

第六章 随机信号通过线性系统

在大系统分析中，如在电子通信系统中，当我们给定系统在一个输入信号（可以是确定性信号或随机信号），该输入信号通过系统作用总会产生一输出信号，我们经常需要分析研究输入与输出信号之间的关系，特别当输入信号是一个随机平稳信号输出是什么信号呢，于是我们自然会提出下列问题：

1. 若输入是平稳信号，其输出信号是否平稳。
2. 若已知输入信号的统计数字特征，如何求出输出信号的统计数字特征。
3. 输入信号与输出信号的统计特征之间的关系如何？

为了回答上述三个问题，我们就特殊的线性系统进行分析。

首先介绍一下线性系统的基本理论知识。

§6.1 线性系统的基本理论

1. 线性系统介绍

一般地，系统输出、输入之间的关系可表示为：

$$Y(t) = L[X(t)]$$

式中， $X(t)$ 为输入信号（又称激励信号）， $Y(t)$ 为输出信号（双称为 $X(t)$ 的响应信号）； L 表示是对输入信号进行某种运算，称为算子，它可以代表各种数学运算方法，如加法、乘法、微分、积分等，用图表示为：

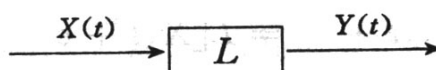


图 6.1

定义线性系统：如果系统的输入 $x_k(t)$ ($k=1,2,\dots,n$) 之和响应等于各输入响应之和，则称这个系统是线性系统。简言这，若系统满足叠加原理，则系统是线性系统，而此时的 L 为线性算子。线性系统的数学表达式为：

$$Y(t) = L \left[\sum_{k=1}^n \alpha_k x_k(t) \right] = \sum_{k=1}^n \alpha_k L[x_k(t)]$$

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k y_k$$

2. 线性时不变系统

① 线性系统的 $\delta(t)$ 函数（冲激函数）的冲击响应

由 $\delta(t)$ 函数的性质，有



$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-\tau) x(\tau) d\tau = x(t)$$

$$\therefore Y(t) = L[X(t)] = L\left[\int_{-\infty}^{+\infty} X(\tau) \delta(t-\tau) d\tau\right]$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} X(\tau) L[\delta(t-\tau)] d\tau$$

而 $L[\delta(t-\tau)]$ 表示有个 $\delta(t-\tau)$ 的输入函数通过线性系统，其输出可记为

$$h(t, \tau) = L[\delta(t-\tau)]$$

显然， $h(t, \tau)$ 可称为 $\delta(t-\tau)$ 函数（冲激函数）的冲击响应。

$$\therefore y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t, \tau) d\tau \quad (6.2)$$

② 线性时不变系统

定义线性时不变系统：若对任意常数 ε ，有

$$y(t + \varepsilon) = L[X(t + \varepsilon)]$$

则线性系统是一个时不变系统，简称**线性不变系统**。通俗地讲就是输入信号 $X(t)$ 发生一个时移，使输出 $Y(t)$ 也只引起一个相同的时移。

由此可知

$$L[\delta(t - \tau)] = h(t - \tau) = h(t, \tau)$$

∴ 当一个线性系统成为一个时不变系统时，就有

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau \quad (6.3)$$

这就是大家所熟知的卷积公式。即

$$y(t) = X(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

通过变量代换上式又可写为：

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) x(t - \tau) d\tau \quad (6.4)$$

上式表明，线性时不变系统的输出完全由系统的输入与系统的冲击响应卷积确定。这是在时间域给出了系统输出表示形式。当输出信号 $y(x)$ 比较复杂时，我们同样考虑通过付氏变换将其变换到频率去研究，进而使问题得以简化。

3. 线性时不变系统输出信号的付氏变换

对于一个线性不变系统， $x(t), h(t), y(t)$ 设其相应的付氏变换为 $X(\omega), H(\omega), Y(\omega)$ ，则

$$Y(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) e^{-j\omega t} dt \quad (6.5)$$

将
$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau \right] e^{-j\omega t} dt$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\tau) e^{-j\omega(t-\tau)} \cdot e^{-j\omega t} dt \right] d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\tau) e^{-j\omega(t-\tau)} dt \right] e^{-j\omega\tau} d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) H(\omega) e^{-j\omega\tau} d\tau \\
&= H(\omega) \cdot X(\omega)
\end{aligned}$$

