

Physique SUP PSI

Pierre-Louis Massin

2024 – 2025

Table des matières

Introduction	4
Dimensions et unités des grandeurs physiques	5
Outils Mathématiques	9
1 Formules Trigonométriques	10
1.1 Formules de Somme et de Produit	10
1.2 Dérivées de \cos et \sin	10
1.3 Formules de Développement de \cos^2 et \sin^2	10
2 Approximations et Développements Limites	11
2.1 Comparaison de Grandeurs Physiques	11
2.2 Développements Limites	11
2.3 Application au Calcul d'Intégrales	12
2.4 Exemple Concret	12
Révision de Sup	16
Physique	16
1 Optique Géométrique	16
1.1 Modèle de l'optique géométrique	16
1.2 Formation des images	17
1.3 Instruments d'optique	20
2 Électricité	22
2.1 Modélisation des Circuits Électriques	22
2.2 ALI	24
2.3 Régimes Transitoires du 1er Ordre	28
2.4 Oscillateurs harmoniques	29
2.5 Oscillateurs amortis	30
2.6 Régime sinusoïdal forcé	33
2.7 Oscillateurs forcés, résonance	34
2.8 Filtre linéaire	36
2.9 Filtrage des signaux périodiques	39
3 Ondes	41
3.1 Propagation d'un signal	41
3.2 Interférence	42
3.3 Ondes stationnaires	44
4 Mécanique	45
4.1 Cinématique	45
4.2 Dynamique	47
4.3 Approche énergétique de la mécanique du point	49
4.4 Mouvement de particules chargées	51

4.5	Théorème du moment cinétique	52
4.6	Forces centrales conservatives : lois de conservation	53
4.7	Forces centrales conservatives : planètes et satellites	54
4.8	Solide en rotation autour d'un axe fixe	57
5	Thermodynamique	59
5.1	Système thermodynamique à l'équilibre	59
5.2	Transformation d'un système thermodynamique	62
5.3	Premier principe de la thermodynamique	63
5.4	Second principe de la thermodynamique	64
5.5	Machines thermiques	65
5.6	Statique des fluides	67
6	Induction	69
6.1	Champ magnétique	69
6.2	Actions d'un champ magnétique extérieur	70
6.3	Lois de l'induction	71
6.4	Circuit fixe dans un champ magnétique dépendant du temps	72
6.5	Circuit mobile dans un champ magnétique stationnaire	74
7	Mécanique quantique	76
7.1	Introduction à la physique quantique	76
Chimie		79
Électronique		81
1	Stabilité des systèmes linéaires	81
2	Amplificateur linéaire intégré	81
3	Oscillateurs quasi sinusoïdaux	81
4	Oscillateurs à relaxation	81
5	Électronique numérique	81
6	Modulation - Démodulation	81
Thermodynamique		81
7	Écriture infinitésimal	81
8	Bilans d'énergie et d'entropie en présence d'écoulement	81
9	Diffusion de particules	81
10	Diffusion thermique	81
Mécanique des fluides		81
11	Statique des fluides	81
12	Débits et lois de conservation	81
13	Écoulements parfaits : Théorème de Bernoulli	81
14	Écoulements parfaits : bilans	81
15	Action de contact sur un fluide en écoulement	81

16	Écoulements homogènes et incompressible dans une conduite cylindrique.....	81
17	Écoulement externe homogène et incompressible autour d'un obstacle.....	81
Électromagnétisme.....		81
18	Électromagnétisme en régime statique : le champ électrique.....	81
19	Courant Électrique - Conducteur métallique.....	81
20	Condensateurs.....	81
21	Champ magnétique en régime stationnaire.....	81
22	Équation de Maxwell.....	81
23	Approximation des régimes quasi stationnaires.....	81
Conversion de puissance.....		81
24	Puissance électrique en régime sinusoïdal.....	81
25	Milieu ferromagnétique et transformateur.....	81
26	Introduction à la conversion électro-magnéto-mécanique.....	81
27	Machine synchrone.....	81
28	Machine à courant continu.....	81
29	Conversion électronique de puissance.....	81
Physique des ondes.....		81
30	Équation de d'Alembert unidimensionnelle.....	81
31	Ondes dans un câble coaxial sans perte.....	81
32	Ondes sonores dans les fluides.....	81
33	Ondes électromagnétiques dans le vide.....	81
34	Onde thermique. Dispersion absorption.....	81
35	Onde électromagnétique dans les milieux conducteurs.....	81

Introduction

Dimensions et unités des grandeurs physiques

Il est essentiel de débiter cet ouvrage par la présentation des dimensions des grandeurs physiques, car elles constituent les fondements mêmes de la physique.

Grandeur de base	Dimension	Unité SI
Longueur	L	m
Temps	T	s
Masse	M	kg
Température	Θ	K
Quantité de matière	N	mol
Intensité électrique	I	A
Intensité lumineuse	J	cd

TABLE 1 – Tableau des grandeurs fondamentales avec leurs unités.

Grandeur mesurée	Unité	Dimension	Unité SI	Type
Accelération		LT^{-2}	ms^{-2}	Intensive
Capacité (C)	F	$M^{-1}L^{-2}T^4I^2$	F	Extensive
Capacité thermique	J/K	$ML^2T^{-2}\Theta^{-1}$	JK^{-1}	Extensive
Champ électrique	V/m	$MLT^{-3}I^{-1}$	Vm^{-1}	Intensive
Champ magnétique	T	$MT^{-2}I^{-1}$	T	Intensive
Chaleur latente	J	ML^2T^{-2}	J	Extensive
Contrainte (σ)	Pa	$ML^{-1}T^{-2}$	Pa	Intensive
Conductance électrique (G)	S	$M^{-1}L^{-2}T^3I^2$	S	Intensive
Énergie (E)	J	ML^2T^{-2}	J	Extensive
Enthalpie(H)	J	ML^2T^{-2}	J	Extensive
Entropie	J/K	$ML^2T^{-2}\Theta^{-1}$	JK^{-1}	Extensive
Entropie massique de changement d'état	J/kg·K	$L^2T^{-2}\Theta^{-1}$	$Jkg^{-1}K^{-1}$	Intensive
Facteur de qualité	Sans dimension	-	-	Intensive
Force (F)	N	MLT^{-2}	N	Intensive
Fréquence (f)	Hz	T^{-1}	s^{-1}	Intensive
Inductance (L)	H	$ML^2T^{-2}I^{-2}$	H	Extensive
Inductance mutuelle	H	$ML^2T^{-2}I^{-2}$	H	Extensive
Longueur d'onde (λ)	m	L	m	Intensive
Masse volumique (ρ ou μ)	kg/m ³	ML^{-3}	kgm^{-3}	Intensive
Moment cinétique	Js	ML^2T^{-1}	Js	Extensive
Moment d'inertie	kgm ²	ML^2	kgm^2	Extensive
Moment magnétique	A·m ²	MLT^{-1}	Am^2	Extensive

TABLE 2 – Tableau des grandeurs fondamentales (Partie 1/2) avec leurs unités.

Grandeur mesurée	Unité	Dimension	Unité SI	Type
Phase à l'origine ou déphasage (ϕ)	rad	-	<i>rad</i>	Intensive
Poussée	N	MLT^{-2}	<i>N</i>	Intensive
Pression	Pa	$ML^{-1}T^{-2}$	<i>Pa</i>	Intensive
Pulsation d'un signal	rad/s	T^{-1}	<i>rads^{-1}</i>	Intensive
Puissance (P)	W	ML^2T^{-3}	<i>W</i>	Intensive
Quantité de mouvement	kgm/s	MLT^{-1}	<i>kgms^{-1}</i>	Extensive
Résistance électrique (R)	Ω	$ML^2T^{-3}I^{-2}$	Ω	Intensive
Tension (V)	V	$ML^2T^{-3}I^{-1}$	<i>V</i>	Intensive
Transfert thermique	J	ML^2T^{-2}	<i>J</i>	Extensive
Travail d'une force	J	ML^2T^{-2}	<i>J</i>	Extensive
Vergence	dpt	L^{-1}	m^{-1}	Intensive
Vitesse (v, c)	m/s	LT^{-1}	ms^{-1}	Intensive

TABLE 3 – Tableau des grandeurs fondamentales (Partie 2/2) avec leurs unités.

Constante	Valeur	Dimension	Unité SI
Boltzmann (k_B)	$1.380649 \times 10^{-23} \text{ J/K}$	$ML^2T^{-2}\Theta^{-1}$	JK^{-1}
cste de gravitation universelle (G)	$6.67430 \times 10^{-11} \text{ m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2}$	$M^{-1}L^3T^{-2}$	$\text{m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2}$
cste de perméabilité du vide (μ_0)	$4\pi \times 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m/A}$	$LMT^{-2}I^{-2}$	$\text{T} \cdot \text{m/A}$
cste de permittivité du vide (ϵ_0)	$8.854 \times 10^{-12} \text{ F/m}$	$L^{-3}MT^{-2}I^{-2}$	F/m
cste de Planck (h)	$6.62607015 \times 10^{-34} \text{ Js}$	ML^2T^{-1}	Js
cste de Planck réduite (\hbar)	$1.054571817 \times 10^{-34} \text{ Js}$	ML^2T^{-1}	Js
cste de Rydberg (R_∞)	$1.0973731568539 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$	L^{-1}	m^{-1}
cste d'Avogadro (N_A)	$6.02214076 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$	N^{-1}	mol^{-1}
cste des aires (h)	$6.62607015 \times 10^{-34} \text{ Js}$	ML^2T^{-1}	Js
cste des gaz parfaits (R)	$8.314462618 \text{ J/(molK)}$	$ML^2T^{-2}N^{-1}\Theta^{-1}$	$\text{Jmol}^{-1}\text{K}^{-1}$
cste de gravité (g)	9.80665 m/s^2	LT^{-2}	ms^{-2}

TABLE 4 – Tableau des constantes physiques importantes.

Outils Mathématiques

Cette première approche vise à familiariser avec des concepts mathématiques essentiels pour aborder l'étude de la physique de manière concrète et de présenter certains moyens mnémotechniques. Parmi ces outils fondamentaux se trouvent les formules trigonométriques, nécessaires pour comprendre et appliquer des principes physiques liés aux mouvements oscillatoires et périodiques. Il est crucial de les maîtriser afin de résoudre efficacement des problèmes simples de dynamique et de mécanique.

Les développements limités et de Taylor constituent une autre clé de cette introduction, offrant des approximations précises pour des fonctions complexes rencontrées dans divers contextes physiques. Leur utilisation permet de simplifier le calcul et d'obtenir des résultats significatifs lors de l'étude de phénomènes physiques variés.

Enfin, les bases d'analyse vectorielle, incluant les notions de champs et d'opérations vectorielles, sont abordées pour permettre la modélisation et la compréhension des grandeurs physiques telles que les forces et les flux.

Cette approche initiale se veut pratique et directe, mettant l'accent sur l'acquisition des compétences nécessaires pour une compréhension préliminaire solide. L'objectif est de poser les bases indispensables avant d'explorer des concepts plus avancés et leurs applications dans le domaine de la physique.

1 Formules Trigonométriques

1.1 Formules de Somme et de Produit

1.1.1 Formules de Somme

"Le cosinus est un menteur raciste : il ment (changement de signe) et il est $\cos \cos$ ($\cos(a)\cos(b)$) en premier"

$$\sin(a + b) = \sin(a) \cos(b) + \cos(a) \sin(b)$$

$$\sin(a - b) = \sin(a) \cos(b) - \cos(a) \sin(b)$$

$$\cos(a + b) = \cos(a) \cos(b) - \sin(a) \sin(b)$$

$$\cos(a - b) = \cos(a) \cos(b) + \sin(a) \sin(b)$$

1.1.2 Formules de Produit

"Sinus Sinus, Différence moins Somme."

"Cosinus Cosinus, Somme plus Différence."

"Sinus Cosinus, Somme plus Différence des sinus."

$$\sin(a) \sin(b) = \frac{1}{2} [\cos(a - b) - \cos(a + b)]$$

$$\cos(a) \cos(b) = \frac{1}{2} [\cos(a + b) + \cos(a - b)]$$

$$\sin(a) \cos(b) = \frac{1}{2} [\sin(a + b) + \sin(a - b)]$$

1.2 Dérivées de \cos et \sin

$$\frac{d}{dx} \sin(x) = \cos(x)$$

$$\frac{d}{dx} \cos(x) = -\sin(x)$$

1.3 Formules de Développement de \cos^2 et \sin^2

$$\cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$$

$$\sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$$

2 Approximations et Développements Limites

2.1 Comparaison de Grandeurs Physiques

Pour distinguer l'effet principal d'un effet secondaire dans la modélisation d'un phénomène physique, on doit comparer deux grandeurs physiques A et B de même dimension. Lorsqu'on a $A \ll B$, on dit que A est très petit devant B , ce qui justifie de négliger A dans la modélisation. On introduit une grandeur sans dimension :

$$\varepsilon = \frac{A}{B}$$

et on vérifie que $\varepsilon \ll 1$. Par exemple, si B est connu avec trois chiffres significatifs, il est inutile de prendre un seuil $\varepsilon < 10^{-3}$ car la perturbation liée à A sera inférieure à l'incertitude sur la mesure de B .

2.2 Développements Limites

2.2.1 Approximation d'une Courbe

Considérons la représentation graphique $y = f(x)$ d'une fonction f au voisinage de $x = x_0$. L'équation de la tangente à la courbe en x_0 est :

$$y_t = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Ce qui donne pour la fonction au voisinage de x_0 :

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

2.2.2 Formule de Taylor

Le développement limité à l'ordre n d'une fonction $f(x)$ en x_0 est :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$$

2.2.3 Développements Limites Usuels en Zéro

Pour certaines fonctions usuelles, on utilise les développements limités suivants :

$$\begin{aligned} e^\varepsilon &\approx 1 + \varepsilon \quad (\text{ordre } 1) \\ \ln(1 + \varepsilon) &\approx \varepsilon \quad (\text{ordre } 1) \\ \sin(\varepsilon) &\approx \varepsilon \quad (\text{ordre } 2) \\ \cos(\varepsilon) &\approx 1 - \frac{\varepsilon^2}{2} \quad (\text{ordre } 2) \\ \tan(\varepsilon) &\approx \varepsilon \quad (\text{ordre } 2) \end{aligned}$$

2.3 Application au Calcul d'Intégrales

Considérons l'intégrale d'une fonction $f(x)$ entre x et $x+dx$. En utilisant le développement de Taylor de $f(x)$ autour de x , on a :

$$f(x+dx) \approx f(x) + f'(x) dx + \frac{f''(x)}{2!} dx^2 + \dots$$

Pour une petite variation dx , les termes d'ordre supérieur deviennent négligeables. On peut donc approximer l'intégrale par :

$$\int_x^{x+dx} f(t) dt \approx \int_x^{x+dx} [f(x) + f'(x)(t-x)] dt$$

2.4 Exemple Concret

Calculons l'intégrale de $\sin(x)$ entre x et $x+dx$.

Le développement de Taylor de $\sin(x)$ autour de x est :

$$\sin(x+dx) \approx \sin(x) + \cos(x) dx - \frac{\sin(x)}{2!} dx^2 + \dots$$

Pour une petite variation dx , on peut négliger les termes d'ordre supérieur :

$$\sin(x+dx) \approx \sin(x) + \cos(x) dx$$

L'intégrale devient alors :

$$\int_x^{x+dx} \sin(t) dt \approx \int_x^{x+dx} [\sin(x) + \cos(x)(t-x)] dt$$

Calculons chaque terme séparément :

$$\int_x^{x+dx} \sin(x) dt = \sin(x) \int_x^{x+dx} dt = \sin(x) dx$$

$$\int_x^{x+dx} \cos(x)(t-x) dt = \cos(x) \int_x^{x+dx} (t-x) dt = \cos(x) \left[\frac{(t-x)^2}{2} \right]_x^{x+dx} = \cos(x) \frac{(dx)^2}{2}$$

Ainsi, l'intégrale approximée est :

$$\int_x^{x+dx} \sin(t) dt \approx \sin(x) dx + \cos(x) \frac{dx^2}{2}$$

Pour des valeurs très petites de dx , le terme en dx^2 peut être négligé, ce qui simplifie encore davantage l'intégrale :

$$\int_x^{x+dx} \sin(t) dt \approx \sin(x) dx$$

NB : Les formules entre crochets (divergence, rotationnel et laplacien en coordonnées cylindriques et sphériques) ne sont pas à savoir. Ne pas utiliser l'opérateur Nabla dans ces cas.

