ГУАП

КАФЕДРА № 44

ОТЧЕТ
ЗАЩИЩЕН С ОЦЕНКОЙ

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ

ассистент		Е.К. Григорьев
должность, уч. степень, звание	подпись, дата	инициалы, фамилия

ОТЧЕТ О ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ №1

МОДЕЛИРОВАНИЕ ГЕНЕРАТОРОВ РАВНОМЕРНО РАСПРЕДЕЛЁННЫХ ПСЕВДОСЛУЧАЙНЫХ ЧИСЕЛ

по курсу: МОДЕЛИРОВАНИЕ

РАБОТУ ВЫПОЛНИЛ

СТУДЕНТ ГР. №	4143		Е.Д.Тегай
		подпись, дата	инициалы, фамилия

Санкт-Петербург 2023

Цель работы

Получить навыки моделирования наиболее известных генераторов равномерно распределенных псевдослучайных чисел в программной среде MATLAB/GNU Octave, а также первичной оценки качества полученных псевдослучайных чисел.

Ход работы

В данной лабораторной работе будут использоваться 3 алгоритма: мультипликативный конгруэнтный генератор, генератор Фиббоначчи с запаздыванием и вихрь Мерсенна. Формулы данных алгоритмов с некоторыми поснениями показаны на рисунках 1 – 3.

$$R_{n+1} = \left\{ \left(AR_n + C \right) \bmod M \right\},$$

где $A = 7^5$, $C = 0$, $M = 2^{32} - 1$, $\{\}$ – операция взятия дробной части числа. Данный алгоритм является наиболее простым. Период последовательности не может превышать M. Для старта генератору необходимо задать начальное значение R_n. Рекомендуется выбрать $R_n = 2^{-p}$ где p зависит от количества двоичных разрядов в мантиссе ячейки. В числах двойной точности, которыми по умолчанию оперируют MATLAB/GNU Octave это соответственно 52 разряда.

Рисунок 1 – Мультипликативный конгруэнтный генератор

$$R_n = \begin{cases} R_{n-a} - R_{n-b}, \text{если} \quad R_{n-a} \geq R_{n-b}; \\ R_{n-a} - R_{n-b} + 1, \text{если} \quad R_{n-a} < R_{n-b}; \end{cases}$$

где R_n – псевдослучайные числа в диапазоне [0,1]. a и b - целые положительные числа, называемые лагами или константами запаздывания. Для работы данному генератору требуется $\max\{a,b\}$ предыдущих сгенерированных случайных чисел, которые могут быть реализованы например мультипликативным конгруэнтным генератором. Константы запаздывания рекомендуется выбрать $a = 63$, b = 31.

Рисунок 2 – Генератор Фиббоначчи с запаздыванием

Для реализации вихря Мерсенна средствами MATLAB/GNU Octave необходимо использовать следующий код:

```
s = RandStream('mt19937ar')
r = rand(s,1,N);
```

где функция RandStream() создает поток псевдослучайных чисел, а аргумент 'mt19937ar' указывает на необходимость использовать алгоритм вихря Мерсенна. N – необходимое количество псевдослучайных чисел.

Рисунок 3 – Вихрь Мерсенна

МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫЙ КОНГРУЭНТНЫЙ ГЕНЕРАТОР

Код программы

```
%Задаём массив R
R = [];
%Начальное значение массива R
R(1) = 2^-52;
%Константы в формуле мультипликативного конгруэнтного генератора
A = 7^5;
M = 2^32-1;
%Массив N, содержащий объём каждого набора чисел (3 набора по 1к, 5к, 10к
%чисел)
N = [1000, 5000, 10000];
%Обозначение каждого объёма (для удобства вывода)
for V = 1:length(N)
%Прохождение по всем величинам, начиная со второго (согласно формуле)
for i = 2:N(V)
%Вычисления согласно формуле.
% mod - операция взятия дробной части от
%деления пернвого числа на второе.
R(i) = mod(A*R(i-1), M);
%Затем идёт округление до целого числа, а затем вычитание с целью взятия
%лишь дробной части
R(i) = R(i) - fix(R(i));
end
%Вывод полученных результатов
disp("Математическое ожидание для набора из " + N(V) + " чисел равно " + mean(R));
disp("Дисперсия для набора из " + N(V) + " чисел равно " + var(R));
disp("Среднее квадратичное отклонение для набора из " + N(V) + " чисел равно " +
std(R));
disp(" ");
%Задание гистограммы
figure();
histogram(R);
grid on;
xlabel('Частота');
ylabel('Значение');
%Вычисление эмпирической функции
ecdf(R);
%Построение графика распределения на плоскости случайной величины
plot(R, 'o');
end
```

Гистограммы

Гистограммы, соответствующие каждому набору чисел, показаны на рисунках 4 – 6.

