Optymalne mnożenie ciągu macierzy

24 maja 2018

1 Treść

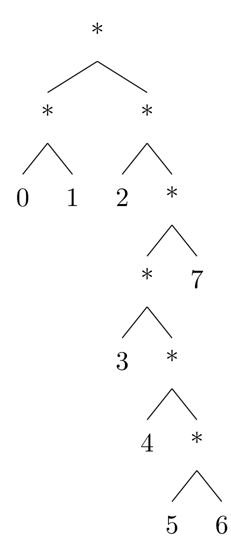
Mamy ciąg $N+1$ liczb $(a_0, a_1, \ldots, a_{N-1}, a_N)$.
Mamy również ciąg N macierzy $(M_0, M_1, \ldots, M_{N-2}, M_{N-1})$
Macierz $M_i(a_i \times a_{i+1})$ ma a_i wierszy i a_{i+1} kolumn.

Należy znaleźć takie nawiasowanie ciągu, aby liczba wykonanych mnożeń (liczb) była minimalna.
Zakładamy, że przemnożenie macierzy A $(n \times m)$ oraz B $(m \times r)$ polega na wykonaniu $m * n * r$ mnożeń. (Standardowy algorytm mnożenia macierzy.)

Należy napisać program, który:

1. Obliczy minimalną liczbę mnożeń.
2. Wypisze optymalne nawiasowanie. np. $(((0) * (1)) * (2)) = (0 * 1) * 2$

2 Przykładowe mnożenie



$(0 * 1) * (2 * ((3 * (4 * (5 * 6))) * 7))$

3 Przykładowe ciągi

3.1 n = 1

Nie ma czego mnożyć.

3.2 n = 2

$$n = 2$$
$$a = (3, 4, 5)$$

3.2.1 Nawiasowanie $(0 * 1)$

Liczba mnożeń wynosi: $3 * 4 * 5 = 60$

3.3 n = 3

$$n = 3$$
$$a = (10^6, 10^6, 10^6, 1)$$

3.3.1 Nawiasowanie $(0 * 1) * 2$

Liczba mnożeń wynosi: $10^6 * 10^6 * 10^6 + 10^6 * 10^6 * 1 = 10^{18} + 10^{12}$

3.3.2 Nawiasowanie $0 * (1 * 2)$

Liczba mnożeń wynosi: $10^6 * 10^6 * 1 + 10^6 * 10^6 * 1 = 2 * 10^{12}$

3.4 n = 5

$$n = 5$$
$$a = (30, 1000, 1000, 1000, 4, 3)$$

3.4.1 Nawiasowanie $(((0 * 1) * 2) * 3) * 4$

Liczba mnożeń wynosi: $30*1000*1000+30*1000*1000+30*1000*4+30*4*3 = 30.000.000 + 30.000.000 + 120.000 + 360 = 60.120.360$

3.4.2 Nawiasowanie $0 * (1 * (2 * (3 * 4)))$

Liczba mnożeń wynosi: $1000*4*3+1000*1000*3+1000*1000*3+30*1000*3 = 12.000 + 3.000.000 + 3.000.000 + 90.000 = 6.102.000$

3.4.3 Nawiasowanie $0 * (((1 * 2) * 3) * 4)$

Liczba mnożeń wynosi $1000{*}1000{*}1000{+}1000{*}1000{*}4{+}1000{*}4{*}3{+}30{*}1000{*}3 =$ $1.000.000.000 + 4.000.000 + 12.000 + 90.000 = 1.004.102.000$

4 Rozwiązanie cz. I $O(n^3)$

Zastosujemy programowanie dynamiczne.
Niech $dp(i, j)$ oznacza minimalną liczbę mnożeń dla podciągu macierzy $(M_i, M_{i+1}, \ldots, M_{j-1}, M_j)$.

1. $dp(i, j)$ jest nie określone, gdy $j < i$.
2. Nietrudno zauważyć, że $dp(i, i) = 0$.
   Mając tylko jedną macierz nie musimy jej mnożyć.
3. $dp(i, j) = min_{k \in \{i, i+1, \ldots, j-1\}} dp(i, k) + dp(k + 1, j) + a_i * a_{k+1} * a_{j+1}$
   Dzielimy ciąg na dwa ciągi, które osobno wymnarzamy. Następnie ze wszystkich podziałów wybieramy najlepszy.

$$(M_i, \ldots, M_k) \rightarrow A(a_i \times a_{k+1})$$
$$(M_{k+1}, \ldots, M_j) \rightarrow B(a_{k+1} \times a_{j+1})$$
$$(M_i, \ldots, M_j) \rightarrow A * B(a_i \times a_{j+1})$$

4. Wartości obliczamy w kolejności rosnących różnic między indeksami. (tj. $(j - i)$)
5. Wynikiem jest $dp(0, n - 1)$

5 Rozwiązanie cz. II

Jak odtworzyć nawiasowanie?

5.1 argmin

Zwraca wartość ze zbioru X, taką, że wartość funkcji jest najmniejsza dla elementu $k \in X$.

$$k := argmin_{x \in X} f(x) \iff f(k) = min_{x \in X} f(x)$$

5.2 Rozwiązanie $O(n^3)$

Wystarczy dla każdego podciągu macierzy $(M_i, \ldots M_j)$ wyznaczyć punkt podziału k.

$$k := argmin_{k \in \{i, i+1, \ldots, j-1\}} dp(i, k) + dp(k + 1, j) + a_i * a_{k+1} * a_{j+1}$$

Wówczas poszukiwane nawiasowanie wygląda następująco.

1. nawias(i, i) = i
2. nawias(i, j) = (nawias(i, k))∗(nawias$(k + 1, j)$)
3. Wynikiem jest nawias$(0, n - 1)$.

5.3 Znajdowanie argmin

Można to zrobić na dwa sposoby.

1. Mając obliczoną tablicę dp obliczamy ją dopiero wtedy go ją potrzebujemy po prostu iterując.
2. Obliczając tablice dp, możemy od razu zapamiętać w osobnej tablicy dpk odpowiednie wartości. (Wówczas cz. II działa w $O(n)$)

5.4 Dowód złożoności

$$\sum_{i=0}^{n} i = 0 + 1 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} \tag{1}$$

$$\sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \tag{2}$$

$$\sum_{i=0}^{n} i^3 = (\frac{n(n+1)}{2})^2 \tag{3}$$

$$\sum_{i=0}^{n} i^k = \cdots = O(n^{k+1}) \tag{4}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{0<=i<=j<=n} j - i &= \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{j}(j - i) \quad \text{(robimy sumę po dwóch indeksach)} \\
&= \sum_{j=0}^{n}(\sum_{i=0}^{j} j - \sum_{i=0}^{j} i) \quad \text{(rozbijamy na dwie sumy)} \\
&= \sum_{j=0}^{n} j(j+1) - \frac{j(j+1)}{2} \quad \text{(obliczamy sumy osobno)} \\
&= \sum_{j=0}^{n} \frac{j(j+1)}{2} = \sum_{j=0}^{n} \frac{j^2}{2} + \frac{j}{2} \quad \text{(wyciągamy j(j+1) przed nawias i upraszczamy)} \\
&= \frac{\sum_{j=0}^{n} j^2}{2} + \frac{\sum_{j=0}^{n} j}{2} \quad \text{(sprowadzamy do wzoru na sumy)} \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{12} + \frac{n(n+1)}{4} \quad \text{(podstawiamy)} \\
&= O(n^3 + n^2) = O(n^3)
\end{aligned} \tag{5}$$