Metodi Numerici per l'Informatica

Anthony

28 feb 2023

1 Spazi Vettoriali

Uno spazio vettoriale V è un insieme che dispone di un'operazione additiva e una somma scalare e gode delle seguenti proprietà:

- **Commutatività:** $u + v = v + u \ \forall u, v \in V$. Inoltre $u + v \in V$
- **Associatività:** $(u + v) + w = u + (v + w)$ e $(ab)v = a(bv) \ \forall u, v, w \in V$ e $\forall a, b \in \mathbb{R}$. Inoltre, $av \in V$
- **Identità additiva:** $\exists 0 \in V$ tale che $v + 0 = v \ \forall v \in V$
- **Inverso additivo:** $\forall v \in V, \exists w \in V$ tale che $v + w = 0$
- **Identità moltiplicativa:** $1v = v \ \forall v \in V$
- **Proprietà distributive:** $a(u + v) = au + av$ e $(a + b)v = av + bv$ $\forall a, b \in \mathbb{R}, u, v \in V$

Oss: In uno spazio vettoriale non è definito il prodotto tra vettori.

1.1 Esempi di spazi vettoriali

Liste di numeri Sia $\mathbb{R}^n$ l'insieme di tutte le sequenze di numeri in $\mathbb{R}$ lunghe n:

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_j \in \mathbb{R} \ \ \forall j \in [n]\}$$

Addizione e moltiplicazione sono definite come possiamo aspettarci:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$$

$$\lambda(x_1, x_n, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n)$$

L'identità additiva è rappresentata dalla sequenza composta da tutti zero:

$$0 = (0, \ldots, 0)$$

Funzioni Consideriamo l'insieme di tutte le funzioni $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ con la definizione standard per somma e prodotto scalare:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \forall x \in [0,1]$$
$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x), \forall x \in [0,1]$$

Tale insieme con le sue operazioni forma uno spazio vettoriale. Difatti, *ogni* insieme di funzioni $f : S \to \mathbb{R}$ con $S \neq \emptyset$ e le due operazioni e definizioni descritte sopra forma uno spazio vettoriale.

Non-esempio: superfici curve Le superfici di per sé non formano uno spazio vettoriale perché, ad esempio, non rispetta la chiusura delle operazioni: la somma delle coordinate di due punti potrebbe generare un punto esterno rispetto alla superficie.

1.2 I vettori

Gli elementi di uno spazio vettoriale sono chiamati *vettori* e non sono necessariamente liste. Un vettore è un'entità astratta i cui elementi possono essere liste, funzioni, o altri oggetti.

1.3 Sottospazi

Un sottoinsieme $U \subset V$ è un *sottospazio* di V se è esso stesso uno spazio vettoriale. In particolare:

- $0 \in u$
- $u, v \in U \implies u + v \in U$
- $u \in U \implies \alpha u \in U \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$

Esempio $\{(x_1, x_2, 0) : x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$.

1.4 Basi di spazi vettoriali

Una base di V è una collezione di vettori in V che sono *linearmente indipendenti* e sono lo *span* di V.

$$span(v_1, \dots, v_n) = \{a_1 v_1 + \dots a_n v_n : a_1, \dots a_n \in \mathbb{R}\}$$

$v_1, \dots, v_n$ sono linearmente indipendenti se e solo se ogni $v \in span(v_1, \dots, v_n)$ ha un'unica rappresentazione come combinazione lineare di $v_1, \dots, v_n$. Quindi ogni vettore $v \in V$ può essere espresso univocamente come combinazione lineare.

$$v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$$

Una base non è altro che un insieme *minimale* che genera tutto lo spazio V.

Esempi di basi

- $(1, 0, \ldots, 0), (0, 1, \ldots, 0), \ldots, (0, \ldots, 0, 1)$ è una base di $\mathbb{R}^n$ chiamata *base canonica* e i suoi vettori sono chiamati *vettori indicatori.*
- $(1, 2), (3, 5.07)$ è una base di $\mathbb{R}^2$
- $f_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = x_1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}; f_2(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = x_2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \ldots$
  è la base canonica dell'insieme delle funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e i suoi vettori sono chiamati *funzioni indicatrici.*

1.5 Dimensioni

Uno spazio vettoriale può avere basi differenti. **Teorema:** siano B_1, B_2 due basi di V, B_1 e B_2 hanno necessariamente lo stesso numero di vettori.
Una *dimensione* di uno spazio vettoriale (con dimensioni finite) è la lunghezza di qualsiasi base dello spazio vettoriale.

