UNIMORE
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MODENA E REGGIO EMILIA

Dispense per il Laboratorio di Strutture Dati e Algoritmi

Federico Bolelli

Esercitazione 03: Backtracking - Parte 1

Ultimo aggiornamento: 17/03/2022

Backtracking - SubsetK

Nel file `subset.c` implementare la definizione della funzione:

```
extern int SubsetK(int n, int k);
```

La funzione accetta come parametri due numeri interi positivi, `n` e `k`, e deve stampare su `stdout` tutti i sottoinsiemi di cardinalità `k` dell'insieme contenente i primi `n` numeri naturali a partire da 0. La funzione ritorna quindi il numero di sottoinsiemi possibili.

Ad esempio, se `n` = 4 e `k` = 2, la funzione deve stampare tutti i sottoinsiemi di cardinalità 2 dell'insieme { 0, 1, 2, 3 }, ovvero:

```
{ 2 3 }, { 1 3 }, { 1 2 }, { 0 3 }, { 0 2 }, { 0 1 },
```

e ritornare 6. Si ricordi che, in un insieme:

- Non possono essere presenti elementi ripetuti;
- Gli elementi non hanno un ordine, quindi { 1 2 } e { 2 1 } sono lo stesso insieme.

Si scriva un opportuno `main()` di prova per testare la funzione.

Backtracking - SubsetK

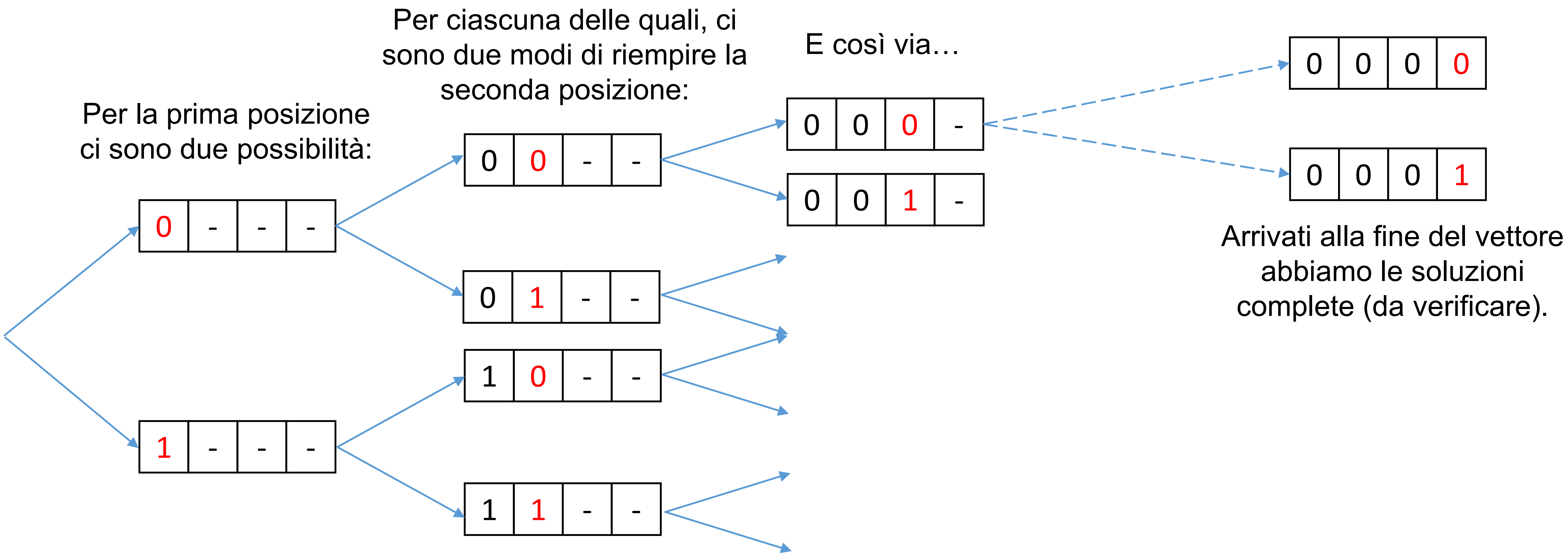
- Come nella maggior parte dei problemi di backtracking, l'obiettivo è quello di costruire passo passo e in maniera incrementale tutte le possibili soluzioni, ovvero tutti i possibili **vettori soluzione**.
- In questo caso specifico, un vettore soluzione deve poter rappresentare un sottoinsieme di { 0, …, n – 1 }.
- Il modo più semplice è utilizzare un vettore di `bool` di dimensione n, che chiamiamo `vcurr`, vettore soluzione corrente.
- `vcurr[i] = 1` se `i` è compreso nel sottoinsieme;
- `vcurr[i] = 0` se `i` *non* è compreso nel sottoinsieme.
- Ad esempio per n = 4 e k = 2
  - `vcurr`:

0	1	2	3
0	1	0	1

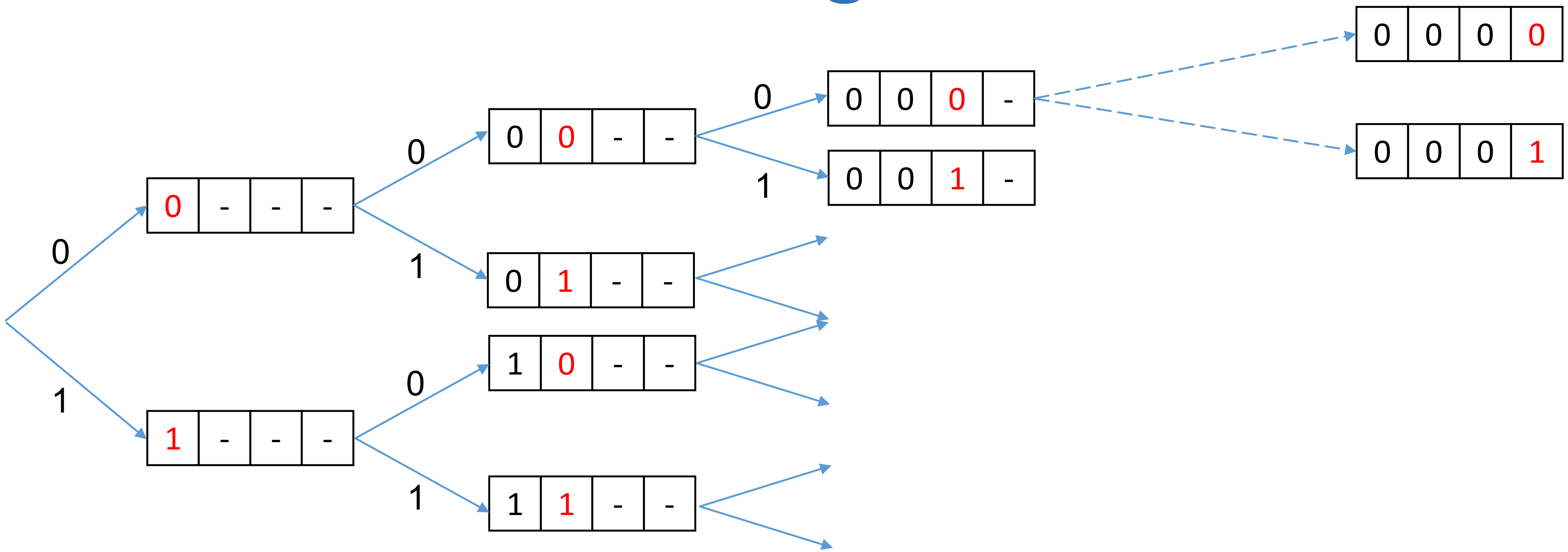
rappresenta il sottoinsieme {1, 3}

Backtracking - SubsetK

- Tutte le possibili configurazioni di `vcurr`, comprese quelle sbagliate secondo la consegna, costituiscono lo **spazio delle soluzioni**.
- Cerchiamo di esplorare lo spazio delle soluzioni di `SubsetK(4, 2)`.



