ГУАП

КАФЕДРА № 44

ОТЧЕТ
ЗАЩИЩЕН С ОЦЕНКОЙ

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ

ассистент		Е.К. Григорьев
должность, уч. степень, звание	подпись, дата	инициалы, фамилия

ОТЧЕТ О ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ №3

МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН С ЗАДАННЫМ ЗАКОНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ МЕТОДОМ ОБРАТНОЙ ФУНКЦИИ

по курсу: МОДЕЛИРОВАНИЕ

РАБОТУ ВЫПОЛНИЛ

СТУДЕНТ ГР. №	4143		Е.Д.Тегай
		подпись, дата	инициалы, фамилия

Санкт-Петербург 2023

Цель работы

Получить навыки моделирования случайных величин с заданным законом распределения методом обратной функции в программной среде MATLAB/GNU Octave, а также первичной оценки качества полученных псевдослучайных чисел.

Индивидуальный вариант

Содержимое индивидуального варианта показано на рисунке 1. Следует отметить, что для удобства восприятия номер варианта и исходные данные выделены жёлтым цветом.

Варианты задания

Таблица 1

№	*Распределение*	№	*Распределение*
1	Рэлея	**11**	Коши
2	Коши	**12**	Трапециевидное
3	Трапециевидное	**13**	Парето
4	Парето	**14**	Экспоненциальное
5	Экспоненциальное	**15**	Вейбулла
6	Вейбулла	**16**	Лапласа
7	Лапласа	**17**	Полукруговое Вигнера
8	Полукруговое Вигнера	**18**	Лог-логистическое
9	Лог-логистическое	**19**	Трапециевидное
10	Рэлея	**20**	Экспоненциальное

Рисунок 1 – Индивидуальный вариант

Теоретические сведения о законе распределения по варианту

Трапециевидное распределение – непрерывное распределение вероятностей, график функции плотности вероятности которого напоминает трапецию. Это показано на рисунке 2.

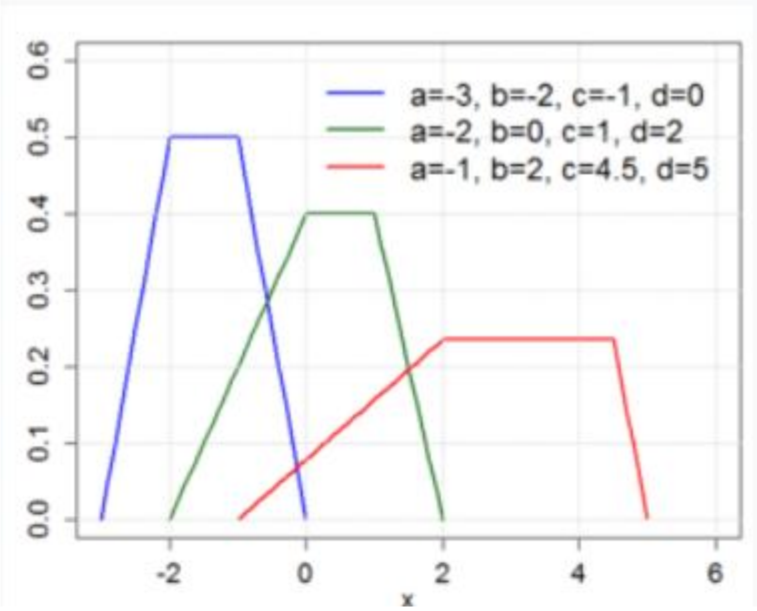


Рисунок 2 – Функция плотности вероятности

Каждое такое распределение имеет нижнюю границу ***a*** и верхнюю границу ***d***, где ***a*** < ***d***, за пределами которой нет значений. Кроме этого, в распределении вероятностей есть 2 резкие точки изгиба (не дифференцируемые неоднородности) - ***b*** и ***c***, которые встречаются между ***a*** и ***d*** таким образом, что ***a*** ≤ ***b*** ≤ ***c*** ≤ ***d***.

Особыми случаями трапециевидного распределения являются равномерное распределение (***a*** = ***b*** и ***c*** = ***d***) и треугольное распределение (***b*** = ***c***). Вся информация о данном распределении представлена на рисунке 3.

Параметры	• $a\ (a < d)$- нижняя граница • $b\ (a \leq b < c)$- начало уровня • $c\ (b < c \leq d)$- конец уровня • $d\ (c \leq d)$- верхняя граница
Поддержка	$x \in [a, d]$
PDF	$\begin{cases} \frac{2}{d+c-a-b}\frac{x-a}{b-a} & \text{for } a \leq x < b \\ \frac{2}{d+c-a-b} & \text{for } b \leq x < c \\ \frac{2}{d+c-a-b}\frac{d-x}{d-c} & \text{for } c \leq x \leq d \end{cases}$
CDF	$\begin{cases} \frac{1}{d+c-a-b}\frac{1}{b-a}(x-a)^2 & \text{for } a \leq x < b \\ \frac{1}{d+c-a-b}(2x-a-b) & \text{for } b \leq x < c \\ 1-\frac{1}{d+c-a-b}\frac{1}{d-c}(d-x)^2 & \text{for } c \leq x \leq d \end{cases}$
Среднее	$\frac{1}{3(d+c-b-a)}\left(\frac{d^3-c^3}{d-c}-\frac{b^3-a^3}{b-a}\right)$
Дисперсия	$\frac{1}{6(d+c-b-a)}\left(\frac{d^4-c^4}{d-c}-\frac{b^4-a^4}{b-a}\right)-\mu^2$
Энтропия	$\frac{d-c+b-a}{2(d+c-b-a)}+\ln\left(\frac{d+c-b-a}{2}\right)$
MGF	$\frac{2}{d+c-b-a}\frac{1}{t^2}\left(\frac{e^{dt}-e^{ct}}{d-c}-\frac{e^{bt}-e^{at}}{b-a}\right)$

Рисунок 3 – Трапециевидное распределение

Функция распределения продемонстрирована на рисунке 4.