Composition d'opérateurs

$$\begin{aligned}\vec{rot} \vec{grad} V &= \vec{0} \\ \text{div } \vec{rot} \vec{A} &= 0 \\ \text{div } \vec{grad} V &= \Delta V \\ \vec{rot} \vec{rot} \vec{A} &= \vec{grad} \text{div} \vec{A} - \Delta \vec{A}\end{aligned}$$

Composition de champs

$$\begin{aligned}\vec{grad} (V_1 V_2) &= V_1 \vec{grad} V_2 + V_2 \vec{grad} V_1 \\ \vec{rot} (V \vec{A}) &= V \vec{rot} \vec{A} + \vec{grad} V \wedge \vec{A} \\ \text{div} (V \vec{A}) &= V \text{div} \vec{A} + \vec{grad} V \cdot \vec{A} \\ \text{div} (\vec{A} \wedge \vec{B}) &= \vec{B} \cdot \vec{rot} \vec{A} - \vec{A} \cdot \vec{rot} \vec{B}\end{aligned}$$

$$(\vec{v} \cdot \vec{grad}) \vec{v} = \frac{1}{2} \vec{grad} v^2 + \vec{rot} \vec{v} \wedge \vec{v}$$

Théorème d'Ostrogradsky

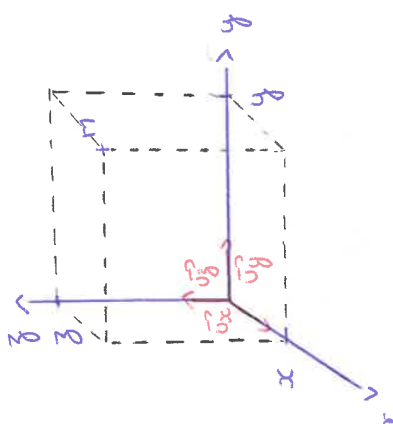
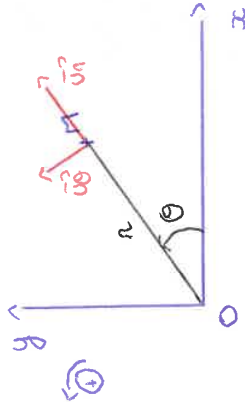
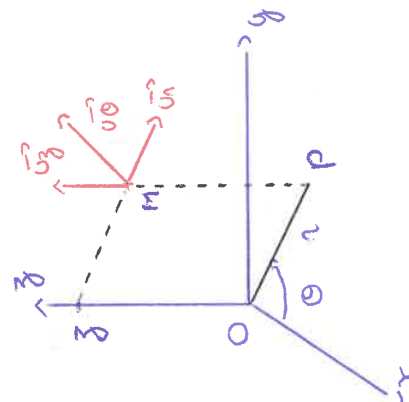
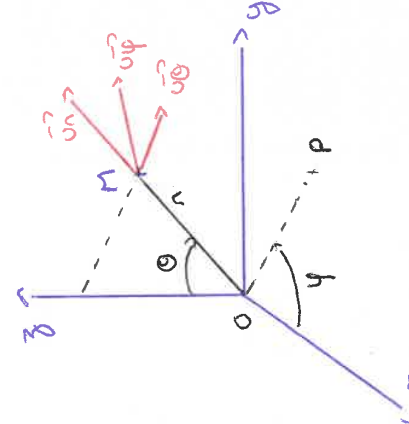
$$\oint_{(S)} \vec{A} \cdot d\vec{S} = \iiint_{(V)} \text{div} \vec{A} d\tau$$

Le flux d'un champ de vecteur à travers une surface fermée est égal à l'intégrale triple de sa divergence étendue au volume intérieur à cette surface.

Théorème de Stokes

$$\oint_{(C)} \vec{A} \cdot d\vec{l} = \iint_{(S)} \vec{rot} \vec{A} \cdot d\vec{S}$$

La circulation d'un champ de vecteur le long d'un contour fermé est égale au flux de son rotationnel à travers une surface quelconque s'appuyant sur ce contour.

Cartésiennes	Polaires
 $\vec{OM} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$	 $0 \leq \theta < 2\pi$ $\vec{OM} = \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \end{pmatrix}$ $\begin{cases} \frac{d\vec{OM}}{dt} = \dot{\theta} \vec{u}_\theta \\ \frac{d\vec{OM}}{dt} = -\dot{r} \vec{u}_r \end{cases}$
Cylindriques	Sphériques
 $0 \leq \theta < 2\pi$ $\vec{OM} = \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \\ z \end{pmatrix}$ $\begin{cases} \frac{d\vec{OM}}{dt} = \dot{\theta} \vec{u}_\theta \\ \frac{d\vec{OM}}{dt} = -\dot{r} \vec{u}_r \end{cases}$	 $0 \leq \theta \leq \pi$ $0 \leq \varphi < 2\pi$ $\vec{OM} = \begin{pmatrix} r \sin \theta \cos \varphi \\ r \sin \theta \sin \varphi \\ r \cos \theta \end{pmatrix}$ $OP = r \sin \theta$

Systèmes de coordonnées en mécanique

Système de coordonnées	Coordonnées	Base de projection	Vecteur position	Vecteur déplacement élémentaire	Vecteur vitesse	Vecteur accélération
Cartésiennes	(x, y, z)	$(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$	$\vec{OM} = x \vec{u}_x + y \vec{u}_y + z \vec{u}_z$	$d\vec{OM} = dx \vec{u}_x + dy \vec{u}_y + dz \vec{u}_z$	$\vec{v} = \dot{x} \vec{u}_x + \dot{y} \vec{u}_y + \dot{z} \vec{u}_z$	$\vec{a} = \ddot{x} \vec{u}_x + \ddot{y} \vec{u}_y + \ddot{z} \vec{u}_z$
Polaires	(r, θ)	$(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$	$\vec{OM} = r \vec{u}_r$	$d\vec{OM} = dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta$	$\vec{v} = \dot{r} \vec{u}_r + r \dot{\theta} \vec{u}_\theta$	$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \vec{u}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \vec{u}_\theta$
Cylindriques	(r, θ, z)	$(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$	$\vec{OM} = r \vec{u}_r + z \vec{u}_z$	$d\vec{OM} = dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + dz \vec{u}_z$	$\vec{v} = \dot{r} \vec{u}_r + r \dot{\theta} \vec{u}_\theta + \dot{z} \vec{u}_z$	$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \vec{u}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \vec{u}_\theta + \ddot{z} \vec{u}_z$
Sphériques	(r, θ, φ)	$(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$	$\vec{OM} = r \vec{u}_r$	$d\vec{OM} = dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + r \sin\theta d\varphi \vec{u}_\varphi$	$\vec{v} = \dot{r} \vec{u}_r + r \dot{\theta} \vec{u}_\theta + r \sin\theta \dot{\varphi} \vec{u}_\varphi$	Non exigible

Physique

1 Optique Géométrique

1.1 Modèle de l'optique géométrique

1.1.1 Sources lumineuses

Une source lumineuse émet une onde électromagnétique qui s'exprime comme une somme d'ondes sinusoïdales de différentes fréquences, appelées ondes monochromatiques. La représentation de l'intensité lumineuse en fonction de la longueur d'onde constitue le spectre de la source. La célérité c d'une onde lumineuse dans un milieu transparent d'indice optique n est plus faible que la célérité de la lumière dans le vide c_0 :

$$c = \frac{c_0}{n}$$

1.1.2 Modèle de l'optique géométrique

Le modèle de l'optique géométrique est un modèle permettant de décrire et de prévoir comment la lumière se déplace depuis une source lumineuse. Elle a pour concept central la notion de rayon lumineux, qui est le chemin emprunté par la lumière. La diffraction est un phénomène universel à toutes les ondes. Au passage d'un obstacle dont la taille caractéristique d est du même ordre de grandeur que la longueur d'onde λ , l'onde repart dans différentes directions selon un demi-angle d'ouverture θ :

$$\sin(\theta) \sim \frac{\lambda}{d}$$

L'approximation de l'optique géométrique revient à négliger tous les phénomènes de diffraction lors de la propagation de l'onde. Cela est possible lorsque $\lambda \ll d$, avec d la taille caractéristique des obstacles rencontrés par l'onde. Les postulats de l'optique géométrique sont au nombre de trois :

- Propagation rectiligne de la lumière : dans un milieu homogène et isotrope, la lumière se propage en ligne droite.
- Indépendance des rayons lumineux : la propagation de la lumière le long d'un rayon lumineux est indépendante des autres rayons.
- Principe de retour inverse de la lumière : le trajet suivi par la lumière est indépendant du sens de propagation.

Les lois de Snell-Descartes prédisent le comportement d'un rayon lumineux à l'interface entre deux milieux transparents d'indices optiques n_1 et n_2 :

- 1ère loi : le rayon réfléchi et le rayon réfracté sont dans le plan d'incidence.
- 2ème loi pour la réflexion : l'angle d'incidence i_1 et l'angle de réflexion r , définis par rapport à la normale au dioptre, respectent la relation :

$$i = -r$$

- 2ème loi pour la réfraction : l'angle d'incidence i_1 et l'angle de réfraction i_2 , définis par rapport à la normale au dioptre, respectent la relation :

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$$

Lorsque la lumière arrive à l'interface avec un milieu moins réfringent ($n_2 < n_1$), il existe un angle limite d'incidence i_{1lim} pour lequel le rayon lumineux réfracté est rasant (confondu avec le dioptre).

$$i_{1lim} = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$$

Pour tout angle $i_1 > i_{1lim}$, aucun rayon réfracté ne peut exister. Il ne reste alors qu'un rayon réfléchi : c'est le phénomène de réflexion totale.

Une fibre optique à saut d'indice est un dispositif de guidage de la lumière constitué d'un cœur d'indice n_c et d'une gaine d'indice $n_g < n_c$. La lumière subit des réflexions totales à l'interface cœur/gaine et reste canalisée dans le cœur de la fibre.

Le cône d'acceptance d'une fibre optique est le cône formé par tous les rayons lumineux entrant dans la fibre qui seront guidés par cette fibre.

Différents rayons peuvent se propager dans la fibre. La dispersion intermodale d'une fibre à saut d'indice est la différence de temps de parcours entre le rayon le plus lent et le rayon le plus rapide. Elle est proportionnelle à la longueur de la fibre, et dépend des indices n_g et n_c . C'est une cause de limitation du débit d'information qu'on peut transmettre par une fibre optique.

1.2 Formation des images

Un système optique est un dispositif qui permet de dévier des rayons lumineux venant d'un objet pour les faire converger et former une image de l'objet.

Les rayons qui arrivent sur le système optique sont les rayons incidents. La zone des rayons incidents est l'espace objet. Les rayons qui repartent du système optique sont les rayons émergents. La zone des rayons émergents est l'espace image.

Un objet réel est situé dans l'espace objet. Un objet virtuel n'est pas situé dans l'espace objet.

Une image réelle est située dans l'espace image. Elle est visible sur un écran. Une image virtuelle n'est pas située dans l'espace image. Elle est visible à l'œil à la sortie du système optique.

Un objet à l'infini est tel que ses rayons incidents sont parallèles. Une image à l'infini est telle que tous ses rayons émergents sont parallèles.

Un objet et une image sont conjugués au sens du stigmatisme approché si l'image d'un objet ponctuel est une tâche lumineuse dont la taille caractéristique est inférieure à la taille du détecteur (capteur CCD, cellule de la rétine...).

Si tous les points d'un objet étendu sont conjugués à leurs images au sens du stigmatisme approché, on est dans le cadre de l'aplanétisme approché. Cela implique que pour un système centré, un objet situé dans un plan de front forme une image dans un autre plan de front.

Pour qu'un système centré soit utilisé dans le cadre du stigmatisme approché et de l'aplanétisme approché, il doit respecter les conditions de Gauss : les rayons lumineux doivent être paraxiaux :

- Les rayons lumineux frappent le système optique proche de l'axe optique.
- Les rayons lumineux sont peu inclinés par rapport à l'axe optique.

Le grandissement est le rapport entre la taille de l'image $\overline{A'B'}$ et la taille de l'objet \overline{AB} :

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$$

1.2.1 Miroir plan

Pour un miroir plan, l'image de l'objet est le symétrique de l'objet par rapport au plan du miroir. Le grandissement de l'objet est 1.

1.2.2 Conjugaisons remarquables pour une lentille mince

Objet		Image	
à l'infini	Sur l'axe optique	Dans le plan focal image	Foyer principal F'
	hors axe optique		Foyer secondaire image
dans le plan focal objet	Foyer principal objet F	à l'infini	sur l'axe optique
	Foyer secondaire objet		hors axe optique

1.2.3 Distances focales pour une lentille mince

La distance focale objet f (resp. image f') est la distance entre le centre optique O et le foyer principal objet F (resp. image F') :

$$f' = -f$$

La vergence V est l'inverse de la distance focale image. Elle s'exprime en dioptries (δ) :

$$V = \frac{1}{f'}$$

1.2.4 Construction géométrique d'une image par une lentille mince

- Un rayon incident passant par le centre optique est non dévié
- Un rayon incident parallèle à l'axe optique converge vers le foyer principal image F'
- Un rayon incident passant par le foyer principal objet F repart parallèle à l'axe optique

Pour déterminer le rayon émergent associé à un rayon incident quelconque, on trace un rayon incident parallèle, passant par l'axe optique (donc non dévié). Ces deux rayons convergent à un foyer secondaire image de la lentille mince.

1.2.5 Relations de conjugaison

- Formule de conjugaison Newton : $FA \cdot F'A' = -f'^2$
- Formule de grandissement Newton : $\gamma = -\frac{F'A'}{f'} = -\frac{f}{FA}$
- Formule de conjugaison Descartes : $\frac{1}{OA'} - \frac{1}{OA} = \frac{1}{f'}$
- Formule de grandissement Descartes : $\gamma = \frac{OA'}{OA}$

1.2.6 Positions de Bessel

Pour faire l'image réelle d'un objet réel par une lentille convergente de focale f' , il faut une distance D entre l'objet et l'image telle que :

$$D \geq 4f'$$

Les deux positions de la lentille qui assurent cette conjugaison s'appellent les positions de Bessel.

1.2.7 Zones de conjugaison d'une lentille mince pour un objet réel

- Lentille convergente :
 - Objet réel situé avant F (configuration « projection ») : Image réelle renversée
 - Objet réel situé en F (configuration « collimateur ») : Image à l'infini
 - Objet réel situé entre F et O (configuration « loupe ») : Image virtuelle droite et agrandie
- Lentille divergente :
 - Objet réel : Image virtuelle, droite et rétrécie

1.2.8 Modélisation de l'œil

Un œil est modélisable, d'un point de vue optique, par l'association d'une lentille convergente de focale variable (cornée + cristallin) et d'un capteur photosensible (la rétine). La pupille est assimilée à un diaphragme de taille variable.

L'accommodation est la capacité de l'œil à faire varier la distance focale du cristallin. Sans accommodation, la distance focale est maximale (convergence minimale). Pour une accommodation maximale, la distance focale est minimale (convergence maximale).

L'objet observé sans accommodation est situé au Punctum Remotum (PR). Il est situé à l'infini pour un œil emmétrrope.

L'objet observé pour une accommodation maximale est situé au Punctum Proximum (PP). Il est situé en moyenne à 25 cm pour un œil emmétrrope.

1.2.9 Limite de résolution angulaire

La limite de résolution angulaire (ou pouvoir séparateur) est l'angle entre deux objets à partir duquel l'œil distingue ces deux objets. Il est en moyenne d'une minute d'arc :

$$1' = \frac{1^\circ}{60} \approx 3 \times 10^{-4} \text{ rad}$$

1.2.10 Défauts de l'œil

Défaut	Myopie	Hypermétropie
Foyer principal image sans accommodation	Devant la rétine	Derrière la rétine
PP	Plus proche que l'œil emmétrrope	Plus éloigné que l'œil emmétrrope
PR	À distance finie	À l'infini
Voit bien...	de près	de loin
Voit mal...	de loin	de près
Correction	Lentilles divergentes	Lentilles convergentes

1.3 Instruments d'optique

1.3.1 Association de systèmes optiques

Lorsque plusieurs systèmes optiques sont placés les uns après les autres, chaque système optique forme une image intermédiaire qui devient un objet intermédiaire pour le système optique suivant :

$$A \xrightarrow{\Sigma_1} A_1 \xrightarrow{\Sigma_2} \dots \xrightarrow{\Sigma_i} A_i \xrightarrow{\Sigma_{i+1}} \dots \xrightarrow{\Sigma_{n-1}} A_{n-1} \xrightarrow{\Sigma_n} A'$$

Lorsque le système optique Σ_i forme une image intermédiaire A_i qui n'est pas dans l'espace objet du système Σ_{i+1} , cette image devient un objet virtuel pour le système Σ_{i+1} .

Le foyer image F' du système optique $(\Sigma_1 + \dots + \Sigma_n)$ est la position de l'image conjuguée à un objet à l'infini sur l'axe optique.

Le foyer objet F du système optique $(\Sigma_1 + \dots + \Sigma_n)$ est la position de l'objet qui, par le système optique, donne une image à l'infini sur l'axe optique.

1.3.2 Lunette astronomique

La lunette astronomique est un instrument d'optique permettant d'observer des objets à l'infini (étoiles, planètes...) de telle sorte que leur image est grossie par la lunette. Elle est composée d'un objectif (focale f'_1) et d'un oculaire (focale f'_2). L'observation se fait à l'œil, derrière l'oculaire. L'œil emmétrrope observant sans accommoder des objets à l'infini, l'image formée par la lunette astronomique est à l'infini.

Comme un objet à l'infini donne une image à l'infini par la lunette astronomique, on dit que la lunette est un système afocal : elle n'a pas de foyers, ou plus exactement, ceux-ci sont rejetés à l'infini.

Pour caractériser le fait qu'on observe mieux les objets à travers la lunette qu'à l'œil nu, on définit le grossissement G , qui est le rapport des angles entre l'image à l'infini α' (vision à travers la lunette) et l'objet à l'infini α (vision à l'œil nu) :

$$G = \frac{\alpha'}{\alpha} = -\frac{f'_1}{f'_2}$$

1.3.3 Appareil photographique numérique

Un appareil photographique numérique est constitué d'un objectif, lentille convergente de focale f' , un capteur composé de pixels sur lequel se forme l'image qui va donner la photo, et un diaphragme positionné devant l'objectif, de diamètre D . En faisant varier la distance entre l'objectif et le capteur, on fait la mise au point sur des objets à différentes distances.

L'exposition d'une photographie est la quantité de lumière reçue par chaque pixel. Trop faible, la photo est trop sombre, elle est sous-exposée. Trop élevée, la photo est trop claire, elle est surexposée.

Le champ est la portion de l'espace qui apparaît sur la photographie.

La profondeur de champ est la distance entre le plan le plus proche et le plus éloigné qui apparaissent nets sur la photographie.

