Programowanie dynamiczne na grafach

1 Definicje

Definicja 1 (Rodzina indeksowana)**.**

$$\mathcal{A} = \{A_i : A_i \subseteq X, i \in \mathbb{N}\}$$

Będziemy używać jedynie skończonych rodzin.

Definicja 2 (Suma uogólniona)**.**

$$\bigcup \mathcal{A} = \bigcup_i A_i = \{x \in X : \exists_i x \in A_i\}$$

Twierdzenie 1 (Wzór jawny dla ciągu Fibonacciego)**.**

$$F_0 = 0, F_1 = 1, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$
$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n$$

Dowód. n = 0, n = 1 sprawdzamy ręcznie.
Pokazujemy, że $x^2 = x + 1$, gdy $x \in \{\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\}$
Niech $x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}, p = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$$\begin{aligned} F_n &= F_{n-1} + F_{n-2} = px_1^{n-1} - px_2^{n-1} + px_1^{n-2} - px_2^{n-2} \\ &= px_1^{n-2}(1 + x_1) + px_2^{n-2}(1 + x_2) \\ &= px_1^n + px_2^n \end{aligned}$$

□

Definicja 3 (Programowanie dynamiczne na acyklicznych, skończonych grafach skierowanych)**.** *Tworzenie algorytmu przebiega w następujący sposób.*

Najpierw definiujemy zbiór X, pewną własność C oraz zbiory poprzedników b(x) wszystkich elementów zbioru X. Każdy element x ma własność C lub jej nie ma.

Definiujemy również zbiór poprzedników danego zbioru jako.

$$B(X) = \bigcup_{x \in X} b(x)$$

Dzielimy graf na warstwy ***(sortowaniem topologicznym)****, zaczynając od wierzchołków do których nie wchodzi żadna krawędź (warstwa W_0). Wierzchołek v należy do warstwy W_k wtedy i tylko wtedy, gdy jego* ***najdłuższa*** *ścieżka do wierzchołka z warstwy W_0 ma długość k.*

Zakładamy tutaj, że wszyscy poprzednicy należą do poprzednich warstw. (Graf skierowany acykliczny.)

$$\forall_k \forall_{w \in W_k} b(w) \subseteq \bigcup_{i<k} A_i$$

Naszym celem jest pokazanie, że jeśli dla wszystkich wcześniejszych wierzchołków zachodzi własność C i potrafimy na tej podstawie udowodnić własność C dla kolejnych wierzchołków, to własność C zachodzi dla wszystkich wierzchołków. Dowodzimy to w następujący sposób.

1. *Podstawa indukcji*
$$\forall_{x \in W_0} C(x)$$

2. *Krok indukcyjny*
$$(\forall_{w \in W_n} (\forall_{p \in b(w)} C(p))) \implies C(w)$$

Wówczas zachodzi:

$$(\forall_{n \in \mathbb{N}} (\forall_{w \in W_n} (\forall_{p \in b(w)} C(p)) \implies C(w))) \implies \forall_{x \in X} C(x)$$

Uwagi!

- *Graf nie musi być spójny.*