Ściąga o równaniach rekurencyjnych

26 kwietnia 2018

1 Grupa

$$(G, +, 0)$$

G - zbiór, + operacja dwuagrumentowa, 0 - element neutralny względem dodawania

$$\forall_{a,b \in G} a + b \in G \tag{1}$$
$$\forall_{a,b,c \in G} (a + b) + c = a + (b + c) \tag{2}$$
$$\exists_{e \in G} \forall_{a \in G} a + e = e + a = a \tag{3}$$
$$\forall_{a \in G} \exists_{b \in G} a + b = b + a = e \tag{4}$$

2 Pierścień

$$(G, +, *, 0, 1)$$

G - zbiór, + i * - operacje dwuargumentowe, 0 - element neutralny względem dodawania, 1 - element neutralny względem mnożenia

$$(G, +, 0) \tag{5}$$

3 Szybkie potęgowanie

$$n := \sum_{i=0}^{\lfloor log(n) \rfloor} a_i * 2^i, a_i \in \{0, 1\} \tag{6}$$
$$k^n = \prod_{i=0}^{\lfloor log(n) \rfloor} k^{a_i * 2^i} = k^{a_0} * k^{2a_1} * k^{4a_2} * \dots \tag{7}$$

4 Równania rekurencyjne (RR)

4.1 RR drugiego rzędu

$((p_0, p_1), (a_0, a_1))$, p_i - parametry równania, a_i - wartości początkowe

$$a_0 =?, a_1 =? \tag{8}$$

$$\forall_{n>1} a_n = p_1 * a_{n-1} + p_0 * a_{n-2} \tag{9}$$

4.1.1 Fibonacci

$$a_0 = a_1 = p_0 = p_1 = 1$$
$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13 ...

4.1.2 Lucas

$$a_0 = 2, a_1 = 1$$
$$p_0 = p_1 = 1$$
$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

2, 1, 3, 4, 7, 11, 18 ...

4.1.3 Wersja macierzowa

$$S = \begin{bmatrix} a_1 & a_0 \\ a_0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$I = \begin{bmatrix} p_1 & p_0 \\ p_0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$SI^n = \begin{bmatrix} a_{n+1} & a_n \\ a_n & a_{n-1} \end{bmatrix}$$

4.2 RR k-tego rzędu

$((p_0, p_1, \ldots, p_{k-1}), (a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}))$

$$\forall_{n>k-1} a_n = \sum_{i=1}^{k} a_{n-i} p_{k-i} = a_{n-1}p_{k-1} + a_{n-2}p_{k-2} + \cdots + a_{n-k}p_0$$

4.2.1 Wersja macierzowa

$$S = \begin{bmatrix} a_{k-1} & a_{k-2} & a_{k-3} & \dots & a_1 & a_0 \\ a_{k-2} & a_{k-3} & a_{k-4} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$I = \begin{bmatrix} p_{k-1} & p_{k-2} & p_{k-3} & \dots & p_1 & p_0 \\ p_{k-2} & p_{k-3} & p_{k-4} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ p_1 & p_0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ p_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$SI^n = \begin{bmatrix} a_{n+k-1} & a_{n+k-2} & a_{n+k-3} & \dots & a_{n+1} & a_n \\ a_{n+k-2} & a_{n+k-3} & a_{n+k-4} & \dots & a_n & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n+1} & a_n & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$