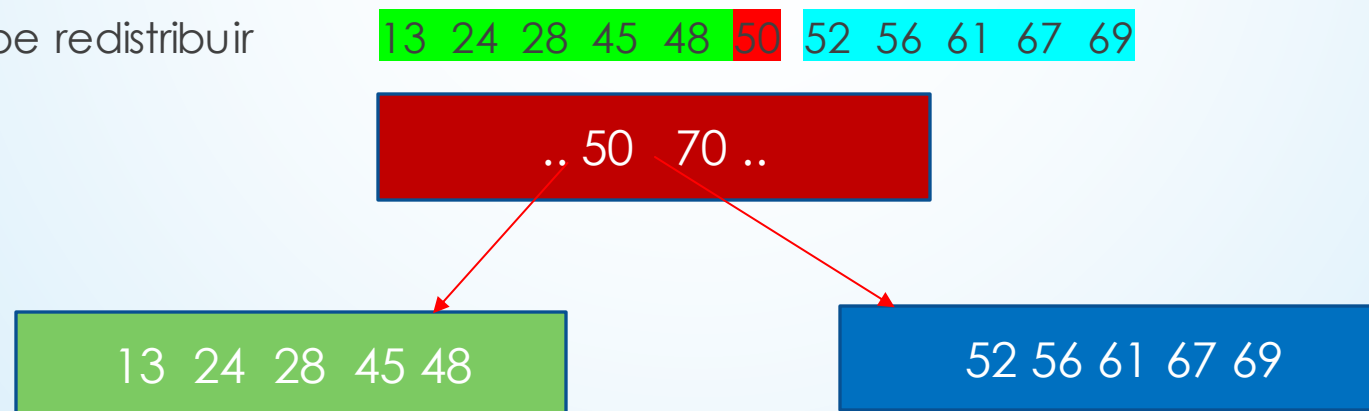
- No siempre se puede concatenar en caso de un underflow. Ej: arbol de orden 10:



- Se borra el elemento 39 → nodo verde entra en underflow

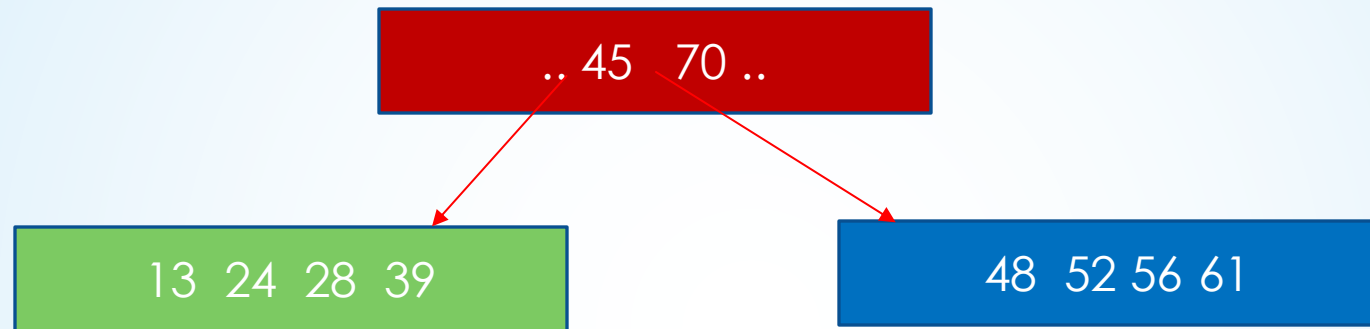
- No se puede concatenar

- Se debe redistribuir



# Arboles balanceados

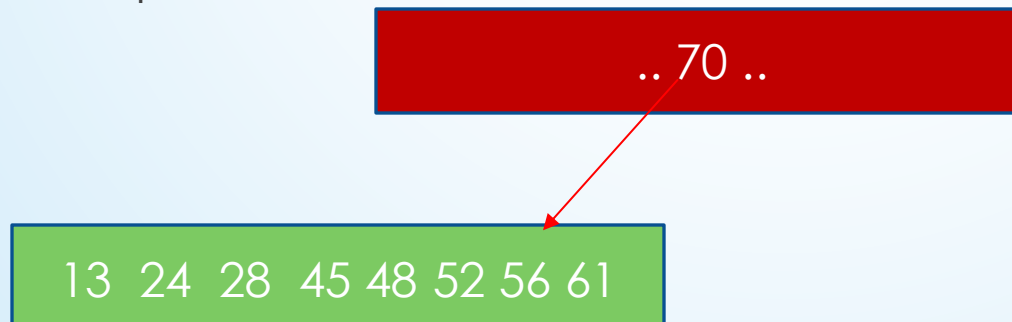
- Suponga ahora que el caso es el siguiente (orden del arbol 10)



- Quiero borrar 39 → en este caso es imposible redistribuir

13 24 28 45 48 52 56 61 entra en underflow el nodo azul

- La unica opcion es concatenar



# Árboles Balanceados

## Redistribuir

- Cuando un nodo tiene underflow puede trasladarse llaves de un nodo adyacente hermano (en caso que este tenga suficientes elementos)

## Concatenación:

- Si un nodo adyacente hermano está al mínimo (no le sobra ningún elemento) no se puede redistribuir, se concatena con un nodo adyacente disminuyendo el # de nodos (y en algunos casos la altura del árbol)

# Árboles Balanceados

## Performance de la eliminación

- Mejor caso (borra de un nodo Terminal)
  - $H$  lecturas
  - 1 escritura
- Peor caso (concatenación lleva a decrementar el nivel del árbol en 1)
  - $2h - 1$  lecturas
  - $H + 1$  escrituras

# Árboles Balanceados $\rightarrow B^*$

## Eliminación

- Redistribución
- Concatenación

## Inserción

- ???????
- División

## Árboles Balanceados $\rightarrow B^*$

La redistribución podría posponer la creación de páginas nuevas

Se pueden generar árboles B más eficientes en términos de utilización de espacio



# Árboles Balanceados $\rightarrow B^*$

Árbol B especial en que cada nodo está lleno por lo menos en  $2/3$  partes

## Propiedades (orden $M$ )

Cada página tiene máximo  $M$  descendientes

Cada página, menos la raíz y las hojas, tienen al menos  $\lceil (2M - 1) / 3 \rceil$  descendientes

La raíz tiene al menos dos descendientes (o ninguno)

Todas las hojas aparecen en igual nivel

Una página que no sea hoja si tiene  $K$  descendientes contiene  $K-1$  llaves

Una página hoja contiene por lo menos  $\lceil (2M - 1) / 3 \rceil - 1$  llaves, y no más de  $M-1$ .

# Árboles Balanceados $\rightarrow B^*$

## Operaciones de Búsqueda

- Igual que el árbol B común

## Operaciones de Inserción

- Tres casos posible
  - **Derecha**: redistribuir con nodo adyacente hermano de la derecha (o izq. si es el último)
  - **Izquierda o derecha**: si el nodo de la derecha está lleno y no se puede redistribuir, se busca el de la izquierda.
  - **Izquierda y derecha**: busca llenar los tres nodos, estos tendrán un  $\frac{3}{4}$  parte llena.

## Ejemplos

# Arboles B\*

## Creacion:

- Dadas las claves: 43 2 53 88 75 80  
15 49 60 20 57 24
- Como se construye el árbol B\*?
- Como se genera el archivo de datos que persiste el árbol?

# Arbol B\*

Raiz = ??								
	punteros				clave (datos)			#reg
Nodo 0								

Llega el elemento 43

43			
----	--	--	--

Nodo 0

2	43		
---	----	--	--

Nodo 0

FOD - CLASE 6

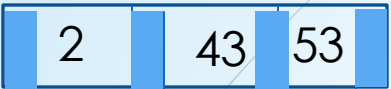
Raiz = 0								
	punteros				clave (datos)			#reg
Nodo 0	-1	-1			43			1

Llega el elemento 2

Raiz = 0								
	punteros				clave (datos)			#reg
Nodo 0	-1	-1	-1		2	43		2

# Arbol B\*

53



Nodo 0



Nodo 0 esta lleno

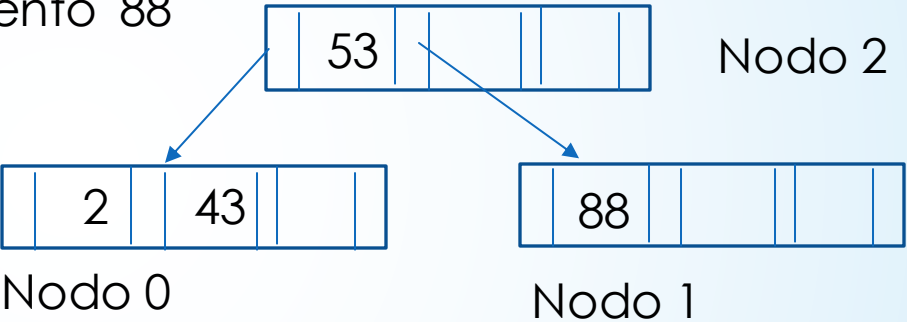
Llega el elemento 53

Raiz = 0								
	punteros				clave (datos)			#reg
Nodo 0	-1	-1	-1	-1	2	43	53	3

Llega el elemento 88



Se divide en 2



2 43 53 88

Raiz = 2								
	punteros				clave (datos)			#reg
Nodo 0	-1	-1	-1		2	43		2
Nodo 1	-1	-1			88			1
Nodo 2	0	1			53			1

# Arboles B\*

## Creacion:

- Dadas las claves: 43 2 53 88 75 80  
15 49 60 20 57 24
- Como se construye el árbol B\*?
- Como se genera el archivo de datos que persiste el árbol?

