ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «БРЯНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА И.Г. ПЕТРОВСКОГО»

Г. В. Егоров

Сборник вопросов и задач по термодинамике 2-е издание

БРЯНСК 2023

Contents

Contents **2**

1 Идеальный газ. **4**

1 Термодинамика газа Ван-дер-Ваальса (ВдВ). **4**

ББК
Е -
Егоров Г. В. Сборник вопросов и задач по термодинамике. - Брянск: Издательство БГУ , 2023. - 80 с.

Пособие предназначено для студентов педагогических вузов, изучающих термодинамику в рамках курса теоретической физики. В него включены задачи и контрольные вопросы по всем разделам курса термодинамики. Многие задачи приводятся с подробными решениями. Кроме задач в книге дается краткое изложение основных теоретических положений, которые должны быть прочно усвоены студентами. Для ответа на контрольные вопросы студентам необходимо изучить литературу, список которой приводится в конце книги. В каждой главе данного пособия даются ссылки с указанием глав и параграфов соответствующей книги, рекомендуемых для изучения.

Рецензенты:
Попов П.А. - доктор физико-математических наук,
профессор кафедры экспериментальной и теоретической физики
Издательство Брянского государственного университета
имени академика И.Г. Петровского
241036, Брянск, ул. Бежицкая 14.
Подписано в печать. Формат 60×84 1/16. Усл. п. л. 5,0.
Тираж 100 экз. Заказ N .

Глава 1 Идеальный газ.

Идеальным газом называется простейшая модель реального газа, в которой делаются следующие допущения:

1. Молекулы не имеют размеров, т. е. представляют собой материальные точки.
2. Молекулы взаимодействуют друг с другом только путем упругих соударений.
3. Взаимодействие молекул на расстоянии отсутствует.

Экспериментально для постоянной массы идеального газа установлены следующие законы:

1. *Закон Бойля-Мариотта* : при $T = const \quad pV = const.$
2. *Закон Гей-Люссака* : при $P = const \quad V/T = const.$
3. *Закон Шарля :* при $V = const \quad p/T = const.$

Клапейроном был установлен объединенный газовый закон *(уравнение Клапейрона):*

Для постоянной массы газа

$$\frac{PV}{T} = const$$

Вид константы в этом уравнении был получен Менделеевым. Уравнение состояния идеального газа *(уравнение Менделеева-Клапейрона)* имеет вид:

$$PV = \frac{m}{M}RT \tag{1.0.1}$$

Здесь R — универсальная газовая постоянная (R = 8,31 Дж / (моль·К)), M — молярная масса газа.

Моль - количество вещества, в котором содержится столько молекул, сколько их содержится в 12 г изотопа углерода C^{12}.Соответственно *молярная масса* вещества равна его относительной молекулярной массе, выраженной в граммах. Моль любого вещества содержит *число Авогадро* молекул

$$(N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}\ \text{моль}^{-1}).$$

Для адиабатического процесса в идеальном газе справедливо *уравнение Пуассона:*

$$PV^\gamma = const,$$

где $\gamma = C_p / C_v$ - показатель адиабаты.

Для смеси газов справедлив *закон Дальтона* :

Давление P, оказываемое смесью газов на стенки сосуда, равно сумме парциальных давлений всех компонент смеси, т.е. $P = \sum P_i$, где P_i — *парциальное давление* i-ой компоненты смеси, т.е. давление, которое оказывал бы на стенки сосуда имеющийся в смеси газ, если бы он один занимал весь сосуд.

Контрольные вопросы:

1. При каких условиях для смеси газов выполняется закон Дальтона?
2. Выведите закон Архимеда, используя формулу Торричелли и закон Паскаля.
3. Обоснуйте, почему единица количества вещества 1 моль выбрана именно таким способом.
4. Сформулируйте физический смысл универсальной газовой постоянной.
5. Объясните, что такое эффективная молярная масса смеси газов.
6. Укажите критерии применимости уравнения Менделеева-Клапейрона для описания реальных газов.

Литература

[4] Гл. 1 . §4, §7.
[5] Гл. 1. §§ 2 - 4, §§ 7 - 9.

