Ejercicios Probabilidad

Clave: 108353
Juan Pablo Herrera

Ejercicios ~~Métodos~~ Métodos de conteo

1) 5 ingredientes de los cuales elegir para hacer una pizza. ¿Cuántas pizzas diferentes podemos formar?

- Tenemos que el orden no importa y no tiene reemplazo. Por lo que usamos combinaciones.
- Además podemos escoger el número de ingredientes.

$$\#(S) = \sum_{K=1}^{5} \binom{5}{K} = \binom{5}{5} + \binom{5}{4} + \binom{5}{3} + \binom{5}{2} + \binom{5}{1}$$

$$= 1 + \cancel{10}\,5 + 10 + \cancel{4}\,10 + \cancel{5}\,5$$

$\boxed{\#(S) = 31}$ Tenemos ~~26~~ 31 formas distintas

2) Para construir una computadora podemos elegir de:
- 2 procesadores
- 3 sistemas operativo
- 4 tamaño memoria
- 4 Discos duros
- 10 Monitores

Como todos son independientes usamos el principio multiplicativo

$$n = n_1 \cdot n_2 \cdots n_K = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 10 = 960$$

Hay 960 formas de armar la computadora

3) Cuantas formas hay de construir un num. de 3 dígitos sin repetir ninguno?

No hay reemplazo y el orden si importa. Entonces usamos permutación

$${}_nP_r = {}_{10}P_3 = \frac{10!}{(10-3)!} = 720$$ formas distintas sin repetir número

4) 4 Personas buscan ordenar bebidas. El cantinero sirve pero olvida quién ordenó qué.
¿Cuál es la prob. de que las coloque correctamente?

considerando un modelo equiprobable

$$P(E) = \frac{1}{\#(S)}$$ Por que solo un evento de S es exitoso

$$\#(S) = {}_nP_r = {}_4P_4 = 24$$ Porque no hay reemplazo y el orden importa.

$$P(E) = \frac{1}{24} = 0.0416$$

5) Rentas 5 Peliculas para ver 3 hoy y dos mañana. Mariana te pide 2 prestadas.
¿De cuántas formas Mariana puede elegir 2?
- En este caso no importa el orden y no hay reemplazo entonces

$$\#(S) = \binom{5}{2} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = 10$$ formas posibles para escoger

o) Cuántas manos de Poker pueden ser tercias? (No Full)

Por cada número podemos tener 1 conjunto de tercias
Entonces sin orden y sin reemplazo

$13 \cdot \binom{4}{3}$ = # de tercias con 3 cartas.

Para la 4 ∧ 5 carta.

la 4ta tiene 48 opciones (Todas menos los nums de la tercia)

la 5ta tiene 44 opciones (Todas menos los nums de la tercia y la 4ta)

y como no importa el orden tenemos que dividir K!

hay $\frac{48 \cdot 44}{2}$ = # opciones para 4 ∧ 5ta carta

$\#(S) = \left(13 \binom{4}{3}\right)\left(\frac{48 \cdot 44}{2}\right) = 52 \cdot 1056 = 54,912$ opciones de tercia.

Ejercicios Prob. Condicional

1)

	(E) Enfermo	(E^c) No Enfermo	Total
Vacunados (V)	5	60	65
No vacunados (V^c)	25	10	35
Total	30	70	100

②

calcular:

a) $P(\{vacunado\}) = .65$

$P(\{no\ vacunado\}) = .35$

$P(\{Enfermo \mid vacunado\}) = \frac{P(E \cap V)}{P(V)} = \frac{0.05}{.65} = 0.076$

$P(\{no\ enfermo \mid vacunado\}) = \frac{P(E^c \cap V)}{P(V)} = \frac{.60}{.65} = 0.923$

$P(\{Enfermo \mid no\ vacunado\}) = \frac{P(E \cap V^c)}{P(V^c)} = \frac{.25}{.35} = 0.714$

$P(\{No\ Enfermo \mid no\ vacunado\}) = \frac{P(E^c \cap V^c)}{P(V^c)} = \frac{.1}{.35} = .285$

