TEMA 3

Grafos.

Ejercicio 3.1. Sea G un grafo completo con cuatro vértices. Construye todos sus subgrafos salvo isomorfismos.

Ejercicio 3.2. ¿Son isomorfos los grafos de la figura ? ¿Y los de la figura ? ¿Y los de la ? ¿Y los de la ?

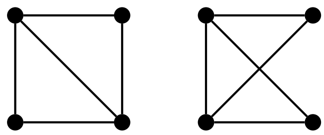


Figura 1

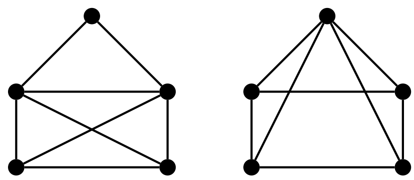


Figura 2

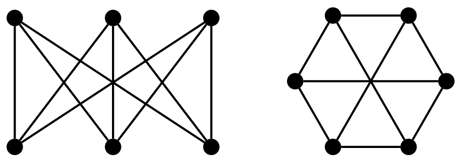


Figura 3

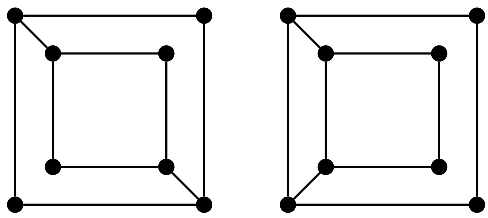
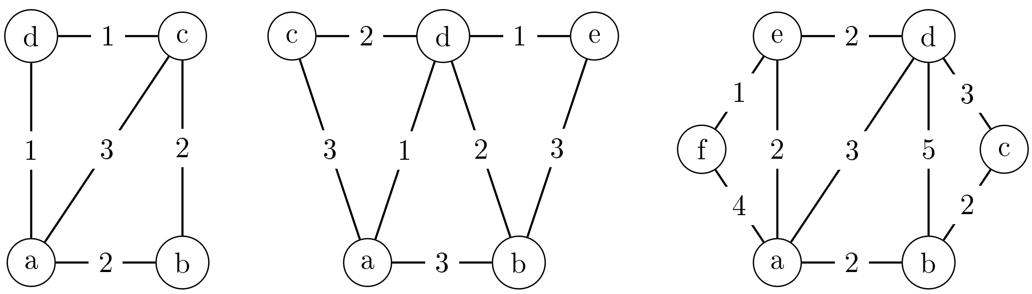
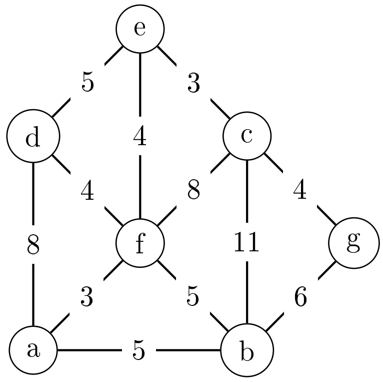
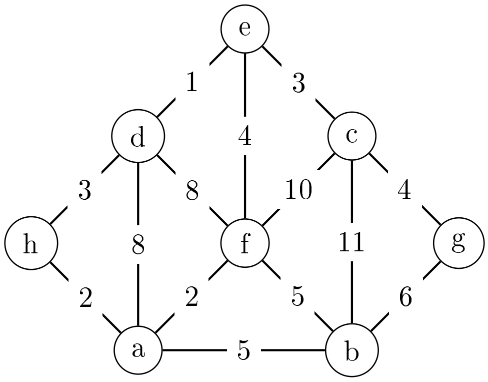


Figura 4

Ejercicio 3.3. Dados los grafos ponderados:

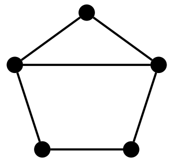


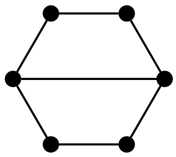




Halla, para cada uno de ellos, utilizando el algoritmo de Dijstra un camino de mínimo peso entre cada dos de sus vértices.

