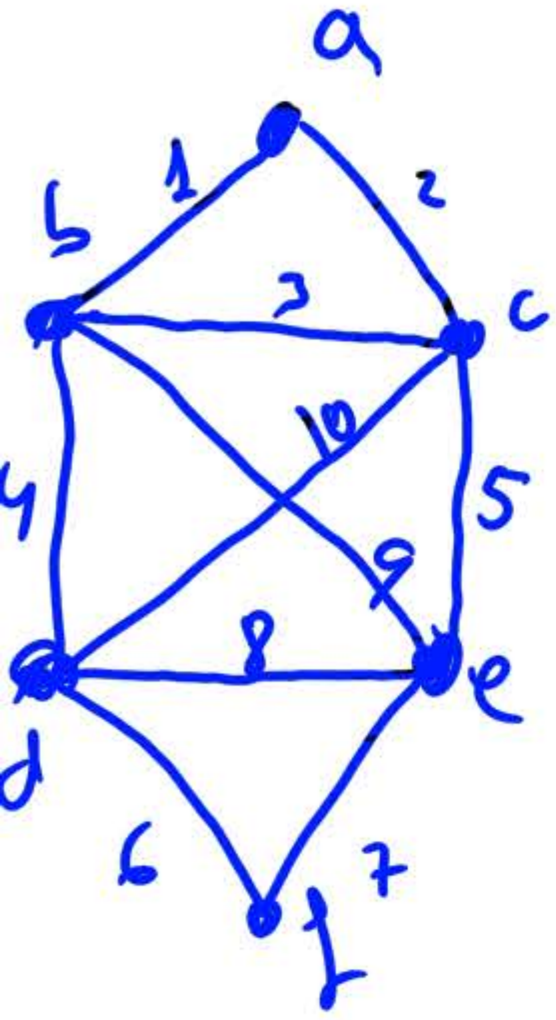
Salvador Romero Cortés Relación 3 GIM 16/4/20

3.16. Encontrar un camino de Euler

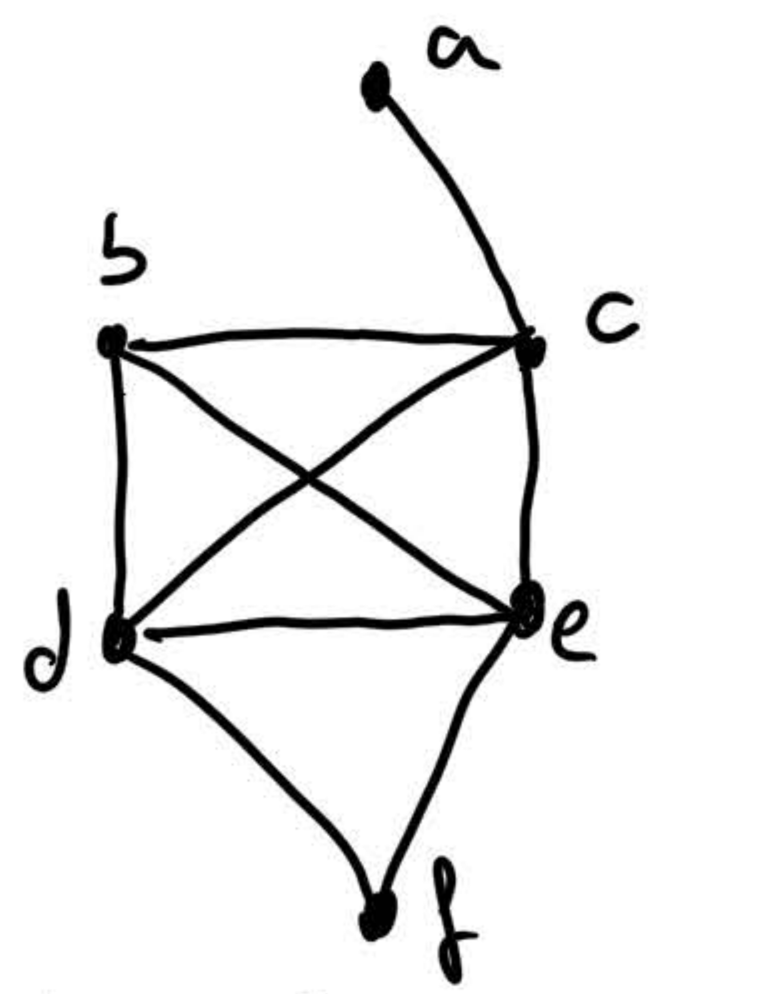
En los dos primeros apartados no se puede encontrar un camino de Euler ya que para ello necesitamos que el grafo tenga un par de vértices de grado impar. En su lugar calculo un circuito de Euler.