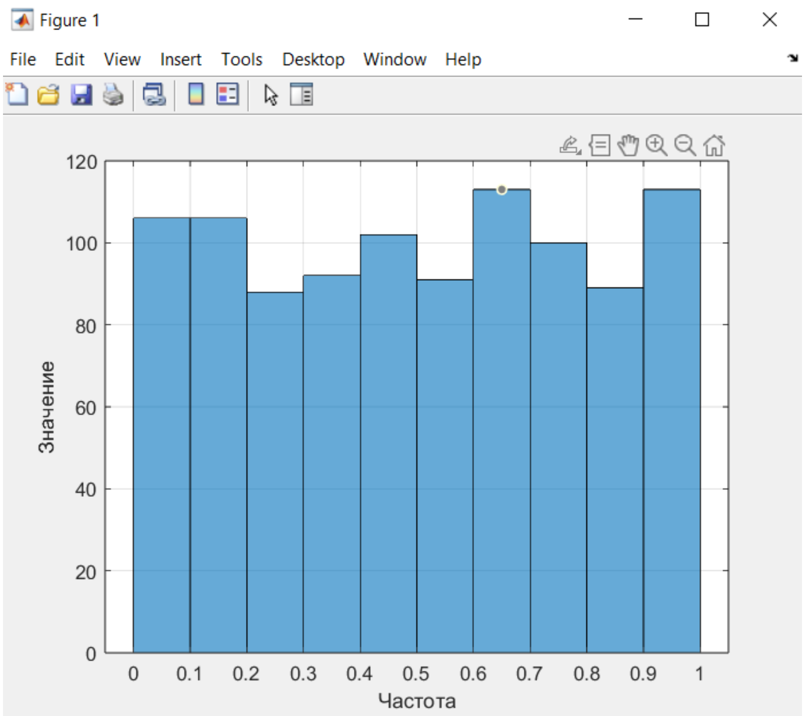

Рисунок 4 – Гистограмма для набора из 1000 чисел

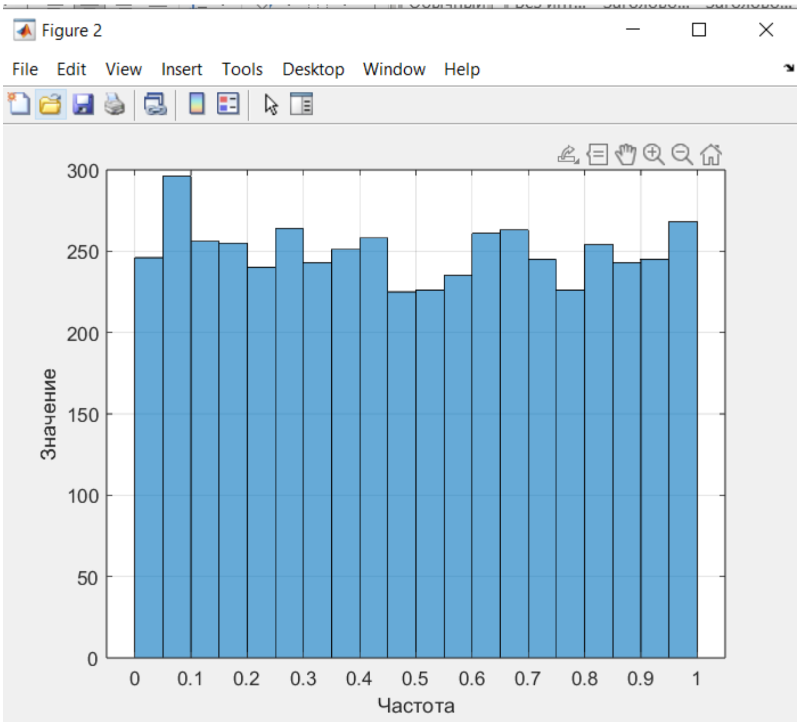

Рисунок 5 – Гистограмма для набора из 5000 чисел

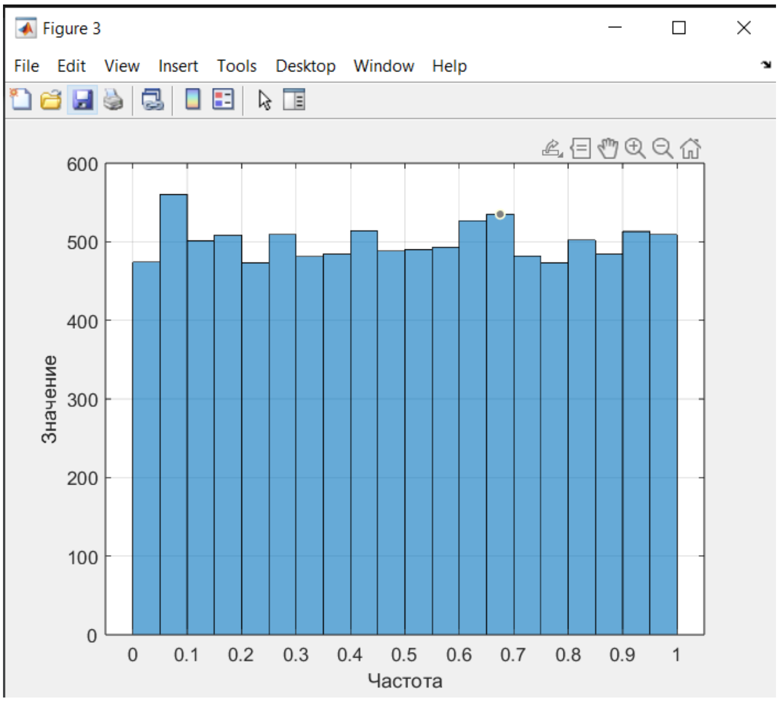

Рисунок 6 – Гистограмма для набора из 10000 чисел

Эмпирические функции

Построенные эмпирические функции, соответствующие каждому набору чисел, показаны на рисунках 7 – 9.

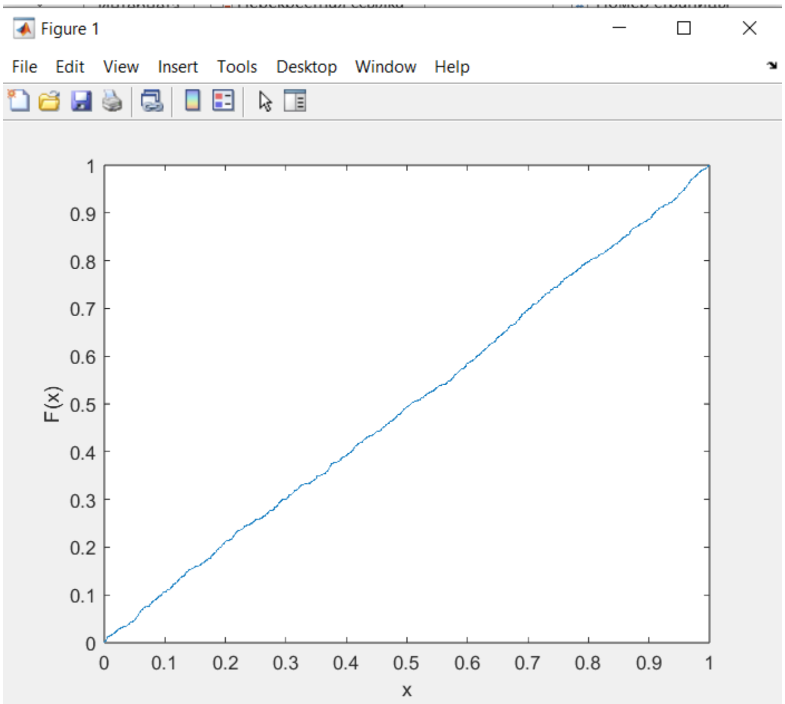

Рисунок 7 – Эмпирическая функция для набора из 1000 чисел

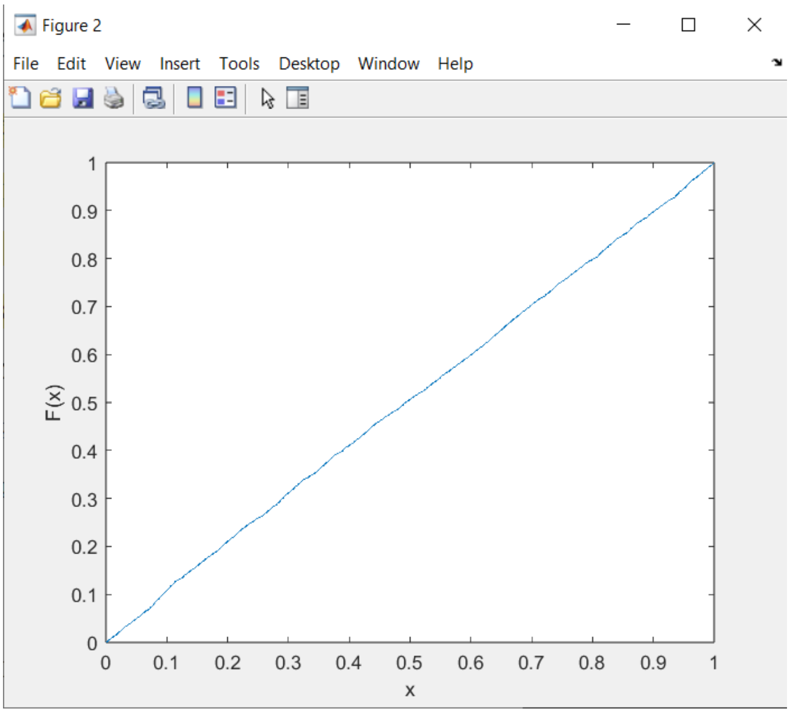

Рисунок 8 – Эмпирическая функция для набора из 5000 чисел

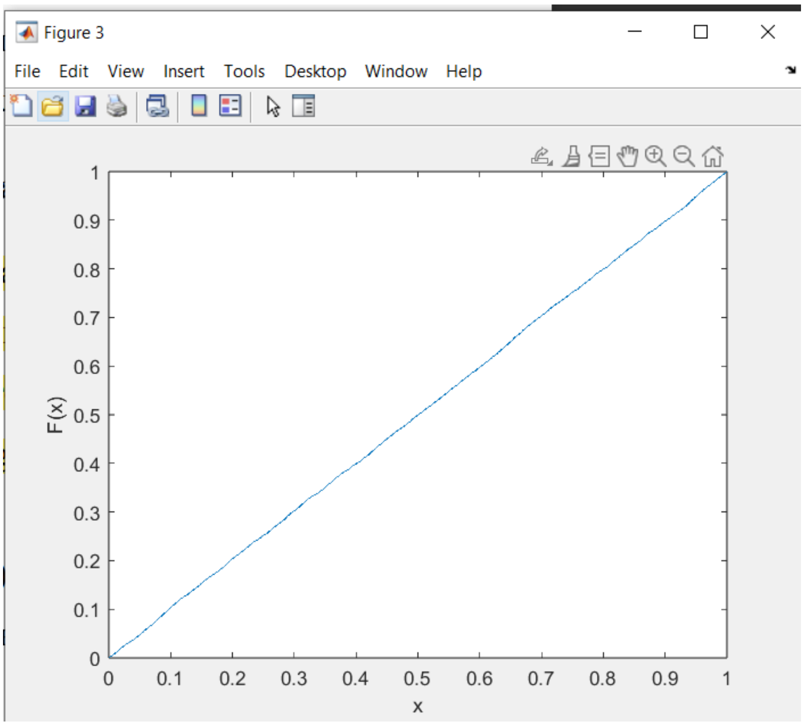

Рисунок 9 – Эмпирическая функция для набора из 10000 чисел

Распределения на плоскости

Распределение на плоскости для каждого набора чисел представлены на рисунках 10 – 12.

