Indukcja na grafach

18 października 2018

1 Definicje

Definicja 1 (Suma uogoólniona)**.**

$$\mathcal{A} = \{A_i : A_i \subseteq X, i \in \mathbb{N}\}$$
$$\bigcup \mathcal{A} = \bigcup_i A_i = \{x \in X : \exists_i x \in A_i\}$$

Definicja 2 (Dowód indukcyjny na acyklicznych, skończonych grafach skierowanych)**.** *Dowód przebiega w następujący sposób.*

Najpierw definiujemy zbiór X, pewną własność C oraz zbiory poprzedników $b(x)$ wszystkich elementów zbioru X. Każdy element x ma własność C lub jej nie ma.

Definiujemy również zbiór poprzedników danego zbioru jako.

$$B(X) = \bigcup_{x \in X} b(x)$$

Algorytm przebiega następująco. Dzielimy graf na warstwy algorytmem BFS, zaczynając od wierzchołków do których nie wchodzi żadna krawędź (warstwa W_0). Wierzchołek v należy do warstwy W_k wtedy i tylko wtedy, gdy jego najkrótsza ścieżka do wierzchołka z warstwy W_0 ma długość k.

Zakładamy tutaj, że wszyscy poprzednicy należą do poprzednich warstw. (Graf skierowany acykliczny.)

$$\forall_k \forall_{w \in W_k} b(w) \subseteq \bigcup_{i<k} A_i$$

Naszym celem jest pokazanie, że jeśli dla wszystkich wcześniejszych wierzchołków zachodzi własność C i potrafimy na tej podstawie udowodnić własność C dla kolejnych wierzchołków, to własność C zachodzi dla wszystkich wierzchołków. Dowodzimy to w następujący sposób.

1. *Podstawa indukcji*

$$\forall_{x \in W_0} C(x)$$

2. Krok indukcyjny

$$(\forall_{w \in W_n}(\forall_{p \in b(w)} C(p))) \implies C(w)$$

Wówczas zachodzi:

$$(\forall_{n \in \mathbb{N}}(\forall_{w \in W_n}(\forall_{p \in b(w)} C(p)) \implies C(w))) \implies \forall_{x \in X} C(x)$$

Uwagi!

- *Graf nie musi być spójny.*

Definicja 3.

$$[x = y] = \begin{cases} 1, & x = y \\ 0, & x \neq y \end{cases} \tag{1}$$

Definicja 4 (Odległość Levenshteina)**.** *Mamy dwa ciągi znaków* $(a_1, a_2, \dots a_n)$ *oraz* $(b_1, b_2, \dots b_m)$ *długości odpowiednio* n *i* m*. Należy znaleźć minimalną liczbę operacji potrzebnych do przekształcenia ciągu* a *w ciąg* b*.*
Dopuszczalne są następujące operacje:

- *Wstaw dowolny znak* c *w dowolne miejsce ciągu* a*.*
- *Usuń dowolny znak* c *z ciągu* a*.*
- *Zamień dowolny znak* c *ciągu* a *na inny znak.*

Dla ustalenia uwagi oznaczmy, tą liczbę przez L(a,b).

Lemat 1. $L(a, b) \geqslant max(n, m) - min(n, m) = |n - m|$
Jeśli dwa ciągi mają różne długości to zawsze musimy przedłużyć lub skrócić ciąg [a] o różnicę ich długości.

Lemat 2. $L(a, b) \leqslant max(n, m)$
Możemy po prostu wymieniać wszystkie znaki po kolei.

Z powyższych lematów możemy wywnioskować kolejne.

Lemat 3. $n = 0 \implies L(a, b) = m$

Lemat 4. $m = 0 \implies L(a, b) = n$

2 Zadanie

Napisać algorytm obliczający L(a, b) oraz wypisujący ciąg operacji.

Definicja 5 (Prefiks)**.** *Niech* $a[1 \dots i]$ *będzie prefikem a długości i.*

Twierdzenie 1.

$$d(0,0) = 0$$
$$d(i,j) = min(d(i,j-1)+1, d(i-1,j)+1, d(i-1,j-1)+[a_i \neq b_j])$$

Wówczas $d(i,j) = L(a[1,\dots,i], b[1,\dots,j])$

Dowód. Pokażemy to indukcyjnie.
Zdefiniujmy kolejne warstwy:

$$W_0 = \{(0,0)\}$$
$$W_k = \{(i,j) : i+j = k\}$$
$$W_{n+m} = \{(n,m)\}$$
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & \dots & m \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & m+1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & m+2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n+1 & n+2 & n+3 & \dots & n+m \end{bmatrix}$$

1. Podstawa indukcji (k = 0), Wynika z lematów.

2. Krok indukcyjny

   - k = 1

     $$W_1 = \{(0,1),(1,0)\} \tag{2}$$
     $$B(W_1) = B((0,1)) \cup B((1,0)) = \{(0,0)\} = W_0 \subseteq W_0 \tag{3}$$

   - $k > 1$

     $$\forall_{(i,j)\in W_k} \{(i-1,j),(i,j-1),(i-1,j-1)\} \subseteq W_{k-2} \cup W_{k-1}$$
     $$B(W_k) \subseteq W_{k-2} \cup W_{k-1}$$

     Wybranie wartości minimum to po prostu wybranie odpowiedniego ruchu w danym momencie, takiego dla którego sumaryczny koszt jest najniższy.

□

3 Zadanie dodatkowe

Należy rozpatrzyć dwa inne przypadki.

- Wszystkie operacje mają różne koszty.

- Nie ma operacji zamiany znaku.
- Inny podział na warstwy. Pokazać, że istnieje algorytm w pamięci O(m).

$$W_0 = \{(0,0)\}$$
$$W_k = \{(i,j) : j(n+1) + i = k\}$$
$$W_{(n+1)(m+1)} = \{(n,m)\}$$
$$\begin{bmatrix} 0 & n+1 & 2n+1 & \dots & mn+1 \\ 1 & n+2 & 2n+1 & \dots & mn+2 \\ 2 & n+3 & 2n+2 & \dots & mn+3 \\ 3 & n+4 & 2n+3 & \dots & mn+4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & 2n & 3n & \dots & (m+1)(n+1) \end{bmatrix}$$