∴

$$Y(\omega) = X(\omega) \cdot H(\omega)$$

当

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

$$F[y(t)] = F[x(t) * h(t)]$$

即

$$Y(\omega) = X(\omega) \cdot H(\omega)$$

变换示意图如图 6.2 所示。

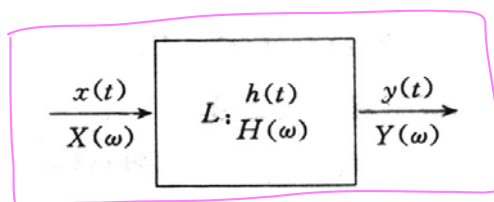


图 6.2

§ 6.2 随机信号通过线性系统

1. 讨论系统的输出

一般随机信号作为输入通过线性系统，要研究它的输入与输出之间的数字特征及相互关系比较复杂，为了方便说明问题起见，我们只就有界的随机信号通过特殊的线性系统来讨论，即假设该系统为稳定的时不变线性系统，设 $X(t) = \{x_1(t), \dots, x_n(t), \dots\}$ 为一个有界随机过程，所谓过程有界即它们每一个样本函数有界。

显然当过程的每一个样本函数通过时不变系统时，可表示为

$$y_1(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) x_1(t-\tau) d\tau$$

$$y_n(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) x_n(t-\tau) d\tau$$

此时系统的输出可表示为 $Y(t) = \{y_1(t), \dots, y_n(t), \dots\}$

即系统的输入与输出可表示为

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) X(t-\tau) d\tau$$

$$Y(t) = h(t) * X(t)$$

2. 系统输出的均值与自相关函数

在实际工程问题中，我们总是希望当知道输入信号的某些统计特征时能够得到系统的输出统计特征。



①系统的输出均值确定。

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) X(t-\tau) d\tau$$

这里假设输入信号为有界平稳过程

$$\begin{aligned} E[Y(t)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) D[t-\tau] d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) M_X d\tau = M_X \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) d\tau \end{aligned}$$

而 $\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) d\tau$ 是一个与时间无关的数。

\therefore

$$E[Y(t)] = M_Y$$

②系统输出的自相关函数

若 $X(t)$ 为有界平稳过程，系统输出自相关函数由定义知，可表示为

$$\begin{aligned} R_Y(t, t+\tau) &= E[Y(t+\tau)] \\ &= E\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau_1) h(\tau_2) X(t-\tau_1) X(t+\tau-\tau_2) d\tau_1 d\tau_2\right] \\ &= E\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau_1) h(\tau_2) X(t-\tau_1) X(t+\tau-\tau_1) d\tau_1 d\tau_2\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau_1) h(\tau_2) X(t - \tau_1) X(t + \tau - \tau_1) d\tau_1 d\tau_2 \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau_1) h(\tau_2) R_X(t + \tau - t_2 - (\tau_1 - \tau_1)) d\tau_1 d\tau_2 \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau_1) h(\tau_2) R_X(\tau + \tau_1 - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2
\end{aligned}$$

由该式知，当输入为平稳，接合 $E[Y(t)] = M_Y$ ，所以输出 $Y(t)$ 也为平稳。

3. 系统的输入与输出之间的互相关函数

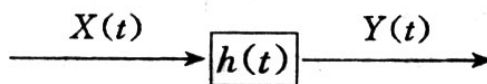


图 6.3

由于系统是线性系统，所以输入与输出之间的相关的。由随机过程的互相关函数定义，知

$$\begin{aligned}
R_{XY}(t, t + \tau) &= E[X(t) Y(t + \tau)] \\
&= E\left[X(t) \int_{-\infty}^{+\infty} h(\lambda) X(t + \tau - \lambda) d\lambda\right] \\
&= E\left[\int_{-\infty}^{+\infty} X(t) h(\lambda) X(t + \tau - \lambda) d\lambda\right] \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} E[X(t) X(t + \tau - \lambda)] h(\lambda) d\lambda
\end{aligned}$$

若 $X(t)$ 为平稳过程，则有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R_X(\tau - \lambda) h(\lambda) d\lambda = R_{XY}(\tau) \quad (6.8)$$

此时有：

$$R_{XY}(\tau) = R_X(\tau) * h(\tau)$$

同理可得：

$$R_{XY}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_X(\tau - \lambda) h(-\lambda) d\lambda$$

