信息学院 2002 级线性代数期末考试题(A 卷)参考答案

【注意：此次课本为《高等代数》，北京大学版】【多数题均有多种方法，不再赘述】

1．（1）各列加到第一列得 原式＝$(n+3)3^{n-1}$

（2）按照某行(列)展开得　原式＝$(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}\left(y^n+(-1)^{n+1}x^n\right)=(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}y^n+(-1)^{\frac{n^2-n}{2}}x^n$

2．$\begin{pmatrix}1&0&0\\1&2&-1\\1&-1&3\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}5&0&0\\-4&3&1\\-3&1&2\end{pmatrix}$，故 $X=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}8&-1&-2\\-22&14&8\\9&-3&-1\end{pmatrix}$

3．$\begin{pmatrix}2&-3&1&5&6\\-3&1&2&-4&5\\-1&-2&3&1&11\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1&1&-3\\0&1&-1&-1&4\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$故特接$\gamma_0=(-3,4,0,0)^T$，导出组基础解系为

$\eta_1=(1,1,1,0)^T,\eta_2=(1-,1,0,1)^T$，故通解为$\gamma_0+k_1\eta_1+k_2\eta_2$，$k_1,k_2$任意取值。

4．由于$\begin{pmatrix}E&E\\0&E\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A&B\\B&A\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E&-E\\0&E\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A+B&0\\0&A-B\end{pmatrix}$，两端同取行列式得

$\left|\begin{pmatrix}E&E\\0&E\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A&B\\B&A\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E&-E\\0&E\end{pmatrix}\right|=\begin{vmatrix}A+B&0\\0&A-B\end{vmatrix}$，左$=\begin{vmatrix}E&E\\0&E\end{vmatrix}\begin{vmatrix}A&B\\B&A\end{vmatrix}\begin{vmatrix}E&-E\\0&E\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}A&B\\B&A\end{vmatrix}$，

右＝$|A+B|\cdot|A-B|$，故$\begin{vmatrix}A&B\\B&A\end{vmatrix}=|A+B|\cdot|A-B|$。

5．$X=\begin{pmatrix}1&1&-3/2\\0&1&-1/2\\0&0&1\end{pmatrix}Y$，$y_1^2-4y_2^2$，秩为 2。

6．(1) 中介法 $M=\begin{pmatrix}2&1&1\\-1&1&-2\\1&1&3\end{pmatrix}$　(2) $\left(-\frac{2}{3},\frac{5}{3},\frac{2}{3}\right)$

7．设 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r$ 是线性无关的向量组，$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r,\beta$ 线性相关，

试证明：β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r$ 线性表示，并且表达式是唯一的。（8 分）(例题，已讲)

8．设 $\mathbf{A}$ 是 n 维线性空间 V 上的线性变换，$\alpha\in V$,如果$\mathbf{A}^{n-1}\alpha\neq0$，但$\mathbf{A}^n\alpha=0$，

求证：(1) $\alpha,\mathbf{A}\alpha,\ldots,\mathbf{A}^{n-1}\alpha$线性无关；(2) 线性变换 $\mathbf{A}$ 的特征多项式等于 λ^n。 (8 分) (已讲)

9．已知$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$对于其实系数的加法和数乘构成一个线性空间 $P[x]_4$,

$(\varepsilon_1=1,\varepsilon_2=x,\varepsilon_3=x^2,\varepsilon_4=x^3)$是它的一组基，

(1)在该空间中，验证$\mathbf{A}=\frac{d^2}{dx^2}+\frac{d}{dx}+1$是一个线性变换；(2)求 $\mathbf{A}$ 在上述基下的矩阵；(3)求 $\mathbf{A}$ 的所有特征值和特征向量。（10 分）

(1) 证明：对于任意 $f(x), y(x) \in P[x]_4$, 任意 $a, b \notin F$, 根据求导性质，有

$$\mathrm{A}(af(x)+bg(x))=\left(\frac{d^2}{dx^2}+\frac{d}{dx}+1\right)(af(x)+bg(x))$$

$$=\frac{d^2}{dx^2}(af(x)+bg(x))+\frac{d}{dx}(af(x)+bg(x))+(af(x)+bg(x))$$

$$=a\frac{d^2}{dx^2}f(x)+b\frac{d^2}{dx^2}g(x)+a\frac{d}{dx}f(x)+b\frac{d}{dx}g(x)+af(x)+bg(x)$$

$$=a\left(\frac{d^2}{dx^2}+\frac{d}{dx}+1\right)f(x)+b\left(\frac{d^2}{dx^2}+\frac{d}{dx}+1\right)g(x)$$

$$=aA(f(x))+bA(g(x))$$

因此 A 是线性变换.