# Arbol B\*

Raiz = ??								
	punteros				clave (datos)			#reg
Nodo 0								

Llega el elemento 43

43			
----	--	--	--

Nodo 0

2	43		
---	----	--	--

Nodo 0

FOD - CLASE 6

Raiz = 0								
	punteros				clave (datos)			#reg
Nodo 0	-1	-1			43			1

Llega el elemento 2

Raiz = 0								
	punteros				clave (datos)			#reg
Nodo 0	-1	-1	-1		2	43		2

# Arbol B\*

56



Nodo 0



Nodo 0 esta lleno

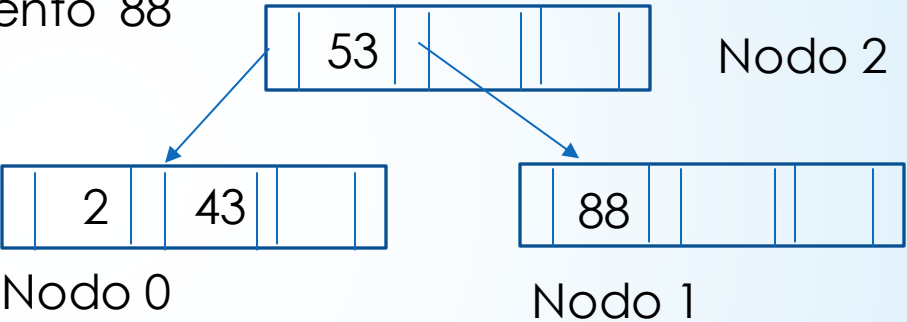
Llega el elemento 53

Raiz = 0								
	punteros				clave (datos)			#reg
Nodo 0	-1	-1	-1	-1	2	43	53	3

Llega el elemento 88



Se divide en 2



2 43 53 88

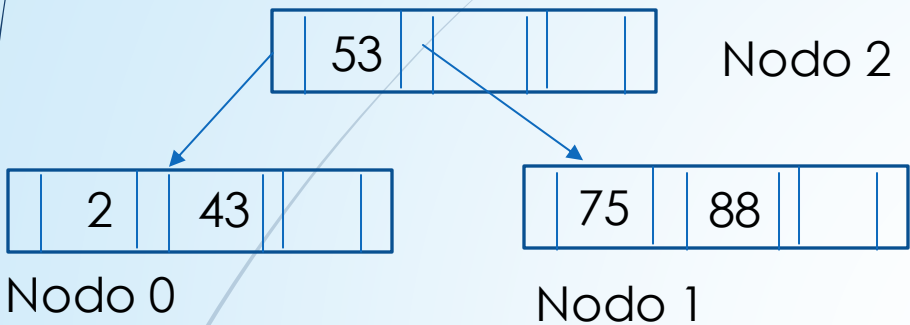
Raiz = 2								
	punteros				clave (datos)			#reg
Nodo 0	-1	-1	-1		2	43		2
Nodo 1	-1	-1			88			1
Nodo 2	0	1			53			1



# Arbol B\*

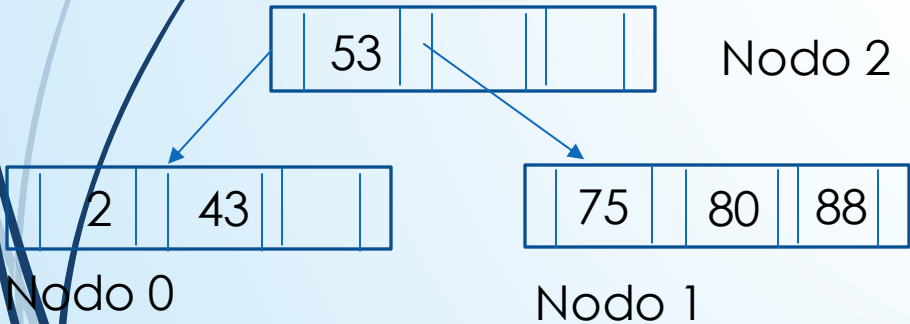
57

Llega el elemento 75



Raiz = 2								
	punteros				clave (datos)			#reg
Nodo 0	-1	-1	-1		2	43		2
Nodo 1	-1	-1	-1		75	88		2
Nodo 2	0	1			53			1

Llega el elemento 80

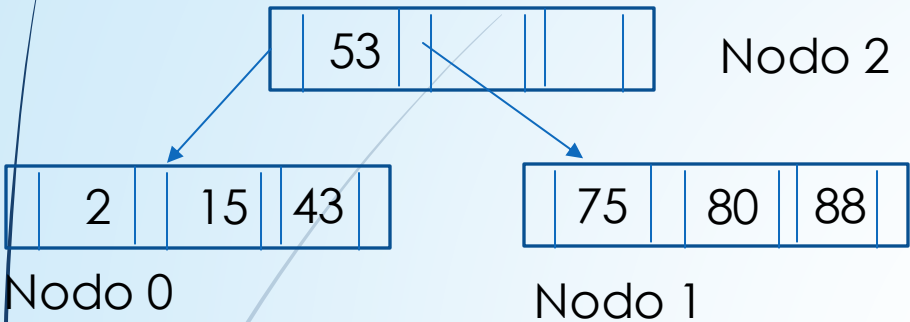


Raiz = 2								
	punteros				clave (datos)			#reg
Nodo 0	-1	-1	-1		2	43		2
Nodo 1	-1	-1	-1	-1	75	80	88	3
Nodo 2	0	1			53			1

# Arbol B\*

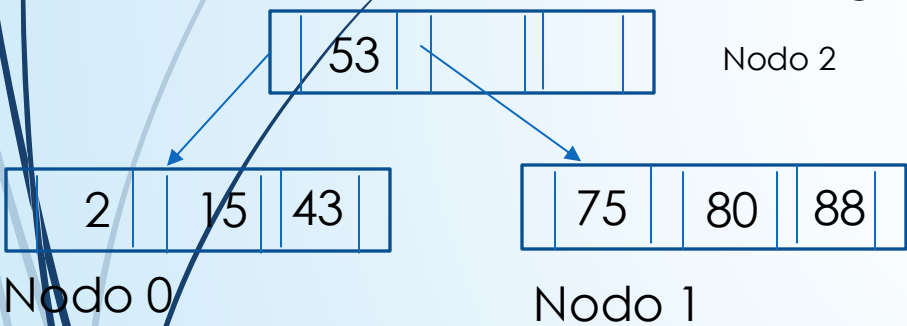
58

Llega el elemento 15

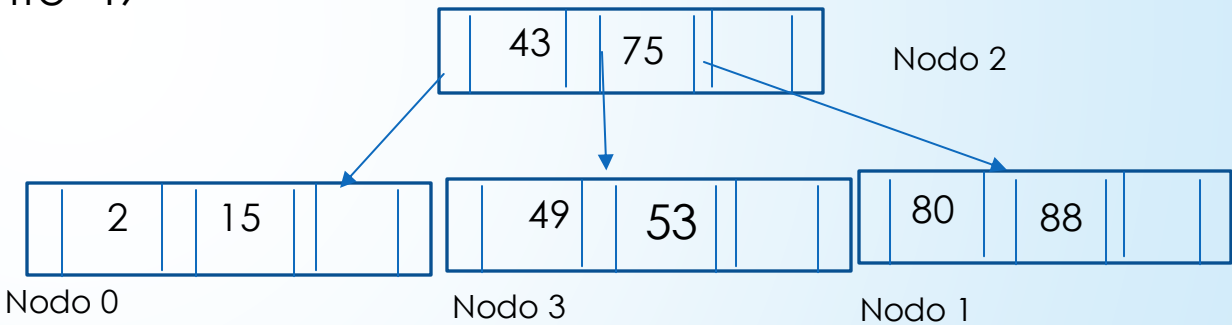


Raiz = 2								
	punteros				clave (datos)			#reg
Nodo 0	-1	-1	-1	-1	2	15	43	3
Nodo 1	-1	-1	-1	-1	75	80	88	3
Nodo 2	0	1			53			1