1.6 Mappa lineare

Una *mappa lineare* da V a W è una funzione $T : V \to W$ con le seguenti proprietà:

- **Additività:** $T(u + v) = Tu + Tv \; \forall u, v \in V$
- **Omogeneità:** $T(\lambda v) = \lambda(Tv) \; \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall v \in V$

Esempi

- **Identità** $I : V \to V$, definita come $Iv = v$
- **Differenziazione** $D : \mathcal{F}(\mathbb{R}) \to \mathcal{F}(\mathbb{R})$, definita come $Df = f'$
- **Integrazione** $T : \mathcal{F}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, definita come $Tf = \int_0^1 f(x)dx$
- **Mappa generica** $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ definita come
  $T(x_1, \ldots, x_n) = (A_{1,1}x_1 + \cdots + A_{1,n}x_n + \cdots + A_{m,1}x_1 + \cdots + A_{m,n}x_n)$
- **Non-esempio – equazione di una retta:** $y = ax + b$ non è lineare perché, ad esempio, l'omogeneità non è soddisfatta.
- **Equazione:** $y = z \sin x + z^2 \sin(x)$ *non* è lineare rispetto a z, x, ma è lineare rispetto alla funzione seno in cui z, x sono coefficienti.

Mappe lineari come spazio vettoriale Le mappe lineri $T : V \to W$ formano uno spazio vettoriali con le operazioni di addizione e moltiplicazione definite come:

$$(S + T)(v) = Sv + Tv$$

$$(\lambda T)(v) = \lambda(Tv)$$

Le mappe lineari ammettono anche una definizione di prodotto tra esse. In generale, non ha senso moltiplicare vettori; non è altro che la composizione di mappe lineari: siano $T : U \to V$ e $S : V \to W$, il loro prodotto $ST : U \to W$ è definito come segue:

$$(ST)(u) = S(Tu)$$

Proprietà algebriche delle mappe lineari

- **Associatività:** $(T_1T_2)T_3 = T_1(T_2T_3)$
- **Identità:** $TI = IT = T$
- **Proprietà distributive:** $(S_1 + S_2)T = S_1T + S_2T$ e $S(T_1 + T_2) = ST_1 + ST_2$

È da tenere a mente che le mappe lineari, a parte casi particolari, **non sono commutative**: $ST \neq TS$.

1.7 Matrici

Le matrici sono un modo comodo per rappresentare le mappe lineari. Chiamiamo $\mathbb{R}^{m \times n}$ lo spazio vettoriale di tutte le matrici $m \times n$ con valori in $\mathbb{R}$. Consideriamo la mappa lineare $T : V \to W$, una base $v_1, \ldots, v_n \in V$ e una base $w_1, \ldots, w_m \in W$. La matrice di T $m \times n$ di valori in $\mathbb{R}$ è una rappresentazione della mappa lineare di T:

$$T = \begin{pmatrix} T_{1,1} & \ldots & T_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ T_{m,1} & \ldots & T_{m,n} \end{pmatrix}$$

le cui celle $T_{i,j}$ sono definite come segue:

$$T_{v_j} = T_{1,j}w_1 + \cdots + T_{m,j}w_m$$

La matrice codifica come le basi dei vettori sono mappate, e questo è sufficiente per mappare tutti i vettori nel loro span, per cui:

$$Tv = T(\sum_j \alpha_j v_j) = \sum_j T(\alpha_j v_j) = \sum_j \alpha_j T v_J$$

Una matrice quindi è una rappresentazione di una mappa lineare, ed essa *dipende* dalla scelta delle basi.

Matrice di un vettore un vettore è un elemento dello spazio vettoriale e, data una base, ha una propria rappresentazione. Sia v un vettore

$$v = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

e sia $B = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ una base di V, allora

$$v = c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n$$

Ancora: la matrice *dipende* dalla base di V.

1.8 Prodotto matrici e vettori

Il prodotto tra matrici e vettori è definito come segue

$$\begin{pmatrix} T_{1,1} & \dots & T_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ T_{m,1} & \dots & T_{m,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{n} c_j \begin{pmatrix} T_{1,j} \\ \vdots \\ T_{m,j} \end{pmatrix}$$

in cui sia la matrice che il vettore sono rappresentati dalla stessa base. Sia essa $W = (w_1, \dots, w_n)$, allora:

$$T_{v_j} = T_{1,j} w_1 + \cdots + T_{m,j} w_m$$

Possiamo osservare di come un vettore $c = \sum_j c_j v_j$ sia mappato a $Tc = \sum_j c_j T v_j$.