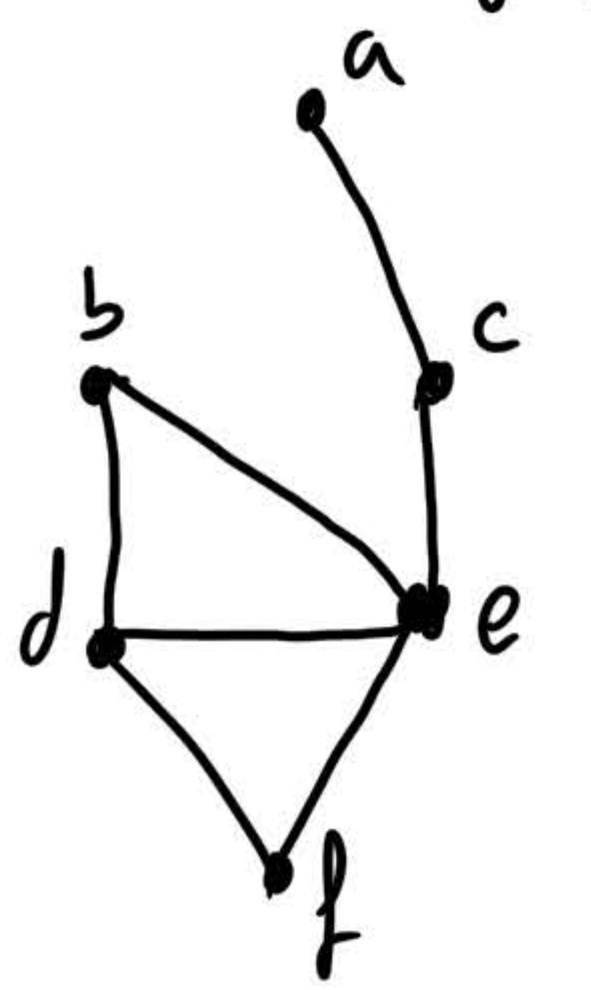


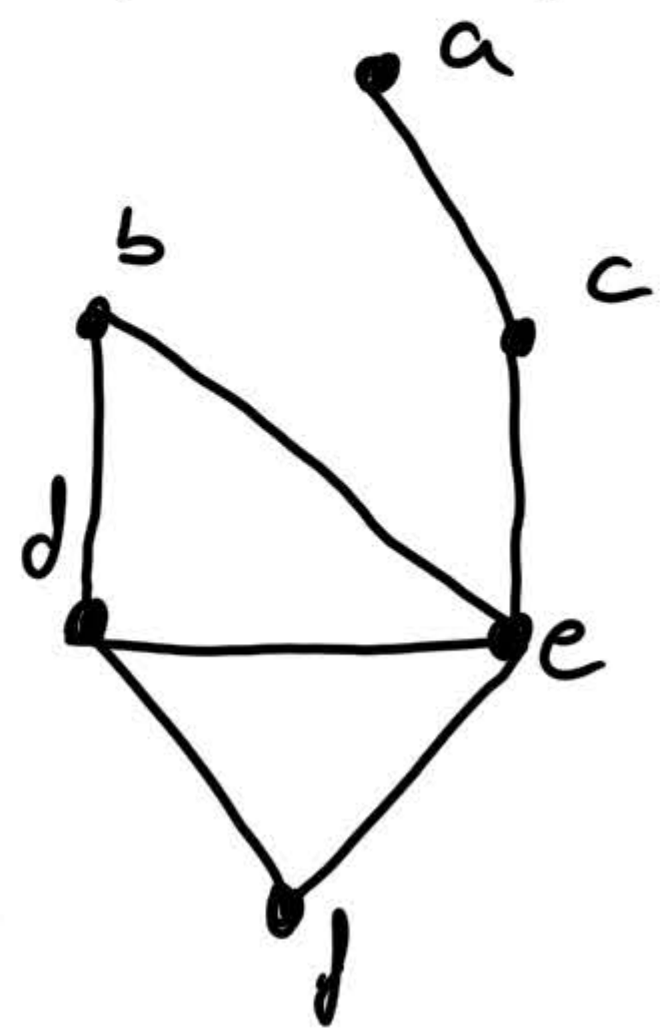
Utilizamos el algoritmo de Fleury

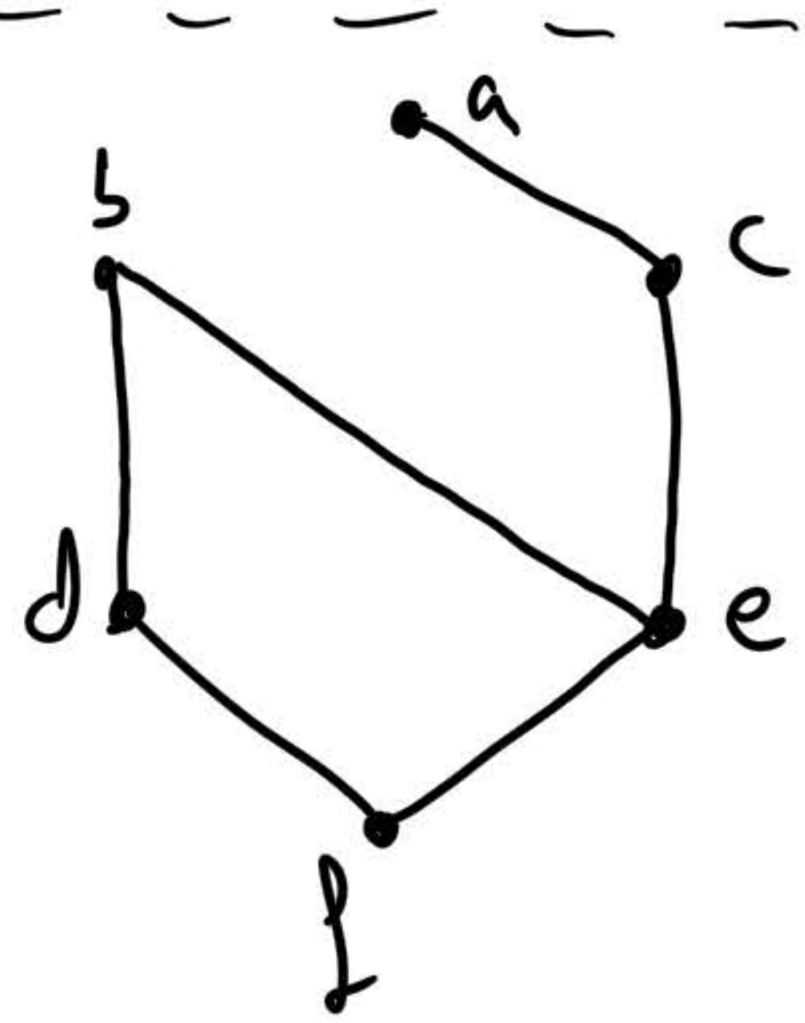
