TEMA 5

Lenguajes de primer orden. Formas normales.

Ejercicio 5.1. Para las siguientes fórmulas escríbelas en forma de árbol. Calculas sus subfórmulas. Determina el carácter de las ocurencias de sus variables, halla sus variables libres y sus variables ligadas y dí si las fórmulas son sentencias.

1. $\forall x(R(x,y) \wedge \neg\forall y R(x,y))$
2. $x \not\approx y \to y \approx z$
3. $\forall x(R(x,y) \to \forall y S(x)) \to (\exists y S(y) \to \forall z R(y,z))$
4. $\exists x(R(x,y) \vee \neg\forall y S(x)) \to (\neg\exists y S(y) \wedge \forall y S(y))$
5. $\exists x R(x,y) \vee [S(x) \wedge \neg\exists z R(a,z)]$
6. $\exists x\exists y\exists z(x \not\approx y \wedge x \not\approx z \wedge y \not\approx z)$
7. $\exists x(S(x) \to R(x,y)) \to (\exists y A(y) \to \forall z B(y,z))$
8. $\forall x R(x,y) \wedge (\neg S(z) \vee \neg\forall z R(x,z))$
9. $\forall x\forall y\forall(x \approx y \vee x \approx z \vee y \approx z)$
10. $\forall x P(x) \to Q(x,b) \vee \exists y Q(y,y)$.
11. $P(x) \leftrightarrow \exists x Q(x, g(a,x))$.
12. $\exists x\exists y(P(g(x,a)) \to \forall y Q(y,x)) \wedge Q(y,x)$.

Ejercicio 5.2. Sea el lenguaje de primer orden con:

- Símbolos de constante: a, b, c.
- Símbolos de variable: x, y, z, $\ldots$
- Símbolos de relación monaria: H, M.
- Símbolos de relación binaria: P, A, Hr.

Consideramos la estructura cuyo universo es el conjunto formado por todos los seres humanos, e interpretamos cada uno de los símbolos como sigue:

- $a =$Antonio, $b =$Begoña, $c =$Carmen.
- $H(x):$ x es hombre.
- $M(x):$ x es mujer.
- $P(x,y):$ x es progenitor de y.
- $A(x,y):$ x es antepasado de y.

- $Hr(x, y)$: x es hermano de y.

Expresa con este lenguaje los siguiente enunciados:

1. Begoña es la madre de Carmen
2. Begoña es tia de Antonio
3. Antonio es abuelo de Begoña
4. Begoña es nieta de Antonio
5. Todo el mundo tiene padre.
6. Todo el mundo tiene dos progenitores.
7. Nadie es progenitor de sí mismo.
8. Hay gente que no tiene hermanos.
9. Los antepasados de Begoña son antepasados de Carmen
10. Hay quien tiene hijos y quien no
11. Dos personas son hermanas si, y sólo si, tienen los mismos progenitores
12. Begoña es hermana de un hijo de Antonio
13. Un progenitor de un antepasado es un antepasado
14. Los padres son antepasados
15. Nadie es progenitor de sus hermanos
16. Toda persona tiene una única madre
17. Begoña es abuela materna de Carmen
18. Carmen es bisabuela de Antonio
19. Todos tenemos abuelos
20. Todos tenemos bisabuelos
21. Algunos antepasados de Begoña no son antepasados de Carmen
22. Begoña tiene al menos dos hermanos
23. Begoña tiene exactamente dos hermanos

Añadimos al lenguaje los siguientes elementos:

- Símbolos de función monaria: p, m

que interpretamos como sigue:

- $p(x)$: El padre de x.
- $m(x)$: La madre de x.

Expresa ahora, los enunciados anteriores en este lenguaje, utilizando alguno de los nuevos símbolos (siempre que puedas).

Ejercicio 5.3. Consideramos el lenguaje de primer orden con:

- Símbolos de constante: c y d.
- Símbolos de variable: x, y, z, $\ldots$
- Símbolos de predicado monádico: P, Q.
- Símbolos de predicado diádico: R, S.

Sea la estructura dada por:

- El universo es $\mathbb{Z}_4$.
- $c = 0$ y $d = 1$.
- $P(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x^2 = 0 \\ 0 & \text{si } x^2 \neq 0 \end{cases}$
- $Q(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x^2 = 2 \\ 0 & \text{si } x^2 \neq 2 \end{cases}$
- $R = \{(0,1), (0,2), (2,3), (2,2), (1,2), (3,0)\}$
- $S = \{(0,1), (0,2), (0,3), (2,3), (0,0)\}$

Estudia cuáles de las siguientes sentencias son verdaderas para esta estructura:

1. $P(c)$
2. $\neg P(d)$
3. $P(c) \wedge P(d)$.
4. $P(c) \rightarrow \neg Q(d)$
5. $\exists x Q(x)$
6. $\neg(\exists x Q(x))$
7. $\exists x \neg Q(x)$
8. $\exists x(P(x) \wedge Q(x))$
9. $\forall x Q(x)$
10. $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$
11. $\forall x(Q(x) \rightarrow \neg P(x))$
12. $\forall x(Q(x) \rightarrow \exists y(P(x) \vee Q(y)))$
13. $\forall x R(c, x)$
14. $\forall x S(c, x)$
15. $\forall x(R(c, x) \rightarrow S(c, x))$
16. $\exists y \forall x(R(c, x) \rightarrow S(c, x))$
17. $\forall x \forall y(R(x, y) \rightarrow S(x, y))$
18. $\forall x \forall y(R(x, y) \rightarrow \exists z(S(x, z)))$
19. $\forall x(P(x) \rightarrow \exists y(R(x, y)))$
20. $\forall x(P(x) \rightarrow \exists y(S(x, y) \wedge R(y, x)))$
21. $\forall x \exists y R(x, y)$
22. $\forall x \exists y S(x, y)$
23. $\exists y \forall x R(x, y)$
24. $\exists y \forall x S(x, y)$
25. $\exists y \forall x R(y, x)$
26. $\forall x \forall y \forall z((S(x, y) \wedge S(y, z)) \rightarrow R(x, z))$
27. $\forall x \forall y(R(x, y) \rightarrow \neg R(y, x))$
28. $\forall x \forall y(\neg S(x, y) \rightarrow \neg S(x, y))$
29. $\forall x \forall y(\exists z(R(x, z) \wedge R(z, y)) \rightarrow R(x, y))$
30. $\forall x \forall y(\exists z(R(x, z) \wedge S(z, y)) \rightarrow R(x, y))$

31. $\forall x \forall y(\exists z(S(x,z) \land R(z,y)) \to R(x,y))$
32. $\forall x \forall y(\exists z(R(x,z) \land R(z,y)) \to S(x,y))$
33. $\forall x(P(x) \to \exists y R(y,x))$
34. $\forall x((x \approx c) \to \exists y R(y,x))$
35. $\forall x(\exists y R(y,x) \to P(x))$
36. $\forall x((x \approx d) \leftrightarrow R(c,x))$

Ejercicio 5.4. Para las siguientes fórmulas calcula una forma normal prenexa y una forma normal de Skolem. La forma prenexa, debe ser calculada con el menor número posible de cuantificadores.

1. $\forall x(R(x,y) \land \neg \forall y R(x,y))$
2. $\forall x(R(x,y) \to \forall y S(x)) \to (\exists y S(y) \to \forall z R(y,z))$
3. $\exists x(R(x,y) \lor \neg \forall y S(x)) \to (\neg \exists y S(y) \land \forall y S(y))$
4. $\exists x R(x,y) \lor [S(x) \land \neg \exists z R(a,z)]$
5. $\exists x(S(x) \to R(x,y)) \to (\exists y A(y) \to \forall z B(y,z))$
6. $\forall x R(x,y) \land (\neg S(z) \lor \neg \forall z R(x,z))$
7. $\forall x P(x) \to Q(x,b) \lor \exists y Q(y,y)$.
8. $P(x) \leftrightarrow \exists x Q(x, g(a,x))$.
9. $\exists x \exists y(P(g(x,a)) \to \forall y Q(y,x)) \land Q(y,x)$.

Ejercicio 5.5. Para las siguientes sentencias calcula una forma normal prenexa, una forma normal de Skolem y una forma normal clausular. La forma prenexa, debe ser calculada con el menor número posible de cuantificadores.

1. $\forall x S(x) \to \exists z \forall y R(z,y)$
2. $\exists x[R(x) \to \neg \exists y T(x,y)] \land \neg \exists z[\forall u P(u,z) \to \forall v Q(v,z)]$
3. $\forall x[P(x) \to (Q(x) \lor \neg R(x))] \land \exists y Q(y)$
4. $\forall x(P(x) \to Q(x)) \to (\forall y P(y) \to \forall z Q(z))$
5. $\forall x P(x) \to \exists x Q(x)$
6. $\forall x \forall y[\exists z(P(x,z) \land P(y,z)) \to \exists u Q(x,y,u)]$
7. $\forall x[P(x) \land \forall y(\neg Q(x,y) \to \forall z R(a,x,y))]$
8. $\forall x \forall y[\exists z P(z) \land \exists u(Q(x,u) \to \exists v Q(y,v))]$
9. $\exists x \forall y(\forall x \forall y R(a,x) \to \neg \forall z((\neg R(z,y)) \to \forall x S(g(x),z)))$
10. $\exists x R(x, f(x)) \to \exists y \forall x R(y,x)$
11. $\neg \exists x(P(x) \land C(x))$
12. $\forall x(P(x) \to \neg V(x))$
13. $\exists x[P(x) \land E(x) \land \forall y(S(x,y) \land P(y))]$
14. $\forall x[(E(x) \land \neg V(x)) \to \exists y(S(x,y) \land C(y))]$
15. $\forall x(\exists x(R(x) \lor \forall y S(y,x)) \to \forall y(S(y,x) \lor \forall x R(y)))$

16. $\forall z\,(\exists y(\forall xR(a,x) \wedge \forall yR(y,a) \wedge Q(y)) \to (R(z,a) \vee \exists zQ(z)))$
17. $\forall x(R(x) \vee \neg\exists x(P(x) \to \forall yQ(f(y),x)) \to \exists z(Q(z,a) \vee \forall y(P(f(y)) \to Q(x,z))))$
18. $\forall x[Q(x) \to R(x,f(x))] \to \exists y[Q(y) \wedge R(y,f(y))]$
19. $\forall x(P(x) \to \exists yR(y))$
20. $\forall x\forall y(\exists zP(z) \wedge \exists u(Q(x,u) \to \exists vQ(y,v)))$
21. $\exists x(\neg\exists yP(y) \to \exists z(Q(z) \to R(x)))$
22. $\forall x\neg P(f(x)) \vee \exists xR(g(a,x))$.
23. $\neg\exists x\neg P(x) \wedge (\forall yQ(a,b) \vee \exists yP(y))$.