(2) 解： $A\varepsilon_1=\left(\frac{d^2}{dx^2}+\frac{d}{dx}+1\right)1=1$

类似可得 $A\varepsilon_2=Ax=1+x$， $A\varepsilon_3=Ax^2=2+2x+x^2$， $A\varepsilon_4=Ax^3=6x+3x^2+x^3$

故 $A(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4)\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&1&2&6\\0&0&1&3\\0&0&0&1\end{pmatrix}$，故 **A** 在上述基下的矩阵为$\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&1&2&6\\0&0&1&3\\0&0&0&1\end{pmatrix}$.

(3) 由于$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&-1&0\\0&\lambda-1&-2&-6\\0&0&\lambda-1&-3\\0&0&0&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^4$，因此$\lambda_1=1$为四重特征根.

解线性方程组 $(\lambda_1E-A)x=0$，即$\begin{pmatrix}0&-1&-1&0\\0&0&-2&-6\\0&0&0&-3\\0&0&0&0\end{pmatrix}x=0$得基础解系$x_1=(1,0,0,0)$，因此 A

的属于特征根$\lambda_1=1$的全部特征向量为kx_1, $(k\in R, k\neq 0)$

信息学院 2003 级线性代数期末考试题(A 卷)参考答案

【注意：此次课本为《高等代数》，北京大学版】

1．方法均有多种。

(1) 各列加到第一列得 原式$=\begin{vmatrix} a_1+x & a_2 & a_3 & a_4 \\ 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & -x & x & 0 \\ 0 & 0 & -x & x \end{vmatrix}=(a_1+x)\begin{vmatrix} x & 0 & 0 \\ -x & x & 0 \\ 0 & -x & x \end{vmatrix}=(a_1+x)x^3$

(2)各行都减去第二行得 $d=\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-2 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & n-2 \end{vmatrix}=-2(n-2)!$

2． 多种解法，如：

$$B=\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 1 & 5 & 6 \\ -3 & 1 & 2 & -4 & 5 \\ -1 & -2 & 3 & 1 & -1 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & 7 & 7 & 4 \\ 0 & 7 & -7 & -7 & 8 \\ -1 & -2 & 3 & 1 & -1 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 7 & 7 & 6 \end{array}\right),$$

得通解$\left(-\frac{3}{7},2,\frac{6}{7},0\right)+k\left(-2,0,-1,1\right)$， $k\in R$

3．多种方法，推荐初等变换法 $A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

4． 多种结果，但正负惯性指数不变，如 $X=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}Y$， $2y_1^2+2y_2^2-2y_3^2$，为不定二次型。

5．多种方法

因为$\begin{pmatrix} E & -A \\ 0 & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & E \\ E & B \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & E-AB \\ E & B \end{pmatrix}$，两端取行列式得$\left|\begin{pmatrix} E & -A \\ 0 & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & E \\ E & B \end{pmatrix}\right|=\begin{vmatrix} 0 & E-AB \\ E & B \end{vmatrix}$

左 端 $=\begin{vmatrix} E & -A \\ 0 & E \end{vmatrix}\begin{vmatrix} A & E \\ E & B \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} A & E \\ E & B \end{vmatrix}$ ， 右 端 $=|E-AB|(-1)^{(1+2+\cdots+n)+(n+1+n+2+\cdots+2n)}|E|$

$=|AB-E|(-1)^n(-1)^{n(2n+1)}=|AB-E|(-1)^{2n^2+2n}=|AB-E|$。 故$\begin{vmatrix} A & E \\ E & B \end{vmatrix}=|E-AB|$

6．解：【注：线性变换的特征值和特征向量定义为该线性变换在某组基下矩阵的特征值和特征向量，其中该线性变换在某组基下矩阵的特征向量为线性变换的特征向量在该基底下的坐标，详见《高等代数》，北京大学版】

$A(\varepsilon_1)=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=2\varepsilon_1$ $A(\varepsilon_2)=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=2\varepsilon_2$

$$A(\varepsilon_3)=\begin{pmatrix}2&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&2\\1&0\end{pmatrix}=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3 \qquad A(\varepsilon_4)=\begin{pmatrix}2&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&3\\1&1\end{pmatrix}=2\varepsilon_2+\varepsilon_4$$

所以 A 在所给基底下的矩阵为 $M=\begin{pmatrix}2&0&1&0\\0&2&1&2\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$

特征根$\lambda_1=\lambda_2=1$，对应特征向量$k_1(-1,-1,1,0)^T+k_2(0,-2,0,1)^T$， k_1,k_2不同时为 0

特征根$\lambda_3=\lambda_4=2$，对应特征向量$k_3(1,0,0,0)^T+k_4(0,1,0,0)^T$， k_3,k_4不同时为 0

7．证明：由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta,\gamma$线性相关知，有一组非全零的数$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s,k,l$使得

$\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_s\alpha_s+k\beta+l\gamma=0$ ①。显然，k,l不能同时为 0，否则①化为