Задачи

1.1. Найти эффективную молярную массу смеси двух идеальных газов, для которых известны молярные массы M_1 и M_2 и относительные массы $a_1 = m_1 / m$ и $a_2 = m_2 / m$, где $m = m_1 + m_2$ - масса смеси.

Решение:

Смесь идеальных газов представляет собой идеальный газ, который подчиняется уравнению Менделеева-Клапейрона

$$PV = \frac{m}{M_{\text{эфф.}}} RT, \qquad (1.1.1)$$

в котором $M_{\text{эфф.}}$ — это эффективная молярная масса смеси.

Для каждого из газов запишем уравнение состояния

$$P_1 V = \frac{m_1}{M_1} RT, \quad P_2 V = \frac{m_2}{M_2} RT,$$

Складывая почленно уравнения 1.1, находим

$$(P_1 + P_2)V = (\frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2})RT.$$

По закону Дальтона для смеси газов $P = P_1 + P_2$.

Таким образом получаем:

$$\frac{m}{M_{\text{эфф.}}} = \frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2}.$$

Отсюда

$$M_{\text{эфф.}} = \frac{m}{m_1/M_1 + m_2/M_2} = \frac{1}{a_1/M_1 + a_2/M_2}. \qquad (1.1.2)$$

1.2. На поверхности жидкости плотности ρ плавает цилиндрический тонкостенный стакан, наполовину погруженный в жидкость. На сколько погрузится нижняя кромка стакана в жидкость, если его поставить на поверхность жидкости вверх дном? Высота стакана h, давление воздуха ρ_0. На какую глубину нужно погрузить перевернутый стакан, чтобы он вместе с заключенным в нем воздухом пошел ко дну?

Решение:

Стакан находится в равновесии под действием двух сил — силы тяжести mg и силы Архимеда F_A. $F_A = \rho_{\text{ж}} g V$, где V — объем погруженной части стакана, равный $V = Sh/2$. Следовательно, масса стакана равна

$$m = \rho_{\text{ж}} Sh/2, \qquad (1.2.1)$$

где S — площадь поперечного сечения стакана.

Во втором случае, когда стакан перевернут вверх дном, объем вытесненной жидкости равен Sy, где y — разность уровней воды и воздуха в стакане (см. рис. 1.1, б). Из условия равновесия стакана следует, что в этом случае также $mg = F_A$. Масса стакана неизменна, поэтому объем вытесненной жидкости в обоих случаях одинаков, а т.к. толщина стенок пренебрежимо мала, то $y = h/2$.

По закону Бойля-Мариотта для воздуха, заключенного в стакане, находим $P_0V_1 = PV_2$, где $V_1 = Sh$ — объем стакана, а $V_2 = Sz$, где z — высота столба воздуха в перевернутом стакане.

Из рис. 1.1, б видно, что $z = h - \left(x - \frac{h}{2}\right) = \frac{3}{2}h - x$. Здесь x — глубина погружения нижней кромки стакана в жидкость.

Таким образом, давление воздуха в перевернутом стакане равно

$$P = \frac{Sh}{\left(\frac{3}{2}h - x\right)S}P_0 = \frac{h}{\left(\frac{3}{2}h - x\right)}P_0. \tag{1.2.2}$$

Это давление уравновешивается давлением воды на глубине $y = h/2$. Поэтому $p = p_0 + gh/2$. Отсюда находим глубину погружения нижней кромки стакана x:

$$P_0 + \frac{\rho g h}{2} = \frac{h}{\left(\frac{3}{2}h - x\right)}P_0 \Rightarrow x = \frac{3h}{2} - \frac{2P_0h}{2P_0 + \rho g h}. \tag{1.2.3}$$