即

$$R_{XY}(\tau) = R_X(\tau) * h(-\tau)$$

4. 系统输出的工率谱密度

对于平稳过程，当我们知道了自相关函数 $R_X(gt)$ ，取付氏变换就可得 $G_X(\omega)$ ，或者已知 $R_{XY}(\tau)$ 可得 $G_{XY}(\omega)$ 。下面我们给出另一种方法来确定系统输出谱密度与输入谱密度的关系。

性质 6.1 设输入 $X(t)$ 为平稳过程，输出 $Y(t)$ 平稳，且 $X(t)$ ， $Y(t)$ 联合平稳，输入 $X(t)$ 的谱密度为 $G_X(\omega)$ ，输出 $Y(t)$ 的谱密度为 $G_Y(\omega)$ ， $H(\omega)$ 称系统的传输函数（传递函数），则

$$G_Y(\omega) = G_X(\omega) |H(\omega)|^2$$

$|H(\omega)|^2$ 称为系统的功率传输函数（又称系统的功率传递函数）。

证

$$\begin{aligned} G_Y(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} R_Y(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} R_X(\tau + \tau_1 - \tau_2) h(\tau_1) h(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \right] e^{-j\omega\tau} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau_1) \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau_2) \int_{-\infty}^{+\infty} R_X(\tau + \tau_1 - \tau_2) e^{-j\omega\tau} d\tau_1 d\tau_2 d\tau \end{aligned}$$

令 $\lambda = \tau + \tau_1 - \tau_2$ ，则

$$\begin{aligned} G_Y(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau_1) d\tau_1 \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau_2) d\tau_2 \int_{-\infty}^{+\infty} R_X(\lambda) e^{-j\omega(\lambda + \tau_2 - \tau_1)} d\lambda \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau_1) e^{j\omega\tau_1} d\tau_1 \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau_2) e^{-j\omega\tau_2} d\tau_2 \int_{-\infty}^{+\infty} R_X(\lambda) e^{-j\omega\lambda} d\lambda \\ &= H(-\omega)H(\omega)G_X(\omega) = G_X(\omega)H^*(\omega)H(\omega) \end{aligned}$$

偶函数。

$$= G_X(\omega) |H(\omega)|^2$$

5. 系统的输入输出的互谱密度

类似讨论有

$$\begin{aligned} G_{XY}(\omega) &= G_X(\omega)H(\omega) \\ G_{YX}(\omega) &= G_X(\omega)H(-\omega) \end{aligned}$$

若输入随机信号为白噪声过程，其 $G_X(\omega) = \frac{N_0}{2}$ ，则有

$$G_{XY}(\omega) = \frac{N_0}{2} H(\omega) \quad (6.9)$$

$$G_{YX}(\omega) = \frac{N_0}{2} H(-\omega) \quad (6.10)$$

因此，当系统性能未知时，若能设法得到互谱密度就可由（6.9）式确定线性系统的传输函数。

6. 多个随机过程之和通过线性系统

在工程问题中，我们经常会遇到多个随机过程同时加到系统上的问题，如电子系统的随机信号输入，通常就是由真实信号与噪声这两上随机过程的合成。因此下面，我们主要就两个过程的情况进行讨论，对多个输入的情况，可直接在两个基础上推广得到。

设系统的输入 $X(t)$ ，是两个联合平稳且单独，平稳的随机过程 $X_1(t)$ 与 $X_2(t)$ 的和，即

$$X(t) = X_1(t) + X_2(t) \quad (6.11)$$

由于系统是线性的，每个输入都产生相就的输出，于是有

$$Y(t) = Y_1(t) + Y_2(t) \quad (6.12)$$

显然系统的输出 $Y(t)$ 的均值可以由（6.6）式得到

即
$$E[y(t)] = M = (M_{X_1} + M_{X_2}) \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) d\tau \quad (6.13)$$

$Y(t)$ 的自相关函数为

$$\begin{aligned} R_Y(\tau) &= E\{[Y_1(t) + Y_2(t)][Y_1(t + \tau) + Y_2(t + \tau)]\} \\ &= R_{Y_1}(\tau) + R_{Y_2}(\tau) + R_{Y_1Y_2}(\tau) + R_{Y_2Y_1}(\tau) \end{aligned} \quad (6.14)$$