$\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_s\alpha_s=0$，且$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$非全零，这与$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关矛盾。若$k=0,l\neq0$，则①化为$\gamma=-\frac{\lambda_1}{l}\alpha_1-\frac{\lambda_2}{l}\alpha_2-\cdots-\frac{\lambda_s}{l}\alpha_s$，即$\gamma$可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性表出；若$k\neq0,l=0$，类似有$\beta$可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性表出；若$k\neq0,l\neq0$则由①得$\gamma=-\frac{\lambda_1}{l}\alpha_1-\frac{\lambda_2}{l}\alpha_2-\cdots-\frac{\lambda_s}{l}\alpha_s-\frac{k}{l}\beta$和

$\beta=-\frac{\lambda_1}{k}\alpha_1-\frac{\lambda_2}{k}\alpha_2-\cdots-\frac{\lambda_s}{k}\alpha_s-\frac{l}{k}\gamma$，故$\gamma$可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta$线性表出且$\beta$可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\gamma$线性表出，从而向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta$与向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\gamma$等价。

8．证明：(a)由$A^2=A$得$A(E-A)=0$，故$r_A+r_{(E-A)}\le n$；又$A+(E-A)=E$，故$r_A+r_{(E-A)}\ge r_E=n$，因此$r_A+r_{(E-A)}=n$

(b)【难题】 由于$\begin{pmatrix}E&-A\\&E\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E&\\A&E\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A&\\&E-A\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E&E\\&E\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E&\\-A&E\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A-A^2&\\&E\end{pmatrix}$

【即初等变换$\begin{pmatrix}A&\\&E-A\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}A&0\\A&E-A\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}A&A\\A&E\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}A-A^2&0\\A&E\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}A-A^2&0\\0&E\end{pmatrix}$】

而$\begin{pmatrix}E&-A\\&E\end{pmatrix},\begin{pmatrix}E&\\A&E\end{pmatrix},\begin{pmatrix}E&E\\&E\end{pmatrix},\begin{pmatrix}E&\\-A&E\end{pmatrix}$都是可逆矩阵，故 秩$\begin{pmatrix}A&\\&E-A\end{pmatrix}$＝秩$\begin{pmatrix}A-A^2&\\&E\end{pmatrix}$

即 秩(A) + 秩(E－A)=秩(A－A^2) + 秩(E)，故 n =秩(A－A^2) +n，因此 秩(A－A^2) =0，从而$A-A^2=0$，因此$A^2=A$。

9．利用线性变换的值域与核易证。四川大学版未涉及上述二概念。

2004 年光电子专业 线性代数试题参考答案

【注意：此次课本为《高等数学》，四川大学版】

1. –2 (n-2)!

2. $A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & & \\ -4/5 & 3/5 & 1/5 \\ -3/5 & 1/5 & 2/5 \end{pmatrix}$ ， rank(B)=2 ， $X=\begin{pmatrix} 8/5 & -1/5 & -2/5 \\ 1/5 & 2/5 & -1/5 \\ -8/5 & 3/5 & 1/5 \end{pmatrix}$ 或

$$X=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 8 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -8 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

3. 反证法。假设α_1， α_2， $\cdots$ ，α_m线性相关，则存在一组非全零的数$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$使得

$$\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_m\alpha_m=0 \quad (1)$$

设向量β由向量组α_1， α_2， $\cdots$ ，α_m线性表出，表示法为

$$h_1\alpha_1+h_2\alpha_2+\cdots+h_m\alpha_m=\beta \quad (2)$$

(2)+(1)得 $\beta=(h_1+\lambda_1)\alpha_1+(h_2+\lambda_2)\alpha_2+\cdots+(h_m+\lambda_m)\alpha_m$

显然，$h_1,h_2,\cdots,h_m$与$h_1+\lambda_1,h_2+\lambda_2,\cdots,h_m+\lambda_m$不全相等，因此$\beta$由向量组

α_1， α_2， $\cdots$ ，α_m线性表出有两种表示法，这与表示法唯一矛盾。故α_1， α_2， $\cdots$ ，α_m
线性无关。

4. $y_1^2+y_2^2+y_3^2$， $C=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，正定

5. 由基底$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$到基底$\eta_1,\eta_2,\eta_3$的过渡矩阵为$M_1=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$故由$\eta_1,\eta_2,\eta_3$到

$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$的过渡矩阵为$M=\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$，特征根$\lambda_1=\lambda_2=-1$，

对应特征向量$\eta_1=(-1,1,0)$， $\eta_2=(-1,0,1)$， $k_1\eta_1+k_2\eta_2$， k_1 与 k_2 取遍同时不为零的所有实数对；特征根$\lambda_3=2$对应特征向量$\eta_3=(1,1,1)$， $k_3\eta_3$， k_3取遍所有不为零实数，

$P=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，则$P^{-1}AP=D=\begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$

2005 测试 A 参考答案【注意：此次课本为《高等数学》，四川大学版】

一、1. C　　2. B　　3. D　　4. D　　5. C

二、 1.　0　　2.　0

三、$A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 3 & -2\\ -1.5 & -3 & -2.5\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}$，$B^{-1}=\begin{pmatrix}3 & -1\\ -5 & 2\end{pmatrix}$，故 $X=A^{-1}CB^{-1}=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 10 & -4\\ -10 & 4\end{pmatrix}$