Llega el elemento 49



Se divide el nodo 0



Raiz = 2

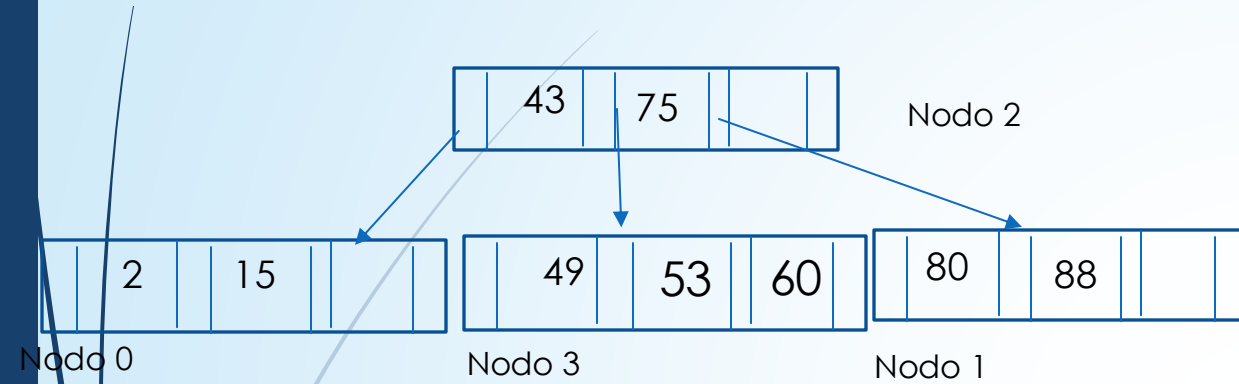
	punteros				clave (datos)			#reg
Nodo 0	-1	-1	-1		2	15		2
Nodo 1	-1	-1	-1		80	88		2
Nodo 2	0	3	1		43	75		2
Nodo 3	-1	-1	-1		49	53		2

2 15 43 49 53 75 80 88

# Arbol B\*

59

Llega el elemento 60

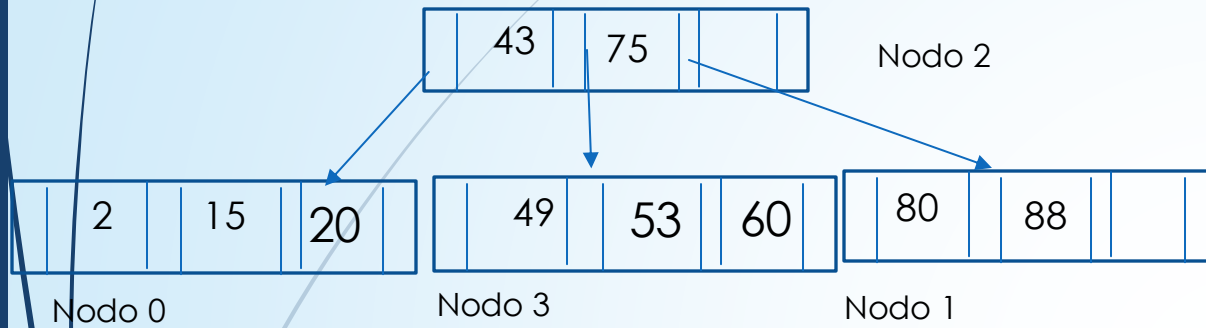


Raiz = 2								
	punteros				clave (datos)			#reg
Nodo 0	-1	-1	-1		2	15		2
Nodo 1	-1	-1	-1		80	88		2
Nodo 2	0	3	1		43	75		2
Nodo 3	-1	-1	-1	-1	49	53	60	3

# Arbol b\*

60

Llega el elemento 20

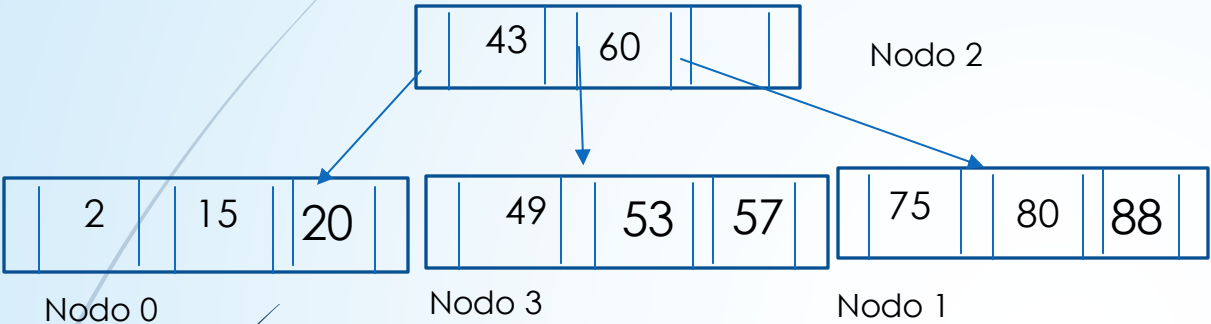


Raiz = 2								
	punteros				clave (datos)			#reg
Nodo 0	-1	-1	-1	-1	2	15	20	3
Nodo 1	-1	-1	-1		80	88		2
Nodo 2	0	3	1		43	75		2
Nodo 3	-1	-1	-1	-1	49	53	60	3

# Arbol B\*

61

Llega el elemento 57



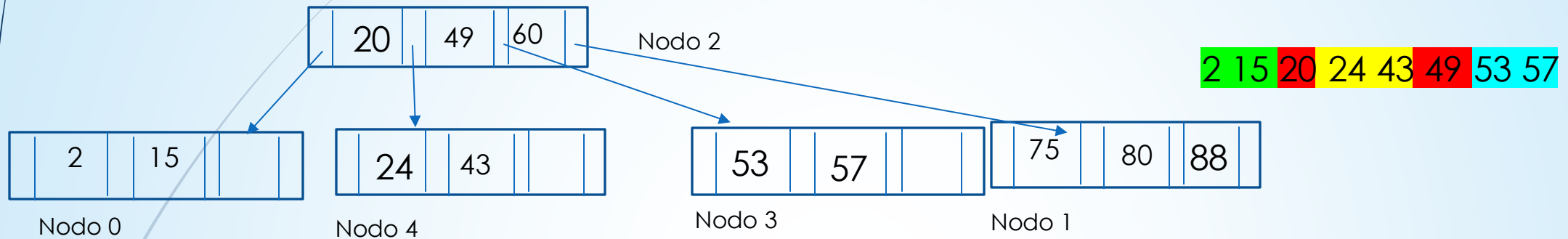
49 53 57 60 75 80 88

Raiz = 2								
	punteros				clave (datos)			#reg
Nodo 0	-1	-1	-1	-1	2	15	20	3
Nodo 1	-1	-1	-1	-1	75	80	88	3
Nodo 2	0	3	1		43	60		2
Nodo 3	-1	-1	-1	-1	49	53	57	3

# Arbol B\*

62

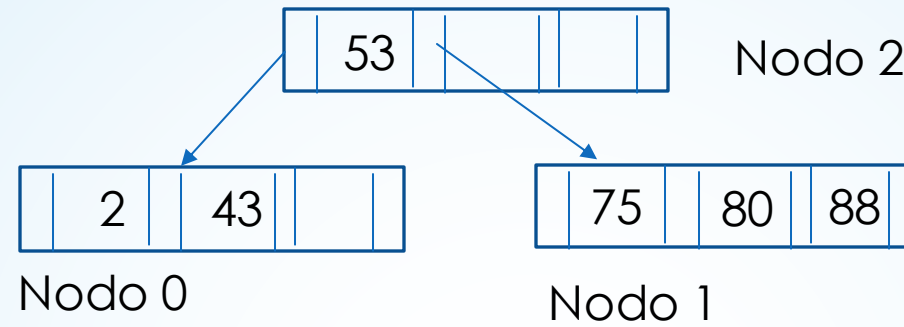
Llega el elemento 24



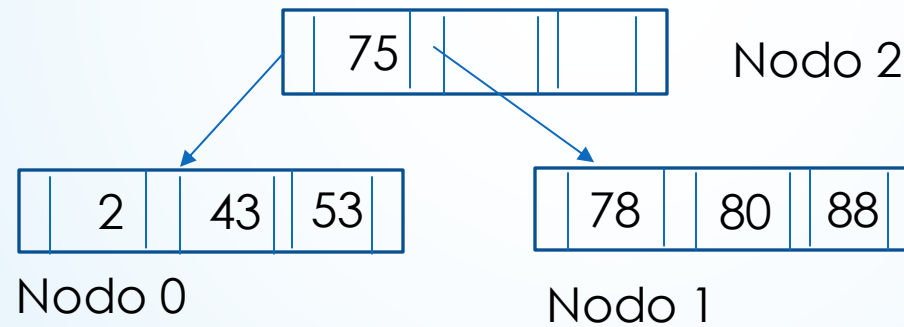
Raiz = 2								
	punteros				clave (datos)			#reg
Nodo 0	-1	-1	-1		2	15		2
Nodo 1	-1	-1	-1	-1	75	80	88	3
Nodo 2	0	4	3	1	20	49	60	3
Nodo 3	-1	-1	-1		53	57	57	2
Nodo 4	-1	-1	-1		24	43		2