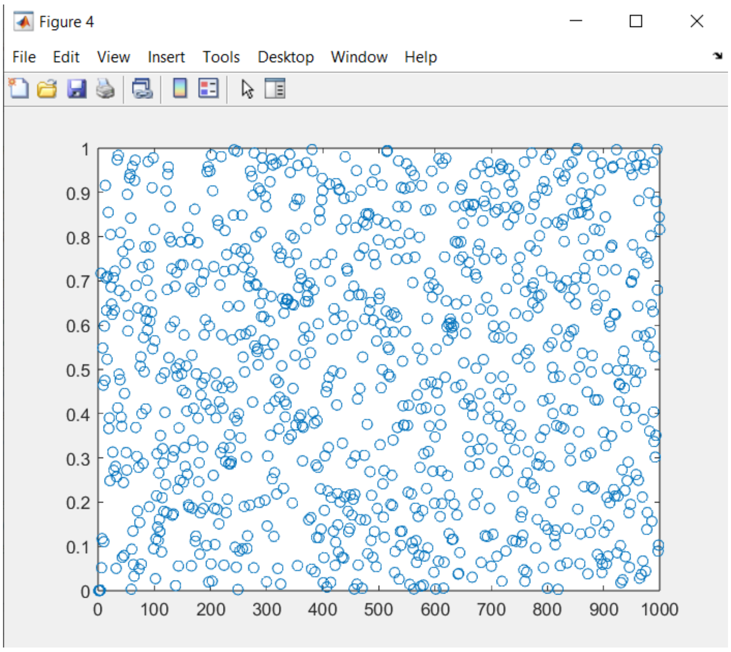

Рисунок 10 – Распределение на плоскости для набора из 1000 чисел

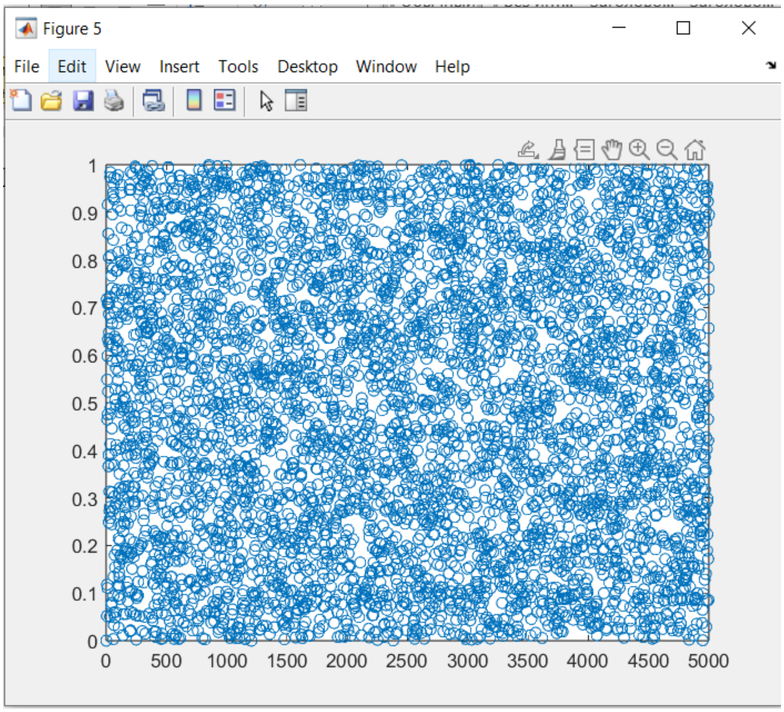

Рисунок 11 – Распределение на плоскости для набора из 5000 чисел

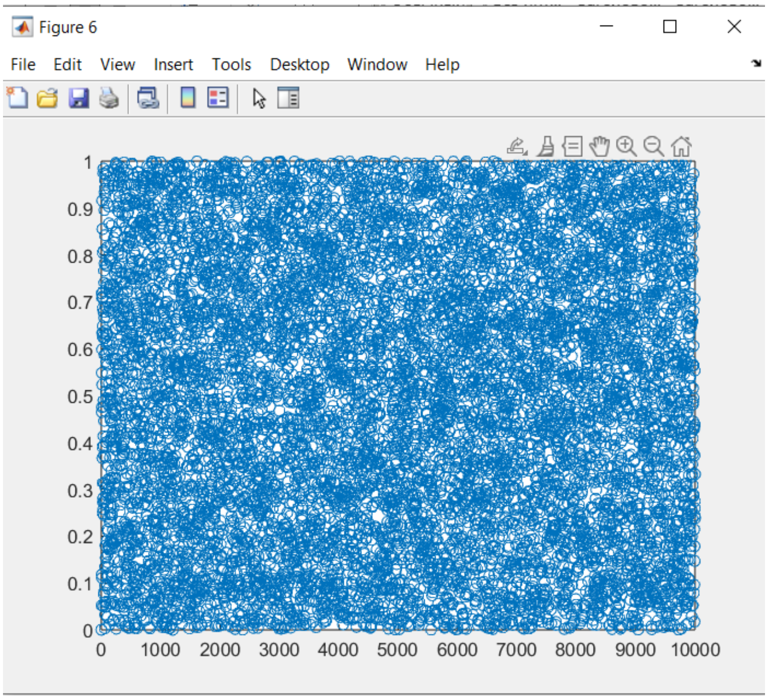

Рисунок 12 – Распределение на плоскости для набора из 10000 чисел

ГЕНЕРАТОР ФИББОНАЧЧИ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Код программы

```
%Задаём массив R
R = [];
%Начальное значение массива R
R(1) = 2^-52;
%Константы в формуле мультипликативного конгруэнтного генератора
A = 7^5;
M = 2^32-1;
%Массив N, содержащий объём каждого набора чисел (3 набора по 1к, 5к, 10к
%чисел)
N = [1000, 5000, 10000];
%Константы в формуле для генератора Фиббоначчи
a = 63;
b = 31;
%Обозначение каждого объёма (для удобства вывода)
for V = 1:length(N)
%Прохождение по всем величинам, начиная со второго (согласно формуле)
    for i = 2:a
%Вычисления согласно формуле.
% mod - операция взятия дробной части от
%деления пернвого числа на второе.
    R(i) = mod(A*R(i-1), M);
%Затем идёт округление до целого числа, а затем вычитание с целью взятия
%лишь дробной части
    R(i) = R(i) - fix(R(i));
    end
%Расчёт по формуле
for j = (a+1):N(V);
    if R(j-a) >= R(j-b)
R(j) = R(j-a) - R(j-b);
else
    R(j) = R(j-a) - R(j-b) + 1;
end
end
```

```
%Вывод полученных результатов
disp("Максимальное значение для набора из " + N(V) + " чисел равно " + max(R));
disp("Математическое ожидание для набора из " + N(V) + " чисел равно " + mean(R));
disp("Дисперсия для набора из " + N(V) + " чисел равно " + var(R));
disp("Среднее квадратичное отклонение для набора из " + N(V) + " чисел равно " +
std(R));
disp(" ");
%Задание гистограммы
figure();
histogram(R);
grid on;
xlabel('Частота');
ylabel('Значение');
%Вычисление эмпирической функции
ecdf(R);
%Построение графика распределения на плоскости случайной величины
plot(R, 'o');
end
```

Гистограммы

Гистограммы, соответствующие каждому набору чисел, показаны на рисунках 13 – 15.