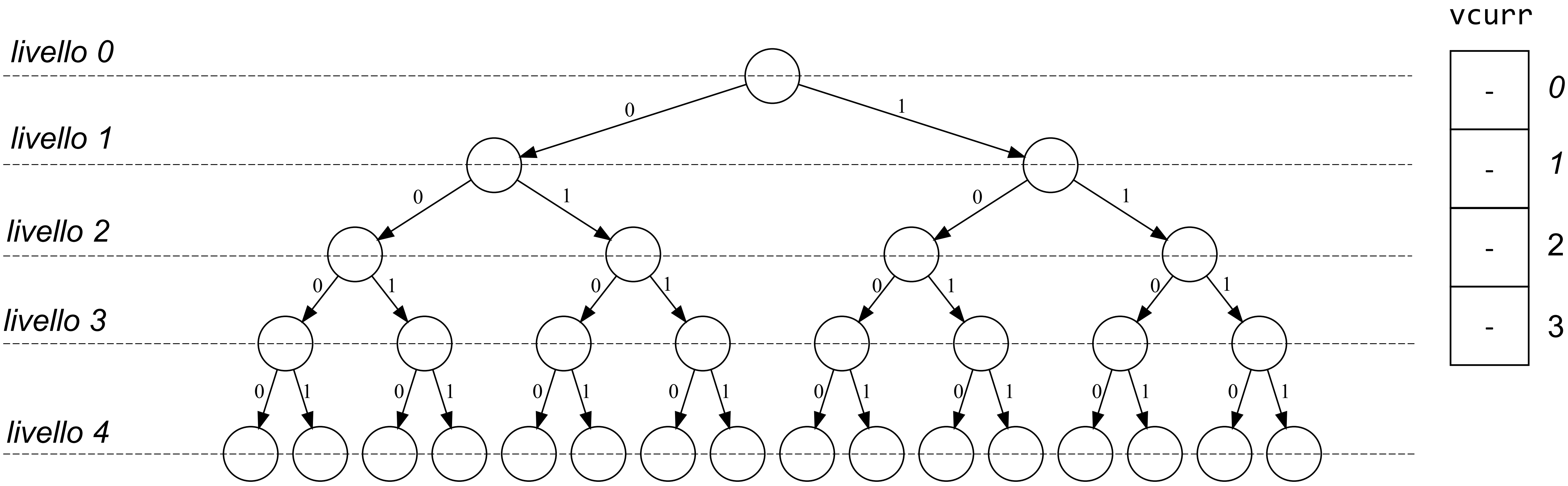
Backtracking - SubsetK



- Lo spazio delle soluzioni è quindi rappresentato come un **albero**:
  - Ogni **ramo** rappresenta la **scelta** di un valore da inserire in una certa posizione;
  - Ogni **nodo NON foglia** corrisponde ad una **soluzione parziale** al problema;
  - Ogni **nodo foglia** rappresenta una **possibile soluzione** che andrà verificata;