# Arbol B\*

63



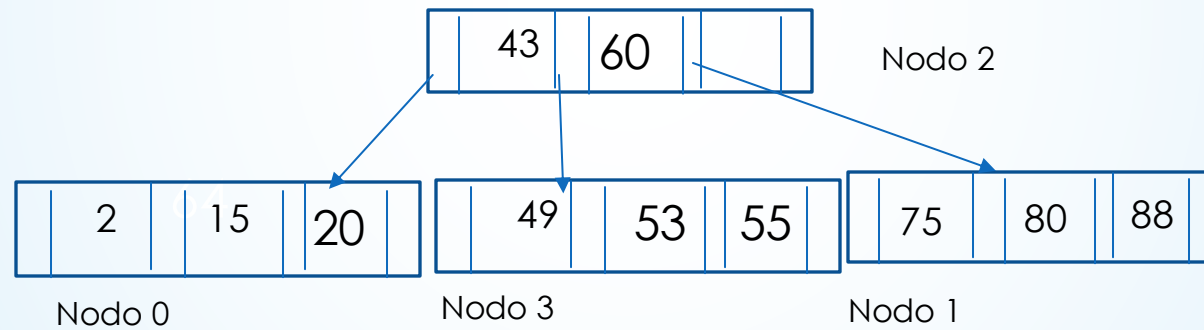
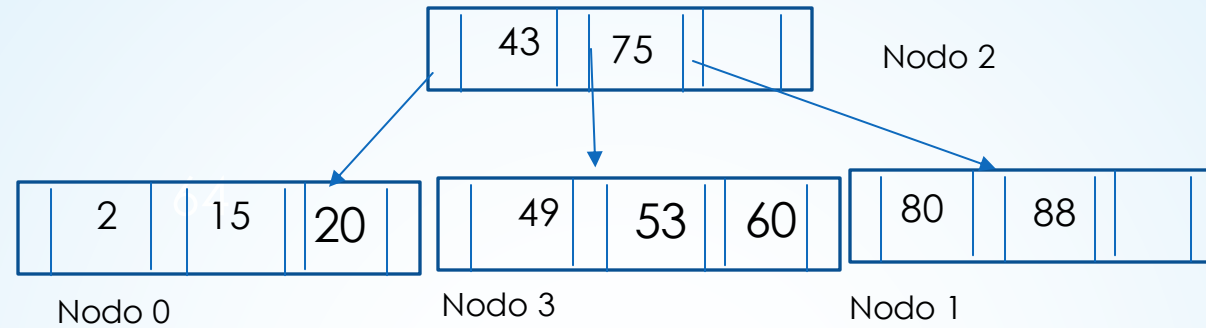
Llega 78



# Arbol B\*

64

Llega el elemento 55 politica de derecha

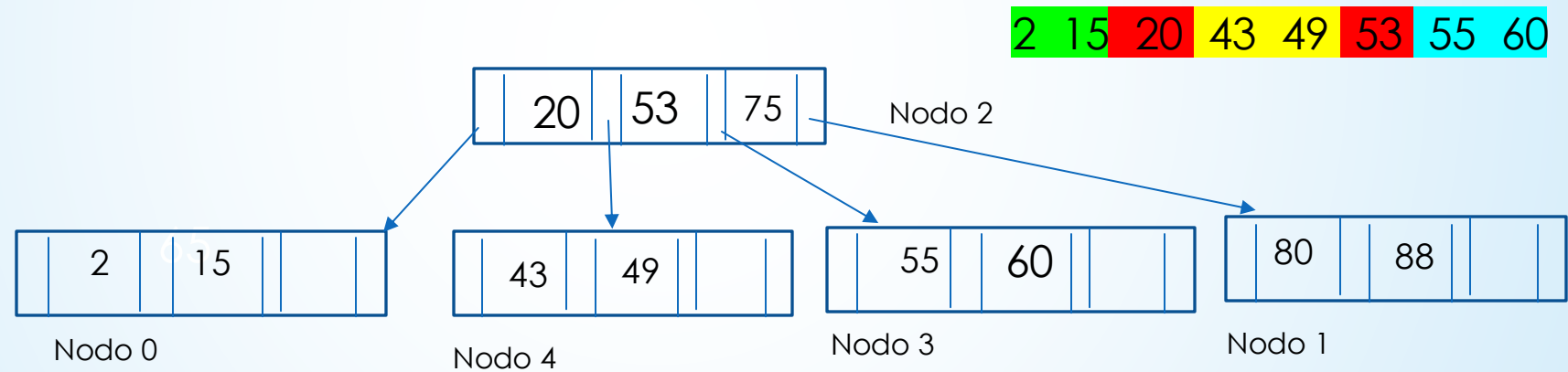
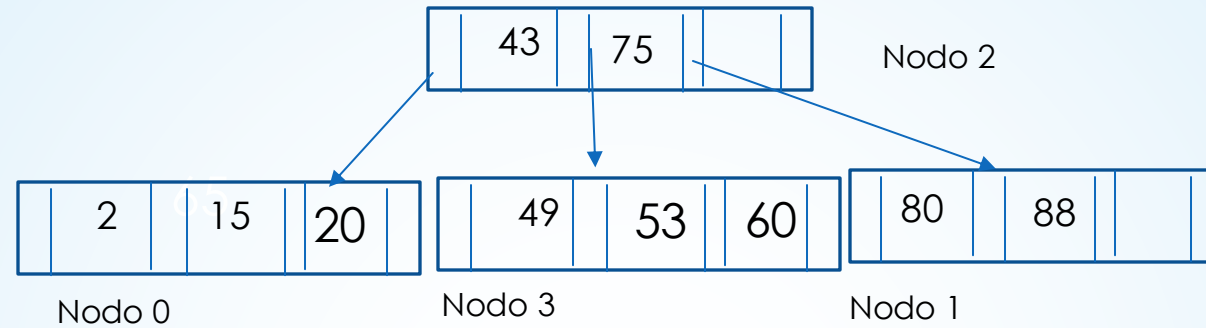




# Arbol B\*

65

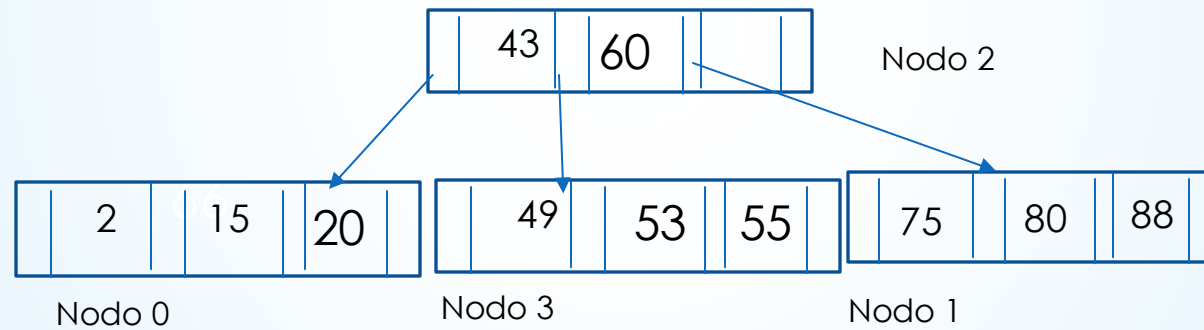
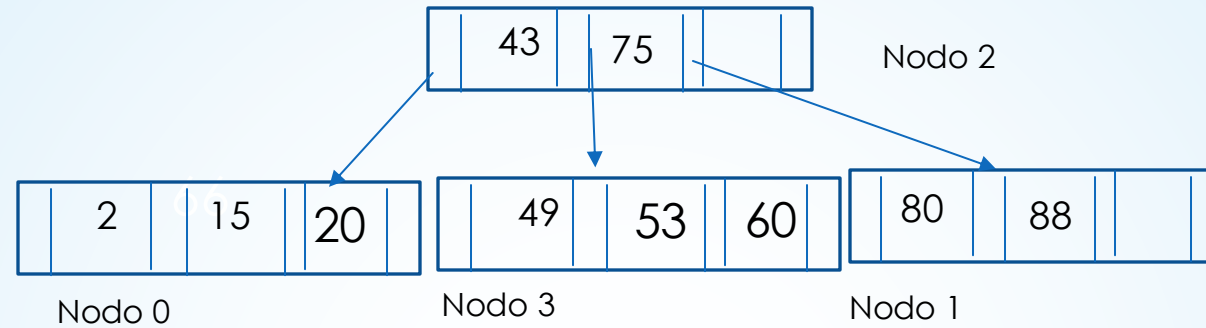
Llega el elemento 55 politica de izquierda



