

第五章 随机过程的功率谱密度

当我们在时间域内研究某一函数的特性时，如果确定起来不方便，在数学上我们可以考虑将此函数通过某种变换将它变换到另一区域，比如说频率域内进行研究，最终目的是使问题简化。傅里叶变换提供了一种方法，就是如何将时间域的问题转换到频率域，进而使问题简化。在频率域内，频率意味着信息变化的速度。即，如果一个信号有“高”频成分，我们在频率域内就可以看到“快”的变化。这方面的应用在数字信号分析和电路理论等方面应用极广。

是不是任何一个时间函数都可以将其通过傅氏变换变到频率域去研究呢？我们说当时间函数 $X(t)$ ($-\infty < t < +\infty$) 满足绝对可积条件时可以。

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt < \infty$$

然而，随机过程的样本函数，即 $X(t) = \{x_1(t), \dots, x_n(t), \dots\}$ ， $x_1(t), \dots, x_n(t) \dots$ 一般不满足绝对条件，因此随机过程不能直接进行付氏变换。此外，很多随要过程的样本函数极不规则，无法用方程描述。这样，若想直接对随要过程进行谱分解，显然也不行。但是，对随机过程进行某种处理后，同样可对随机过程施行傅里叶变换。

PSD

§ 5.1 功率谱密度

为了研究随机信号的傅氏变换，我们首先简单复习一下确定信号 $S(t)$ 的频谱、能谱密度及能量概念，然后再引入随机过程的功率谱密度概念。

定理 5.1 设 $S(t)$ 是一个确定信号，且在 $(-\infty, +\infty)$ 上，则 $S(t)$ 的傅氏变换存在，或者说具有频谱 $S(\omega)$ ，记为

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$S(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$S(t) \xrightarrow[F^{-1}]{} s(\omega)$$

$$F[S(t)] = S(\omega)$$

$$F^{-1}[S(\omega)] = S(t)$$

一般频谱 $S(\omega)$ 是一个复数，且有 $S^*(\omega) = S(-\omega)$ ，*表示共轭。我们知道，对于复数有

$$Z = a + bi; |z| = \sqrt{a^2 + b^2}, z^* = a - bi$$

$$\therefore z \cdot z^* = (a + bi)(a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 + b^2 = |z|^2$$

对于定理的物理解释是，或 $S(t)$ 代表电流或电压，则定理条件要求 $\int_{-\infty}^{+\infty} s(t) dt < \infty$ ，即是要求 $S(t)$ 的总能量必须有限。

由积分变换的巴塞伐能量公式有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} S^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |S(\omega)|^2 d\omega$$

下面我们来解释一下公式的物理含义

等式左边表示 $S(t)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上的总能量，而右边积分中被积函数 $|S(\omega)|^2$ 相应地称为能谱密度。

巴塞伐公式理解为时间域上的总能量可用频率域上的频谱能量表示。

然而，工程技术上有许多重要的时间函数总能量是无限的，不能满足傅氏变换绝对可积条件，如正弦

$\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(t) dt < +\infty$ 就是。我们要研究的随机过程，由于持续时间是无限的，所以其总能量也是无限的，

即 $\int_{-\infty}^{+\infty} |x_n(t)| dt < +\infty, n=1, 2, \dots$ ，所以随机过程的频谱不存在。

那么该如何应用傅氏变换工具来对随机过程进行化简研究呢？我们是这样考虑的，一个随机过程

$X(x) = \{x_1(t), \dots, x_n(t), \dots\}$ ，尽管它的样本函数总能量是无限的，但它的平均功率是有限的，即

$$W_e = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |x(t)|^2 dt < +\infty$$