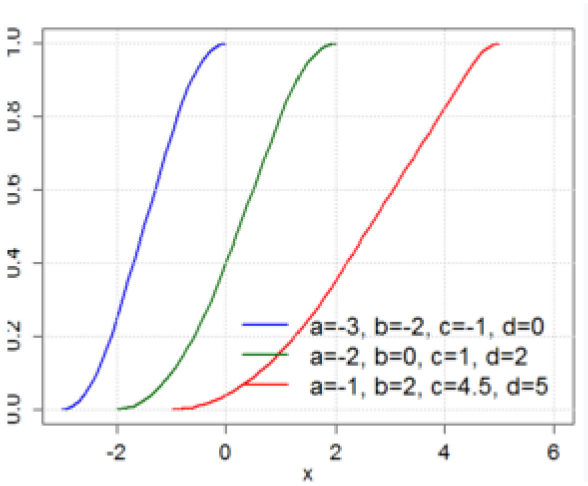
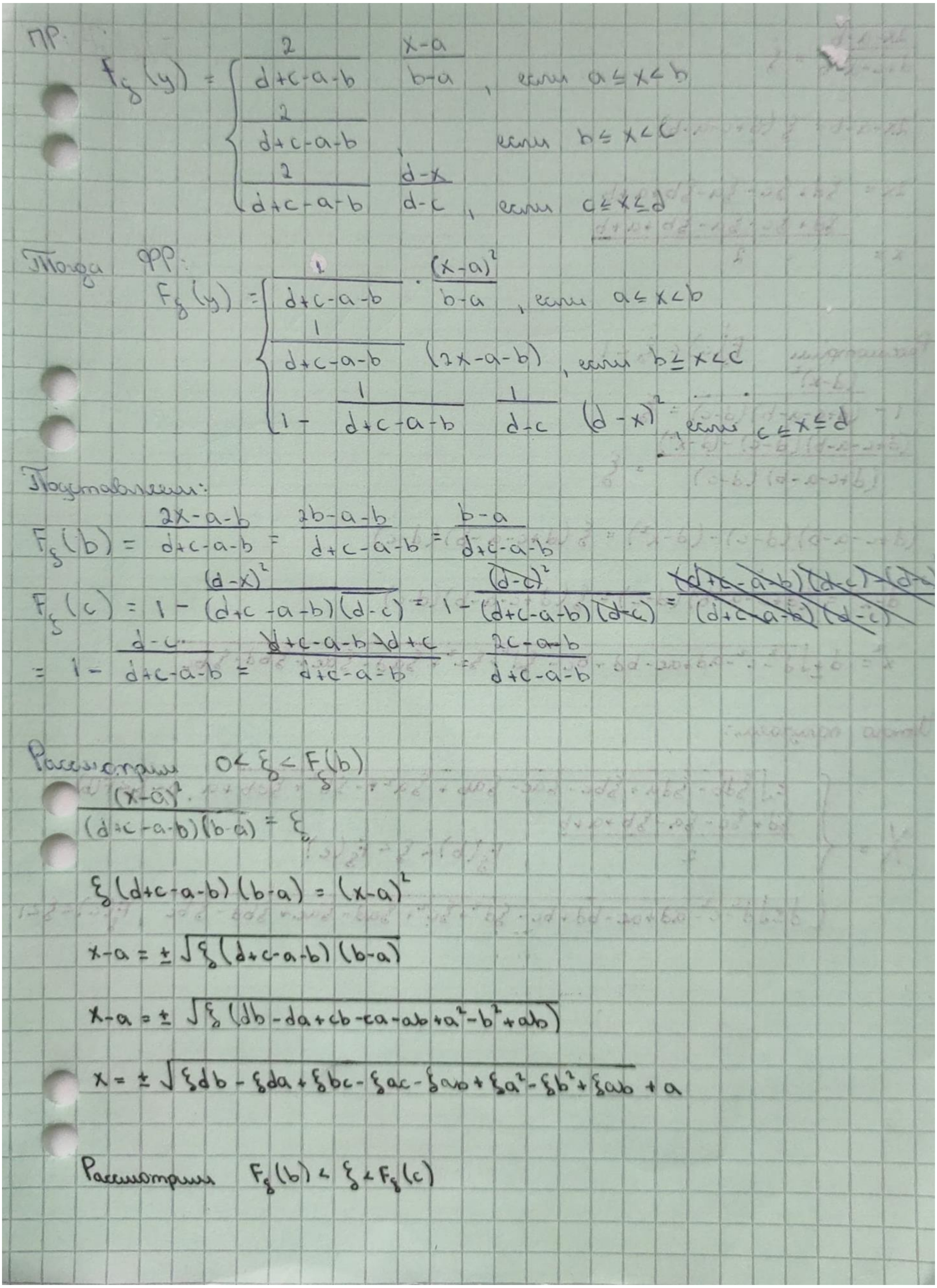


Рисунок 4 – Функция распределения

Синтез алгоритма генерации псевдослучайных чисел

Искомый синтез продемонстрирован на рисунках 5 – 6.



