Tema 4

Lógica proposicional o de enunciados.

Además de los apuntes debéis leer este guión y ver como se hacen los ejercicios.

4.1 Lenguaje proposicional.

4.1.1 Introducción

Hemos añadido el concepto de lógica y una descripción intuitiva de la lógica proposicional.

Concepto ingenuo.

Todo el mundo posee una idea espontánea sobre lo que significa lógica, y, como calificativo emplea esta palabra en su conversación más corriente: “eso es lógico", “se trata de una falta de lógica"..., oimos como expresiones habituales. Según esta idea vulgar, se llama lógico al pensamiento recto y consecuentemente trabado, e ilógico al que carece de esta interna ilación. Todo hombre normal, aunque no tenga más que esta idea elemental de lo que la lógica sea, posee, sin embargo, una lógica natural, que le lleva a conducir de una manera habitualmente lógica su pensamiento y a percibir la falta de lógica o trabazón racional allá donde la encuentra. Esta lógica espontánea se hace reflexiva en esto que llamamos ciencia lógica, cuya definición estamos persiguiendo.

Etimología.

Podemos alcanzar una primera noción de qué sea lógica a través de la etimología de su mismo nombre. Logía (del griego logos) significa estudio o tratado racional. En la designación de los distintos campos del saber humano suele formar parte de los nombres de casi todas las ciencias: así, geología, zoología, psicología..., que son el tratado de Geos (la Tierra), zoon (el animal), psiqué (el alma), etc. Cabe, sin embargo, que se haga objeto de ese estudio o tratado científico, no a un objeto exterior, sino al propio pensamiento racional en lo que le constituye en auténtico orden racional y científico para alcanzar la verdad. Así, los griegos llamaron $\tau\alpha\ \lambda o\gamma\iota\kappa\alpha$ (las cosas lógicas) a aquella ciencia o tratado que versaba sobre el propio pensamiento, sobre sus formas y leyes.

Concepto histórico.

La palabra *lógica* ha sido utilizada a lo largo de los siglos para designar cosas con frecuencia muy distintas, de manera que, si uno tiene la intención de hacer no ya historia del término *lógica*, sino de la *Lógica* misma, se ve naturalmente obligado a realizar previamente una elección del significado unívoco que piensa atribuir a dicho término, a fin de poder proceder luego al examen del desarrollo histórico de la disciplina de ese modo definida como *Lógica*.

Nosotros entenderemos por *Lógica* el estudio de las formas correctas del razonamiento, reconociendo como primer ejemplo de tratado concreto el contenido de los *Primeros Analíticos* de **Aristóteles** y, por tanto, como ulteriores desarrollos históricos suyos todas aquellas aportaciones que, aun siendo diferentes desde el punto de vista expositivo y enriqueciéndose con nuevos contenidos, continúan, sin embargo moviéndose dentro del mismo ámbito de problemas de los *Primeros Analíticos*. La adopción de semejante significado del término está justificada desde un punto de vista histórico, pero no deja de ser oportuno observar que no es la única posible.

Hasta el siglo XVII, independientemente de que se usase para designarlas el término *Lógica* o de que se prefiriese el de *Dialéctica*, las investigaciones lógicas estaban inscritas en el campo de lo que hemos caracterizado como *Lógica formal*. En cambio, el siglo XVII registra una primera ampliación de este horizonte, y, así, la *Logica vetus et nova* de **Johannes Clauberg** (1654) parece ya lastrada por un fárrago de cuestiones psicológicas y gnoseológicas. Sin embargo, la obra que se propuso deliberadamente transgredir los límites de la lógica formal (aun concediendo gran extensión a su tratamiento) fue *La logique ou l'art de penser* (1662) de **Antoine Arnaud** y **Pierre Nicole**, la famosa *Lógica de Port-Royal*. La sustitución del concepto de *arte de razonar* por el de *arte de pensar* no es casual, sino que acarrea el ingreso en la *Lógica* de toda la teoría cartesiana de las ideas y de las preocupaciones metodológicas que precisamente en aquella época habían sido suscitadas por **Descartes** y por **Pascal** en el campo de la *Filosofía*. A partir de ese momento, las obras de *Lógica* tendieron a conceder cada vez más atención a los temas *gnoseológicos*, *psicológicos* e incluso *ontológicos*, situando cada vez más en segundo plano la teoría de la inferencia.

Así, mediante la imposición de nuevos lastres a la lógica formal, va preparándose el radical cambio de perspectiva que se encierra en el concepto kantiano de *Lógica transcendental*, que el propio **Kant** intencionada y explícitamente contrapuso a la *Lógica formal*. Si se quiere exponer brevemente el complejo concepto kantiano de *Lógica transcendental*, puede decirse que, a diferencia de la *Lógica formal*, no se ocupa ya de las condiciones a satisfacer para una correcta deducción, sino de las condiciones *a priori* que hacen posible el conocimiento objetivo, o sea que hacen posible la subsunción de los datos de la experiencia bajo ciertos conceptos *a priori*, a fin de obtener así juicios de caracter universal y necesario, es decir, que no puedan ser refutados por ningún ser dotado de la facultad de juzgar. De esta manera la *Lógica transcendental* ya no se presenta como teoría del razonamiento, sino como una teoría del *juicio* mucho más exigente, no pudiendo evitar el presentarse, más que como un capítulo de la *Lógica*, como una parte de la *Gnoseología*. El caso de **Kant**, naturalmente, no permaneció aislado y trás él fueron apareciendo otros muchos que proponían ejemplos de *Lógica no formal*. El más célebre de tales casos es ciertamente la *Lógica* de **John Stuart Mill** que, junto a una presentación de la *Lógica deductiva* (sustancialmente coincidente con la *Lógica formal* tradicional), presenta también una *Lógica inductiva*, pero éste no es el único caso. Concretamente puede decirse que gran parte de las investigaciones epistemológicas actuales, especialmente las relativas a la metodología de las ciencias experimentales, pertenecen al espíritu de la *Lógica* de **Mill**, aunque a veces prefieran no titularse explícitamente *Lógica*. En esas investigaciones se suele hallar una presentación rigurosa y de tipo formal de teorías que, sin embargo, no son lógico-formales.