Ejercicio 3.4. Expresa en forma matricial los grafos





Ejercicio 3.5. Representa gráficamente los grafos cuyas matrices de adyacencia son

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 3.6. Se conocen los siguientes datos sobre las personas a, b, c, d, e, f y g:

1. La persona a habla inglés.
2. La persona b habla inglés y español.
3. La persona c habla inglés, italiano y ruso.
4. La persona d habla japonés y español.
5. La persona e habla alemán e italiano.
6. La persona f habla francés, japonés y ruso.
7. La persona g habla francés y alemán.

¿Es cierto que cada par de personas se pueden comunicar entre ellas utilizando si, es necesario, a otra persona como intérprete?

Ejercicio 3.7. Demuestra que en un grafo el número de vértices de grado impar es par.

Ejercicio 3.8. Demuestra que en todo grafo simple con más de un vértice existen dos vértices con el mismo grado.

Ejercicio 3.9. Un automorfismo de un grafo G es un isomorfismo de G en G. Determina el número de automorfismos para cada uno de los grafos siguientes: K_n, P_n, C_n y $K_{m,n}$.

Ejercicio 3.10. ¿Existe algún grafo regular de grado cinco con veinticinco vértices?

Ejercicio 3.11. ¿Existe un grafo completo con quinientos noventa y cinco lados?

Ejercicio 3.12. Si G es un grafo simple con n vértices, l lados y r componentes conexas, entonces

$$n - k \leq l \leq \frac{(n-k)(n-k+1)}{2}.$$

Ejercicio 3.13. ¿Cuál es el menor número de vértices que puede tener un grafo simple con 1000 lados?

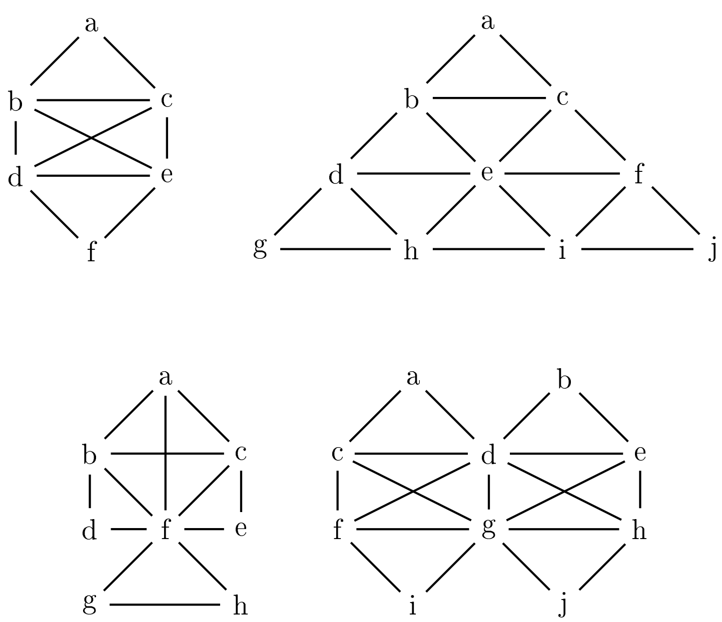
Ejercicio 3.14. ¿Cuál es el mayor número de vértices que puede tener un grafo conexo con 1000 lados?

Ejercicio 3.15. Determina cuáles de las secuencias siguientes son gráficas, y para aquellas que lo sean encuentra una realización concreta:

- $2, 4, 4, 3, 3$
- $2, 2, 3, 2, 2, 3$
- $4, 4, 3, 2, 2, 1$
- $7, 6, 5, 4, 3, 3, 2$
- $6, 5, 5, 4, 3, 3, 2$
- $6, 6, 5, 4, 3, 3, 1$
- $1, 4, 1, 2, 2, 4, 2, 2$
- $1, 5, 1, 4, 2, 4, 2, 3$
- $5, 5, 4, 4, 4, 4, 2, 2$

Para contestar es necesario utilizar el algoritmo de demolición y reconstrucción. Cualquier otra respuesta no será válida.