	Focale f'	Diaphragme D	Temps d'exposition T
Exposition	Diminue avec f'	Augmente avec D	Augmente avec T
Taille de l'image	Augmente avec f'	Pas d'influence	Pas d'influence
Champ	Diminue avec f'	Pas d'influence	Pas d'influence
Profondeur de champ	Diminue avec f'	Diminue avec D	Pas d'influence

2 Électricité

2.1 Modélisation des Circuits Électriques

La charge électrique est une propriété fondamentale de la matière, quantifiée par la charge élémentaire :

$$e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$$

L'intensité i est le débit de charges électriques dans un circuit :

$$i = \frac{\delta q}{dt}$$

Pour définir le signe de l'intensité, on doit choisir arbitrairement le sens du courant dans une branche d'un circuit.

La tension u se définit comme une différence entre les potentiels électriques v_A et v_B de deux points d'un circuit :

$$u = v_A - v_B$$

La masse est une référence des potentiels : le potentiel électrique de la masse est nul.

2.1.1 Lois de Kirchhoff

Loi des nœuds

$$i_1 + i_2 = i_3$$

Loi des mailles

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 0$$

2.1.2 Conventions d'Orientation

Convention générateur

- Puissance fournie : $\mathcal{P}_g = ui$
- Énergie élémentaire fournie : $\delta E_g = \mathcal{P}_g dt$

Convention récepteur

- Puissance reçue : $\mathcal{P}_r = ui$
- Énergie élémentaire reçue : $\delta E_r = \mathcal{P}_r dt$

2.1.3 Approximation des Régimes Quasi-Stationnaires (ARQS)

L'ARQS consiste à considérer que les variations de tensions et d'intensités en un point du circuit se répercutent de façon instantanée dans le reste du circuit. Si T est le temps caractéristique de variation des grandeurs électriques dans le circuit et c la célérité de l'onde électrique, la taille caractéristique L du circuit doit respecter la condition :

$$L \ll cT$$

2.1.4 Dipôles

- **Résistance** : $u = Ri$, $\mathcal{P}_r = Ri^2 = \frac{u^2}{R}$

- **Condensateur** : $i = C \frac{du}{dt}$, $\mathcal{P}_r = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} C u^2 \right)$
- **Bobine** : $u = L \frac{di}{dt}$, $\mathcal{P}_r = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} L i^2 \right)$
- **Générateur réel (modèle de Thévenin)** : $u = e - ri$, $\mathcal{P}_g = ei - ri^2$

2.1.5 Énergie

Énergie électrostatique stockée dans un condensateur

$$E_e = \frac{1}{2} C u^2$$

Énergie magnétique stockée dans une bobine

$$E_m = \frac{1}{2} L i^2$$

2.1.6 Association de Résistances

Association série

$$R_{\text{eq}} = R_1 + R_2$$

Association parallèle

$$\frac{1}{R_{\text{eq}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad \text{ou} \quad G_{\text{eq}} = G_1 + G_2$$

2.1.7 Ponts Diviseurs

Pont diviseur de tension

$$u_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} u$$

Pont diviseur de courant

$$i_2 = \frac{G_2}{G_1 + G_2} i$$

2.1.8 Résistances d'Entrée et de Sortie

Un circuit composé de dipôles linéaires passifs peut, en régime continu, être assimilé à une unique résistance, dite résistance d'entrée R_e , qui permet de modéliser son comportement du point de vue du circuit extérieur.

Un circuit composé de dipôles linéaires actifs et passifs peut, en régime continu, être assimilé à un générateur de Thévenin de force électromotrice E et de résistance de sortie R_s , qui permet de modéliser son comportement du point de vue du circuit extérieur.

2.2 ALI

2.2.1 Principe de fonctionnement

Un amplificateur linéaire intégré (ALI) est un circuit complexe alimenté par une tension continue $\pm 15\text{V}$. Il possède deux entrées : non inverseuse (+) et inverseuse (-), et une sortie. En régime linéaire, un ALI amplifie la tension $\varepsilon = v^+ - v^-$ entre ses deux entrées selon la relation :

$$v_s = \mu \varepsilon$$

L'ALI ne peut délivrer des tensions de sortie v_s supérieures, en valeur absolue, à sa tension de saturation $V_{\text{sat}} = 15\text{V}$. On dit alors que l'ALI est en régime saturé. La caractéristique de transfert statique résume les différents régimes possibles de l'ALI.

Dans le cadre du modèle de l'ALI idéal, le gain statique tend vers l'infini, et les courants d'entrée sont nuls :

$$\begin{cases} \mu \rightarrow \infty \\ i^+ = i^- = 0 \end{cases}$$

Si l'ALI est idéal, en régime linéaire, $\varepsilon = 0$ donc les deux entrées sont au même potentiel :

$$v^+ = v^-$$

2.2.2 Montages courants

Lorsqu'on observe une boucle de rétroaction de la sortie vers l'entrée inverseuse, on peut supposer que l'ALI fonctionne en régime linéaire.

— **Suiveur** :

$$v_s = v_e \quad (\text{résistance d'entrée infinie})$$

— **Amplificateur non inverseur** :

$$v_s = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) v_e \quad (\text{résistance d'entrée infinie})$$

— **Amplificateur inverseur** :

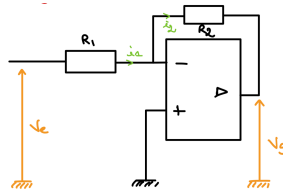
$$v_s = -\frac{R_2}{R_1} v_e \quad (\text{résistance d'entrée } R_1)$$

— **Intégrateur** :

$$v_s = -\frac{1}{RC} \int v_e dt \quad (\text{résistance d'entrée } R)$$

Montages classiques.

Montage amplificateur inverseur



Modèle de l'ALI parfait.

Rétroaction sur la borne inverseuse \rightarrow régime linéaire : $\epsilon = V_+ - V_- = 0$

$$V_+ = V_- = 0$$

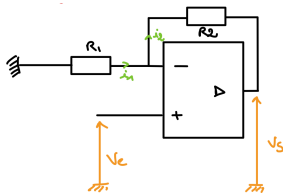
Puisque $i_- = 0$, on a grâce à la loi des noeuds :

$$i_1 = i_2 \Rightarrow (V_e - V_-)/R_1 = (V_- - V_s)/R_2 \Rightarrow \frac{V_e}{R_1} = -\frac{V_s}{R_2} \quad (1)$$

On aboutit à :

$$H = \frac{V_s}{V_e} = -\frac{R_2}{R_1} \quad (2)$$

Montage amplificateur non inverseur



Modèle de l'ALI parfait.

Rétroaction sur la borne inverseuse \rightarrow régime linéaire : $\epsilon = V_+ - V_- = 0$

$$V_+ = V_- = V_e$$

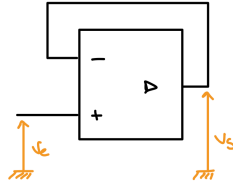
De plus, $i_- = 0$, on applique un pont diviseur de tension :

$$V_- = V_e = \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_s \quad (3)$$

Donc on aboutit à

$$H = \frac{V_s}{V_e} = \frac{R_1 + R_2}{R_1} = 1 + \frac{R_2}{R_1} \quad (4)$$

Montage suiveur



Modèle de l'ALI parfait.

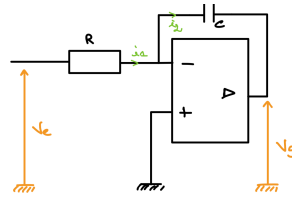
Rétroaction sur la borne inverseuse \rightarrow régime linéaire : $\epsilon = V_+ - V_- = 0$

$V_+ = V_- = V_e$.

Or la boucle inverseuse n'est constituée que d'un fil donc $V_- = V_e = V_s$

$$H = \frac{V_s}{V_e} = 1 \quad (5)$$

Montage intégrateur inverseur



Modèle de l'ALI parfait.

Rétroaction sur la borne inverseuse \rightarrow régime linéaire : $\epsilon = V_+ - V_- = 0$

On peut passer en complexes.

$V_+ = V_- = 0$

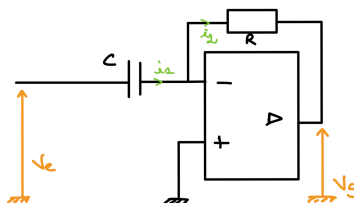
De plus $i_- = 0$, donc par la loi des noeuds,

$$i_1 = i_2 \Rightarrow \frac{V_e}{R} = -V_s C j\omega \quad (6)$$

On aboutit à :

$$H = \frac{V_s}{V_e} = -\frac{1}{RCj\omega} \quad (7)$$

Montage dérivateur inverseur



Modèle de l'ALI parfait.

Rétroaction sur la borne inverseuse \rightarrow régime linéaire : $\epsilon = V_+ - V_- = 0$

On peut passer en complexes.

$V_+ = V_- = 0$.

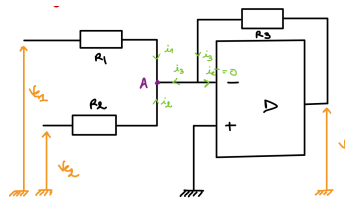
De plus $i_- = 0$, donc par la loi des noeuds,

$$i_1 = i_2 \Rightarrow V_e C j\omega = -\frac{V_s}{R} \quad (8)$$

On aboutit à :

$$H = \frac{V_s}{V_e} = -RCj\omega \quad (9)$$

Montage sommateur inverseur



Modèle de l'ALI parfait.

Rétroaction sur la borne inverseuse \rightarrow régime linéaire : $\epsilon = V_+ - V_- = 0$

$$V_+ = V_- = 0 \Rightarrow V_a = 0$$

De plus $i_- = 0$, donc on applique la loi des noeuds en terme de potentiels au point A .

$$\frac{V_{e1}}{R_1} + \frac{V_{e2}}{R_2} + \frac{V_s}{R_3} = 0 \Rightarrow V_s = -V_{e2} \frac{R_3}{R_2} - V_{e1} \frac{R_3}{R_1} \quad (10)$$

Autres montages :

- Filtre à pont de Wien.
- Résistance négative.
Avec oscillateur à résistance négative.
- Démodulation synchrone et montage de modulation en amplitude.

2.3 Régimes Transitoires du 1er Ordre

Un **régime transitoire** est le passage du circuit d'un régime permanent à un autre régime permanent.

2.3.1 Équation différentielle

L'étude d'un régime transitoire passe par la résolution de l'équation différentielle du circuit, issue de l'application des lois de Kirchhoff et des lois de fonctionnement de chaque dipôle. Pour un régime transitoire du 1er ordre, l'équation différentielle est du 1er ordre. Sa forme canonique est :

$$\frac{dX}{dt} + \frac{X}{\tau} = f(t)$$

τ est le temps caractéristique du régime transitoire. On considère que la durée du régime transitoire est de 5τ .

2.3.2 Solutions et interprétation en termes de nature du régime

La solution $X(t)$ de l'équation différentielle est établie en effectuant la somme de deux solutions :

- La solution générale de l'équation différentielle homogène : $X_g(t) = A \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$. Celle-ci correspond au régime transitoire.
- La solution particulière de l'équation différentielle avec second membre $X_p(t)$: c'est une constante lorsque le second membre est une constante. Celle-ci correspond au régime permanent.

$$X(t) = X_g(t) + X_p(t)$$

Au bout de 5τ , le régime transitoire est terminé : $X_g(t)$ est très proche de 0 et il ne reste plus que le régime permanent $X_p(t)$. Cette correspondance entre nature du régime et partie de la solution a un caractère général pour tous les systèmes linéaires.

2.3.3 Conditions initiales

Par impossibilité à fournir une puissance infinie à un dipôle, il résulte que :

- La tension est continue aux bornes d'un condensateur.
- L'intensité qui traverse une bobine est continue.

2.3.4 Bilan énergétique

Le bilan énergétique du régime transitoire décrit comment l'énergie électrique est transférée entre les dipôles du circuit. L'énergie fournie par le générateur est :

- Pour partie stockée dans les condensateurs et les bobines. Elle peut être ultérieurement restituée au circuit.
- Pour partie dissipée dans les résistances par effet Joule. Elle est définitivement perdue pour le circuit.

2.3.5 Principaux exemples

— Circuit RC série :

$$\tau = RC$$

— Réponse à un échelon : charge du condensateur

$$\frac{duc}{dt} + \frac{uc}{\tau} = \frac{E}{\tau} \Rightarrow uc(t) = E(1 - \exp(-\frac{t}{\tau}))$$

— Régime libre : décharge du condensateur

$$\frac{duc}{dt} + \frac{uc}{\tau} = 0 \Rightarrow uc(t) = U_0 \exp(-\frac{t}{\tau})$$

— Circuit RL série :

$$\tau = \frac{L}{R}$$

— Réponse à un échelon : établissement du courant

$$\frac{di}{dt} + \frac{i}{\tau} = \frac{E}{L} \Rightarrow i(t) = \frac{E}{R}(1 - \exp(-\frac{t}{\tau}))$$

2.4 Oscillateurs harmoniques

2.4.1 Oscillateur harmonique et signal sinusoïdal

L'équation différentielle d'un oscillateur harmonique est de la forme :

$$\ddot{X} + \omega_0^2 X = 0$$

— X est la fonction inconnue dépendant du temps.

— ω_0 est la pulsation propre de l'oscillateur. Elle s'exprime en rad.s^{-1} .

La solution de cette équation est un signal sinusoïdal. Il peut s'écrire sous deux formes équivalentes :

$$\begin{cases} X(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) \\ X(t) = C \cos(\omega_0 t + \varphi) \end{cases}$$

— C est l'amplitude du signal. Elle est toujours positive ou nulle.

— φ est la phase à l'origine (ou phase initiale). Elle est comprise entre $-\pi$ et π .

Le caractère périodique d'un signal sinusoïdal est décrit par sa période T , sa fréquence f et sa pulsation ω , qui sont liés par les relations :

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

Du fait de l'absence de dissipation d'énergie dans l'oscillateur harmonique, l'énergie totale (ou énergie mécanique dans le cas d'un système mécanique) se conserve.

2.4.2 Modélisation mécanique d'un ressort

La force de rappel d'un ressort sur une masse a pour expression :

$$\vec{F} = -k(\ell - \ell_0)\vec{u}$$

- k est la constante de raideur du ressort. Elle s'exprime en N.m^{-1} .
- ℓ_0 est la longueur à vide. s'exprime en m.
- ℓ est la longueur du ressort. Elle s'exprime en m.
- \vec{u} est un vecteur unitaire orienté du point d'attache vers la masse.

L'énergie potentielle élastique d'un ressort a pour expression :

$$E_p = \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2$$

2.4.3 Exemples d'oscillateurs harmoniques

Type d'oscillateur harmonique	Équation différentielle	Pulsation propre	Période
Oscillateur électrique : circuit LC	$\frac{d^2 u_c}{dt^2} + \frac{1}{LC}u_c = 0$	$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$	$T = 2\pi\sqrt{LC}$
Oscillateur mécanique : système masse-ressort sans frottements	$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$	$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$	$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

Conservation de l'énergie :

- Oscillateur électrique : $E_{tot} = \frac{1}{2}Cu_c^2 + \frac{1}{2}Li^2 = \text{cste}$
- Oscillateur mécanique : $E_m = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \text{cste}$

2.5 Oscillateurs amortis

2.5.1 Description d'un régime transitoire du second ordre

Un régime transitoire du second ordre est décrit par une équation différentielle canonique :

$$\ddot{X} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{X} + \omega_0^2 X = 0$$

ω_0 est la pulsation caractéristique (en rad.s^{-1}). Q est le facteur de qualité (sans dimension). On distingue 3 régimes selon la valeur du facteur de qualité :

- Régime pseudo-périodique $Q > \frac{1}{2}$:

$$X(t) = e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}} \left(A \cos \left(\omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} t \right) + B \sin \left(\omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} t \right) \right)$$

- Régime apériodique critique $Q = \frac{1}{2}$:

$$X(t) = e^{-\omega_0 t} (A + Bt)$$

- Régime apériodique $Q < \frac{1}{2}$:

$$X(t) = e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}} \left(A \cosh \left(\omega_0 \sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1} t \right) + B \sinh \left(\omega_0 \sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1} t \right) \right)$$

2.5.2 Principaux exemples d'oscillateurs amortis

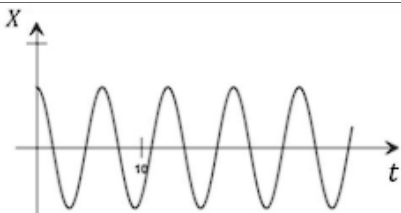

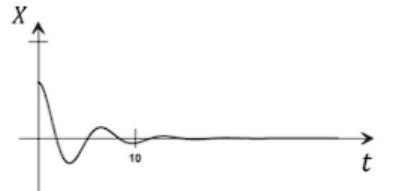
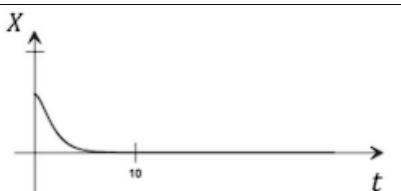
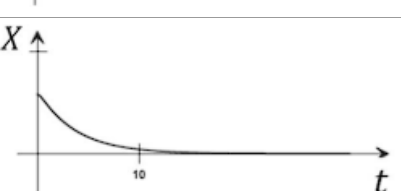
Oscillateur	Pulsation propre	Facteur de qualité
Électrique : RLC série	$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$	$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$
Mécanique : système masse-ressort en présence de frottements visqueux $f = -\alpha \vec{v}$	$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$	$Q = \frac{\sqrt{mk}}{\alpha}$

2.5.3 Durée du régime transitoire

À pulsation propre fixée, la durée du régime transitoire diminue en régime pseudo-périodique lorsque le facteur de qualité diminue (Q allant de $+\infty$ à 0.5). Elle est minimale en régime apériodique critique ($Q = 0.5$) et réaugmente en régime apériodique lorsque le facteur de qualité diminue (Q allant de 0.5 à 0).

En régime pseudo-périodique, le nombre d'oscillations visibles pour de faibles amortissements est approximativement égal au facteur de qualité.