Vino a complicar todavía más las cosas la *Lógica hegeliana*. La Lógica de **Hegel** es una doctrina de las categorías, es decir, de las determinaciones sumamente generales del pensamiento, como, por ejemplo, cualidad, cosa, causa o finalidad. Por ello se parece poco a muchas otras obras de tema "lógico". Ni es un tratado sobre la validez formal del razonamiento ni una investigación de los métodos de las ciencias. La de Hegel es más bien una prolija revisión de los libros metafísicos de Aristóteles y, a la vez, de la "Lógica trascendental" —tanto de la parte llamada "analítica" como de la parte llamada "dialéctica"— que Kant presentó en su Crítica de la razón pura. Pero a diferencia de la Lógica de Kant, la de Hegel no es una doctrina acerca de las condiciones de posibilidad del conocimiento empírico, ni sobre la síntesis que de lo diverso en la intuición obra supuestamente el entendimiento humano, ni concretamente —al menos no en particular— sobre el juzgar. Es más, a diferencia de otras doctrinas de las categorías con intenciones empíricas o epistemológicas, su punto de vista no es en ningún sentido psicológico. La pregunta que la suscita es más bien: ¿son las categorías más generales —por ejemplo, cualidad, cantidad, relación, sustancialidad, pero también límite, ser esencial, apariencia, causalidad, objetividad, vitalidad o carácter ideal— verdaderas? Esto es, ¿puede pensarse en y con ellas lo verdadero? Y, por cierto, ¿qué es lo verdadero?

El álgebra de la lógica tiene sus inicios en 1847, en las publicaciones de Boole **"The Mathematical Analysis of Logic"** y de De Morgan **"Formal Logic"**. Los primeros escritos hacen referencia a un álgebra del cálculo de clases, isomorfa a la de las relaciones. Un cálculo proposicional aparece por primera vez en los trabajos de Hugh MacColl a comienzos de 1877.

El **método logístico** fué empleado por primera vez por Frege en sus **Begriffsschrift** de 1879. Este trabajo contiene la primera formulación del cálculo proposicional como un sistema logístico, pero los trabajos de Frege fueron poco entendidos y menos reconocidos por lo que los matemáticos como C.S.Peirce, Ernst Schröder, Giuseppe Peano y otros siguieron la otra línea.

Los principios de un cambio, aunque sin llegar al método logístico, empiezan a vislumbrarse en la escuela de Peano. Y de esta fuente A.N.Whitehead y B.Russell tomaron sus primeras inspiraciones. Con posterioridad quedaron arrebatados por el profundo trabajo de Frege y fueron los primeros en apreciar y difundir su significado.

Después de Frege los primeros trabajos que utilizan el método logístico son los de Russell. Muchas indicaciones de este tratamiento pueden encontrarse en **"The Principles of Mathematics"** de 1903. La formulación del cálculo proposicional fué publicada por Russell en 1908 y utilizada por Whitehead y Russell en sus **"Principia Mathematica"** de 1910. Bernays, en 1926, simplificó el sistema descubriendo la dependencia de uno de los axiomas.

C.I.Lewis en conexión con estos trabajos escribió inmediatamente un sistema para la **implicación estricta** en 1913.

El uso de **esquemas de axiomas** que hace innecesario utilizar la **regla de sustitución** en las formulaciones del cálculo proposicional fué introducido por J.V.Neumann.

En enero de 1917 Nicod dió una formulación con un sólo axioma. Con posterioridad las dieron Wajsberg y Lucasiewicz (todas ellas basadas en la conexión conocida como **barra de Sheffer**).

En opuesta tendencia a la de economizar axiomas aparecen las formulaciones de Hilbert que intenta separar el papel desempeñado por cada conectiva, aun a costa de la economía e independencia de los axiomas. A partir de estos trabajos aparecen los cálculos proposicionales fragmentarios.

El método de decisión de las tablas de verdad es aplicado informalmente y en casos particulares por Frege en 1879. La primera formulación explícita del método es de Peirce seis años más tarde. Muchos de los recientes deasarrollos del método matricial son debidos a los trabajos de Wajsberg, Lucasiewicz, Tarski y Post. El término tautología fué acuñado por Wittgenstein.

El **teorema de la deducción** no es una particularidad del cálculo proposicional clásico, es válido par muchos sistemas logísticos. La idea de este teorema y su primera prueba es de Jacques Herbrand en 1928. Su formulación como principio metodológico general es debida a Tarski y el nombre esta tomado del alemán de los **Grundlagen der Matematik** de Hilbert y Bernays.

La completitud del cálculo proposicional fué probada por primera vez por Post en 1921 utilizando las **formas normales conjuntivas**. Otra prueba fué dada por Kalmar en 1934. El método de Kalmar es uno de los más utilizados en los libros de texto estándar. Ambas pruebas son constructivas.

La prueba de Rasiowa y Sikorski de 1951 no es de caracter constructivo y depende del teorema del ultrafiltro. Tiene la ventaja de que existe una prueba análoga para el caso del cálculo de predicados de primer orden, en el que no existe prueba de completitud constructiva. En este caso la prueba utilizando álgebras de Boole tiene una gran ventaja en términos de elegancia y pone de relieve la naturaleza algebraica del resultado.

Concepto de Lógica.

La Lógica es la ciencia que estudia los razonamientos correctos. Por tanto se ocupa de:

- Las inferencias válidas o razonamientos correctos.
- El concepto de definición.
- El concepto de significado.
- El concepto de verdad.

Todo estos conceptos intervienen en el quehacer de los científicos por ello no podemos prescindir de estudiar Lógica, o por lo menos, aprender a utilizarla adecuadamente.

En resumen podemos decir, que el objeto de estudio de la *Lógica* es el razonamiento. El razonamiento se expresa en lenguaje. La diferencia entre la lógica clásica y la formal o simbólica es que en esta se crea un lenguaje especial para el estudio del razonamiento.

La lógica de proposiciones.

El apartado más elemental (en un doble sentido: el más simple y, al propio tiempo, el más básico) de la *Lógica formal*, aquel en que se trazan sus líneas más generales, es la *lógica de enunciados* o *proposiciones*.

La tarea de la *Lógica* es el análisis formal de los razonamientos. Y el lugar de ese análisis es el lenguaje. Sólo en el lenguaje, sólo en la medida en que están formulados en un lenguaje se ofrecen los razonamientos a la posibilidad del análisis. El análisis del razonamiento supone, por tanto, un análisis del lenguaje. Un análisis lógico del lenguaje.