四、$B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 1\\ 1 & t & 1 & t\\ 1 & 2 & t^2 & t^2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 1\\ 0 & t-2 & 0 & t-1\\ 0 & 0 & t^2-1 & t^2-1\end{pmatrix}$ 因此，$t=2$ 时，无解；$t\neq\pm1$ 时有唯一解 $\left(-\frac{2(t-2)}{t-1},\ \frac{t-2}{t-1},\ 1\right)^T$；$t=1$ 时有无穷解 $\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-c\\ 0\\ c\end{pmatrix}$ 或 $\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$，$(c\in R)$ 或 C 任意取值；

当 $t=-1$ 时，有无穷解 $\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-4/3-c_2\\ 2/3\\ c_2\end{pmatrix}$ 或 $\begin{pmatrix}-1/3\\ 2/3\\ 0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$，$(c_2\in R)$ 或 C_2 任意取值.

五、(1) $TE_{11}=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 2 & 0\end{pmatrix}=2E_{21}$，$TE_{12}=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}=2E_{22}$

$TE_{21}=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=2E_{11}$　$TE_{22}=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 0 & 0\end{pmatrix}=2E_{12}$

故 $A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2\\ 2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0\end{pmatrix}$

（2）$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda & 0 & -2 & 0\\ 0 & \lambda & 0 & -2\\ -2 & 0 & \lambda & 0\\ 0 & -2 & 0 & \lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda & -2\\ -2 & \lambda\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\lambda & -2\\ -2 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda-2)^2(\lambda+2)^2$ 故特征根 $\lambda_1=\lambda_2=2$ 对应特征向量 $k_1(1,0,1,0)^T+k_2(0,1,0,1)^T$，其中 k_1,k_2 不同时为 0；$\lambda_3=\lambda_4=-2$ 对应特征向量 $k_3(-1,0,1,0)^T+k_4(0,-1,0,1)^T$，其中 k_3,k_4 不同时为 0；

(3) $P=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$，$\Lambda=\begin{pmatrix}2 & & & \\ & 2 & & \\ & & -2 & \\ & & & -2\end{pmatrix}$

六、$y_1^2-3y_2^2-\frac{5}{3}y_3^2$，$X=\begin{pmatrix}1 & -2 & -2/3\\ 0 & 1 & -2/3\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}Y$；多种结果但正负惯性指数不变，并且保证$C^TAC$为对角形。

七、α_2,α_3应满足，$\alpha_1^T\alpha_2=0,\alpha_1^T\alpha_3=0$，故求$\alpha_1^Tx=0$的基础解系为$\beta_1=(-1,1,0)^T$，$\beta_2=(-1,0,1)^T$，并正交化即为要求的$\alpha_2,\alpha_3$（有多种答案）$\alpha_2=\beta_1=(-1,1,0)^T$，$\alpha_3=\beta_2-\frac{\langle\beta_2,\beta_1\rangle}{\langle\beta_1,\beta_1\rangle}\beta_1=\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1\right)^T$

八、（1）因$\alpha_2,\alpha_3,\ldots,\alpha_m$线性无关，故其部分组$\alpha_2,\alpha_3,\ldots,\alpha_{m-1}$线性无关，而$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{m-1}$线性相关，故$\alpha_1$可由$\alpha_2,\alpha_3,\ldots,\alpha_{m-1}$线性表示，因此也可由$\alpha_2,\alpha_3,\ldots,\alpha_m$线性表示。

（2）由(1)知α_1可由$\alpha_2,\alpha_3,\ldots,\alpha_{m-1}$线性表示，故向量组$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{m-1}$可由向量组$\alpha_2,\alpha_3,\ldots,\alpha_{m-1}$线性表出，假设$\alpha_m$能由$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{m-1}$线性表示，则由传递性知$\alpha_m$能由$\alpha_2,\alpha_3,\ldots,\alpha_{m-1}$线性表示，从而$\alpha_2,\alpha_3,\ldots,\alpha_m$线性相关，这与$\alpha_2,\alpha_3,\ldots,\alpha_m$线性无关矛盾，故$\alpha_m$不能由$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{m-1}$线性表示。

九、（1）由 G 为正定矩阵知其 n 阶主子式 $|A|>0$，故 A 是可逆矩阵。

（2）由G为正定矩阵知G为对称矩阵，从而$G^T=\begin{pmatrix}A^T & B\\ B & D^T\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}A & B\\ B^T & D\end{pmatrix}=G$，因此$D=D^T$，$A=A^T$都为对称矩阵，故$(A^{-1})^T=(A^T)^{-1}=A^{-1}$，从而$\left(D-B^TA^{-1}B\right)^T=D^T-B^T(A^{-1})^TB=D-B^TA^{-1}B$为对称矩阵。