这是随机过程的样本函数在时间域上的平均功率表示。

这样，对随机过程的样本函数而言，虽然研究它的频谱没有意义，但研究它的平均功率确有意义。

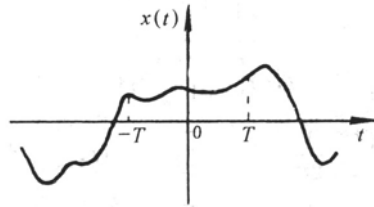


图 5.1 $x(t)$ 及其截取函数 $x_T(t)$

怎样具体表示随机过程一个样本函数的平均功率呢，我们是这样操作的：首先定义 $X(t)$ 的一个样本函数，不妨设为 $x(t)$ ，再次地样本函数 $x(t)$ 任意截取一段，长度为 $2T$ ，并记为 $x_T(t)$ 。称 $x_T(t)$ 为原样本函数 $x(t)$ 的截取函数，如图 5.1 所示。

用公式表示即为

$$x_T(t) = \begin{cases} x(t) & |t| < T \\ 0 & |t| > T \end{cases}$$

于是 $\int_{-\infty}^{+\infty} |x_T(t)| dt < +\infty$ 满足绝对可积条件。

$\therefore x_T(t)$ 存在付氏变换，即

$$x_T(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_T(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-T}^T x_T(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$x_T(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} x_T(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

这里称 $x_T(\omega)$ 为 $x_T(t)$ 的频谱函数。

又由于随机过程 $X(t) = \{x_1(t), \dots, x_n(t), \dots\}$ 在随机试验中取哪一个样本函数具有不确定性。因此，不同的试验结果，就意味着随机过程可能取不同的样本函数，亦即样本函数与试验结果有关，为此，可将样

本函数进一步表示为 $x(t, e)$ ，当然该样本函数的截取函数也可相应表示为 $x_T(t, e)$ ，显然它的傅氏变换也可表示为 $x_T(\omega, e)$ 。

又 ∵

$$\begin{aligned}
 \text{平均功率}_{W_e} &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |x(t)|^2 dt \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |x(t, e)|^2 dt \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x_T(t, e) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} x_T(\omega, e) e^{j\omega t} d\omega \right] dt \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} x_T(\omega, e) \left[\int_{-T}^T x_T(t, e) e^{j\omega t} dt \right] d\omega \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} x_T(\omega, e) \left[\int_{-T}^T x_T(t, e) e^{-j(-\omega)t} dt \right] d\omega \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} x_T(\omega, e) x_T(-\omega, e) d\omega \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} x_T(\omega, e) x_T^*(\omega, e) d\omega \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} |x_T(\omega, e)|^2 d\omega \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G_X(\omega, e) d\omega
 \end{aligned}$$

由于引入随机过程样本函数的截取函数定义，所以又可给出上式随机过程的样本函数平均功率在频率域的表达形式。

在上式中，令

$$G_X(\omega, e) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} |x_T(\omega, e)|^2 \quad (5.1)$$

则称 (5.1) 式为随机过程 $X(t)$ 的样本函数 $x(t, e)$ 的功率谱密度函数。

定义样本函数的功率谱密度

$$G_X(\omega, e) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} |x_T(\omega, e)|^2$$

式中, $x_T(\omega, e)$ 为截取函数 $x_T(t, e)$ 的频谱。

又∵ 随机过程是由一族样本函数组成, 即

$$X(t) = \{x_1(t), \dots, x_n(t), \dots\}$$

显然对每一个样本函数, 按照上面类似的方法都呆以求出它的一个样本函数的功率谱密度, 于是对所有的样本函数取统计平均就可给出随机过程的功率谱密度定义。

定义随机过程的功率谱密度:

$$\begin{aligned} G_X(\omega) &= E[G_X(\omega, e)] = E\left[\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} |x_T(\omega, e)|^2\right] \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} E[|X_T(\omega, e)|^2] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} E[|X_T(\omega, e)|^2] \end{aligned}$$

随机过程的一个样本函数的平均功率的表示形式, 有两种

$$W_e = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} |x_T(\omega, e)|^2 d\omega \quad (5.2)$$

$$W_e = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |x_T(t, e)|^2 dt \quad (5.3)$$