En efecto, ante una expresión como:

"*dieron las seis y llamó Cabra a lición: fuimos y oimosla todos*"

el análisis literario reparará en la prosa, en el estilo de Francisco de Quevedo; el análisis lingüístico sintáctico hablará de sintagmas nominales, verbales, etc. El análisis lógico, desde el nivel de la lógica proposicional, se limitará a señalar la existencia de cuatro enunciados:

1. Dieron las seis
2. Llamó Cabra a lición
3. Fuimos
4. Oimosla todos

Y en el siguiente cuarteto de Garcilaso la *Lógica proposicional* no hallaría tampoco sino cuatro proposiciones, a una por verso:

> El ancho campo me parece estrecho.
> La noche clara para mí es escura.
> La dulce compañía, amarga y dura.
> Y duro campo de batalla el lecho.

Como nos encontramos en el apartado más elemental de la *Lógica*. El análisis que le corresponde es, también, el más elemental, el más *grueso*, el más *burdo*.

El análisis del lenguaje en que se basa la *Lógica de proposiciones* divide el lenguaje, y ya es simplificar, en dos tipos de constituyentes:

1. De una parte, oraciones, frases enteras.
2. De otra parte, conjunciones o conexiones (en el sentido lógico del término), partículas que sirven para enlazar oraciones y formar nuevas oraciones.

Estas son las dos únicas categorías de constituyentes que la *Lógica de enunciados* considera relevantes: las proposiciones tomadas en bloque, por un lado, y, por otro lado, las conexiones entre ellas.

Quiere ello decir que el análisis lógico se detiene, por ahora, al borde de los enunciados, sin penetrar en la estructura interna de estos, siendo el enunciado, por tanto, la unidad de análisis.

La *Lógica proposicional* es una lógica de los enunciados sin analizar. La *Lógica proposicional* sólo tendra en cuenta aquellas formas de deducir un enunciado a partir de otros que sean válidas sin necesidad de analizar por dentro cada uno de ellos. Los elementos que componen internamente un enunciado son, por el momento, irrelevantes desde el punto de vista lógico. Sólo interesan los enunciados como tales, cada uno de ellos en cuanto formando un todo.

Conexiones lógicas.

Si observamos el lenguaje natural vemos que a partir de frases construimos otras mediante conjunciones. Para nosotros estas partículas se llamarán *conexiones, conectivas* o *constantes lógicas* muy abundantes en lenguaje natural. El sentido de estas partículas de unión es ambigüo, por eso hemos de abandonar el lenguaje natural.

Los enunciados del lenguaje que no se pueden dividir en otros se llamarán enunciados, proposiciones o sentencias **atómicas**. Utilizaremos las primeras letras minúsculas del alfabeto griego para simbolizar los enunciados. Es clásico emplear minúsculas a partir de la p (p,q,r,s,...) con subíndices, primas,.... Se llamarán variables porque representan enunciados de los que no nos interesa el significado ni el mismo enunciado.

Las partículas conectivas relevantes desde un punto de vista matemático y científico en general son:

no: Se antepone a un enunciado y da lugar a otro enunciado. Se representa por el símbolo "$\neg$". Es una conexión monaria.

α	$\neg\alpha$
0	1
1	0

y: Se corresponde, casi completamente con uno de los usos de la y del lenguaje natural. Se le llama conjunción y se representa con el símbolo "$\wedge$". Es una conexión binaria.

En el lenguaje hablado la conjunción copulativa "y" tiene diferentes significados:
Juan y Pedro son tontos, 2 enuciados atómicos.
Juan y Pedro son parientes, 1 enunciado atómico.
Dijo "hasta luego Lucas" y se murió.
Deja de estudiar y te mato.

α	β	$\alpha \wedge \beta$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

o: Se llama disyunción se corresponde con uno de los dos sentidos más usuales en el lenguaje natural y se representa por el símbolo "$\vee$". Es una conexión binaria.

En el lenguaje hablado la conjunción "o" tiene sentido inclusivo o bien exclusivo. A la conexión "o" le daremos en lógica un sentido similar al de la "o" inclusiva del lenguaje natural.

α	β	$\alpha \vee \beta$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Otra conexión usada en lógica es la que representaremos por "$\rightarrow$" y que llamaremos implicación o condicional. Se corresponde con la estructura gramatical "si...entonces..." del lenguaje y es una conexión binaria. En el lenguaje natural "si...entonces..." no siempre se usa y a veces se utiliza con otro sentido.

Nuestras conexiones quedarán precisadas cuando estudiemos la semántica del lenguaje que utilizaremos.

El "cuando" puede emplearse en sentido condicional como el "si...entonces..." y otras veces en sentido temporal.

El símbolo "$\rightarrow$" es el más importante en lógica y el que tiene la interpretación en lenguaje natural más delicada. De él dependen conceptos importantes.

α	β	$\alpha \to \beta$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

La expresión $(\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \alpha)$, siendo α y β proposiciones se abrevia escribiendo $\alpha \leftrightarrow \beta$. Con esto obtenemos una nueva conectiva binaria que notamos "$\leftrightarrow$".

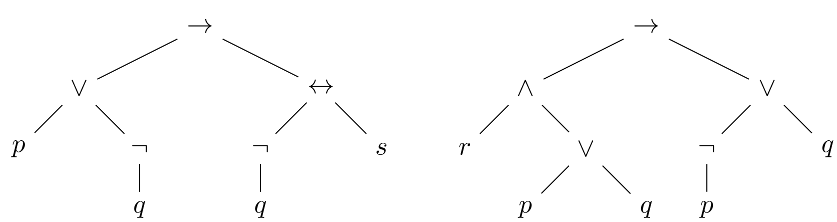
El lenguaje natural es demasiado rico y ambigüo como para poder expresar los razonamientos lógicos.

4.1.2 Elementos del lenguaje proposicional:

Después de leer los apuntes de las dos estructuras en árbol que aparecen esta es la que usaremos

Observación:

> La estructura de árbol es muy útil para representar las fórmulas. Así, una fórmula sería un árbol que en las hojas tiene las fórmulas atómicas que intervienen y en el resto de los nodos las conectivas. Por ejemplo, las fórmulas $p \vee \neg q \to (\neg q \leftrightarrow s)$ y $r \wedge (p \vee q) \to (\neg p \vee q)$ pueden ser representadas como los árboles:



4.2 Semántica de la lógica proposicional

4.2.1 Interpretaciones o valoraciones

El concepto fundamental es el de interpretación, valoración o mundo posible.