(3) 由于存在可逆矩阵$P=\begin{pmatrix}E & A^{-1}B\\ 0 & E\end{pmatrix}$使得$P^TGP=\begin{pmatrix}A & \\ & D-B^TA^{-1}B\end{pmatrix}$，而合同变换不改变矩阵的正定性，故$\begin{pmatrix}A & \\ & D-B^TA^{-1}B\end{pmatrix}$仍为正定矩阵，从而$D-B'A^{-1}B$是正定矩阵。

信息学院本科生06-07学年性代数课程（A卷）参考答案

【注意：此次课本为《高等数学》，四川大学版】

评分标准

一．每题2分，本题共16分

1 × 2 √ 3 √ 4 A 5 D 6 B 7 A 8 C

二、每题7分，共14分

1．解：有多种方法

法I，把各列都加到第一列上去得

$$D=\begin{vmatrix} x & -1 & 1 & x-1 \\ x & -1 & x+1 & -1 \\ x & x-1 & 1 & -1 \\ x & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = x\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = x\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 1 & 0 & x & 0 \\ 1 & x & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = x(-1)^{\tau(4321)}x^3 = x^4$$

①2分 ②1分 ③2分 ④1分 ⑤1分

注： ①②可以一次得到3分

④⑤可以一次得到2分

直接给出结果，只得2分

中间过程太简单，但结果正确得5分

法II，第一列的1倍分别加到2、4列、－1倍加到3列；然后第1、2、3行的-1,1,1倍加到第4行上去

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 1 & 0 & x & 0 \\ 1 & x & 0 & 0 \\ x+1 & x & -x & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 1 & 0 & x & 0 \\ 1 & x & 0 & 0 \\ x & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\tau(4321)}x^4 = x^4$$

①2分 ②3分 ③2分

直接给出结果，只得2分

中间过程太简单，但结果正确得5分

其他方法如加边法等类似给分

2．解：有多种解法

法I 第1行加到第2行，然后新的第2行加到第3行，然后新的第3行加到第4行

$$D==\begin{vmatrix} 1 & a & & \\ 0 & 1 & b & \\ & -1 & 1-b & c \\ & & -1 & 1-c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & & \\ 0 & 1 & b & \\ & 0 & 1 & c \\ & & -1 & 1-c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & & \\ 0 & 1 & b & \\ & 0 & 1 & c \\ & & 0 & 1 \end{vmatrix} =1$$

①2分 ②2分 ③1分 ④2分

注：可以直接得到③，共得5分

直接给出结果，只得2分

法II，各行都加到第4行

$$D=\begin{vmatrix} 1 & a & & \\ -1 & 1-a & b & \\ & -1 & 1-b & c \\ & & & 1 \end{vmatrix} =1\cdot(-1)^{4+4}\begin{vmatrix} 1 & a & \\ -1 & 1-a & b \\ & -1 & 1-b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & \\ -1 & 1-a & b \\ & & 1 \end{vmatrix} =1\cdot(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & a \\ -1 & 1-a \end{vmatrix}$$

①3分 ②1分 ③1分 ④1分

$=1-a+a=1$

⑤1 分

注：②中的 $(-1)^{4+4}$ 和④中的 $(-1)^{3+3}$ 可以省略

⑤可以一步得到

其他方法类似给分

三、解：有多种解法

法 I 用 A 左乘 $A^*X = A^{-1} + 2X$ 得

$AA^*X = AA^{-1} + 2AX$ (2 分)

即 $|A|X=E+2AX$ (1 分)

故 $(|A|E-2A)X=E$ (1 分)

由于 $|A|=\begin{vmatrix}1&1&-1\\-1&1&1\\1&-1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&-1\\0&2&0\\0&-2&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&-1\\0&2&0\\0&0&2\end{vmatrix}=4$ (1 分)

故 $B=|A|E-2A=\begin{pmatrix}2&-2&2\\2&2&-2\\-2&2&2\end{pmatrix}$， (1 分)

而 $\begin{pmatrix}B\\E\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-2&2\\2&2&-2\\-2&2&2\\1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&0&0\\2&4&-4\\-2&0&4\\1&1&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&0&0\\2&4&0\\-2&0&4\\1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&0&0\\0&4&0\\0&0&4\\1/2&1&0\\0&1&1\\1/2&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\1/4&1/4&0\\0&1/4&1/4\\1/4&0&1/4\end{pmatrix}$

(3 分)

注：若 B 算错，而按照错的 B 得到正确的 B^{-1} 则得到 3 分；

若 B 正确，求 B^{-1} 过程对，得数错得 2 分

还可以用伴随矩阵法求 B^{-1}

故 B 可逆，且 $X=B^{-1}=\begin{pmatrix}1/4&1/4&0\\0&1/4&1/4\\1/4&0&1/4\end{pmatrix}$ (1 分)

注：若 B 算错，而按照错的 B 得到正确 X 则得到 1 分

法 II，由 $A^*X = A^{-1} + 2X$ 得

$(A^*-2E)X = A^{-1}$ (2 分)