Ejercicio 3.16. Encuentra un camino de Euler para los grafos:

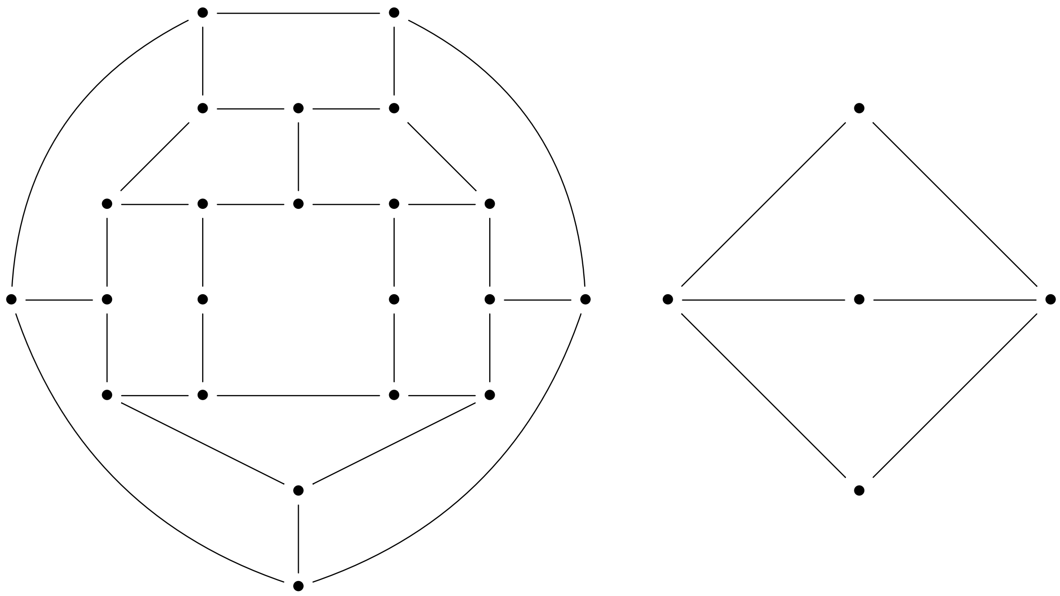


Ejercicio 3.17. ¿Para qué valores de n el grafo K_n es un circuito de Euler?

Ejercicio 3.18. Obtén una fórmula para el número de lados de $K_{m,n}$.

Ejercicio 3.19. ¿Para qué valores de m y n el grafo $K_{m,n}$ es un circuito de Euler?

Ejercicio 3.20. ¿Cuáles de los siguientes grafos contienen un circuito Hamiltoniano?



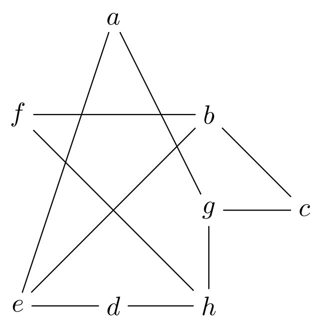
Ejercicio 3.21. Demuestra que si colocamos las 28 fichas del dominó en fila, de forma que si una ficha está junto a otra los cuadrados adyacentes son del mismo valor, entonces los valores de los cuadrados inicial y final son el mismo.

Si tuviéramos un dominó con 36 fichas, en la que los valores marcados en cada una fueran de 0 a 7, ¿sería posible colocarlas todas en fila como hemos explicado en el apartado anterior?

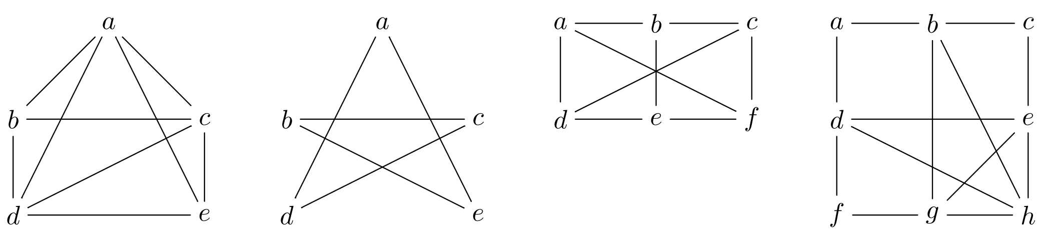
Ejercicio 3.22. Demuestra que si $n \geq 3$, entonces K_n contiene un circuito hamiltoniano.

Ejercicio 3.23. ¿Cuándo $K_{m,n}$ contiene un circuito de Hamilton?

Ejercicio 3.24. ¿Es plano el grafo siguiente?



Ejercicio 3.25. Determina cuáles de los siguientes grafos son planos



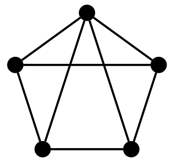
Ejercicio 3.26. Demuestra que cualquier grafo con cuatro vértices o menos es siempre plano.