1.9 Algebra matriciale

Abbiamo osservato che le mappe lineari formano uno spazio vettoriale in cui le matrici, essendo rappresentazioni di mappe lineari, formano uno spazio vettoriale. Quindi possiamo definire somma e prodotto:

- **Somma:** La matrice $S+T$ può essere ottenuta sommando le matrici S, T. Le matrici, per far sì che l'operazione abbia senso, devono avere la stessa base.

- **Moltiplicazione per scalare:** dato $\lambda \in \mathbb{R}$, la matrice λT è data da λ volte la matrice T.

- **Prodotto:** la matrice ST è ottenibile dal prodotto matriciale tra S e T. Il prodotto tra matrici non è commutativo come non lo è quello tra mappe lineari. Anche qui, il prodotto tra matrici ha senso solo se le due matrici condividono la stessa base.

2 Manipolazione di matrici

2.1 Trasposta e inversa

Una matrice è simmetrica se

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$$

Se la matrice è un prodotto del tipo $\mathbf{A} = \mathbf{BC}$, la trasposta si applica come segue:

$$(\mathbf{BC})^T = \mathbf{C}^T\mathbf{B}^T$$

Lo stesso vale per l'inversa:

$$(\mathbf{BC})^{-1} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}^{-1}$$

Una matrice $\mathbf{A}$ è *ortogonale* se:

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T$$

Per cui $\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{I}$ se $\mathbf{A}$ è ortogonale.

2.2 Prodotti

Prodotto matrice-vettore Il prodotto matrice-vettore è come segue:

$$\mathbf{X}\mathbf{y} = \begin{pmatrix} | & | & \\ \mathbf{x_1} & \mathbf{x_2} & \dots \\ | & | & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \end{pmatrix} = y_1 \begin{pmatrix} | \\ \mathbf{x_1} \\ | \end{pmatrix} + y_2 \begin{pmatrix} | \\ \mathbf{x_2} \\ | \end{pmatrix} + \dots$$

Prodotto vettore-matrice Il prodotto vettore-matrice è semplicemente la trasposta del prodotto matrice-vettore:

$$\mathbf{z}^T\mathbf{A} = (\mathbf{A}^T\mathbf{z})^T$$

Prodotto matrice-matrice Il prodotto matrice-matrice è definito come segue:

$$\mathbf{X}\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} — & \mathbf{x_1}^T & — \\ — & \mathbf{x_2}^T & — \\ & \vdots & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} | & | & \\ \mathbf{y_1} & \mathbf{y_2} & \dots \\ | & | & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \dots & \\ \vdots & \mathbf{x}_i^T\mathbf{y}_j & \vdots \\ & \dots & \end{pmatrix}$$

Prodotto vettore-vettore Di due tipi: *scalare* ed *esterno*.

Prodotto scalare (inner product)

$$\mathbf{x}^T\mathbf{y} = \alpha$$

Prodotto esterno (outer product)

$$\mathbf{x}\mathbf{y}^T = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & | & \\ y_1\mathbf{x} & y_2\mathbf{x} & \dots \\ | & | & \end{pmatrix}$$

3 Traccia

La traccia di una matrice $\mathbf{A}$ è la somma degli elementi sulla sua diagonale:

$$tr(\mathbf{A}) = \sum_i a_{ii}$$

La traccia è una mappa lineare poiché soddisfa le proprietà delle mappe lineari:

$$tr(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = tr(\mathbf{A}) + tr(\mathbf{B})$$

$$tr(\alpha\mathbf{A}) = \alpha tr\mathbf{A}$$

L'operazione traccia inoltre è invariante alla trasposta e alle permutazioni cicliche:

$$tr(\mathbf{A}) = tr(\mathbf{A}^T)$$

$$tr(\mathbf{ABC}) = tr(\mathbf{CAB}) = tr(\mathbf{BCA})$$

4 Un vettore importante: il vettore di uno

Un vettore $\mathbf{1}$ composto da tutti uno può essere usato per calcolare le somme efficientemente. Ad esempio, per calcolare gli elementi di $\mathbf{A}$ sulle righe possiamo effettuare il seguente prodotto:

$$\mathbf{A1}$$

Invece se vogliamo sommare sulle colonne:

$$\mathbf{1}^T\mathbf{A} = (\mathbf{A}^T\mathbf{1})^T$$

E, infine, se vogliamo sommare su tutti gli elementi di $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{1}^T\mathbf{A1}$$