Definición 4.1 (valoración, mundo posible) *Dado un lenguaje proposicional construido sobre el conjunto X, una valoración (mundo posible) es una aplicación $v : X \to \mathbb{Z}_2$.*

Una valoración lo que hace es asignar un valor de verdad a cada una de las proposiciones atómicas. Si v es una valoración y a es una fórmula atómica para la que $v(a) = 0$, diremos que *a es falsa en el mundo v*. Por el contrario, si $v(a) = 1$, diremos que *a es verdadera en el mundo v*.

Una vez que hemos asignado un valor de verdad a las proposiciones atómicas, lo extendemos a todas las fórmulas del lenguaje mediante las siguientes reglas.

Dado un lenguaje proposicional cuyo conjunto de fórmulas atómicas es X, y dada una valoración $v : X \to \mathbb{Z}_2$, extendemos la aplicación v al conjunto `Form`(X) siguiendo las siguientes reglas:

$$\begin{aligned}
&\alpha \vee \beta = \alpha + \beta + \alpha \cdot \beta \\
&\alpha \wedge \beta = \alpha \cdot \beta \\
&\alpha \to \beta = 1 + \alpha + \alpha \cdot \beta \\
&\alpha \leftrightarrow \beta = 1 + \alpha + \beta \\
&\neg \alpha = 1 + \alpha
\end{aligned}$$

De esta forma expresando el valor de verdad de una proposición utilizando el 1, la suma y el producto obtenemos su polinomio de Gegalkine.

Observación:

1. La escritura *Gegalkine* proviene de una transcripción del alfabeto cirílico. Por tal motivo en la literatura podemos encontrarlo también como polinomio de Zhegalkine.
2. Aunque formalmente es incorrecto, para el cálculo del polinomio de Gegalkine identificaremos cada fórmula proposicional con la correspondiente variable del polinomio de Gegalkine. Teniendo en cuenta esto, podríamos haber escrito
   $a\wedge b \to \neg a = 1+a\wedge b+(a\wedge b)(\neg a) = 1+a\cdot b+(a\cdot b)\cdot(1+a) = 1+a\cdot b+a\cdot b+a\cdot b\cdot a = 1+a^2\cdot b = 1+a\cdot b$
   En cualquier caso, nosotros usaremos esta escritura.

Ejemplo 4.1

Vamos a calcular el polinomio de Gegalkine de la fórmula $\alpha = \neg(a \to b) \to (\neg a \to \neg b)$. *Para esto, vamos a calcular el polinomio de Gegalkine de las subfórmulas* $\neg(a \to b)$ *y* $\neg a \to \neg b$.

Comenzamos con la primera:

$$\begin{array}{rcl} \neg(a \to b) & = & 1 + a \to b \\ & = & 1 + 1 + a + ab \\ & = & a + ab \end{array}$$

Y ahora

$$\begin{array}{rcl} \neg a \to \neg b & = & 1 + \neg a + (\neg a)(\neg b) \\ & = & 1 + 1 + a + (1 + a)(1 + b) \\ & = & a + 1 + a + b + ab \\ & = & 1 + b + ab \end{array}$$

Y con esto,

$$\begin{array}{rcl} \alpha & = & 1 + \neg(a \to b) + \neg(a \to b)(\neg a \to \neg b) \\ & = & 1 + a + ab + (a + ab)(1 + b + ab) \\ & = & 1 + a + ab + a + ab + ab + ab + ab + ab \\ & = & 1 \end{array}$$

Es decir, el polinomio de Gegalkine es el polinomio constante 1. Esto significa que bajo cualquier interpretación de las proposiciones atómicas el valor de verdad de la fórmula α es 1. A las fórmulas que verifican esta propiedad las llamaremos *tautologías*.

4.2.2 Tabla de verdad para una fórmula

Podemos entonces crear una tabla con los 2^n mundos posibles. Esta tabla se conoce como *tabla de verdad* de la fórmula α. Puesto que los valores de verdad se calculan siguiendo las reglas, la tabla de las cinco conectivas sería.

α	β	$\alpha \vee \beta$	$\alpha \wedge \beta$	$\alpha \to \beta$	$\alpha \leftrightarrow \beta$	$\neg\alpha$
0	0	0	0	1	1	1
0	1	1	0	1	0	1
1	0	1	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	0

En ella se han recogido todas las posibilidades para los valores de verdad de una fórmula en la que sólo aparece una conectiva. A partir de esta tabla se pueden calcular los valores de verdad de una fórmula cualquiera para todas las interpretaciones posibles del conjunto de fórmulas atómicas que intervengan, es decir, la tabla de verdad de esa fórmula.

Ejemplo 4.2

1. *Consideremos la fórmula* $\alpha = \neg(a \to b) \to (\neg a \to \neg b)$

   Vamos a obtener su tabla de verdad. Para eso, vamos a partir de todas las posibles interpretaciones que podemos dar a las proposiciones atómicas que intervienen en la fórmula α, *y las vamos a ir extendiendo a las distintas subfórmulas de* α.

   El conjunto de subfórmulas es $\{a,\ b,\ a \to b,\ \neg(a \to b),\ \neg a,\ \neg b,\ \neg a \to \neg b,\ \neg(a \to b) \to (\neg a \to \neg b)\}$, *en el que vemos que hay dos atómicas, lo que nos dice que tenemos un total de cuatro posibles interpretaciones.*

a	b	$a \to b$	$\neg(a \to b)$	$\neg a$	$\neg b$	$\neg a \to \neg b$	$\neg(a \to b) \to (\neg a \to \neg b)$
0	0	1	0	1	1	1	**1**
0	1	1	0	1	0	0	**1**
1	0	0	1	0	1	1	**1**
1	1	1	0	0	0	1	**1**

Y podemos ver como la fórmula α se interpreta como verdadera en cualquier caso, algo que ya habíamos comprobado al calcular su polinomio de Gegalkine.