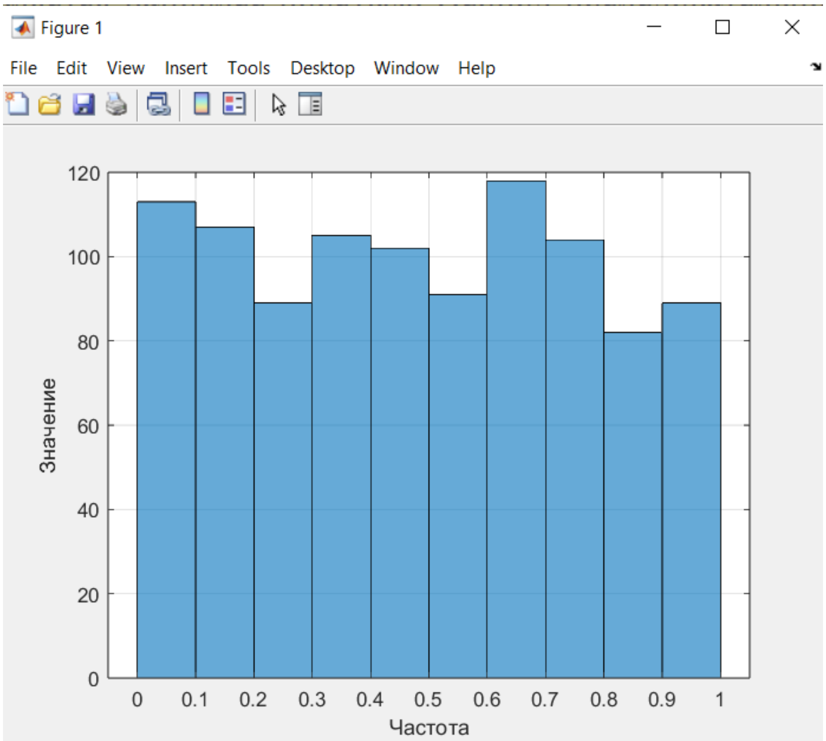

Рисунок 13 – Гистограмма для набора из 1000 чисел

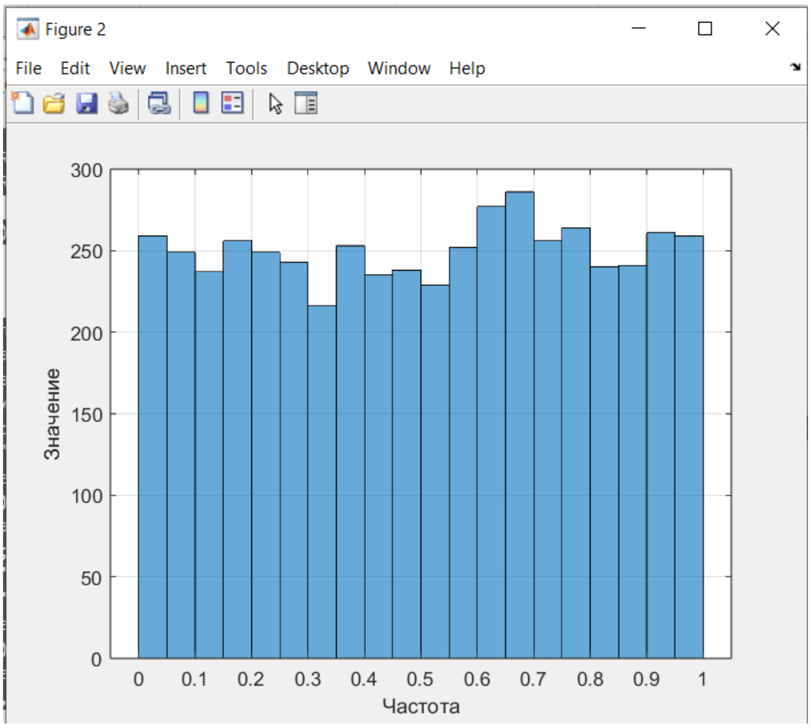

Рисунок 14 – Гистограмма для набора из 5000 чисел

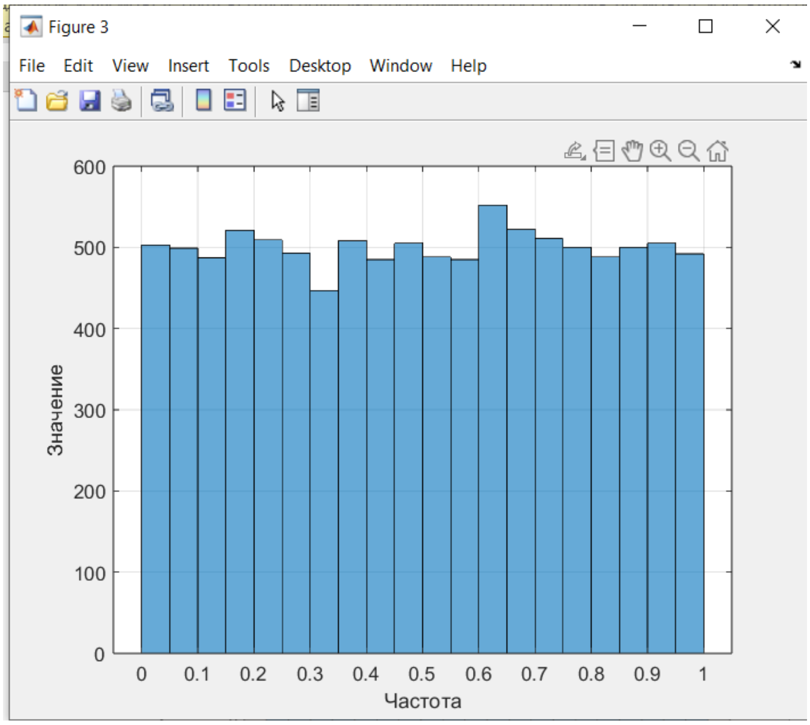

Рисунок 15 – Гистограмма для набора из 10000 чисел

Эмпирические функции

Построенные эмпирические функции, соответствующие каждому набору чисел, показаны на рисунках 16 – 18.

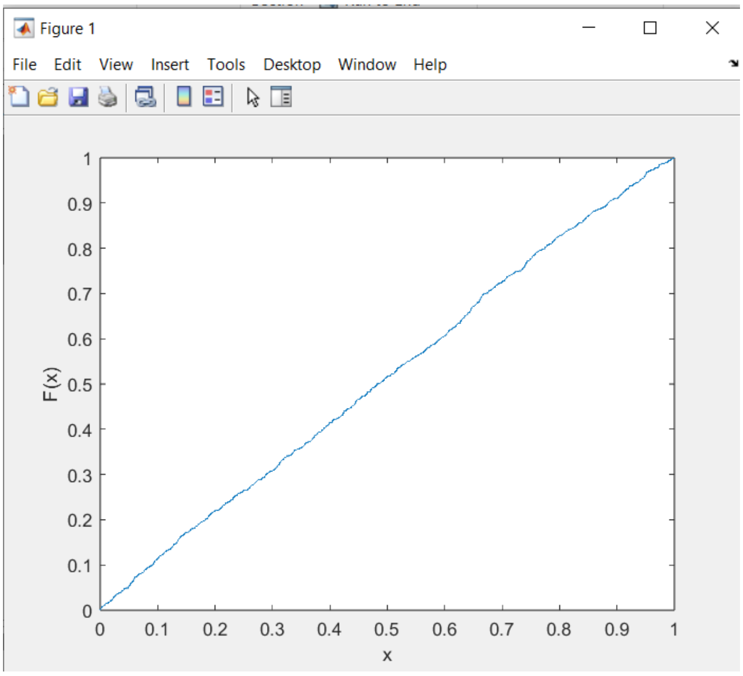

Рисунок 16 – Эмпирическая функция для набора из 1000 чисел

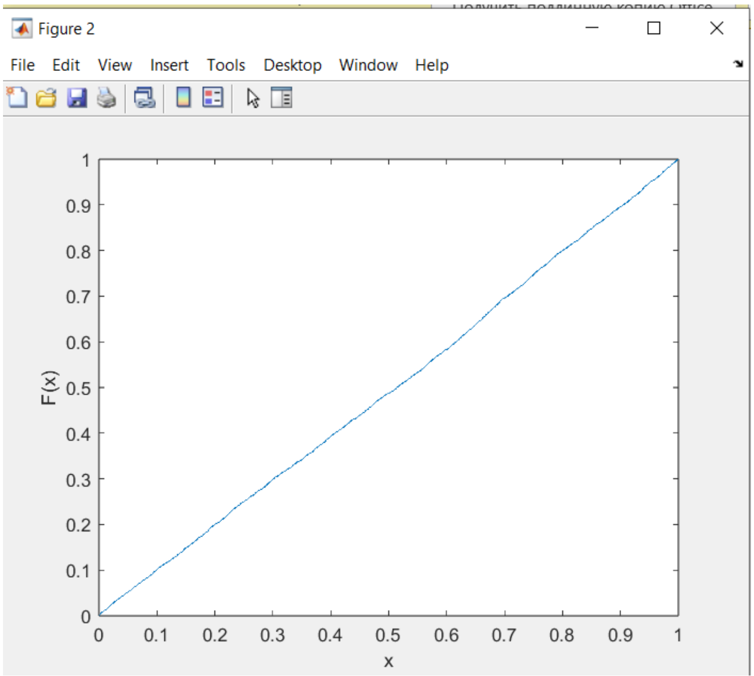

Рисунок 17 – Эмпирическая функция для набора из 5000 чисел

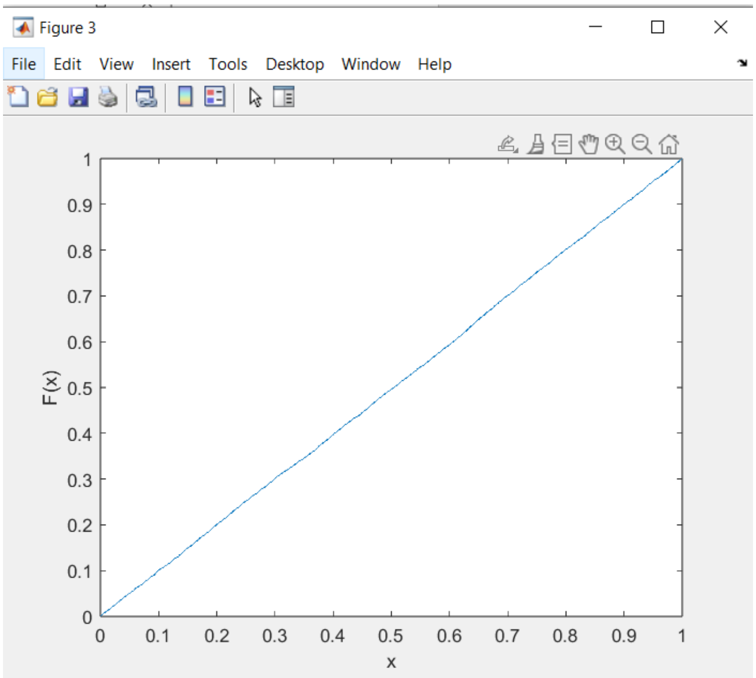

Рисунок 18 – Эмпирическая функция для набора из 10000 чисел

Распределения на плоскости

Распределение на плоскости для каждого набора чисел представлены на рисунках 19– 21.