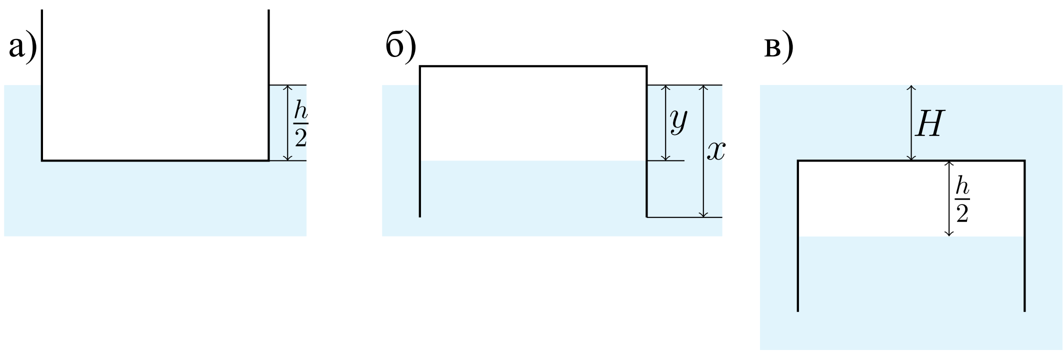

Рис. 1.1

Для того, чтобы перевернутый стакан пошел на дно, надо погрузить его на такую глубину, на которой воздух в стакане будет сжат настолько, что его объем будет меньше минимального объема $V_{min.} = Sh/2$, определяемого из условия равновесия $mg = F_A$. При таком объеме воздуха в стакане сила тяжести будет больше архимедовой силы, и стакан будет тонуть. Давление воздуха в стакане равно давлению воды на глубине $H + h/2$ (см. рис. 1.1, в). Следовательно, получаем:

$$P_0 + \rho g(H + h/2) = P = \frac{V_1}{V_{min}}P_0 = 2P_0. \tag{1.2.4}$$

Отсюда находим

$$P_0 = \rho g(H + h/2). \tag{1.2.5}$$

Откуда

$$H = \frac{P_0}{\rho g} - \frac{h}{2}. \tag{1.2.6}$$

1.3. В гладкой, открытой с обоих концов вертикальной трубе, имеющей два разных сечения (см. рис. 1.2) находятся два поршня, соединенные нерастяжимой нитью, а между поршнями — один моль идеального газа. Площадь сечения верхнего поршня на Δ S больше, чем нижнего. Общая масса поршней m. Давление наружного воздуха p_0. На сколько нужно изменить температуру газа между поршнями, чтобы они переместились на расстояние Δ z.

Решение:

Из условия механического равновесия системы «поршни-нить» следует: $P_0\Delta S + mg = P\Delta S$, где P — давление газа между поршнями.

Отсюда получаем:

$$P = P_0 + \frac{mg}{\Delta S}. \qquad (1.3.1)$$

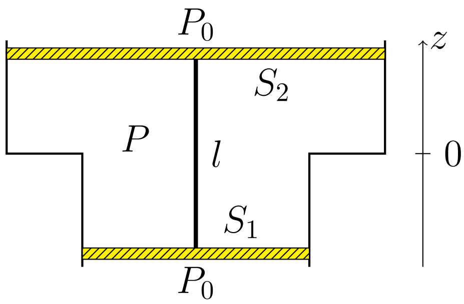

Рис. 1.2

Отсюда можно сделать вывод, что процесс является изобарным, а значит:

$$\Delta T = \frac{P}{R}\Delta V \qquad (1.3.2)$$

Объём внутри сосуда определятся как:

$$V = zS_2 + (l - z)S_1 = lS_1 + z(S_2 - S_1).$$

Видно, что V от z зависит линейно, а значит

$$\Delta V = \Delta z \Delta S \qquad (1.3.3)$$

Подставляя 1.3.1 и 1.3.3 в 1.3.2 получим

$$\Delta T = \left(P_0 + \frac{mg}{\Delta S}\right)\frac{\Delta S}{R}\Delta z = \left(\frac{P_0\Delta S + mg}{R}\right)\Delta z \qquad (1.3.4)$$

Рассмотренное устройство может служить термометром с линейной шкалой в области $T > T_0$.

При $m = 5$ кг , $\Delta S = 10$ см^2, $\Delta z = 1$ см получаем $\Delta T \approx 0,2$ K.

Таким образом термометр оказывается весьма чувствительным.

1.4. В вертикальном цилиндрическом сосуде находится в равновесии тяжелый поршень. Над поршнем и под ним имеются одинаковые массы газа при одинаковой температуре T_0 . Отношение верхнего объема к нижнему равно n_0 . При какой температуре T отношение объемов станет равным n ?