类似的, 可求出 $X(t)$ 的所有样本函数的平均功率表示形式, 然后取统计平均, 则可以给出随机过程的平均功率定义, 定义随机过程的平均功率:

$$\begin{aligned} W &= E[W_e] = E\left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} |x_T(\omega, e)|^2 d\omega\right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} E[|x_T(\omega, e)|^2]\right] d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G_X(\omega) d\omega \end{aligned}$$

平均功率

$$W = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G_X(\omega) d\omega$$

$$W = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T E[X^2(t)] dt$$

$$W = E[W_e] = E \left[\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |x(t, e)|^2 dt \right]$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T E[|x(t, e)|^2] dt$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T E[X^2(t)] dt$$

由随机过程平均功率定义可知，要求随机过程的平均功率可用两种方法，一种方法是求出 $G_X(\omega)$ ，即过程的功率谱密度，然后再积分，另一种方法是先求出过程的增方值 $E[X^2(t)]$ ，再积分。

特别地，当我们研究的随机过程是平稳过程时，此时的平稳过程平均功率可表示为：

$$\because X(t) \text{ 平稳} \quad \therefore E[X^2(t)] = \Phi_X^2 = R_X(0) \quad ?$$

$$W = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T E[X^2(t)] dt$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \Phi_X^2 dt = \Phi_X^2$$

~~$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \Phi_X^2 dt = R_X(0)$$~~

$$\therefore W = E[X^2(t)] = R_X(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G_X(\omega) d\omega$$

该式说明：平稳过程的平均功率等于该过程的均方值，也可由随机过程的功率谱密度在全频域上积分得到。若随机过程再各态历经，则各态历经过程的功率谱密度可用一个样本函数的功率谱密度来表示：

$$G_X(\omega) = G_s(\omega, e) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} |x_T(\omega, e)|^2$$

例 5.1 随机过程 $X(t)$ 为 $X(t) = \alpha \cos(\omega_0 t + \omega)$

式中， a, ω_0 是常数， φ 是在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上均匀分布随机变量，求 $X(t)$ 的平均功率。

解 \therefore

$$W = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T E[X^2(t)] dt$$

$$\begin{aligned}
 \therefore E[X^2(t)] &= E[a^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0)] \\
 &= E\left[\frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} \cos(2\omega_0 t + 2\varphi)\right] \\
 &= \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} \int_0^{2\pi} \cos(2\omega_0 t + 2\varphi) \frac{2}{\pi} d\varphi \\
 &= \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{\pi} \sin(2\omega_0 t)
 \end{aligned}$$

显然该过程不平稳。

$$\therefore W = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \left(\frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{\pi} \sin(2\omega_0 t) \right) dt = \frac{a^2}{2}$$

§ 5.2 功率谱密度与自相关函数的关系

通过对随机过程的分析，我们知道随机过程的相关函数是从时间有度描述了过程的重要统计特性，而随机过程的功率谱密度是从频率角度描述了过程的统计特性，二者是异曲同工，研究的都是一个对象，于是人们自然提出一个问题，随机过程的相关函数和它的功率谱密度之间是否存在一定关系，我们说当随机过程平稳且满足一定条件时，它们之间存在一定关系。

定理 5.2 如果平稳过程 $X(t)$ 的相关函数 $R_X(\tau)$ 绝对可积，即

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |R_X(\tau)| d\tau < +\infty$$

则过程 $X(t)$ 的相关函数和功率谱密度之间存在付氏变换，即

$$\left\{ \begin{aligned} G_X(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} R_X(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \\ R_X(\tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G_X(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \quad -\infty < \tau < \infty \end{aligned} \right.$$

$$R_X(\tau) \xrightarrow[F^{-1}]{F} G_X(\omega)$$

$$F[R_X(\tau)] = G_X(\omega)$$

$$F^{-1}[G_X(\omega)] = R_X(\tau)$$

例 5.2 设 $X(t)$ 是平稳过程，其相关函数 $R_X(\tau) = \alpha e^{-\beta|\tau|}$ ，其中 α 、 β 是正数， $X(t)$ 的谱密度 $G_X(\omega)$ 。

