Indukcja na grafach

18 października 2018

1 Definicje

Definicja 1 (Suma uogoólniona)**.**

$$\mathcal{A} = \{A_i : A_i \subseteq X, i \in \mathbb{N}\}$$
$$\bigcup \mathcal{A} = \bigcup_i A_i = \{x \in X : \exists_i x \in A_i\}$$

Definicja 2 (Dowód indukcyjny na acyklicznych, skończonych grafach skierowanych)**.** *Dowód przebiega w następujący sposób.*

Najpierw definiujemy zbiór X, pewną własność C oraz zbiory poprzedników b(x) wszystkich elementów zbioru X. Każdy element x ma własność C lub jej nie ma.

Definiujemy również zbiór poprzedników danego zbioru jako.

$$B(X) = \bigcup_{x \in X} b(x)$$

Algorytm przebiega następująco. Dzielimy graf na warstwy algorytmem BFS, zaczynając od wierzchołków do których nie wchodzi żadna krawędź (warstwa W_0). Wierzchołek v należy do warstwy W_k wtedy i tylko wtedy, gdy jego najkrótsza ścieżka do wierzchołka z warstwy W_0 ma długość k.

Zakładamy tutaj, że wszyscy poprzednicy należą do poprzednich warstw. (Graf skierowany acykliczny.)

$$\forall_k \forall_{w \in W_k} b(w) \subseteq \bigcup_{i<k} A_i$$

Naszym celem jest pokazanie, że jeśli dla wszystkich wcześniejszych wierzchołków zachodzi własność C i potrafimy na tej podstawie udowodnić własność C dla kolejnych wierzchołków, to własność C zachodzi dla wszystkich wierzchołków. Dowodzimy to w następujący sposób.

1. *Podstawa indukcji*

$$\forall_{x \in W_0} C(x)$$

2. Krok indukcyjny

$$(\forall_{w \in W_n}(\forall_{p \in b(w)} C(p))) \implies C(w)$$

Wówczas zachodzi:

$$(\forall_{n \in \mathbb{N}}(\forall_{w \in W_n}(\forall_{p \in b(w)} C(p)) \implies C(w))) \implies \forall_{x \in X} C(x)$$

Uwagi!

- *Graf nie musi być spójny.*

Definicja 3.

$$[x = y] = \begin{cases} 1, & x = y \\ 0, & x \neq y \end{cases} \tag{1}$$

Definicja 4 (Odległość Levenshteina)**.** *Mamy dwa ciągi znaków* $(a_1, a_2, \dots a_n)$ *oraz* $(b_1, b_2, \dots b_m)$ *długości odpowiednio n i m. Należy znaleźć minimalną liczbę operacji potrzebnych do przekształcenia ciągu a w ciąg b.*
Dopuszczalne są następujące operacje:

- *Wstaw dowolny znak c w dowolne miejsce ciągu a.*
- *Usuń dowolny znak c z ciągu a.*
- *Zamień dowolny znak c ciągu a na inny znak.*

Dla ustalenia uwagi oznaczmy, tą liczbę przez L(a,b).

Lemat 1. $L(a, b) \geqslant max(n, m) - min(n, m) = |n - m|$
Jeśli dwa ciągi mają różne długości to zawsze musimy przedłużyć lub skrócić ciąg [a] o różnicę ich długości.

Lemat 2. $L(a, b) \leqslant max(n, m)$
Możemy po prostu wymieniać wszystkie znaki po kolei.

Z powyższych lematów możemy wywnioskować kolejne.

Lemat 3. $n = 0 \implies L(a, b) = m$

Lemat 4. $m = 0 \implies L(a, b) = n$

2 Zadanie

Napisać algorytm obliczający L(a, b) oraz wypisujący ciąg operacji.

Definicja 5 (Prefiks)**.** *Niech* $a[1 \dots i]$ *będzie prefikem a długości i.*

Twierdzenie 1.

$$d(0,0) = 0$$
$$d(i,0) = i$$
$$d(0,j) = j$$
$$d(i,j) = min(d(i,j-1)+1, d(i-1,j)+1, d(i-1,j-1)+[a_i \neq b_j])$$

Wówczas $d(i,j) = L(a[1,\ldots,i], b[1,\ldots,j])$

Dowód. Pokażemy to indukcyjnie.
Zdefiniujmy kolejne warstwy:

$$W_0 = \{(0,0), `(0,1), \ldots (0,m), (1,0), \ldots, (n,0)\}$$
$$W_k = \{(i,j) : i+j-1 = k \wedge min(i,j) \geqslant 1\}$$
$$W_{n+m} = \{(n,m)\}$$
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & \ldots & m \\ 0 & 2 & 3 & 4 & \ldots & m+1 \\ 0 & 3 & 4 & 5 & \ldots & m+2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & n & n+1 & n+2 & \ldots & n+m \end{bmatrix}$$

1. Podstawa indukcji (k = 0), Wynika z lematów.

2. Krok indukcyjny

   - k = 1

$$W_1 = \{(1,1)\} \tag{2}$$
$$B(W_1) = B((1,1)) = \{(0,0), (1,0), (0,1)\} \subseteq W_0 \tag{3}$$

   - $k > 1$

$$\forall_{(i,j) \in W_k} \{(i-1,j), (i,j-1), (i-1,j-1)\} \subseteq W_0 \cup W_{k-2} \cup W_{k-1}$$
$$B(W_k) \subseteq W_0 \cup W_{k-2} \cup W_{k-1}$$

   Wybranie wartości minimum to po prostu wybranie odpowiedniego ruchu w danym momencie, takiego dla którego sumaryczny koszt jest najniższy.

□

3 Zadanie dodatkowe

Należy rozpatrzyć dwa inne przypadki.

- Wszystkie operacje mają różne koszty.
- Nie ma operacji zamiany znaku.
- Inny podział na warstwy. Pokazać, że istnieje algorytm w pamięci O(m).

$$W_0 = \{(0,0),(1,0),\ldots,(n,0),(0,1),\ldots,(0,m)\}$$
$$W_k = \{(i,j) : (j-1)n + (i-1) + 1 = k\}$$
$$W_{nm} = \{(n,m)\}$$
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & n+1 & 2n+1 & \ldots & (m-1)n+1 \\ 0 & 2 & n+2 & 2n+2 & \ldots & (m-1)n+2 \\ 0 & 3 & n+3 & 2n+3 & \ldots & (m-1)n+3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & n & 2n & 3n & \ldots & mn \end{bmatrix}$$