

# Лабораторная работа №5

## *Использования метода наименьших квадратов для аппроксимации результатов совместных измерений*

К.С. Пилипенко 

2023

Пусть имеется два набора экспериментальных данных:  $x_i$  и  $y_i$ , где  $i = 1, \dots, n$ <sup>1</sup> такие что между ними предполагается зависимость вида  $y = f(x)$ . Вводится некоторая (в простейшем случае линейная) функция  $f(x, \{a_j\})$ , которая определяется множеством неизвестных параметров  $\{a_j\}$ , где  $j = 1, \dots, n$ .

Ставится задача получить такое множество, чтобы совокупность погрешностей  $r_i = y_i - f(x_i, \{a_j\})$  была в некотором смысле минимальной.

Согласно методу наименьших квадратов решением этой задачи является набор параметров  $\{a_i\}$ , который минимизирует некоторую функцию:

$$g(\{a_i\}) = \sum_{i=0}^n (y_i - f(x_i, \{a_j\}))^2. \quad (1)$$

Пусть между данными предположительно имеется линейная зависимость, тогда  $\{a_j\} = \{a_1, a_2\}$ , а функция  $f(x, a_1, a_2) = a_1x + a_2$ . Чтобы функция  $g(a_1, a_2)$  из уравнения 1 была минимальна достаточным условием является равенство нулю её частных производных:

$$\begin{cases} \left( \frac{\partial g(a_1, a_2)}{\partial a_1} \right)_{a_2} = 0 \\ \left( \frac{\partial g(a_1, a_2)}{\partial a_2} \right)_{a_1} = 0 \end{cases}, \quad (2)$$

---

<sup>1</sup> $n$  — в данном случае это объём выборочных совокупностей

где  $\left(\frac{\partial g(a_1, a_2)}{\partial a_1}\right)_{a_2}$  — производная функции по  $a_1$  при постоянной  $a_2$ .

## Ход работы

### Задание №1. Генерация выборки

- Создайте файл с расширением .xlsm. По умолчанию вкладка Разработчик скрыта, поэтому надо её включить. Заходим по пути Файл→Параметры→Настроить ленту и ставим галочку на вкладке Разработчик;
- В разделе Разработчик нажмите на макросы, дайте любое название макроса и создайте его. Далее в открывшемся окне введите код из листинга 1;

```
1      Sub LinDistGen ()  
2          ' Сюда надо поместить код из листинга  
3      End Sub
```

- При запуске кода в первом и втором столбцах таблицы появятся сгенерированные выборки  $x_i$  и  $y_i$  соответственно объёмом 50 элементов.

### Задание №2. Ручной поиск параметров

Аппроксимировать полученную зависимость будем линейной функцией вида  $f(x, a_1, a_2) = a_1 x + a_2$ .

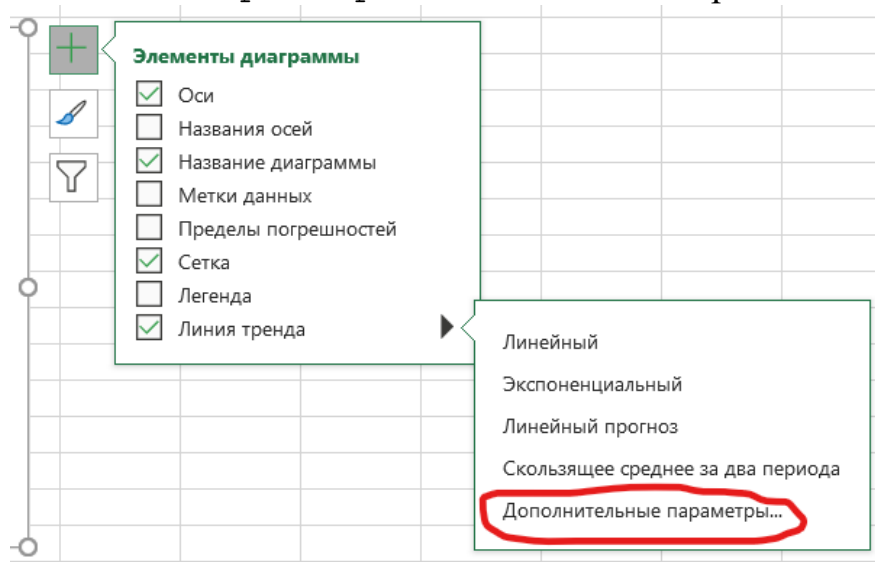
1. Подставив  $f(x, a_1, a_2)$  в формулу 1 найдите частные производные<sup>2</sup>. В Excel можно и нужно производить расчёты таких коэффициентов как  $\sum x_i$ ,  $\sum x_i^2$ ,  $\sum x_i y_i$  и т.п. **Получение частных производных и их дальнейшее упрощение нужно записывать в тетрадке!**
2. Решите полученную систему линейных уравнений. Запишите полученный результат ( $a_1$  и  $a_2$ ) в отдельных ячейках таблицы Excel.

---

<sup>2</sup>Более подробно о МНК можно узнать в учебнике [1] на стр. 45

### Задание №3. Машинный поиск параметров

1. Постройте график  $y = f(x)$ .
2. Добавьте линейную линию тренда на графике и зайдите в Дополнительные параметры как показано на скриншоте.



3. В открывшейся панели поставьте галочку рядом с показывать уравнение на диаграмме.
4. Сравните значения параметров  $a_1$  и  $a_2$  с полученными первым способом. Сделайте вывод.

### Контрольные вопросы

1. Что представляет собой метод минимума хи-квадрат (метод Пирсона) и чем он отличается от МНК?
2. В чём заключается метод максимального правдоподобия?

### Литература

1. Степанова Е. А., Скулкина Н. А., Волегов А. С. Основы обработки результатов измерений : учеб. пособие / под ред. Е. А. Степановой. — Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-т, 2014. — 95 с.

### Приложение

### Листинг 1: Код генератора выборки

```
1      Randomize
2      Dim i As Long
3      Dim a As Double
4      Dim b As Double
5      Dim c As Double
6      Dim Error As Double
7      Dim random As Double
8
9      a = 2 * (2 * Rnd - 1)
10     b = 3 * (2 * Rnd - 1)
11     c = 2 * (2 * Rnd - 1)
12     Error = 0.2
13     i = 51
14     Range("A1").Select
15     For i = 2 To i
16         ActiveCell.Value = i
17         ActiveCell.Offset(0, 1).Select
18         random = a * i * i + b * i + c
19         ActiveCell.Value = random * (1 - Error + 2 *
20             Error * Rnd)
21         ActiveCell.Offset(1, -1).Select
22     Next i
```