(6.12) 式中前两项分别是 $Y_1(t)$ 和 $Y_2(t)$ 的自相关函数, 可由 (6.7) 式得到, 而后两项是输出分量 $Y_1(t)$ 和 $Y_2(t)$ 之间的互相关函数, 可通过直接计算得到, 即

$$R_{Y_1Y_2}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} R_{X_1X_2}(\tau + \tau_1 - \tau_2) h(\tau_1) h(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \quad (6.15)$$

这样, (6.12) 式中各项就可分别通过 (6.7) 式与 (6.13) 式求得。此外由 (6.7) 式有

$$R_Y(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} R_X(\tau + \tau_1 - \tau_2) \cdot h(\tau_1) h(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2$$

所以

$$R_X(\tau) = R_{X_1}(\tau) + R_{X_2}(\tau) + R_{X_1X_2}(\tau) + R_{X_2X_1}(\tau)$$

由 (6.14) 式和 (6.12) 式的比较发现, $R_X(\tau)$ 和 $R_Y(\tau)$ 具有相同的形式。

用同样的方法, 我们可以得到系统输入与输出之间的互相关函数为

$$R_{XY}(\tau) = R_{X_1Y_1}(\tau) + R_{X_1Y_2}(\tau) + R_{X_2Y_1}(\tau) + R_{X_2Y_2}(\tau) \quad (6.17)$$

其中第一项都可以通过适当地应用 (6.8) 式得到。如果将 (6.14) 式用于 (6.8) 式, 也可得 (6.15) 式。

通过对 (6.15) 式求付氏变换, 并利用 $G_Y(\omega) = G_X(\omega) |H(\omega)|^2$, 可以得到系统输出的功率谱密度为

$$G_Y(\omega) = |H(\omega)|^2 [G_{X_1}(\omega) + G_{X_2}(\omega) + G_{X_1X_2}(\omega) + G_{X_2X_1}(\omega)] \quad (6.18)$$

当两个输入过程互不相关时, (6.14) 式成为

$$R_X(\tau) = R_{X_1}(\tau) + R_{X_2}(\tau) + 2M_{X_1}M_{X_2} \quad (6.19)$$

对 (6.19) 式取付氏变换可得

$$G_X(\omega) = G_{X_1}(\omega) + G_{X_2}(\omega) + 4\pi M_{X_1}M_{X_2}\delta(\omega) \quad (6.20)$$

若再假设输入是零均值的, 则又有

$$R_X(\tau) = R_{X_1}(\tau) + R_{X_2}(\tau) \quad (6.21)$$

$$G_X(\omega) = G_{X_1}(\omega) + G_{X_2}(\omega) \quad (6.22)$$

上述结果表明: 两个统计独立 (或不相关), 零均值且平稳随机过程之和的功率谱密度或自相关函数, 等于各自功率谱密度或自相关函数之和。

7. 白噪声通过线性系统

① 噪声

在信号与信号处理中, 要想将有用信号不失真地变换和处理几乎是不可能, 如在信息的传输过程中, 不论是有线传输还是无线传输, 信号的传输过程不可避免地存在某些误差。误差的来源一方面是信息传输和处理过程中信道或设备不理想以及外部其它信号的进入造成的误差。因此人们常称使其实信号失真的误差源为噪声。典型的噪声有电子线路的热噪声、信道噪声。而信道噪声又包括大气噪声、无线电干扰、工业干扰及蓄意干扰等。

噪声是一种在理论上无法预测的随机信号, 只有掌握噪声的变化规律, 我们才能降低它的影响, 从而更好地对真实信号进行处理。由于噪声是一个随机过程, 因此我们可用研究随机过程的一般方法来研究噪声的变化规律, 这里我们通常对噪声的数字特征感兴趣, 为此我们需要研究噪声的相关函数, 功率谱密度等。

根据噪声在时间域的变化规律, 噪声的分类也很多, 如噪声的分布服从高斯分布就称为高斯噪声, 具

有均匀分布的噪声就称为均匀噪声。

根据噪声在频率域内的特征，即从功率谱角度来看，如果一个噪声的功率谱密度是常数，无论它在时间域内服从什么分布，都称为白噪声。因此我们一般把对噪声特性的研究放到频率内来进行。