2. *Vamos a tomar la fórmula $\beta = a \wedge b \to \neg a$. Sabemos que su polinomio de Gegalkine es $a \wedge b \to \neg a = 1 + ab + ab(1 + a) = 1 + ab + ab + ab = 1 + ab$. Vamos a calcular la tabla de verdad de esta fórmula, y vamos a añadirle una columna a la derecha en la que evaluaremos el polinomio de Gegalkine $1 + ab$, y comprobaremos como esta columna coincide con los valores de verdad de β.*

a	b	$a \wedge b$	$\neg a$	$a \wedge b \to \neg a$	$1 + ab$
0	0	0	1	1	$1 + 0 \cdot 0 = \mathbf{1}$
0	1	0	1	1	$1 + 0 \cdot 1 = \mathbf{1}$
1	0	0	0	1	$1 + 1 \cdot 0 = \mathbf{1}$
1	1	1	0	0	$1 + 1 \cdot 1 = \mathbf{0}$

3. *Sea ahora la fórmula: $\varphi = (a \wedge b \to c) \wedge (\neg(a \wedge b) \to d)$*

   Vamos a calcular su tabla de verdad. Puesto que intervienen cuatro fórmulas atómicas, la tabla de verdad tiene $2^4 = 16$ filas.

a	b	c	d	$a \wedge b$	$a \wedge b \to c$	$\neg(a \wedge b)$	$\neg(a \wedge b) \to d$	φ
0	*0*	*0*	*0*	*0*	*1*	*1*	*0*	*0*
0	*0*	*0*	*1*	*0*	*1*	*1*	*1*	*1*
0	*0*	*1*	*0*	*0*	*1*	*1*	*0*	*0*
0	*0*	*1*	*1*	*0*	*1*	*1*	*1*	*1*
0	*1*	*0*	*0*	*0*	*1*	*1*	*0*	*0*
0	*1*	*0*	*1*	*0*	*1*	*1*	*1*	*1*
0	*1*	*1*	*0*	*0*	*1*	*1*	*0*	*0*
0	*1*	*1*	*1*	*0*	*1*	*1*	*1*	*1*
1	*0*	*0*	*0*	*0*	*1*	*1*	*0*	*0*
1	*0*	*0*	*1*	*0*	*1*	*1*	*1*	*1*
1	*0*	*1*	*0*	*0*	*1*	*1*	*0*	*0*
1	*0*	*1*	*1*	*0*	*1*	*1*	*1*	*1*
1	*1*	*0*	*0*	*1*	*0*	*0*	*1*	*0*
1	*1*	*0*	*1*	*1*	*0*	*0*	*1*	*0*
1	*1*	*1*	*0*	*1*	*1*	*0*	*1*	*1*
1	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*0*	*1*	*1*

Su polinomio de Gegalkine sería
$(a \wedge b \to c) \wedge (\neg(a \wedge b) \to d) = (1 + ab + abc)(1 + 1 + ab + (1 + ab)d) = (1 + ab + abc)(ab + d + abd) = ab + d + abd + ab + abd + abd + abc + abcd + abcd = d + abd + abc$

4.2.3 Clasificación de fórmulas

Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 4.3

- *La fórmula $a \to (b \to a)$ es una tautología. Para comprobarlo, hallemos su polinomio de Gegalkine y construyamos su tabla de verdad:*
  $a \to (b \to a) = 1 + a + a(b \to a) = 1 + a + a(1 + b + ab) = 1 + a + a + ab + ab = 1$

a	b	$b \to a$	$a \to (b \to a)$
0	0	1	1
0	1	0	1
1	0	1	1
1	1	1	1

y vemos que la fórmula es cierta en los cuatro mundos posibles.

La fórmula también es satisfacible, pues hay un mundo (en este caso todos) en que la fórmula es verdadera.

- *La fórmula* $a \vee \neg b \to \neg c \wedge (b \to a)$ *es satisfacible. Esto podemos comprobarlo si consideramos, por ejemplo, el mundo* $a = b = 1$ *y* $c = 0$ *pues en tal caso se tiene que*

$$1 \vee \neg 1 \to \neg 0 \wedge (1 \to 1) = 1 \vee 0 \to 1 \wedge 1 = 1 \to 1 = 1$$

También es refutable, pues en el mundo $a = b = c = 1$ *la fórmula es falsa.*

$$1 \vee \neg 1 \to \neg 1 \wedge (1 \to 1) = 1 \vee 0 \to 0 \wedge 1 = 1 \to 0 = 0$$

La fórmula es entonces contingente.

a	b	c	$a \vee \neg b$	$b \to a$	$\neg c \wedge (b \to a)$	$a \vee \neg b \to \neg c \wedge (b \to a)$
0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	1	1	0	0
0	1	0	0	0	0	1
0	1	1	0	0	0	1
1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	1	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	0	0

- *La fórmula* $(a \to \neg b) \wedge (a \wedge b)$ *es una contradicción, pues su polinomio de Gegalkine y su tabla de verdad tabla de verdad son*

$$(a \to \neg b) \wedge (a \wedge b) = (1 + a + a(1 + b))ab = (1 + a + a + ab)ab = (1 + ab)ab = ab + ab = 0$$

a	b	$\neg b$	$a \to \neg b$	$a \wedge b$	$(a \to \neg b) \wedge (a \wedge b)$
0	0	1	1	0	0
0	1	0	1	0	0
1	0	1	1	0	0
1	1	0	0	1	0

A continuación vamos a enumerar algunas fórmulas que son tautologías. Tanto α, β como γ representan fórmulas cualesquiera de un lenguaje proposicional (no necesariamente fórmulas atómicas). Mediante una tabla de verdad, o con el polinomio de Gegalkine podemos comprobarlo.

