TEMA 2

Algebras de Boole.

Ejercicio 2.1. Sea I el conjunto de los números reales que pertenecen al intervalo cerrado $[0, 1]$. Para todo $a, b \in I$ definimos $a \vee b = max\{a, b\}$, $a \wedge b = min\{a, b\}$ y $\overline{a} = 1 - a$ ¿Es I con estas operaciones un álgebra de Boole? Razona la respuesta.

Ejercicio 2.2. Dada un álgebra de Boole demuestra las propiedades asociativas de $\vee$ y $\wedge$ utilizando las ocho propiedades de Huntington.

Ejercicio 2.3. Si $(A, \vee, \wedge, ^*, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ es un álgebra de Boole. Para todo $a, b, c \in A$ se cumple:

1. Si $a \vee x = \mathbf{1}$ y $a \wedge x = \mathbf{0}$, entonces $x = a^*$.
2. $\mathbf{0}^* = 1$ y $\mathbf{1}^* = 0$
3. $(a^*)^* = a$
4. Si $a^* = b^*$ entonces $a = b$
5. Leyes de De Morgan: $(a \wedge b)^* = a^* \vee b^*$ $\quad (a \vee b)^* = a^* \wedge b^*$

Ejercicio 2.4. Si $(A, \vee, \wedge, ^*, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ es un álgebra de Boole. Para todo $a, b, c \in A$ se cumple:

1. $\mathbf{0} \leq a \leq \mathbf{1}$.
2. Isotonía. Si $a \leq b$, entonces $a \vee c \leq b \vee c$ y $a \wedge c \leq b \wedge c$
3. $a \leq b \Leftrightarrow b^* \leq a^*$
4. $a \wedge b \leq c \Leftrightarrow a \leq b^* \vee c$

Ejercicio 2.5. Sea A un álgebra de Boole. Para todo $a, b \in A$, definimos la operación diferencia simétrica como $a \oplus b = (a \wedge b^*) \vee (a^* \wedge b)$. Demuestra que se verifican las siguientes identidades:

1. $a \oplus b = b \oplus a$
2. $a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c$
3. $a \wedge (b \oplus c) = (a \wedge b) \oplus (a \wedge c)$
4. $a \oplus a = 0$, $a \oplus 0 = a$, $a \oplus a^* = 1$, $a \oplus 1 = a^*$
5. $x \oplus a = b$ si y sólo si $x = a \oplus b$
6. $a = b$ si y sólo si $a \oplus b = 0$

Ejercicio 2.6. Sea $D(70)$ el conjunto de los números naturales que son divisores de 70 con las operaciones mcm, mcd, $x^* = 70/x$ y con $\mathbf{0} = 1$ y $\mathbf{1} = 70$.

1. ¿Es un álgebra de Boole? En caso afirmativo encuentra sus átomos y coátomos.
2. Represéntala gráficamente como conjunto ordenado.

3. Calcula $35 \wedge (2 \vee 7)$ y $(2 \vee 7) \wedge (14 \wedge 10)$

Ejercicio 2.7. Justifica que $\mathsf{D}(210)$ es un álgebra de Boole y a continuación evalúa las siguientes expresiones:

$$30 \vee (15 \wedge 10), \quad 14^* \wedge 21, \quad (6^* \vee 35)^* \vee 10, \quad ((3 \vee 10)^* \vee 2)^*.$$

Expresa los elementos 21 y 35 como supremo de átomos y como ínfimo de coátomos.

Ejercicio 2.8. Consideremos el álgebra de Boole de los divisores de 2310.

1. Calcula los átomos y los coátomos.
2. Evalúa las expresiones:
   $21 \vee (165 \wedge 77^*)$, $770 \wedge (3 \vee 14)^*$, $(15 \vee 110)^*$, $15^* \wedge 110^*$, $385 \vee (1155 \wedge 42)$, $(385 \vee 1155) \wedge (385 \vee 42)$.
3. Expresa 5, 35, 154, 231, 1155 como supremo de átomos y como ínfimo de coátomos.

Ejercicio 2.9.

1. Sea B un álgebra de Boole con 32 elementos. ¿Cuántos átomos tiene?
2. Sea B un álgebra de Boole cuyos átomos son a_1, a_2, a_3 y a_4. ¿Cuáles son sus coátomos?

Ejercicio 2.10. Determina un número natural n sabiendo que el conjunto $\mathsf{D}(n)$ de los divisores positivos de n es un álgebra de Boole con las operaciones usuales, y que 105 y 42 son dos coátomos. Además obtén todos los $x \in \mathsf{D}(n)$ tales que $105^* \vee x = 42$.