解

$$\begin{aligned} G_X(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} R_X(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha e^{-\beta|\tau|} e^{-j\omega\tau} d\tau \\ &= \frac{2\alpha\beta}{\beta^2 + \alpha^2} \end{aligned}$$

最后需要指出，在实际问题中常常碰到一些平稳过程，它的自相关函数或功率谱密度在通常意义可能付氏变换不存在。如果我们允许自相关函数或功率谱密度函数含有 δ 函数定义下自相关函数与功率谱密度存在付氏变换。

定义 δ 函数：如果函数 $\delta(t)$ 满足

$$\text{i) } \delta(t) = \begin{cases} \infty & t=0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases}, \quad \text{ii) } \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$$

则称函数 $\delta(t)$ 为 δ 函数。

性质 5.1 若 $f(t)$ 为无穷次可微函数，则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) f(t) dt = f(0)$$

或

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t_0) f(t) dt = f(t_0)$$

例 5.3 求 $\delta(t)$, $\delta(t-t_0)$ 的付氏变换。

解

$$F[\delta(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = e^{-j\omega t} \Big|_{t=0} = 1$$

$$F[\delta(t-t_0)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t_0) e^{-j\omega t} dt = e^{-j\omega t} \Big|_{t=t_0} = e^{-j\omega t_0}$$

例 5.4 求 $F(\omega) = 2\pi\delta(\omega)$ 和 $F(\omega) = 2\pi\delta(\omega-\omega_0)$ 的付氏逆变换。

$$\text{解 } \because F^{-1}[F(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} 2\pi\delta(\omega)e^{-j\omega t} d\omega$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\omega)e^{j\omega t} = 1$$

$$F^{-1}[2\pi\delta(\omega - \omega_0)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_0)e^{j\omega t} d\omega = e^{j\omega_0 t}$$

$$\text{又 } \because e^{j\omega_0 t} \xrightarrow[F^{-1}]{F} 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$$

$$\therefore F[e^{j\omega_0 t}] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega_0 t} e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j(\omega - \omega_0)t} dt$$

(注：在通常积分意义下该积分不存在)。

例 5.5 若随机过程 $X(t)$ 的自相关函数为

$$R_X(\tau) = \frac{1}{2} \cos \omega_0 \tau$$

解

$$\begin{aligned} G_X(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} R_X(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} \cos \omega_0 \tau e^{-j\omega\tau} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} (e^{j\omega_0 \tau} + e^{-j\omega_0 \tau}) e^{-j\omega\tau} d\tau \\ &= \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j(\omega - \omega_0)\tau} d\tau + \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j(\omega + \omega_0)\tau} d\tau \\ &= \frac{1}{4} 2\pi\delta(\omega - \omega_0) + \frac{1}{4} 2\pi\delta(\omega + \omega_0) \\ &= \frac{\pi}{2} [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] \end{aligned}$$

§ 5.3 功率谱密度性质

由随机过程的功率谱密度定义，即

$$G_X(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} E \left[|x_T(\omega, e)|^2 \right]$$

可得如下几个常用的性质。

性质 5.2 $G_X(\omega) \geq 0$

证 \because
$$G_X(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} E \left[|x_T(\omega, e)|^2 \right]$$

式中, $|x_T(\omega, e)|^2$ 必为非负。

$$\therefore E \left[|x_T(\omega, e)|^2 \right] \geq 0$$

$$\therefore G_X(\omega) \geq 0$$

性质 5.3 $G_X(\omega)$ 是实函数。

证 \because $x_T(\omega, e) \cdot x_T^*(\omega, e) = |x_T(\omega, e)|^2$ 是实函数

$$\therefore E \left[|x_T(\omega, e)|^2 \right]$$

$$\therefore G_X(\omega)$$

性质 5.4 $G_X(\omega)$ 是偶函数。

证 \because
$$G_X(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} E \left[|x_T(\omega, e)|^2 \right]$$

$$\therefore G_X(-\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} E \left[|x_T(-\omega, e)|^2 \right]$$