Решение:

Запишем уравнение Менделеева-Клапейрона для газа в первом и втором случаях:

В первом случае:

$$\begin{aligned} P_1V_1 &= \frac{m}{M}RT_0, \\ P_2V_2 &= \frac{m}{M}RT_0. \end{aligned} \tag{1.4.1}$$

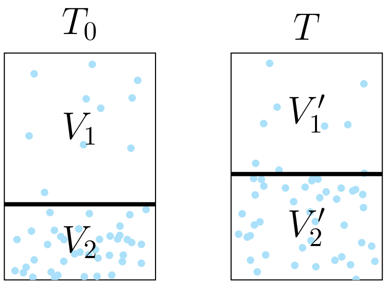

Рис. 1.3

Во втором случае:

$$\begin{aligned} P_1'V_1' &= \frac{m}{M}RT, \\ P_2'V_2' &= \frac{m}{M}RT. \end{aligned} \tag{1.4.2}$$

Из уравнений 1.4.1 следует, что

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{V_1}{V_2} = n_0, \tag{1.4.3}$$

а из уравнений 1.4.2 вытекает, что

$$\frac{P_2'}{P_1'} = \frac{V_1'}{V_2'} = n. \tag{1.4.4}$$

Разделив уравнения 1.4.1 на соответствующие уравнения 1.4.2, получаем:

$$\frac{T}{T_0} = \frac{P_1'V_1'}{P_1V_1} = \frac{P_2'V_2'}{P_2V_2}. \tag{1.4.5}$$

Отношение давлений газа над поршнем в первом и втором случаях находим, используя условие механического равновесия поршня:

$$P_2 = P_1 + \frac{mg}{S}, \quad P_2' = P_1' + \frac{mg}{S} \tag{1.4.6}$$

Учитывая, что из уравнений 1.4.3 и 1.4.4 следуют соотношения:

$$P_2 = n_0P_1, \quad P_2' = nP_1', \tag{1.4.7}$$

находим:

$$P_2' - P_2 = P_1' - P_1 = nP_1' - n_0P_1. \tag{1.4.8}$$

Отсюда получаем:

$$\frac{P_1'}{P_1} = \frac{n_0 - 1}{n - 1}. \tag{1.4.9}$$

Отношение объемов, занимаемых газом над поршнем в первом и втором случаях, находим, учитывая, что полный объем сосуда в обоих случаях одинаков:

$$V_1 + V_2 = V_1' + V_2' \Rightarrow V_1 + \frac{V_1}{n_0} = V_1' + \frac{V_1'}{n}. \tag{1.4.10}$$

Из выражения 1.4.10 получаем:

$$\frac{V_1'}{V_1} = \frac{n(n_0+1)}{n_0(n+1)}. \tag{1.4.11}$$

Из выражений 1.4.5, 1.4.9 и 1.4.11 находим:

$$T = T_0\frac{n(n_0^2-1)}{n_0(n^2-1)}. \tag{1.4.12}$$

1.5. Горизонтально расположенный цилиндрический сосуд сечением* S *и длиной* 2l *содержит идеальный газ, давление которого* $\mathbf{p_0}$*, температура* $\mathbf{T_0}$*. Цилиндр разделен на две половины тонким поршнем массы* m*, который способен скользить вдоль цилиндра без трения. Найти период малых колебаний поршня.

Решение:

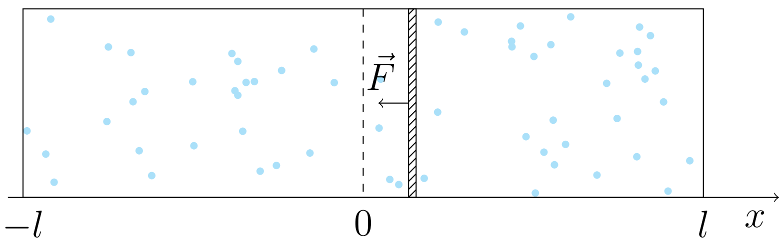

Рис. 1.4

Поршень будет совершать колебания, т.к. при выведении его из положения равновесия равнодействующая сил давления газа $\vec{F}$ по обе стороны от поршня направлена в сторону положения равновесия (рис. 1.4). В результате под действием этой силы поршень стремится вернуться в исходное положение. В положении равновесия эта сила обращается в нуль, но поршень по инерции проходит это положение, т.к. его скорость в этот момент отлична от нуля. Возникают колебания поршня.