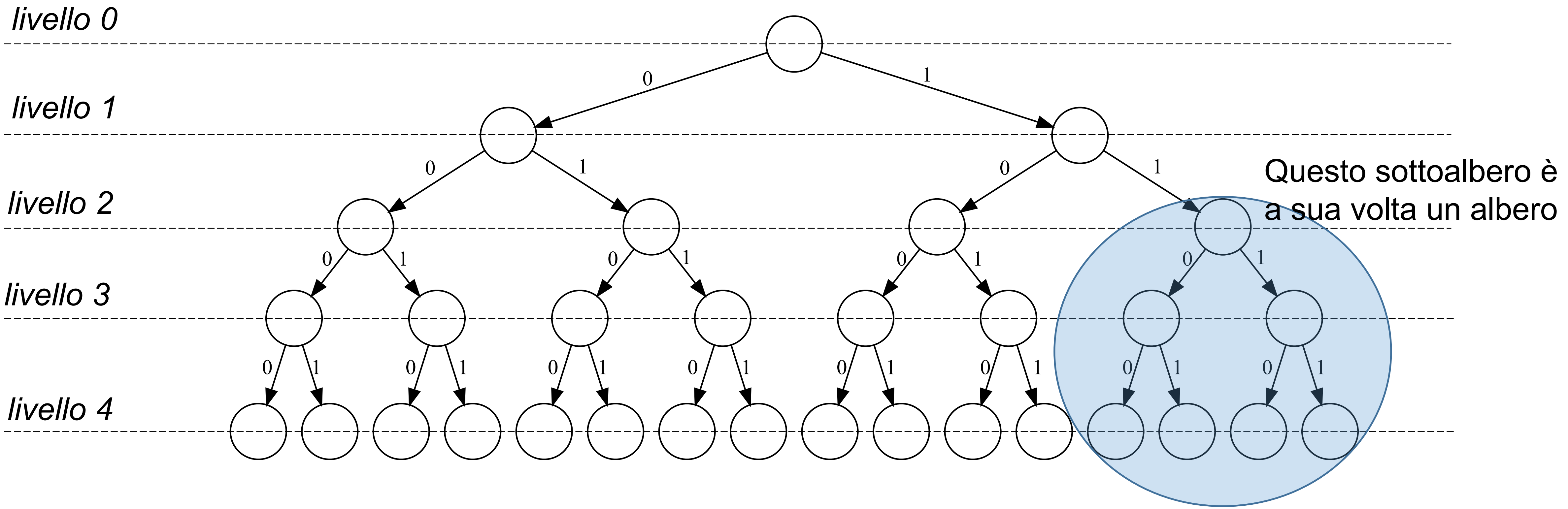
Backtracking - SubsetK

- Ruotiamo l'albero di 90° per visualizzarlo meglio.
- Ogni livello corrisponde ad una posizione di `vcurr`, ad eccezione dell'ultimo.
- Per ogni livello, tranne l'ultimo, è necessario compiere una scelta.



Backtracking - SubsetK

- Ogni nodo dell'albero è la radice di un sottoalbero, che è a sua volta un albero.
- Questa proprietà permette di esplorare facilmente un albero tramite una funzione **ricorsiva**: se posso invocarla sulla radice, allora posso invocarla su qualunque nodo, che a sua volta è la radice di un albero più piccolo.



Backtracking - SubsetK

- Passiamo al lato pratico e cerchiamo di implementare una soluzione.
- Ci bastano i parametri della funzione definita dal testo?

Backtracking - SubsetK

- Evidentemente no!
- Avremo sicuramente bisogno di aggiungerne qualcuno, come ad esempio:
  - `vcurr:` vettore soluzione corrente, di lunghezza n
  - `i:` livello dell'albero
  - `nsol:` per contare il numero di soluzioni trovare.

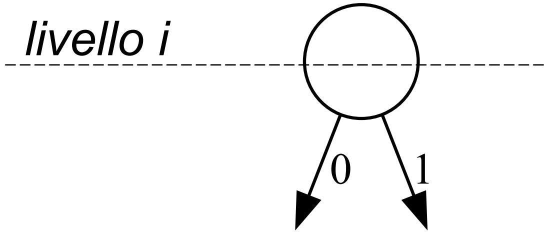
- Quindi ricorriamo ad una funzione ausiliaria che possiamo ad esempio chiamare `SubsetKRec()`

Backtracking - SubsetK

```c
#include <stdbool.h>

void SubsetKRec(int n, int k, bool *vcurr, int i, int *nsol) {}


int SubsetK(int n, int k) {
    bool *vcurr = malloc(sizeof(bool)*n);
    int nsol = 0;

    SubsetKRec(n, k, vcurr, 0, &nsol);

    free(vcurr);
    return nsol;
}
```

Backtracking - SubsetK

- Concentriamoci ora sulla funzione ricorsiva `SubsetKRec()`
- Un'istanza della funzione ricorsiva può essere vista come un nodo dell'albero che rappresenta lo spazio delle soluzioni.
- La funzione ha due possibilità: scegliere o non scegliere il numero `i` per costruire la soluzione corrente.
- Fare due scelte significa invocare se stessa ricorsivamente due volte.



Backtracking - SubsetK

- Invocare ricorsivamente la funzione significa scendere di un livello nell'albero delle soluzioni, quindi non devo dimenticare di incrementare la `i` di 1:

```
static void SubsetKRec(int n, int k, bool *vcurr, int i, int *nsol)
{
    vcurr[i] = 0;
    SubsetKRec(n, k, vcurr, i + 1, nsol);

    vcurr[i] = 1;
    SubsetKRec(n, k, vcurr, i + 1, nsol);
}
```

Backtracking - SubsetK

- Cosa manca perché la funzione ricorsiva sia ben strutturata e quindi abbia una fine?

Backtracking - SubsetK

- Esatto: il caso base!
- Il caso in cui il sottoalbero corrente è una foglia!
- Le foglie si trovano al livello `i=n` dell'albero.