而：$|A|=\begin{vmatrix}1&1&-1\\-1&1&1\\1&-1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&-1\\0&2&0\\0&-2&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&-1\\0&2&0\\0&0&2\end{vmatrix}=4$ (1 分)

求得 $A^* = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ (2 分)

故 $A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^* = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ (1 分)

$A^* - 2E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ (1 分)

求得 $(A^* - 2E)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (2 分)

故 $X = (A^* - 2E)^{-1} A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$ (1 分)

注：还有其他方法

信息学院本科生 2007－2008 学年第一学期（A 卷答案）

一、 (1−3 每小题 2 分，4−6 每小题 3 分，共 15 分)

1. √ 2. × 3. × 4. C 5. C 6. B

二、 计算题 (第 1 小题 7 分，第 2 小题 8 分，共 15 分)

1. 解：各列都加到第一列得，　　　　　提出共因子

$$|D_n|=\begin{vmatrix}\sum_{i=1}^n x_i-m & x_2 & x_3 & \cdots & x_n\\ \sum_{i=1}^n x_i-m & x_2-m & x_3 & \cdots & x_n\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ \sum_{i=1}^n x_i-m & x_2 & x_3 & \cdots & x_n-m\end{vmatrix}=\left(\sum_{i=1}^n x_i-m\right)\begin{vmatrix}1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n\\ 1 & x_2-m & x_3 & \cdots & x_n\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n-m\end{vmatrix}$$

(2 分)　　　　　　　　　　　(2 分)

各行减去第一行得，
$$=\left(\sum_{i=1}^n x_i-m\right)\begin{vmatrix}1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n\\ 0 & -m & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -m\end{vmatrix}=\left(\sum_{i=1}^n x_i-m\right)(-m)^{n-1}$$

(2 分)　　　　　　　　　　　(2 分)

2.按第一列展开

$$|A|=\begin{vmatrix}a & b & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b\\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 & a\end{vmatrix}=a\begin{vmatrix}a & b & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & a & b\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a\end{vmatrix}_{n-1}+b(-1)^{n+1}\begin{vmatrix}b & 0 & \cdots & 0 & 0\\ a & b & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & a & b\end{vmatrix}_{n-1},$$

(2 分)

$$=aa^{n-1}+b(-1)^{n+1}b^{n-1}=a^n+(-1)^{n+1}b^n$$

(1 分)　　　　(1 分)

$$B=\begin{vmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & n\end{vmatrix}=n!,\ |C|=\begin{vmatrix}O & A\\ B & O\end{vmatrix}=(-1)^{1+\cdots+n+(n+1)+\cdots+2n}|A||B|=(-1)^{(2n+1)n}\left[a^n+(-1)^{n+1}b^n\right]n!$$

(2 分)　　　　　　　　(1 分)　　　　　　　　(1 分)

三、　　　(8 分)

解：显然 $x_i\neq 0, i=1,2,\cdots,n$，故将 $(A,\ E)$ 的第 j 行和第 j−1 行($j=n,n-1,\ldots,2$)互换得到

$$(A,\ E)=\begin{pmatrix}0 & x_1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & & & \\ 0 & 0 & x_2 & \cdots & 0 & & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x_{n-1} & & & 1 & \\ x_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & & & & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}x_n & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\\ 0 & x_1 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & x_{n-2} & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & x_{n-1} & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

(1 分)　　　　　　　　(3 分)

$$\to\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1/x_n\\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 1/x_1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 1/x_{n-2} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1/x_{n-1} & 0\end{pmatrix}\text{故 } A^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 0 & \cdots & 0 & 1/x_n\\ 1/x_1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & \cdots & 1/x_{n-2} & 0 & 0\\ 0 & \cdots & 0 & 1/x_{n-1} & 0\end{pmatrix}$$

(3 分)　　　　　　　　　　　　(1 分)

四、

证明：由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关知必存在一组非全零数$k_1,k_2,k_3$使得$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0$①(2 分). 则必有$k_3=0$，否则若$k_3\neq 0$，则由①得$\alpha_3=-\dfrac{1}{k_3}(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2)$，这与$\alpha_3$不能被$\alpha_1,\alpha_2$线性表示矛盾. (3 分)　于是①变为$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2=0$，且$k_1,k_2$非全零，因此$\alpha_1,\alpha_2$线性相关. (3 分)

另外，可用反证法。假设α_1,α_2线性无关. 设有一组数k_1,k_2,k_3使得$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0$①，(2 分)则必有$k_3=0$，否则若$k_3\neq 0$，则由①得$\alpha_3=-\dfrac{1}{k_3}(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2)$，这与$\alpha_3$不能被$\alpha_1,\alpha_2$线性表示矛盾. (3 分) 于是①变为$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2=0$，由于$\alpha_1,\alpha_2$线性无关，故可得$k_1=k_2=0$，因此必有$k_1=k_2=k_3=0$，故$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，这与$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关矛盾，故假设错误，即应有$\alpha_1,\alpha_2$线性相关. (3 分)

五.

