信息学院 2001 级线性代数期末考试题(A 卷)

【注意：此次课本为《高等代数》，北京大学版】

1．计算行列式

$$\begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & \cdots & 1+x_1y_n \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \cdots & 1+x_2y_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1+x_ny_1 & 1+x_ny_2 & \cdots & 1+x_ny_n \end{vmatrix}$$

2．求 A^{-1}，其中 $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$。

3．求使得下面二次型正定的所有参数 λ 的值

$$5x_1^2+x_2^2+\lambda x_3^2+4x_1x_2-2x_1x_2-2x_2x_3$$

4．T 为如下矩阵，设 $A_{m\times m}$，$D_{n\times n}$，求证 T 可逆的充分必要条件是 $(A-BD^{-1}C)$ 是可逆的。

$$T=\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

5．设 A 为 n×n 矩阵，证明：如果 A^2＝E，那么 r(A+E)+r(A-E)=n。

6．$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$，求正交矩阵 Q，使 $Q^{-1}AQ$ 为对角形矩阵。

7．设三阶矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=3$，对应的特征向量依次为

$$\varepsilon_1=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},\varepsilon_2=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix},\varepsilon_3=\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{bmatrix}，\text{又向量 } \beta=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

(1) 将 β 用 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 线性表出；

(2) 求 $A^n\beta$，(n 为自然数)；

(3) 求 A。

8．设 A 是 m×s 矩阵，B 是 m×n 矩阵，证明：矩阵方程 AX＝B 有解的充要条件是矩阵(A, B)与矩阵 A 的秩相等。

9．已知向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关，设 $\beta_1=\alpha_1+\alpha_2$，$\beta_2=\alpha_2+\alpha_3$，…，$\beta_{s-1}=\alpha_{s-1}+\alpha_s$，$\beta_s=\alpha_s+\alpha_1$。讨论自然数 s 为奇、偶数时，$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 的线性相关性如何？证明你的讨论。

信息学院 2001 级线性代数期末考试题(A 卷)

【注意：此次课本为《高等代数》，北京大学版】

1．判断向量组的线性相关性，并求一个极大线性无关组及该向量组的秩

$\alpha_1=(1,2,3,4)$，$\alpha_2=(4,-1,-5,-6)$，$\alpha_3=(1,-3,-4,-7)$，$\alpha_4=(2,1,-1,0)$

2．求行列式的值 $\begin{vmatrix} -a_1 & a_1 & & & & \\ & -a_2 & a_2 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & -a_{n-1} & a_{n-1} \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$

3．已知 $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$，求 A^{-1}

4．A，B，C 均为 n 阶方阵，$M=\begin{bmatrix} A & A \\ C-B & C \end{bmatrix}$

证明：(1)M 可逆的充分必要条件是 A，B 均可逆；

(2)当 M 可逆时，求 M 的逆矩阵。

5．$A=\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$，求

(1) A 的全部特征根；

(2) A 的全部特征向量；

(3) 可逆矩阵 P，使 $P^{-1}AP$ 为对角形；

(4) 正交矩阵 Q，使 $Q^{-1}AQ$ 为对角形。

6．已知 $A^2-3A+2E=0$，A 为 n 阶方阵，证明：$r(A-E)+r(A-2E)=n$

7．A 为 n 阶方阵，存在非零向量 α，使得 $A^{n-1}\alpha\neq 0$，但 $A^n\alpha=0$，证明：

(1) $\alpha, A\alpha, \cdots, A^{n-1}\alpha$ 线性无关；

(2) $|\lambda E-A|=\lambda^n$

8．A，B 为实方阵，G 为 n×m 矩阵，r(G)＝m，B>0（正定），$A=\begin{bmatrix} B & G \\ G' & 0 \end{bmatrix}$，证明：A 有 n 个正特征根，m 个负特征根。

信息学院 2002 级线性代数期末考试题(A 卷)

【注意：此次课本为《高等代数》，北京大学版】

系别__________姓名__________学号__________成绩________

1．计算下面 n（n>2）级行列式。（18 分）

（1）$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 4 \end{vmatrix}$　　（2）$\begin{vmatrix} y & 0 & \ldots & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & x & y \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & x & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ x & y & \ldots & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

2．已知矩阵方程 $X\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$，求矩阵 X。(12 分)