Backtracking - SubsetK

```
if (i == n) {
    int cnt = 0;
    for (int j = 0; j < n; ++j) {
        if (vcurr[j]) {
            cnt++;
        }
    }

    if (cnt == k){
        (*nsol)++;
        printf("{ ");
        for (int j = 0; j < n; ++j) {
            if (vcurr[j]) {
                printf("%i ", j);
            }
        }
        printf("}, ");
    }

    return;
}
```

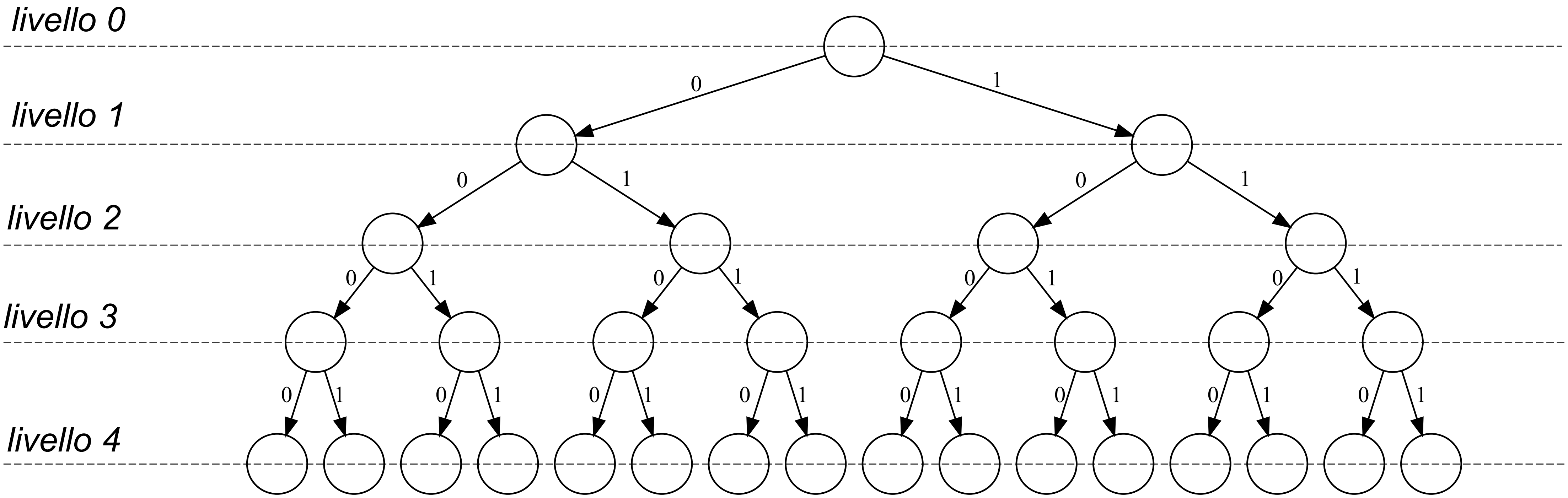
Verifico da quanti elementi è composto l'insieme/soluzione corrente.

Se è formata da esattamente k elementi allora è una soluzione valida e posso stamparla a video, ad esempio usando il formato dell'esempio nel testo dell'esercizio.

Termino la ricorsione.

Backtracking - SubsetK

- Eseguiamo passo passo le chiamate ricorsive e cerchiamo di seguire l'esecuzione sull'albero delle soluzioni:



Backtracking - SubsetK

- È una buona idea quella di conteggiare gli elementi a 1 di `vcurr` tutte le volte che incontro il caso base?
- Evidentemente no! Come potrei risolvere?