Изменение давления газа при смещении поршня зависит от вида процесса. Если процесс можно считать *изотермическим*, то воспользовавшись законом Бойля-Мариотта находим изменение давления газа при бесконечно малом изменении объема сосуда на dV :

$$PV = const \Rightarrow d(PV) = 0 \Rightarrow dP = -P\frac{dV}{V}. \tag{1.5.1}$$

Знак «$-$» означает, что увеличение объема приводит к уменьшению давления в сосуде и наоборот.

В случае малых колебаний смещение поршня $x \ll l$. В этом случае для малых конечных изменений объема и давления имеем:

$$\Delta P = -P_0 \frac{\Delta V}{V} = -P_0 \frac{x}{l}. \tag{1.5.2}$$

Равнодействующая сил давления, действующих на поршень, равна:

$$F = 2\Delta P \cdot S = -2SP_0 \frac{x}{l}. \tag{1.5.3}$$

Знак «$-$» указывает на то, что сила направлена в сторону противоположную смещению поршня x.

Из второго закона Ньютона для поршня следует, что уравнение движение поршня имеет вид:

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{F}{m} = -2SP_0 \frac{x}{ml}. \tag{1.5.4}$$

Отсюда приходим к уравнению

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{2SP_0}{ml} x = 0. \tag{1.5.5}$$

Тело, движение которого описывается таким уравнением, совершает гармонические колебания с циклической частотой

$$\omega = \sqrt{\frac{2SP_0}{ml}}. \tag{1.5.6}$$

Отсюда период малых колебаний поршня равен:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{ml}{2SP_0}}. \tag{1.5.7}$$

Если колебания поршня происходят *адиабатически*, то в этом случае изменение давления при смещении поршня определяем из уравнения Пуассона:

$$PV^\gamma = const \Rightarrow d(PV^\gamma) = 0 \Rightarrow dP = -\gamma p \frac{dV}{V}. \tag{1.5.8}$$

Соответственно сила, действующая на поршень, будет равна:

$$F = 2S\Delta P = -2\gamma SP_0 \frac{x}{l}. \tag{1.5.9}$$

Уравнение движения примет вид:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{2\gamma SP_0}{ml} x = 0. \tag{1.5.10}$$

Период колебаний поршня в этом случае равен:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{ml}{2\gamma SP_0}}. \tag{1.5.11}$$

1.6. Поршневой воздушный насос емкости ΔV откачивает воздух из сосуда емкости V. За сколько циклов работы насоса давление понизится от P_0 до P. Процесс считать изотермическим.

1.7. Сделать приближенную оценку толщины земной атмосферы, приняв, что ее температура равна 300 К. Указание: сделать допущение, что плотность атмосферы постоянна.

1.8. Герметически закрытый бак высоты 3 м полностью заполнен водой, только на дне его находятся два одинаковых пузырька воздуха. Давление на дно бака 0,15 МПа. Каким станет давление на дно, если всплывет один пузырек? Два пузырька?

1.9. Нижний конец вертикальной узкой трубки длины $2l$ запаян, а верхний открыт в атмосферу. В нижней половине трубки находится газ при температуре T_0, а верхняя половина заполнена ртутью. До какой минимальной температуры надо нагреть газ в трубке, чтобы он вытеснил всю ртуть? Внешнее давление совпадает с давлением ртутного столба длины l.

1.10. Коэффициент адиабатического расширения воздуха γ можно измерить методом Клемана-Дезорма, при котором в сосуде, содержащем воздух, вначале увеличивают давление на небольшую величину $P_1 (P_1 \ll P_{атм.})$, а затем адиабатически понижают давление до атмосферного, кратковременно открыв сосуд. Через некоторое время после закрытия сосуда давление оставшегося в сосуде воздуха самопроизвольно понижается на величину $P_2 < P_1$. Коэффициент адиабаты вычисляется по формуле $\gamma = \frac{P_1}{P_1 - P_2}$. Доказать это соотношение.