ПР.

$$f_\xi(y)=\begin{cases}\frac{2}{d+c-a-b}\cdot\frac{x-a}{b-a}, & \text{если } a\le x<b\\ \frac{2}{d+c-a-b}, & \text{если } b\le x<c\\ \frac{2}{d+c-a-b}\cdot\frac{d-x}{d-c}, & \text{если } c\le x\le d\end{cases}$$

Тогда ФР:

$$F_\xi(y)=\begin{cases}\frac{1}{d+c-a-b}\cdot\frac{(x-a)^2}{b-a}, & \text{если } a\le x<b\\ \frac{1}{d+c-a-b}(2x-a-b), & \text{если } b\le x<c\\ 1-\frac{1}{d+c-a-b}\cdot\frac{1}{d-c}(d-x)^2, & \text{если } c\le x\le d\end{cases}$$

Подставляем:

$$F_\xi(b)=\frac{2x-a-b}{d+c-a-b}=\frac{2b-a-b}{d+c-a-b}=\frac{b-a}{d+c-a-b}$$

$$F_\xi(c)=1-\frac{(d-x)^2}{(d+c-a-b)(d-c)}=1-\frac{(d-c)^2}{(d+c-a-b)(d-c)}=\cancel{\frac{(d+c-a-b)(d-c)-(d-c)^2}{(d+c-a-b)(d-c)}}$$

$$=1-\frac{d-c}{d+c-a-b}=\frac{d+c-a-b-d+c}{d+c-a-b}=\frac{2c-a-b}{d+c-a-b}$$

Рассмотрим $0<\xi<F_\xi(b)$

$$\frac{(x-a)^2}{(d+c-a-b)(b-a)}=\xi$$

$$\xi(d+c-a-b)(b-a)=(x-a)^2$$

$$x-a=\pm\sqrt{\xi(d+c-a-b)(b-a)}$$

$$x-a=\pm\sqrt{\xi(db-da+cb-ca-ab+a^2-b^2+ab)}$$

$$x=\pm\sqrt{\xi db-\xi da+\xi bc-\xi ac-\xi ab+\xi a^2-\xi b^2+\xi ab}+a$$

Рассмотрим $F_\xi(b)<\xi<F_\xi(c)$

Рисунок 5 – Синтез алгоритма генерации

$$\frac{2x-a-b}{d+c-a-b} = \xi$$

$$2x-a-b = \xi(d+c-a-b)$$

$$2x = \xi d + \xi c - \xi a - \xi b + a + b$$

$$x = \frac{\xi d + \xi c - \xi a - \xi b + a + b}{2}$$

Рассмотрим $F_\xi(c) < \xi < 1$

$$1 - \frac{(d-x)^2}{(d+c-a-b)(d-c)} = \xi$$

$$\frac{(d+c-a-b)(d-c) - (d-x^2)}{(d+c-a-b)(d-c)} = \xi$$

$$(d+c-a-b)(d-c) - (d-x^2) = \xi(d+c-a-b)(d-c)$$

$$d-x^2 = (d+c-a-b)(d-c) - \xi(d+c-a-b)(d-c)$$

$$x = d \pm \sqrt{d^2 - c^2 - ad + ac - bd + bc - \xi d^2 + \xi c^2 + \xi ad - \xi ac + \xi bd - \xi bc}$$

Итого получаем:

$$X = \begin{cases} \pm\sqrt{\xi db - \xi da + \xi bc - \xi ac - \xi ab + \xi a^2 - \xi b^2 + \xi ab} + a, & 0 < \xi < F(b) \\ \dfrac{\xi d + \xi c - \xi a - \xi b + a + b}{2}, & F_\xi(b) < \xi < F_\xi(c) \\ d \pm \sqrt{d^2 - c^2 - ad + ac - bd + bc - \xi d^2 + \xi c^2 + \xi ad - \xi ac + \xi bd - \xi bc}, & F_\xi(c) < \xi < 1 \end{cases}$$

Рисунок 6 – Синтез алгоритма генерации

Код программы

```
clear all
close all
clc

% Кол-во псевдослучайных чисел
N = 10000;

X=zeros(1,0.5 * N);
Y=zeros(1,0.5 * N);

% Встроенный генератор ПСЧ равномерно
% распределенных на интервале (0,1)
r1=rand(1,N);



% Параметры моделируемого распределения
a = -1;
b = 2;
c = 4.5;
d = 5;


% Вычисление значения функции в точке c
F_b = (b - a)/(d + c - a - b);
F_c = (2 * c - a - b)/(d + c - a - b);
y = [];

% Генерация ПСЧ по синтезированному алгоритму:
for i=1:N
     if ((r1(i) > 0) && (r1(i) < F_b))
        x = a+ sqrt(r1(i)*(d + c - a - b)*(b - a));
     else if ((r1(i) > F_b) && (r1(i) < F_c))
        x = (r1(i) * (d + c - a - b) + a + b)/2;
     else
        x = d - sqrt((1 - r1(i)) * (d + c - a - b)*(d - c));
        end
    end
    y(i) = x;
end

% Гистограмма абсолютных частот
figure();
histogram(y);
grid on;
xlabel('Value')
ylabel('Frequency')

% Эмпирическая функция распределения
figure();
ecdf(y);
grid on;
xlabel('X');
ylabel('F(X)');
for s=1:(0.5*N)
    X(s)=y(2*s-1);
    Y(s)=y(2*s);
end

% Распределение на плоскости
```

```
figure();
scatter(X, Y);
grid on;

% Вычисление параметров
MO = mean(y);
D = var(y);
SKO = std(y);
```

Результаты работы программы

Графики гистограмм показаны на рисунках 7 – 9.

