Análisis en frecuencia de un circuito RC

Isabel M. Tienda Luna

En este documento vamos a aprender cómo pintar el diagrama de Bode (tanto para el módulo como para el argumento de la función de transferencia) de la función de transferencia de un circuito formado por una fuente de CA y una resistencia en serie con un condensador de la figura 1. Como puede

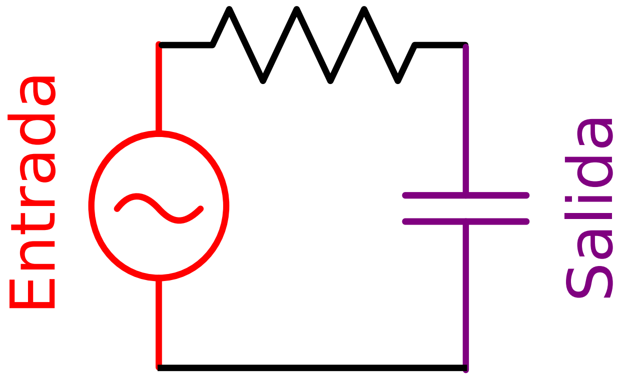

Figura 1: Circuito RC.

verse, la salida del circuito se ha colocado entre los extremos del condensador (morado) y la entrada del circuito se ha colocado entre los extremos de la fuente de tensión (rojo).

Vamos a suponer para el cálculo numérico los siguientes valores: para la fuente $v_i(t) = V_i \cos(\omega t) V$, $R = 1k\Omega$ y $C = 10nF = 10\,10^{-9}F = 10^{-8}F$.

La función de transferencia del circuito de la figura 1 ya se ha calculado en otro ejercicio usando la definición de función de transferencia:

$$T(\omega) = \frac{V_{salida}}{V_{entrada}} \tag{1}$$

como ya se vio en ese ejercicio, la función de transferencia es una función compleja porque tanto V_{salida} como $V_{entrada}$ pueden ser números complejos cada uno de ellos con su módulo y su argumento. Esto es, $V_{salida} = |V_{salida}|e^{j\cdot arg(V_{salida})}$ y $V_{entrada} = |V_{entrada}|e^{j\cdot arg(V_{entrada})}$. Si sustituyo las dos expresiones anteriores en la ecuación 1,

$$T(\omega) = \frac{V_{salida}}{V_{entrada}} = \frac{|V_{salida}|e^{j\cdot arg(V_{salida})}}{|V_{entrada}|e^{j\cdot arg(V_{entrada})}} \tag{2}$$

Como la función de transferencia es compleja, podremos escribirla usando su módulo y su argumento:

$$T(\omega) = |T(\omega)|e^{j\cdot arg(T(\omega))} \tag{3}$$

Finalmente, igualando las ecuaciones 2 y 3 llegamos a:

$$\begin{aligned} |T(\omega)|e^{j\cdot arg(T(\omega))} &= \frac{|V_{salida}|e^{j\cdot arg(V_{salida})}}{|V_{entrada}|e^{j\cdot arg(V_{entrada})}} & (4)\\ |T(\omega)| &= \frac{|V_{salida}|}{|V_{entrada}|} & (5)\\ argT(\omega) &= arg(V_{salida}) - arg(V_{entrada}) & (6) \end{aligned}$$

Para el circuito de la figura 1 ya hemos calculado la función de transferencia analizando el circuito y hemos obtenido que su expresión es:

$$T(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1+(10^{-5}\omega)^2}}e^{-j\arctan(10^{-5}\omega)} \tag{7}$$

Como puede verse, la función de transferencia es un número complejo cuyo valor depende de la frecuencia angular ω de la fuente que alimenta el circuito. Por tanto, para cada valor de ω, podré calcular el módulo de la función de transferencia y su argumento:

$$\text{Módulo} \quad \rightarrow \quad |T(\omega)| = \frac{|V_{salida}|}{|V_{entrada}|} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\omega}{10^5}\right)^2+1}} \tag{8}$$

$$\text{Argumento} \quad \rightarrow \quad \arg(T(\omega)) = arg(V_{salida}) - arg(V_{entrada}) = -\arctan\left(\frac{\omega}{10^5}\right) \tag{9}$$

donde se ha usado que $10^{-5}\omega = \frac{\omega}{10^5}$.

La representación de la función de transferencia en función de ω se llama Diagrama de Bode. Un Diagrama de Bode está formado por dos gráficas. En una de ellas se representa el módulo de la función de transferencia en función de ω y en la otra se representa el argumento de la función de transferencia en función de ω.

1. ¿Cómo pinto $|T(\omega)|$?

