信息学院本科生 2008－2009 学年第一学期（A 卷参考答案）

一、　(1−3 每小题 2 分，4−8 每小题 2 分，共 16 分)

1. √　2. ×　3. √　4. B　5. B　6. C　7. B　8. C

二、　计算题 (第 1 小题 7 分，第 2 小题 8 分，共 15 分)

1. 解：第一行的 $-a_3$ 倍加到第 4 行，$-a_2$ 倍加到第 3 行，$-a_1$ 倍加到第 2 行，

$$D=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&a-a_1&a_2-a_1&a_2-a_1\\0&0&a-a_2&a_3-a_2\\0&0&0&a-a_3\end{vmatrix}=(a-a_1)(a-a_2)(a-a_3)$$

5 分　　2 分

2. 后 $n-1$ 行减去第 1 行，再第 j 列的 $\frac{x_n}{x_j}(j=1,2,...,n-1)$ 倍加到第 1 列

$$D=\begin{vmatrix}1&2&\cdots&n-1&n+x_n\\0&0&\cdots&x_{n-1}&-x_n\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&x_2&\cdots&0&-x_n\\x_1&0&\cdots&0&-x_n\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&\cdots&n-1&\sum_{j=1}^{n}\frac{x_n}{x_j}j+x_n\\0&0&\cdots&x_{n-1}&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&x_2&\cdots&0&0\\x_1&0&\cdots&0&0\end{vmatrix}$$

(3 分)　　(3 分)

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{n}{x_j})\prod_{i=1}^{n}x_i$$ **(2 分) 注：前面符号错扣 1 分**

三、　(10 分)

解：　由 $AB-B=A$ 知 $A(B-E)=B$（2 分），由 $(B-E)=\begin{bmatrix}0&-2&0\\2&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，显然 $|B-E|\neq 0$，

故 $(B-E)^{-1}$ 存在（1 分），所以 $A=B(B-E)^{-1}$（1 分），从而计算知 $(B-E)^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&2\end{bmatrix}$

（3 分）所以 $A=B(B-E)^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2&1&0\\-1&2&0\\0&0&4\end{bmatrix}$（3 分）注：没有判断 $(B-E)^{-1}$ 存在扣 1 分。

四、　本题有多种方法，仅举一种，共 8 分。

证明：设数 k_1,k_2,k_3 满足 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0$①(2 分).

若 $k_3\neq 0$，则，则由①得 $\alpha_3=-\frac{1}{k_3}(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2)$，这与已知 α_3 不能被 α_1,α_2 线性表示矛盾. 于是有 $k_3=0$，因此①变为 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2=0$，(2 分),

若$k_2 \neq 0$，则由上式有$\alpha_2 = -\frac{1}{k_2}k_1\alpha_1$，与已知$\alpha_2$不能被$\alpha_1$线性表示矛盾。所以有$k_2 = 0$，所以①变为$k_1\alpha_1 = 0$ (2 分)

但已知$\alpha_1 \neq 0$，所以有$k_1 = 0$。于是$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关。（2 分）

五.（共 14 分）解：1．对方程组的增广矩阵施行行初等变换，得到：

$$(A,b)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & a-3 & -2 & b \\ 3 & 2 & 1 & a & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 & b+1 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 & 0 \end{pmatrix}，（3 分）。$$

可见当$a-1 \neq 0$，即$a \neq 1$时，方程组系数矩阵的秩等于未知数的个数，方程组唯一解；当$a-1=0, b+1 \neq 3$，即$a=1, b \neq -1$时系数矩阵的秩为 2，增广矩阵的秩为 3，方程组无解；当$a-1=0, b+1=0$，即$a=1, b=-1$时系数矩阵的秩等于增广矩阵的秩，但小于未知数的个数，故方程组此时有无穷多组解。（共 6 分，错一个扣 2 分）。

解$a=1, b=-1$时的方程组，即求解

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1 \end{cases} \quad （1 分）$$

此时方程组有 2 个自由未知量，故可改写为

$$\begin{cases} x_1 = -1 - x_3 - x_4 \\ x_2 = 1 - 2x_3 - 2x_4 \end{cases}$$

所以此方程组的通解可表示为为：$\begin{cases} x_1 = -1 - \tilde{x}_3 - \tilde{x}_4 \\ x_2 = 1 - 2\tilde{x}_3 - 2\tilde{x}_4 \\ x_3 = \tilde{x}_3 \\ x_4 = \tilde{x}_4 \end{cases}$。 $\tilde{x}_3, \tilde{x}_4 \in R$（共 4 分）

注：求对基础解系 2 分，表达出来 1 分，说明$\tilde{x}_3, \tilde{x}_4 \in R$ 1 分。

六.（共 14 分）解：（1）

$$f \text{ 的矩阵 } A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}。 \qquad （2 分）$$

