信息学院本科生2007－2008学年第一学期（A卷答案）

一、 (1–3每小题2分，4–6每小题3分，共15分)

1. √　2. ×　3. ×　4. C　5. C　6. B

二、 计算题 (第1小题7分，第2小题8分，共15分)

1. 解：各列都加到第一列得，　　　　提出共因子

$$|D_n| = \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i - m & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ \sum_{i=1}^{n} x_i - m & x_2 - m & x_3 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} x_i - m & x_2 & x_3 & \cdots & x_n - m \end{vmatrix} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i - m\right) \begin{vmatrix} 1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ 1 & x_2 - m & x_3 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n - m \end{vmatrix}$$

(2分)　　　　　　　　　　　　(2分)

各行减去第一行得，
$$= \left(\sum_{i=1}^{n} x_i - m\right) \begin{vmatrix} 1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ 0 & -m & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -m \end{vmatrix} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i - m\right)(-m)^{n-1}$$

(2分)　　　　　　　　　　　　(2分)

2.按第一列展开

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} a & b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a & b \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}_{n-1} + b(-1)^{n+1} \begin{vmatrix} b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a & b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a & b \end{vmatrix}_{n-1},$$

(2分)

$$= aa^{n-1} + b(-1)^{n+1}b^{n-1} = a^n + (-1)^{n+1}b^n$$

(1分)　　　(1分)

$$B = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix} = n!,\quad |C| = \begin{vmatrix} O & A \\ B & O \end{vmatrix} = (-1)^{1+\cdots+n+(n+1)+\cdots+2n}|A||B| = (-1)^{(2n+1)n}\left[a^n + (-1)^{n+1}b^n\right]n!$$

(2分)　　　　　　(1分)　　　　　　(1分)

三、　　(8分)

解：显然 $x_i \neq 0, i = 1,2,\cdots,n$，故将 $(A,\ E)$ 的第 j 行和第 j–1 行($j = n, n-1, \ldots, 2$)互换得到

$$(A,\ E) = \begin{pmatrix} 0 & x_1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & & & \\ 0 & 0 & x_2 & \cdots & 0 & & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x_{n-1} & & & 1 & \\ x_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & & & & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x_n & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & x_1 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x_{n-2} & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & x_{n-1} & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(1分)　　　　　　　　(3分)

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0&0&0&0&\cdots&0&1/x_n\\0&1&\cdots&0&0&1/x_1&0&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&1&0&0&\cdots&1/x_{n-2}&0&0\\0&0&\cdots&0&1&0&\cdots&0&1/x_{n-1}&0\end{pmatrix}\text{故}A^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&\cdots&0&1/x_n\\1/x_1&0&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&\cdots&1/x_{n-2}&0&0\\0&\cdots&0&1/x_{n-1}&0\end{pmatrix}$$

(3 分)　　　　　　　　　　　　　　(1 分)

四、

证明：由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关知必存在一组非全零数$k_1,k_2,k_3$使得$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0$①(2 分). 则必有$k_3=0$，否则若$k_3\neq 0$，则由①得$\alpha_3=-\frac{1}{k_3}(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2)$，这与$\alpha_3$不能被$\alpha_1,\alpha_2$线性表示矛盾. (3 分)　于是①变为$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2=0$，且$k_1,k_2$非全零，因此$\alpha_1,\alpha_2$线性相关. (3 分)

另外，可用反证法。假设α_1,α_2线性无关. 设有一组数k_1,k_2,k_3使得$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0$①，(2 分)则必有$k_3=0$，否则若$k_3\neq 0$，则由①得$\alpha_3=-\frac{1}{k_3}(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2)$，这与$\alpha_3$不能被$\alpha_1,\alpha_2$线性表示矛盾. (3 分) 于是①变为$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2=0$，由于$\alpha_1,\alpha_2$线性无关，故可得$k_1=k_2=0$，因此必有$k_1=k_2=k_3=0$，故$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，这与$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关矛盾，故假设错误，即应有$\alpha_1,\alpha_2$线性相关. (3 分)

五.