2.5.4 Représentations graphiques selon le facteur de qualité

Facteur de qualité	Régime	Représentation graphique
$Q = +\infty$	périodique (oscillateur harmonique)	
$Q = 10$	pseudo-périodique	
$Q = 2$	pseudo-périodique	
$Q = 0.5$	apériodique critique	
$Q = 0.25$	apériodique	

2.5.5 Aspects énergétiques

La présence d'un phénomène de dissipation d'énergie (résistance dans le circuit RLC, frottements dans le système masse-ressort) se traduit par la diminution de l'énergie globale de l'oscillateur, donc de l'amplitude des oscillations, qui tend vers zéro. Le facteur de qualité traduit le degré d'amortissement : plus il est faible, plus l'amortissement est important.

2.6 Régime sinusoïdal forcé

Le régime sinusoïdal forcé est le régime permanent d'un système physique linéaire soumis à une excitation sinusoïdale.

Si le signal excitateur est $e(t) = E \cos(\omega t)$, toutes les grandeurs physiques du système seront sinusoïdales et de même pulsation ω . Les signaux sont de la forme :

$$X(t) = X_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

X_0 est l'amplitude du signal, φ est le déphasage du signal $X(t)$ par rapport au signal excitateur $e(t)$.

X_0 et φ dépendent en général de la pulsation ω et des paramètres du système. On les détermine à l'aide de la méthode des complexes.

Signal réel	Signal complexe
$s(t) = S_0 \cos(\omega t + \varphi)$	$s(t) = S_0 e^{j(\omega t + \varphi)} = \underline{S_0} e^{j\omega t}$ avec $\underline{S_0} = S_0 e^{j\varphi}$ amplitude complexe

Signal complexe	Signal réel
$\underline{s}(t) = \underline{S_0} e^{j\omega t}$	$s(t) = \Re(\underline{s}(t))$ avec $S_0 = \underline{S_0} $ et $\varphi = \arg(\underline{S_0})$

Signal	Signal	Signal
$\underline{s}(t) = \underline{S_0} e^{j\omega t}$	$\frac{ds}{dt} = j\omega \underline{s}$	$\int \underline{s} dt = \frac{\underline{s}}{j\omega}$

2.6.1 Impédances complexes

En régime sinusoïdal forcé, on peut étudier un circuit électrique en introduisant la notion d'impédance complexe Z , définie par la loi d'Ohm complexe (en convention récepteur) :

$$\underline{u} = Z \underline{i}$$

Dipôle	Résistance	Condensateur	Bobine
Impédance	$Z = R$	$Z = \frac{1}{jC\omega}$	$Z = jL\omega$

On définit également l'admittance complexe :

$$Y = \frac{1}{Z}$$

L'étude d'un circuit en régime sinusoïdal forcé revient à appliquer les lois de Kirchhoff avec des tensions et intensités complexes, puis à écrire les lois de fonctionnement sous la forme de lois d'Ohm complexes. Toutes les règles de simplification des calculs vues pour le régime continu restent valables, en remplaçant les résistances par les impédances.

Association de deux impédances en série	$Z_{eq} = Z_1 + Z_2$
Association de deux impédances en parallèle	$\frac{1}{Z_{eq}} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}$
Pont diviseur de tension pour deux impédances	$\underline{u_1} = \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} \underline{u}$
Pont diviseur de courant pour deux admittances	$\underline{i_1} = \frac{Y_1}{Y_1 + Y_2} \underline{i}$

2.7 Oscillateurs forcés, résonance

2.7.1 Oscillations libres, oscillations forcées

	Oscillations libres	Oscillations forcées
Mode d'obtention	Système oscillant suite à une excitation ponctuelle	Système soumis à une excitation sinusoïdale
Nom donné à l'oscillateur	Oscillateur amorti	Oscillateur forcé, ou résonateur
Pulsation des oscillations	Pulsation dépendant des paramètres physiques du système	Pulsation imposée par l'excitateur
Équation différentielle	$\ddot{X} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{X} + \omega_0^2 X = 0$	$\ddot{X} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{X} + \omega_0^2 X = \omega_0^2 X_e \cos(\omega t)$
Type de régime	Régime transitoire	Régime permanent

2.7.2 Phénomène de résonance

Un oscillateur forcé est décrit par plusieurs grandeurs physiques qui oscillent à la même pulsation que l'excitateur : il s'agit des réponses de l'oscillateur.

Lorsque l'amplitude d'une réponse présente un maximum pour une pulsation non nulle de l'excitateur, on dit qu'il y a résonance. Cette pulsation est appelée pulsation de résonance ω_r . Elle est soit égale, soit voisine de la pulsation propre ω_0 de l'oscillateur.

L'amplitude de la réponse à la résonance est d'autant plus grande que les phénomènes d'amortissement sont faibles dans l'oscillateur.

2.7.3 Acuité de la résonance

La bande passante $\Delta\omega$ est l'intervalle de pulsations pour lesquelles l'amplitude de la réponse est supérieure à l'amplitude à la résonance divisée par $\sqrt{2}$.

Le facteur de qualité détermine l'acuité de la résonance. Plus le facteur de qualité est grand, plus la bande passante est étroite :

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_r} = \frac{1}{Q}$$

2.7.4 Nature des réponses

Équation canonique		$\ddot{X} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{X} + \omega_0^2 X = \omega_0^2 X_e \cos(\omega t)$	
Réponse étudiée		X	\dot{X}
Oscillateur électrique RLC	Grandeur Physique correspondante	Charge q sur l'armature du condensateur	Intensité i dans le circuit
	Nom de la résonance	Résonance en charge	Résonance en intensité
Oscillateur mécanique	Grandeur Physique correspondante	Position x du mobile par rapport à sa position d'équilibre	Vitesse v du mobile
	Nom de la résonance	Résonance en élongation	Résonance en vitesse

2.7.5 Comparaison des résonances

	Réponse en X	Réponse en \dot{X}
Forme canonique de l'amplitude complexe	$\underline{X_0} = \frac{X_e}{1 + j\frac{\omega}{Q\omega_0} - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$	$\underline{\dot{X}_0} = \frac{\omega_0 Q X_e}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$
Y a-t-il résonance ?	Seulement pour $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$	Oui, sans condition
Pulsation de résonance	$\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$	$\omega_r = \omega_0$

2.8 Filtre linéaire

2.8.1 Fonction de transfert d'un quadripôle linéaire

Un quadripôle linéaire est une représentation symbolique d'un montage électrique ne contenant que des dipôles linéaires, qui transforme une tension d'entrée u_e en une tension de sortie u_s .

En régime sinusoïdal forcé, on définit la fonction de transfert harmonique :

$$\underline{H(j\omega)} = \frac{\underline{u_s}}{\underline{u_e}}$$

La fonction de transfert harmonique prend la forme d'une fraction rationnelle en la variable $j\omega$.

Pour une tension d'entrée sinusoïdale $u_e(t) = U_e \cos(\omega t)$, la tension de sortie se déduit des caractéristiques de la fonction de transfert :

$$\underline{u_s(t)} = |H(j\omega)| U_e \cos(\omega t + \arg(\underline{H(j\omega)}))$$

2.8.2 Adaptation d'impédances

Dès que le courant de sortie du quadripôle est nul, la fonction de transfert est dite en boucle ouverte. Cette fonction de transfert ne dépend que du quadripôle et pas de l'extérieur du circuit : elle est donc caractéristique de l'opération de transformation du signal effectuée par le quadripôle.

Lors de la mise en cascade de plusieurs quadripôles, le fonctionnement en boucle ouverte de chaque quadripôle est assuré par une adaptation d'impédances : l'impédance de sortie du quadripôle n doit être très petite devant l'impédance d'entrée du quadripôle $n + 1$:

$$|Z_s(n)| \ll |Z_e(n + 1)|$$

Pour que cette condition soit remplie pour toute mise en cascade, on conçoit, dans la mesure du possible, les quadripôles pour que :

$$\begin{cases} |Z_e| \rightarrow +\infty \\ |Z_s| \rightarrow 0 \end{cases}$$

Les quadripôles actifs sont particulièrement bien adaptés pour respecter ces conditions. C'est en général moins le cas pour les quadripôles passifs.

2.8.3 Filtre

Lorsque la fonction de transfert harmonique dépend de la pulsation ω du signal, certains signaux sinusoïdaux sont éliminés à la sortie du quadripôle tandis que d'autres sont transmis. Le quadripôle porte alors le nom de filtre.

Les caractéristiques du filtre sont déterminées à partir du module et de l'argument de $H(j\omega)$:

$$\text{Gain linéaire : } G = |H(j\omega)|$$

$$\text{Gain en décibel : } G_{dB} = 20 \log G = 20 \log |H(j\omega)|$$

$$\text{Phase : } \varphi = \arg(H(j\omega))$$

Le diagramme de Bode représente graphiquement le comportement fréquentiel du filtre : il est composé de la courbe de gain $G_{dB} = f(\log \omega)$ et de la courbe de phase $\varphi = f(\log \omega)$.

La bande passante du filtre est l'intervalle des fréquences qui sont transmises par le filtre. La bande coupée est le complémentaire de la bande passante.

La pulsation de coupure ω_c marque la limite entre la bande passante et la bande coupée. Elle est définie par rapport à la valeur maximale G_{max} atteinte par le gain linéaire :

$$G(\omega_c) = \frac{G_{max}}{\sqrt{2}}$$

Une définition équivalente repose sur le gain en décibel :

$$G_{dB}(\omega_c) = G_{dB,max} - 3$$

Cette dernière définition justifie le terme de pulsation de coupure à -3 dB.

2.8.4 Caractère dérivateur ou intégrateur d'un filtre

Dans certaines bandes de fréquences, le filtre peut présenter un caractère dérivateur ou un caractère intégrateur. Cela signifie que le signal de sortie est, à une constante près, la dérivée ou une primitive du signal d'entrée.

Un caractère dérivateur ou intégrateur s'identifie grâce à la fonction de transfert ou grâce aux asymptotes de la courbe de gain du diagramme de Bode.

Caractère remarquable	Fonction de transfert	Courbe de gain du diagramme de Bode	Exemples
Dérivateur	$H(j\omega) \propto j\omega$	Asymptote à $+20$ dB/décade	Passe-haut 1er ordre à BF Passe-bande 2nd ordre à BF
Intégrateur	$H(j\omega) \propto \frac{1}{j\omega}$	Asymptote à -20 dB/décade	Passe-bas 1er ordre à HF Passe-bande 2nd ordre à HF

Typologie de filtres

Type de filtre	Fonction de transfert normalisée	Exemple	Allure de la courbe de gain
Filtre passe-bas du 1er ordre	$H(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega/\omega_0} H_0$	Circuit RC série ; tension de sortie aux bornes de C.	Asymptote à -20 dB/décade
Filtre passe-haut du 1er ordre	$H(j\omega) = \frac{j\omega/\omega_0}{1+j\omega/\omega_0} H_0$	Circuit RC série ; tension de sortie aux bornes de R.	Asymptote à $+20$ dB/décade
Filtre passe-bas du 2nd ordre	$H(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega/Q\omega_0-(\omega/\omega_0)^2} H_0$	Circuit RLC série ; tension de sortie aux bornes de C.	Asymptote à -40 dB/décade
Filtre passe-haut du 2nd ordre	$H(j\omega) = \frac{-(\omega/\omega_0)^2}{1+j\omega/Q\omega_0-(\omega/\omega_0)^2} H_0$	Circuit RLC série ; tension de sortie aux bornes de L.	Asymptote à $+40$ dB/décade
Filtre passe-bande du 2nd ordre	$H(j\omega) = \frac{j\omega/Q\omega_0}{1+j\omega/Q\omega_0-(\omega/\omega_0)^2} H_0$	Circuit RLC série : tension de sortie aux bornes de R.	Asymptote à $+20$ dB/décade, asymptote à -20 dB/décade
Filtre coupe-bande du 2nd ordre	$H(j\omega) = \frac{1-(\omega/\omega_0)^2}{1+j\omega/Q\omega_0-(\omega/\omega_0)^2} H_0$	Circuit RLC série ; tension de sortie aux bornes de L et C.	Asymptote à -20 dB/décade, asymptote à $+20$ dB/décade

2.9 Filtrage des signaux périodiques

Signaux périodiques

La valeur moyenne d'un signal périodique a pour expression :

$$\langle s \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T s(t) dt$$

La valeur efficace d'un signal périodique a pour expression :

$$S_{eff} = \sqrt{\langle s^2 \rangle} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T s^2(t) dt}$$

Dans le cas d'un signal sinusoïdal, la relation entre l'amplitude S_{max} et la valeur efficace S_{eff} du signal est :

$$S_{eff} = \frac{S_{max}}{\sqrt{2}}$$

Tout signal périodique admet une décomposition en série de Fourier, qui permet d'écrire ce dernier sous la forme d'une somme de signaux sinusoïdaux. Les basses fréquences restituent la forme générale du signal, les hautes fréquences restituent les détails du signal.

Les tensions et intensités dans un circuit linéaire soumis à un signal périodique de la part du générateur sont solutions d'une équation différentielle linéaire. Pour déterminer l'expression de ces solutions, on procède de la manière suivante :

- On exprime le signal périodique du générateur comme une somme de signaux sinusoïdaux grâce à la décomposition en série de Fourier.
- On détermine chaque solution associée à chaque signal sinusoïdal grâce à la méthode des complexes.
- On en déduit la solution associée au signal périodique grâce au théorème de superposition.

Le théorème de Parseval établit une relation entre la valeur efficace S_{eff} d'un signal périodique et les valeurs efficaces $A_{eff,n}$ de ses composantes dans la série de Fourier :

$$S_{eff}^2 = A_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} A_{eff,n}^2$$

Cela revient à dire que l'énergie du signal périodique est égale à la somme des énergies de chacune de ses composantes.

2.9.1 Filtrage des signaux périodiques

Le filtrage est le processus qui consiste à transformer un signal périodique à l'aide d'un filtre. On peut exploiter les propriétés des filtres pour effectuer certaines opérations simples.

Opération	Moyenner un signal	Intégrer un signal	Dériver un signal
Filtres utilisables	Filtre passe-bas	Filtre passe-bas du 1 ^{er} ordre, Filtre passe-bande du 2 nd ordre , Montage intégrateur	Filtre passe-haut du 1 ^{er} ordre, Filtre passe-bande du 2 nd ordre
Condition d'utilisation	La fréquence de coupure est très inférieure à la fréquence du fondamental du signal	Toutes les composantes sinusoïdales du signal sont dans la zone intégratrice du filtre	Les composantes sinusoïdales de basse fréquence du signal sont dans la zone dérivatrice du filtre
Zone associée sur la courbe de gain du diagramme de Bode	Bande coupée	Asymptote à -20 dB/décade	Asymptote à +20 dB/décade
Allure du signal de sortie	Signal continu, correspondant à la valeur moyenne du signal d'entrée	Primitive du signal d'entrée	Dérivée du signal d'entrée

TABLE 5 – Filtrage des signaux périodiques

2.9.2 Systèmes non linéaires

Un système physique est non linéaire lorsque certains de ses constituants sont non linéaires (diode...) ou fonctionnent en régime non linéaire (ALI en régime saturé...). D'un point de vue mathématique, l'équation différentielle qui décrit le système est non linéaire.

Lorsque, dans un système physique, on voit apparaître de nouvelles fréquences qui n'étaient pas présentes dans le signal d'entrée, c'est le signe que le système est non linéaire.

3 Ondes

3.1 Propagation d'un signal

Une onde est la propagation d'une perturbation produisant sur son passage une variation réversible des propriétés physiques locales du milieu.

Onde	Grandeurs physiques associées	Fréquences typiques
Acoustique	Surpression, Vitesse	Infrasons : moins de 20 Hz, Audible : 20 Hz à 20 kHz, Ultrasons : plus de 20 kHz
Sismique	Déformation de la matière	Ondes P et S : > 1 Hz, Ondes L et R : < 1 Hz
Électrique	Tension Intensité	Jusqu'à quelques GHz
Électromagnétique	Champ électrique, Champ magnétique	Lumière visible : 10^{14} Hz

Une onde est progressive lorsqu'elle se propage sans déformation ni atténuation à célérité constante c . Elle peut s'écrire sous la forme :

- $s(x, t) = f(x - ct) = g\left(t - \frac{x}{c}\right)$ si l'onde se propage vers les x croissants
- $s(x, t) = f(x + ct) = g\left(t + \frac{x}{c}\right)$ si l'onde se propage vers les x décroissants

Le retard de l'onde progressive est la durée nécessaire pour que l'onde aille d'un point à un autre.

Une onde progressive périodique présente une double périodicité :

- Une périodicité temporelle, de période T
- Une périodicité spatiale, de longueur d'onde λ

Ces deux périodicités sont liées par la relation :

$$\lambda = cT = \frac{c}{f}$$

Une onde progressive sinusoïdale est une onde progressive créée par un émetteur qui produit un signal sinusoïdal. Elle est de la forme :

- $s(x, t) = C \cos(\omega t - kx + \varphi)$ si l'onde se propage dans le sens des x croissants
- $s(x, t) = C \cos(\omega t + kx + \varphi)$ si l'onde se propage dans le sens des x décroissants

On introduit ainsi la pulsation spatiale k :

$$k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Lorsqu'on observe l'onde en deux points x_1 et x_2 au cours du temps, les signaux mesurés sont en phase lorsque $x_2 - x_1$ est un multiple de la longueur d'onde, ou lorsque le retard entre x_1 et x_2 est un multiple de la période T .

On appelle vitesse de phase v_φ la vitesse d'un point de l'onde progressive sinusoïdale, caractérisé par sa phase $\varphi = \omega t - kx + \varphi_0 = \text{cste}$:

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k}$$

Dans le cas où l'onde se réduit à une unique onde progressive sinusoïdale, la vitesse de phase s'identifie à la célérité c de l'onde.

