CORDIC Algorithm (Rotation Mode)

當向量 (x, y) 逆時鐘旋轉角度 θ 時，新的坐標可以表示為：

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

同時提出 $cos\theta$ 可得:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = cos\theta \begin{bmatrix} 1 & -\tan\theta \\ \tan\theta & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

又由三角恆等式可以得知:

$$cos\theta = \frac{1}{sec\theta} = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}} \begin{bmatrix} 1 & -\tan\theta \\ \tan\theta & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

最後令 $\tan\theta_i = 2^{-i}$ 來求得precomputed angle θ_i 。

選擇迭代次數 n 可以得到 rotation factor $K_n = \prod_{i=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{1+2^{-2i}}}$

故最後每次迭代的公式為:

$$\begin{bmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1+2^{-2i}}} \begin{bmatrix} 1 & -d_i \cdot 2^{-i} \\ +d_i \cdot 2^{-i} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix}$$

$$z_{i+1} = z_i - d_i \cdot \theta_i$$

其中需要決定 $d_i = \pm 1$:

$$d_i = \begin{cases} +1, & \text{若 } z_i \geq 0 \\ -1, & \text{若 } z_i < 0 \end{cases}$$

在實際運算中， $\frac{1}{\sqrt{1+2^{-2i}}}$ 不會先算，而是利用預先算好的值，在迭代的最後階段才做乘法。也就是在最後階段，會將x, y乘上 K_n也就是rotation factor。