

Ściąga o równaniach rekurencyjnych

26 kwietnia 2018

1 Szybkie potęgowanie

$$n := \sum_{i=0}^{\lfloor \log(n) \rfloor} a_i * 2^i, a_i \in \{0, 1\} \quad (1)$$

$$k^n = \prod_{i=0}^{\lfloor \log(n) \rfloor} k^{a_i * 2^i} = k^{a_0} * k^{2a_1} * k^{4a_2} * \dots \quad (2)$$

2 Równania rekurencyjne (RR)

2.1 RR drugiego rzędu

$((p_0, p_1), (a_0, a_1))$, p_i - parametry równania, a_i - wartości początkowe

$$a_0 = ?, a_1 = ? \quad (3)$$

$$\forall_{n>1} a_n = p_1 * a_{n-1} + p_0 * a_{n-2} \quad (4)$$

2.1.1 Fibonacci

$$a_0 = a_1 = p_0 = p_1 = 1$$

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13 ...

2.1.2 Lucas

$$a_0 = 2, a_1 = 1$$

$$p_0 = p_1 = 1$$

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

2, 1, 3, 4, 7, 11, 18 ...

2.1.3 Wersja macierzowa

$$F = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_0 \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} p_1 & p_0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$S^n F = \begin{bmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{bmatrix}$$

2.2 RR k-tego rzędu

$$((p_0, p_1, \dots, p_{k-1}), (a_0, a_1, \dots, a_{k-1}))$$

$$\forall_{n > k-1} a_n = \sum_{i=1}^k a_{n-i} p_{k-i} = a_{n-1} p_{k-1} + a_{n-2} p_{k-2} + \dots + a_{n-k} p_0$$

2.2.1 Wersja macierzowa

$$F = \begin{bmatrix} a_{k-1} \\ a_{k-2} \\ \vdots \\ a_1 \\ a_0 \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} p_{k-1} & p_{k-2} & \dots & p_1 & p_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x_{0,i} = p_{k-1-i}$$

$$x_{i+1,i} = 1$$

$$S^n F = \begin{bmatrix} a_{n+k-1} \\ a_{n+k-2} \\ \vdots \\ a_{n+1} \\ a_n \end{bmatrix}$$