Projet d'optimisation robuste

Pierre-Louis LE GOFF

École nationale des ponts et chaussées.

15 décembre 2024

Table des matières

1 Modélisation papier

1.1 Modélisation du problème statique sous la forme d'un programme linéaire en nombre entier compact

Données :

- $V = \{1, \dots, n\}$: Ensemble des sommets, avec 1 représentant l'entrepôt, et les autres sommets les clients qu'il faut livrer.
- d_i : Demande du client $i \in V \setminus \{1\}$ correspondant aux nombres de vaccins à livrer aux clients $i \in V \setminus \{1\}$.
- C : Capacité maximale du véhicule correspondant au nombre maximal de vaccins qu'il est possible de stocker dans un véhicule.
- t_{ij} : Temps pour parcourir l'arête entre les sommets i et j.

Variables : On introduit deux variables pour modéliser le problème.

- $x_{ij} \in \{0, 1\}$: Indique si l'arête (i, j) est utilisée dans la tournée.
- u_i : Cette variable code la charge cumulée au sommet i après sa visite ($u_1 = 0$).

Formulation : L'objectif est de minimiser le temps total des trajets :

$$\min_{x,u} \sum_{i \in V} \sum_{j \in V, j \neq i} t_{ij} x_{ij}$$

Sous les contraintes :

1. Chaque client est visité exactement une fois : La première contrainte permet de s'assurer que chaque client est visité une fois. La deuxième contrainte permet de s'assurer que lorsque le véhicule arrrive chez un client, il repart servir un autre client sans passer par les clients précédents.
$$\sum_{j \in V, j \neq i} x_{ij} = 1 \quad \forall i \in V \setminus \{1\},$$
$$\sum_{i \in V, i \neq j} x_{ij} = 1 \quad \forall j \in V \setminus \{1\}.$$
2. Contraintes de conservation des flux à l'entrepôt :
$$\sum_{j \in V, j \neq 1} x_{1j} = \sum_{i \in V, i \neq 1} x_{i1}.$$
3. Contraintes de capacité maximale des véhicules avec inégalités MTZ : Les $(u_i)_{i \in V}$ représente le cumul des demandes clients livrées par le véhicule lors de sa tournée. La contrainte (MTZ) permet d'éliminer les sous-tours. La contrainte MTZ permet également de coder les variables $(u_i)_{i \in V}$ afin de s'assurer que le tour respecte la contrainte de capacité des véhicules.
$$d_j - C(1 - x_{ij}) \leq u_j - ui \quad \forall i, j \in V,\, i \neq j,\, j \neq 1.$$
4. Les valeurs de u_i respectent les limites de la capacité :
$$d_i \leq u_i \leq C \quad \forall i \in V \setminus \{1\}.$$

1.2 Problème robuste

Données : Par rapport au problème statique, le problème robuste introduit de l'incertitude dans les temps de trajet. On a donc une nouvelle variable t'_{ij} :

— t'_{ij} : Temps de trajet nominal entre les sommets i et j.

— $\hat{t}_i, \hat{t}_j$: Paramètres spécifiques des sommets.

— $\delta^1_{ij}, \delta^2_{ij}$: Variables d'incertitude.

— T : Limite globale sur les perturbations totales des trajets.

Modélisation de l'incertitude :

— Le temps de trajet est défini comme :

$$t'_{ij} = t_{ij} + \delta^1_{ij}(\hat{t}_i - \hat{t}_j) + \delta^2_{ij}\hat{t}_i\hat{t}_j,$$

où $\delta^1_{ij} \in [0,1]$ et $\delta^2_{ij} \in [0,2]$ sont les variables d'incertitude.