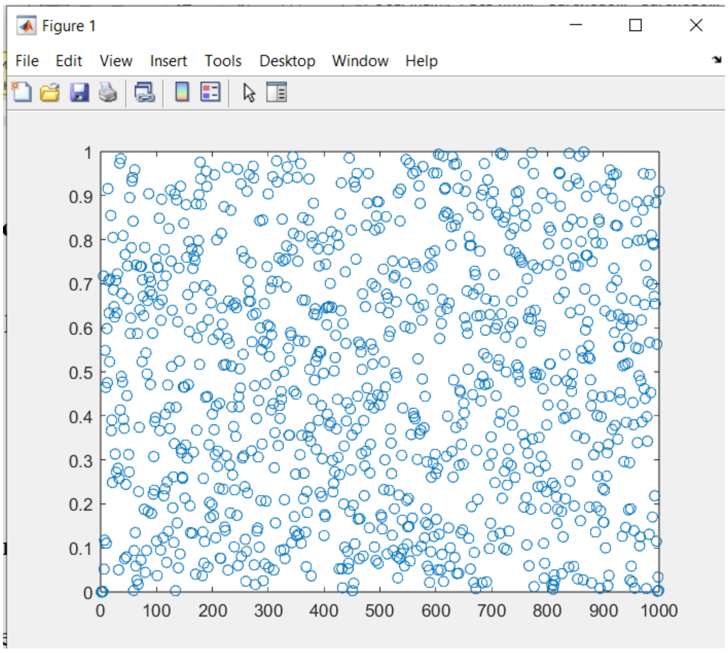

Рисунок 19 – Распределение на плоскости для набора из 1000 чисел

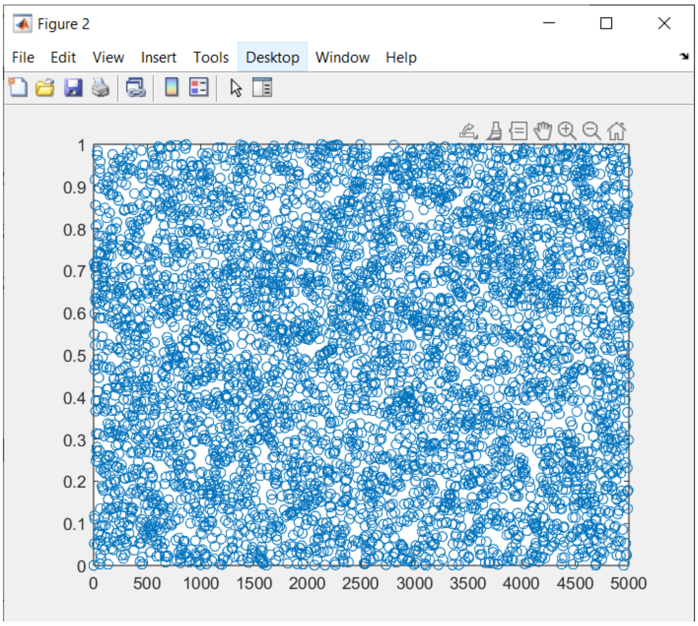

Рисунок 20 – Распределение на плоскости для набора из 5000 чисел

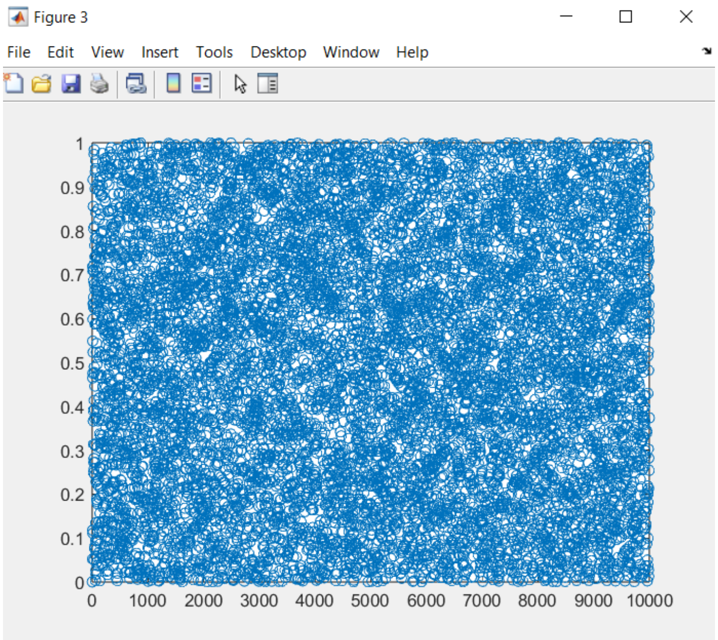

Рисунок 21 – Распределение на плоскости для набора из 10000 чисел

ВИХРЬ МЕРСЕННА

Код программы

```
%Массив N, содержащий объём каждого набора чисел (3 набора по 1к, 5к, 10к
%чисел)
N = [1000, 5000, 10000];
%Создание потока псевдослучайных чисел
s = RandStream("mt19937ar")
%Обозначение каждого объёма (для удобства вывода)
for V = 1:length(N)
    r = rand(s,1,N(V));


%Вывод полученных результатов
disp("Максимальное значение для набора из " + N(V) + " чисел равно " + max(r));
```

```
disp("Математическое ожидание для набора из " + N(V) + " чисел равно " + mean(r));
disp("Дисперсия для набора из " + N(V) + " чисел равно " + var(r));
disp("Среднее квадратичное отклонение для набора из " + N(V) + " чисел равно " +
std(r));
disp(" ");
%Задание гистограммы
figure();
histogram(r);
grid on;
xlabel('Частота');
ylabel('Значение');
%Вычисление эмпирической функции
ecdf(R);
%Построение графика распределения на плоскости случайной величины
plot(r, 'o');
end
```

Гистограммы

Гистограммы, соответствующие каждому набору чисел, показаны на рисунках 22 – 24.