Para pintar $|T(\omega)|$, lo que hay que hacer es analizar su comportamiento a bajas y a altas frecuencias. Pero para saber lo que son bajas o lo que son altas frecuencias, uno tiene que tener algo con lo que comparar. Por ejemplo 1 litro de un líquido es mucho si lo comparamos con 1 centímetro cúbico pero es muy poco si lo comparamos con 1000 metros cúbicos. Nuestro elemento de comparación será el 10^5 que aparece dividiendo a ω en la expresión del módulo. **¿Por qué?** Porque en la ecuación 8 aparece $(\frac{\omega}{10^5})^2 + 1$. Por tanto, estudiaremos el comportamiento de $|T(\omega)|$ para valores de ω mayores que 10^5 (donde $\frac{\omega}{10^5} >> 1$) y para valores de ω menores que 10^5 donde (donde $\frac{\omega}{10^5} <<$

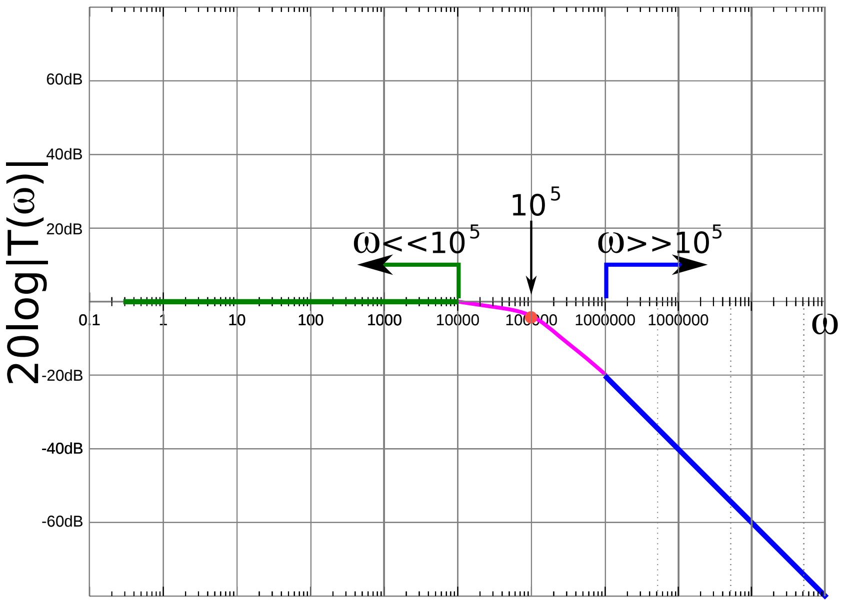

Figura 2: Diagrama de Bode en módulo.

1). En la figura 2, se ha representado el diagrama de Bode en módulo. Como puede verse, este diagrama está dividido en tres tramos pintados en tres colores diferentes. El tramo azul se corresponde con la zona $\omega >> 10^5 \frac{rad}{s}$, el tramo verde con la zona $\omega << 10^5 \frac{rad}{s}$ y el tramo morado con la zona intermedia.

- Si $\omega >> 10^5 \frac{rad}{s}$

  En este caso, $\frac{\omega}{10^5}$ será un número grande, tan grande que puedo despreciar el uno en $1 + \left(\frac{\omega}{10^5}\right)^2$ frente a $\left(\frac{\omega}{10^5}\right)^2$. Entonces podré escribir:

  $$\sqrt{\left(\frac{\omega}{10^5}\right)^2 + 1} \approx \sqrt{\left(\frac{\omega}{10^5}\right)^2} = \frac{\omega}{10^5} \tag{10}$$

  si sustituyo la aproximación anterior en la ecuación 8 queda:

  $$|T(\omega)| = \frac{|V_{salida}|}{|V_{entrada}|} \approx \frac{1}{\frac{\omega}{10^5}} = \frac{10^5}{\omega} \tag{11}$$

  como puede verse, para estas frecuencias, a medida que se aumenta ω, la salida disminuye con respecto a la entrada ya que $\frac{|V_{salida}|}{|V_{entrada}|}$ se hace cada vez más pequeño según la ecuación 11.

  Si ahora le calculo al módulo el logaritmo y lo multiplico por 20 queda:

  $$20 \log |T(\omega)| = 20 \log \frac{|V_{salida}|}{|V_{entrada}|} \approx 20 \log \frac{10^5}{\omega} = 20 \log 10^5 - 20 \log \omega \tag{12}$$

como en esta zona $\omega >> 10^5 \frac{rad}{s}$, todo el tiempo estaré calculando logaritmos de números menores que uno por lo que el resultado será negativo. Esto es, como $\omega >> 10^5 \frac{rad}{s}$, $20 \log |T(\omega)| < 0$. Por tanto, en un diagrama de Bode en módulo, los valores negativos significan salidas menores que entradas.