Backtracking - SubsetK

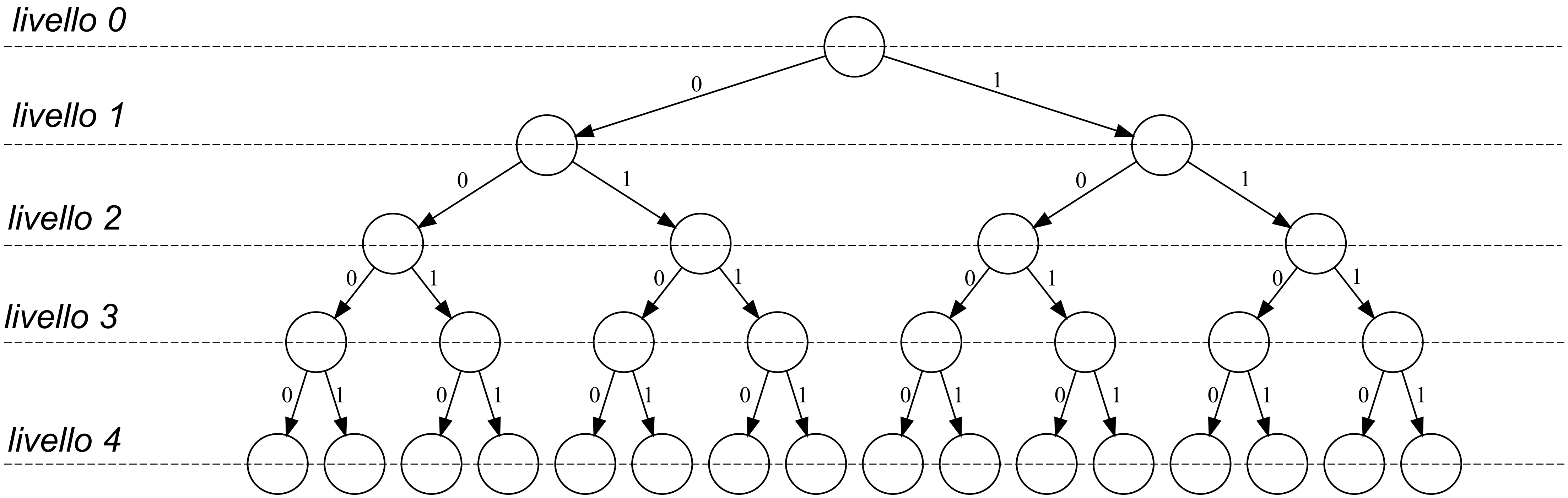
- Potrei ad esempio aggiungere un parametro alla chiamata ricorsiva, così da memorizzare il numero di elementi utilizzati fino ad ora per la costruzione della soluzione corrente.
- Vediamo come …

Backtracking - SubsetK

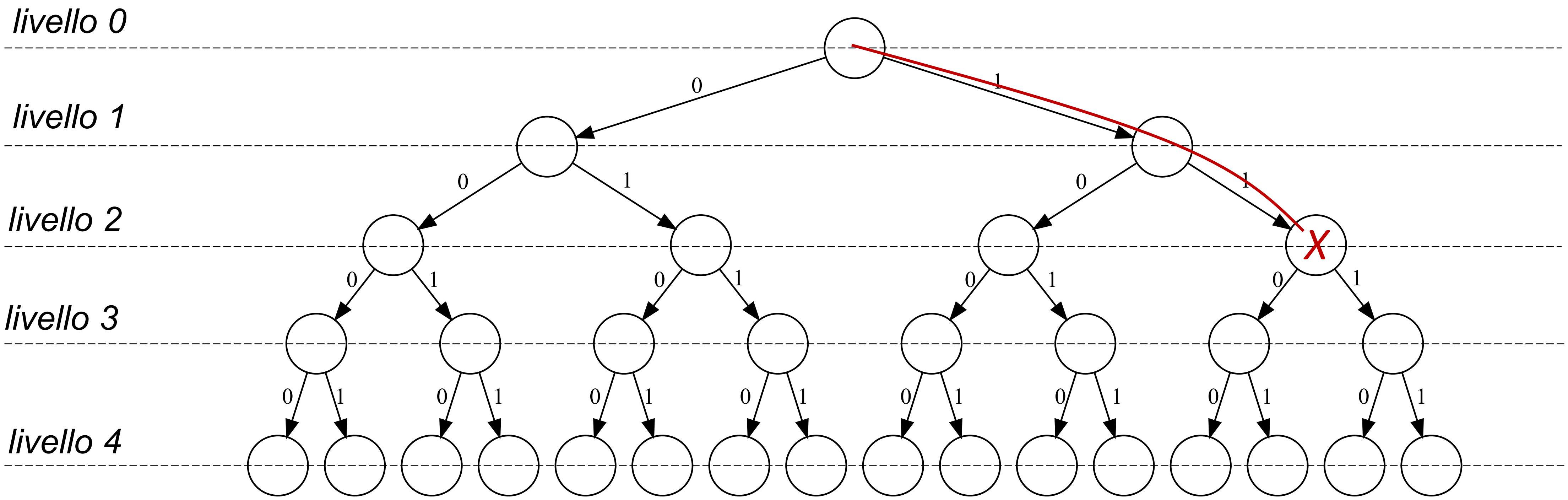
```
static void SubsetKRec(int n, int k, bool *vcurr, int i, int *nsol, int cnt) {
    if (i == n) {
        if (cnt == k) {
            // Stampa della soluzione corrente e incremento di nsol
        }
        return;
    }

    vcurr[i] = 0;
    SubsetKRec(n, k, vcurr, i + 1, nsol, cnt);
    vcurr[i] = 1;
    SubsetKRec(n, k, vcurr, i + 1, nsol, cnt + 1);
}

int SubsetK(int n, int k) {
    // […]
    SubsetKRec(n, k, vcurr, 0, &nsol, 0);
    // […]
}
```

