

Лабораторная работа №5

Использования метода наименьших квадратов для аппроксимации результатов совместных измерений

К.С. Пилипенко 

2023

Пусть имеется два набора экспериментальных данных: x_i и y_i , где $i = 1, \dots, n$ ¹ такие что между ними предполагается зависимость вида $y = f(x)$. Вводится некоторая (в простейшем случае линейная) функция $f(x, \{a_j\})$, которая определяется множеством неизвестных параметров $\{a_j\}$, где $j = 1, \dots, n$.

Ставится задача получить такое множество, чтобы совокупность погрешностей $r_i = y_i - f(x_i, \{a_j\})$ была в некотором смысле минимальной.

Согласно методу наименьших квадратов решением этой задачи является набор параметров $\{a_i\}$, который минимизирует некоторую функцию:

$$g(\{a_i\}) = \sum_{i=0}^n (y_i - f(x_i, \{a_j\}))^2. \quad (1)$$

Пусть между данными предположительно имеется линейная зависимость, тогда $\{a_j\} = \{a_1, a_2\}$, а функция $f(x, a_1, a_2) = a_1x + a_2$. Чтобы функция $g(a_1, a_2)$ из уравнения 1 была минимальна достаточным условием является равенство нулю её частных производных:

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial g(a_1, a_2)}{\partial a_1} \right)_{a_2} = 0 \\ \left(\frac{\partial g(a_1, a_2)}{\partial a_2} \right)_{a_1} = 0 \end{cases}, \quad (2)$$

¹ n — в данном случае это объём выборочных совокупностей

где $\left(\frac{\partial g(a_1, a_2)}{\partial a_1}\right)_{a_2}$ — производная функции по a_1 при постоянной a_2 .

Ход работы

Задание №1. Генерация выборки

- Создайте файл с расширением .xlsm. По умолчанию вкладка Разработчик скрыта, поэтому надо её включить. Заходим по пути Файл→Параметры→Настроить ленту и ставим галочку на вкладке Разработчик;
- В разделе Разработчик нажмите на макросы, дайте любое название макроса и создайте его. Далее в открывшемся окне введите код из листинга 1;

```
1      Sub LinDistGen ()
2          ' Сюда надо поместить код из листинга
3      End Sub
```

- При запуске кода в первом и втором столбцах таблицы появится случайно сгенерированная выборка из элементов x_i и y_i объёмом 50 элементов.

Задание №2. Ручной поиск параметров

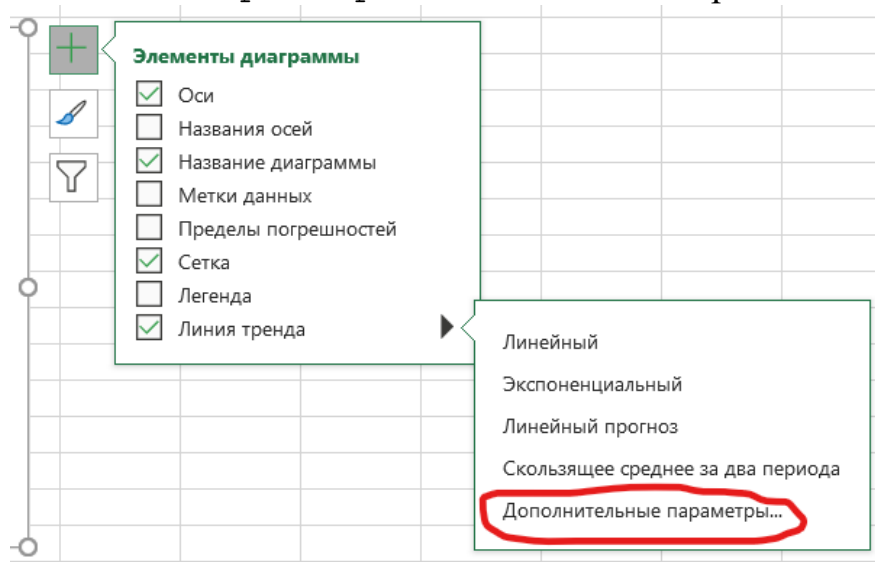
Аппроксимировать полученную зависимость будем линейной функцией вида $f(x, a_1, a_2) = a_1x + a_2$.

1. Подставив $f(x, a_1, a_2)$ в формулу 1 найдите частные производные². В Excel можно и нужно производить расчёты таких коэффициентов как $\sum x_i$, $\sum x_i^2$, $\sum x_i y_i$ и т.п. **Получение частных производных и их дальнейшее упрощение нужно записывать в тетрадке!**
2. Решите полученную систему линейных уравнений (можно воспользоваться способом решения СЛУ, который описан в [лабораторной работе №6](#)). Запишите полученный результат (a_1 и a_2) в отдельных ячейках таблицы Excel.

²Более подробно о МНК можно узнать в учебнике [1] на стр. 45

Задание №3. Машинный поиск параметров

1. Постройте график $y = f(x)$.
2. Добавьте линейную линию тренда на графике и зайдите в Дополнительные параметры как показано на скриншоте.



3. В открывшейся панели поставьте галочку рядом с показывать уравнение на диаграмме.
4. Сравните значения параметров a_1 и a_2 с полученными первым способом. Сделайте вывод.

Контрольные вопросы

1. Что представляет собой метод минимума хи-квадрат (метод Пирсона) и чем он отличается от МНК?
2. В чём заключается метод максимального правдоподобия?

Литература

1. Степанова Е. А., Скулкина Н. А., Волегов А. С. Основы обработки результатов измерений : учеб. пособие / под ред. Е. А. Степановой. — Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-т, 2014. — 95 с.

Приложение

Листинг 1: Код генератора выборки

```
1      Randomize
2      Dim i As Long
3      Dim a As Double
4      Dim b As Double
5      Dim c As Double
6      Dim Error As Double
7      Dim random As Double
8
9      a = 2 * (2 * Rnd - 1)
10     b = 3 * (2 * Rnd - 1)
11     c = 2 * (2 * Rnd - 1)
12     Error = 0.2
13     i = 51
14     Range("A1").Select
15     For i = 2 To i
16         ActiveCell.Value = i
17         ActiveCell.Offset(0, 1).Select
18         random = a * i * i + b * i + c
19         ActiveCell.Value = random * (1 - Error + 2 *
20             Error * Rnd)
21         ActiveCell.Offset(1, -1).Select
22     Next i
```