而
$$|x_T(-\omega, e)|^2 = x_T^*(-\omega, e) \cdot x_T(-\omega, e)$$

$$x_T^*(-\omega, e) = x(-(-\omega), e) = x(\omega, e)$$

$$x_T(-\omega, e) = x^*(\omega, e)$$

$$\therefore |x_T(-\omega, e)|^2 = |x_T(\omega, e)|^2$$

$$\therefore G_X(\omega) = G_X(-\omega)$$

$\therefore G_X(\omega)$ 是偶函数。

性质 5.5 设 $X(t)$ 为一个随机过程, $X = \frac{dX(t)}{dt}$ 为随机过程的导数, 则

$$G_X(\omega) = \omega^2 G_X(\omega)$$

证 略。

证明要用到付氏变换的微分性。即

$$\frac{d^n X(t)}{dt^n} = (j\omega)^n X(\omega)$$

例 5.6 已知平稳过程 $X = X(t)$ 的谱密度为

$$G_X(\omega) = \frac{\omega^2 + 4}{(\omega^4 + 10\omega^2 + 9)}$$

求 X 的相关函数和平均功率。

$$\text{解 } \therefore G_X(\omega) = \frac{\omega^2 + 4}{\omega^4 + 10\omega^2 + 9} = \frac{3}{8(\omega^2 + 1)} = \frac{5}{8(\omega^2 + 9)}$$

$$\therefore F^{-1}|G_X(\omega)| = F^{-1}\left[\frac{3}{8(\omega^2 + 1)}\right] + F^{-1}\left[\frac{5}{8(\omega^2 + 9)}\right]$$

$$= \frac{3}{16}e^{-|\tau|} + \frac{4}{48}e^{-3|\tau|} \quad (\text{查付氏变换表})$$

$$\therefore R_X(\tau) = \frac{2}{16}e^{-|\tau|} + \frac{5}{48}e^{-3|\tau|}$$

$$\therefore W = R_X(0) = \frac{3}{16} + \frac{5}{48} = \frac{7}{24}$$

§ 5.4 互谱密度

1. 互谱密度的定义

类似于一个随机过程功率谱密度的研究方法，我们可以引入两个随机过程的互谱密度概念。设有两个联合平稳随机过程 $X(t)$ 和 $Y(t)$ ，若设 $x(t, e), y(t, e)$ ，分别是两上过程 $X(t)$ 、 $Y(t)$ 的某一个样本函数，他们相应的截取函数设为 $x_T(t, e), y_T(t, e)$ ，而 $x_T(t, e), y_T(t, e)$ 的付氏变换分别为 $x_T(\omega, e), y_T(\omega, e)$ 。

定义 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 的互谱密度为：

$$G_{XY}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} E [x_T(-\omega, e) y_T(\omega, e)]$$

$$G_{YX}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} E [y_T(-\omega, e) x_T(\omega, e)]$$

当 $x_T(t, e), y_T(t, e)$ 为实数，一般他们的频谱 $x_T(\omega, e), y_T(-\omega, e)$ 是复数，所以有

$$x_T^*(\omega, e) = x_T(-\omega, e) \quad y_T^*(\omega, e) = y_T(-\omega, e)$$

\therefore 定义又可表示为：

$$G_{XY}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} E [x_T^*(\omega, e) y_T(\omega, e)]$$

$$G_{YX}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} E [x_T^*(\omega, e) y_T(\omega, e)]$$

2. 互谱密度和互相关函数之间的关系

类似研究平稳过程 $X(t)$ 的自相关函数与谱密度之间的关系一样，我们可给出联合平稳过程互相关函数与互谱密度函数之间的关系表达式。

定义：若联合平稳过程 $X(t)$ 、 $Y(t)$ 的两个互相关函数 $R_{XY}(\tau)$ 满足 $\int_{-\infty}^{+\infty} |R_{XY}(\tau)| d\tau < +\infty$ ，则互相关