Como todos los vértices son de grado par, empezamos por uno cualquiera. En este caso el a.

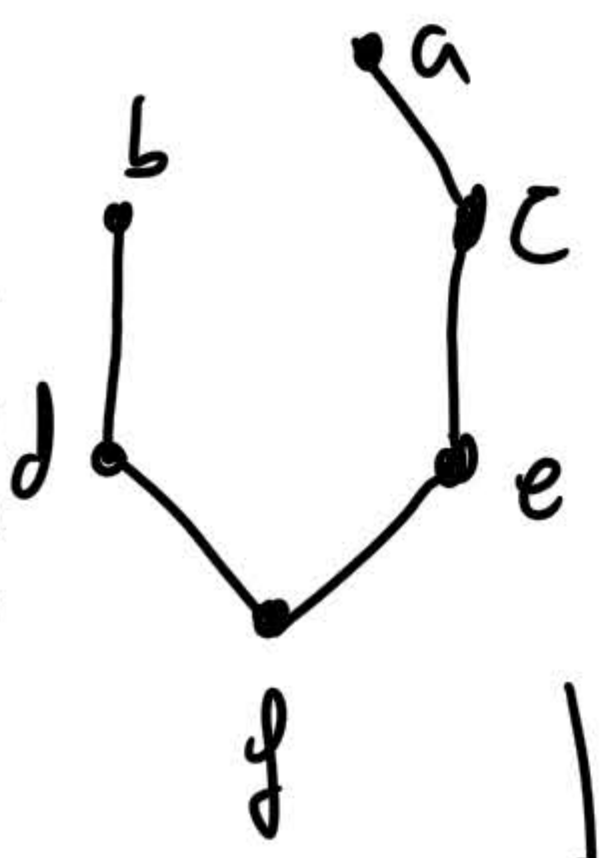