解：1．对方程组的增广矩阵施行行初等变换，得到：

$$(A,b)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1 & a\\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & b\\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 & 2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1 & a\\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & -3a\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b-3a\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2-2a\end{pmatrix}$$，（3 分）。

可见当$b-3a=0,2-2a=0$，即$a=1,b=3$时，方程组增广矩阵的秩等于系数矩阵的秩，方程组有解。（2 分）

2．求方程组的导出组的基础解系，即解方程组：$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=0\\ x_2+2x_3+2x_4+6x_5=0\end{cases}$。（2 分）。

此方程组有三个自由未知量。分别取$x_3=1,x_4=0,x_5=0$和$x_3=0,x_4=1,x_5=0$和$x_3=0,x_4=0,x_5=1$，解得该方程组的一个基础解系为：$\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5\\-6\\0\\0\\1\end{pmatrix}$。（3 分）

3．求$a=1,b=3$时的方程组的一个特解，将方程组的未知数x_3,x_4,x_5取为 0 再解方程组，得到$x_1=-2,x_2=3$。（2 分）。于是方程组的全部解为：

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\1\\0\end{pmatrix}+c_3\begin{pmatrix}5\\-6\\0\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\\3\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$。c_1,c_2,c_3任意取值。（1 分）

六．解：该二次型的矩阵为： $A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$。（2 分）

因此该矩阵的特征多项式为：

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda&-1&-1\\-1&\lambda&-1\\-1&-1&\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&-\lambda-1&\lambda^2-1\\0&\lambda+1&-\lambda-1\\-1&-1&\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda+1)^2+(\lambda^2-1)(\lambda+1)=(\lambda+1)^2(\lambda-2).$$ 2 分）。

所以该矩阵的特征根为 $\lambda_1=\lambda_2=-1$ 和 $\lambda_3=2$。（1 分）。

先求关于 $\lambda=-1$ 的特征向量，即解线性方程组 $(-1\cdot E-A)X=0$，经消元知仅需解以下方程： $x_1+x_2+x_3=0$。

于是知矩阵 A 的关于 $\lambda=-1$ 的线性无关的特征向量为 $\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$。（2 分）

再求关于 $\lambda=2$ 的特征向量，即解线性方程组 $(2E-A)X=0$，经消元知仅需解以下方程： $\begin{cases}2x_1-x_2-x_3=0\\-x_1+2x_2-x_3=0\end{cases}$。

解此线性方程组，求得一个非 0 特解，也就是矩阵 A 的关于 $\lambda=2$ 的特征向量为 $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$。（2 分）

将关于 $\lambda=-1$ 的两个线性无关的特征向量正交化，得到两个正交的向量： $\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$。（2 分）。且此二向量已与 $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ 正交。再将此两个向量及 $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ 单位化，得到三个两两正交的单位向量： $\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt2}{2}\\\frac{\sqrt2}{2}\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt6}\\\frac{1}{\sqrt6}\\-\frac{2}{\sqrt6}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt3}\\\frac{1}{\sqrt3}\\\frac{1}{\sqrt3}\end{pmatrix}$。（2 分）。

于是求得的正交变换为 $x=\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt2}{2}&\frac{1}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt3}\\\frac{\sqrt2}{2}&\frac{1}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt3}\\0&-\frac{2}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt3}\end{pmatrix}y$，得到的二次型标准形为 $-x_1^2-x_2^2+x_3^2$。该二次型的负惯性指数为 2。（2 分）

七．解： $n=1$ 时，因 $|Q-E|\neq 0$，所以 $Q-E$ 可逆，因此 $Q_1=(Q-E)(Q-E)^{-1}Q=Q$。于是下式成立：

$$A^1=\begin{pmatrix}P&Q\\0&E\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}P&Q_1\\0&E\end{pmatrix},$$

即 $n=1$ 时命题成立。（2 分）

假设当 $n=k$ 时命题成立，即 $A^k=\begin{pmatrix}P^k&Q_k\\0&E\end{pmatrix}$ 成立，其中 $Q_k=(P^k-E)(P-E)^{-1}Q$， （1 分）

依据矩阵方幂的定义， $A^{k+1}=A^k\cdot A$，（1 分），所以 $n=k+1$ 时，

$$A^{k+1}=A^k\cdot A=\begin{pmatrix}P^k & Q_k\\ 0 & E\end{pmatrix}\begin{pmatrix}P & Q\\ 0 & E\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}P^{k+1} & P^kQ+Q_k\\ 0 & E\end{pmatrix},\qquad（2 分）$$

计算知，

$$\begin{aligned}&P^kQ+Q_k=P^kQ+(P^k-E)(P-E)^{-1}Q\\&=P^k(P-E)(P-E)^{-1}+(P^k-E)(P-E)^{-1}Q=\left[P^{k+1}-P^k+P^k-E\right](P-E)^{-1}Q\quad（3 分）。\\&=(P^{k+1}-E)(P-E)^{-1}Q=Q_{k+1},\end{aligned}$$