3．求线性方程组 $\begin{cases} 2x_1-3x_2+x_3+5x_4=6 \\ -3x_1+x_2+2x_3-4x_4=5 \\ -x_1-2x_2+3x_3+x_4=11 \end{cases}$ 的全部解（通解）。（12 分）

4．已知 A，B 均为 n 级方阵，证明：$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix}=|A+B|\cdot|A-B|$　（8 分）

5．设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-3x_2^2-2x_1x_2+2x_1x_3-6x_2x_3$，

化此二次型为标准形，写出所用的总的线性变换，并给出此二次型的秩。（12 分）

6．在线性空间 P^3 中，取两组基：

（I）$\varepsilon_1=(1,0,1),\quad \varepsilon_2=(1,1,0),\quad \varepsilon_3=(0,1,1)$

(II) $\eta_1=(1,0,3),\quad \eta_2=(2,2,2),\quad \eta_3=(-1,1,4)$

（1）求基(I)到基(II)的过渡矩阵；

（2）设向量 α 在基(I)下的坐标为(1,1,3)，求 α 在基(II)下的坐标。（12 分）

7．设 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ 是线性无关的向量组，$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r, \beta$ 线性相关，

试证明：β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ 线性表示，并且表达式是唯一的。（8 分）

8．设 **A** 是 n 维线性空间 V 上的线性变换，$\alpha\in V$，如果 $\mathbf{A}^{n-1}\alpha\neq 0$，但 $\mathbf{A}^n\alpha=0$，

求证：(1) $\alpha,\mathbf{A}\alpha,\ldots,\mathbf{A}^{n-1}\alpha$ 线性无关；(2) 线性变换 **A** 的特征多项式等于 λ^n。 (8 分)

9．已知 $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$ 对于其实系数的加法和数乘构成一个线性空间 $P[x]_4$，

$(\varepsilon_1=1,\varepsilon_2=x,\varepsilon_3=x^2,\varepsilon_4=x^3)$ 是它的一组基，

(1)在该空间中，验证 $\mathbf{A}=\frac{d^2}{dx^2}+\frac{d}{dx}+1$ 是一个线性变换；(2)求 **A** 在上述基下的矩阵；(3)求 **A** 的所有特征值和特征向量。（10 分）

信息学院 2003 级线性代数期末考试题(A 卷)

系别____________姓名__________学号__________成绩_______

【注意：此次课本为《高等代数》，北京大学版】

1．求下列行列式的值。（18 分）

（1）$\begin{vmatrix} a_1+x & a_2 & a_3 & a_4 \\ -x & x & 0 & 0 \\ 0 & -x & x & 0 \\ 0 & 0 & -x & x \end{vmatrix}$　　（2）$d=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & n \end{vmatrix} (n \geq 2)$

2. 求线性方程组的通解。（12 分）　$\begin{cases} 2x_1+3x_2+x_3+5x_4=6 \\ -3x_1+x_2+2x_3-4x_4=5 \\ -x_1-2x_2+3x_3+x_4=-1 \end{cases}$

3．已知矩阵 A，求 A^{-1}。（10 分）　$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

4．　在实数域上将二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+2x_2^2+2x_3^2-4x_1x_2-4x_2x_3$ 化为标准形，并写出总的线性替换矩阵，说明此二次型是哪种类型的（正定、半正定、负定、半负定或不定）？（12 分）

5．设 A，B 为 n 级方阵，证明：$\begin{vmatrix} A & E \\ E & B \end{vmatrix} = |AB-E|$　（10 分）

6．在线性空间 $P^{2\times 2}$ 中，定义线性变换 $A(X)=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}X$，求 A 在一组基

$$\varepsilon_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \varepsilon_2=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \varepsilon_3=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \varepsilon_4=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

下的矩阵，并求 A 的特征值和特征向量。（15 分）

7．在线性空间 V 中，向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关，而 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta,\gamma$ 线性相关，证明：或者 β 与 γ 中至少有一个可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性表出，或者向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta$ 与向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\gamma$ 等价。（10 分）

8．设 **A** 是 n 阶方阵，证明：(8 分)

(a) $A^2=A$ 的必要条件是：秩(A)+秩(E－A)=n;

(b) 秩(A)+秩(E－A)=n 也是 $A^2=A$ 的充分条件。

9．n 维线性空间 V 中的线性变换 A，若 A 的秩为 r，则：（5 分）

(a) 可适当选取 A 的一组基，使 A 在这组基下的矩阵为 $B=\begin{pmatrix} M_{n\times r} & O_{n\times(n-r)} \end{pmatrix}$

