

Лабораторная работа №6

Использование программы Excel для решения задач на законы Кирхгофа.

К.С. Пилипенко

2023

Системой линейных уравнений с n неизвестными называют систему уравнений вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (1)$$

где x_1, x_2, \dots, x_n – неизвестные величины, a_{nm} ($n=1, 2, \dots, n, m=1, 2, \dots, n$) – числовые коэффициенты (коэффициенты при неизвестных), b_1, b_2, \dots, b_n – свободные члены. Форма записи алгебраической линейной системы в виде 1 называется нормальной, целое число n – размерность системы. Решением системы уравнений 1 является набор значений x_1, x_2, \dots, x_n , который все уравнения системы обращает в тождества. Система уравнений называется совместной, если она имеет хотя бы одно решение, и несовместной – в противном случае. Совместная система называется определенной, если она имеет единственное решение, и неопределенной, если она имеет больше одного решения.

Формулы для нахождения решений системы по методу Крамера имеют вид дробей:

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|}, \quad x_2 = \frac{|A_2|}{|A|}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{|A_n|}{|A|}$$

где $|A|, |A_1|, |A_2|, \dots, |A_n|$ — определители матрицы, составленные по систе-

ме уравнений 1

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, |A_1| = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad (2)$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \dots, |A_n| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_n \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n \end{vmatrix}$$

Способ решения системы линейных уравнений в Excel

Из системы уравнений 1 и правила перемножения матриц можно составить выражение:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \text{ или } A \times X = B, \quad (3)$$

и тогда будет справедливо уравнение

$$X = A^{-1} \times B, \quad (4)$$

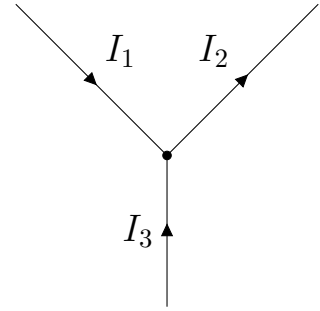
где A^{-1} — обратная матрица матрицы A (в Excel используется функция МОБР). Для перемножения матриц используется функция МУМНОЖ (проще всего начать вводить функцию и нажать на ТАВ).

Другими словами, чтобы найти матрицу, состоящую из неизвестных величин, нужно найти обратную матрицу матрицы, состоящей из числовых коэффициентов, а потом перемножить её с матрицей из свободных членов. Помните, что перемножение матриц *некоммутативно*!

Правила Кирхгофа

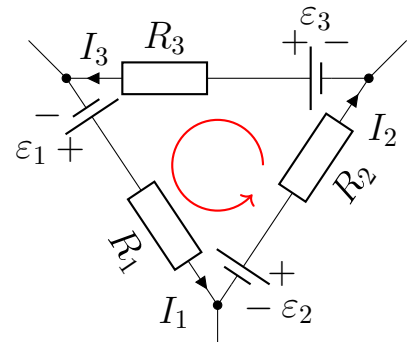
Первое правило Кирхгофа (правило токов Кирхгофа): алгебраическая сумма токов ветвей, сходящихся в каждом узле любой цепи, равна нулю. При этом направленный к узлу ток принято считать положительным, а направленный от узла — отрицательным:

$$\sum_j^n I_j = 0 \quad (5)$$



Второе правило Кирхгофа (правило напряжений Кирхгофа): алгебраическая сумма напряжений на резистивных элементах замкнутого контура равна алгебраической сумме ЭДС, входящих в этот контур.

$$\sum_k^n \varepsilon_k = \sum_k^m I_k R_k \quad (6)$$



Пример

Дано

$$R_1 = 100 \text{ Ом}$$

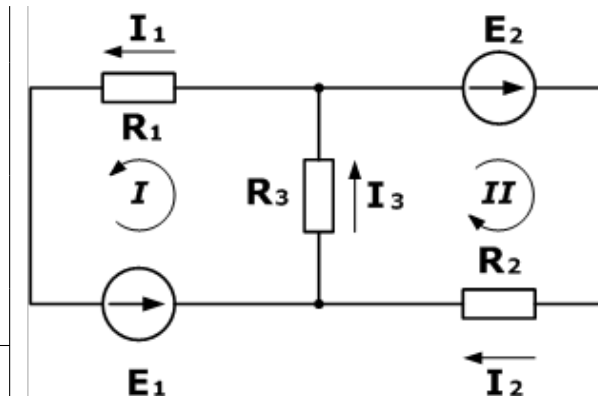
$$R_2 = 150 \text{ Ом}$$

$$R_3 = 150 \text{ Ом}$$

$$E_1 = 75 \text{ В}$$

$$E_2 = 100 \text{ В}$$

$$I_1, I_2, I_3 - ?$$



Используя **первое правило Кирхгофа**, можно записать $n-1$ уравнений для цепи, где n — количество узлов. В нашем случае количество узлов $n=2$, а значит нужно составить только одно уравнение:

$$I_3 - I_1 - I_2 = 0 \quad (7)$$

Затем используя **второе правило** составим уравнения для первого и второго контуров цепи. Направления обхода выбраны произвольными, при этом если направление тока через резистор совпадает с направлением обхода, берем со знаком плюс, и наоборот если не совпадает, то со знаком минус. Аналогично с источниками ЭДС.

На примере первого контура — ток I_1 и I_3 совпадают с направлением

обхода контура (против часовой стрелки), ЭДС ε_1 также совпадает, поэтому берем их со знаком плюс.

Уравнения для первого и второго контуров по второму закону будут:

$$\begin{aligned} R_1 I_1 + R_3 I_3 &= \varepsilon_1 \\ R_2 I_2 + R_3 I_3 &= \varepsilon_2 \end{aligned} \quad (8)$$

Уравнения 7 и 8 образуют систему

$$\begin{cases} I_3 - I_1 - I_2 = 0 \\ R_1 I_1 + R_3 I_3 = \varepsilon_1 \\ R_2 I_2 + R_3 I_3 = \varepsilon_2, \end{cases} \quad (9)$$

Подставив значения из «Дано» получим:

$$\begin{cases} -I_1 - I_2 + I_3 = 0 \\ 100I_1 + 150I_3 = 75 \\ 150I_2 + 150I_3 = 100, \end{cases} \quad (10)$$

И тогда матрицы из коэффициентов и свободных членов соответственно:

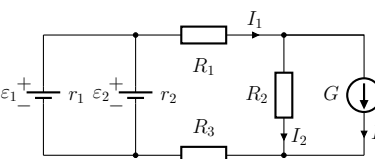
$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 100 & 0 & 150 \\ 0 & 150 & 150 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 75 \\ 100 \end{pmatrix} \quad (11)$$

Ход работы

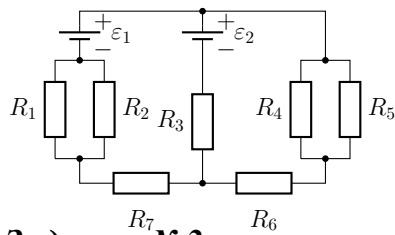
Используя первое и второе правила Кирхгофа получите систему уравнений для каждой электрической схемы. Используя уравнение 4 получите матрицу токов, проходящих через каждый элемент цепи.

Задание №1.

Найти величину тока через гальванометр G , включенный в цепь, если $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1,5$ В, внутренние сопротивления источников ЭДС равны $r_1 = r_2 = 0,5$ Ом, $R_1 = R_2 = 2$ Ом, $R_3 = 1$ Ом, $R_G = 3$ Ом.

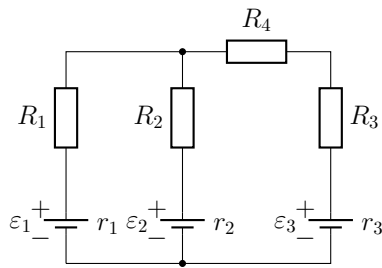


Задание №2.



Найти величины токов во всех участках цепи, если $\varepsilon_1 = 20 \text{ В}$, $\varepsilon_2 = 33 \text{ В}$, $r_1 = 0,2 \text{ Ом}$, $r_2 = 0,5 \text{ Ом}$, $R_1 = 0,8 \text{ Ом}$, $R_2 = 2 \text{ Ом}$, $R_3 = 14,3 \text{ Ом}$, $R_4 = 23,4 \text{ Ом}$, $R_5 = 34,3 \text{ Ом}$, $R_6 = 40,3 \text{ Ом}$, $R_7 = 12 \text{ Ом}$.

Задание №3.



Определить величину токов во всех участках цепи и мощность, развиваемую источниками ЭДС, если $\varepsilon_1 = 6 \text{ В}$, $\varepsilon_2 = 10 \text{ В}$, $E_3 = 20 \text{ В}$, $r_1 = 0,2 \text{ Ом}$, $r_2 = 0,2 \text{ Ом}$, $r_3 = 0,4 \text{ Ом}$, $R_1 = 19,8 \text{ Ом}$, $R_2 = 45,8 \text{ Ом}$, $R_3 = 100 \text{ Ом}$, $R_4 = 99,6 \text{ Ом}$.