解：1．对方程组的增广矩阵施行行初等变换，得到：

$$(A,b)=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&a\\3&2&1&1&-3&0\\0&1&2&2&6&b\\5&4&3&3&-1&2\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&a\\0&1&2&2&6&-3a\\0&0&0&0&0&b-3a\\0&0&0&0&0&2-2a\end{pmatrix}$$，（3 分）。

可见当$b-3a=0,2-2a=0$，即$a=1,b=3$时，方程组增广矩阵的秩等于系数矩阵的秩，方程组有解。（2 分）

2．求方程组的导出组的基础解系，即解方程组：$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=0\\x_2+2x_3+2x_4+6x_5=0\end{cases}$。（2 分）。

此方程组有三个自由未知量。分别取$x_3=1,x_4=0,x_5=0$和$x_3=0,x_4=1,x_5=0$和$x_3=0,x_4=0,x_5=1$，解得该方程组的一个基础解系为：$\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5\\-6\\0\\0\\1\end{pmatrix}$。（3 分）

3．求$a=1,b=3$时的方程组的一个特解，将方程组的未知数x_3,x_4,x_5取为 0 再解方程组，得到$x_1=-2,x_2=3$。（2 分）。于是方程组的全部解为：

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\1\\0\end{pmatrix}+c_3\begin{pmatrix}5\\-6\\0\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\\3\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$。c_1,c_2,c_3任意取值。（1 分）

六．解：该二次型的矩阵为： $A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$。（2 分）

因此该矩阵的特征多项式为：

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda&-1&-1\\-1&\lambda&-1\\-1&-1&\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&-\lambda-1&\lambda^2-1\\0&\lambda+1&-\lambda-1\\-1&-1&\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda+1)^2+(\lambda^2-1)(\lambda+1)=(\lambda+1)^2(\lambda-2).$$ 2 分）。

所以该矩阵的特征根为 $\lambda_1=\lambda_2=-1$ 和 $\lambda_3=2$。（1 分）。

先求关于 $\lambda=-1$ 的特征向量，即解线性方程组 $\left(-1\cdot E-A\right)X=0$，经消元知仅需解以下方程： $x_1+x_2+x_3=0$。

于是知矩阵 A 的关于 $\lambda=-1$ 的线性无关的特征向量为 $\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$。（2 分）

再求关于 $\lambda=2$ 的特征向量，即解线性方程组 $\left(2E-A\right)X=0$，经消元知仅需解以下方程： $\begin{cases}2x_1-x_2-x_3=0\\-x_1+2x_2-x_3=0\end{cases}$。

解此线性方程组，求得一个非 0 特解，也就是矩阵 A 的关于 $\lambda=2$ 的特征向量为 $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$。（2 分）

将关于 $\lambda=-1$ 的两个线性无关的特征向量正交化，得到两个正交的向量： $\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$。（2 分）。且此二向量已与 $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ 正交。再将此两个向量及 $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ 单位化，得到三个两两正交的单位向量： $\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt2}{2}\\\frac{\sqrt2}{2}\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt6}\\\frac{1}{\sqrt6}\\-\frac{2}{\sqrt6}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt3}\\\frac{1}{\sqrt3}\\\frac{1}{\sqrt3}\end{pmatrix}$。（2 分）。

于是求得的正交变换为 $x=\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt2}{2}&\frac{1}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt3}\\\frac{\sqrt2}{2}&\frac{1}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt3}\\0&-\frac{2}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt3}\end{pmatrix}y$，得到的二次型标准形为 $-x_1^2-x_2^2+x_3^2$。该二次型的负惯性指数为 2。（2 分）

七．解：$n=1$ 时，因 $|Q-E|\neq0$，所以 $Q-E$ 可逆，因此 $Q_1=(Q-E)(Q-E)^{-1}Q=Q$。于是下式成立：

$$A^1=\begin{pmatrix}P&Q\\0&E\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}P&Q_1\\0&E\end{pmatrix},$$

即 $n=1$ 时命题成立。（2 分）

假设当 $n=k$ 时命题成立，即 $A^k=\begin{pmatrix}P^k&Q_k\\0&E\end{pmatrix}$ 成立，其中 $Q_k=(P^k-E)(P-E)^{-1}Q$，（1 分）

依据矩阵方幂的定义，$A^{k+1}=A^k\cdot A$，（1 分），所以 $n=k+1$ 时，

$$A^{k+1}=A^k\cdot A=\begin{pmatrix}P^k & Q_k\\ 0 & E\end{pmatrix}\begin{pmatrix}P & Q\\ 0 & E\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}P^{k+1} & P^kQ+Q_k\\ 0 & E\end{pmatrix},\qquad (2分)$$

计算知，

$$\begin{aligned}&P^kQ+Q_k=P^kQ+(P^k-E)(P-E)^{-1}Q\\&=P^k(P-E)(P-E)^{-1}+(P^k-E)(P-E)^{-1}Q=\left[P^{k+1}-P^k+P^k-E\right](P-E)^{-1}Q \quad (3分)。\\&=(P^{k+1}-E)(P-E)^{-1}Q=Q_{k+1},\end{aligned}$$

所以当 $n=k+1$ 时，命题成立。因此命题对一切正整数都成立。（1 分）

八、证明：因为 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 是 n 维线性空间 V 的一组基底，所以 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 线性无关，V 的维数为 n，V 中任意 n 个线性无关的向量都可以构成 V 的基底。 (1 分)