Ejercicio 3.27. Demuestra que si un grafo tiene a lo sumo cinco vértices y uno de ellos es de grado dos entonces es plano.

Ejercicio 3.28. Sea un grafo plano y conexo con nueve vértices de grados dos (tres veces), tres (tres veces), cuatro (dos veces) y cinco. ¿Cuántos lados hay? ¿Y caras?

Ejercicio 3.29. Encuentra, si existe, un grafo G de cuatro vértices con grados $\{3, 2, 3, 2\}$. Utiliza el algoritmo de demolición-reconstrucción. Calcula su polinomio cromático $p_G(x)$, su número cromático y de cuántas formas se puede pintar con 6 colores.

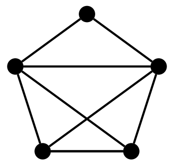
Ejercicio 3.30. Dado el grafo G



calcula su polinomio cromático $P_G(x)$ y su número cromático. ¿De cuántas formas se puede pintar G con 6 colores?

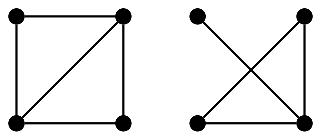
Ejercicio 3.31. Dado el grafo $G = K_{2,3}$ calcula su polinomio cromático $P_G(x)$. Halla el número cromático de G y calcula de cuántas formas se puede colorear G con 6 colores distintos.

Ejercicio 3.32. Dado el grafo:



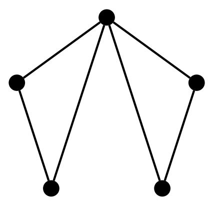
Halla su polinomio cromático, su número cromático y calcula de cuántas formas se puede colorear con 4 colores.

Ejercicio 3.33. Dado el grafo:



Halla su polinomio cromático, su número cromático y calcula de cuántas formas se puede colorear con 5 colores.

Ejercicio 3.34. Dado el grafo:



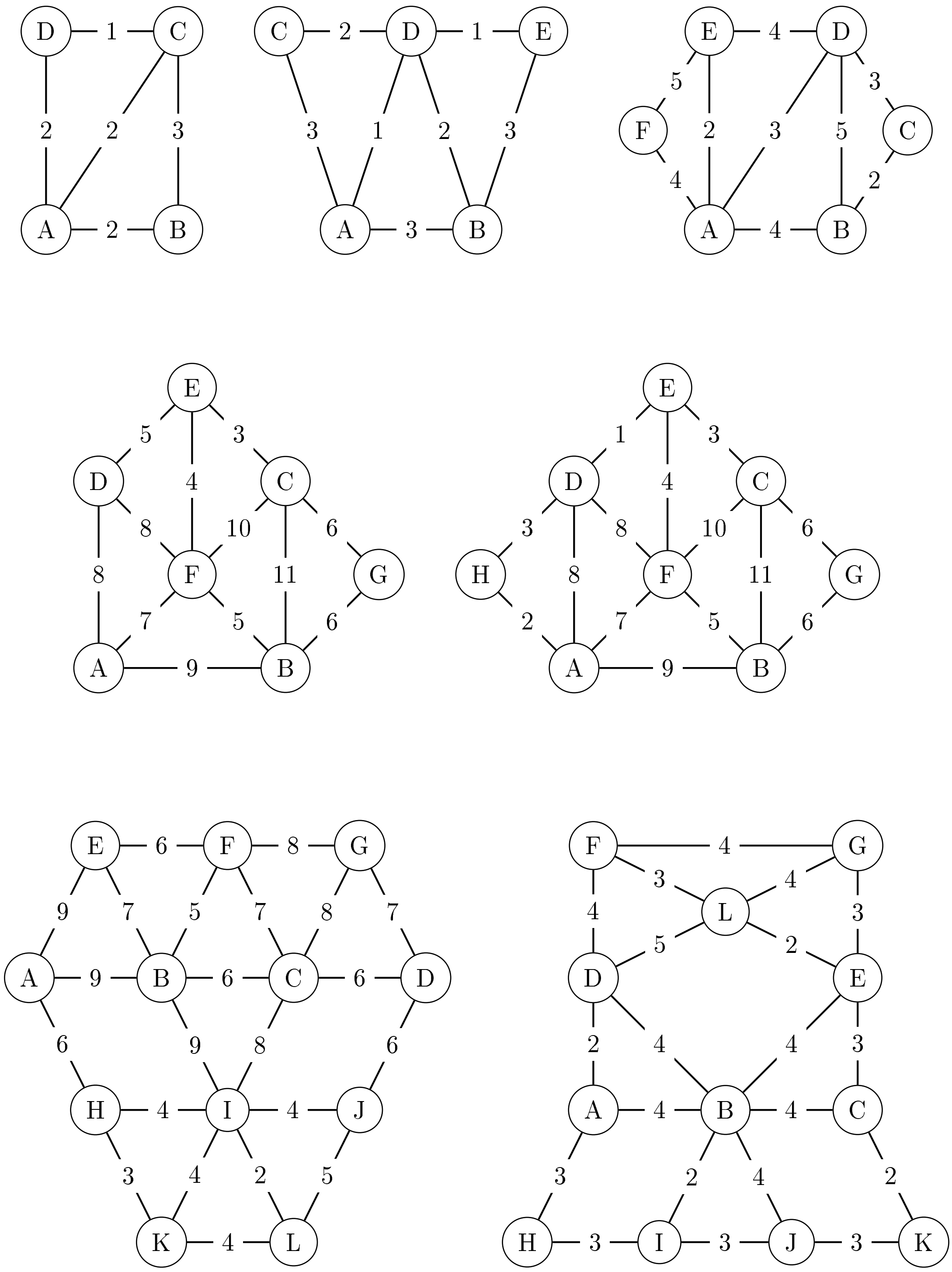
Halla su polinomio cromático, su número cromático y calcula de cuántas formas se puede colorear con 5 colores.