1. $(\alpha \to \beta) \to ((\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma)$ **Ley de silogismo**
2. $(\beta \to \gamma) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$ **Ley de silogismo**
3. $\alpha \to \alpha$ **Ley de identidad**
4. $\alpha \to (\beta \to \alpha)$ **Ley del “a fortiori”**
5. $(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to (\beta \to (\alpha \to \gamma))$ **Ley de conmutación de premisas**
6. $((\alpha \to \beta) \to \alpha) \to \alpha$ **Ley de Peirce**
7. $\neg\neg\alpha \to \alpha$ **Ley de doble negación**
8. $\alpha \to \neg\neg\alpha$ **Ley débil de doble negación**
9. $\neg\alpha \to (\alpha \to \beta)$ **Ley de Duns Scoto**
10. $\alpha \to (\neg\alpha \to \beta)$ **Ley de Duns Scoto**
11. $\neg\alpha \to (\alpha \to \neg\beta)$ **Ley débil de Duns Scoto**
12. $\alpha \to (\neg\alpha \to \neg\beta)$ **Ley débil de Duns Scoto**
13. $(\neg\alpha \to \alpha) \to \alpha$ **Ley de Clavius**
14. $(\alpha \to \neg\alpha) \to \neg\alpha$ **Ley débil de Clavius**
15. $(\neg\alpha \to \neg\beta) \to ((\neg\alpha \to \beta) \to \alpha)$ **Ley de reducción al absurdo**
16. $(\alpha \to \neg\beta) \to ((\alpha \to \beta) \to \neg\alpha)$ **Ley débil de reducción al absurdo**
17. $(\neg\beta \to \neg\alpha) \to (\alpha \to \beta)$ **Ley de contraposición fuerte o “ponendo ponens”**
18. $(\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \to \neg\alpha)$ **Ley de contraposición débil o “tollendo tollens”**
19. $(\alpha \to \neg\beta) \to (\beta \to \neg\alpha)$ **Ley de contraposición “ponendo tollens”**
20. $(\neg\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \to \alpha)$ **Ley de contraposición “tollendo ponens”**
21. $\alpha \vee \neg\alpha$ **Ley de tercio excluso**
22. $\neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$ **Ley de no contradicción**
23. $\alpha \vee \beta \to \beta \vee \alpha$
24. $\alpha \wedge \beta \to \beta \wedge \alpha$
25. $\alpha \to \alpha \vee \beta$
26. $\alpha \wedge \beta \to \alpha$
27. $((\alpha \to \beta) \wedge \alpha) \to \beta$
28. $((\alpha \to \beta) \wedge \neg\beta) \to \neg\alpha$
29. $((\alpha \vee \beta) \wedge \neg\alpha) \to \beta$
30. $(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$
31. $(\alpha \to \beta) \to ((\gamma \to \beta) \to (\alpha \vee \gamma \to \beta))$
32. $(\alpha \to \beta) \to ((\alpha \to \gamma) \to (\alpha \to \beta \wedge \gamma))$
33. $\alpha \to (\neg\beta \to \neg(\alpha \to \beta))$
34. $(\alpha \to \beta) \to ((\neg\alpha \to \beta) \to \beta)$
35. $(\alpha \to \gamma) \to ((\beta \to \gamma) \to (\alpha \vee \beta \to \gamma))$
36. $\alpha \to (\beta \to \alpha \wedge \beta)$

4.3 Equivalencia lógica

Enumeramos a continuación una serie de equivalencias lógicas de las que dispondreis en la chuleta oficial pero que es conveniente memorizarlas.

$$
\begin{aligned}
\alpha &\equiv \neg\neg\alpha \\
\alpha \to \beta &\equiv \neg\alpha \vee \beta \\
\alpha \leftrightarrow \beta &\equiv (\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \alpha) \\
\neg(\alpha \wedge \beta) &\equiv \neg\alpha \vee \neg\beta \\
\neg(\alpha \vee \beta) &\equiv \neg\alpha \wedge \neg\beta \\
\alpha \vee (\beta \vee \gamma) &\equiv (\alpha \vee \beta) \vee \gamma \\
\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) &\equiv (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma \\
\alpha \vee (\beta \wedge \gamma) &\equiv (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \wedge \gamma) \\
\alpha \wedge (\beta \vee \gamma) &\equiv (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)
\end{aligned}
$$

4.4 Consecuencia lógica.

4.4.1 Conjuntos satisfacibles e insatisfacibles

Definición 4.2 *Sea $\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n\}$ un conjunto de fórmulas de un lenguaje proposicional. Se dice que Γ es* satisfacible *si existe un mundo en que todas son verdaderas. Es decir, existe v tal que $v(\gamma_1) = v(\gamma_2) = \cdots = v(\gamma_n) = 1$.*

Si $\Gamma = \emptyset$ entonces Γ es satisfacible.

Un conjunto de fórmulas es insatisfacible si no es satisfacible.

Es decir, un conjunto es satisfacible si existe una iterpretación para la que todas las fórmulas son ciertas. En el caso del conjunto vacío, cualquier interpretación hace ciertas (y falsas) todas las fórmulas. Por tanto, el conjunto vacío es satisfacible.

Se tiene entonces que Γ es insatisfacible si no existe ninguna interpretación I que haga ciertas todas las fórmulas. Si $\Gamma \neq \emptyset$ esto es equivalente a que para cualquier interpretación I existe un elemento $\alpha \in \Gamma$ tal que $I(\alpha) = 0$.

Un conjunto de fórmulas puede ser satisfacible o insatisfacible (pero no tautología, contingente, etc.).

Una fórmula puede ser satisfacible, refutable, tautología, contradicción o contingente.

Si un conjunto Γ tiene un único elemento, es decir, $\Gamma = \{\gamma\}$ entonces Γ es satisfacible si, y sólo si, γ es satisfacible. Y Γ es insatisfacible si, y sólo si, γ es una contradicción.

La siguiente proposición nos dice que estudiar si un conjunto de fórmulas es satisfacible o insatisfacible se puede hacer estudiando la satisfacibilidad o no de una fórmula.

Teorema 4.1 *Sea $\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n\}$ un conjunto de fórmulas. Entonces son equivalentes:*

1. *Γ es insatisfacible*
2. *$\gamma_1 \wedge \gamma_2 \wedge \cdots \wedge \gamma_n$ es contradicción.*
3. *Para cualquier valoración v, $\prod_{i=1}^{n} v(\gamma_i) = 0$.*

Notemos que si $\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n\}$ es un conjunto de fórmulas, y una (o más) de las fórmulas γ_i es de la forma $\gamma_i = \gamma_{i1} \wedge \gamma_{i2}$, entonces Γ es insatisfacible si, y sólo si, lo es el conjunto que resulta de sustituir en Γ la fórmula γ_i por las dos fórmulas γ_{i1} y γ_{i2}.

Ejemplo 4.4

1. *El conjunto $\{a \vee b, \neg a, \neg b\}$ es insatisfacible. Es claro que las tres fórmulas no pueden ser verdaderas a la vez, pues si $\neg a$ y $\neg b$ son ciertas, entonces $a \vee b$ es falsa.*

   Vamos a comprobarlo haciendo la tabla de verdad de las tres fórmulas:

a	b	$a \vee b$	$\neg a$	$\neg b$
0	0	0	1	1
0	1	1	1	0
1	0	1	0	1
1	1	1	0	0

   podemos ver que en ninguna fila los tres últimos elementos valen 1.