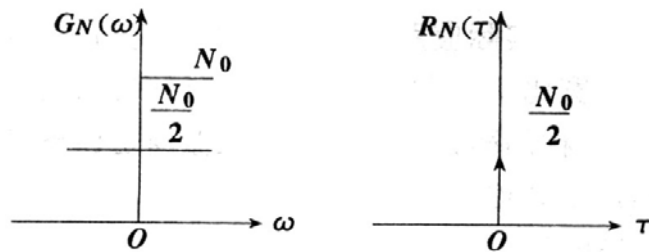
a、白噪声

定义白噪声：一个均值为零，功率谱密度在整个频率轴上有非零常数，即

$$G_N(\omega) = \frac{N_0}{2} \quad -\infty < \omega < +\infty \quad (6.23)$$

的平均过程 $N(t)$ 称为白噪声过程，简称白噪声。式中 N_0 是正实常数。显然，我们用付氏逆变换可求出 (6.21) 式白噪声的自相关函数为

$$R_N(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{N_0}{2} e^{j\omega\tau} d\omega = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} N_0 e^{j\omega\tau} d\omega = \frac{N_0}{2} \delta(\tau) \quad (6.24)$$



(a)白噪声的功率谱密度 (b) 白噪声的自相关函数

图 6.4

白噪声的“白”字是从光学中的“白”光谱借用而来的，白光的频谱包含了所有可见光的频率。图 6.4 给出了白噪声的功率谱密度和它们的自相关函数图。由随机过程相关函数的定义容易给出白噪声过程的相关系数 $\rho_N(\tau)$ 为

$$\begin{aligned} \rho_N(\tau) &= \frac{R_N(\tau)}{R_N(0)} = \frac{R_N(\tau) - R_N(\infty)}{R_N(0) - R_N(\infty)} \\ &= \frac{R_N(\tau)}{R_N(0)} = \begin{cases} 1 & \tau = 0 \\ 0 & \tau \neq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (6.25)$$

(6.25) 式说明, 在时间域内白噪声在任何两个相邻时刻的状态都不相关的, 即白噪声随时间的起伏变化极快。又由 (6.23) 式可知, 在频率域内, 白噪声过程的功率谱极宽。

综上所述, 由 (6.23) 式给出的白噪声定义只能是一种理想的数学模型, 实际工程中不可能存在, 这是因为按 (6.23) 式的定义来计算白噪声的平均功率 ω , 有

$$\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G_N(\omega) d\omega = \frac{N_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega = \infty$$

由此计算结果说明白噪声的平均功率是无限大, 这 and 实际随机过程总是具有有限平均功率不相符, 所以从时间域上看, 实际随机过程在非常邻近的两上时刻的状态总会存在一定相关性, 也就是说它的相关函数不可能是一个严格的 δ 函数。

尽管如此, 在实际应用中, 当我们所研究的平稳过程的功率谱密度的带宽比所考虑的有用频带宽得多且具有均匀的功率谱密度时, 这样的随机过程可认为近似满足白噪声定义, 把它当作白噪声来处理。

b、低通白噪声

当白噪声的功率谱密度集中在频率域的低频端且分布均匀, 称为**低通白噪声**。

由低通白噪声定义可知, 当低通白噪声的功率谱密度为

$$G_N(\omega) = \begin{cases} \frac{\pi\omega}{\Delta\omega\tau} & |\omega| \leq \Delta\omega \\ 0 & \text{其它} \end{cases} \quad (6.25)$$

时, 我们可由付氏变换求出它的自相关函数为

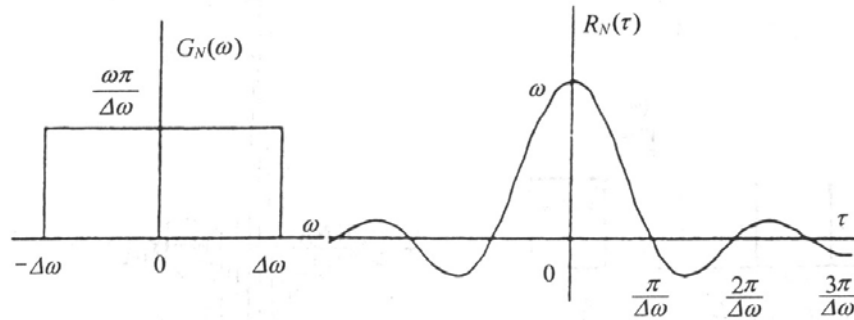
$$R_N(\tau) = \omega \frac{\sin(\Delta\omega\tau)}{\Delta\omega\tau} \quad (6.27)$$