所以当 $n=k+1$ 时，命题成立。因此命题对一切正整数都成立。（1 分）

八、证明：因为 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 是 n 维线性空间 V 的一组基底，所以 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 线性无关，V 的维数为 n，V 中任意 n 个线性无关的向量都可以构成 V 的基底。 (1 分)

（1）$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 是 n 维线性空间 V 的一组基底，

需要证明 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{i-1},\alpha_{n+1},\alpha_{i+1},\cdots\alpha_n,i=1,2,\cdots,n$ 可构成 V 的基底。

令 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\ldots+k_{i-1}\alpha_{i-1}+k_i\alpha_{n+1}+k_{i+1}\alpha_{i+1}+\cdots+k_n\alpha_n=0,i=1,2,\cdots,n$ （1）

又 $\alpha_{n+1}=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\ldots+x_i\alpha_i+\cdots+x_n\alpha_n,$ （2）

其中 $x_i\neq 0,i=1,2,\cdots,n$

将式（2）代入式（1）可得：

$$(k_1+k_ix_1)\alpha_1+(k_2+k_ix_2)\alpha_2+\ldots+(k_{i-1}+k_ix_{i-1})\alpha_{i-1}+k_i\alpha_i+(k_{i+1}+k_ix_{i+1})\alpha_{i+1}+\cdots+(k_n+k_ix_n)\alpha_n=0$$

因为 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 线性无关，所以有：

$$k_1+k_ix_1=0,\cdots,k_{i-1}+k_ix_{i-1}=0,k_ix_i=0,k_{i+1}+k_ix_{i+1}=0,\cdots,k_n+k_ix_n=0$$

因为 $x_i\neq 0,i=1,2,\cdots,n$，所以 $k_i\neq 0,i=1,2,\cdots,n$.

进而可得：$k_1=k_2=\cdots=k_{i-1}=k_{i+1}=\cdots=k_n=0$，

所以 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{i-1},\alpha_{n+1},\alpha_{i+1},\cdots\alpha_n,i=1,2,\cdots,n$ 可构成 V 的基底。

（2）$\alpha_{n+1}=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\ldots+x_i\alpha_i+\cdots+x_n\alpha_n,x_1\neq 0$，（1 分）

所以：$\alpha_1=-\dfrac{x_2}{x_1}\alpha_2-\dfrac{x_3}{x_1}\alpha_3-\cdots-\dfrac{x_n}{x_1}\alpha_n+\dfrac{1}{x_1}\alpha_{n+1}$ （2 分）

α_1 在基底 $\alpha_2,\alpha_3,\ldots,\alpha_{n+1}$ 下的坐标为 $(-\dfrac{x_2}{x_1},-\dfrac{x_3}{x_1},\cdots,-\dfrac{x_n}{x_1},\dfrac{1}{x_1})$（1 分）

九、证明：（1）方法 1：因为存在可逆矩阵 U，使 $A=U^TU$，令 $U^{-1}=G$，则

$(U^T)^{-1}AU^{-1}=G^T A G=E$ (其中 E 为 n 阶单位矩阵)

所以 A 与 E 合同，是一个正定矩阵。又正定矩阵的所有主子式大于 0。A 的主对角线上的所有元素是它的一阶主子式，都大于 0。

方法 2：令可逆矩阵 $U=\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ u_{n1} & u_{n2} & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix}$**，**

则 $A=\begin{pmatrix} u_{11} & u_{21} & \cdots & u_{n1} \\ u_{12} & u_{22} & \cdots & u_{n2} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ u_{1n} & u_{2n} & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ u_{n1} & u_{n2} & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix}$ **（1 分）**

A 的主对角线上的元素： $a_{ii}=u_{1i}^2+u_{2i}^2+\cdots+u_{ni}^2, i=1,2,\cdots,n$ **（2 分）**

因为 U 可逆，所以 $u_{1i},u_{2i},\cdots,u_{ni}$ **是不全为零的实数，所以 $a_{ii}>0$,（1 分）**

即 A 的主对角线上的元全大于零（1 分）

（2） $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ **是 A 的 n 个正交单位特征向量，对应的特征值是** $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$**，则存在正交矩阵 F=(**$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$**), 使得（1 分）** $F^TAF=diag\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}$

因为 F 是正交矩阵，$F^{-1}=F^T$, 等式两端左乘 F，右乘 F^T, 可得（1 分）

$$A=F*diag\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}F^T=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \\ \vdots \\ \alpha_n^T \end{pmatrix}$$

$$=(\lambda_1\alpha_1,\lambda_2\alpha_2,\cdots,\lambda_n\alpha_n)\begin{pmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \\ \vdots \\ \alpha_n^T \end{pmatrix}$$

$$=\lambda_1\alpha_1\alpha_1^T+\lambda_2\alpha_2\alpha_2^T+\cdots+\lambda_n\alpha_n\alpha_n^T$$ **（1 分）**