

Отчёт по лабораторной работе №5
«Нормальное распределение и его
приложения»

Молькова А.Е.
Группа R4197

В отчёте рассматривается проверка Центральной Предельной Теоремы (ЦПТ) посредством моделирования. Для трёх распределений (равномерного, экспоненциального и пуассоновского) сгенерированы выборки большого количества повторных экспериментов, вычислены выборочные средние и исследована их эмпирическая форма. Показано, что при достаточно большом размере выборки распределение выборочных средних стремится к нормальному независимо от формы исходного распределения. Результаты моделирования подтверждают теоретические оценки математического ожидания и дисперсии выборочных средних, а также демонстрируют поведение теста Шапиро–Уилка при проверке нормальности.

1 Задача

Целью работы является экспериментальная проверка Центральной Предельной Теоремы. Для этого необходимо:

- Сгенерировать $k = 1000$ независимых выборок размером n из распределений: равномерного $U(0, 1)$, экспоненциального $\text{Exp}(\lambda = 1)$ и пуассоновского $\text{Pois}(\lambda = 3)$.
- Для каждой выборки вычислить выборочное среднее \bar{X} и исследовать распределение \bar{X} для $n = 10, 30, 60$.
- Построить гистограммы выборочных средних и QQ-плоты.
- Проверить нормальность выборочных средних тестом Шапиро–Уилка.

2 Теоретическая часть

Центральная Предельная Теорема утверждает, что при больших n среднее независимых одинаково распределённых случайных величин стремится к нормальному распределению. Пусть X_1, \dots, X_n — независимые случайные величины с математическим ожиданием μ и дисперсией σ^2 . Тогда выборочное среднее $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum X_i$ при $n \rightarrow \infty$ распределено как

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right).$$

Для рассматриваемых распределений известны параметры:

$$U(0, 1) : \mu = 0.5, \sigma^2 = \frac{1}{12},$$

$$\text{Exp}(1) : \mu = 1, \sigma^2 = 1,$$

$$\text{Pois}(3) : \mu = 3, \sigma^2 = 3.$$

3 Методика моделирования

В работе использованы библиотеки Python: NumPy, SciPy, Matplotlib, Seaborn. Для каждого распределения сгенерировано $k = 1000$ выборок размера n , затем вычислено среднее каждой выборки. Далее построены гистограммы, QQ-плоты и выполнен тест Шапиро–Уилка.

4 Реализация и результаты

4.1 Равномерное распределение $U(0, 1)$

Для равномерного распределения сгенерированы выборки при $n = 10$ и $n = 30$. Эмпирические значения среднего и дисперсии совпадают с теоретическими, что подтверждает ЦПТ.

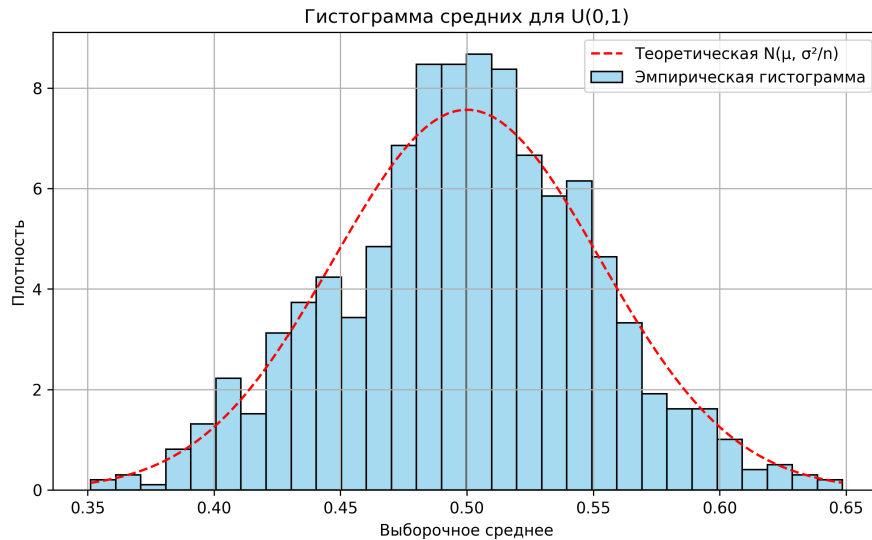


Рис. 1: Гистограмма выборочных средних для распределения $U(0, 1)$ и нормальная аппроксимация.