Un milieu dispersif est un milieu dans lequel la vitesse de phase d'une onde progressive sinusoïdale dépend de sa fréquence.

De façon générale, une onde peut se décomposer en une somme d'ondes progressives sinusoïdales de différentes fréquences. Si le milieu est dispersif, chaque onde progressive sinusoïdale a sa propre vitesse de phase, si bien que l'onde se déforme au cours de sa propagation. L'onde dans son ensemble n'est plus une onde progressive et on ne peut définir sa célérité. En revanche, dans un milieu non dispersif, toutes les vitesses de phase sont égales et l'onde ne se déforme pas : elle reste progressive et les vitesses de phase s'identifient à la célérité de cette onde progressive.

La propagation des ondes électromagnétiques dans le vide ou la propagation des ondes acoustiques est non dispersive. La propagation des ondes à la surface de l'eau ou la propagation de la lumière dans un milieu matériel transparent est dispersive.

3.2 Interférence

3.2.1 Interférences entre ondes progressives sinusoïdales de même fréquence

Le phénomène d'interférences résulte de la superposition de deux ondes progressives sinusoïdales $s_1(M, t)$ et $s_2(M, t)$ en un point M de l'espace, de même fréquence et d'amplitudes A_1 et A_2 . Par le principe de superposition, le signal résultant s'écrit :

$$s(M, t) = s_1(M, t) + s_2(M, t)$$

Il s'agit d'un signal sinusoïdal de même fréquence que s_1 et s_2 . Son amplitude est donnée par la formule des interférences :

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\Delta\varphi)}$$

L'amplitude de l'onde résultante dépend donc du déphasage $\Delta\varphi$, qui varie lui-même en fonction de la position M où l'on observe la superposition des ondes.

3.2.2 Cas des interférences optiques

Le chemin optique d'une onde lumineuse allant d'un point A à un point B dans un milieu d'indice optique n est :

$$(AB) = n \cdot AB$$

Pour les interférences dans le domaine optique, la source S des deux ondes doit être la même. Cela conduit à définir la différence de marche, qui est la différence de chemin optique entre les deux ondes interférant au point M :

$$\delta = (SM)_2 - (SM)_1$$

Le déphasage s'exprime en fonction de la différence de marche, et de la longueur d'onde dans le vide λ_0 de l'onde lumineuse :

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_0}\delta$$

L'intensité lumineuse est proportionnelle à la moyenne du carré du signal de l'onde lumineuse. La formule des interférences se réécrit pour donner la formule de Fresnel :

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\delta\right)$$

3.2.3 Interférences remarquables

$\Delta\varphi$	δ	Ondes	Interférences
$2p\pi$	$p\lambda_0$	en phase	constructives, brillantes
$(2p+1)\pi$	$(p + \frac{1}{2})\lambda_0$	en opposition de phase	destructives, sombres

3.2.4 Cas des trous de Young

L'expérience des trous de Young est une expérience d'interférences dans le domaine optique. Deux sources secondaires S_1 et S_2 séparées de a produisent une figure d'interférences sur un écran parallèle au plan des sources, situé à la distance D . On obtient des franges rectilignes selon la direction (Ox) colinéaire à la direction $\vec{S_1 S_2}$. La différence de marche en un point x a pour expression :

$$\delta = \frac{ax}{D}$$

L'interfrange est la distance entre deux franges brillantes voisines. Elle a pour expression :

$$i = \frac{\lambda_0 D}{a}$$

3.2.5 Battements

Le phénomène de battements résulte de l'interférence entre deux ondes progressives sinusoïdales de fréquences voisines en un point de l'espace. Au cours du temps, les interférences alternent entre interférences constructives et destructives. La fréquence des battements (durée entre deux interférences constructives successives) est égale à l'écart entre les fréquences des deux ondes :

$$f_{batt} = |f_2 - f_1|$$

3.3 Ondes stationnaires

3.3.1 Ondes stationnaires

Une onde stationnaire harmonique résulte de la superposition de deux ondes progressives sinusoïdales de même fréquence et de même amplitude, se propageant dans des sens opposés. Elle a pour expression :

$$s(x, t) = C \cos(\omega t + \varphi) \cos(kx + \psi)$$

Une onde stationnaire est caractérisée par la présence de nœuds et de ventres. L'onde entre deux nœuds est appelée fuseau. La longueur d'un fuseau est de $\frac{\lambda}{2}$.

3.3.2 Corde vibrante

Une corde vibrante est une corde de longueur L fixée à ses deux extrémités. Une onde stationnaire harmonique de cette corde est appelée mode propre de la corde. Les conditions aux limites aux extrémités de la corde impliquent qu'on doit avoir un nombre entier n de fuseaux sur la corde, soit $L = n\frac{\lambda}{2}$. Les longueurs d'onde et fréquences des modes propres sont donc quantifiées :

$$\begin{cases} \lambda_n = \frac{2L}{n} \\ f_n = \frac{c}{\lambda_n} = \frac{nc}{2L} \end{cases}$$

De façon générale, une onde sur une corde vibrante peut se décomposer en une somme de modes propres. Dans le cas d'un instrument à cordes, chaque mode propre produit une onde acoustique de même fréquence, ce qui conduit à un son complexe constitué d'un fondamental (qui détermine la hauteur du son) et d'harmoniques (qui déterminent le timbre du son).

3.3.3 Corde de Melde

Une corde de Melde est une corde fixée à l'une de ses extrémités et excitée à l'autre extrémité par un vibreur qui produit un signal sinusoïdal. Elle est le siège d'ondes stationnaires harmoniques dont la fréquence est imposée par le vibreur : il s'agit d'oscillations forcées. La corde de Melde présente des modes de résonance lorsque les fréquences d'excitation sont égales aux fréquences des modes propres de la corde vibrante : l'amplitude de l'onde stationnaire harmonique passe alors par un maximum.

4 Mécanique

4.1 Cinématique

4.1.1 Référentiel

Un référentiel est la donnée d'un solide par rapport auquel on observe un mouvement, et d'un appareil de mesure du temps, attaché à ce solide. Un mouvement n'est pas décrit de la même façon selon le référentiel dans lequel il est observé : c'est la relativité du mouvement.

4.1.2 Espace et temps classiques

Dans le cadre de la mécanique classique, on suppose que l'espace et le temps sont classiques : les intervalles de temps et les distances sont identiques dans tous les référentiels. En relativité restreinte, pour des mouvements dont la vitesse devient proche de la vitesse de la lumière, cette hypothèse est remise en cause.

4.1.3 Description d'un mouvement

À un référentiel, on associe un repère, puis un système de coordonnées et une base de projection, afin d'exprimer les grandeurs cinématiques.

Les grandeurs cinématiques permettent la description du mouvement d'un point matériel M dans un repère d'origine O :

Vecteur position	\overrightarrow{OM}
Vecteur vitesse	$v = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$
Vecteur accélération	$a = \frac{dv}{dt}$

La trajectoire est l'ensemble des positions successives de M au cours du temps. Le vecteur vitesse est tangent à la trajectoire en chaque point.

Mouvement	Propriétés
Rectiligne	La trajectoire est une droite La direction du vecteur vitesse reste constante
Circulaire	La trajectoire est un cercle
Uniforme	La norme du vecteur vitesse reste constante
Rectiligne uniforme	Le vecteur vitesse reste constant

4.1.4 Mouvement de vecteur accélération constant

La trajectoire d'un objet soumis à un vecteur accélération constant est parabolique.

4.1.5 Mouvement circulaire

Un mouvement circulaire de rayon R est décrit dans un repère dont l'origine est le centre de la trajectoire, en utilisant les coordonnées polaires (R, θ) .

La vitesse angulaire $\omega = \dot{\theta}$ est définie par la quantité d'angle parcouru par unité de temps. Elle s'exprime en rad.s^{-1} . On a la relation entre vitesse v et vitesse angulaire ω :

$$v = R\omega$$

L'accélération présente en général deux composantes :

$$a = a_{\perp} \vec{u}_r + a_{\parallel} \vec{u}_{\theta}$$

a_{\perp} est la composante radiale (ou normale à la trajectoire), et a_{\parallel} est la composante orthoradiale (ou tangentielle à la trajectoire).

$$a_{\perp} = -\frac{v^2}{R} = -R\omega^2$$

$$a_{\parallel} = \frac{dv}{dt}$$

La composante radiale de l'accélération influe sur la courbure de la trajectoire. Elle change donc la direction du vecteur vitesse sans modifier sa norme.

La composante orthoradiale de l'accélération influe sur la variation temporelle de la vitesse. Elle change donc la norme du vecteur vitesse sans modifier sa direction.

4.1.6 Mouvement curviligne plan

Pour un mouvement curviligne, l'accélération présente deux composantes qui s'expriment dans le repère de Frenet :

$$a = \frac{v^2}{R} \vec{u}_N + \frac{dv}{dt} \vec{u}_T$$

Les résultats signalés pour le mouvement circulaire se généralisent au mouvement curviligne plan :

- La composante normale à la trajectoire, portée par \vec{u}_N , influe sur la courbure de la trajectoire. La trajectoire s'incurve dans le sens de l'accélération normale. Si celle-ci est nulle à tout instant, le mouvement est rectiligne.

- La composante tangentielle à la trajectoire, portée par \vec{u}_T , influe sur la variation temporelle de la vitesse. Si celle-ci est nulle à tout instant, le mouvement est uniforme.

4.2 Dynamique

4.2.1 Grandeurs de la dynamique

La quantité de mouvement d'un point matériel est :

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

Pour un système de points matériels de masse totale m , ou pour un solide de masse m , la quantité de mouvement est :

$$\vec{p} = m\vec{v}_G$$

où G est le centre d'inertie du système.

Une force est une modélisation de l'action qu'exerce un système sur un autre système. Une force est définie par un vecteur et un point d'application.

4.2.2 Dynamique du point matériel : lois de Newton

Nom	Énoncé	Utilité
1ère loi : principe de l'inertie	Il existe une classe de référentiels privilégiés appelés référentiels galiléens dans lesquels tout point matériel isolé est animé d'un mouvement rectiligne uniforme.	Définir un référentiel galiléen
2ème loi : principe fondamental de la dynamique	Dans un référentiel galiléen : $\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum \vec{F}_i$	Déterminer les équations du mouvement
3ème loi : principe des actions réciproques	Pour deux points matériels en interaction : $\vec{F}_{B \rightarrow A} = -\vec{F}_{A \rightarrow B}$ avec $\vec{F}_{A \rightarrow B}$ et $\vec{F}_{B \rightarrow A}$ sur la même droite d'action (AB)	Faire le lien entre les forces qui s'exercent entre deux systèmes

4.2.3 Dynamique d'un système de points matériels ou d'un solide : théorème du centre d'inertie

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum \vec{F}_{ext,i}$$

L'étude du mouvement global se réduit à celui du centre d'inertie du système.

4.2.4 Expressions de forces courantes

Force	Expression	Remarque
Force gravitationnelle (ou loi de la gravitation universelle)	$F_{A \rightarrow B}^{\vec{}} = -G \frac{m_A m_B}{AB^2} u_{AB}^{\vec{}}$	Interaction attractive
Poids	$\vec{P} = m\vec{g}$	Le point d'application est le centre d'inertie du système
Force électrostatique (ou loi de Coulomb)	$F_{A \rightarrow B}^{\vec{}} = \frac{q_A q_B}{4\pi\epsilon_0 AB^2} u_{AB}^{\vec{}}$	Interaction attractive ou répulsive selon le signe des charges
Force de rappel d'un ressort	$\vec{F} = -k(\ell - \ell_0)\vec{u}$	\vec{u} est orienté du point d'attache vers la masse
Poussée d'Archimède	$\vec{\Pi} = -\rho_{\text{fluide}} V_{\text{immergé}} \vec{g}$	Le point d'application est le centre de carène
Force de frottement visqueux	$f = -\lambda \vec{v}$	Valide pour de « petites » vitesses
Force de frottement turbulent	$f = -\mu \ \vec{v}\ \vec{v}$	Valide pour de « grandes » vitesses

4.2.5 Lois de Coulomb

Les lois de Coulomb décrivent les actions de contact entre un point matériel et un support. On appelle la vitesse de glissement $\vec{v}_g = \vec{v}(M) - \vec{v}(\text{support})$ la vitesse relative du point matériel par rapport au support.

	Condition cinématique	Condition dynamique
Pas de glissement	$\vec{v}_g = \vec{0}$	$\ \vec{R}_T\ < \mu_s \ \vec{R}_N\ $
Glissement	\vec{v}_g opposé à \vec{R}_T	$\ \vec{R}_T\ = \mu_d \ \vec{R}_N\ $

4.3 Approche énergétique de la mécanique du point

4.3.1 Grandeurs énergétiques

Énergie cinétique :

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2$$

Puissance d'une force :

$$\mathcal{P}(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

Travail élémentaire d'une force :

$$\delta W(\vec{F}) = \mathcal{P}(\vec{F})dt = \vec{F} \cdot d\vec{OM}$$

4.3.2 Champ de force conservative – énergie potentielle

Une force \vec{F} est un champ de force conservative (aussi appelée force conservative) si celle-ci ne dépend que de la position du point matériel, et qu'il existe une énergie potentielle E_p associée à cette force, ne dépendant que de la position du point matériel, telle que :

$$\delta W(\vec{F}) = -dE_p$$

Le gradient d'un champ scalaire $f(M)$ est le champ vectoriel noté $\vec{\nabla}(f)$ tel que :

$$df = \vec{\nabla}(f) \cdot d\vec{OM}$$

La force conservative dérive de son énergie potentielle :

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}(E_p)$$

L'énergie mécanique d'un point matériel est la somme de son énergie cinétique et des énergies potentielles associées aux forces conservatives s'exerçant sur ce point matériel :

$$E_m = E_c + \sum_i E_{p,i}$$

4.3.3 Théorèmes énergétiques

Théorème	...cinétique	...mécanique
...de la puissance...	$\sum_i \mathcal{P}(\vec{F}_i) = \frac{dE_c}{dt}$	$\sum_i \mathcal{P}(F_i(\vec{n}_c)) = \frac{dE_m}{dt}$
...de l'énergie...	$dE_c = \sum_i \delta W(\vec{F}_i)$	$dE_m = \sum_i \delta W(\vec{F}_{i,nc})$

4.3.4 Énergies potentielles courantes

Énergie potentielle de pesanteur :

$$E_p = mgz + \text{cste}$$

Énergie potentielle gravitationnelle créée par un astre ponctuel :

$$E_p = -\frac{Gm_1m_2}{r}$$

Énergie potentielle électrostatique créée par une charge ponctuelle :

$$E_p = \frac{q_1q_2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Énergie potentielle élastique :

$$E_p = \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2$$

4.3.5 Étude qualitative d'un mouvement conservatif

Un mouvement conservatif est un mouvement pour lequel l'énergie mécanique se conserve. L'énergie mécanique est une intégrale première du mouvement.

Pour un mouvement conservatif à un seul degré de liberté x , l'étude des trajectoires se déduit graphiquement de la courbe de l'énergie potentielle $E_p(x)$.

Les positions accessibles sont celles pour lesquelles $E_p(x) \leq E_m$. Lorsque l'ensemble des positions accessibles forme un intervalle fini $[x_1, x_2]$, on a un état lié, et le mouvement est périodique, en passant alternativement de x_1 à x_2 . Lorsque les positions accessibles vont jusqu'à l'infini, on a un état libre (ou de diffusion).

Graphiquement	Analytiquement
Position d'équilibre	Extremum de E_p $\frac{dE_p}{dx} = 0$
Stable	Minimum de E_p $\frac{d^2E_p}{dx^2} > 0$
Instable	Maximum de E_p $\frac{d^2E_p}{dx^2} < 0$

Au voisinage d'une position d'équilibre stable x_{eq} , l'énergie potentielle peut être assimilée à un potentiel harmonique. Les mouvements dans un potentiel harmonique sont ceux d'un oscillateur harmonique : on parle d'approximation harmonique. La période des oscillations est alors :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{\frac{d^2E_p}{dx^2}(x_{eq})}}$$

4.4 Mouvement de particules chargées

4.4.1 Force sur une particule chargée

Une particule de charge q en mouvement à la vitesse \vec{v} dans un champ électrique \vec{E} et un champ magnétique \vec{B} , mesurés dans un référentiel \mathcal{R} , est soumise à la force de Lorentz :

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

4.4.2 Effets des forces électrique et magnétique

La force électrique $\vec{F}_e = q\vec{E}$ peut faire varier la norme ou la direction du vecteur vitesse, donc l'énergie cinétique de la particule, tandis que la force magnétique $\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B}$ ne peut que faire varier la direction du vecteur vitesse.

La force électrique est utilisée pour accélérer ou ralentir une particule chargée.

La force magnétique permet de dévier la trajectoire d'une particule chargée. Comme elle est plus intense que la force électrique, il est plus facile de dévier la trajectoire avec un champ magnétique qu'avec un champ électrique.

On néglige toujours le poids et les forces gravitationnelles, qui sont très faibles devant les forces électrique et magnétique.