$P(\{vacunado\ y\ no\ enfermo\}) = P(V \cap E^c) = .60$

b) $P(\{no\ enfermo\}) = 0.70$

$P(\{vacunado\} \mid \{no\ enfermo\}) = \frac{P(V \cap E^c)}{P(E^c)} = \frac{.60}{.70} = 0.857$

$P(\{no\ vacunado\ y\ no\ enfermo\}) = 0.10$

2)

	Fem	Musc	Total
No Fuma	61	75	136
Fuma	9	23	32
TOTAL	70	98	168

a) Calcular: $P(Fem) = \frac{70}{168} = 0.416$; $P(Fuma) = \frac{32}{168} = 0.19$

b) Suponga que 1 persona deja de fumar y no sabe su genero. Calcular P(Fem) si se selecciona y no fumador de manera aleatoria.

Considera

Usar regla de Prob. total ~~sobre~~ condicion sobre E.

$E = \{$ Mujer deja de fumar $\}$

$F = \{$ Se selecciona a mujer no fumadora $\}$

$E^c = \{$ hombre deja de fumar $\}$

$$P(Fem) = \sum_{1}^{n} P(F|E_i)P(E_i) = P(F|E)P(E) + P(F|E^c)P(E^c)$$

$P(F|E)$ = Prob. de escoger Fem dado que fem dejó de fumar $= \frac{62}{137}$

$P(E) = \frac{9}{32}$ $\quad P(E^c) = \frac{23}{32}$

$P(F|E^c)$ Prob de escoger fem dado que musc dejó $= \frac{61}{137}$

$$P(F) = \frac{62}{137} \cdot \frac{9}{32} + \frac{61}{137} \cdot \frac{23}{32} = 0.447 = P(F)$$

3) Urna 1
5 red
3 verdes

Urna 2
6 verde
2 rojas

- Alguien transfiere 1 canica de U1 A U2 sin ver cual fue.
- Seleccionas canica de U2
- Cual es la prob de que sea roja?

E = { la canica que cambia es roja }

F = { la canica seleccionada es ~~café~~ roja }

$P(E) = \frac{5}{8}$ $P(E^c) = \frac{3}{8}$

$P(F|E) = \frac{3}{9}$ $P(F|E^c) = \frac{2}{9}$

Por el Teo. de prob total

$$P(F) = \sum_{i}^{n} P(F|E_i)P(E_i) = P(F|E)P(E) + P(F|E^c)P(E^c)$$

$$P(F) = \frac{3}{9} \cdot \frac{5}{8} + \frac{2}{9} \cdot \frac{3}{8} = 0.291 = P(F)$$

Ejercicios Independencia

1) Calcula la prob de sacar un AS y corazon de una baraja

$P(AS) = \frac{4}{52} = 0.0769$ $\quad P = \frac{\# \text{favorables}}{\#(S)}$

$P(♡) = \frac{13}{52} = 0.25$

2) Se lanza un dado verde y otro rojo. Considere
$E = \{$los numeros suman $5\}$
$F = \{$El num del dado verde es impar$\}$
¿E ∧ F son independientes?

Son independientes si $P(E \cap F) = P(E)P(F)$

$S_E = \{(1,4),(3,2),(2,3),(4,1)\}$

$S_F = \{(1,i),(3,i),(5,i) \mid \forall\ i = 1,2 \ldots, 6\}$

$\#(S_F) = 18$

$P(E) = 4/36 \quad P(F) = 18/36 = 1/2$

$E \cap F = \{(3,2),(1,4)\} \quad P(E \cap F) = \frac{2}{36}$

$P(E)P(F) = \frac{4}{36} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{36} = P(E \cap F)$ ∴ Son independientes

3) Supón que la eleccion de postre es indep. del plato principal. La mitad de las veces en "L interuallo" pedimos pasta con camarones y la mitad pannacotta de postre
¿Cuál es la prob. de ordenar pasta con camarón y

Panacotta dado que comemos en "L intervallo"?

sean los eventos:

E = { Pedimos Pasta con camarón de plato principal }

F = { pedimos panacotita de postre }

G = { comemos en L intervallo }

sabemos que $P(E|G) = 0.5$ ∧ $P(F|G) = 0.5$

queremos saber $P(E \cap F | G)$ y como E ∧ F son independientes entonces.