   O bien con polinomios de Gegalkine:
   $(a \vee b) \wedge \neg a \wedge \neg b = (a+b+ab)(1+a)(1+b) = (a+b+ab+a+ab+ab)(1+b) = (b+ab)(1+b) = b+ab+b+ab = 0$

2. *Sean $\gamma_1 = a \vee \neg b \to a$, $\gamma_2 = a \leftrightarrow b$ y $\gamma_3 = b \to (a \leftrightarrow \neg b)$. Entonces el conjunto $\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}$ es también insatisfacible. La tabla de verdad de las tres fórmulas es:*

a	b	$a \vee \neg b \to a$	$a \leftrightarrow b$	$b \to (a \leftrightarrow \neg b)$
0	0	0	1	1
0	1	1	0	1
1	0	1	0	1
1	1	1	1	0

y vemos que no hay ninguna valoración para la que las tres fórmulas sean ciertas. Obviamente, si calculáramos la tabla de verdad de $\gamma_1 \wedge \gamma_2 \wedge \gamma_3$ nos quedaría una columna con todo ceros.

a	b	$a \vee \neg b \to a$	$a \leftrightarrow b$	$b \to (a \leftrightarrow \neg b)$	$\gamma_1 \wedge \gamma_2 \wedge \gamma_3$
0	0	0	1	1	0
0	1	1	0	1	0
1	0	1	0	1	0
1	1	1	1	0	0

O bien con polinomios de Gegalkine:
$a \vee \neg b \to a = 1 + (a \vee \neg b) + (a \vee \neg b)a = 1 + a + (1+b) + a(1+b) + (a+1+b+a(1+b))a = b + ab + a$
$a \leftrightarrow b = 1 + a + b$
$b \to (a \leftrightarrow \neg b) = 1 + b + b(a \leftrightarrow \neg b) = 1 + b + b(1 + a + a(1+b)) = 1 + b + b + ab + ab + ab = 1 + ab$
y multiplicando
$(a+b+ab)(1+a+b)(1+ab) = (a+a+ab+b+ab+b+ab+ab+ab)(1+ab) = ab(1+ab) = ab+ab = 0$

4.4.2 Implicación semántica

Ejemplo 4.5 *Vamos a comprobar que $a \vee b, \neg a \vDash b$. Para esto, calculamos la tabla de verdad de las fórmulas $a \vee b$, $\neg a$ y b.*

a	b	$a \vee b$	$\neg a$	b
0	0	0	1	0
0	1	1	1	1
1	0	1	0	0
1	1	1	0	1

Y ahora nos fijamos en los mundos en que $a \vee b$ y $\neg a$ sean verdaderas. Esto sólo ocurre en la segunda fila, en el mundo $a = 0$ y $b = 1$. Y en este mundo la proposición b es verdadera. Por tanto, b es consecuencia lógica de $a \vee b$ y $\neg a$.

Con polinomios de Gegalkine. A partir de las ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} a+b+ab=1 \\ 1+a=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} a+b+ab=1 \\ a=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} b=1 \\ a=0 \end{array}\right\} \Rightarrow b=1$$

O bien, viendo que el conjunto $\{a \vee b, \neg a, \neg b\}$ es insatisfacible multiplicando polinomios de Gegalkine

$$(a+b+ab)(1+a)(1+b) = (a+b+ab+a+ab+ab)(1+b) = (b+ab)(1+b) = b+b++ab+ab = 0$$

Ejemplo 4.6

Vamos a probar que

$$\{a \vee b \to c, \neg c\} \vDash \neg b$$

Lo haremos de tres formas diferentes:

- *Ecuaciones polinómicas en $\mathbb{Z}_2$. Igualamos los polinomios de Gegalkine de las hipótesis a 1 y tratamos de concluir que en esos casos el polinomio de Gegalkine de latesis vale 1. Como $a \vee b \to c = 1 + (a \vee b) + (a \vee b)c = 1 + a + b + ab + ac + bc + abc$*

$$\left.\begin{array}{r} 1+a+b+ab+ac+bc+abc=1 \\ 1+c=1 \Rightarrow c=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 1+a+b+ab=1 \Rightarrow 1+a+(1+a)b = (1+a)(1+b) = 1 \Rightarrow a=b=0$$

- *Viendo con polinomios de Gegalkine que $\{a \vee b \to c, \neg c, b\}$ es insatisfacible.*

$$(1+a+b+ab+ac+bc+abc)(1+c)b = (1+a+b+ab+ac+bc+abc)b(1+c) = bc(1+c) = bc+bc = 0$$

- *Tablas de verdad.*

  De esta forma, podemos optar por construir una tabla de verdad con las fórmulas $a \vee b \to c$, $\neg c$ y $\neg b$, o bien una tabla de verdad con las fórmulas $a \vee b \to c$, $\neg c$ y b.

a	b	c	$a \vee b \to c$	$\neg c$	$\neg b$
0	0	0	1	1	1
0	0	1	1	0	1
0	1	0	0	1	0
0	1	1	1	0	0
1	0	0	0	1	1
1	0	1	1	0	1
1	1	0	0	1	0
1	1	1	1	0	0

a	b	c	$a \vee b \to c$	$\neg c$	b
0	0	0	1	1	0
0	0	1	1	0	0
0	1	0	0	1	1
0	1	1	1	0	1
1	0	0	0	1	0
1	0	1	1	0	0
1	1	0	0	1	1
1	1	1	1	0	1

Si queremos resolverlo analizando la primera tabla, debemos fijarnos en los mundos en que tanto $a \vee b \to c$ *como* $\neg c$ *son verdaderas. Esto ocurre solamente en la primera fila. Y puesto que en ella* $\neg b = 1$*, podemos concluir que* $\neg b$ *es consecuencia lógica de* $\{a \vee b \to c, \neg c\}$*. Lo que ocurra en el resto de las filas de la tabla no nos dice nada acerca de si la implicación es o no cierta.*

Si queremos resolverlo analizando la segunda tabla, debemos ver si hay algún mundo (fila) para el que $a \vee b \to c$*,* $\neg c$ *y* b *sean verdaderas a la vez. Como esto no ocurre, significa que el conjunto* $\{a \vee b \to c, \neg c, b\}$ *es insatisfacible, luego* $a \vee b \to c, \neg c \vDash \neg b$*.*

Ejemplo 4.7 *Vamos a estudiar si*

$$b \to c \vee a,\ a \leftrightarrow \neg(b \wedge d),\ d \to a \wedge b \vDash b \leftrightarrow c \vee d$$