(b) 可适当选取 A 的一组基，使 A 在这组基下的矩阵为 $B=\begin{pmatrix} N_{r\times n} \\ O_{(n-r)\times n} \end{pmatrix}$

2004 年，光电子专业 线性代数试题

（满分 50 分，时间 50 分钟，与高数一部分合在一起考试）

【注意：此次课本为《高等数学》，四川大学版】

1. 计算 n(n>2)阶行列式 (8 分)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & n \end{vmatrix}$$

2. 在矩阵方程 $XA = B$ 中，$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

   (1) 求 A^{-1}

   (2) 求矩阵 B 的秩

   (3) 求矩阵 X (10 分)

3. 设向量 β 能用向量组 α_1, α_2, $\cdots$,α_m 线性表出，且表示法唯一，证明向量组 α_1, α_2, $\cdots$,α_m 线性无关。(7 分)

4. 已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3$

   (1) 化该二次型为标准形并给出所用的总的坐标变换

   (2) 上述二次型是否为正定性二次型？并给出依据。(10 分)

5. 在 R^3 中，线性变换 T 在基底 $\eta_1 = (-1,1,1)$，$\eta_2 = (1,0,-1)$，$\eta_3 = (0,1,1)$ 下的矩阵为 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$。另一组基底为 $\varepsilon_1 = (1,0,0)$，$\varepsilon_2 = (0,1,0)$，$\varepsilon_3 = (0,0,1)$。

   (1) 给出基底 η_1, η_2, η_3 到基底 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 的过渡矩阵

   (2) 求线性变换 T 在基底 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 下的矩阵 B

   (3) 求矩阵 A 的全部特征根和全部特征向量

   (4) 求可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}AP = D$ 为对角形，并给出此对角形矩阵 D (15 分)

信息学院 2004 级 线性代数 期末考试题（A 卷）［2005 年考试］

系别____________姓名__________学号__________成绩_______

【注意：此次课本为《高等数学》，四川大学版】

一、 选择填空（每题 2 分，共 10 分）

1．设 A, B 均为 n 阶方阵，且 AB = 0, 则必有（　　　）

(A) A = 0 或 B = 0　(B) A + B = 0　(C) $|A| = 0$或$|B| = 0$　(D) $|A| + |B| = 0$

2. n 阶方阵 A 可逆，则下列说法中错误的是（　　　）

(A) A 所有的特征值均不为 0　(B) A 的特征值互不相等

(C) A 的列向量组线性无关　(D) $|A| \neq 0$

3．向量β_1，β_2线性无关，$\alpha_1 = l_1\beta_1 + l_2\beta_2$，$\alpha_2$不能用$\beta_1$，$\beta_2$线性表示，则对于任意常数 k 都有（　　　）

(A) β_1，β_2，$\alpha_1 + k\alpha_2$线性相关　（B）β_1，β_2，$\alpha_1 + k\alpha_2$线性无关

(C) β_1，β_2，$k\alpha_1 + \alpha_2$线性相关　(D) β_1，β_2，$k\alpha_1 + \alpha_2$线性无关

4．设 A 是 m×n 矩阵，下列命题正确的是 (　　　)

(A) 若 m < n, 则非齐次线性方程组 AX = β必有无穷多解。

(B) 若 r(A) = m, 则齐次线性方程组 AX = 0 只有零解

(C) 若 m ≥ n, 则非齐次线性方程组 AX = β要么无解，要么有唯一解，二者必居其一。

(D) 以上答案都不正确。

5．设 A, B 为满足 AB = 0 的任意两个非零矩阵， 则有（　　　）

(A) A 的行向量组线性相关，B 的行向量组线性相关

(B) A 的行向量组线性相关，B 的列向量组线性相关

(C) A 的列向量组线性相关，B 的行向量组线性相关

(D) A 的列向量组线性相关，B 的列向量组线性相关

二、求下列行列式的值 （每题 7 分，共 14 分）

1. $$\begin{vmatrix} a_1-b_1 & a_1-b_2 & \cdots & a_1-b_n \\ a_2-b_1 & a_2-b_2 & \cdots & a_2-b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n-b_1 & a_n-b_2 & \cdots & a_n-b_n \end{vmatrix} (n \geq 3)$$