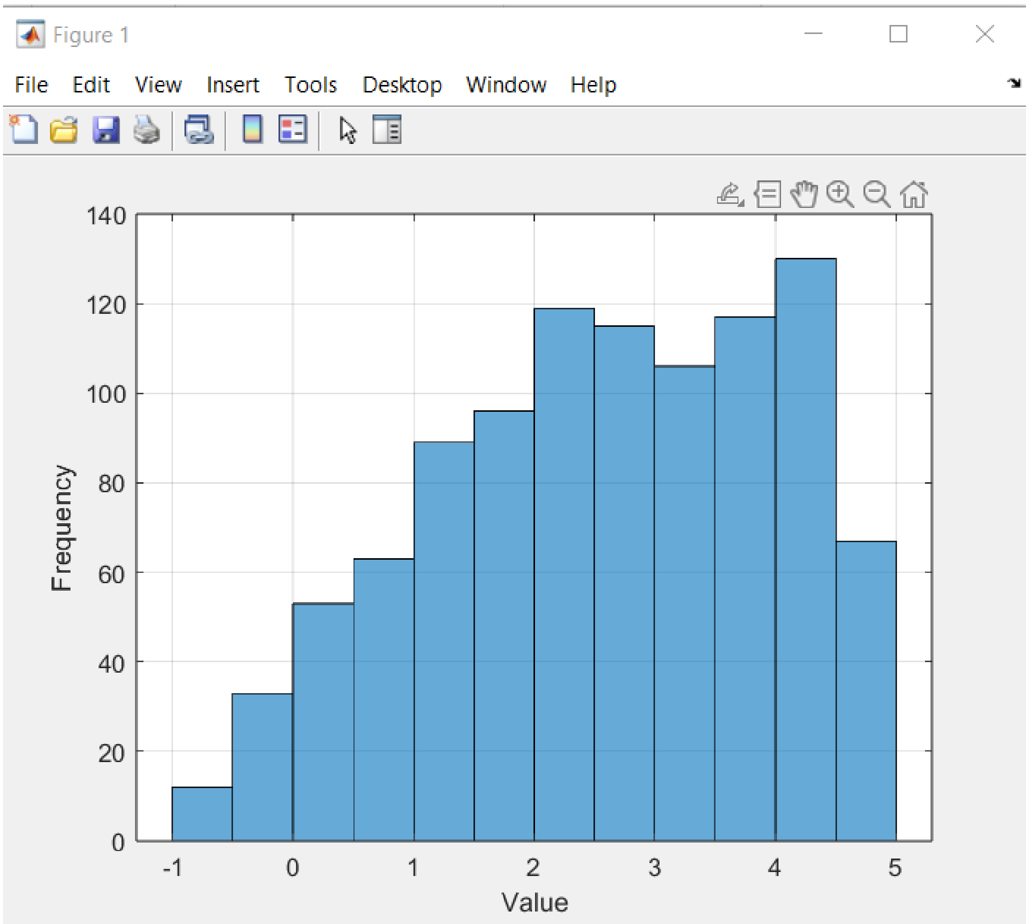


Рисунок 7 – Гистограмма для N = 1000

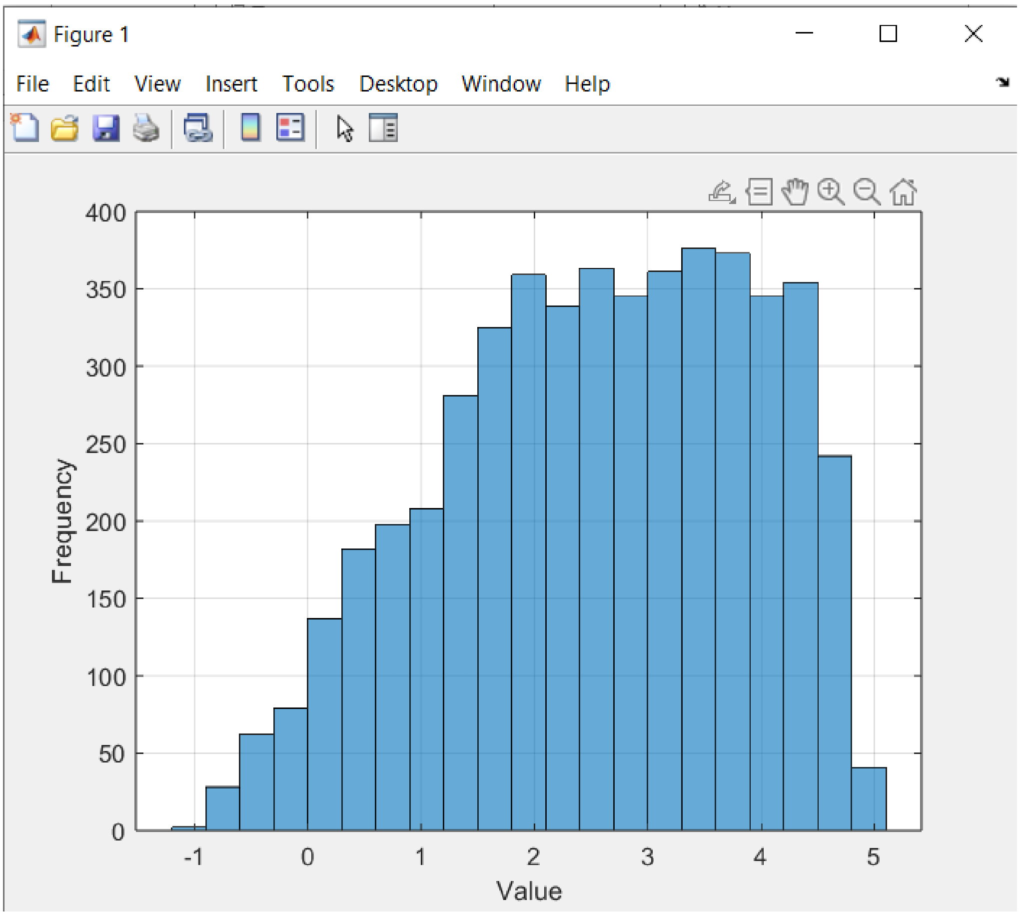


Рисунок 8 – Гистограмма для N = 5000

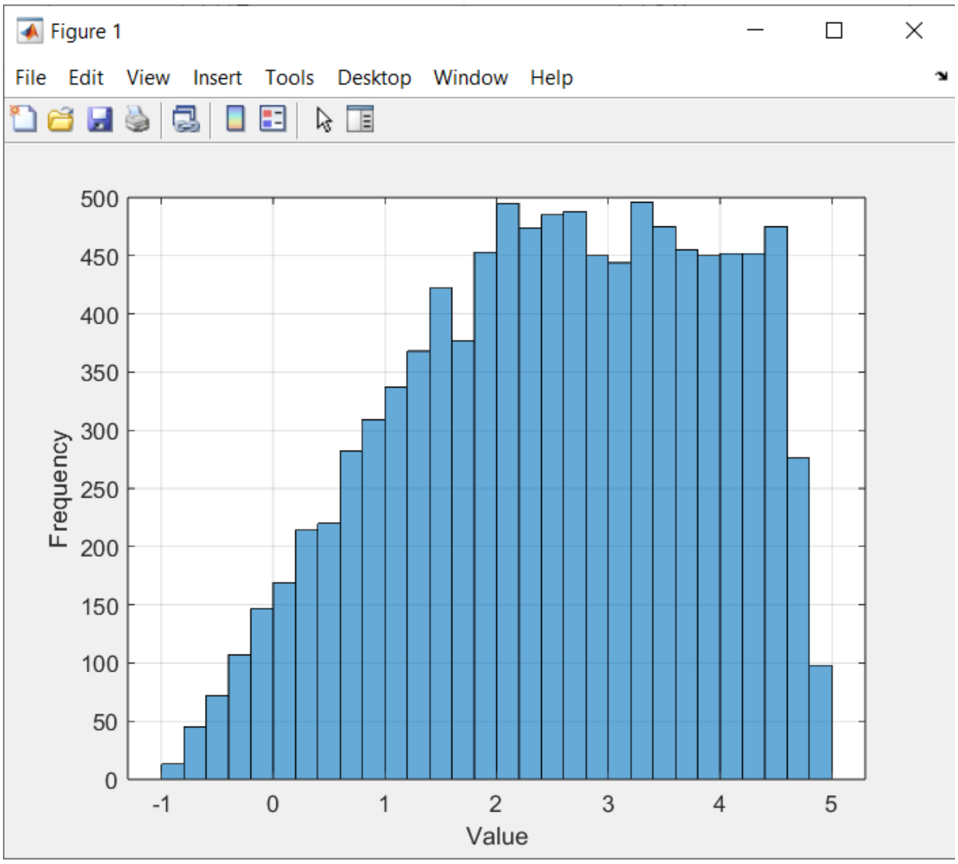


Рисунок 9 – Гистограмма для N = 10000

Графики эмпирических функций показаны на рисунках 10 – 12.