Ahora vamos recorriendo el grafo según el algoritmo:











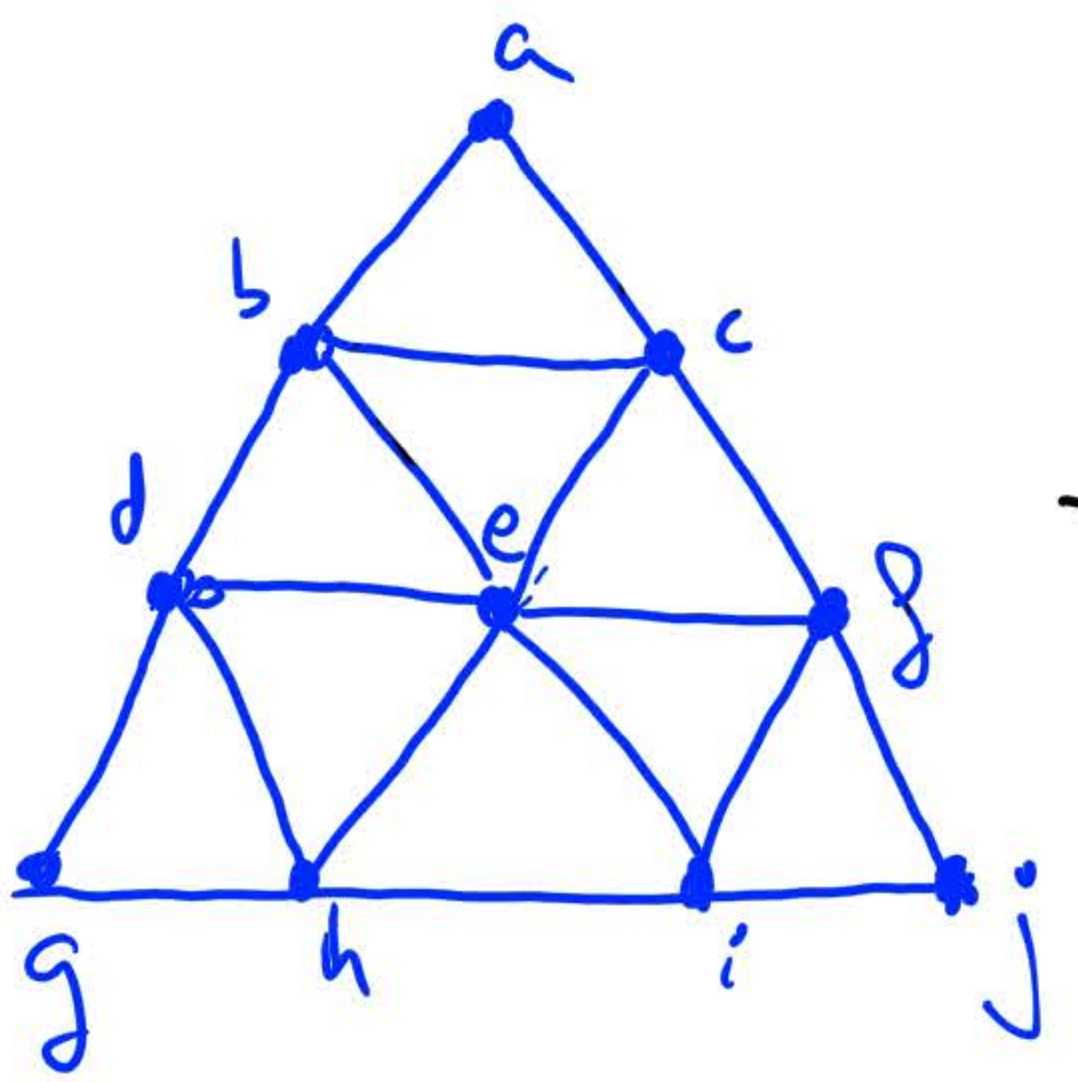
Aquí ya continuamos el camino bdfeca.