显然由 (6.27) 式要方便地求得低通白噪声的平均功率 $R_N(0) = \omega$ 。由此可见, 当低通白噪声的功率谱宽度为有限宽度时, 其平均功率也是有限的, 它的自相关函数则由于它的功率谱宽度缩小而展宽。

c、带通白噪声

如果 $N(t)$ 的功率谱密度在 $\pm \omega_0$ 附近是常数, 即

$$C_N(\omega) = \begin{cases} \frac{\pi\omega}{\Delta\omega} & \omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2} < \omega < \omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2} \\ 0 & \text{其它} \end{cases} \quad (6.28)$$



(a)功率谱密度

(b)自相关函数

图 6.5 低通白噪声的功率谱密度和自相关函数

则称 $N(t)$ 是带通限带白噪声，或称带通白噪声、类似地、可以求得它的自相关函数为

$$R_N(\tau) = \omega \frac{\sin(\Delta\omega\tau/2)}{\Delta\omega\tau/2} \cos(\omega_0\tau) \quad (6.29)$$

式中， ω_0 和 $\Delta\omega$ 是常数， ω 是噪声功率，如图 6.6 所示。

一般地，我们可以定义任意非白噪声为有色噪声（或称色噪声）。为了说明问题起见，仅举一个色品例子。

例 6.1 设 $N(t)$ 为平稳过程，并有如下自相关函数

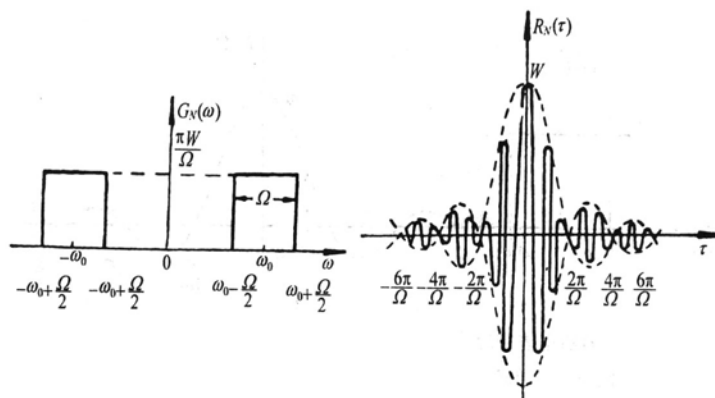
$$R_N(\tau) = \omega e^{-2|\tau|}$$

式中 ω 为常数，求 $G_N(\omega)$ 。

解

$$\begin{aligned} G_N(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \omega R_N(\tau) e^{j\omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} \omega e^{-2|\tau|} e^{-j\omega\tau} d\tau \\ &= \omega \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(2+j\omega)\tau} d\tau + \int_{-\infty}^0 e^{(2-j\omega)\tau} d\tau \right] \\ &= \omega \left[\int_0^{+\infty} e^{-(2+j\omega)\tau} d\tau + \int_{-\infty}^0 e^{(2-j\omega)\tau} d\tau \right] \\ &= \frac{4\omega}{4 + \omega^2} \end{aligned}$$

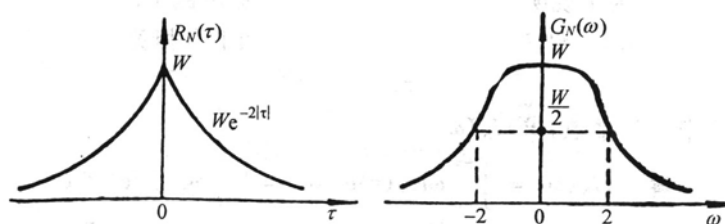
所求的有色噪声的自相关函数功率谱密度图如图 6.7 所示。



(a)功率谱密度

(b)自相关函数

图 6.6 带通白噪声的功率谱密度和自相关函数



(a)自相关函数

(b)功率谱密度

图 6.7 有色噪声自相关函数与功率谱密度

②白噪声通过线性系统

白噪声具有均匀功率谱的平稳随机过程，当它通过线性系统后，其输出端的噪声的噪声功率谱就不再是均匀的。若白噪声的功率谱密度 $G_X(\omega) = \frac{N_0}{2}$ (N_0 为正实常数)，系统的传函是 $H(\omega)$ ，则有

$$G_Y(\omega) = |H(\omega)|^2 \frac{N_0}{2} \quad (6.30)$$

对应的输出自相关函数为

$$R_Y(\tau) = \frac{N_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |h(\omega)|^2 e^{j\omega\tau} d\omega \quad (6.31)$$