Si represento la función de la ecuación 12 en función de ω en escala logarítmica (recordar que representar ω en escala logarítmica es como representar $\log \omega$) lo que veré es una recta de pendiente -20 y que corta al eje X en el punto $\omega = 10^5 \frac{rad}{s}$. Esto se corresponde con el tramo en azul de la figura 2.

Conclusión: si $\omega >> 10^5 = 10^5 \frac{rad}{s}$ el diagrama de Bode del módulo de la función de transferencia es una línea recta de pendiente negativa igual a 20 y que corta el eje X en el punto $\omega = 10^5 \frac{rad}{s}$. El hecho de que tome sólo valores negativos significa que en esa zona el módulo de la salida es más pequeño que el de la entrada. Cuanto más negativo sea el valor de $20 \log |T(\omega)|$, más pequeña será la salida.

- Si $\omega << 10^5 = 10^5 \frac{rad}{s}$
  En este caso, $\frac{\omega}{10^5}$ será un número pequeño, tan pequeño que puedo despreciarlo frente al uno en $1 + \left(\frac{\omega}{10^5}\right)^2$. Entonces podré escribir:

$$\sqrt{\left(\frac{\omega}{10^5}\right)^2 + 1} \approx 1 \tag{13}$$

si sustituyo la aproximación anterior en la ecuación 8 queda:

$$|T(\omega)| = \frac{|V_{salida}|}{|V_{entrada}|} \approx \frac{1}{1} = 1 \tag{14}$$

como puede verse de la ecuación anterior, para estas frecuencias la salida y la entrada son iguales ya que su cociente vale uno.

Si ahora le calculo al módulo de la función de transferencia el logaritmo y lo multiplico por 20 queda:

$$20 \log |T(\omega)| = 20 \log \frac{|V_{salida}|}{|V_{entrada}|} \approx 20 \log 1 = 0 \tag{15}$$

lo que significa que si salida y entrada son iguales, la representación del diagrama de Bode en módulo vale cero.

Si represento la función de la ecuación 15 en función de ω en escala logarítmica (recordar que representar ω en escala logarítmica es como representar $\log \omega$) lo que veré es que vale cero para cualquier valor de ω. Esto se corresponde con el tramo en verde de la figura 2.

Conclusión: si $\omega << 10^5 = 10^5 \frac{rad}{s}$ el diagrama de Bode del módulo de la función de transferencia es una línea horizontal de valor constante igual a cero. Esto significa que es este tramo el módulo de la salida es igual al módulo de la entrada.

- Si $\omega = 10^5 = 10^5 \frac{rad}{s}$
En este caso, $\frac{\omega}{10^5} = 1$. Entonces podré escribir:

$$\sqrt{\left(\frac{\omega}{10^5}\right)^2 + 1} = \sqrt{(1+1)} = \sqrt{2} = 0{,}7 \tag{16}$$

si sustituyo la aproximación anterior en la ecuación 8 queda:

$$|T(\omega)| = \frac{|V_{salida}|}{|V_{entrada}|} \approx \frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}7 \tag{17}$$

Si ahora le calculo al módulo el logaritmo y lo multiplico por 20 queda:

$$20 \log |T(\omega)| \approx 20 \log 0{,}7 = -3dB \tag{18}$$

Conclusión: si $\omega = 10^5 = 10^5 \frac{rad}{s}$, $20 \log |T(10^5)| = -3dB$ o lo que es lo mismo, el módulo de la salida es 0.7 veces el módulo de la entrada.

2. ¿Cómo pinto $\arg(T(\omega))$?

Para pintar el argumento de $T(\omega)$, lo que hay que hacer es analizar su comportamiento a bajas y a altas frecuencias. Pero para saber lo que son bajas o lo que son altas frecuencias, uno tiene que tener algo con lo que comparar. Por ejemplo 1 litro de líquido es mucho si lo comparamos con 1 centímetro cúbico pero es muy poco si lo comparamos con 1000 metros cúbicos. Nuestro elemento de comparación será 10^5 porque aparece dividiendo a ω en la expresión del argumento. Por tanto, estudiaremos el comportamiento del argumento de $T(\omega)$ para valores de ω mayores que 10^5 y para valores de ω menores que 10^5.

En la figura 3, se ha representado el diagrama de Bode en argumento. Como puede verse, este diagrama está dividido en tres tramos pintados en tres colores diferentes. El tramo azul se corresponde con la zona $\omega >> 10^5 \frac{rad}{s}$, el tramo verde con la zona $\omega << 10^5 \frac{rad}{s}$ y el tramo morado con la zona intermedia.