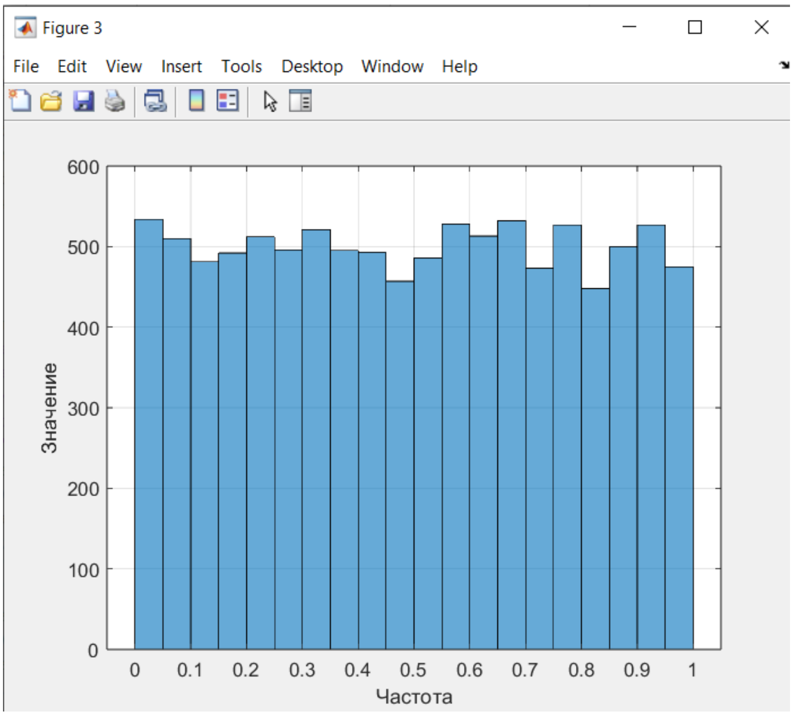

Рисунок 22 – Гистограмма для набора из 1000 чисел

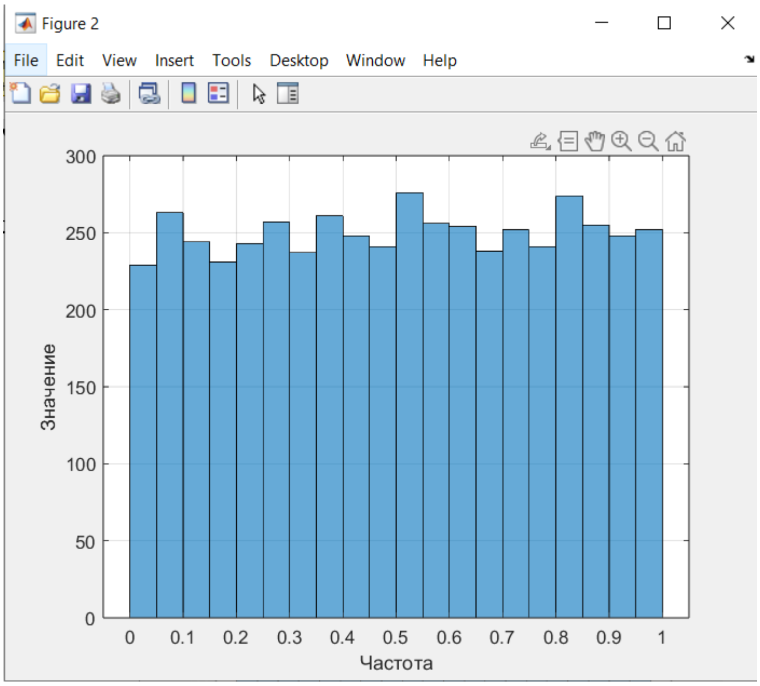

Рисунок 23 – Гистограмма для набора из 5000 чисел

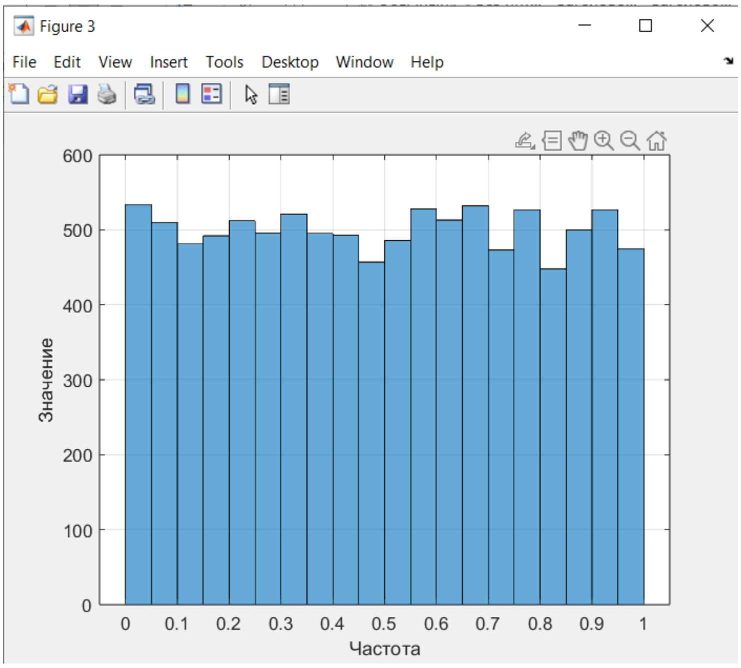

Рисунок 24 – Гистограмма для набора из 10000 чисел

Эмпирические функции

Построенные эмпирические функции, соответствующие каждому набору чисел, показаны на рисунках 25 – 27.