2．已知 abcd = 1, 计算行列式 $$D = \begin{vmatrix} a^2+\frac{1}{a^2} & a & \frac{1}{a} & 1 \\ b^2+\frac{1}{b^2} & b & \frac{1}{b} & 1 \\ c^2+\frac{1}{c^2} & c & \frac{1}{c} & 1 \\ d^2+\frac{1}{d^2} & d & \frac{1}{d} & 1 \end{vmatrix}$$

三、设$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}2&1\\5&3\end{pmatrix},C=\begin{pmatrix}1&3\\2&0\\3&1\end{pmatrix}$，求矩阵 X 使其满足 AXB = C (本题 10 分)

四、在方程组$\begin{cases}x_1+2x_2+x_3=1\\x_1+tx_2+x_3=t\\x_1+2x_2+t^2x_3=t^2\end{cases}$中，t 为何值时，方程组无解，有唯一解、无穷解。有解时，求其解 （13 分）

五、在二阶方阵空间 $P^{2\times2}$ 中，定义线性变换$T\alpha=\begin{pmatrix}0&2\\2&0\end{pmatrix}\alpha,\alpha\in P^{2\times2}$。

在 $P^{2\times2}$ 的一组基底$E_{11}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},E_{12}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},E_{21}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},E_{22}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$下，

求 （1）线性变换 T 的矩阵 A

（2）矩阵 A 的特征值和特征向量

（3）可逆矩阵 P 及对角矩阵Λ，使 $P^{-1}AP=\Lambda$ (本题 16 分)

六．把二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$化成标准型，并写出所用的变换矩阵（本题 10 分 ）

七．已知$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$求一组非零向量$\alpha_2,\alpha_3$，使$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$两两正交。（本题 7 分）

八、已知向量组$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{m-1}$线性相关，$\alpha_2,\alpha_3,\ldots,\alpha_m$线性无关，

问:（1）α_1能否由$\alpha_2,\alpha_3,\ldots,\alpha_m$线性表示

（2）α_m能否由$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{m-1}$线性表示

说明你的理由（10 分）

九、A, B, D 是 n 阶实矩阵，矩阵$G=\begin{pmatrix}A&B\\B'&D\end{pmatrix}$是正定矩阵。

证明:（1）A 是可逆矩阵 （4 分）

（2）$D-B'A^{-1}B$是实对称矩阵 （4 分）

(3) $D-B'A^{-1}B$是正定矩阵 (2 分)

信息学院本科生 06-07 学年第一学期线性代数 课程期末考试试卷（A 卷）

平时成绩：________ 卷面成绩：_________ 总成绩：_________(期末成绩和平时成绩比例：80/20）

专业：___________年级：_____学号：____________姓名：____________

注意：此次课本为《高等数学》，四川大学版

题目	一	二	三	四	五	六	七	八	九	卷面成绩
分数										

一、选择填空（仅有一个正确答案）及判断正误（正确打“ √ ”；错误打“ × ”）（每题 2 分，本题共 16 分）

1. 若 $A_{n\times n}x_{n\times 1}=2x_{n\times 1}$，则 2 是 $A_{n\times n}$ 的一个特征值. (　　)

2. 若齐次方程组 $Ax=0$ 中方程的个数少于未知量的个数, 则 $Ax=0$ 一定有非零解.　　(　　)

3. 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5$ 都是 $Ax=b$ 的解，则 $\boldsymbol{\alpha}_1+4\boldsymbol{\alpha}_2-3\boldsymbol{\alpha}_3+6\boldsymbol{\alpha}_4-8\boldsymbol{\alpha}_5$ 是 $Ax=0$ 的一个解.(　　)

4. 已知 V 是一个向量空间，则（　　）。
   (A) V 中一定有零向量；　　(B) V 中一定有非零向量；
   (C) V 中一定有线性无关向量；　(D) V 中一定有无穷多个向量.

5. 若 A,B 都是三阶可逆矩阵，则(　　).
   (A) A 与 B 可换；　(B) A 与 B 相似；　(C) A 与 B 合同；　(D) A 与 B 等价.