（1）$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 是 n 维线性空间 V 的一组基底，

需要证明 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{i-1},\alpha_{n+1},\alpha_{i+1},\cdots\alpha_n,i=1,2,\cdots,n$ 可构成 V 的基底。

令 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\ldots+k_{i-1}\alpha_{i-1}+k_i\alpha_{n+1}+k_{i+1}\alpha_{i+1}+\cdots+k_n\alpha_n=0,i=1,2,\cdots,n$ （1）

又 $\alpha_{n+1}=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\ldots+x_i\alpha_i+\cdots+x_n\alpha_n,$ （2）

其中 $x_i\neq 0,i=1,2,\cdots,n$

将式（2）代入式（1）可得：

$$(k_1+k_ix_1)\alpha_1+(k_2+k_ix_2)\alpha_2+\ldots+(k_{i-1}+k_ix_{i-1})\alpha_{i-1}+k_i\alpha_i+(k_{i+1}+k_ix_{i+1})\alpha_{i+1}+\cdots+(k_n+k_ix_n)\alpha_n=0$$

因为 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 线性无关，所以有：

$$k_1+k_ix_1=0,\cdots,k_{i-1}+k_ix_{i-1}=0,k_ix_i=0,k_{i+1}+k_ix_{i+1}=0,\cdots,k_n+k_ix_n=0$$

因为 $x_i\neq 0,i=1,2,\cdots,n$，所以 $k_i\neq 0,i=1,2,\cdots,n$.

进而可得：$k_1=k_2=\cdots=k_{i-1}=k_{i+1}=\cdots=k_n=0$，

所以 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{i-1},\alpha_{n+1},\alpha_{i+1},\cdots\alpha_n,i=1,2,\cdots,n$ 可构成 V 的基底。

（2）$\alpha_{n+1}=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\ldots+x_i\alpha_i+\cdots+x_n\alpha_n,x_1\neq 0$，（1 分）

所以：$\alpha_1=-\dfrac{x_2}{x_1}\alpha_2-\dfrac{x_3}{x_1}\alpha_3-\cdots-\dfrac{x_n}{x_1}\alpha_n+\dfrac{1}{x_1}\alpha_{n+1}$ （2 分）

α_1 在基底 $\alpha_2,\alpha_3,\ldots,\alpha_{n+1}$ 下的坐标为 $(-\dfrac{x_2}{x_1},-\dfrac{x_3}{x_1},\cdots,-\dfrac{x_n}{x_1},\dfrac{1}{x_1})$（1 分）

九、证明：（1）方法 1：因为存在可逆矩阵 U，使 $A=U^TU$，令 $U^{-1}=G$，则

$(U^T)^{-1}AU^{-1}=G^TAG=E$ (其中 E 为 n 阶单位矩阵)

所以 A 与 E 合同，是一个正定矩阵。又正定矩阵的所有主子式大于 0。A 的主对角线上的所有元素是它的一阶主子式，都大于 0。

方法 2：令可逆矩阵 $U=\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ u_{n1} & u_{n2} & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix}$，

则 $A=\begin{pmatrix} u_{11} & u_{21} & \cdots & u_{n1} \\ u_{12} & u_{22} & \cdots & u_{n2} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ u_{1n} & u_{2n} & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ u_{n1} & u_{n2} & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix}$ **（1 分）**

A 的主对角线上的元素： $a_{ii}=u_{1i}^2+u_{2i}^2+\cdots+u_{ni}^2, i=1,2,\cdots,n$ **（2 分）**

因为 U 可逆，所以 $u_{1i},u_{2i},\cdots,u_{ni}$ **是不全为零的实数，所以** $a_{ii}>0$**,（1 分）**

即 A 的主对角线上的元全大于零（1 分）

（2） $\boldsymbol{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n}$ **是 A 的 n 个正交单位特征向量，对应的特征值是** $\boldsymbol{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n}$**，则存在正交矩阵 F=(**$\boldsymbol{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n}$**)，使得（1 分）** $F^TAF=diag\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}$

因为 F 是正交矩阵， $F^{-1}=F^T$**，等式两端左乘 F，右乘** F^T**，可得（1 分）**

$$A=F*diag\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}F^T=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \\ \vdots \\ \alpha_n^T \end{pmatrix}$$

$$=(\lambda_1\alpha_1,\lambda_2\alpha_2,\cdots,\lambda_n\alpha_n)\begin{pmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \\ \vdots \\ \alpha_n^T \end{pmatrix}$$

$$=\lambda_1\alpha_1\alpha_1^T+\lambda_2\alpha_2\alpha_2^T+\cdots+\lambda_n\alpha_n\alpha_n^T$$ **（1 分）**