Лабораторная работа №4
Дискретные и непрерывные случайные величины. Распределение. Плотность распределения. Функции распределения

К.С. Пилипенко

2022

Дискретной случайной величиной называется случайная величина, которая в результате испытания принимает отдельные значения с определёнными вероятностями.

Непрерывной случайной величиной называют случайную величину, которая в результате испытания принимает все значения из некоторого числового промежутка.

Распределением называют множество случайных величин $\{x_i\}$ и соответствующее ему множество вероятностей $\{P(x_i)\}$.

Функцией распределения случайной величины X называют функцию $F(x)$, значение которой в точке x равно вероятности события $\{X \leqslant x\}$.

Плотность вероятности или плотность распределения вероятностей случайной непрерывной величины x – это функция $\omega(x)$ удовлетворяющая условиям:

$$\omega(x) \geqslant 0, \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \omega(x)dx = 1. \tag{1}$$

Вероятность того, что величина X заключена в интервале (a,b) при любых a < b равна:

$$p(x) = \int\limits_{a}^{b} \omega(x)dx \tag{2}$$

Функция распределения F(X) случайной величины X и плотность вероятности $\omega(X)$ связаны следующими соотношениями

$$F(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \omega(X) dX. \tag{3}$$

Распределение Пуассона

Распределение Пуассона описывает дискретную случайную величину, представляющую собой число событий, произошедших за фиксированное время, при условии, что данные события происходят независимо друг от друга с некоторой фиксированной средней интенсивностью.

Распределение Пуассона применимо, если:

1. случайная величина принимает только положительные значения,

2. если длина интервала (например, t – время наблюдения) стремится к нулю, то вероятность одного события также стремится к нулю,

3. события, относящиеся к неперекрывающимся интервалам, являются статистически независимыми.

Вероятность наблюдения n событий, произошедших за время t определяется формулой:

$$P_n = \frac{\bar{n}^n}{n!} e^{-\bar{n}}, \tag{4}$$

$\bar{n}$ – математическое ожидание случайной величины(среднее количество событий за промежуток времени t)

Распределением Гаусса (нормальным распределением) называют непрерывное распределение, имеющее следующую плотность вероятности:

$$P(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}, \tag{5}$$

где $\bar{x}$ — среднее значение; σ — среднее квадратическое отклонение. Обоснование распределения Гаусса выходит за рамки нашего рассмотрения. Заметим, что нормальное или гауссово распределение может быть использовано при условии, что рассматриваемая случайная величина представляет собой выборку большого числа независимых случайных величин, максимальная из которых мала по сравнению с их суммой.

Ход работы

1. *Составить график вероятности распределения Пуассона P(x) при* $\bar{x} = 2$ *на основе множества натуральных числе от 1 до 18. Как меняется распределение при изменении математического ожидания? Составьте ещё два графика распределения при математическом ожидании равном 5 и 10;*

2. *Составить графики плотности вероятности нормального распределения по формуле 5 при значениях* $\bar{x}$ *и* σ^2 *(функция принимает положительны и отрицательные непрерывные значения. Рекомендуется взять значения от -2 до 2 с шагом 0,1):*

   - $\bar{x} = 0$, $\sigma^2 = 1$
   - $\bar{x} = 0$, $\sigma^2 = 5$
   - $\bar{x} = 2$, $\sigma^2 = 0{,}5$

Контрольные вопросы

1. Что такое математическое ожидание случайной величины? Какие свойства есть у математического ожидания?
2. Как определяется дисперсия? Какой смысл дисперсии?
3. Приведите примеры использования распределения Пуассона.
4. Приведите примеры использования распределения Гаусса в физике.