6. 以下说法正确的是：(　　)
   (A) 负定矩阵的各阶顺序主子式都小于 0　(B) A 正定，则 A^{-1} 也正定
   (C) 两个 n 阶正定矩阵的乘积仍正定　　(D) 一个二次型若既不正定，也不负定，则必为常数 0

7. 三个 n 阶矩阵 A，B，C 满足 ABC = E, 以下说法正确的是：(　)
   (A) CAB = E;　(B) CBA = E;　(C) 秩(A)≠n;　(D) $|A|=|B|=|C|=1$

8. 设 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11}+a_{31} & a_{12}+a_{32} & a_{13}+a_{33} \end{pmatrix}$ $p_1=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，$p_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，则以下各式正确的是（　　）
   (A) $Ap_1p_2=B$　(B) $Ap_2p_1=B$　(C) $p_1p_2A=B$　(D) $p_2p_1A=B$

二、计算下列行列式（每题 7 分，共 14 分）

1. $D=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ x+1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$　　2. $D=\begin{vmatrix} 1 & a & & \\ -1 & 1-a & b & \\ & -1 & 1-b & c \\ & & -1 & 1-c \end{vmatrix}$

三、设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$,矩阵 X 满足 $A^*X=A^{-1}+2X$, 其中 A^* 是矩阵 A 的伴随矩阵，求矩阵 X。（本题 10 分）

四、已知 $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\}$ 线性无关, 向量 $\beta=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_s$。

证明：向量组$\{\beta-\alpha_1,\beta-\alpha_2,\cdots,\beta-\alpha_s\}$线性无关 （9 分）

五、已知线性方程组$\begin{cases} x_1+x_2 \quad\quad =1 \\ x_1 \quad\quad -x_3=1 \\ x_1+ax_2+x_3=b \end{cases}$，

（1）常数a,b取何值时，方程组有无穷多解、唯一解、无解？

（2）当方程组有解时，求其解.（本题共 13 分）

六、已知实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2-2x_2x_3+2x_3x_1$ 求正交变换$X=QY$，化$f(x_1,x_2,x_3)$为标准形，并写出正交变换$X=QY$。并判别二次型的正定性（正定、负定、或者二者都不是）（本题共 15 分）

七、设R^3的两组基$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$；

$\beta_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，$\beta_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$，$\beta_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ （本题共 10 分）

（1） 求由基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 到 β_1,β_2,β_3 的过渡矩阵P；

（2） 已知向量$\alpha=\alpha_1+3\alpha_2$，求向量$\alpha$在基 β_1,β_2,β_3 下的坐标

八、设向量组$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\}$;$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t\}$； $\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t\}$的秩分别为$r_1,r_3,r_2$，证明：$\max\{r_1,r_2\}\le r_3\le r_1+r_2$ （本题 8 分）

九、m×n 矩阵 A 的秩为 r，证明存在一个 m×r 矩阵 P 和一个 r×n 矩阵 Q，使得 A ＝ PQ, 其中 P 和 Q 的秩都等于 r。（5 分）

信息学院本科生 2007－2008 学年第一学期
线性代数课程期末考试试卷（A 卷）

专业：　　　　　　　　年级：　　　　学号：　　　　　　姓名：　　　　　　成绩：

说明：A^T表示矩阵 A 的转置矩阵，A^*表示矩阵 A 的伴随矩阵，E 是单位矩阵，O 是零矩阵，A^{-1}表示可逆矩阵 A 的逆矩阵，$|A|$表示方阵 A 的行列式，$\langle\alpha,\beta\rangle$表示向量$\alpha,\beta$的内积.

得 分

一、　客观题：1−3 小题为判断题，在对的后面括号中填“√”，错的后面括号中填“×”，4−6 为单选题，将正确选项前的字母填在括号中. (1−3 每小题 2 分，4−6 每小题 3 分，共 15 分)