Ejercicio 3.35. Demuestra que en cualquier árbol con dos o más vértices existe, al menos, un vértice de grado uno.

Ejercicio 3.36. Un árbol tiene 33 vértices de grado uno, 25 vértices de grado 2, 15 vértices de grado 3, y el resto de grado 4. ¿Cuántos vértices tiene en total?

Ejercicio 3.37. Calcula un árbol generador para los grafos del ejercicio 3.25.

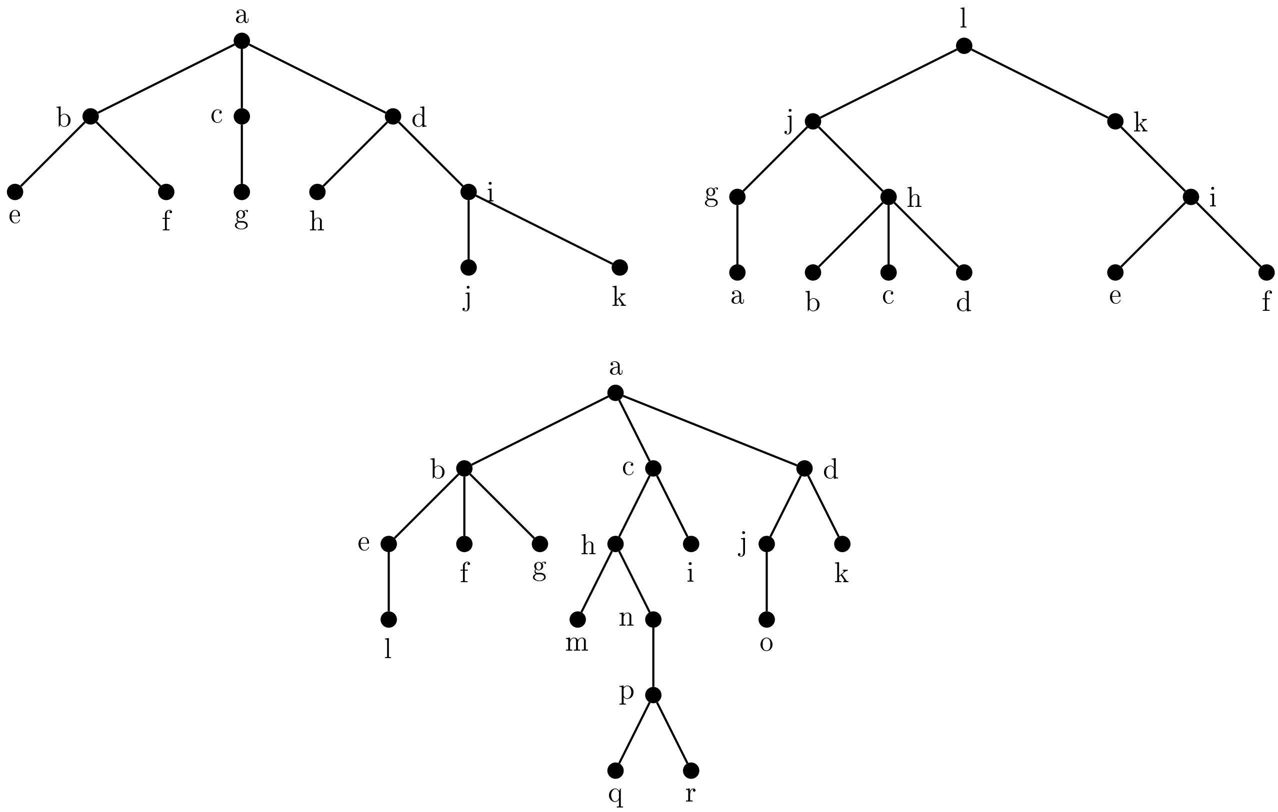
Ejercicio 3.38. Dados los grafos ponderados:



Halla, para cada uno de ellos, utilizando los algoritmos de Kruskal y el de Prim un árbol generador (abarcador) de peso mínimo. Detalla el orden de las elecciones o eliminaciones y describe la aplicación de cada algoritmo paso a paso.

Ejercicio 3.39. Un árbol con raíz es si cada nodo tiene a lo sumo dos hijos. Un árbol binario es completo si cada nodo tiene 0 o dos hijos. Construye todos los árboles binarios completos con siete vértices.

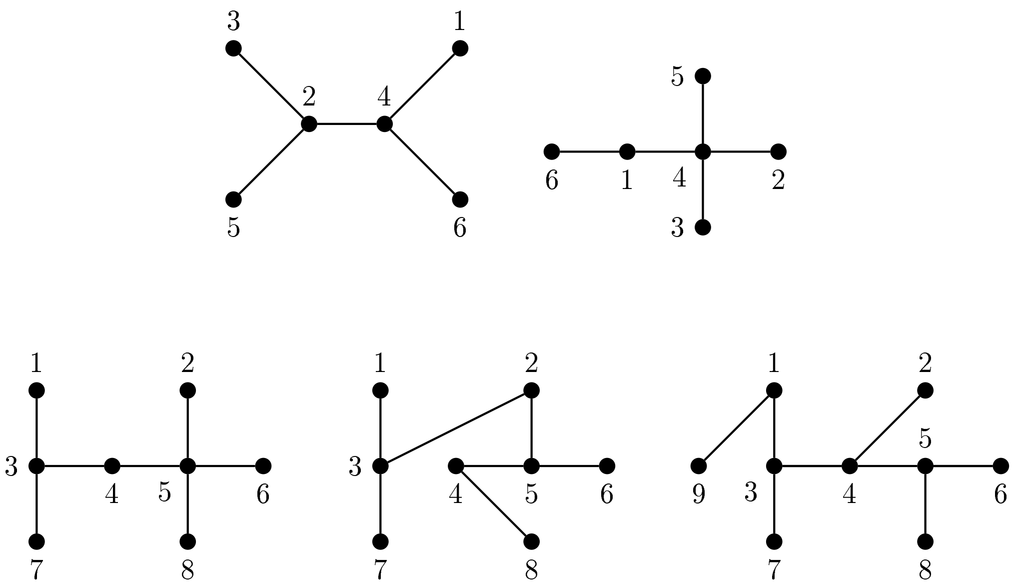
Ejercicio 3.40. Dados los árboles:



Escribe la sucesión de sus nodos al recorrerlos de todas las formas posibles (pre-orden, post-orden, in-orden, top-down y bottom-up).

Ejercicio 3.41. Prueba directamente que hay 125 árboles etiquetados con 5 vértices.

Ejercicio 3.42. Determina los códigos de Prüfer de los árboles:



Ejercicio 3.43. Representa los árboles etiquetados con códigos de Prüfer (2,1,5,7,4), (1,2,1,2,1,2), (1,3,3,5,5,7), (2,1,5,7,4,8) y (1,2,1,5,7,4).