2005 测试 A 参考答案【注意：此次课本为《高等数学》，四川大学版】

一、1. C　　2. B　　3. D　　4. D　　5. C

二、 1.　0　　2.　0

三、$A^{-1}=\begin{pmatrix}1&3&-2\\-1.5&-3&-2.5\\1&1&-1\end{pmatrix}$，$B^{-1}=\begin{pmatrix}3&-1\\-5&2\end{pmatrix}$，故 $X=A^{-1}CB^{-1}=\begin{pmatrix}-2&1\\10&-4\\-10&4\end{pmatrix}$

四、$B=\begin{pmatrix}1&2&1&1\\1&t&1&t\\1&2&t^2&t^2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1&1\\0&t-2&0&t-1\\0&0&t^2-1&t^2-1\end{pmatrix}$因此，$t=2$ 时，无解；$t\neq\pm1$ 时有唯一解 $\left(-\dfrac{2(t-2)}{t-1},\ \dfrac{t-2}{t-1},\ 1\right)^T$；$t=1$时有无穷解$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-c\\0\\c\end{pmatrix}$或$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$，$(c\in R)$或 C 任意取值；

当$t=-1$时，有无穷解$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-4/3-c_2\\2/3\\c_2\end{pmatrix}$或$\begin{pmatrix}-1/3\\2/3\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$，$(c_2\in R)$或 C_2 任意取值.

五、(1) $TE_{11}=\begin{pmatrix}0&2\\2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\2&0\end{pmatrix}=2E_{21}$，$TE_{12}=\begin{pmatrix}0&2\\2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&2\end{pmatrix}=2E_{22}$

$TE_{21}=\begin{pmatrix}0&2\\2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0\\0&0\end{pmatrix}=2E_{11}$　$TE_{22}=\begin{pmatrix}0&2\\2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&2\\0&0\end{pmatrix}=2E_{12}$

故 $A=\begin{pmatrix}0&0&2&0\\0&0&0&2\\2&0&0&0\\0&2&0&0\end{pmatrix}$

（2）$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda&0&-2&0\\0&\lambda&0&-2\\-2&0&\lambda&0\\0&-2&0&\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda&-2\\-2&\lambda\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\lambda&-2\\-2&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-2)^2(\lambda+2)^2$ 故特征根 $\lambda_1=\lambda_2=2$ 对应特征向量 $k_1(1,0,1,0)^T+k_2(0,1,0,1)^T$，其中 k_1,k_2 不同时为 0；$\lambda_3=\lambda_4=-2$ 对应特征向量 $k_3(-1,0,1,0)^T+k_4(0,-1,0,1)^T$，其中 k_3,k_4 不同时为 0；

(3) $P=\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&0&-1\\1&0&1&0\\0&1&0&1\end{pmatrix}$，$\Lambda=\begin{pmatrix}2&&&\\&2&&\\&&-2&\\&&&-2\end{pmatrix}$

六、$y_1^2-3y_2^2-\frac{5}{3}y_3^2$，$X=\begin{pmatrix}1 & -2 & -2/3\\ 0 & 1 & -2/3\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}Y$；多种结果但正负惯性指数不变，并且保证$C^TAC$为对角形。

七、α_2,α_3应满足，$\alpha_1^T\alpha_2=0,\alpha_1^T\alpha_3=0$，故求$\alpha_1^Tx=0$的基础解系为$\beta_1=(-1,1,0)^T$，$\beta_2=(-1,0,1)^T$，并正交化即为要求的$\alpha_2,\alpha_3$（有多种答案）$\alpha_2=\beta_1=(-1,1,0)^T$，$\alpha_3=\beta_2-\frac{\langle\beta_2,\beta_1\rangle}{\langle\beta_1,\beta_1\rangle}\beta_1=\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1\right)^T$

八、（1）因$\alpha_2,\alpha_3,\ldots,\alpha_m$线性无关，故其部分组$\alpha_2,\alpha_3,\ldots,\alpha_{m-1}$线性无关，而$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{m-1}$线性相关，故$\alpha_1$可由$\alpha_2,\alpha_3,\ldots,\alpha_{m-1}$线性表示，因此也可由$\alpha_2,\alpha_3,\ldots,\alpha_m$线性表示。

（2）由(1)知α_1可由$\alpha_2,\alpha_3,\ldots,\alpha_{m-1}$线性表示，故向量组$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{m-1}$可由向量组$\alpha_2,\alpha_3,\ldots,\alpha_{m-1}$线性表出，假设$\alpha_m$能由$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{m-1}$线性表示，则由传递性知$\alpha_m$能由$\alpha_2,\alpha_3,\ldots,\alpha_{m-1}$线性表示，从而$\alpha_2,\alpha_3,\ldots,\alpha_m$线性相关，这与$\alpha_2,\alpha_3,\ldots,\alpha_m$线性无关矛盾，故$\alpha_m$不能由$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{m-1}$线性表示。

九、（1）由 G 为正定矩阵知其 n 阶主子式 |A|>0，故 A 是可逆矩阵。

（2）由G为正定矩阵知G为对称矩阵，从而$G^T=\begin{pmatrix}A^T & B\\ B & D^T\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}A & B\\ B^T & D\end{pmatrix}=G$，因此$D=D^T$，$A=A^T$都为对称矩阵，故$(A^{-1})^T=(A^T)^{-1}=A^{-1}$，从而$\left(D-B^TA^{-1}B\right)^T=D^T-B^T(A^{-1})^TB=D-B^TA^{-1}B$为对称矩阵。

(3) 由于存在可逆矩阵$P=\begin{pmatrix}E & A^{-1}B\\ 0 & E\end{pmatrix}$使得$P^TGP=\begin{pmatrix}A & \\ & D-B^TA^{-1}B\end{pmatrix}$，而合同变换不改变矩阵的正定性，故$\begin{pmatrix}A & \\ & D-B^TA^{-1}B\end{pmatrix}$仍为正定矩阵，从而$D-B'A^{-1}B$是正定矩阵。