# Arbol B\*

66

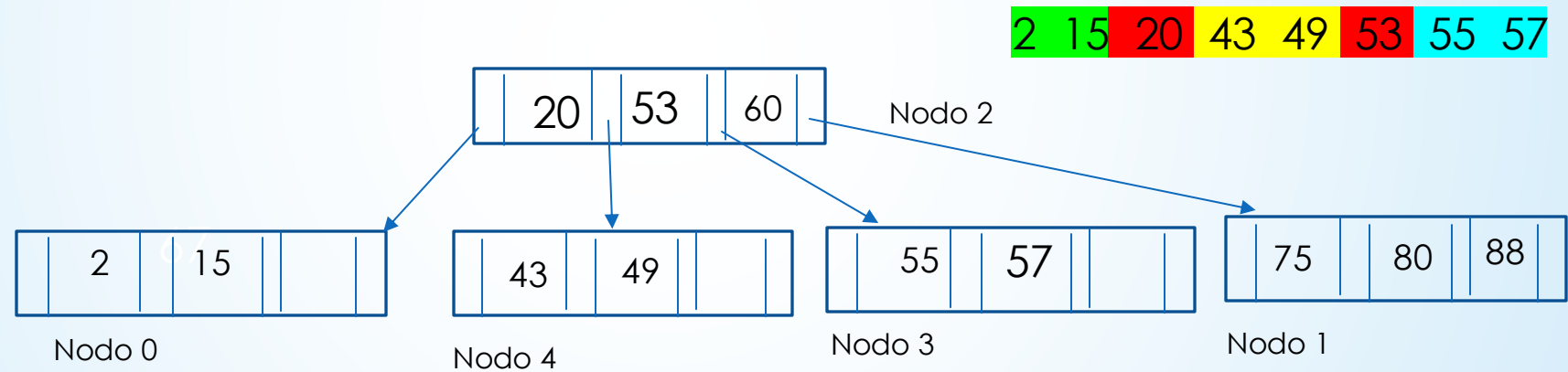
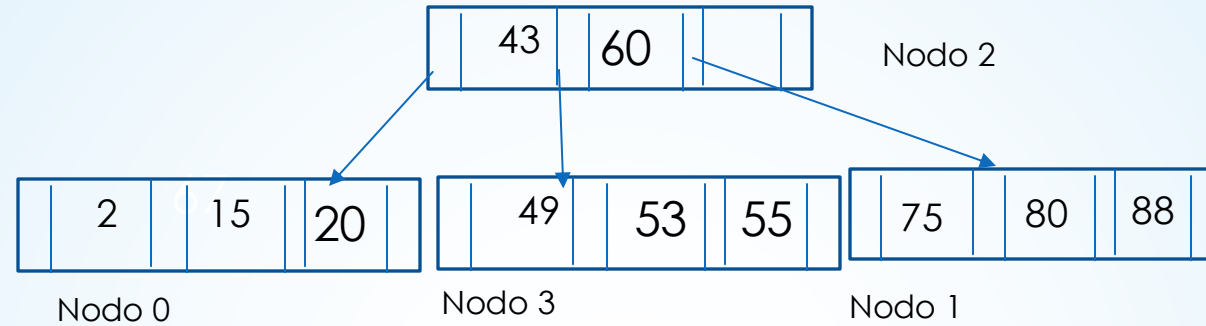
Llega el elemento 55 izquierda o derecha



# Arbol B\*

67

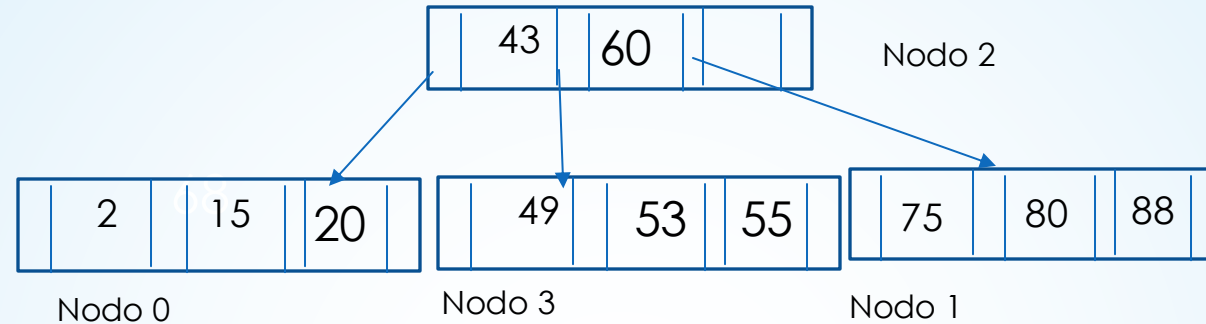
Llega el elemento 57 izquierda o derecha



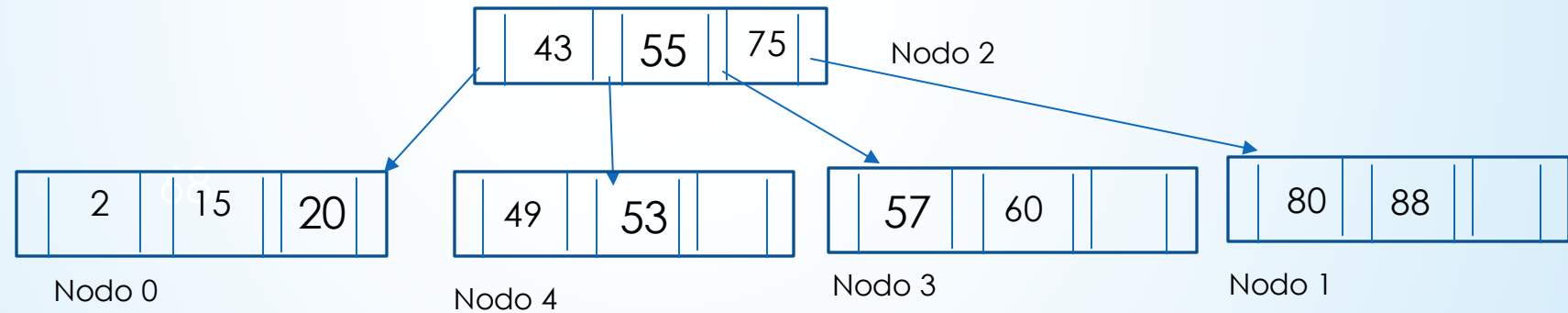
# Arbol B\*

68

Llega el elemento 57 izquierda y derecha



2 15 20 43 49 53 55 57 60 75 80 88



# Árboles Balanceados $\rightarrow B^*$

## Costo de la redistribución

	Mejor	Peor
Derecha	RRWW	RRWWWW
Izq o der	RRWW	RRRWWWW (divido solo dos)
Izq y der	RRWW	RRRWWWWWW

# Árboles Balanceados

Técnicas  
de  
paginado

estrategias de reemplazo: LRU (last recently used)

Análisis  
numérico

# llaves = 2400   # páginas = 140   Altura = 3 niveles

1   5   10   20

3.00   1.71   1.42   0.97

# Árboles Balanceados



Archivos  
secuenciales  
indizados

Permiten una mejor  
recorrida por algún  
tipo de orden

Indizado (ordenado por una llave)

Secuencial (acceder por orden físico,  
devolviendo el registro en orden de llave)

Hasta ahora métodos  
disjuntos, se opta:

rápida recuperación (Árbol)

Recuperación ordenada (secuencial)

Debemos encontrar  
una solución que  
agrupe ambos casos

# Árboles Balanceados



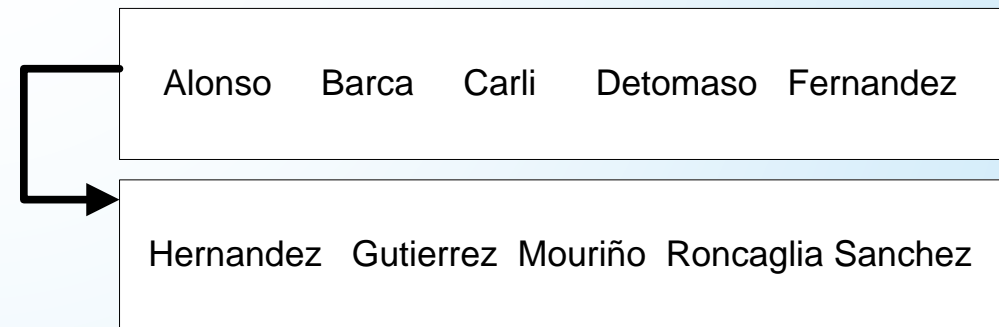
## Conjunto de secuencias

- Conjunto de registros que mantienen un orden físico por llave mientras que se agregan o quitan datos, si podemos mantenerlo podemos indizarlos

