

一、每题 2 分，本题共 16 分

1 × 2 ✓ 3 ✓ 4 A 5 D 6 B 7 A 8 C

二、每题 7 分，共 14 分

1. 解：有多种方法

法 I，把各列都加到第一列上去得

$$D = \begin{vmatrix} x & -1 & 1 & x-1 \\ x & -1 & x+1 & -1 \\ x & x-1 & 1 & -1 \\ x & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 1 & 0 & x & 0 \\ 1 & x & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = x(-1)^{\tau(4321)} x^3 = x^4$$

①2 分

②1 分

③2 分

④1 分

⑤1 分

注：①②可以一次得到 3 分

④⑤可以一次得到 2 分

直接给出结果，只得 2 分

中间过程太简单，但结果正确得 5 分

法 II，第一列的 1 倍分别加到 2、4 列、-1 倍加到 3 列；然后第 1、2、3 行的 -1, 1, 1 倍加到第 4 行上去

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 1 & 0 & x & 0 \\ 1 & x & 0 & 0 \\ x+1 & x & -x & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 1 & 0 & x & 0 \\ 1 & x & 0 & 0 \\ x & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\tau(4321)} x^4 = x^4$$

①2 分

②3 分

③2 分

直接给出结果，只得 2 分

中间过程太简单，但结果正确得 5 分

其他方法如加边法等类似给分

2. 解：有多种解法

法 I 第 1 行加到第 2 行，然后新的第 2 行加到第 3 行，然后新的第 3 行加到第 4 行

$$D = \begin{vmatrix} 1 & a & & \\ 0 & 1 & b & \\ & -1 & 1-b & c \\ & & -1 & 1-c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & & \\ 0 & 1 & b & \\ & 0 & 1 & c \\ & & -1 & 1-c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & & \\ 0 & 1 & b & \\ & 0 & 1 & c \\ & & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

①2 分

②2 分

③1 分

④2 分

注：可以直接得到③，共得 5 分

直接给出结果，只得 2 分

法 II，各行都加到第 4 行

$$D = \begin{vmatrix} 1 & a & & \\ -1 & 1-a & b & \\ & -1 & 1-b & c \\ & & & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{4+4} \begin{vmatrix} 1 & a & & \\ -1 & 1-a & b & \\ & -1 & 1-b & \\ & & & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & & \\ -1 & 1-a & b & \\ & -1 & 1-b & \\ & & & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & a & \\ -1 & 1-a & \end{vmatrix}$$

①3 分

②1 分

③1 分

④1 分

$$= 1 - a + a = 1$$

⑤1 分

注：②中的 $(-1)^{4+4}$ 和④中的 $(-1)^{3+3}$ 可以省略

⑤可以一步得到

其他方法类似给分

三、解：有多种解法

法 I 用 A 左乘 $A^*X = A^{-1} + 2X$ 得

$$AA^*X = AA^{-1} + 2AX \quad (2 \text{ 分})$$

$$\text{即 } |A|X = E + 2AX \quad (1 \text{ 分})$$

$$\text{故 } (|A|E - 2A)X = E \quad (1 \text{ 分})$$

$$\text{由于 } |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 \quad (1 \text{ 分})$$

$$\text{故 } B = |A|E - 2A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad (1 \text{ 分})$$

$$\text{而 } \begin{pmatrix} B \\ E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -4 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} \quad (3 \text{ 分})$$

注：若 B 算错，而按照错的 B 得到正确的 B^{-1} 则得到 3 分；

若 B 正确，求 B^{-1} 过程对，得数错得 2 分

还可以用伴随矩阵法求 B^{-1}

$$\text{故 B 可逆，且 } X = B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} \quad (1 \text{ 分})$$

注：若 B 算错，而按照错的 B 得到正确 X 则得到 1 分

法 II，由 $A^*X = A^{-1} + 2X$ 得

$$(A^* - 2E)X = A^{-1} \quad (2 \text{ 分})$$

$$\text{而： } |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 \quad (1 \text{ 分})$$

$$\text{求得 } A^* = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad (2 \text{ 分})$$

$$\text{故 } A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^* = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \quad (1 \text{ 分})$$

$$A^* - 2E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad (1 \text{ 分})$$

$$\text{求得 } (A^* - 2E)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2 \text{ 分})$$

$$\text{故 } X = (A^* - 2E)^{-1} A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} \quad (1 \text{ 分})$$

注：还有其它方法