显然，此时线性系统输出的平均功率为

$$R_Y(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{N_0}{2} |H(\omega)|^2 d\omega \quad (6.32)$$

若系统的冲激响应（传函）为实函数，则 $|1 + \omega|^2$ 将是 ω 的偶函数，于是有

$$R_Y(0) = \frac{N_0}{2\pi} \int_0^{+\infty} |H(\omega)|^2 d\omega \quad (6.33)$$

一般地，当 $H(\omega)$ 较复杂时，用（6.30）、（6.31）式计算 $R_Y(\tau)$ 和 $R_Y(0)$ 很困难。因此，为了简化计算而又不引起大的偏差，常用一个幅频响应为矩形的理想系统等效实际系统 $H(\omega)$ 。该理想系统的带宽称为等效噪声带宽，记为 $\Delta\omega_e$ 。等效的原则是：在同一个白噪声激励下，理想系统与实际的输出平均功率相等；在频带中心，两个系统具有同样的功率传输函数值。

下面先讨论实际系统是低通线性系统的情况，此时，理想系统与实际系统的差别是：理想系统具有按下式定义的矩形功率传输函数

$$|H_1(\omega)|^2 = \begin{cases} |H(0)|^2 & |\omega| < \Delta\omega_e \\ 0 & |\omega| > \Delta\omega_e \end{cases} \quad (6.34)$$

对于（6.34）式中的 $\Delta\omega_e$ ，可按等效原则求得，即理想系统的输出平均功率为

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |H_1(\omega)|^2 d\omega = \frac{N_0}{2\pi} \int_0^{\Delta\omega_e} |H(0)|^2 d\omega = \frac{N_0 \Delta\omega_e}{2\pi} |H(0)|^2$$

实际系统的平均功率为

$$R_Y(0) = \frac{N_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |H(\omega)|^2 d\omega$$

由等效原则有

$$\begin{aligned} \frac{N_0}{2\pi} \int_0^{+\infty} |H(\omega)|^2 d\omega &= \frac{N_0}{2\pi} \Delta\omega_e |H(0)|^2 \\ \therefore \Delta\omega_e &= \frac{\int_0^{+\infty} |H(\omega)|^2 d\omega}{|H(0)|^2} \end{aligned}$$

∴如果实际系统是一个中心频率为 ω_0 的带通系统，只要重复前面的步骤，就可导出这种系统的噪声带宽。

即

$$\Delta\omega_e = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} |H(\omega)|^2 d\omega}{|H(\omega_0)|^2}$$

a、白噪声通过理想低通线性系统

设理想低通性系统的幅频特性（传函）为

$$|H(\omega)| = \begin{cases} A & |\omega| < \Delta\omega \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

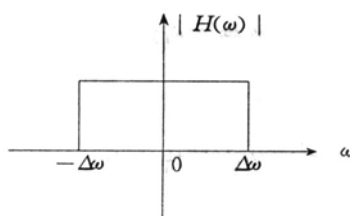


图 6.8

如图 6.8 所示，若输入白噪声的功率谱为 $N_0/2$ ，则输出 $Y(t)$ 的功率谱为

$$G_Y(\omega) = G_X(\omega)|H(\omega)|^2 = \begin{cases} \frac{N_0 A^2}{2} & |\omega| < \Delta\omega \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

输出相关函数为

$$\begin{aligned} R_Y(\tau) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} G_Y(\omega) \cos \omega \tau d\omega \\ &= \frac{N_0 A^2 \Delta\omega}{2\pi} \int_0^{\Delta\omega} \cos \omega \tau d\omega = \frac{N_0 A^2 \Delta\omega}{2\pi} \frac{\sin \Delta\omega \tau}{\Delta\omega \tau} \end{aligned}$$

$$\therefore R_Y(0) = \frac{N_0 A^2 \Delta\omega}{2\pi} \quad (6.37)$$

相关系数为

$$\rho_Y(\tau) = \frac{R_Y(\tau)}{R_Y(0)} = \frac{\sin \Delta\omega\tau}{\Delta\omega\tau} \quad (6.38)$$

相关时间为

$$\tau_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_Y(\tau) d\tau = \frac{\pi}{2\Delta\omega} = \frac{1}{4\Delta f} \quad (6.39)$$