## Posible solución

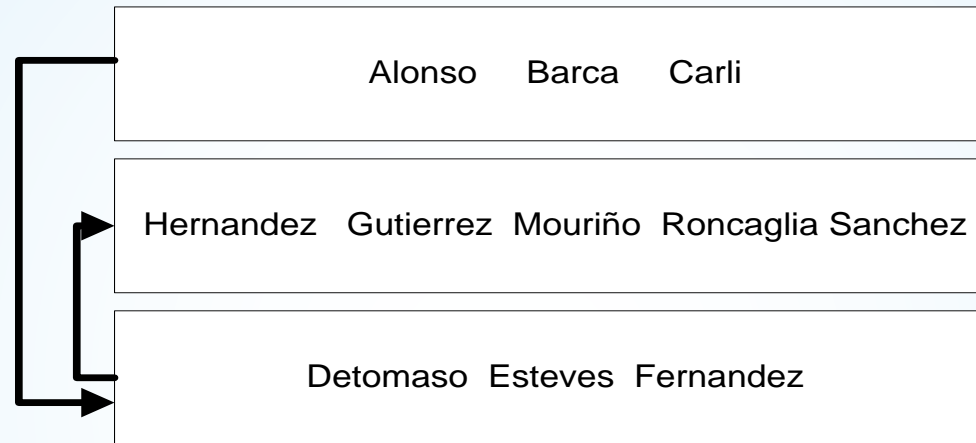
- Mantener bloques de datos
- Cada bloque con registros y puntero al siguiente

Alonso   Barca   Carli   Detomaso   Fernandez





# Árboles Balanceados



## Costo

- Aumenta el tamaño del archivo (fragmentación interna)
- No hay orden físico salvo dentro de un bloque.
- Tamaño del bloque
  - Debe permitir almacenar varios bloques en RAM (redistribución)
  - Las E/S deben ser rápidas y sin necesidad de desplazamientos
- Como logramos ahora una rápida búsqueda?

# Árboles Balanceados → B+



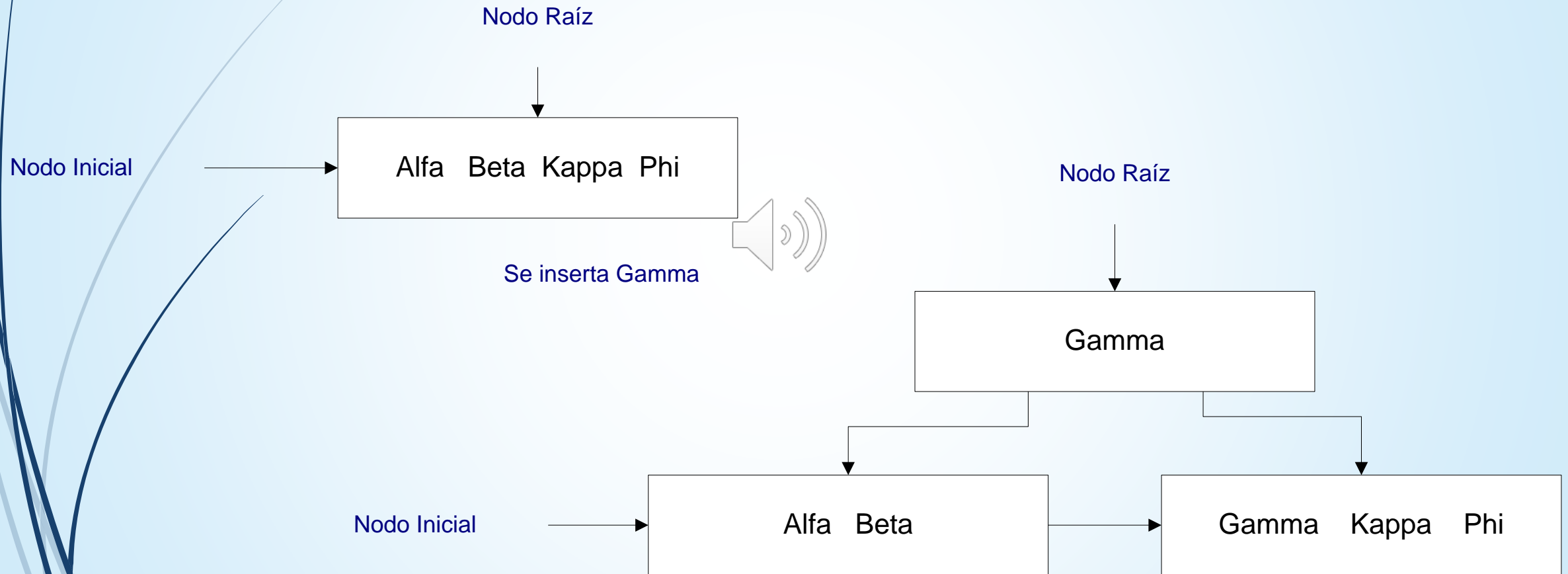
Consiste en un conjunto de grupos de registros ordenados por clave en forma secuencial, junto con un conjunto de índices, que proporciona acceso rápido a los registros.

## Propiedades

- Cada página tiene máximo  $M$  descendientes
- Cada página, menos la raíz y las hojas, tienen entre  $[M/2]$  y  $M$  hijos
- La raíz tiene al menos dos descendientes (o ninguno)
- Todas las hojas aparecen en igual nivel
- Una página que no sea hoja si tiene  $K$  descendientes contiene  $K-1$  llaves
- Los nodos terminales representan un conjunto de datos y son linkados juntos.

Los nodos no terminales no tienen datos sino punteros a los datos.

# Árboles Balanceados → B+



# Arboles B+

## Creacion:

- Dadas las claves: 43 2 53 88 75 80  
15 49 60 20 57 24
- Como se construye el árbol B+?
- Como se genera el archivo de datos que persiste el árbol?

# Arbol B+



77

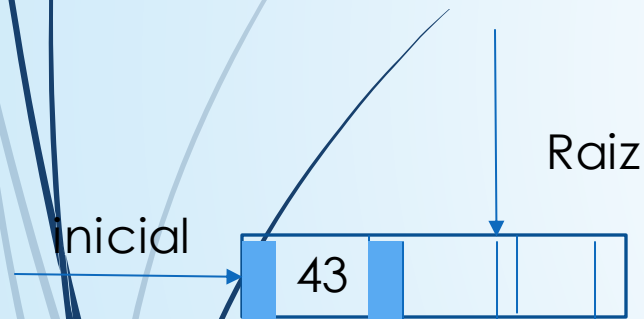
Raiz = ?? Inicial = ??									
	punteros				clave (datos)			#reg	Sig
Nodo 0									

Llega el elemento 43

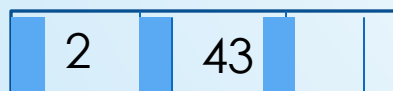
Raiz = 0 Inicial = 0									
	punteros				clave (datos)			#reg	Sig
Nodo 0	-1	-1			43			1	-1

Llega el elemento 2

Raiz = 0 Inicial = 0									
	punteros				clave (datos)			#reg	Sig
Nodo 0	-1	-1	-1		2	43		2	-1



Nodo 0



Nodo 0

FOD - CLASE 6

# Arbol B+

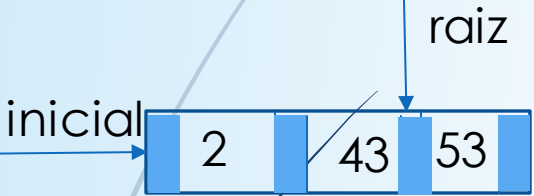
78

Llega el elemento 53

Raiz = 0    Inicial = 0									
	punteros				clave (datos)			#reg	Sig
Nodo 0	-1	-1	-1	-1	2	43	53	3	-1