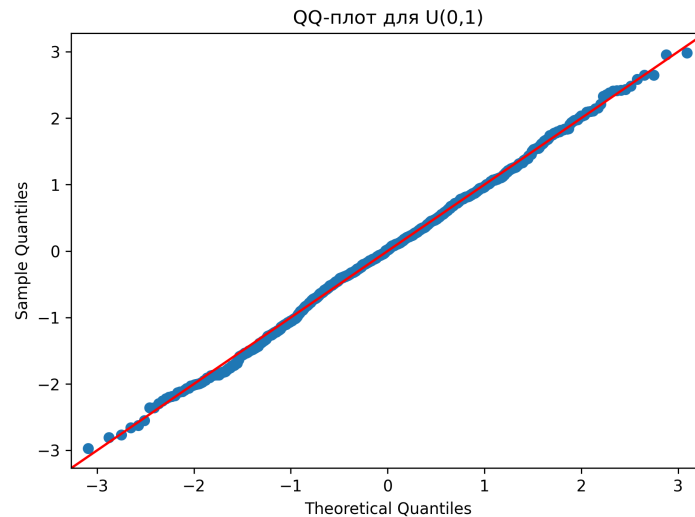


Рис. 2: QQ-плот выборочных средних для распределения $U(0, 1)$.

4.2 Экспоненциальное распределение $\text{Exp}(1)$

Экспоненциальное распределение является существенно асимметричным, поэтому сходимость к нормальному закону происходит медленнее. Тем не менее, уже при $n = 30$ гистограмма выборочных средних приобретает почти симметричный вид.

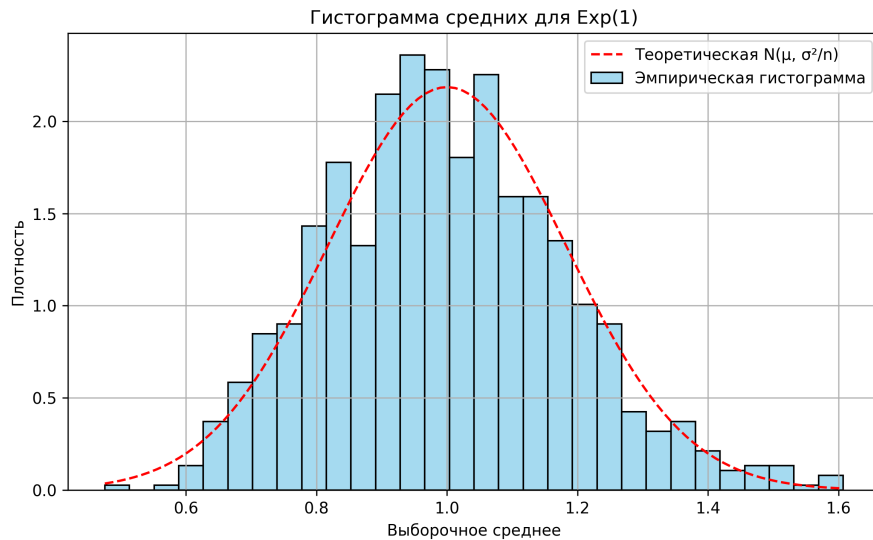


Рис. 3: Гистограмма выборочных средних для распределения $\text{Exp}(1)$ и нормальная аппроксимация.

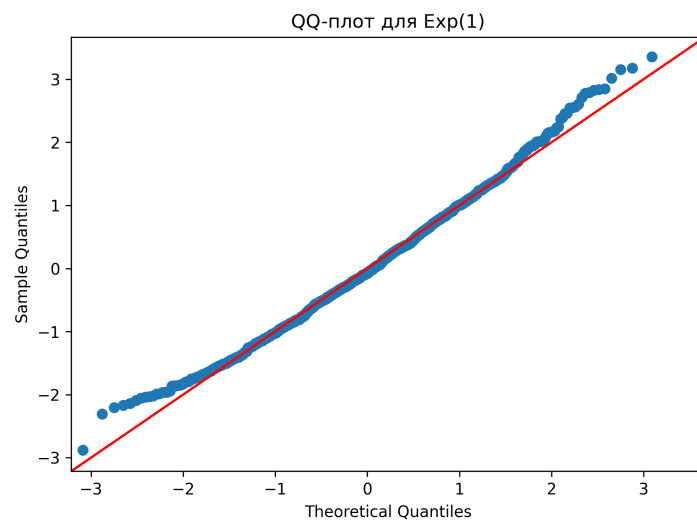


Рис. 4: QQ-плот выборочных средних для распределения $\text{Exp}(1)$.

4.3 Пуассоновское распределение $\text{Pois}(3)$

Для пуассоновского распределения были рассмотрены выборки при $n = 50$. Гистограмма выборочных средних выглядит почти нормальной, что хорошо согласуется с предсказаниями ЦПТ.