4.4.3 Conservation de l'énergie mécanique

Pour une particule de charge q , l'énergie potentielle électrostatique associée à la force électrique dans un champ électrique stationnaire \vec{E} a pour expression :

$$E_p = qV$$

V est le potentiel électrique rencontré en électrocinétique. Les relations entre potentiel électrique et champ électrique s'écrivent :

$$\begin{cases} \vec{E} = -\nabla V \\ \vec{E} \cdot d\vec{OM} = -dV \end{cases}$$

La force magnétique ne travaillant pas, l'énergie mécanique d'une particule soumise à la force de Lorentz se conserve :

$$E_m = \frac{1}{2}mv^2 + qV$$

4.4.4 Mouvements dans des champs électrique et magnétique stationnaires et uniformes

Le mouvement d'une particule chargée dans un champ électrique stationnaire et uniforme est un mouvement à vecteur accélération constant. La trajectoire est donc parabolique. Un champ électrique uniforme peut être obtenu à l'aide d'une tension U entre deux conducteurs face à face, séparés d'une distance d :

$$\|\vec{E}\| = \frac{U}{d}$$

Le mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique stationnaire et uniforme est circulaire uniforme. Si on note v_0 la norme de la vitesse de la particule, le rayon de la trajectoire est :

$$R = \frac{mv_0}{|q|B}$$

4.5 Théorème du moment cinétique

4.5.1 Axe orienté

Un axe orienté (Δ) est un axe défini par un vecteur unitaire \vec{u}_Δ colinéaire à cet axe. L'orientation de ce vecteur définit un sens de rotation positif autour de cet axe, donné par la règle de la main droite.

4.5.2 Théorème du moment cinétique

	Par rapport à un point O	Par rapport à un axe orienté (Δ)
Moment cinétique	$\vec{L}_O = O\vec{M} \wedge m\vec{v}$	$L_\Delta = \vec{L}_O \cdot \vec{u}_\Delta$ O est un point quelconque sur l'axe.
Moment d'une force	$\vec{M}_O(\vec{F}) = O\vec{M} \wedge \vec{F}$	$M_\Delta(\vec{F}) = \vec{M}_O \cdot \vec{u}_\Delta$
Théorème du moment cinétique	$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum \vec{M}_O(\vec{F}_i)$	$\frac{dL_\Delta}{dt} = \sum M_\Delta(\vec{F}_i)$

4.5.3 Orientations

Le sens du vecteur moment cinétique \vec{L}_O donne le sens de rotation du point matériel par la règle de la main droite. Le signe du moment cinétique scalaire L_Δ donne le sens de rotation du point matériel autour de l'axe de rotation, relativement au sens positif choisi par l'orientation de l'axe.

Le sens du vecteur moment d'une force $\vec{M}_O(\vec{F})$ indique dans quel sens cette force tend à faire tourner le point matériel, par application de la règle de la main droite. Le signe du moment scalaire d'une force indique dans quel sens cette force tend à faire tourner le point matériel autour de l'axe, relativement au sens positif choisi par l'orientation de l'axe.

4.5.4 Bras de levier

Le bras de levier permet de calculer le moment scalaire d'une force par rapport à un axe sans passer par un calcul de produit vectoriel. On procède en deux temps :

1. Calculer la norme du moment de la force \vec{F} par le produit $\|\vec{F}\|d$, avec d le bras de levier (distance entre la droite d'action de la force et l'axe de rotation).
2. Déterminer le signe par le sens physique, en observant dans quel sens la force tend à faire tourner le point matériel.

4.6 Forces centrales conservatives : lois de conservation

4.6.1 Force centrale

Soit O un point fixe dans un référentiel galiléen et M un point matériel. On appelle force centrale une force colinéaire au vecteur $O\vec{M}$ à tout instant.

Dans un mouvement à force centrale, le moment cinétique $\vec{L}_O(M)$ se conserve, ce qui a plusieurs conséquences :

- Le mouvement se déroule dans un plan perpendiculaire à $\vec{L}_O(M)$.
- Dans des coordonnées polaires centrées sur O , la grandeur $\mathcal{C} = r^2\dot{\theta}$ est constante : elle est appelée constante des aires.
- Le mouvement respecte la loi des aires : la vitesse aréolaire (aire balayée par unité de temps) est constante et vaut $\mathcal{C}/2$.

4.6.2 Force centrale conservative

Une force centrale conservative dérive d'une énergie potentielle :

$$\vec{F} = -\nabla E_p$$

En coordonnées polaires, on a la relation :

$$F(r) = -\frac{dE_p(r)}{dr}$$

Pour un mouvement à force centrale conservative, l'énergie mécanique se conserve. Cela permet de ramener l'étude du mouvement à un problème à un degré de liberté, en introduisant la notion d'énergie potentielle effective $E_{peff}(r)$:

$$E_{peff}(r) = \frac{1}{2}m\mathcal{C}^2\frac{1}{r^2} + E_p(r)$$

L'expression de $E_{peff}(r)$ permet de discuter graphiquement les mouvements possibles pour le point matériel (états libres ou liés). Toutes les valeurs de r telles que l'énergie potentielle effective est inférieure à l'énergie mécanique sont possibles.

Il convient de se souvenir que le mouvement réel est bien un mouvement à deux degrés de liberté r et θ . Mais ces deux grandeurs sont liées par la constante des aires $\mathcal{C} = r^2\dot{\theta}$.

4.6.3 Exemples

Nature de la force centrale	Énergie potentielle effective	Nature des mouvements
Force de rappel d'un ressort	$E_{peff}(r) = \frac{1}{2}m\mathcal{C}^2\frac{1}{r^2} + \frac{1}{2}k(r - \ell_0)^2$	État lié
Force gravitationnelle exercée par une masse fixe M	$E_{peff}(r) = \frac{1}{2}m\mathcal{C}^2\frac{1}{r^2} - \frac{GM_0m}{r}$	E_m minimale : état lié et trajectoire circulaire $E_m < 0$: état lié et trajectoire elliptique $E_m = 0$: état libre et trajectoire parabolique $E_m > 0$: état libre et trajectoire hyperbolique
Force électrostatique exercée par une charge fixe Q	$E_{peff}(r) = \frac{1}{2}m\mathcal{C}^2\frac{1}{r^2} + \frac{Q_0q}{4\pi\epsilon_0 r}$	Si q et Q_0 de signes opposés : E_m minimale : état lié et trajectoire circulaire $E_m < 0$: état lié et trajectoire elliptique $E_m = 0$: état libre et trajectoire parabolique $E_m > 0$: état libre et trajectoire hyperbolique Si q et Q_0 de même signe : état libre et trajectoire hyperbolique

4.7 Forces centrales conservatives : planètes et satellites

4.7.1 Mouvements dans le champ gravitationnel

Une force newtonienne est une force centrale conservative de la forme :

$$\vec{F} = -\frac{K}{r^2}\vec{u}_r$$

Un potentiel newtonien est l'énergie potentielle associée à cette force conservative :

$$E_p = -\frac{K}{r}$$

La force de gravitation et la force électrostatique sont les deux principaux exemples de forces newtoniennes.

Les états liés d'un point matériel soumis à une force newtonienne correspondent à des trajectoires circulaires ou elliptiques. L'énergie mécanique est négative et vaut :

$$E_m = -\frac{K}{2a}$$

où a est le demi-grand axe de l'ellipse. Dans le cas d'une trajectoire circulaire, a s'identifie au rayon de la trajectoire.

4.7.2 Lois de Kepler

Les lois de Kepler décrivent les trajectoires des planètes autour du Soleil. Dans la mesure où elles sont caractéristiques des états liés d'un point matériel soumis à une force newtonienne, elles se généralisent – entre autres – aux trajectoires des satellites autour de leur planète.

- 1ère loi : loi des orbites

Les planètes du système solaire décrivent des trajectoires elliptiques dont le Soleil occupe l'un des foyers.

- 2ème loi : loi des aires

Les aires balayées par le segment [SP] (où S représente le Soleil et P une planète) pendant des intervalles de temps égaux sont égales.

- 3ème loi : loi des périodes

Soit T la période de révolution d'une planète autour du Soleil et a le demi-grand axe de sa trajectoire elliptique. Alors :

$$\frac{T^2}{a^3} = \text{cste}$$

la constante étant la même pour toutes les planètes du système solaire.

4.7.3 Trajectoire circulaire

Dans le cas d'une trajectoire circulaire de rayon R d'une planète (resp. un satellite) de masse m autour du Soleil (resp. d'une planète) de masse M_0 , la vitesse est uniforme :

$$v = \sqrt{\frac{GM_0}{R}}$$

On peut alors déterminer la constante de la 3ème loi de Kepler :

$$\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{GM_0}$$

4.7.4 Satellites terrestres

Un satellite géostationnaire est un satellite qui reste constamment au-dessus d'un même point de la surface terrestre. Cela implique que :

- le satellite est dans le plan de l'équateur
- sa vitesse angulaire de rotation est égale à celle de la Terre
- sa trajectoire est circulaire
- son altitude au-dessus de la surface de la Terre est d'environ 36000 km.

	Orbites basses (inférieur à 2000 km)	Orbites moyennes	Orbite géostationnaire (36000 km)
Satellites de télécommunication	Téléphone satellite		Télévision
Satellites d'observation	Météo, environnement		Météo
Satellites de localisation		GPS	
Satellites scientifiques	Télescopes, ISS...		

4.7.5 Vitesses cosmiques

La première vitesse cosmique (ou vitesse en orbite basse) est la vitesse que doit posséder un satellite pour occuper une orbite circulaire proche de la surface de la Terre :

$$v_1 = \sqrt{\frac{GM_T}{RT}}$$

La seconde vitesse cosmique (ou vitesse de libération) est la vitesse que doit avoir un satellite pour quitter l'attraction gravitationnelle à partir du sol :

$$v_2 = \sqrt{\frac{2GM_T}{RT}} = \sqrt{2}v_1$$

4.8 Solide en rotation autour d'un axe fixe

4.8.1 Mouvements d'un solide

Un solide est en translation si pour deux points quelconques A et B de ce solide, le vecteur \vec{AB} reste constant au cours du mouvement.

Un solide est en rotation autour d'un axe fixe (Δ) si l'axe (Δ) est fixe à la fois dans le référentiel d'étude et dans le référentiel lié au solide. On peut définir la vitesse angulaire ω de rotation du solide autour de l'axe (Δ) .

Trajectoires des points du solide	Vitesse des points du solide
Translation	Identiques mais décalées les unes par rapport aux autres d'un vecteur constant Toutes égales à un instant donné
Rotation autour d'un axe fixe	Circulaires Dépend de la distance r à l'axe de rotation : $v = r\omega$

4.8.2 Moment cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe fixe

Le moment cinétique L_Δ d'un solide en rotation autour d'un axe fixe (Δ) est proportionnel à la vitesse angulaire de rotation du solide ω :

$$L_\Delta = J_\Delta \omega$$

J_Δ est le moment d'inertie du solide. Il est d'autant plus important que la masse du solide est située loin de l'axe de rotation.

4.8.3 Moment d'une force s'exerçant sur le solide

Une force \vec{F} de point d'application P a un moment scalaire par rapport à l'axe de rotation (Δ) :

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = (\vec{HP} \wedge \vec{F}) \cdot \vec{u}_\Delta$$

avec H projeté orthogonal de P sur l'axe. Lorsque la force est dans un plan perpendiculaire à l'axe de rotation, le calcul du moment se fait préférentiellement par la méthode du bras de levier.

4.8.4 Couple de forces

Un couple de forces est un ensemble de forces s'exerçant sur un solide en rotation autour d'un axe fixe (Δ) , dont la somme vectorielle est nulle, mais dont la somme des moments est non nulle. Cette somme des moments est appelée couple, et se note Γ_Δ . En particulier, un solide en rotation autour d'un axe fixe est en contact avec cet axe grâce à une liaison pivot. Cette liaison crée en général un couple résistant en raison des forces de frottement qui s'exercent au niveau du contact entre le solide et l'axe. Si la liaison pivot est parfaite, ce couple est nul.

4.8.5 Théorème du moment cinétique

Pour un solide en rotation autour d'un axe fixe dans un référentiel galiléen, soumis à des forces extérieures \vec{F}_i et des couples extérieurs $\Gamma_{j\Delta}$:

$$\frac{dL_\Delta}{dt} = \sum_i \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}_i) + \sum_j \Gamma_{j\Delta}$$

4.8.6 Approche énergétique du mouvement de rotation d'un solide autour d'un axe fixe

L'énergie cinétique de rotation d'un solide autour d'un axe fixe (Δ) a pour expression :

$$E_c = \frac{1}{2} J_\Delta \omega^2$$

Les puissances d'une force ou d'un couple sur un solide en rotation autour d'un axe fixe ont pour expression :

$$\mathcal{P}(\vec{F}) = \mathcal{M}_\Delta(\vec{F})\omega$$

$$\mathcal{P}(\Gamma_\Delta) = \Gamma_\Delta \omega$$

Le théorème de la puissance cinétique pour un solide en rotation autour d'un axe fixe est similaire à celui rencontré pour le point matériel, en rajoutant la puissance des couples.

$$\frac{dE_c}{dt} = \sum_i \mathcal{P}(\vec{F}_i) + \sum_j \mathcal{P}(\Gamma_{j\Delta})$$

4.8.7 Équilibre d'un solide

Un solide est à l'équilibre si :

$$\begin{cases} \sum_i \vec{F}_i = \vec{0} \\ \sum_i \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}_i) + \sum_j \Gamma_{j\Delta} = 0 \end{cases} \quad \text{pour tout axe } (\Delta)$$

4.8.8 Système déformable

Pour un système déformable, le travail des forces intérieures est non nul. Ce travail doit être pris en compte dans le bilan énergétique du système. Ainsi, le théorème du moment cinétique pour un système déformable a pour expression :

$$dE_c = \sum_i \delta W(\vec{F}_{i,\text{ext}}) + \sum_j \delta W(\vec{F}_{j,\text{int}})$$

5 Thermodynamique

5.1 Système thermodynamique à l'équilibre

5.1.1 Généralités

Un système thermodynamique est un système d'échelle macroscopique décrit par des variables d'état, qui traduisent les comportements moyens des molécules à l'échelle microscopique. Un tel système est à l'équilibre thermodynamique lorsque ses variables d'état sont définies et constantes dans le temps.

À l'échelle microscopique, les molécules en mouvement désordonné sont caractérisées par leur libre parcours moyen, distance moyenne parcourue entre deux chocs successifs. L'échelle mésoscopique est une échelle très grande devant l'échelle microscopique, de telle sorte que des variables d'état peuvent être définies par des moyennes statistiques, mais très petite devant l'échelle macroscopique, de telle sorte que le système reste homogène à cette échelle.

La pression p est une variable d'état qui traduit la force \vec{F}_p qu'exercent les molécules sur une paroi de surface S_{ext} :

$$\vec{F}_p = p\vec{S}_{ext}$$

La température T est une variable d'état qui traduit l'énergie cinétique moyenne des molécules. On parle à ce titre d'agitation thermique.

L'énergie interne U est l'énergie moyenne d'un système macroscopiquement au repos, qui contient deux termes : l'énergie cinétique de l'ensemble des molécules et les énergies potentielles associées aux molécules et à leurs interactions.

5.1.2 Gaz parfait

Un gaz parfait est un modèle de gaz pour lequel les molécules sont ponctuelles, et n'ont aucune interaction les unes avec les autres. Son équation d'état est :

$$pV = nRT$$

La densité moléculaire n^* (nombre de molécules par unité de volume) et la vitesse quadratique moyenne $u = \sqrt{v^2}$ (racine de la valeur moyenne des carrés des vitesses de l'ensemble des molécules), permettent d'exprimer la pression cinétique p d'un gaz parfait constitué de molécules de masses m^* :

$$p = \frac{1}{3}m^* n^* u^2$$

La température cinétique T d'un gaz parfait est directement reliée à l'énergie cinétique moyenne des molécules :

$$\langle E_c \rangle = \frac{1}{2}m^* u^2 = \frac{3}{2}k_b T$$

avec k_b la constante de Boltzmann.

L'énergie interne molaire d'un gaz parfait ne dépend que de la température (première loi de Joule). On dispose de deux expressions selon le caractère mono ou diatomique des molécules :

	Énergie interne U	Capacité thermique molaire à volume constant C_v
Gaz parfait monoatomique	$\frac{3}{2}nRT$	$\frac{3}{2}nR$
Gaz parfait diatomique aux températures usuelles	$\frac{5}{2}nRT$	$\frac{5}{2}nR$

5.1.3 Phase condensée incompressible et indilatable

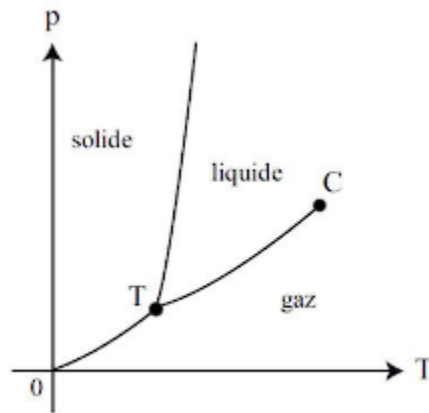
Une phase condensée incompressible et indilatable est un modèle pour un solide ou un liquide, qui considère que le volume molaire est indépendant de la pression et de la température. L'équation d'état est donc :

$$V_m = \frac{V}{n} = cste$$

L'énergie interne molaire d'une phase condensée incompressible et indilatable ne dépend que de la température.

5.1.4 Corps pur diphasé

Le diagramme d'état d'un corps pur, aussi appelé diagramme (P, T) , permet de connaître l'état physique du corps pur selon sa pression et sa température.