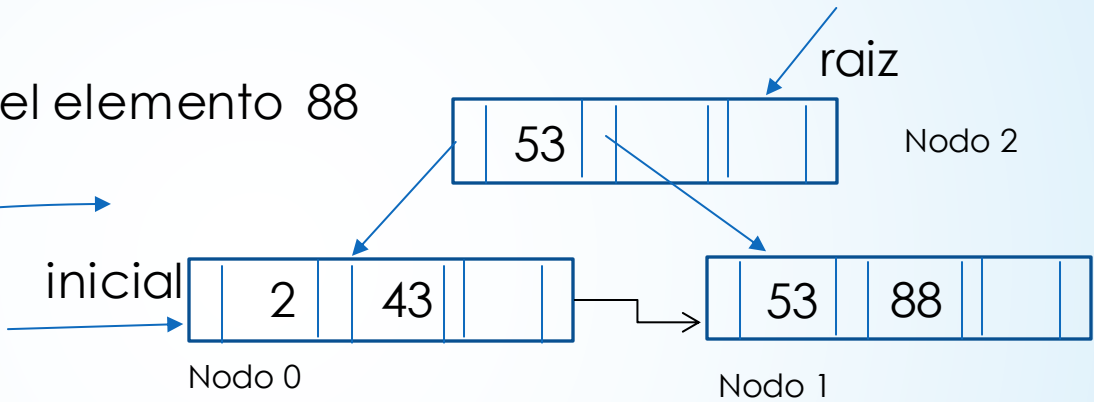


Nodo 0



Nodo 0 esta lleno

Llega el elemento 88



Se divide en 2

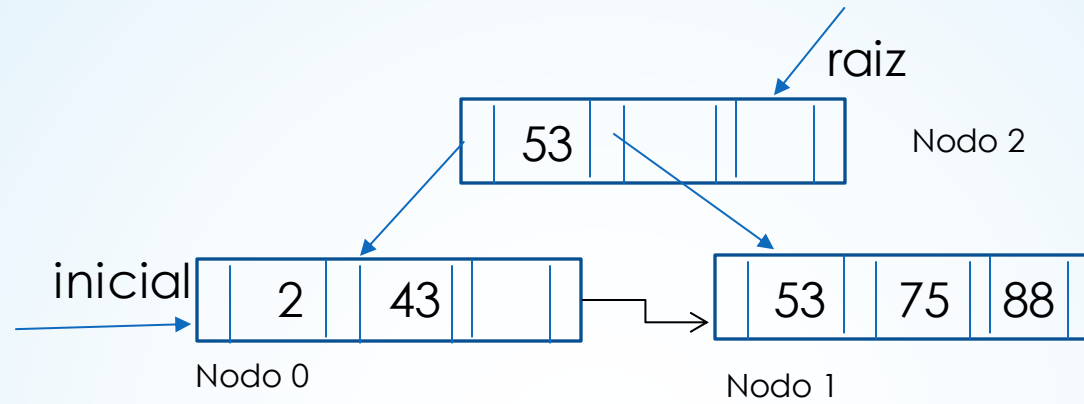
2   43   53   88

Raiz = 2    Inicial = 0									
	punteros				clave (datos)			#reg	Sig
Nodo 0	-1	-1	-1		2	43		2	1
Nodo 1	-1	-1	-1		53	88		2	-1
Nodo 2	0	1			53			1	-1

# Arbol B+

79

Llega el elemento 75

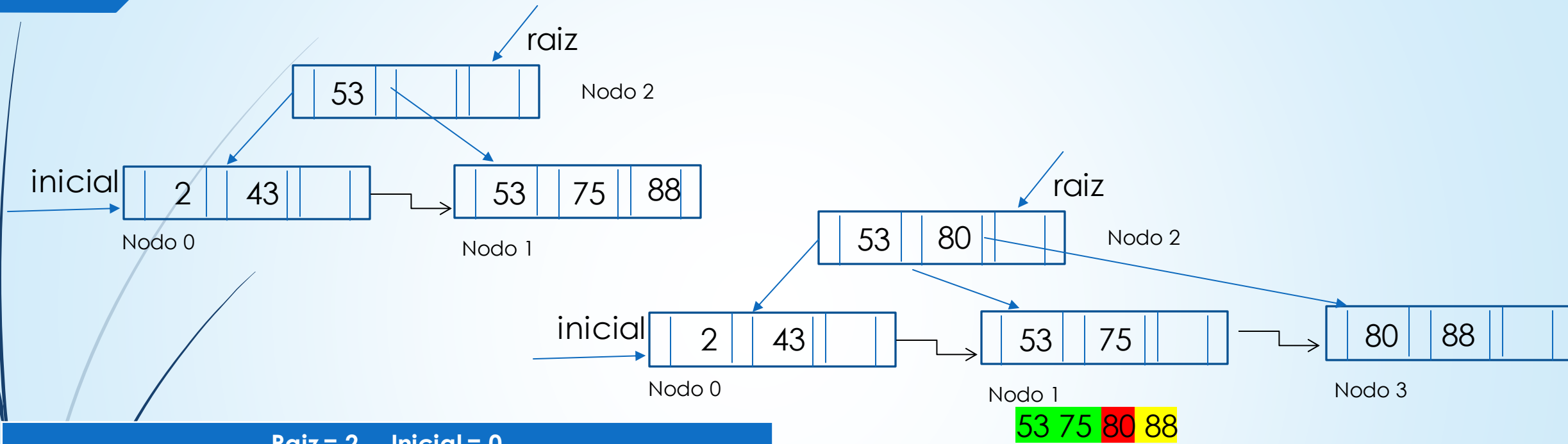


Raiz = 2    Inicial = 0									
	punteros				clave (datos)			#reg	Sig
Nodo 0	-1	-1	-1		2	43		2	1
Nodo 1	-1	-1	-1	-1	53	75	88	3	-1
Nodo 2	0	1			53			1	-1

# Arbol B+

80

Llega el elemento 80



Raiz = 2    Inicial = 0									
	punteros				clave (datos)			#reg	Sig
Nodo 0	-1	-1	-1		2	43		2	1
Nodo 1	-1	-1	-1		53	75		2	3
Nodo 2	0	1	3		53	80		2	-1
Nodo 3	-1	-1	-1		80	88		2	-1

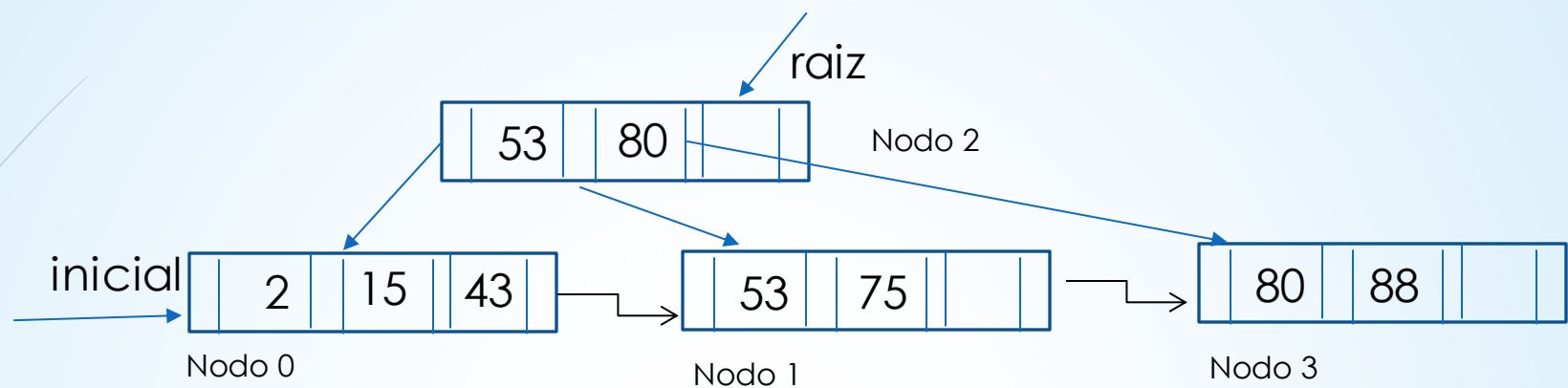




# Arbol B+

81

Llega el elemento 15



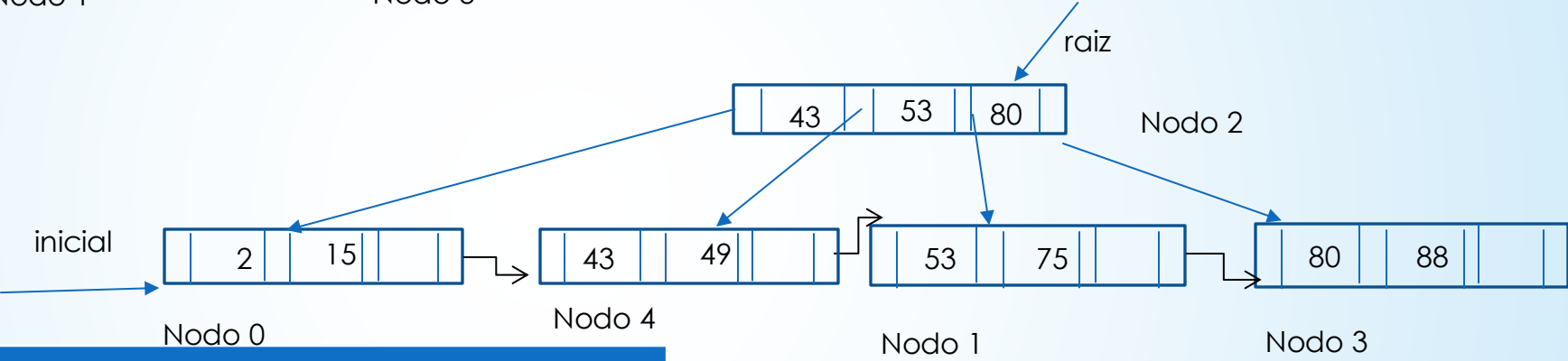
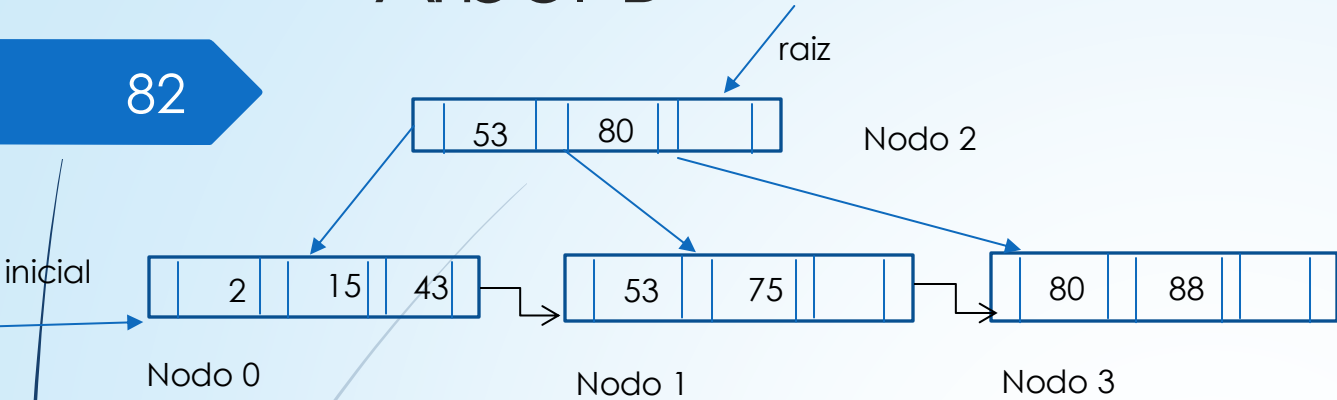
Raiz = 2    Inicial = 0									
	punteros				clave (datos)			#reg	Sig
Nodo 0	-1	-1	-1	-1	2	15	43	3	1
Nodo 1	-1	-1	-1		53	75		2	3
Nodo 2	0	1	3		53	80		2	-1
Nodo 3	-1	-1	-1		80	88		2	-1