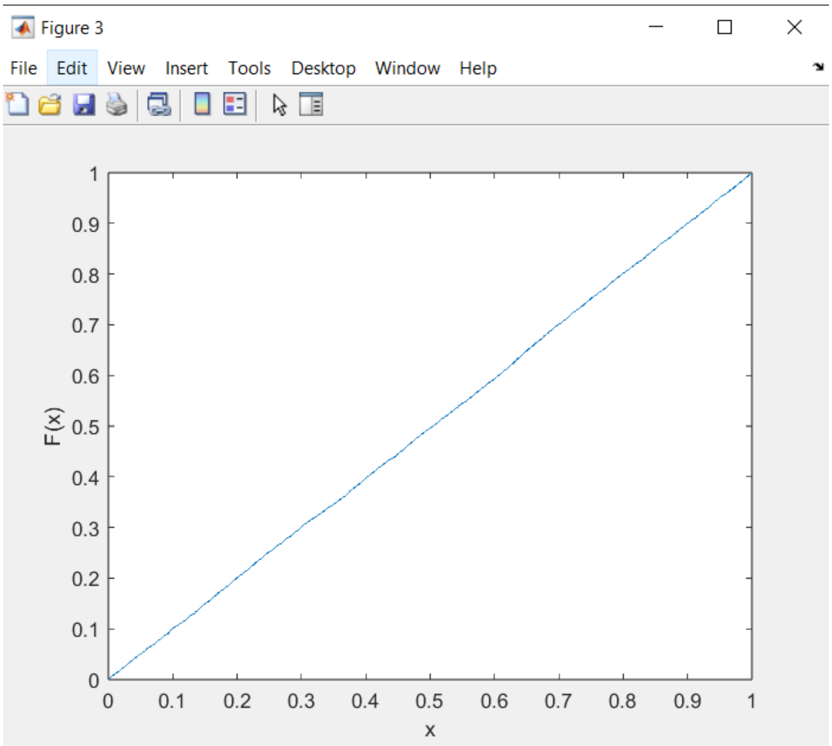

Рисунок 25 – Эмпирическая функция для набора из 1000 чисел

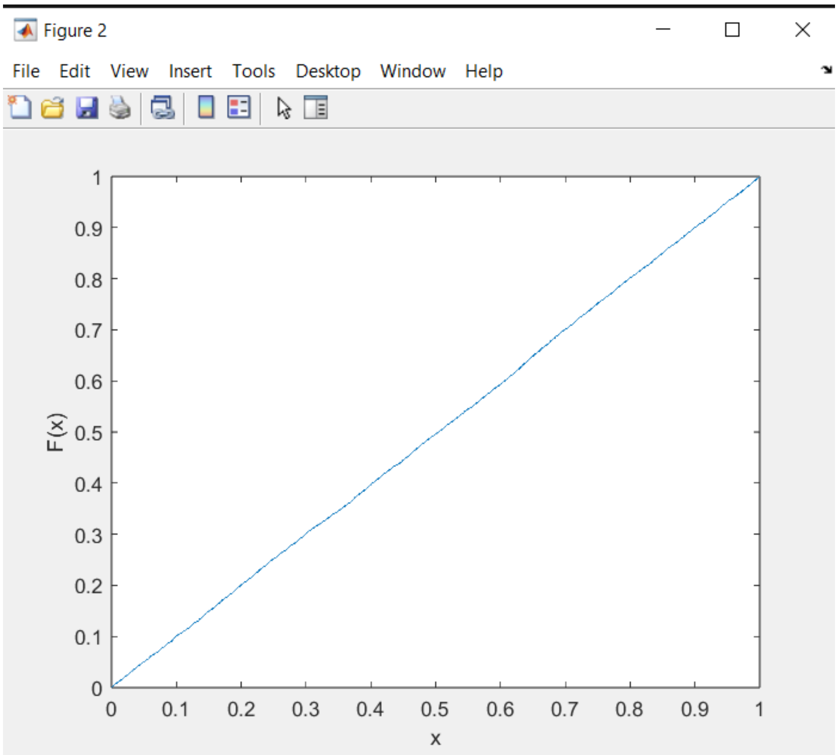

Рисунок 26 – Эмпирическая функция для набора из 5000 чисел

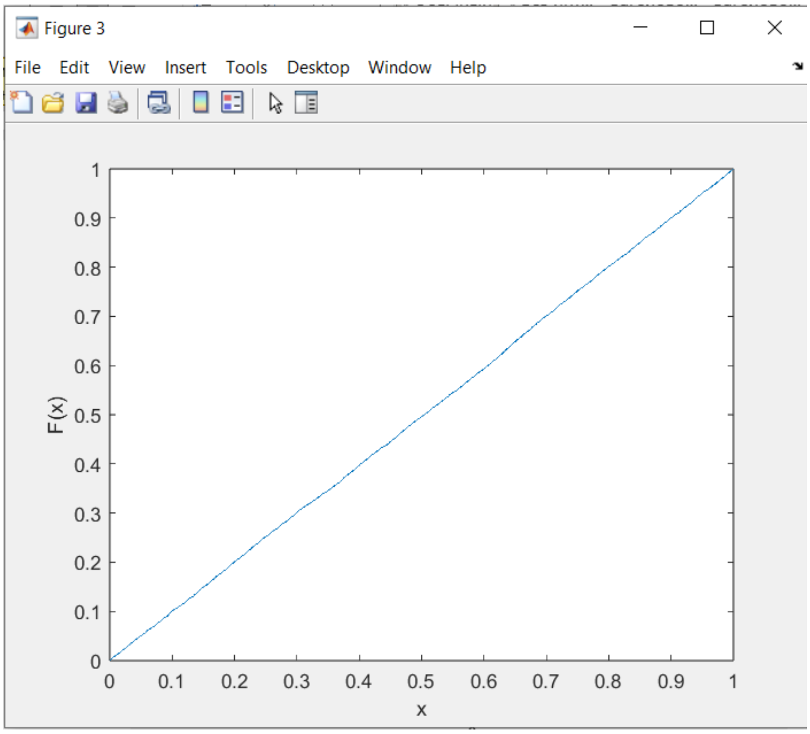

Рисунок 27 – Эмпирическая функция для набора из 10000 чисел

Распределения на плоскости

Распределение на плоскости для каждого набора чисел представлены на рисунках 28– 29.

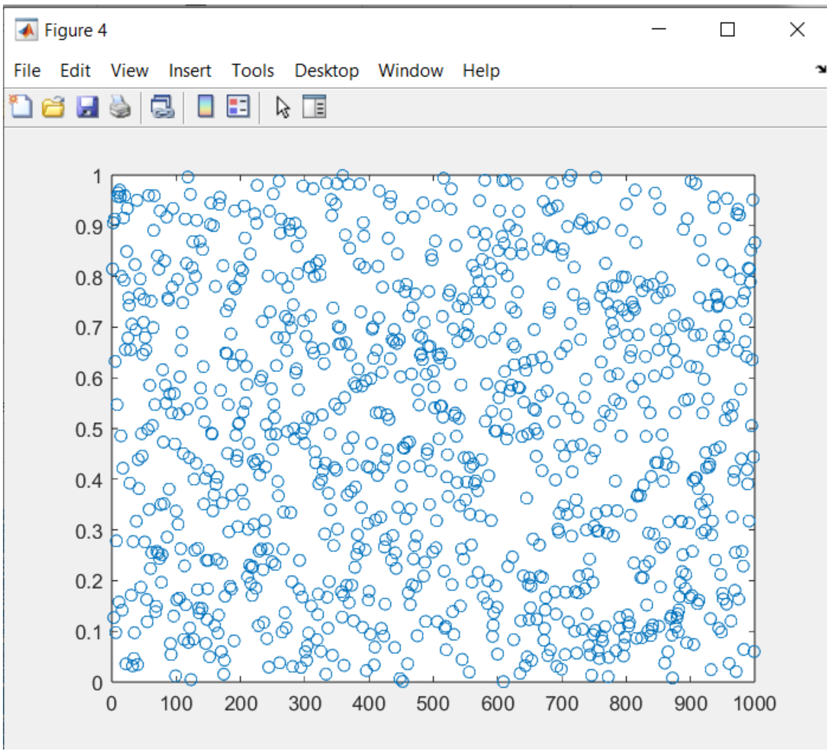

Рисунок 28 – Распределение на плоскости для набора из 1000 чисел

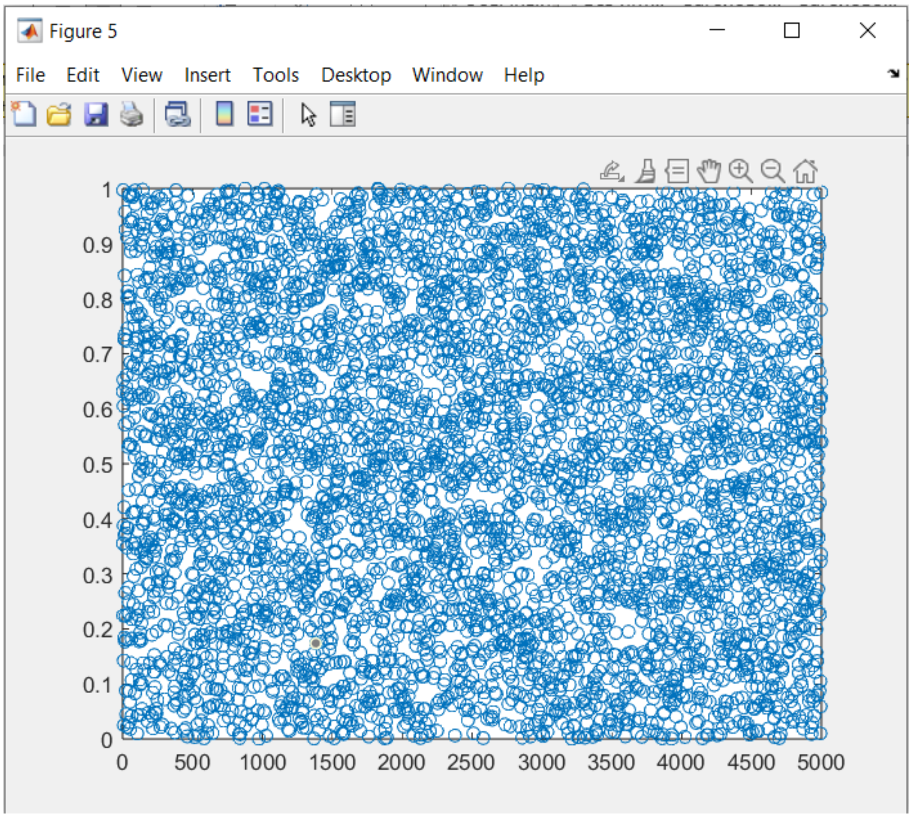

Рисунок 29 – Распределение на плоскости для набора из 5000 чисел

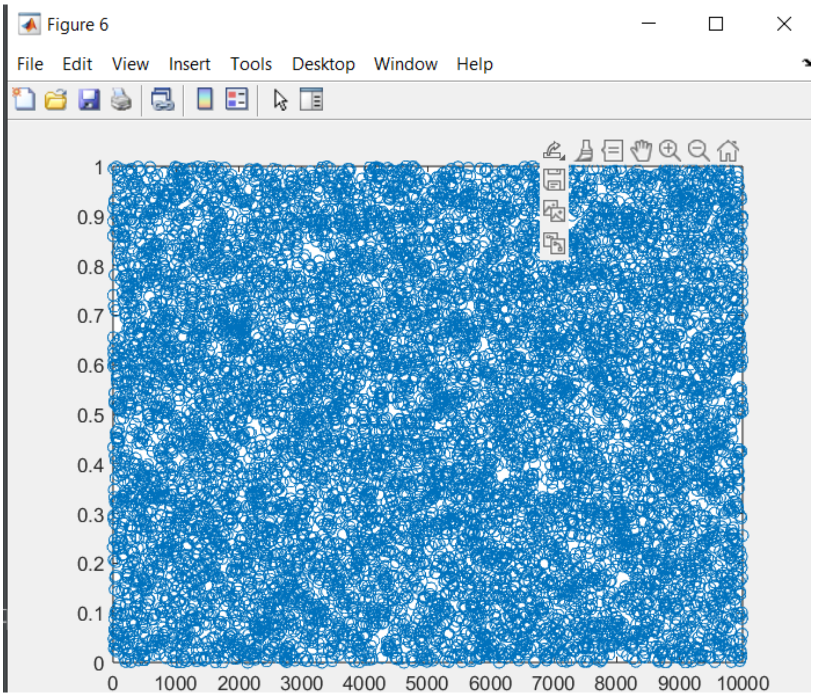

Рисунок 30 – Распределение на плоскости для набора из 10000 чисел

Вычисления

Результаты вычисления математического ожидания, дисперсии и СКО представлены на рисунках 31 - 33.

```
Математическое ожидание для набора из 1000 чисел равно 0.50371
Дисперсия для набора из 1000 чисел равно 0.086156
Среднее квадратичное отклонение для набора из 1000 чисел равно 0.29352

Математическое ожидание для набора из 5000 чисел равно 0.49584
Дисперсия для набора из 5000 чисел равно 0.08525
Среднее квадратичное отклонение для набора из 5000 чисел равно 0.29198

Математическое ожидание для набора из 10000 чисел равно 0.49967
Дисперсия для набора из 10000 чисел равно 0.083806
Среднее квадратичное отклонение для набора из 10000 чисел равно 0.28949
```