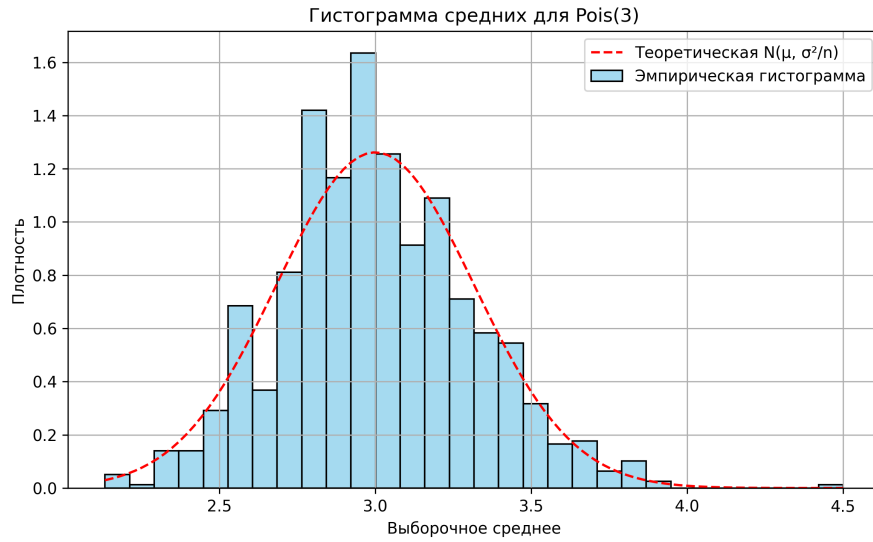


Рис. 5: Гистограмма выборочных средних для распределения $\text{Pois}(3)$ и нормальная аппроксимация.

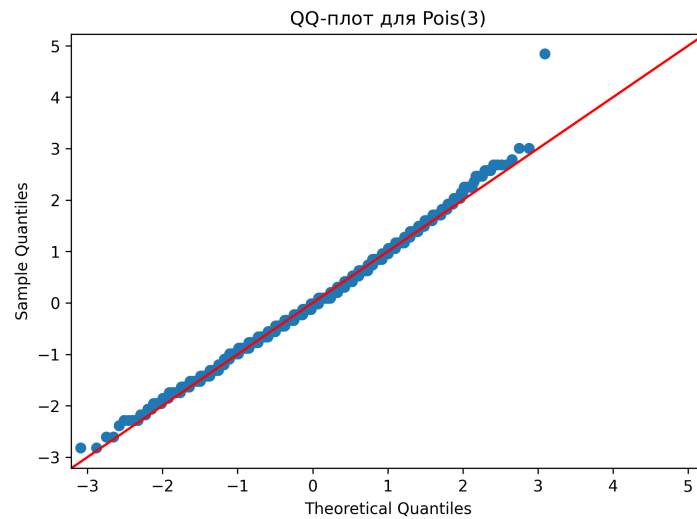


Рис. 6: QQ-плот выборочных средних для распределения $\text{Pois}(3)$.

Сводные таблицы результатов

Таблица 1: Эмпирические и теоретические характеристики \bar{X} при $n = 30$.

Распределение	$\mathbb{E}[\bar{X}]_{\text{эмп}}$	μ	$\mathbb{D}[\bar{X}]_{\text{эмп}}$	σ^2/n
$U(0, 1)$	0.4988	0.50	0.00265	0.00278
$\text{Exp}(1)$	1.016	1.00	0.0306	0.0333
$\text{Pois}(3)$	3.010	3.00	0.1029	0.1000

Таблица 2: Результаты теста Шапиро–Уилка для \bar{X} ($n = 30$).

Распределение	W	p -value
$U(0, 1)$	0.9970	0.716
$\text{Exp}(1)$	0.9799	0.016
$\text{Pois}(3)$	0.9974	0.111

5 Интерпретация результатов

Полученные результаты подтверждают Центральную Предельную Теорему. Даже для асимметричных и дискретных распределений выборочные средние стремятся к нормальному виду при увеличении n . Пуассоновское и равномерное распределения демонстрируют хорошее приближение уже при $n = 30$, в то время как экспоненциальному требуется больший объём выборки.

6 Выводы

В ходе работы выполнено моделирование ЦПТ для трёх различных распределений. Распределение выборочных средних приближается к нормальному, эмпирические параметры совпадают с теоретическими. Гистограммы, QQ-плоты и тесты нормальности подтверждают справедливость ЦПТ.