— L'ensemble d'incertitude U est défini par :

$$U = \left\{ (\delta^1_{ij}, \delta^2_{ij}) : \sum_{(i,j)\in A} \delta^1_{ij} \leq T,\ \delta^1_{ij} \in [0,1],\ \sum_{(i,j)\in A} \delta^2_{ij} \leq T^2,\ \delta^2_{ij} \in [0,2],\ \forall (i,j) \in A \right\}.$$

Formulation robuste :

En optimisation le problème devient :

$$\min_{x,u} \sup_{(\delta^1_{ij}, \delta^2_{ij})\in U} \sum_{i\in V} \sum_{j\in V, j\neq i} t'_{ij} x_{ij}.$$

En remplaçant t'_{ij} par son expression, cela donne :

$$\min_{x,u} \sup_{(\delta^1, \delta^2)} \sum_{i\in V} \sum_{j\in V, j\neq i} \left(t_{ij} + \delta^1_{ij}(\hat{t}_i - \hat{t}_j) + \delta^2_{ij}\hat{t}_i\hat{t}_j\right) x_{ij}.$$

Sous les contraintes :

1. Contraintes 1-4 du PLNE compact
2. Contraintes sur l'ensemble d'incertitude U :

$$\sum_{(i,j)\in A} \delta^1_{ij} \leq T, \quad \delta^1_{ij} \in [0,1],$$

$$\sum_{(i,j)\in A} \delta^2_{ij} \leq T^2, \quad \delta^2_{ij} \in [0,2], \quad \forall (i,j) \in A.$$

1.3 Résolution par plan coupants et LazyCallback

a) Afin de résoudre le problème par plans coupants, on introduit une variable z. Cela permet de faire apparaitre la robustesse dans les contraintes et plus dans la fonction objectif.

$$\min_{z,x,u} z,$$

sous les contraintes suivantes :

1. Contraintes sur la borne supérieure (z) :

$$z \geq \sum_{i \in V} \sum_{j \in V, j \neq i} t_{ij} x_{ij} + \sup_{\delta^1_{ij} \in [0,1], \delta^2_{ij} \in [0,2]} \left\{ \sum_{(i,j) \in A} \delta^1_{ij} (\hat{t}_i - \hat{t}_j) x_{ij} + \sum_{(i,j) \in A} \delta^2_{ij} \hat{t}_i \hat{t}_j x_{ij} \right\}.$$

2. Contraintes du problème initial 1-4

3. Ensemble d'incertitude (U) :

— $\delta^1_{ij} \in [0,1], \quad \forall (i,j) \in A.$

— $\delta^2_{ij} \in [0,2], \quad \forall (i,j) \in A.$

— $\sum_{(i,j) \in A} \delta^1_{ij} \leq T.$

— $\sum_{(i,j) \in A} \delta^2_{ij} \leq T^2.$

b) On peut définir le sous ensemble initial U^* de différentes manières, on choisir de prendre, $\forall (i,j) \in A, \delta^1_{ij} = \delta^2_{ij} = 0$. On a donc :

$$\mathcal{U}^* = \left\{ t'_{ij} = t_{ij},\ \forall (i,j) \in A \right\}.$$

Le problème maître revient donc au problème statique de la question 1.

c) Le sous-problème nécessaire a la résolution du problème robuste par l'algorithme des plans coupants est le suivant, pour une solution (z^*, w^* et x^*) du problème maitre on a :

$$\max_{\delta^1, \delta^2} \sum_{(i,j) \in A} x^*_{i,j} \left[t_{i,j} + \delta^1_{i,j} (t_i + t_j) + \delta^2_{i,j} \hat{t}_i \hat{t}_j \right]$$

$$\begin{aligned}
&\sum_{i,j} \delta^1_{i,j} \leq T, \\
&\sum_{i,j} \delta^2_{i,j} \leq T^2, \\
&\delta^1_{i,j} \in [0,1], \quad \forall (i,j) \in A, \\
&\delta^2_{i,j} \in [0,2], \quad \forall (i,j) \in A.
\end{aligned}$$

d) Pour qu'une solution du problème maitre soit optimale, il faut que la valeur optimale du sous-problème respecte la condition suivante :

$$\max_{\delta^1, \delta^2} \sum_{(i,j) \in A} x^*_{i,j} t^{'}_{i,j} \leq z^*$$

Ce qui revient à :

$$\max_{\delta^1, \delta^2} \sum_{(i,j) \in A} x^*_{i,j} (t_{i,j} + \delta^1_{i,j} (\hat{t}_i + \hat{t}_j) + \delta^2_{i,j} \hat{t}_i \hat{t}_j) \leq z^*$$

e) Si la condition énoncée n'est pas respectée alors on rajoute des coupes de la forme :

$$\sum_{(i,j) \in A} x_{i,j} (t_{i,j} + \delta^{1*}_{i,j} (\hat{t}_i + \hat{t}_j) + \delta^{2*}_{i,j} \hat{t}_i \hat{t}_j) \leq z$$