Рисунок 31 – Результаты вычислений конгруэнтного генератора

```
Максимальное значение для набора из 1000 чисел равно 0.99931
Математическое ожидание для набора из 1000 чисел равно 0.48505
Дисперсия для набора из 1000 чисел равно 0.081988
Среднее квадратичное отклонение для набора из 1000 чисел равно 0.28634

Максимальное значение для набора из 5000 чисел равно 0.99977
Математическое ожидание для набора из 5000 чисел равно 0.50521
Дисперсия для набора из 5000 чисел равно 0.08413
Среднее квадратичное отклонение для набора из 5000 чисел равно 0.29005

Максимальное значение для набора из 10000 чисел равно 0.99987
Математическое ожидание для набора из 10000 чисел равно 0.50137
Дисперсия для набора из 10000 чисел равно 0.083353
Среднее квадратичное отклонение для набора из 10000 чисел равно 0.28871
```

Рисунок 32 – Результаты вычислений генератора Фиббоначчи

```
Максимальное значение для набора из 1000 чисел равно 0.99949
Математическое ожидание для набора из 1000 чисел равно 0.48883
Дисперсия для набора из 1000 чисел равно 0.080226
Среднее квадратичное отклонение для набора из 1000 чисел равно 0.28324

Максимальное значение для набора из 5000 чисел равно 0.99979
Математическое ожидание для набора из 5000 чисел равно 0.50435
Дисперсия для набора из 5000 чисел равно 0.082568
Среднее квадратичное отклонение для набора из 5000 чисел равно 0.28735

Максимальное значение для набора из 10000 чисел равно 0.99984
Математическое ожидание для набора из 10000 чисел равно 0.49795
Дисперсия для набора из 10000 чисел равно 0.083692
Среднее квадратичное отклонение для набора из 10000 чисел равно 0.2893
```

Рисунок 33 – Результаты вычислений вихря Мерсенна

Теоретические вычисления

Математическое ожидание M:

$$\text{M} = \frac{0+1}{2} = \mathbf{0,5}$$

Дисперсия D:

$$M(x^2) = \int_a^b \frac{x^2}{b-a}dx = \frac{x^3}{3(b-a)}|_a^b = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} = \frac{(b-a)(b^2+ab+a^2)}{3(b-a)}$$

$$= \frac{b^2+ab+a^2}{3}$$

$$D = M(x^2) - [M(x)^2] = \frac{b^2+ab+a^2}{3} - \frac{(b-a)^2}{4} =$$

$$= \frac{b^2+ab+a^2}{3} - \frac{b^2+2ab+a^2}{4} = \frac{4b^2+ab+4a^2-3b^2-6ab-3a^2}{12} =$$

$$= \frac{b^2-2ab+a^2}{12} = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(1-0)^2}{12} = \mathbf{0,083}$$

СКО:

$$\sigma = \sqrt{D} = \mathbf{0,3}$$

Функция распределения равномерного закона распределения

$$F(x) = \int_a^x \frac{1}{b-a}dx = \frac{x}{b-a}|_a^x = \frac{x}{b-a} - \frac{a}{b-a} = \frac{x-a}{b-a}$$

График функций показан на рисунках 34 - 35.

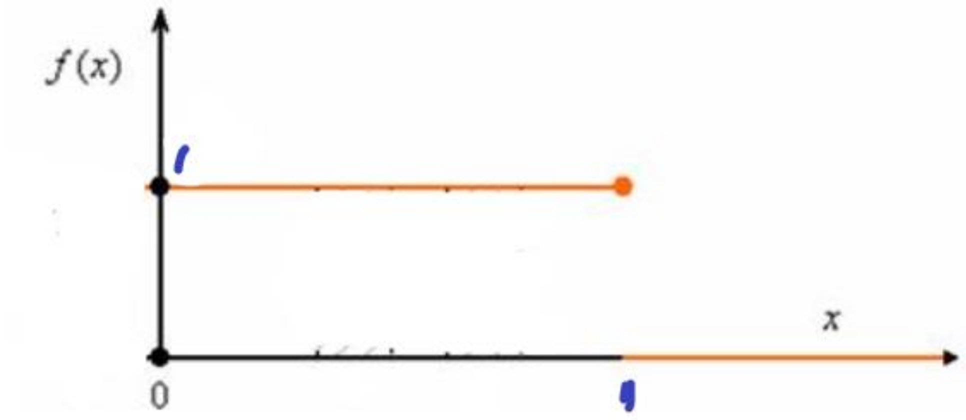

Рисунок 34 – График функции

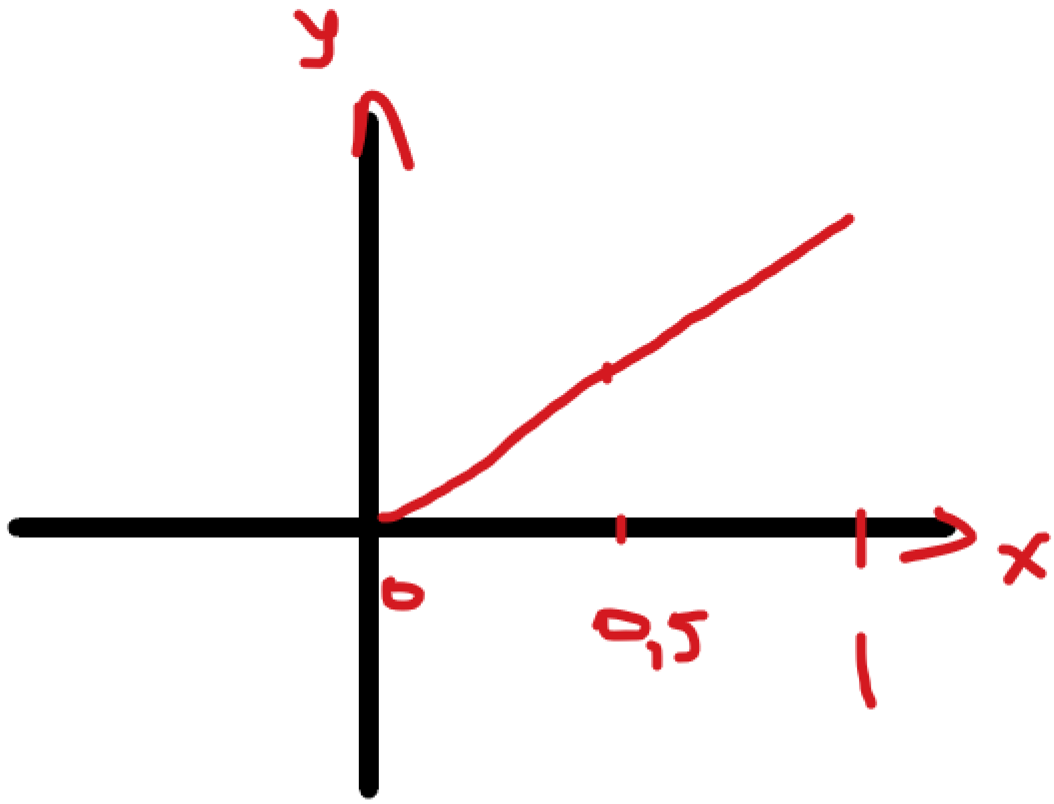

Рисунок 35 – График функции

Вывод

В результате данной лабораторной работы были получены навыки моделирования наиболее известных генераторов равномерно распределенных псевдослучайных чисел в программной среде MATLAB/GNU Octave, а также первичной оценки качества полученных псевдослучайных чисел. Если проводить сравнительный анализ полученных результатов, то можно сделать следующие выводы:

- Относительно математического ожидания более приближённые значения продемонстрировал конгруэнтный генератор – 0,49974 в сравнении с 0,5.
- Относительно дисперсии более приближённые значения продемонстрировал генератор Фиббоначчи– 0,08316 в сравнении с 0,083.
- Относительно СКО более приближённые значения продемонстрировал вихрь Мерсенна – 0,29166 в сравнении с 0,3.