

# Igra Par - Nepar

## Opis problema

Dva igrača, **Par** i **Nepar** biraju svoje poteze, odnosno brojeve - 0 ili 1.

- Ako je suma ova dva broja na kraju poteza **parna**, **Par** dobija dobitak od +1, a **Nepar** dobija -1.
- Ako je suma **neparna**, **Nepar** dobija +1, a **Par** dobija -1.

Ovo je primer **zero-sum game**, u kojoj su ukupni dobiti između igrača jednaki 0. Koliko jedan dobije, toliko drugi gubi.

---

## 1. Nešov Ekvilibrijum

Nešov ekvilibrijum se dešava kada ni jedan igrač ne može profitirati promenom svoje strategije.

Specifično, ovde:

- Koliko jedan igrač dobija zavisi i od odluke drugog igrača, a ne samo svoje.
- Čista strategija ne dobija veliku dobit jer drugi igrač može prilagoditi svoju i sebi poboljšati dobit.

Umesto toga, **mešana strategija** daje **Nešov ekvilibrijum**. Oba igrača trebaju na nasumičan način birati svoj potez, time onemogućiti protivniku da eksploatiše predvidljivost njihovih strategija:

Za igrača Par:  $P(0) = P(1) = 0.5$ .

za igrača Nepar:  $P(0) = P(1) = 0.5$ .

Gde je  $P(x)$  verovatnoća da se igra strategija  $x$ . Ovde:

- Svaki igrač bira između 0 ili 1 sa 50% verovatnoće čineći očekivanu dobit partije jednaku 0, jer kao što je rečeno, nema prostora za eksploataciju predvidivosti strategije.
- 

## 2. Primer igre koja ima čistu strategiju za Nešov Ekvilibrijum (Prisoner's Dilemma)

Na primer, igra poput **Prisoner's Dilemma**, ima jasniji Nešov Ekvilibrijum, odnosno stanje u kom oba igrača gube promenom svoje strategije:

Igrač A / Igrač B	Ćuti (Ć)	Cinkari (C)
Ćuti (Ć)	( 2, 2 )	( 25, 0 )
Cinkari (C)	( 25, 0 )	( 9, 9 )

- **Nešov Ekvilibrijum:** Oba igrača cinkare (C, C), jer ukoliko se ijedan odluči da ćuti rizikuje robiju od 25 godina, dok cinkarenjem osigurava sebe da ni u najgorem slučaju neće dobiti veliku robiju.
- **Optimalan ishod:** Ukoliko bi obojica ćutala ukupna kazna bi bila ubedljivo najmanja, međutim igrači se moraju osloniti da obećanje drugog, koji bi laganjem prošao bez ikakve kazne .

---

### 3. Gain Floor i Loss Ceiling

#### Definicija

- **Gornje Ograničenje (Gain Floor)**

$$\underline{U}$$

Predstavlja najbolji garantovani dobitak u najgorem mogućem scenariju za igrača.

Odnosno predstavlja neki minimalni dobitak na koji igrač A može da računa dok igrač B sebi maksimizuje dobitak svojom strategijom. Matematički se definiše kao:

$$\underline{U} = \max \min u(s_A, s_B),$$

- **Donje ograničenje (Loss Ceiling)**

$$\overline{U}$$

Predstavlja maksimalni gubitak jedan igrač mora da prihvati kao posledicu strategija drugog igrača koji sebi maksimizuje dobit. Matematički se definiše kao:

$$\overline{U} = \min \max u(s_A, s_B).$$

#### Račun za igrača Par:

### 1. Gain Floor:

- Ako **Nepar** igra 0:

$$\min(u(0,0), u(1,0)) = \min(1, -1) = -1.$$

- Ako **Nepar** igra 1:

$$\min(u(0,1), u(1,1)) = \min(-1, 1) = -1.$$

- Gain Floor:

$$\underline{U_{Par}} = \max(-1, -1) = -1.$$

### 2. Loss Ceiling:

- Ako **Nepar** igra 0:

$$\max(u(0,0), u(1,0)) = \max(1, -1) = 1.$$

- Ako **Nepar** igra 1:

$$\max(u(0,1), u(1,1)) = \max(-1, 1) = 1.$$

- Loss Ceiling:

$$\overline{U_{Par}} = \min(1, 1) = 1.$$

## Igra Koordinacije: Problem lova

### 1. Postavka

#### Igrači:

- 2 lovca ( **Lovac A** i **Lovac B** ).

#### Strategije:

- JELEN**: Kooperativna strategija gde ukoliko oba igrača love jelena dobijaju najveću nagradu, ali se izlažu riziku.
- ZEC**: Sigurnija, ali manje nagrađiva strategija gde lovci odlučuju da love zeca.

#### Nagrade:

Vrednosti nagrade lovcima su raspoređene u tabeli ispod:

	Lovac B: JELEN	Lovac B: ZEC
Lovac A: JELEN	(3, 3)	(0, 1)
Lovac A: ZEC	(1, 0)	(1, 1)

## 2. Nešov Ekvilibrijum

### Definicija:

Podsećanja radi, Nešov ekvilibrijum je strategija, ili skup strategija koje daju najbolji ishod igračima i igrači menjanjem svoje strategije dovode sebe u rizik od gubljenja u igri.