在 (6.38) 式中

$$\Delta\omega = 2\pi\Delta f$$

上式表明系统的输出 $Y(t)$ 的相关时间与系统的带宽成正比，即若系统带宽愈宽，相关时间 τ_0 愈小，输出 $Y(t)$ 随 t 变化（起伏）愈剧烈；反之，系统带愈窄，则 τ_0 愈大，输出随 t 变化愈缓慢。

b、白噪声通过理想带通线性系统

$$|H(\omega)| = \begin{cases} A & |\omega - \omega_0| < \Delta\omega/2 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

如图 6.9 所示。

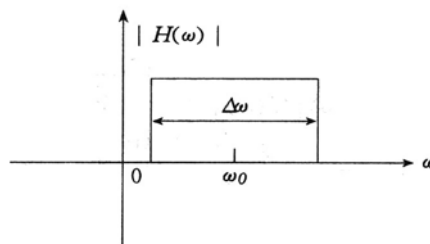


图 6.9

若输入白噪声的功率谱密度 $\frac{N_0}{2}$ ，则输出 $Y(t)$ 的功率谱密度为

$$G_Y(\omega) = \begin{cases} \frac{A^2 N_0}{2} & |\omega - \omega_0| < \Delta\omega/2 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

输出 $Y(t)$ 的相关函数为

$$R_Y(\tau) = \frac{1}{4\tau} \int_{\omega_0 - \Delta\omega/2}^{\omega_0 + \Delta\omega/2} N_0 A^2 \cos \omega \tau d\omega \quad (6.40)$$

其中

$$a(\tau) = \frac{N_0 A^2 \Delta\omega}{4\pi} \cdot \frac{\sin \Delta\omega\tau/2}{\Delta\omega\tau/2} \quad (6.41)$$

$Y(t)$ 的相关系数为

$$\rho_Y(\tau) = \frac{R_Y(\tau)}{R_Y(0)} = \frac{\sin \Delta\omega\tau/2}{\Delta\omega\tau/2} \cos \omega_0\tau \quad (6.42)$$

如果 $\Delta\omega \ll \omega_0$ ，则称输出 $Y(t)$ 为窄带噪声过程。此时， $a(\tau)$ 与 $\cos \omega_0\tau$ 相比， $a(\tau)$ 是 τ 的慢变化函数，

既是 $R_Y(\tau)$ 的慢变化部分又是 $R_Y(\tau)$ 的包络。常用 $\rho_Y(\tau)$ 的慢变化部分定义相关时间，即

$$\tau_0 = \int_0^{+\infty} \frac{\sin \Delta\omega\tau/2}{\Delta\omega\tau/2} d\tau = \frac{1}{2\Delta f} = \frac{\pi}{\Delta\omega} \quad (6.43)$$

(6.43) 式表示， τ_0 与 Δf 成正比。但这里 τ_0 表示输出窄带噪声的包络起伏变化的快慢速度。故由上式可

见，系统带宽愈宽， τ_0 愈小，输出包络变化愈剧烈；反之，带宽愈窄， τ_0 愈大，包络变化愈缓慢。

习题六

1. 若系统输入为白噪声，其自相关函数为

$$R_X(\tau) = \frac{N_0}{2} \delta(\tau)$$

式中 N_0 是正实常数，求系统输出的均方值。

2. 理想白噪声过程 $X(t)$ ，其自相关函数 $R_X(\tau) = \frac{N_0}{2} \delta(\tau)$ ，通过一个冲激中央委员应为 $h(t)$ 的线性系统，

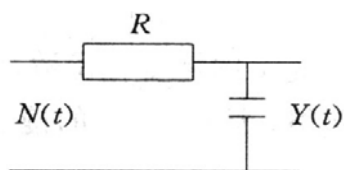
求系统响应与互相关函数的关系。

3. 设白噪声 $X(t)$ ，有 $G_X(\omega) = \frac{N_0}{2}$ ，通过传输函数为 $H(\omega) = \frac{j\omega}{a + j\omega}$ 的微分电路， α 为实常数，求电路

路输出自相关函数。

4. 白噪声 $N(t)$ 通过传输函数为 $H(\omega) = \frac{\alpha}{\alpha + j\omega}$ 的 RC 积分电路，如下图所示， α 为实常数，求电路输

出的自相关函数。



习题 4 图

5. 某线性系统具有功率传输函数为 $|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\Delta\omega}\right)^2}$ ，式中 $\Delta\omega$ 是半功率带宽，求系统的噪声带宽。