$P(E \cap F | G) = P(E|G) P(F|G) = 0.5 \cdot 0.5 = 0.25$ es la Prob

4) Sea E el evento que el número 111,111 sea el ganador del melate y F el número 555,555 (Melate 6 nums ÷ 1 ∧ 56 sin orden y sin reemplazo)

a) Determina si son eventos mutuamente excluyentes

~~Sinso~~ E = { sale 111 111 } F = { sale 555,555 }

~~P~~ $E \cap F = \emptyset \Rightarrow P(E \cap F) = 0$ ∴ son mutuamente excluyentes

b) Son independientes?

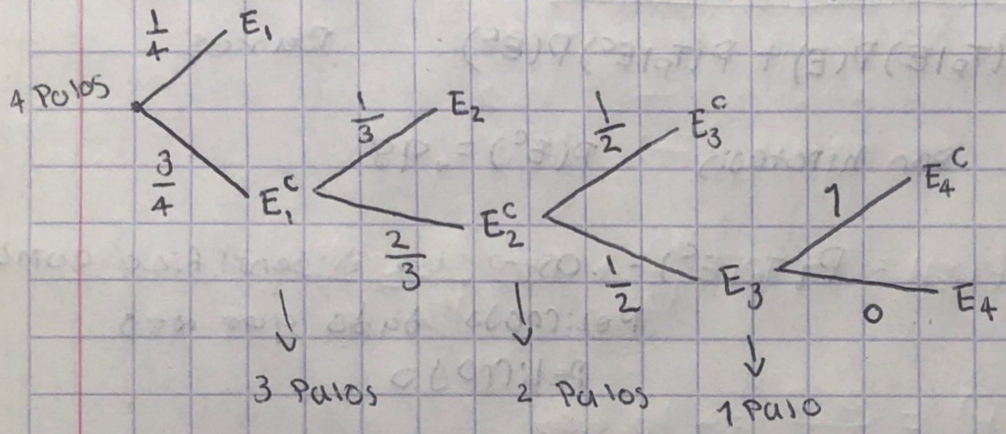
$P(E \cap F) = P(E) P(F) = 0$ ∴ son independientes

$P(E) = P(F) = 0$ no tiene reemplazo, no se pueden repetir los números dígitos

Ejercicio) Teorema de Bayes

1) Tiene alguna ventaja escoger primero, segundo o tercero en el juego de los palillos?

Sea $E_i = \{$ Prob de que la Persona i saque el Palillo corto $\}$ $i = 1,2,3,4$



$P(E_1) = \frac{1}{4}$

$P(E_2) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$

$P(E_3) = \frac{\cancel{3}}{4} \cdot \frac{\cancel{2}}{\cancel{3}} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} = \frac{1}{4}$

$P(E_4) = \frac{\cancel{3}}{4} \cdot \frac{\cancel{2}}{\cancel{3}} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} \cdot 1 = \frac{1}{4}$

Todos tienen la misma probabilidad de sacar el palillo corto

$P(E_i) = \frac{1}{4} \quad \forall i$

2) Un individuo es enjuiciado por cometer un crimen. El testigo asegura haber visto al individuo y lo identifico como Peligroso. Dadas las condiciones y realizando pruebas para la credibilidad del testigo se tiene que el 95% de las veces indentifica correctamente. La Prob de ser Peligroso es del 2% ¿Cuál es la prob. de que el individuo haya cometido el crimen dado que el testigo lo identifico?