- Si $\omega >> 10^5$
En este caso, $\frac{\omega}{10^5}$ será un número muy grande y la arcotangente de un número tan grande será $\frac{\pi}{2}$. Entonces podré escribir:

$$-\arctan \frac{\omega}{10^5} \approx -\frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} \tag{19}$$

si sustituyo la aproximación anterior en la ecuación 9 queda:

$$\arg(T(\omega)) = \arg(V_{salida}) - \arg(V_{entrada}) \approx -\frac{\pi}{2} \tag{20}$$

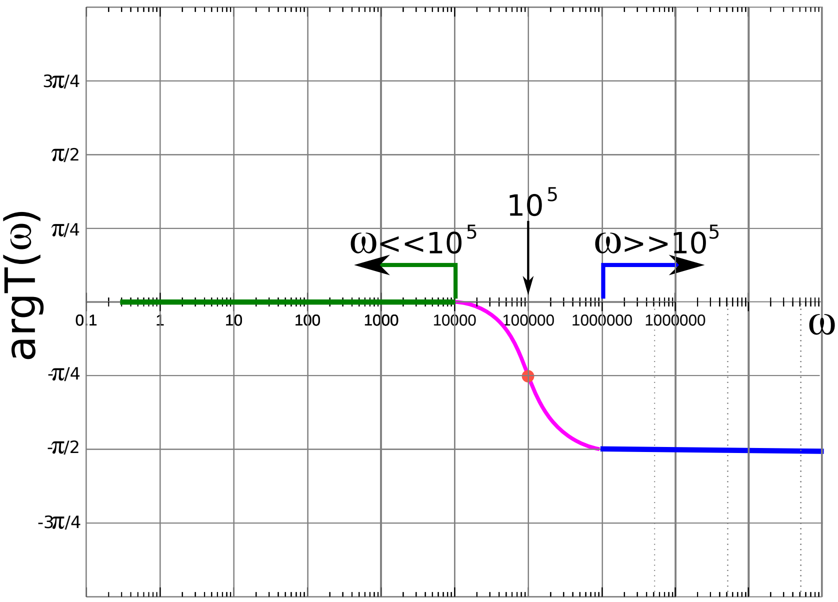

Figura 3: Diagrama de Bode en argumento.

lo que significa que los argumentos de la salida y la entrada se diferencian en $-\frac{\pi}{2}$. Si represento la función de la ecuación 20 frente a ω en escala logarítmica (recordar que representar ω en escala logarítmica es como representar $\log \omega$) lo que veré será una línea horizontal de valor $\frac{-\pi}{2}$ para cualquier valor de la frecuencia ω. Esta función aparece representada en la figura 3 en azul.

Conclusión: si $\omega >> 10^5 \frac{rad}{s}$ el diagrama de Bode del argumento de la función de transferencia es una línea horizontal de valor $\frac{-\pi}{2}$ para cualquier valor de la frecuencia ω. Esto significa que la diferencia entre el argumento de la salida y el de la entrada es $\frac{-\pi}{2}$.

- Si $\omega << 10^5$
  En este caso, $\frac{\omega}{10^5}$ será un número muy pequeño. La arcotangente de un número muy pequeño es prácticamente cero. Entonces podré escribir:

$$-\arctan \frac{\omega}{10^5} \approx 0 \tag{21}$$

si sustituyo la aproximación anterior en la ecuación 9 queda:

$$\arg(T(\omega)) = \arg(V_{salida}) - \arg(V_{entrada}) \approx 0 \tag{22}$$

lo que significa que salida y entrada tienen el mismo argumento.

Si represento la función de la ecuación 22 frente a ω en escala logarítmica (recordar que representar ω en escala logarítmica es como representar $\log \omega$) lo que veré será una línea horizontal de valor 0 para cualquier valor de la frecuencia ω. Este comportamiento aparece representado en la figura 3 en verde.

Conclusión: si $\omega << 10^5 = 10^5 \frac{rad}{s}$ el diagrama de Bode del argumento de la función de transferencia es una línea horizontal de valor 0 para cualquier valor de la frecuencia ω. Esto significa que los argumentos de la salida y la entrada son iguales.

- Si $\omega = 10^5 = 10^5 \frac{rad}{s}$
  En este caso, $\frac{\omega}{10^5} = 1$ y $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$. Entonces podré escribir:

  $$-\arctan \frac{\omega}{10^5} = -\frac{\pi}{4} \tag{23}$$

  si sustituyo la aproximación anterior en la ecuación 9 queda:

  $$\arg\left(T\left(\omega = 10^5\right)\right) = -\frac{\pi}{4} \tag{24}$$

  Conclusión: si $\omega = 10^5 = 10^5 \frac{rad}{s}$, $\arg\left(T\left(\omega = 10^5\right)\right) = -\frac{\pi}{4}$.