（2）该矩阵的特征多项式为：

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}2-\lambda & 0 & 0\\ 0 & -\lambda & 1\\ 0 & 1 & -\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)(1-\lambda)(1+\lambda) \quad （2 分）。$$

所以该矩阵的特征根为$\lambda_1=2,\lambda_2=-1$和$\lambda_3=-1$。（1 分）。

先求关于$\lambda_1=2$的特征向量，即解线性方程组$(2\cdot E-A)X=0$，即解以下方程组：

$$\begin{cases}x_2=0\\ x_3=0\end{cases}$$

所以可以得到 1 个关于$\lambda_1=2$的特征向量$\xi_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，类似的求解$(1\cdot E-A)X=0$得到关于

$\lambda_2=1$的特征向量$\xi_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$，求解$(-1\cdot E-A)X=0$得到关于$\lambda_3=-1$的特征向量$\xi_3=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$。

（3 个基础解系共 4 分，错 1 个扣 1 分）

因为这三个向量是实对称矩阵不同特征根的特征向量，故它们两两正交。（这句可以不说）

再将它们单位化，得到$\eta_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，$\eta_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$，$\eta_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$，（2 分）

所以所求正交矩阵为$T=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$，正交变换为$\begin{cases}x_1=y_1\\ x_2=\frac{1}{\sqrt{2}}y_2+\frac{1}{\sqrt{2}}y_3\\ x_3=\frac{1}{\sqrt{2}}y_2-\frac{1}{\sqrt{2}}y_3\end{cases}$，（2 分）。

得到的标准形为$f=2y_1^2+y_2^2-y_3^2$。（1 分）

七．有多种方法，共 10 分。解：$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$到$\beta_1,\beta_2,\beta_3$过渡矩阵$P=\begin{pmatrix}p_{11} & p_{12} & p_{13}\\ p_{21} & p_{22} & p_{23}\\ p_{31} & p_{32} & p_{33}\end{pmatrix}$满足

$$(\beta_1 \quad \beta_2 \quad \beta_3)=(\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3)P \quad （2 分）$$

即由$\beta_1=p_{11}\alpha_1+p_{21}\alpha_2+p_{31}\alpha_3$求$p_{11},p_{21},p_{31}$。因$(\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3)$可逆，所以

$$(p_{11} \quad p_{21} \quad p_{31})^T=(\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3)^{-1}\beta_1 \quad （2 分）$$

求得 $(\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3)^{-1}=\begin{pmatrix}2&0&-1\\2&1&-2\\-1&0&1\end{pmatrix}$，所以 $\begin{pmatrix}p_{11}\\p_{21}\\p_{31}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&-1\\2&1&-2\\-1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$，类似的，

$\begin{pmatrix}p_{12}\\p_{22}\\p_{32}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&-1\\2&1&-2\\-1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}p_{13}\\p_{23}\\p_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&-1\\2&1&-2\\-1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$。所以

$$P=\begin{pmatrix}2&2&1\\2&3&1\\-1&1&0\end{pmatrix} \quad （3 分）$$

由已知 $\alpha=(1 \quad 3 \quad 1)^T$，将它写成 β_1,β_2,β_3 的线性组合，得 $\alpha=\beta_3+2\beta_2-2\beta_1$。（2 分）

所以它在基底 β_1,β_2,β_3 下的坐标为 $x=(-2,2,1)^T$。（1 分）

八、（多种证明方法）证明：因 A,B 都为实对称矩阵，所以 A,B 都可经过合同变换化为它们各自的规范型矩阵，即对角形矩阵，且对角线上元素为 1，-1 或 0。（2 分）

由 A,B 都正定，所以它们的正惯性指数为 n，即各自的规范型矩阵都是单位矩阵，即 A,B 都合同于单位矩阵。（3 分）

又合同关系具有对称性和传递性，所以 A 合同与 B。（3 分）

九、证明：AP=(AX, A^2X, A^3X), 设 $B=\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}\\b_{31}&b_{32}&b_{33}\end{pmatrix}$，则（1 分）

$$(AX,A^2X,3AX-2A^2X)=(X,AX,A^2X)\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}\\b_{31}&b_{32}&b_{33}\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}AX=b_{11}X+b_{21}AX+b_{31}A^2X\\A^2X=b_{12}X+b_{22}AX+b_{32}A^2X\\3AX-2A^2X=b_{13}X+b_{23}AX+b_{33}A^2X\end{cases} \quad （2 分）$$

由向量组{X，AX，A^2X}线性无关可得：

$b_{11}=0$，$b_{21}=1$，$b_{31}=0$，$b_{12}=0$, $b_{22}=0$，$b_{32}=1$, $b_{13}=0$, $b_{23}=3$, $b_{33}=-2$

所以 $B=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&3\\0&1&-2\end{pmatrix}$ （2 分）