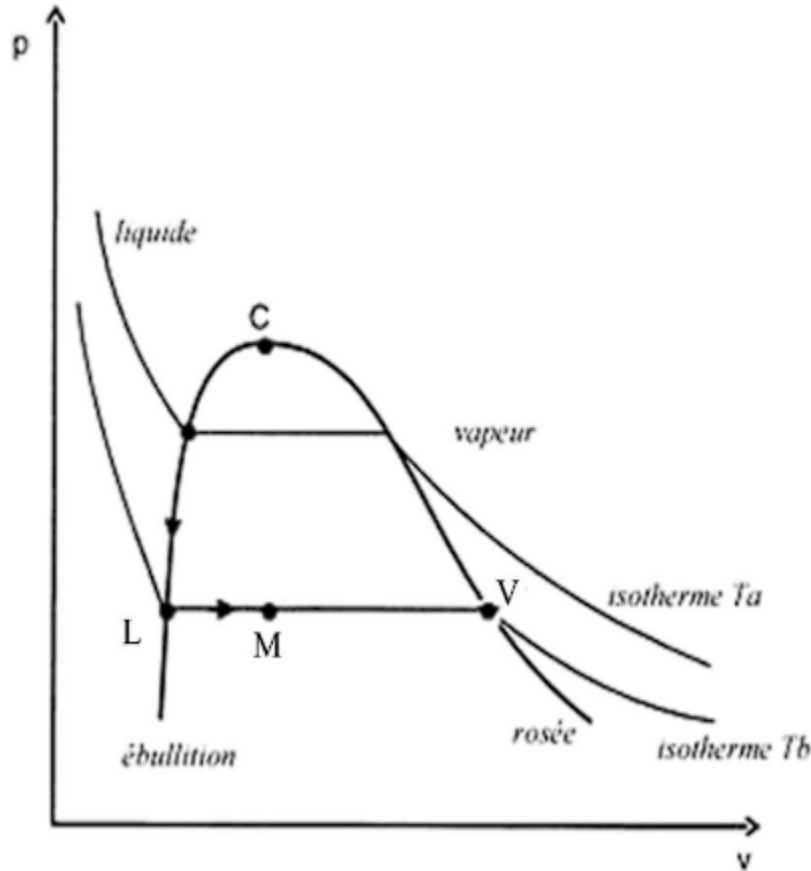


Un corps pur diphasé se trouve sur une des courbes d'équilibre du diagramme de phases (P, T) . Ainsi, lorsque la pression est fixée, la température l'est aussi, et inversement. La description de ce système nécessite cependant trois variables d'état : la pression (ou la température) d'équilibre des phases, ainsi que les quantités de chaque phase. Pour cela, on utilise les titres molaires ou massiques :

$$x_1 = \frac{n_1}{n_1 + n_2}$$

$$w_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_2}$$

L'équilibre liquide-vapeur peut être décrit dans un diagramme de Clapeyron (P, v). Sous la courbe de saturation (courbe en cloche) se trouve une zone d'équilibre liquide/vapeur. À une température d'équilibre T donnée du système diphasé, la pression est appelée pression de vapeur saturante $p_{sat}(T)$.



Pour un point M quelconque décrivant l'état du système diphasé sous la courbe de saturation, on peut déterminer graphiquement le titre massique en vapeur à l'aide du théorème des moments :

$$w_v = \frac{LM}{LV}$$

5.1.5 Équilibre liquide/vapeur de l'eau au contact de l'atmosphère

La possibilité d'un équilibre à la température T_0 entre l'eau liquide et sa vapeur présente dans l'air dépend de la pression partielle p_{H_2O} de la vapeur d'eau dans l'air et de la pression de vapeur saturante $p_{sat}(T_0)$ de l'eau à la température T_0 :

$p_{H_2O} = p_{sat}(T_0)$	Équilibre de l'eau liquide avec la vapeur d'eau dans l'air
$p_{H_2O} < p_{sat}(T_0)$	Évaporation de l'eau liquide
$p_{H_2O} > p_{sat}(T_0)$	Condensation de la vapeur d'eau

Si on a équilibre entre l'eau liquide et sa vapeur, on dit que l'air est saturé en eau. La plupart du temps, l'air n'est pas saturé en eau et l'eau liquide s'évapore. Pour quantifier le degré de saturation de l'air en vapeur d'eau, on définit l'humidité relative :

$$H = \frac{p_{H_2O}}{p_{sat}(T_0)}$$

5.2 Transformation d'un système thermodynamique

5.2.1 Vocabulaire

Une transformation d'un système thermodynamique est le passage d'un état d'équilibre à un nouvel état d'équilibre sous l'effet d'une action extérieure.

Une transformation est dite quasistatique lorsque le système passe par une succession d'états d'équilibre infiniment voisins au cours de la transformation.

Une transformation est :

- isochore si elle s'effectue à volume du système constant.
- isobare si elle s'effectue à pression du système constante
- isotherme si elle s'effectue à température du système constante
- monobare si elle s'effectue à pression extérieure constante
- monotherme si elle s'effectue à température extérieure constante

Le travail W est l'énergie échangée avec un système par le biais de forces à l'échelle macroscopique. Le transfert thermique Q est l'énergie échangée au travers de phénomènes à l'échelle microscopique.

Nature de la transformation	Travail élémentaire	Travail
quelconque	$\delta W = - P_{ext}dV$	$\int_{V_i}^{V_f} -P_{ext}dV$
isochore	$\delta W = 0$	$W = 0$
monobare	$\delta W = - P_{ext}dV$	$W = -P_{ext}(V_f - V_i)$
quasistatique	$\delta W = - PdV$	$\int_{V_i}^{V_f} -PdV$

Pour une transformation quasistatique, on peut représenter l'état du système au cours de la transformation dans un diagramme de Clapeyron. Lorsque la transformation est cyclique, l'aire du cycle est égale, en valeur absolue, au travail des forces de pression :

- si le cycle est parcouru dans le sens horaire, $W < 0$: cycle moteur
- si le cycle est parcouru dans le sens trigonométrique, $W > 0$: cycle récepteur

5.2.2 Transfert thermique

Le transfert thermique peut s'effectuer selon trois processus :

- la conduction thermique : il s'agit d'un transfert d'énergie de proche en proche par chocs entre molécules voisines qui échangent de l'énergie cinétique. Le milieu est globalement au repos.
- La convection thermique : il s'agit d'un transfert d'énergie lié au mouvement global du fluide. Le brassage du fluide permet une mise en contact des parties du système ayant des températures différentes, qui échangent ainsi leur énergie.
- La convection thermique : il s'agit d'un transfert d'énergie lié au mouvement global du fluide. Le brassage du fluide permet une mise en contact des parties du système ayant des températures différentes, qui échangent ainsi leur énergie.

Une transformation est adiabatique si le transfert thermique échangé entre le système et l'extérieur est nul au cours de la transformation.

Un thermostat est un système dont la température reste constante, bien qu'il puisse échanger du transfert thermique avec l'extérieur.

5.3 Premier principe de la thermodynamique

5.3.1 Énoncés du premier principe

L'énergie interne U associée à un système fermé est une fonction d'état extensive, telle que pour toute transformation de ce système, au cours de laquelle il reçoit des travaux mécaniques W et des transferts thermiques Q :

$$\Delta E = \Delta E_c + \Delta U = W + Q$$

Ce bilan énergétique peut se réécrire, dans le cas d'un système macroscopiquement au repos :

$$\Delta U = W + Q$$

L'enthalpie H est une fonction d'état extensive dont l'expression est :

$$H = U + PV$$

Au cours d'une transformation monobare, avec équilibre mécanique à l'état initial et à l'état final, et en l'absence d'autre travaux que ceux des forces de pression, le premier principe se réécrit :

$$\Delta H = Q$$

5.3.2 Propriétés des deux systèmes modèles

Pour un gaz parfait ou une phase condensée idéale, l'énergie interne U et l'enthalpie H ne dépendent que de la température T . Dans ces deux cas, on définit les capacités thermiques :

- à volume constant : $C_v = \frac{dU}{dT}$
- à pression constant : $C_p = \frac{dH}{dT}$

Pour un gaz parfait, les variations d'énergie interne s'écrivent en fonction des capacités thermiques :

$$\Delta U = C_v \Delta T \text{ et } \Delta H = C_p \Delta T$$

Pour la phase condensée idéale, les deux capacités thermiques sont égales :

$$C_v = C_p = C$$

$$\Delta U = \Delta H = C \Delta T$$

Pour le gaz parfait, on définit le coefficient de Laplace :

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v}$$

On peut ainsi réécrire les capacités thermiques du gaz parfait en fonction de ce coefficient :

	Capacité thermique
à volume constant	$C_v = \frac{nR}{\gamma-1}$
à pression constante	$C_p = \frac{\gamma nR}{\gamma-1}$

5.3.3 Lois de Laplace

Lors de la transformation adiabatique quasistatique d'un gaz parfait, le système obéit aux lois de Laplace :

$$\begin{cases} PV^\gamma = cste \\ TV^{\gamma-1} = cste \\ P^{1-\gamma} T^\gamma = cste \end{cases}$$

5.3.4 Changement d'état

Au cours du changement d'état d'un corps pur, on définit l'enthalpie massique de changement d'état $\Delta_{1-2}h(T)$, qui est la variation d'enthalpie du système au cours de la transformation isobare d'un kilogramme de ce corps pur de l'état 1 à l'état 2 à la température T . Elle est aussi appelée chaleur latente.

5.4 Second principe de la thermodynamique

Une transformation est réversible si elle est quasistatique, et que l'inversion du sens des contraintes imposées au système conduit à une inversion du sens de la transformation. Sinon, elle est irréversible.

5.4.1 Énoncé du second principe

À tout système fermé, on peut associer une fonction d'état extensive, appelée entropie S , telle que lors d'une transformation au contact de N thermostats de températures T_i :

$$\Delta S = S_e + S_c$$

S_e est l'entropie échangée au cours de la transformation avec les thermostats, qui fournissent chacun un transfert thermique Q_i au système :

$$S_e = \sum_{i=1}^N \frac{Q_i}{T_i}$$

S_c est l'entropie créée, qui est toujours positive. Elle est strictement positive pour une transformation irréversible, et elle est nulle pour une transformation réversible :

$$S_c > 0 \text{ si irréversible}$$

$$S_c = 0 \text{ si réversible}$$

Le second principe est un principe d'évolution : il permet de savoir si une transformation est possible ou pas, en affirmant que toute transformation possible est telle que l'entropie créée est positive.

Une transformation adiabatique réversible est isentropique. En particulier, toute transformation isentropique d'un gaz parfait respecte les lois de Laplace.

5.4.2 Changement d'état

Au cours du changement d'état d'un corps pur, on définit l'entropie massique de changement d'état $\Delta_{1-2}s(T)$, qui est la variation d'entropie du système au cours de la transformation isobare d'un kilogramme de ce corps pur de l'état 1 à l'état 2 à la température T . Elle est liée à l'enthalpie massique de changement d'état par la relation :

$$\Delta_{1-2}s(T) = \frac{\Delta_{1-2}h(T)}{T}$$

5.4.3 Entropie et désordre

L'entropie est une fonction d'état qui quantifie le désordre d'un système thermodynamique. Pour un système isolé, l'entropie statistique peut être exprimée par la relation :

$$S = k_B \ln \Omega$$

k_B est la constante de Boltzmann, et Ω est le nombre de complexions, c'est-à-dire le nombre de microétats possibles pour un même macroétat.

5.5 Machines thermiques

Une machine thermique ditherme est un système thermodynamique qui effectue une transformation cyclique au contact d'une source chaude de température T_c et d'une source froide de température T_f .

Premier principe

$$W + Q_c + Q_f = 0$$

Second principe (inégalité de Clausius)

$$\frac{Q_c}{T_c} + \frac{Q_f}{T_f} \leq 0$$

Un moteur thermique ditherme reçoit du transfert thermique de la source chaude qu'il convertit pour partie en travail mécanique, pour partie en transfert thermique cédé à la source froide. Un moteur à essence, une centrale nucléaire ou une turbine à combustion fonctionnent selon le principe d'un moteur ditherme.

Une machine frigorifique ou une pompe à chaleur reçoivent du travail mécanique pour prélever du transfert thermique à la source froide et le céder à la source chaude. Il s'agit de machines en écoulement stationnaire conçues selon le circuit suivant :

	Moteur	Machine frigorifique	Pompe à chaleur
Finalité	Produire du travail mécanique	Refroidir la source froide	Réchauffer la source chaude
Travail	$W < 0$	$W > 0$	$W > 0$
Transferts thermiques	$Q_c > 0, Q_f < 0$	$Q_c < 0, Q_f > 0$	$Q_c < 0, Q_f > 0$
Rendement / Efficacité	$\eta = -\frac{W}{Q_c}$	$e = \frac{Q_f}{W}$	$e = \frac{-Q_c}{W}$
Rendement / Efficacité de Carnot	$\eta_C = 1 - \frac{T_f}{T_c}$	$e_C = \frac{T_f}{T_c - T_f}$	$e_C = \frac{T_c}{T_c - T_f}$
Ordres de grandeur pour des machines réelles	$\eta \approx 0,3$ à $0,4$ (centrale nucléaire, moteur à essence), $\eta \approx 0,6$ (cycle combiné)	$e \approx 4$ à 8 (réfrigérateur)	$e \approx 2$ à 5 (PAC aérothermique), $e \approx 5$ à 8 (PAC géothermique)

Pour une machine thermique en écoulement stationnaire, le premier principe sur un organe de cette machine, envisagé comme un système ouvert présentant une entrée et une sortie, s'écrit sous la forme d'un premier principe industriel :

$$\Delta h = w_u + q$$

Δh est la variation d'enthalpie massique du fluide entre l'entrée et la sortie de l'organe de la machine

w_u est le travail utile massique échangé avec le fluide lors de son passage dans l'organe de la machine. Il est lié à la présence éventuelle de parties mobiles dans l'organe en question (turbine, pompe...)

q est le transfert thermique massique échangé avec le fluide lors de son passage dans l'organe de la machine.

En introduisant le débit massique $D_m = \frac{\delta m}{dt}$ du fluide en écoulement dans la machine, on peut réécrire le premier principe industriel comme un bilan de puissance :

$$D_m \Delta h = \mathcal{P}_u + \mathcal{P}_{th}$$

$\mathcal{P}_u = D_m w_u$ et $\mathcal{P}_{th} = D_m q$ sont respectivement la puissance utile et la puissance thermique échangées avec le fluide lors de son passage dans l'organe de la machine.

Le premier principe industriel permet d'effectuer des bilans énergétiques sur chaque organe de la machine et ainsi de calculer les travaux utiles et transferts thermiques. Pour connaître les variations d'enthalpie massique, on représente le cycle effectué dans le diagramme (P, h) du fluide caloporteur, également appelé diagramme des frigoristes.

5.6 Statique des fluides

5.6.1 Équation locale de la statique des fluides

Une particule de fluide est un volume $\delta\tau$ mésoscopique permettant de définir à l'échelle locale des grandeurs intensives dans le fluide (pression, température, masse volumique).

Une particule de fluide est soumise à des forces volumiques (s'exerçant sur tout son volume) et des forces surfaciques (s'exerçant sur sa surface). À une force volumique $d\vec{F}$ est associée une densité volumique de force f telle que :

$$d\vec{F} = f\delta\tau$$

La force de pesanteur est une force volumique à laquelle est associée la densité volumique de force de pesanteur :

$$\vec{f}_g = \rho g$$

Les forces de pression surfaciques peuvent être ramenées à une force volumique équivalente. La densité volumique des forces de pression a pour expression :

$$\vec{f}_P = -\nabla P$$

L'équation locale de la statique des fluides traduit l'équilibre du fluide dans le champ de pesanteur :

$$\nabla P = \rho g$$

Dans le champ de pesanteur uniforme, l'équation locale de la statique des fluides s'écrit, en fonction de l'altitude z croissante :

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g$$

5.6.2 Intégration de l'équation locale

Dans un liquide, la masse volumique ρ peut être considérée comme constante. On obtient alors la loi de pression en fonction de la profondeur z depuis la surface de pression P_0 :

$$P(z) = P_0 + \rho g z$$

Dans l'atmosphère, la masse volumique évolue avec l'altitude. Dans le cadre du modèle de l'atmosphère isotherme (air au repos assimilé à un gaz parfait, température T_0 constante, masse molaire de l'air M_{air} constante), la pression s'écrit en fonction de l'altitude z :

$$P(z) = P(z=0) \exp\left(-\frac{M_{air} g z}{RT_0}\right)$$

5.6.3 Résultante des forces de pression

La résultante des forces de pression d'un fluide sur un solide s'obtient en intégrant toutes les forces de pression élémentaires sur la surface S de contact entre le fluide et le solide :

$$\vec{F}_p = \iint_S P d\vec{S}$$

Dans le cas particulier où toute la surface du solide de volume V est en contact avec le fluide de masse volumique ρ_f , alors la résultante des forces de pression se ramène à la poussée d'Archimède :

$$\vec{\Pi} = -\rho_f V g$$

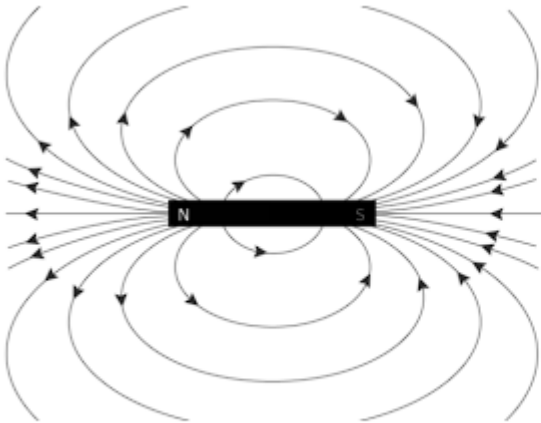
6 Induction

6.1 Champ magnétique

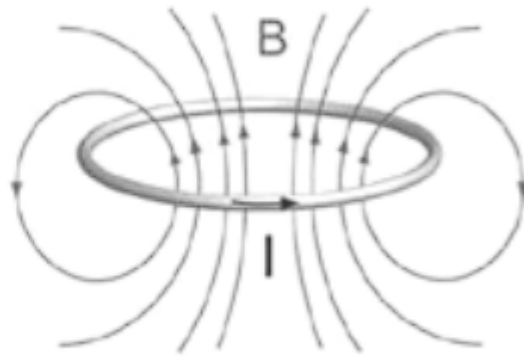
Un champ magnétique \vec{B} peut être produit par :

- un aimant
- un circuit électrique parcouru par un courant

La représentation d'un champ magnétique passe par le tracé des lignes de champ : ce sont des courbes tangentes en tout point au vecteur \vec{B} , et orientées dans le sens de \vec{B} . L'ensemble des lignes de champ forme une carte de champ.