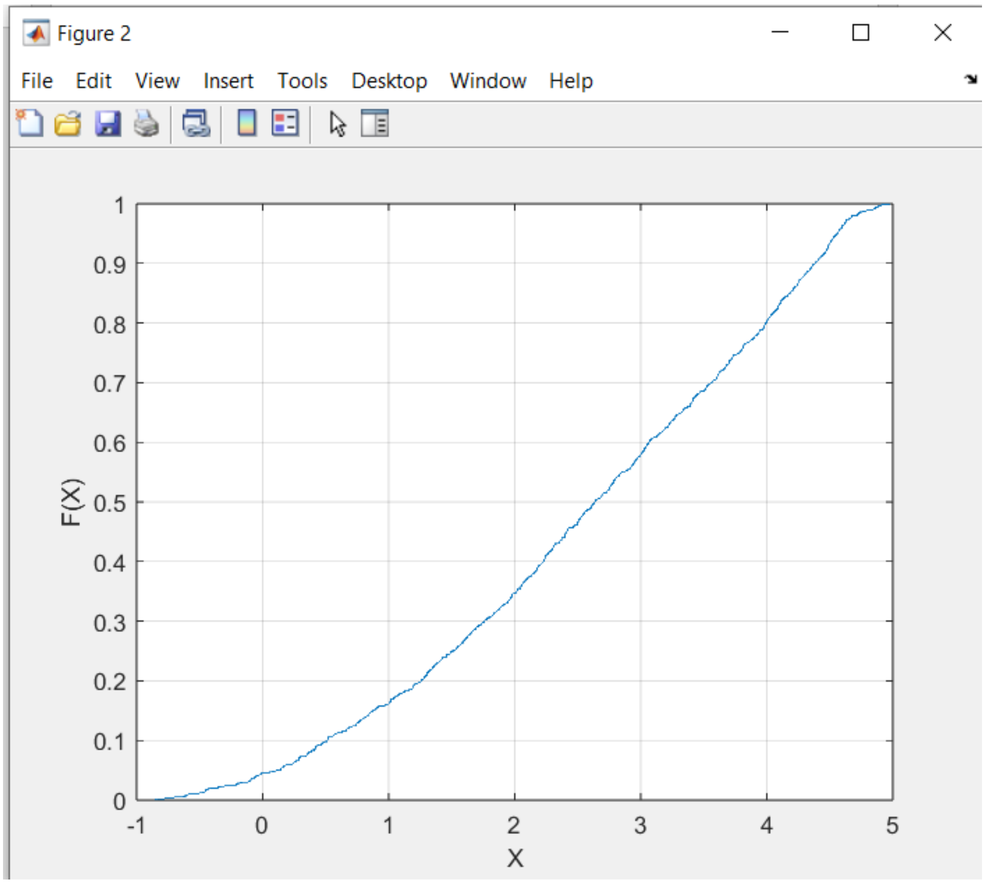


Рисунок 10 – Эмпирическая функция для N = 1000

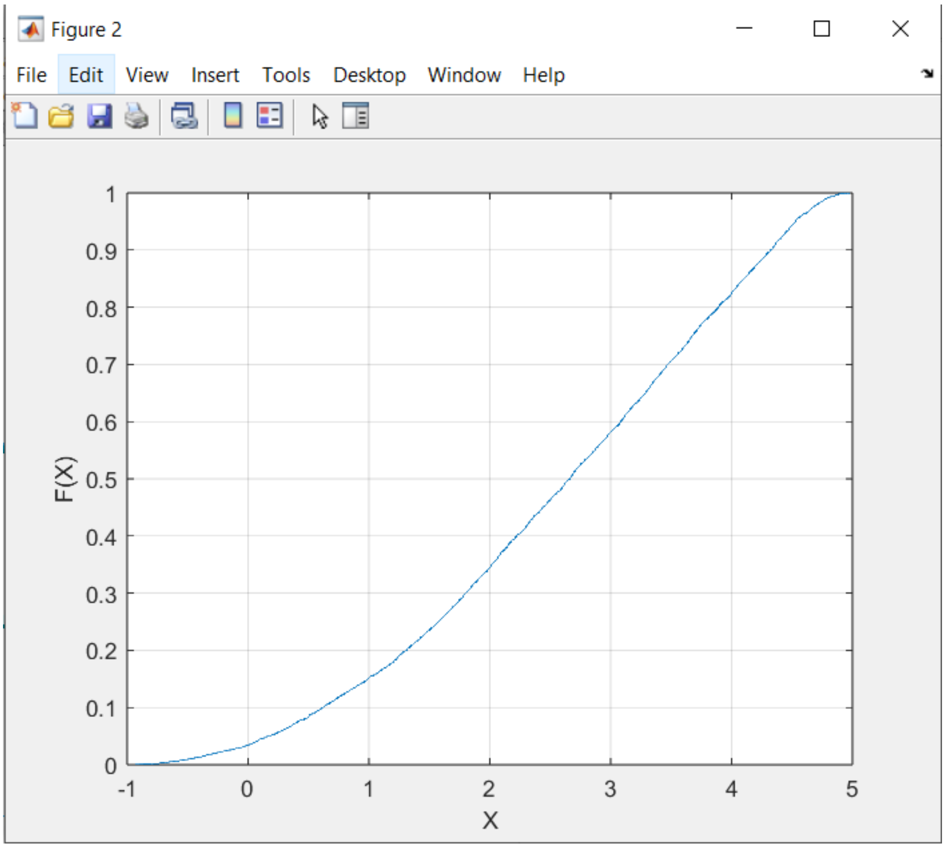


Рисунок 11 – Эмпирическая функция для N = 5000