La Prob de ser pelirrojo es del 2%

Buscamos $P(\text{Pelirrojo} \mid T_p) = P(E \mid T_p)$

$T_p = \{$ el testigo identificó a una persona como pelirroja $\}$

$E = \{$ El individuo es pelirrojo $\}$

$$P(E \mid T_p) = \frac{P(T_p \mid E)\,P(E)}{P(T_p \mid E)P(E) + P(T_p \mid E^c)P(E^c)}$$ Por Teo. de Bayes.

y $P(E) = 0.02$ por hipotesis $P(E^c) = .98$

$P(T_p \mid E) = .95$ $P(T_p \mid E^c) = .05 \rightarrow$ lo identifice como pelirrojo dado que no es pelirrojo

$$P(E \mid T_p) = \frac{0.95(.02)}{.95(.02) + (0.05)(.98)} = 0.279 = P(E \mid T_p)$$

b) El sospechoso es un individuo de pelo rubio, la prob de tener pelo rubio es de 15%

$P(E) = .15$ $P(E^c) = .85$

El planteamiento es igual que el anterior.

$$P(E \mid T_p) = \frac{0.95(.15)}{.95(.15) + (.05)(.85)} = 0.77 = P(E \mid T_p)$$

Ejercicios Variables Aleatorias

1) Considere lanzar 2 monedas. Sea X la variable aleatoria que cuenta el número de águilas que aparecen.

Calcula $P(X=1)$, $P(X=0)$, $P(X=2)$

$S = \{SS, SA, AS, AA\}$

$P(x=0) = \frac{\#\{SS\}}{\#S} = \frac{1}{4}$ $\qquad P(x=1) = \frac{\overset{\{SA, AS\}}{2}}{4} = \frac{1}{2}$

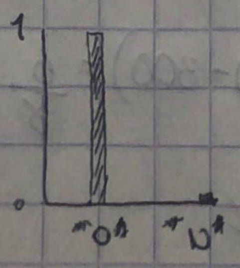
$P(X=2) = \frac{1}{4}$
$\{AA\}$

2) Considere el sorteo Melate "simplificado" con una bolsa acumulada de N y la variable aleatoria x que toma dos valores: N si se elige la combinación ganadora y cero en otros casos. ¿Cuál es la distribución de probabilidad de X.

Podemos tener 2 resultados para X

$$f(0) = P(X=0) = P(\{S\} - \{\#\text{Ganador}\}) = 1 - \frac{1}{\binom{56}{6}}$$

$$f(N) = P(X=N) = P(\{\#\text{Ganador}\}) = \frac{1}{\binom{56}{6}}$$ → sin reemplazo
sin orden



3) Calcular el valor Esperado de:

1) Una moneda Aguila gana 100, Sol pierde 60

$f(100) = P(x=100) = P\{A\} = \frac{1}{2}$

$f(-60) = P(x=-60) = P\{S\} = \frac{1}{2}$

$E(x) = \Sigma x_i f(x_i) = 100 \cdot \frac{1}{2} - 60 \cdot \frac{1}{2} = \frac{40}{2} = 20 = E(x)$ ✓

3) Una urna con

		Premios
10 rojas	→	−100
2 Amarillas	→	150
3 Azules	→	150

$E(y) = \Sigma y_i (f(y_i)) = -100 \cdot \frac{10}{15} + 150 \frac{5}{15} = \frac{1}{15}(750 - 1000)$

$E(y) = \frac{250}{15} = -16.666$ ✓

Escogería Jugar el de la moneda, tiene un valor esperado mayor.

4) Versión simplificada de máquina de palancas:
Hay 2 figuras, cuadro y triángulo que aparecen en 3 columnas de una cinta circular. Al Jalar la palanca giran y cada col. muestra o triángulo o rectángulo

Para Jugar se introducen \$300

1 - cuadro
0 - rectang.

S =	x	P
1 1 1 →	500	1/8
1 1 0	0	1/8
1 0 1	0	1/8
1 0 0	0	1/8
0 1 1	0	1/8
0 1 0	0	1/8
0 0 1	0	1/8
0 0 0 −	500	1/8

$E(x) = \frac{2}{8}(500 - 300) + \frac{6}{8}(-300)$

$E(x) = -175$ ✓