函数与互谱密度函数构成付氏变换对，即

$$G_{XY}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{XY}(\omega) e^{-j\omega\tau} d\omega$$

$$R_{XY}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G_{XY}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega$$

$$G_{XY}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{XY}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

$$R_{XY}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G_{XY}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega$$

例 5.7 已知平稳过程 $X(t)$ 、 $Y(t)$ 的三谱密度为

$$G_{XY}(\omega) = \begin{cases} a + jb\omega / \Omega & -\Omega < \omega < \Omega \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

式中， $\Omega > 0$, a, b 为实数，求互相关函数 $R_{XY}(\tau)$ 。

$$\begin{aligned} \text{解} \quad R_{XY}(\tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega}^{\Omega} (a + jb\omega) e^{-j\omega\tau} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega}^{\Omega} a e^{-j\omega\tau} d\omega + j \frac{b}{2\pi\Omega} \int_{-\Omega}^{\Omega} \omega e^{-j\omega\tau} d\omega \\ &= \frac{1}{\pi\Omega\tau^2} [(a\Omega\tau - b) \sin \Omega\tau + b\Omega \cos \Omega\tau] \end{aligned}$$

3. 互谱密度的性质

下面我们简要给出互谱密度的性质如下

$$\textcircled{1} G_{XY}(\omega) = G_{YX}(-\omega) = G_{YX}^*(\omega)$$

②若 $X(t)$ 与 $Y(t)$ 为实过程，则 $G_{XY}(\omega)$ 的实部 $R_e[G_{XY}(\omega)]$ 是偶函数，虚部 $I_m[G_{XY}(\omega)]$ 是奇函数。

③若平稳过程 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 相互正交，则

$$G_{YX}(\omega) = 0, \quad G_{XY}(\omega) = 0$$

④若 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 是两个不相关的平稳过程，分别有非零均值 M_X, M_Y ，则

$$G_{XY}(\omega) = G_{YX}(\omega) = 2\pi M_X M_Y \delta(\omega)$$

$$\textcircled{5} |G_{XY}(\omega)| \leq G_X(\omega) \cdot G_Y(\omega)$$

习题五

1. 已知平稳过程 $X(t)$ 的谱密度为 $G_X(\omega) = \frac{\omega^2}{\omega^4 + 3\omega^2 + 2}$, 求 $X(t)$ 的均方值 $E[X^2(t)]$ 。

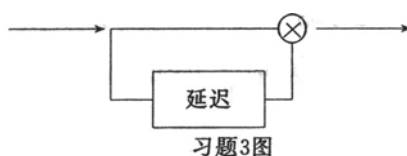
2. 已知平稳过程 $X(t)$ 的自相关函数为

$$R_X(\tau) = 4e^{-|\tau|} \cos \pi\tau + \cos \pi\tau$$

求 $G_X(\omega)$ 。

3. 如下图的系统中, 若 $X(t)$ 为平稳过程, 证明 $Y(t)$ 的功率谱是

$$G_Y(\omega) = 2G_X(\omega) (1 + \cos \omega t)$$



习题3图

习题 3 图

4. 已知平稳过程 $X(t)$ 的谱密度为

$$G_X(\omega) = \begin{cases} 8\delta(\omega) + 20(1 - \frac{\omega}{10}) & |\omega| \leq 10 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

求 $R_{X(\tau)}$ 。

5. 设 $X(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$ 和 $Y(t) = B \sin(\omega t + \varphi - \alpha)$ 为两个平稳过程, 其中, A 、 B 、 α 与 ω 为常数,

φ 是在 $(0, 2\pi)$ 上服从均匀分布的随机变量。求 $R_{XY}(\tau)$ 和 $R_{YX}(\tau)$ 。

6. 已知平稳过程 $X(t)$ 和 $R_{XY}(\tau)$ 。

$$G_{XY}(\omega) = \begin{cases} a + jb\omega / \omega_0 & |\omega| < \omega_0 \\ 0 & |\omega| \geq \omega_0 \end{cases}$$

其中 a, b, ω_0 实常数，求互相关函数 $R_{XY}(\tau)$ 。