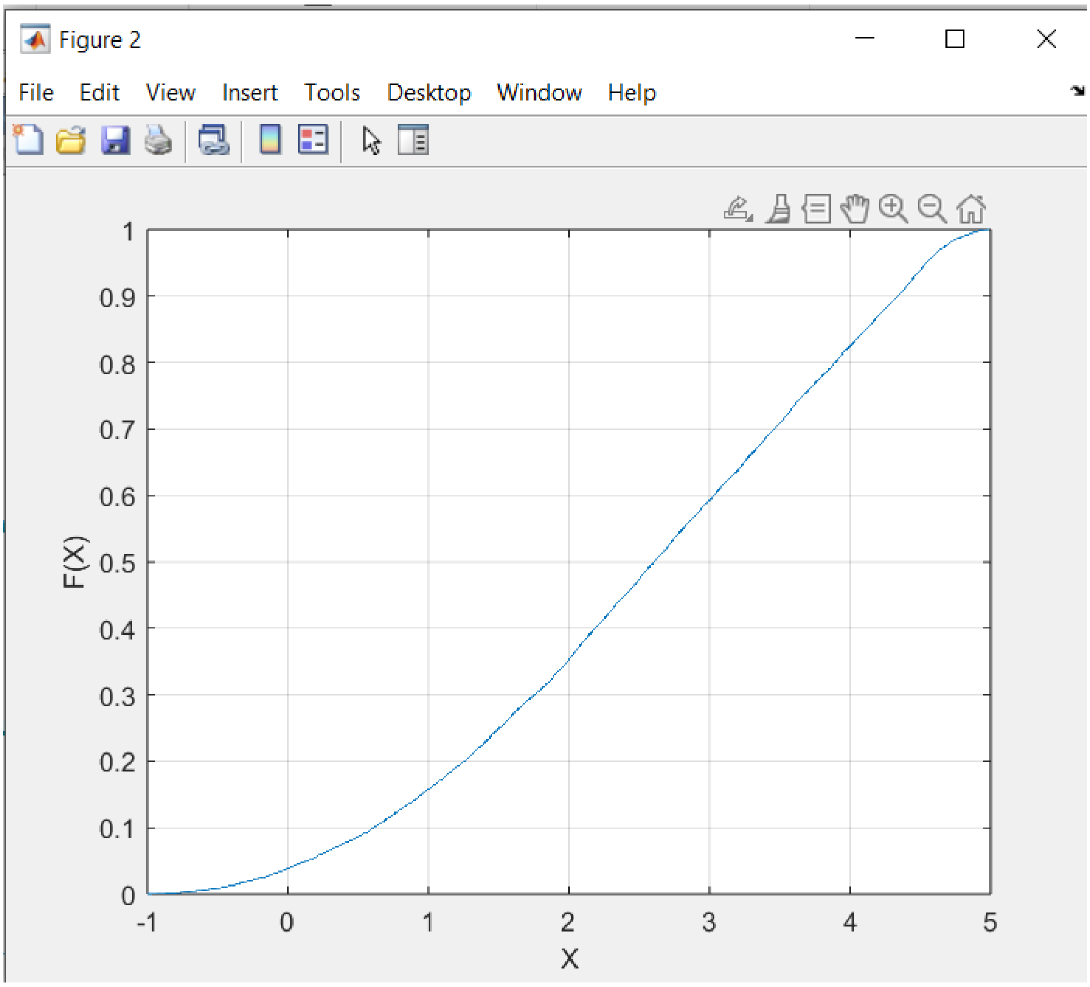


Рисунок 12 – Эмпирическая функция для N = 10000

Графики распределения на плоскости продемонстрированы на рисунках 13 – 15.

