Matematyczne szlaczki

24 maja 2018

1 Matematyczne szlaczki

Napis matematyczny	Kod w C++	Uwagi

$[a_i]_{i=0,\ldots,N-1}$	`#define N 1003`
	`int a[N];`
	
	`const int N = 1003;`
	`int a[N];`
		Tablica zawiera
		ca N element
		(Ciąg / Wektor
		elementowy)
		Zmienna N dekla
		wana jako stała
		nie jako makro.

$[a_{i,j}]_{\substack{i=0,1,2,\ldots,N-1\\ j=0,1,2\ldots,M-1}}$	`const int N = 1003, M = 1004;` `int a[N][M];`	Macierz $N \times M$
$\forall_{i\in\{1,2,\ldots,n\}}$	for(int i = 1; $i <= n$; i++)	Pętla for

$\sum_{i\in\{m,m+1,\ldots,M\}} a_i$
 	
$\sum_{i=m}^{M} a_i$
	`int c = 0;`
	`for(int i = m; i <= M; i++)`
	`        c += a[i];`	

$f(x,y) = x + y$	`int f(int x, int y) {`
	`        return x + y;`
	`}`
		Funkcja bior
		dwie liczby j
		parametr i zw
		cająca jedną lic
		(ich sumę).

$f(x) = \begin{cases} 3x+1, & \text{gdy x nieparzyste} \\ \frac{x}{2} & \text{w przeciwnym wypadku} \end{cases}$	`int x = 17, y;`
	`if(x % 2 == 1) {`
	`        y = 3*x + 1;`
	`}`
	`else {`
	`        y = x / 2;`
	`}`
		Instrukcje war
		kowe

2 Zadania

2.1 Rozwiązanie polega na napisaniu kodu

We wszystkich poniższych zadaniach należy wyliczyć tablicę b na podstawie tablicy a.

2.1.1 Ciąg Fibonacciego $O(n)$

Tablica a jest dwuelementowa. n = 2018.

$$a_0 = 0$$
$$a_1 = 1$$
$$\forall_{i \in \{0,1\}} b_i := a_i$$
$$\forall_{i \in \{2,3,\ldots,n\}} b_i := b_{i-1} + b_{i-2}$$

Wskazówka.

$$\forall_{i \in \{0,1,\ldots,n\}} b_i = \begin{cases} a_i, & \text{gdy } i < 2 \\ b_{i-1} + b_{i-2} & \text{w przeciwnym wypadku} \end{cases}$$

2.1.2 Suma prefiksowa $O(n)$

$$\forall_{k \in \{0,1,\ldots,n-1\}} b_k := \sum_{i=0}^{k} a_i$$

Wskazówka.

$$\forall_{i>0} b_i = a_i + b_{i-1}$$

2.1.3 * Tablica 3d $O(n^3)$

$$\forall_{\substack{0 \leqslant x \\ x \leqslant y \\ y \leqslant z < n}} b_{x,y,z} := x + y - z$$

Wskazówka.

$$x \leqslant y, y \leqslant z, z < n \implies x \leqslant y \leqslant z < n \implies x < n, y < n$$

Tam gdzie tablica b nie jest określona, wartość powinna być równa 0.
(Kiedy tablice w C++ mają wartość domyślną równą 0?)

2.1.4 ** Suma prefiksowa 2D $O(n^2)$

Tablica a jest dwuwymiarowa ($n \times n$)

$$\forall_{\substack{0 \leqslant i < n \\ 0 \leqslant j < n}} b_{i,j} := \sum_{x=0}^{i} \sum_{y=0}^{j} a_{x,y}$$

Rozwiązanie wprost ma złożoność $O(n^4)$. Można to zrobić szybiciej poprzez podzielenie zadania na mniejsze podzadania.

$\forall_{\substack{0 \leqslant i < n \\ 0 \leqslant j < n}} c_{i,j} := \sum_{y=0}^{j} a_{i,y} = c_{i,j-1} + a_{i,j}$ (Liczymy sumę prefiksową wzdłuż kolumn.)

$\forall_{\substack{0 \leqslant i < n \\ 0 \leqslant j < n}} b_{i,j} := \sum_{x=0}^{i} c_{x,j}$ (Liczymy sumę prefiksową wzdłuż wierszy dla wyników częściowych.)

2.1.5 *** Suma w prostokącie $O(1)$

Mając policzoną tablicę b z zadania powyżej należy obliczyć wyrażenie.

$$f(x_1, y_1, x_2, y_2) := \sum_{i=x_1}^{x_2} \sum_{j=y_1}^{y_2} a_{i,j}$$

Rozwiązanie.

$$f(x_1, y_1, x_2, y_2) := b_{x_2,y_2} - b_{x_1-1,y_2} - b_{x_2,y_1-1} + b_{x_1-1,y_1-1}$$