# Arbol B+

82

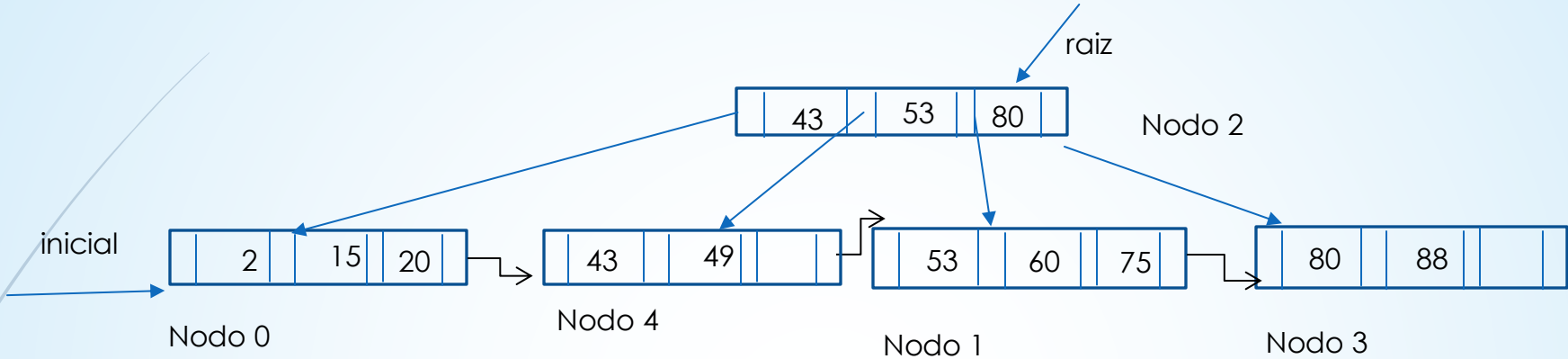
Llega el elemento 49



Raiz = 2    Inicial = 0									
	punteros				clave (datos)			#reg	Sig
Nodo 0	-1	-1	-1		2	15		2	4
Nodo 1	-1	-1	-1		53	75		2	3
Nodo 2	0	4	1	3	43	53	80	3	-1
Nodo 3	-1	-1	-1		80	88		2	-1
Nodo 4	-1	-1			43	49		2	1

2 15 43 49





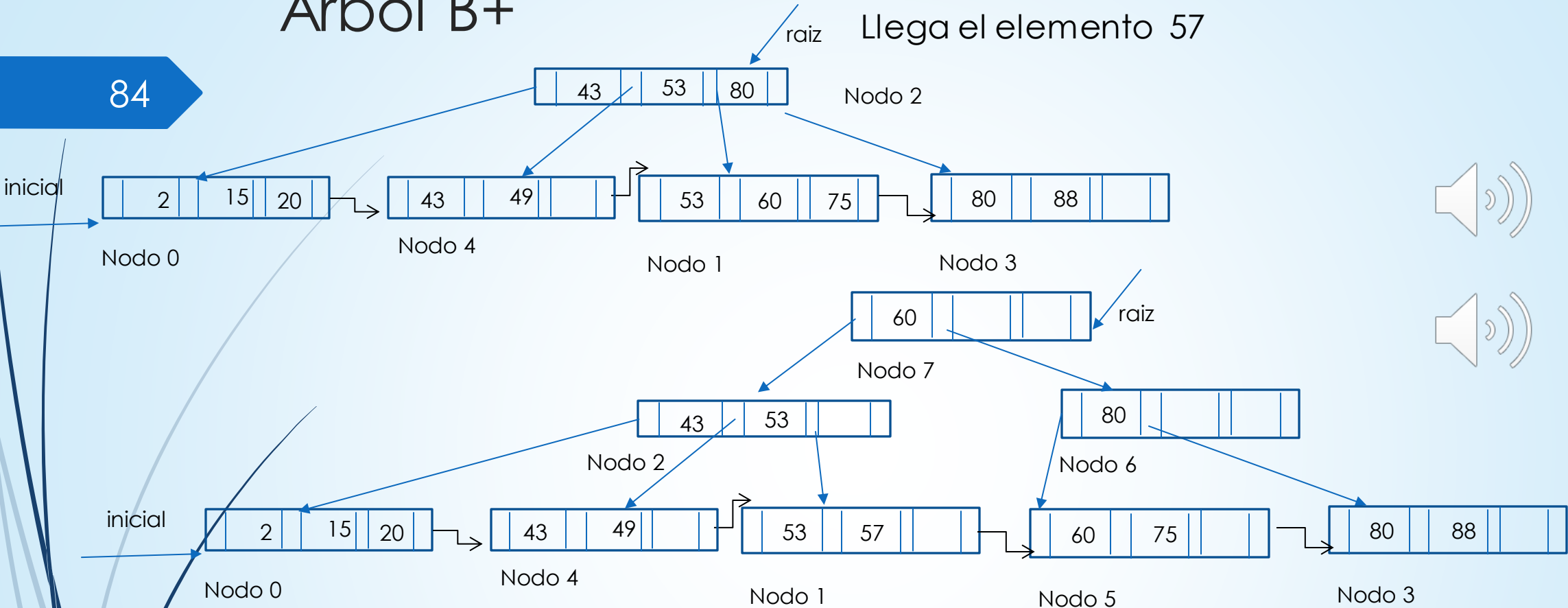
Raiz = 2    Inicial = 0									
	punteros				clave (datos)			#reg	Sig
Nodo 0	-1	-1	-1	-1	2	15	20	3	4
Nodo 1	-1	-1	-1	-1	53	60	75	3	3
Nodo 2	0	4	1	3	43	53	80	3	-1
Nodo 3	-1	-1	-1		80	88		2	-1
Nodo 4	-1	-1			43	49		2	1



# Arbol B+

Llega el elemento 57

84



Raiz = 7    Inicial = 0									
	punteros				clave (datos)			#reg	Sig
Nodo 0	-1	-1	-1	-1	2	15	20	3	4
Nodo 1	-1	-1	-1		53	57		2	5
Nodo 2	0	4	1		43	53		2	-1
Nodo 3	-1	-1	-1		80	88		2	-1
Nodo 4	-1	-1			43	49		2	1
Nodo 5	1	1	1		60	75		2	3

53 57 60 75

43 53 60 80

# Árboles Balanceados $\rightarrow$ B+

## Separadores

- Derivados de las llaves de los registros que limitan un bloque en el conjunto de secuencia
- Separadores más cortos, ocupan espacio mínimo

## Árbol B+ de prefijos simples

- Árbol B+ en el cual el conjunto índice está constituido por separadores más cortos

# Árboles Balanceados → B+

Nodo Raíz

G

Alfa Beta

Gamma Kappa Phi

Nodo Inicial

Nodo Raíz

Gon

Garcia Gomez

Gonzalez Gutierrez Hernandez

Nodo Inicial

# Árboles Balanceados → conclusiones

	Árbol B	Árbol B+
Ubicación de datos	Nodos (cualquiera)	Nodo Terminal
Tiempo de búsqueda	=	=
Procesamiento secuencial	Lento (complejo)	Rápido (con punteros)
Inserción eliminación	Ya discutida	Puede requerir + tiempo