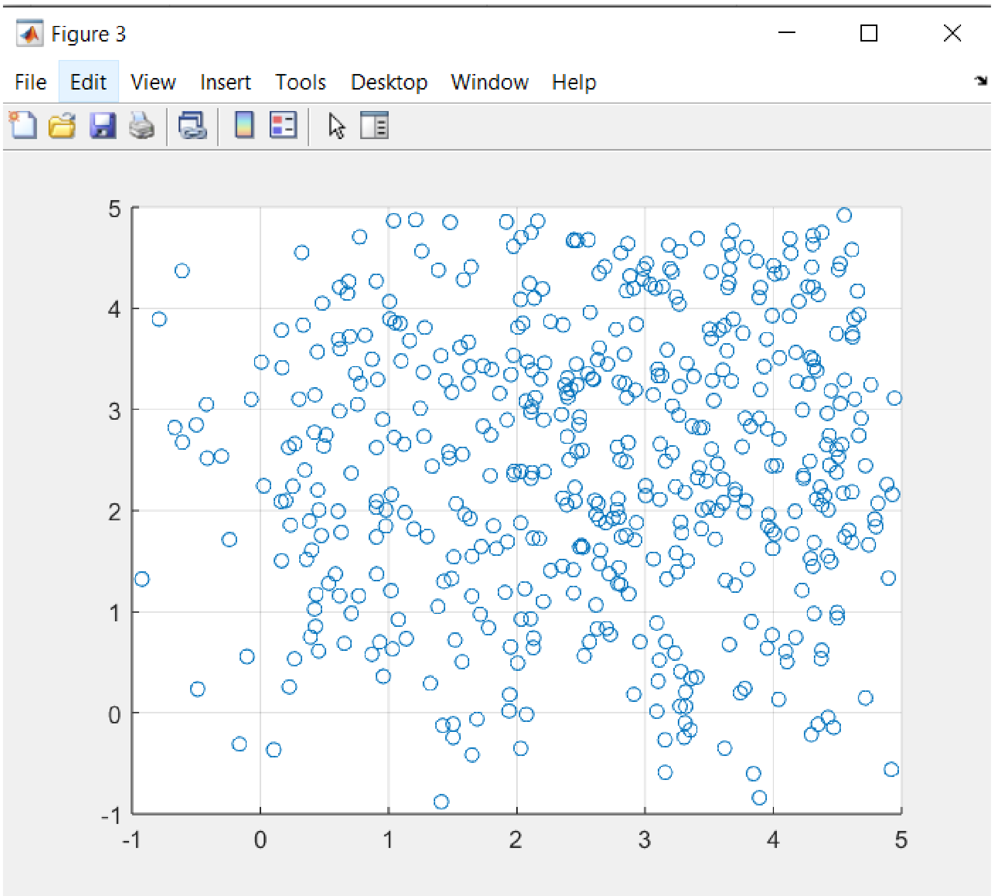


Рисунок 13 – Распределение на плоскости для N = 1000

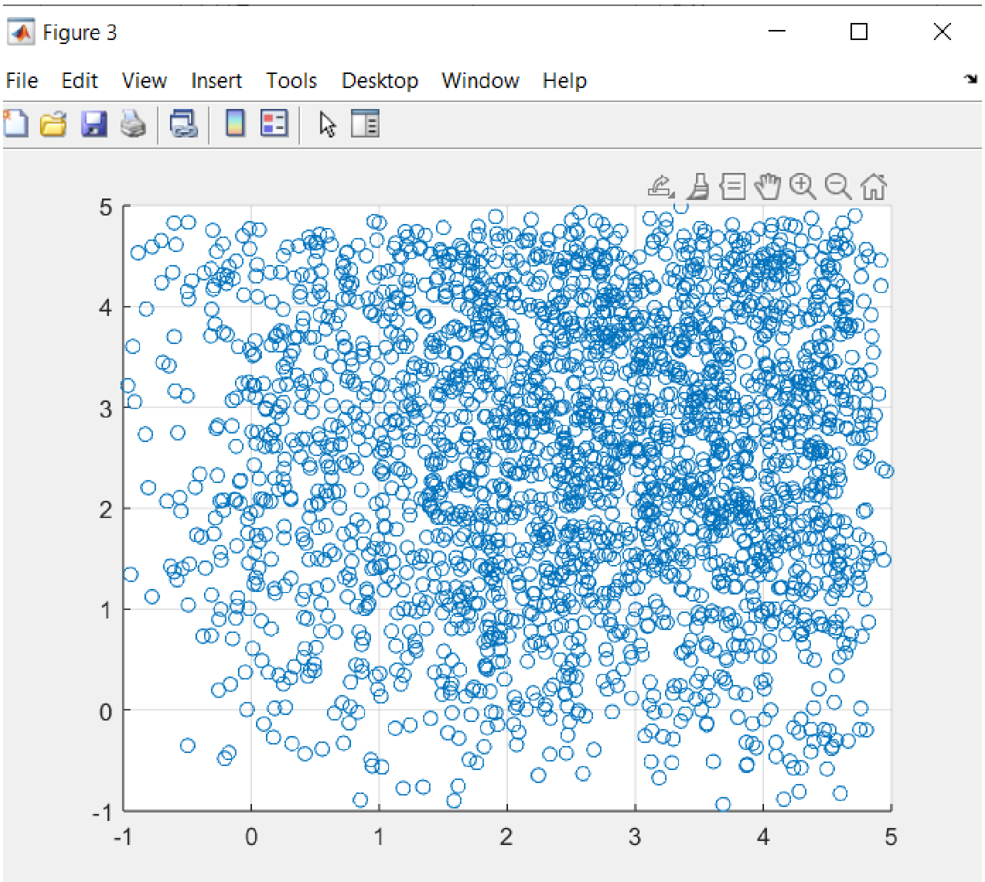


Рисунок 14 – Распределение на плоскости для N = 5000

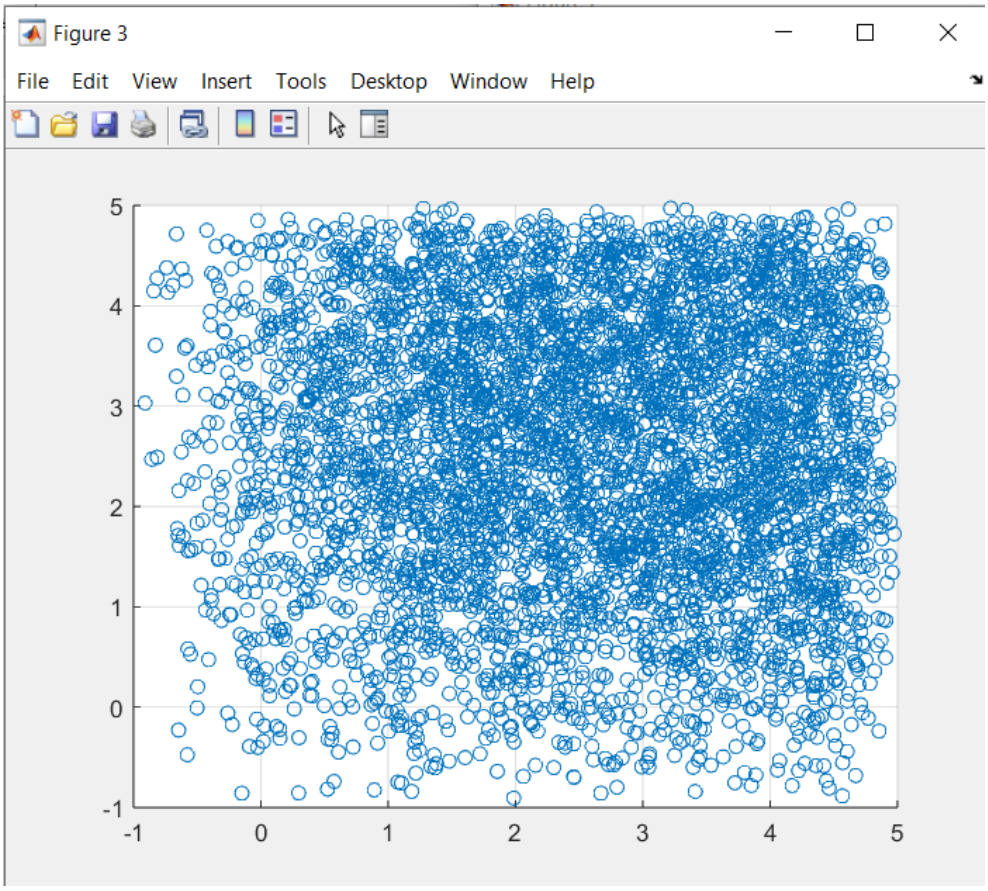


Рисунок 15 – Распределение на плоскости для N = 10000

Вычисление параметров

Полученные значения по каждому параметру продемонстрированы в таблице 1.

Таблица 1

	Теоретическое	Практическое		
		N = 1000	N = 5000	N = 10000
Мат. ожидание	2,53921	2.53062	2.53034	2.55716
Дисперсия	1,88329	1.88974	1.87404	1.87297
СКО	1,37233	1.37468	1.36895	1.36856

Вычисление параметров теоретически

$$M = \frac{1}{3(d+c-b-a)}\left(\frac{d^3-c^3}{d-c} - \frac{b^3-a^3}{b-a}\right) =$$

$$= \frac{1}{3(5+4{,}5-2+1)}\left(\frac{5^3-4{,}5^3}{5-4{,}5} - \frac{2^3-(-1)^3}{2+1}\right) = 2{,}53921$$

$$\mathrm{D} = \frac{1}{6(d+c-b-a)}\left(\frac{d^4-c^4}{d-c} - \frac{b^4-a^4}{b-a}\right) - M^2 =$$

$$= \frac{1}{6(5+4{,}5-2+1)}\left(\frac{5^4-4{,}5^4}{5-4{,}5} - \frac{2^4-1^4}{2+1}\right) - 2{,}53921^2 = 1{,}88329$$

$$\sigma = \sqrt{D} = \sqrt{1{,}88329} = 1{,}37233$$

Список используемых источников

1. Электронный ресурс: URL:.- https://wiki5.ru/wiki/Trapezoidal_distribution, свободный доступ (07.11.2023)

Выводы

В данной лабораторной работе были получены навыки моделирования случайных величин с заданным законом распределения методом обратной функции в программной среде MATLAB/GNU Octave, а также первичной оценки качества полученных псевдослучайных чисел.