1. 若 A，B 都是 n 阶方阵，满足 $AB=O$，且$|A|\neq 0$，则 $B=O$.　（　　　）
2. 设 T 为 n 维线性空间 V 的线性变换，V 中向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性无关，则$T\alpha_1,T\alpha_2,\cdots,T\alpha_m$线性无关.　（　　　）
3. 设向量组 1：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 可由向量组 2：$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性表示，当 $r<s$ 时，向量组 2 必线性相关.　（　　　）
4. 设 -2 是 3 阶方阵 A 的一个特征值，则 A^2 必有一个特征值为（　　　）
   (A) -8　　(B) -4　　(C) 4　　(D) 8
5. 下面说法中不正确的是　（　　　）
   (A) 排列经过一次互换改变其奇偶性.
   (B) 数量矩阵 kE 和任何同阶方阵可交换.
   (C) 若矩阵 A 中存在一个 r 阶子式不为零，则 A 的秩大于 r.
   (D) 某些向量组没有极大线性无关组.
6. 设有齐次线性方程组 $AX=0$ 和 $BX=0$，其中 A, B 均为 $m\times n$ 矩阵，现有 4 个命题：
   （1）若 $AX=0$ 的解均是 $BX=0$ 的解，则秩$(A)\geqslant$秩(B).
   （2）若秩$(A)\geqslant$秩(B)，则 $AX=0$ 的解均是 $BX=0$ 的解.
   （3）若 $AX=0$ 与 $BX=0$ 同解，则秩$(A)=$秩(B).
   （4）若秩$(A)=$秩(B)，则 $AX=0$ 与 $BX=0$ 同解.
   以上命题正确的是：　（　　　）
   （A）(1) (2)　(B) (1)(3)　(C) (2)(4)　(D) (3)(4)

得 分

二、　计算题（第 1 小题 7 分，第 2 小题 8 分，共 15 分）

1. 计算 $n(n>2)$ 阶行列式

$$|D_n|=\begin{vmatrix} x_1-m & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2-m & x_3 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n-m \end{vmatrix}$$

2. 计算矩阵 A, B, C 的行列式，其中 A, B 为 $n(n>2)$ 阶方阵.

(依次为 4 分, 2 分, 2 分)

$$A=\begin{pmatrix} 1+x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+x & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+x \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & n \end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}.$$

得 分

三、　若 $\prod\limits_{i=1}^{n} x_i \neq 0$，$A=\begin{pmatrix} 0 & x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x_{n-1} \\ x_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$，且 $n>1$，

求 A^{-1}．(8 分)

得 分

四、　有三个向量 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关，且 α_3 不能被 α_1,α_2 线性表示，证明 α_1,α_2 线性相关. (8 分)

得 分

五、　已知线性方程组（共 13 分）

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=a \\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=0 \\ x_2+2x_3+2x_4+6x_5=b \\ 5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5=-2 \end{cases}$$

(1) a,b 为何值时，方程组有解？(5 分)

(2) 方程组有解时，求出其导出组的一个基础解系. (5 分)

(3) 方程组有解时，求出方程组的全部解. (3 分)

得 分

六、 已知实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2+2x_2x_3+2x_3x_1$ ，求正交变换 $x=Qy$，将该二次型化为标准形，并写出正交变换 $x=Qy$，最后给出该二次型的负惯性指数. (15 分)

得 分

七、 E 为 n 阶单位矩阵，P,Q 为 n 阶方阵，$|P-E|\neq 0$. 设

$$A=\begin{pmatrix} P & Q \\ O & E \end{pmatrix}$$，证明：对任意正整数 k，都有

$$A^k=\begin{pmatrix} P^k & Q_k \\ O & E \end{pmatrix}$$, 其中 $Q_k=(P^k-E)(P-E)^{-1}Q$. (10 分)

得 分

八、 设 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 是 n 维线性空间 V 的一组基底，且 V 中向量 α_{n+1} 在该组基底下的坐标 $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ 中所有 x_i 全不为 0. (共 8 分)

(1)证明：$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{n+1}$ 中任意 n 个向量必可构成 V 的基底.(4 分)

(2)求 α_1 在基底 $\alpha_2,\alpha_3,\ldots,\alpha_{n+1}$ 下的坐标. (4 分)

得 分

九、 设 A 是一个 n 阶实对称矩阵，证明：(共 8 分)

(1) 若存在可逆矩阵 U，使得 $A=U^TU$，则 A 的主对角线上的元全大于零. (5 分)

(2) 设列向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是 A 的 n 个两两正交的单位特征向量，对应的特征值是 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，则

$$A=\lambda_1\alpha_1\alpha_1^T+\lambda_2\alpha_2\alpha_2^T+\cdots+\lambda_n\alpha_n\alpha_n^T$$. (3 分)

信息学院本科生 2008－2009 学年第一学期
线性代数课程期末考试试卷（A 卷）

专业：　　　　　　　　年级：　　　　学号：　　　　　　姓名：　　　　　　　成绩：

说明：A^T表示矩阵 A 的转置矩阵，A^*表示矩阵 A 的伴随矩阵，E 是单位矩阵，O 是零矩阵，A^{-1}表示可逆矩阵 A 的逆矩阵，$|A|$表示方阵 A 的行列式，$\langle\alpha,\beta\rangle$表示向量$\alpha,\beta$的内积.