Para esto, vamos a calcular la tabla de verdad de las fórmulas $b \to c \vee a$*,* $a \leftrightarrow \neg(b \wedge d)$*,* $d \to a \wedge b$*, y para aquellos mundos en las que las tres fórmulas sean verdaderas, calcularemos el valor de verdad de* $b \leftrightarrow c \vee d$*.*

a	b	c	d	$b \to c \vee a$	$a \leftrightarrow \neg(b \wedge d)$	$d \to a \wedge b$	$b \leftrightarrow c \vee d$
0	0	0	0	1	0	1	
0	0	0	1	1	0	0	
0	0	1	0	1	0	1	
0	0	1	1	1	0	0	
0	1	0	0	0	0	1	
0	1	0	1	0	1	0	
0	1	1	0	1	0	1	
0	1	1	1	1	1	0	
1	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	0	
1	0	1	0	1	1	1	0
1	0	1	1	1	1	0	
1	1	0	0	1	1	1	0
1	1	0	1	1	0	1	
1	1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	0	1	

Los únicas mundos en los que $b \to c \vee a$*,* $a \leftrightarrow \neg(b \wedge d)$ *y* $d \to a \wedge b$ *son ciertas son las filas* 9*,* 11*,* 13 *y* 15*. Sólo para esos mundos hemos calculado el valor de verdad de* $b \leftrightarrow c \vee d$*. Lo que ocurra en los* 12 *mundos restantes no influye para nada en que la implicación semántica sea cierta o no.*

Si el valor de verdad de $b \leftrightarrow c \vee d$ *hubiera sido* 1 *en estos cuatro mundos, habríamos obtenido que* $\{b \to c \vee a,\ a \leftrightarrow \neg(b \wedge d),\ d \to a \wedge b\} \vDash b \leftrightarrow c \vee d$*. Pero los mundos de las filas* 11 *y* 13 *nos dice que esto último no es cierto.*

4.4.3 Teorema de la deducción

Ejemplo 4.8

Vamos a demostrar, usando el teorema de la deducción, que si α *y* β *son dos fórmulas de un lenguaje proposicional, entonces* $\alpha \to (\beta \to \alpha)$ *es una tautología.*

Sabemos que eso es equivalente a que $\vDash \alpha \to (\beta \to \alpha)$*.*

Aplicamos el teorema de la deducción, y tenemos que eso es equivalente a que $\alpha \vDash \beta \to \alpha$*. Y nuevamente por el teorema de la deducción nos queda que hemos de comprobar que* $\alpha, \beta \vDash \alpha$*.*

Y esto último es evidente, pues si tomamos $\alpha = \beta = 1$*, entonces* $\alpha = 1$*.*

Ejercicio 4.1 *Usando el Teorema de la Deducción prueba que las siguientes fórmulas son tautologías:*

1. $(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$ *(autodistributiva de la implicación)*
2. $(\neg\alpha \to \neg\beta) \to ((\neg\alpha \to \beta) \to \alpha)$ *(ley clásica de reducción al absurdo)*

Ejemplo 4.9 *Sean φ, ψ, χ, θ, τ fórmulas de un lenguaje proposicional. Vamos a comprobar que*

$$\alpha = \big(\big(((\varphi \to \psi) \to (\neg\chi \to \neg\theta)) \to \chi\big) \to \tau\big) \to \big((\tau \to \varphi) \to (\theta \to \varphi)\big)$$

es una tautología.

Lo que vamos a hacer es comprobar que α es consecuencia lógica de $\emptyset$ (es decir, $\models \alpha$). Y para esto, usaremos el teorema de la deducción y el teorema de la insatisfacibilidad.

$\models \alpha$ *si, y sólo si,* $\models \big(\big(((\varphi \to \psi) \to (\neg\chi \to \neg\theta)) \to \chi\big) \to \tau\big) \to \big((\tau \to \varphi) \to (\theta \to \varphi)\big)$

si, y sólo si, $\big(((\varphi \to \psi) \to (\neg\chi \to \neg\theta)) \to \chi\big) \to \tau \models \big((\tau \to \varphi) \to (\theta \to \varphi)\big)$

si, y sólo si, $\big(((\varphi \to \psi) \to (\neg\chi \to \neg\theta)) \to \chi\big) \to \tau,\ \tau \to \varphi \models \theta \to \varphi$

si, y sólo si, $\big(((\varphi \to \psi) \to (\neg\chi \to \neg\theta)) \to \chi\big) \to \tau,\ \tau \to \varphi,\ \theta \models \varphi$

si, y sólo si, $\{\big(((\varphi \to \psi) \to (\neg\chi \to \neg\theta)) \to \chi\big) \to \tau,\ \tau \to \varphi,\ \theta,\ \neg\varphi\}$ *es insatisfacible.*

Ahora se trata de demostrar que no pueden valer 1 *simultaneamente.*

$$\left.\begin{array}{r} \big(((\varphi \to \psi) \to (\neg\chi \to \neg\theta)) \to \chi\big) \to \tau = 1 \\ \tau \to \varphi = 1 \\ \theta = 1 \\ \neg\varphi = 1 \Rightarrow \varphi = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} \big((\neg\chi \to \neg\theta) \to \chi\big) \to \tau = 1 \\ \tau = 0 \\ \theta = 1 \\ \varphi = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} (\neg\chi \to \neg\theta) \to \chi = 0 \\ \tau = 0 \\ \theta = 1 \\ \varphi = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} \neg\chi \to \neg\theta = 1 \\ \chi = 0 \\ \tau = 0 \\ \theta = 1 \\ \varphi = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 1 \to 0 = 1 \\ \chi = 0 \\ \tau = 0 \\ \theta = 1 \\ \varphi = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \textbf{\textit{ABSURDO}}$$

Que es lo que queríamos demostrar. Y con esto podemos concluir que el conjunto

$$\{\big(((\varphi \to \psi) \to (\neg\chi \to \neg\theta)) \to \chi\big) \to \tau,\ \tau \to \varphi,\ \theta,\ \neg\varphi\}$$

es insatisfacible, que es lo que estábamos comprobando.

Con esta comprobación (que este conjunto es insatisfacible) hemos demostrado que α es una tautología.

Un intento de resolver este ejercicio usando tablas de verdad es tedioso (como son 5 proposiciones básicas la tabla de verdad tiene $2^5 = 32$ filas y hay también demasiadas subfórmulas que evaluar) así que por su extensión tiene una alta probabilidad de error.

De todas formas, en el libro del Dr. Jesús García Miranda está resuelto por tablas de verdad.

4.5 Forma clausulada de una fórmula.

4.6 El problema de la implicación semántica.

4.6.1 Algoritmo de Davis-Putnam

Si utilizais los apuntes lo entendereis mejor en una primera lectura. Dejad la versión del libro para una segunda lectura.

4.6.2 Método de resolución