1.4 Résolution par dualisation

a) En développant la fonction objectif dans le problème robuste et en sortant les termes qui ne dépendent pas du sup sur U, la fonction objectif initiale avec l'incertitude sur les temps de trajet est donnée par :

$$\min_{x,u}\left\{\sum_{i\in V}\sum_{j\in V, j\neq i} t_{ij}x_{ij} + \sup_{(\delta^1,\delta^2)}\sum_{i\in V}\sum_{j\in V, j\neq i}\left[\delta^1_{ij}(\hat{t}_i-\hat{t}_j)+\delta^2_{ij}\hat{t}_i\hat{t}_j\right]x_{ij}\right\}.$$

b) Dualisation, la fonction objectif comprend trois termes :

1. Termes constants (sans incertitude) :

$$\sum_{i\in V}\sum_{j\in V, j\neq i} t_{ij}x_{ij}.$$

Ce terme ne dépend pas de l'ensemble U, on n'a donc pas besoin de le dualiser.

2. Dualisation de la partie associée à δ^1_{ij} : En dualisant cette partie, nous obtenons :

$$\inf_{\alpha\geq 0,\lambda^1\geq 0}\left\{\alpha T + \sum_{(i,j)\in A}\lambda^1_{ij}\right\},$$

avec les contraintes :

$$\alpha + \lambda^1_{ij} \geq (\hat{t}_i - \hat{t}_j)x_{ij}, \quad \forall (i,j)\in A.$$

$$\alpha \geq 0$$

$$\lambda^1_{ij}\geq 0, \quad \forall (i,j)\in A.$$

3. Dualisation de la partie associée à δ^2_{ij} : Pour cette deuxième partie, nous obtenons de manière similaire :

$$\inf_{\beta\geq 0,\lambda^2\geq 0}\left\{\beta T^2 + \sum_{(i,j)\in A}2\lambda^2_{ij}\right\},$$

avec les contraintes :

$$\beta + \lambda^2_{ij} \geq \hat{t}_i\hat{t}_j x_{ij}, \quad \forall (i,j)\in A.$$

$$\beta \geq 0$$

$$\lambda^2_{ij}\geq 0, \quad \forall (i,j)\in A.$$

d) Le problème robuste dualisé devient donc :

$$\min_{x,u,\alpha,\beta,\lambda^1,\lambda^2}\left\{\sum_{i\in V}\sum_{j\in V, j\neq i} t_{ij}x_{ij} + \alpha T + \sum_{(i,j)\in A}\lambda^1_{ij} + \beta T^2 + \sum_{(i,j)\in A}2\lambda^2_{ij}\right\},$$

sous les contraintes suivantes :

Contraintes du problème initial 1-4 :

Contraintes de dualisation :

$$\alpha + \lambda_{ij}^1 \geq (\hat{t}_i - \hat{t}_j)x_{ij}, \quad \forall (i,j) \in A, \quad \text{(contraintes duales liées à } \delta_{ij}^1\text{)}, \tag{1}$$

$$\beta + \lambda_{ij}^2 \geq \hat{t}_i \hat{t}_j x_{ij}, \quad \forall (i,j) \in A, \quad \text{(contraintes duales liées à } \delta_{ij}^2\text{)}, \tag{2}$$

$$\alpha \geq 0, \quad \beta \geq 0, \quad \lambda_{ij}^1 \geq 0, \quad \lambda_{ij}^2 \geq 0, \quad \forall (i,j) \in A. \tag{3}$$