Ejercicio 2.11. Sean $f_i : \mathbb{B}^3 \longrightarrow \mathbb{B}$ las funciones booleanas de tres variables con $i = 63$, 82, 103, 104, 116, 126, 143, 172, 188, 217 y 231.

Halla:

- sus formas canónicas disyuntivas y conjuntivas.
- sus implicantes primos mediante Quine, consensos, FCC y Karnaugh.
- sus formas canónicas disyuntivas reducidas.
- sus formas no simplificables mediante Karnaugh y Petrick.

Ejercicio 2.12. Sean $f_i : \mathbb{B}^4 \longrightarrow \mathbb{B}$ las funciones booleanas de cuatro variables con $i = 13244$, 43944 y 62640.

Halla:

- sus formas canónicas disyuntivas y conjuntivas.
- sus implicantes primos.
- sus formas canónicas disyuntivas reducidas.
- sus formas no simplificables.

Ejercicio 2.13. Halla las formas disyuntivas canónica y reducida de la función f dada por $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee x_2) \wedge x_3$. Encuentra sus formas disyuntivas no simplificables.

Ejercicio 2.14. Dada la función booleana $f : \mathbb{B}^4 \to \mathbb{B}$ definida por

$$f(x, y, z, t) = xyzt \vee xy^*zt \vee xyzt^* \vee xy^*zt^* \vee x^*y^*z^*t^* \vee x^*yz^*t^* \vee x^*y^*z^* \vee x^*yz^*t$$

1. Demuestra que $f(x, y, z, t) = xz \vee x^*z^*$ haciendo uso de las propiedades de álgebra de Boole.

2. Verifica el resultado anterior calculando las formas disyuntivas no simplificables.

Ejercicio 2.15. En cada caso, encuentra la expresión más sencilla que detecte, dentro del conjunto $\{0, 1, 2, \ldots, 15\}$ los números que cumplen:

1. son múltiplos de 2;
2. son múltiplos de 3;
3. son múltiplos de 4.

Considera $\{0, 1, 2, \ldots, 15\}$ como los elementos del 4-cubo.

Ejercicio 2.16. Un examen de tipo test consta de 4 preguntas. Las respuestas correctas son: (SI,NO,SI,SI). Construye una expresión booleana que analice cada examen ydistinga los aprobados de los suspensos (se considera aprobado si al menos tres respuestas son correctas).

Ejercicio 2.17. Un comité formado por tres personas toma decisiones mediante votación por mayoría. Cada miembro del comité puede "votar SI" pulsando un botón. Diseña una red lógica mediante la cual se encienda una luz cuando y sólo cuando haya una mayoría de "votos SI".

Ejercicio 2.18. Calcula la forma normal canónica disyuntiva de la aplicación $f(x, y, z) = (x \uparrow y) \downarrow z$.

Ejercicio 2.19. Calcula la forma normal conjuntiva y la forma normal disyuntiva para la función booleana $f(x, y, z) = (x^*y + z)^* + xz^*$.

Ejercicio 2.20. Se desea construir un circuito que tenga como entradas cuatro líneas que suministran los dígitos de un número binario $n = (a_3a_2a_1a_0)_2$ y tenga como salida una línea que tome el valor 1 cuando el número n sea múltiplo de tres o de cuatro, y 0 en otro caso. Obtén la función booleana f que rige el funcionamiento de dicho circuito. A continuación optimiza la expresión de f.

Ejercicio 2.21. Sea f la función booleana de cuatro variables que toma el valor 1 exclusivamente para $(0, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 0), (0, 1, 1, 1), (1, 0, 1, 1), (1, 1, 1, 0)$ y $(1, 1, 1, 1)$. Aplica el método de Quine-Petrick para para obtener todas las formas irredundantes posibles de f.

Ejercicio 2.22. Obtén una expresión de la función booleana $f(x, y, z) = xy + z^*$ en la que sólo aparezcan las operaciones suma y complemento. A continuación obtén otra expresión de f en la que sólo aprezcan las operaciones producto y complemento.

Ejercicio 2.23. Justifica que cualquier función booleana puede ser expresada usando exclusivamente las operaciones suma y complemento. Análogamente, usando operaciones producto y complemento.

Ejercicio 2.24. Sea A un álgebra de Boole. Para todo $a, b \in A$, definimos las operaciones binarias:

- a **NAND** b $= a \uparrow b = (a \wedge b)^*$.
- a **NOR** b $= a \downarrow b = (a \vee b)^*$.

Demuestra que todas las operaciones del álgebra de Boole se pueden expresar en función de **NAND**. Pruebalo también para **NOR**.

Ejercicio 2.25. Expresa la función booleana del Ejercicio 2.22 en términos únicamente de la operació **NAND**. Haz lo mismo ahora con la operación **NOR**.