### Nešov ekvilibrijum u ovoj igri:

#### 1. (JELEN, JELEN):

Oba igrača biraju da love jelena. Ukoliko bi i jedan igrač izašao iz dogovora i hteo da lovi zeca, ukupni dobitak bi se smanjio, ali bi on ostvatio prednost u odnosu na drugog igrača. Igrač koji bi želeo da lovi zeca bi imao siguran dobitak od nagrade, dok bi lovac na jelena ostao bez nagrade. Zbog toga ovaj slučaj **nije** Nešov ekvilibrijum

#### 2. (ZEC, ZEC):

Oba igrača/lovca odlučuju da biraju zeca. Nagrada je manja (1), ali je sigurna. Ukoliko bi bilo koji igrač odlučio da lovi jelena, pretrpeo bi gubitak (0) u odnosu na drugog igrača. Zbog toga ova strategija **jeste** Nešov Ekvilibrijum.

## 3. Optimalna strategija

### Analiza:

Ukupne dobiti igrača su:

- (JELEN, JELEN): ( 3 + 3 = 6 )
- (JELEN, ZEC): ( 0 + 1 = 1 )
- (ZEC, JELEN): ( 1 + 0 = 1 )
- (ZEC, ZEC): ( 1 + 1 = 2 )

Očito je da:

- (  $6 > 2$  ;  $6 > 1$  ), što znaši da je (**JELEN, JELEN**) optimalna strategija ukoliko bi igrači sarađivali i igrali timski.
- 

## 4. Strategija

### Definicija:

Strategija koja je otporna na odluku drugog igrača, računajući očekivani dobitak u odnosu na odluku protivnika.

### Očekivane dobiti:

#### 1. Za lovca A ako bira JELEN:

Ako Lovac B bira JELEN verovatnoćom  $p$  :

$$EU_A(\text{JELEN}) = 3p + 0(1 - p) = 3p$$

#### 2. Za lovca A ako bira ZEC:

$$EU_A(\text{ZEC}) = 1p + 1(1 - p) = 1$$

Presek je:

$$EU_A(\text{JELEN}) = EU_A(\text{ZEC})$$

$$3p = 1 \quad \Rightarrow \quad p = \frac{1}{3}$$

#### 3. Isto važi i za lovca B:

$$EU_B(\text{JELEN}) = 3p, \quad EU_B(\text{ZEC}) = 1$$

$$p = \frac{1}{3}$$

### Zaključak:

#### 1. Ako je

$$p > \frac{1}{3}$$

Odabrati strategiju **JELEN** jer je očekivana dobit veća. Bitno je znati verovatnoću kojom drugi lovac lovi jelena, ključno je poverenje.

2.

$$p < \frac{1}{3}$$

Biranje strategije **ZEC** je bolje jer minimizuje rizik od dobijanja nulte dobiti.

---

## Gornje i donje ograničenje

### Definicija

- **Gornje Ograničenje (Gain Floor)**

$$\underline{U}$$

Predstavlja najbolji garantovani dobitak u najgorem mogućem scenariju za igrača. Odnosno predstavlja neki minimalni dobitak na koji igrač A može da računa dok igrač B sebi maksimizuje dobitak svojom strategijom. Matematički se definiše kao:

$$\underline{U} = \max \min u(s_A, s_B),$$

- **Donje ograničenje (Loss Ceiling)**

$$\overline{U}$$

Predstavlja maksimalni gubitak jedan igrač mora da prihvati kao posledicu strategija drugog igrača koji sebi maksimizuje dobit. Matematički se definiše kao:

$$\overline{U} = \min \max u(s_A, s_B).$$

## Račun

### Lovac A: Gain Floor

$$\underline{U}_A$$

$$\begin{aligned} \text{Kada lovi jelena: } \min(3, 0) &= 0, \\ \text{Kada lovi zeca: } \min(1, 1) &= 1, \\ \underline{U}_A &= \max(0, 1) = 1. \end{aligned}$$

## Lovac A: Loss Ceiling

$$\overline{U_A}$$

Kada lovac B lovi jelena:  $\max(3, 1) = 3$ ,

Kada lovac B lovi zeca:  $\max(0, 1) = 1$ ,

$$\overline{U_A} = \min(3, 1) = 1.$$

Za čistu strategiju:

$$\underline{U_A} = \overline{U_A} = 1.$$

---

## Zaključak

- **(JELEN, JELEN)** je najbolja strategija kada je verovatnoća saradnje (oba lovca su poštena i drže se dogovora da love jelena):

$$p > \frac{1}{3}$$

Maksimizuje dobit oba igrača ali je izložena riziku poverenja.

- **(ZEC, ZEC)** je sigurnija kada prethodni uslov nije zadovoljen. Minimizuje potencijalni gubitak

Petar Popov E2 52/2024

Mladen Blizanac E2 87/2024