Backtracking - SubsetK

- È sempre necessario arrivare ad una foglia per capire se la soluzione corrente è valida o meno?



Backtracking - SubsetK



Arrivati al nodo X sappiamo già che questa è una soluzione valida (`cnt==k`) quindi non ha senso proseguire!

Backtracking - SubsetK

- Possiamo fare il *pruning* di interi sottoalberi aggiungendo il caso base `cnt==k`.
- Ovviamente non sarà più necessario effettuare la stessa verifica dentro il caso base `i==n`, che diventerà una semplice terminazione della ricorsione.
- Se ad un certo punto ho costruito un insieme con k elementi allora ho trovato una soluzione valida e torno indietro (*backtrack*) per provarne altre.
- Se non ci sono più strade disponibili su questo ramo della ricorsione torno indietro (*backtrack*) per provarne altri.
- L’ordine con cui scrivo i casi base è importante.

Backtracking - SubsetK

```
static void SubsetKRec(int n, int k, bool *vcurr, int i, int *nsol, int cnt) {

    if (cnt == k) {
        (*nsol)++;
        // Stampa della soluzione corrente
    }

    if (i == n) { return; }

    vcurr[i] = 0;
    SubsetKRec(n, k, vcurr, i + 1, nsol, cnt);
    vcurr[i] = 1;
    SubsetKRec(n, k, vcurr, i + 1, nsol, cnt + 1);
}
```

Backtracking - SubsetK

- **Attenzione** al contenuto di `vcurr`!
- Quando faccio *pruning,* il vettore soluzione corrente `vcurr` è valido solo sino al livello *i-esimo*
- I valori contenuti ad indici successivi sono relativi a soluzione costruite in chiamate precedenti, quindi non devo considerarle nella stampa della soluzione corrente.
- Ci sono fondamentalmente due strade per evitare questo problema:
  - Riscrivo il ciclo `for` della stampa perché si fermi a `i` e non più ad n;
  - Dopo la chiamata ricorsiva che esplora il ramo 1 ripristino lo stato del vettore `vcurr` impostando `vcurr[i]` nuovamente a 0.

Backtracking - SubsetK

- Riscrivo il ciclo `for` della stampa perché si fermi a `i` e non più ad `n`:

```
printf("{ ");
for (int j = 0; j < i; ++j) {
    if (vcurr[j]) {
        printf("%i ", j);
    }
}
printf("}, ");
```

Backtracking - SubsetK

- Dopo la chiamata ricorsiva che esplora il ramo 1 ripristino lo stato del vettore `vcurr` impostando `vcurr[i]` nuovamente a 0.

```
vcurr[i] = 0;
SubsetKRec(n, k, vcurr, i + 1, nsol, cnt);
vcurr[i] = 1;
SubsetKRec(n, k, vcurr, i + 1, nsol, cnt + 1);
vcurr[i] = 0;
```

Facciamo il Punto

Per risolvere un problema attraverso un algoritmo di *backtracking* è sempre opportuno:

1. Definire il dominio dei valori ammissibili per gli elementi della sequenza risolutiva. **In questo esempio 2, ovvero (1) prendo o (0) non prendo l'elemento *i-esimo***;
2. Definire la lunghezza massima della sequenza che rappresenta una soluzione. **In questo esempio n**;
3. Definire, per ogni posizione della sequenza risolutiva, le eventuali regole matematiche che la soluzione parziale deve soddisfare. In altre parole, occorre definire i vincoli che sussistono tra gli elementi della sequenza risolutiva. **In questo esempio il vincolo è che nella sequenza non ci siano più di due elementi a 1;**
4. Rappresentare lo spazio delle soluzioni che la funzione deve esplorare per individuare i vettori soluzione.