得 分

一、　客观题：1−3 小题为判断题，在对的后面括号中填“√”，错的后面括号中填“×”，4−8 为单选题，将正确选项前的字母填在括号中.（每小题 2 分，共 16 分）

1. 若对于矩阵 A, B, C 有 BA=BC 且 |B|<O，则必有 A＝C。　(　　　)
2. 任何方阵总可以经过一系列初等列变换化成对角形矩阵。　(　　　)
3. 设 A 为 n 阶矩阵，若$|\lambda E-A|\neq 0$，则 λ 不是 A 的特征根。　(　　　)
4. 设 A 为正交矩阵，且 $|A|=-1$，则 $A^*=$______

   (A) A^T　　(B) $-A^T$　　(C) A　　(D) $-A$

5. 设 A, B 均为 n 阶正交矩阵，$C=AB$，则必有______

   (A) $A+B=0$　　(B) C 为正交矩阵

   (C) $|A|=0$或$|B|=0$　　(D) $|A|+|B|=0$

6. 设 n 阶方阵 A 与 B 合同，则必有______

   (A) $|A|=|B|$　　(B) $|A|\neq|B|$

   (C) 若$|A|\neq 0$，则有$|B|\neq 0$　　(D) $|A|=-|B|$

7. n 阶实对称矩阵 A 正定的充要条件是：______

   (A) A 是可逆矩阵

   (B) A 的所有的特征值均为正值

   (C) 可以找到一个正交矩阵 F，使 F^TAF 为对角矩阵

   (D) 对某个 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T\neq 0$ 有 $X^TAX>0$

8. 零为方阵 A 的特征值是 A 不可逆的______

   (A) 充分条件　　(B) 必要条件

   (C) 充要条件　　(D) 非充分、非必要条件

得 分

二、　计算题（第 1 小题 7 分，第 2 小题 8 分，共 15 分）

1. 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a & a_2 & a_2 \\ a_2 & a_2 & a & a_3 \\ a_3 & a_3 & a_3 & a \end{vmatrix}$

2. 计算 $n\,(n>2)$ 阶行列式 D，其中 $x_i \neq 0, i=1,2,\ldots,n$；

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n+x_n \\ 1 & 2 & \cdots & (n-1)+x_{n-1} & n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 2+x_2 & \cdots & n-1 & n \\ 1+x_1 & 2 & \cdots & n-1 & n \end{vmatrix}$$

得 分

三、　矩阵 A,B 满足 $AB-B=A$，其中 $B=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，

求 A。（10 分）

得 分

四、　证明:若 n 维向量 $\alpha_1 \neq 0, \alpha_2$ 不能由 α_1 线性表示，α_3 不能由 α_1,α_2 线性表示，则 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关。(8 分)

得 分

五、　a,b 为何值时，线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=0 \\ x_2+2x_3+2x_4=1 \\ -x_2+(a-3)x_3-2x_4=b \\ 3x_1+2x_2+x_3+ax_4=-1 \end{cases}$

有解，无解，有无穷多解？并求有无穷多解时的方程组的通解。（共 14 分）

得 分

六、　已知实二次型 $f=2x_1^2+2x_2x_3$，

（1）写出二次型的矩阵表达式；

（2）用正交变换把二次型化为标准形，并写出相应的正交矩阵。(共 14 分)

得 分

七、 设 R^3 的两个基 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$；

$\beta_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，$\beta_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$，$\beta_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$。

（1）求由基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 到 β_1,β_2,β_3 的过渡矩阵 P；

（2）已知向量 $\alpha=\alpha_1+3\alpha_2$，求向量 α 在基 β_1,β_2,β_3 下的坐标。(10 分)

得 分

八、 设 A 和 B 都是 n 阶正定矩阵，证明 A 合同于 B。(8 分)

得 分

九、 已知三阶矩阵 A 和三阶列向量 X，且向量组 $\{X,AX,A^2X\}$ 线性无关，$A^3X=3AX-2A^2X$。设矩阵 $P=(X,AX,A^2X)$，且 $AP=PB$，求矩阵 B。(共 5 分)