Metodi Numerici per l'Informatica

Anthony

12 apr 2023

1 Introduzione

1.1 Isometrie

Abbiamo già visto che le matrici ortogonali preservano le lunghezze:

$$\|\mathbf{Qx}\|_2^2 = \mathbf{x}^T\mathbf{Q}^T\mathbf{Qx} = \mathbf{x}^T\mathbf{Ix} = \mathbf{x}^T\mathbf{x} = \|\mathbf{x}\|_2^2$$

E preservano anche gli angoli (prodotti interni):

$$\langle\mathbf{Qx}, \mathbf{Qy}\rangle = \mathbf{x}^T\mathbf{Q}^T\mathbf{Qy} = \mathbf{x}^T\mathbf{Iy} = \mathbf{x}^T\mathbf{y}$$

Per queste proprietà, la mappa $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{Qx}$ è un'isometria di $\mathbb{R}^n$.

1.2 Introduzione a SVD

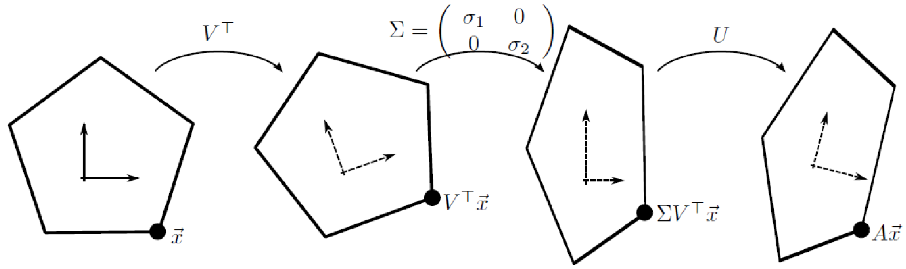
In generale, una trasformazione lineare generale può sempre essere fattorizzata come segue:

$$\underbrace{\mathbf{A}}_{m\times n} = \underbrace{\mathbf{U}}_{m\times m}\underbrace{\mathbf{\Sigma}}_{m\times n}\underbrace{\mathbf{V}^T}_{n\times n}$$

In cui:

1. $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ sono matrici ortogonali diverse
2. $\mathbf{\Sigma}$ è una matrice rettangolare alta o larga, ad esempio: $\begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Questa decomposizione si chiama *decomposizione a valori singolari (SVD)*.



Tale decomposizione possiamo anche scriverla come segue:

$$\mathbf{AV} = \mathbf{U\Sigma}$$

Che somiglia molto all'equazione agli autovalori.

Serie di prodotti esterni Possiamo riscrivere la decomposizione $\mathbf{A} = \mathbf{U\Sigma V}^T$ come:

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{\ell} \sigma_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T$$

In cui $\mathbf{u}_i$ e $\mathbf{v}_i$ sono le i-esime colonne di $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ rispettivamente. Possiamo facilmente osservare che ogni prodotto esterno $\mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T$ è una matrice $m \times n$ ed, essendo una matrice rettangolare, possiamo usare semplicemente $\ell = \min\{m, n\}$ perché le colonne rimanenti saranno azzerate.

Approssimazione Se approssimiamo piccoli valori di σ_i a zero, stiamo approssimando $\mathbf{A}$ con meno termini:

$$\mathbf{A} \approx \mathbf{U}\tilde{\mathbf{\Sigma}}\mathbf{V}^T$$

in cui $\tilde{\mathbf{\Sigma}}$ è come $\mathbf{\Sigma}$ ma ha i valori σ_i piccoli troncati a zero. Possiamo quindi costruire la matrice:

$$\tilde{\mathbf{A}} \equiv \mathbf{U}\tilde{\mathbf{\Sigma}}\mathbf{V}^T$$

troncando ai primi k valori singolari più grandi, azzerando tutti gli altri a zero.

1.3 Teorema di Eckart-Young

La matrice $\mathbf{A} \approx \mathbf{U}\tilde{\mathbf{\Sigma}}\mathbf{V}^T$ minimizza l'errore $\|\mathbf{A} - \tilde{\mathbf{A}}\|_F$ soggetto al vincolo che lo spazio delle colonne di $\tilde{\mathbf{A}}$ ha al più k dimensioni. Questo ci porta a un'approssimazione *low rank* della matrice iniziale $\mathbf{A}$.