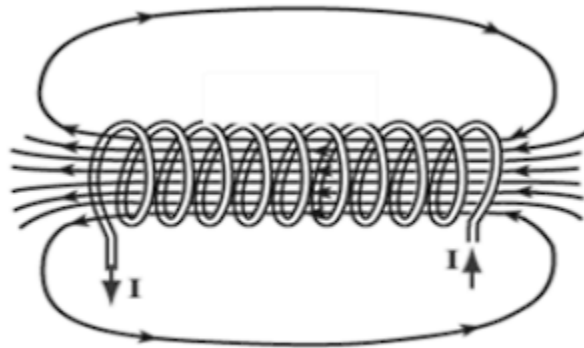
Carte de champ d'un **aimant droit**



Carte de champ d'une **spire circulaire**

Pour un aimant, les lignes de champ sont orientées du pôle Nord vers le pôle Sud de l'aimant. Pour une boucle de courant, les lignes de champ sont orientées par le sens du courant selon la règle de la main droite.

L'intensité du champ magnétique est proportionnelle à l'intensité du courant qui parcourt une spire. Pour augmenter le champ magnétique, on peut augmenter le nombre de spires, ce qui forme une bobine longue, aussi appelée solénoïde.



Carte de champ d'une **bobine longue**

6.1.1 Lecture d'une carte de champ magnétique

- L'intensité du champ magnétique augmente lorsque les lignes de champ se resserrent.
- L'intensité du champ magnétique diminue lorsque les lignes de champ s'écartent.
- Le champ magnétique est uniforme lorsque les lignes de champ sont parallèles.

6.1.2 Symétries et invariances du champ magnétique

L'étude des symétries et des invariances de la distribution de courant à l'origine du champ magnétique permet de déterminer la forme du champ magnétique :

- Les symétries permettent de déterminer l'orientation de \vec{B} .
- Les invariances permettent de déterminer les coordonnées dont dépend \vec{B} .

Sur un plan de symétrie de la distribution de courant, le champ magnétique est perpendiculaire à ce plan.

Sur un plan d'antisymétrie de la distribution de courant, le champ magnétique appartient à ce plan.

6.1.3 Moment magnétique

Le moment magnétique $\vec{\mu}$ d'une boucle de courant plane, de surface S et parcourue par un courant I a pour expression :

$$\vec{\mu} = I\vec{S}$$

\vec{S} est orienté perpendiculairement au plan de la boucle, dans le sens donné par l'orientation arbitraire du courant dans la boucle (règle de la main droite).

Par analogie, on définit le moment magnétique d'un aimant de son pôle Sud vers son pôle Nord. Son ordre de grandeur est de 10 A.m^2 .

6.2 Actions d'un champ magnétique extérieur

6.2.1 Force de Laplace

Une portion élémentaire $d\vec{l}$ d'un fil conducteur parcouru par un courant i , soumis à un champ magnétique extérieur \vec{B} subit la force élémentaire de Laplace :

$$d\vec{F}_L = i d\vec{l} \wedge \vec{B}$$

$d\vec{l}$ est orienté dans le même sens que i .

6.2.2 Couple magnétique

Pour un moment magnétique $\vec{\mu}$ (boucle de courant plane ou aimant) en rotation autour d'un axe fixe, le champ magnétique extérieur exerce un couple magnétique :

$$\Gamma = \vec{\mu} \cdot \vec{B}$$

L'effet de ce couple est d'aligner le moment magnétique dans le même sens que le champ magnétique extérieur. C'est grâce à ce couple qu'une boussole s'oriente dans le sens du champ magnétique terrestre. On peut associer une énergie potentielle E_p au couple magnétique :

$$E_p = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$$

Cette énergie potentielle met en évidence deux positions d'équilibre pour le moment magnétique :

- $\vec{\mu}$ et \vec{B} sont colinéaires et de même sens : $E_p = -\mu B$ est minimale : il s'agit d'une position d'équilibre stable.
- $\vec{\mu}$ et \vec{B} sont colinéaires et de sens opposés : $E_p = \mu B$ est maximale : il s'agit d'une position d'équilibre instable.

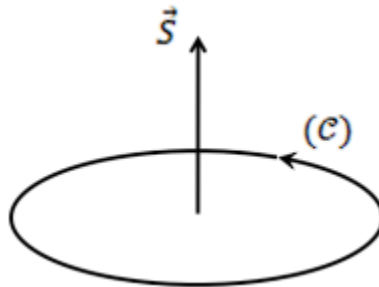
6.2.3 Champ magnétique tournant

Avec deux bobines perpendiculaires ou trois bobines situées aux sommets d'un triangle équilatéral, alimentées par des courants sinusoïdaux, on peut créer un champ magnétique tournant à l'intersection des axes des bobines. Du fait du couple magnétique, on peut mettre en rotation un moment magnétique qui tend à s'aligner sur le champ magnétique tournant : c'est le principe du moteur synchrone.

6.3 Lois de l'induction

6.3.1 Contour fermé orienté

Un contour fermé orienté (\mathcal{C}) est une courbe plane présentant un sens conventionnel de parcours, auquel est associé un vecteur surface \vec{S} perpendiculaire au plan du contour, dont le sens est donné en fonction de l'orientation du contour selon la règle de la main droite :



6.3.2 Flux du champ magnétique

Le flux d'un champ magnétique uniforme à travers un contour fermé orienté a pour expression :

$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S}$$

6.3.3 Lois de l'induction

Le phénomène d'induction est l'apparition d'une force électromotrice dans un circuit sous l'effet d'une variation temporelle du flux du champ magnétique. Lorsque le circuit est fermé, cette force électromotrice conduit à l'apparition d'un courant induit dans le circuit.

La loi de Faraday permet de connaître la force électromotrice induite dans une spire conductrice :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt}$$

La force électromotrice induite est orientée dans le même sens que le contour orienté formé par la spire conductrice.

La loi de modération de Lenz affirme que les phénomènes d'induction s'opposent, par leurs effets, aux causes qui leur ont donné naissance.

6.4 Circuit fixe dans un champ magnétique dépendant du temps

6.4.1 Flux propre – flux extérieur – flux total

Le flux du champ magnétique au travers d'un circuit fermé, fixe et indéformable, peut avoir plusieurs origines :

- Le champ magnétique peut être produit par le circuit lui-même, si ce dernier est parcouru par un courant d'intensité I . On parle alors de flux propre ϕ_p . Le flux propre étant proportionnel à l'intensité I , on appelle inductance propre L le coefficient de proportionnalité :

$$\phi_p = LI$$

- Le champ magnétique peut être produit par une source autre que le circuit (aimant, autre circuit). On parle alors de flux extérieur ϕ_{ext} . Lorsque le champ magnétique provient d'un autre circuit parcouru par un courant I' , le flux extérieur est proportionnel à I' et on appelle inductance mutuelle M le coefficient de proportionnalité :

$$\phi_{ext} = MI'$$

Le flux total ϕ_{tot} est la somme du flux propre et du flux extérieur à travers le circuit :

$$\phi_{tot} = \phi_p + \phi_{ext}$$

6.4.2 Auto-induction

La variation du courant i dans un circuit fermé conduit à la variation du flux propre. Il apparaît, en vertu de la loi de Faraday, une force électromotrice auto-induite :

$$e = -\frac{d\phi_p}{dt} = -L\frac{di}{dt}$$

Selon la loi de modération de Lenz, cette force électromotrice provoque des courants induits qui s'opposent à la variation du courant dans le circuit : c'est le phénomène d'auto-induction. En particulier pour une bobine, conçue pour avoir une inductance propre importante, la tension u aux bornes de la bobine, en convention récepteur, est égale à l'opposé de la force électromotrice auto-induite :

$$u = L\frac{di}{dt}$$

6.4.3 Induction mutuelle

Lorsque deux circuits 1 et 2, parcourus par des intensités i_1 et i_2 se trouvent à proximité l'un de l'autre, les variations d'intensité dans un des deux circuits provoquent une force électromotrice dans ce circuit (par la variation de son flux propre) mais aussi dans l'autre circuit (par la variation du flux extérieur de l'autre circuit). Ainsi, deux circuits couplés par induction mutuelle ont, en vertu de la loi de Faraday, une force électromotrice induite somme de ces deux effets :

$$\begin{cases} e_1 = -\frac{d\phi_{p1}}{dt} - \frac{d\phi_{ext1}}{dt} = -L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt} \\ e_2 = -\frac{d\phi_{p2}}{dt} - \frac{d\phi_{ext2}}{dt} = -L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt} \end{cases}$$

En particulier, pour deux bobines couplées par induction mutuelle, les lois de fonctionnement des deux bobines, toutes deux orientées en convention récepteur, sont :

$$\begin{cases} u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \\ u_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} \end{cases}$$

6.4.4 Énergie stockée

L'auto-induction et l'induction mutuelle permettent de stocker de l'énergie magnétique. Pour un circuit ne subissant que des variations de son flux propre, l'énergie magnétique stockée par auto-induction est :

$$E_m = \frac{1}{2} L i^2$$

Pour deux circuits couplés par induction mutuelle, l'énergie magnétique est stockée dans les deux circuits par auto-induction et induction mutuelle :

$$E_m = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_1 i_2$$

6.4.5 Transformateur

Un transformateur est un ensemble de deux bobines en induction mutuelle, les lignes de champ magnétique étant canalisées par une carcasse ferromagnétique. La première bobine, de tension u_1 , contenant N_1 spires, est appelée circuit primaire. La seconde bobine, de tension u_2 , contenant N_2 spires, est appelée circuit secondaire. La loi des tensions d'un transformateur est :

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{N_2}{N_1}$$

Un transformateur permet donc d'élever ou d'abaisser une tension, en fonction du nombre de spires au primaire et au secondaire.

6.5 Circuit mobile dans un champ magnétique stationnaire

6.5.1 Conversion électromécanique

La conversion électromécanique est la conversion d'une énergie électrique en énergie mécanique, ou inversement. Elle repose toujours sur la combinaison d'un phénomène d'induction et d'une action mécanique d'un champ magnétique (force de Laplace ou couple magnétique).

Lors d'une conversion électromécanique, il n'y a pas de perte ou de création d'énergie, mais seulement conversion d'une forme vers l'autre (mécanique vers électrique, ou inversement). C'est pourquoi la puissance P_{fem} algébriquement fournie par la force électromotrice induite (qui traduit la production ou la consommation de puissance électrique) compense exactement la puissance P_L des actions de Laplace (qui traduit la consommation ou la production de puissance mécanique). On a donc la relation fondamentale de la conversion de puissance électromécanique :

$$P_{fem} + P_L = 0$$

6.5.2 Conversion de puissance mécanique en puissance électrique

Un dispositif qui convertit de la puissance mécanique en puissance électrique utilise un circuit dont le déplacement dans un champ magnétique extérieur permet de produire une variation du flux du champ magnétique à travers ce circuit, donc une force électromotrice induite : de la puissance électrique est produite et le dispositif se comporte comme un générateur. Les courants induits dans le circuit conduisent à des actions mécaniques résistantes qui s'opposent au déplacement du circuit en vertu de la loi de Lenz : de la puissance mécanique est consommée.

	Rails de Laplace générateur	Dynamo ou alternateur
Action mécanique	Force extérieure F_{ext} s'exerçant sur la tige mobile	Couple extérieur Γ_{ext} s'exerçant sur le rotor
Nature du mouvement	Translation de la tige mobile	Rotation du rotor
Effet	Production d'une force électromotrice induite e	
Opposition au mouvement	Force de Laplace F_L	Couple magnétique Γ
Effet	$P_L < 0$ et $P_{Fem} > 0$	

La conversion de puissance mécanique en puissance électrique peut être mise à profit dans le freinage par induction. Ainsi, le mouvement des parties conductrices d'une roue de train ou de camion dans un champ magnétique extérieur non uniforme conduit à la création de courants induits dans ces parties conductrices, appelés courants de Foucault. On convertit donc une partie de l'énergie mécanique en énergie électrique (dissipée par effet Joule dans la roue), ce qui se traduit par le ralentissement de la roue.

6.5.3 Conversion de puissance électrique en puissance mécanique

Un dispositif qui convertit de la puissance électrique en puissance mécanique utilise un circuit plongé dans un champ magnétique extérieur et alimenté par un générateur : le circuit se met en mouvement sous l'effet des actions mécaniques du champ magnétique : de la puissance mécanique est produite et le dispositif se comporte comme un moteur. La mise en mouvement du circuit provoque une variation du flux du champ magnétique à travers ce circuit, qui conduit à l'apparition d'une force électromotrice induite dans le circuit. Cette force électromotrice s'oppose à la tension imposée par le générateur en vertu de la loi de Lenz : de la puissance électrique est consommée.

	Moteur à courant continu à entrefer plan (modélisation par les rails de Laplace)
Alimentation électrique	Générateur de tension continue
Action mécanique produite	Force de Laplace F_L
Effet	Mise en mouvement de la tige et entraînement de la charge
Opposition à l'alimentation électrique	Force électromotrice induite e
Puissances	$P_L < 0$ et $P_{Fem} > 0$

7 Mécanique quantique

7.1 Introduction à la physique quantique

7.1.1 Aspect particulaire de l'onde lumineuse : photon

En mécanique quantique, la lumière présente, du point de vue de son interaction avec la matière, les propriétés d'une particule, appelée photon. Cette particule, de masse nulle et de vitesse égale à la célérité de la lumière dans le vide c , a une énergie donnée par la relation de Planck-Einstein :

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$$

On définit également la quantité de mouvement du photon :

$$p = \frac{E}{c} = \frac{h}{\lambda}$$

Ces deux relations mettent en évidence le lien entre les caractéristiques ondulatoires de la lumière (fréquence ν et longueur d'onde λ) et ses caractéristiques particulières (énergie E et quantité de mouvement p). Le facteur de proportionnalité est la constante de Planck :

$$h = 6,63 \times 10^{-34} \text{ J.s}$$

7.1.2 Onde de matière associée à une particule

Parallèlement, la matière, traditionnellement associée à la notion de particule, peut présenter des propriétés ondulatoires. On associe à une particule une onde de matière, caractérisée par sa longueur d'onde λ , définie par la relation de de Broglie :

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

Cette relation met en évidence le lien entre la caractéristique particulaire de la matière (quantité de mouvement p) et sa caractéristique ondulatoire (longueur d'onde de de Broglie λ).

7.1.3 Dualité onde-particule

La mécanique quantique prend acte de cette dualité onde-particule en proposant un outil de description unifié d'un objet quantique (onde ou particule) : la fonction d'onde $\psi(M, t)$. Cette fonction d'onde $\psi(M, t)$ s'interprète comme la probabilité de présence de l'objet quantique en un point M de l'espace à l'instant t .

7.1.4 Principe d'indétermination de Heisenberg

La position et la quantité de mouvement d'une particule quantique ne peuvent être connues l'une et l'autre avec une précision aussi petite que souhaitée. Une limite fondamentale de la mécanique quantique est donnée par l'inégalité de Heisenberg spatiale :

$$\Delta x \Delta p_x \geq \hbar$$

avec Δx et Δp_x les indéterminations quantiques sur la mesure de la position et de la quantité de mouvement de la particule.

7.1.5 Modèle de Bohr de l'atome d'hydrogène

Le modèle planétaire de Bohr constitue la première tentative d'interpréter la quantification des niveaux d'énergie de l'électron de l'atome d'hydrogène. Ce modèle postule que l'électron tourne autour de son noyau selon une trajectoire circulaire, mais que le moment cinétique de l'électron est quantifié : $L = n\hbar$. Il advient que les énergies possibles pour l'électron sont quantifiées, selon l'expression :

$$E_n = -\frac{13,6 \text{ eV}}{n^2}$$

7.1.6 Puits de potentiel infini

Une particule quantique dans un puits de potentiel infini à une dimension x , de longueur L , est décrite par sa fonction d'onde $\psi(x, t)$. Le confinement de la particule dans le puits de potentiel impose des conditions aux limites : $\psi(x = 0, t) = \psi(x = L, t) = 0$.

On se ramène ainsi au problème de la corde vibrante, caractérisé par l'existence de modes propres de longueurs d'onde $\lambda_n = \frac{2L}{n}$. Ces longueurs d'onde sont ici les longueurs d'onde de de Broglie possibles pour la particule quantique. On en déduit les énergies autorisées pour la particule :

$$E_n = \frac{p_n^2}{2m} = \frac{h^2}{2m\lambda_n^2} = \frac{h^2 n^2}{8mL^2}$$

Ce modèle simple met en évidence le lien entre confinement spatial de la particule quantique et quantification de ses niveaux d'énergie. C'est la conséquence au niveau quantique du lien entre conditions aux limites et quantification des longueurs d'onde déjà discuté lors de l'étude des modes propres de la corde vibrante.

 scienceamusante.net
wiki+forum
chimie physique biologie

© 2023, Clovis Darrigan - Anima-Science / www.darrigan.net - www.anima-science.fr

Lanthanides 6

Actinides 7

Chimie

Électronique

- 1 Stabilité des systèmes linéaires
- 2 Amplificateur linéaire intégré
- 3 Oscillateurs quasi sinusoïdaux
- 4 Oscillateurs à relaxation
- 5 Électronique numérique
- 6 Modulation - Démodulation

Thermodynamique

- 7 Écriture infinitésimal
- 8 Bilans d'énergie et d'entropie en présence d'écoulement
- 9 Diffusion de particules
- 10 Diffusion thermique

Mécanique des fluides

- 11 Statique des fluides
- 12 Débits et lois de conservation
- 13 Écoulements parfaits : Théorème de Bernoulli
- 14 Écoulements parfaits : bilans
- 15 Action de contact sur un fluide en écoulement
- 16 Écoulements homogènes et incompressible dans une conduite cylindrique