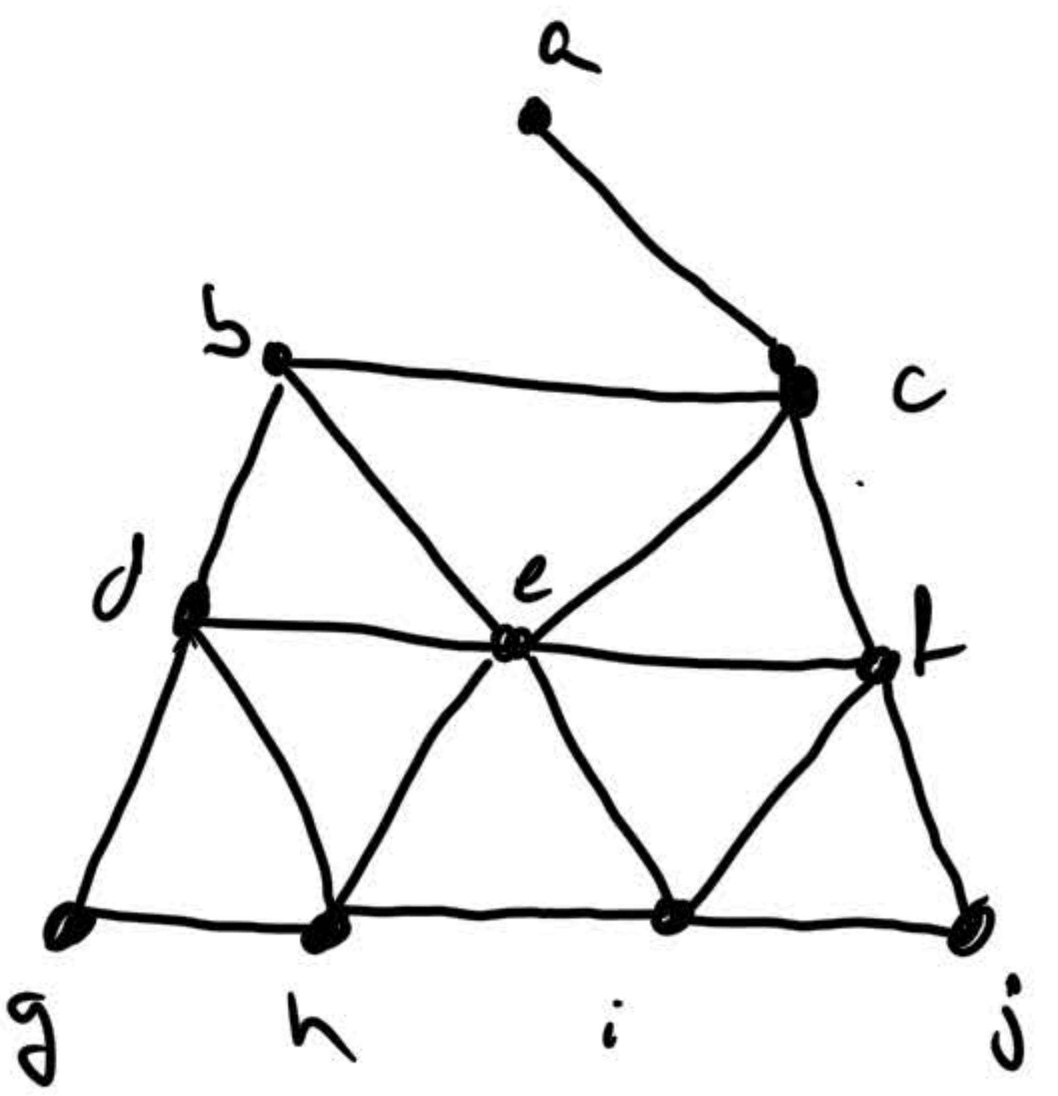
Por lo tanto el circuito de Euler queda como:

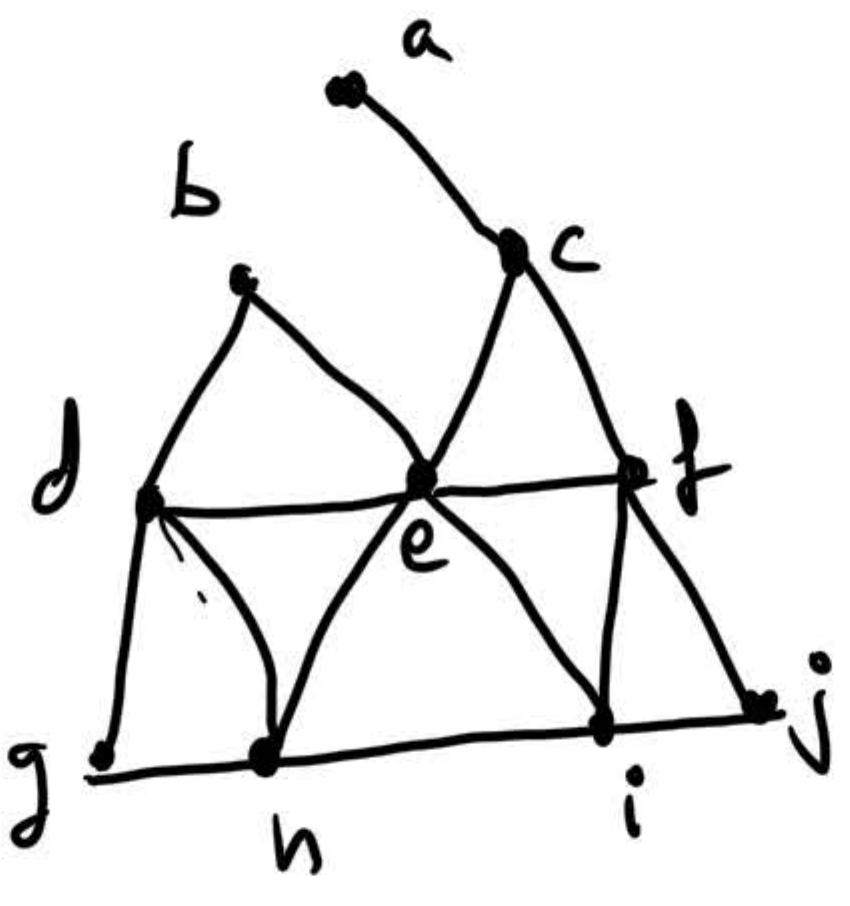
a, b, c, d, e, b, d, f, e, c, a

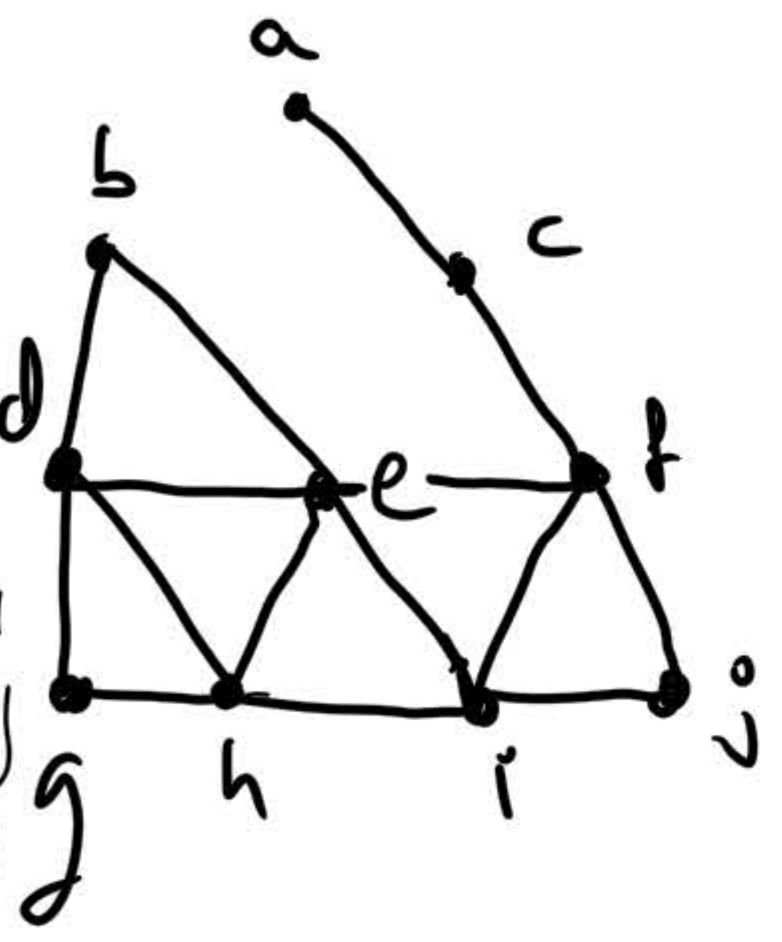
b)

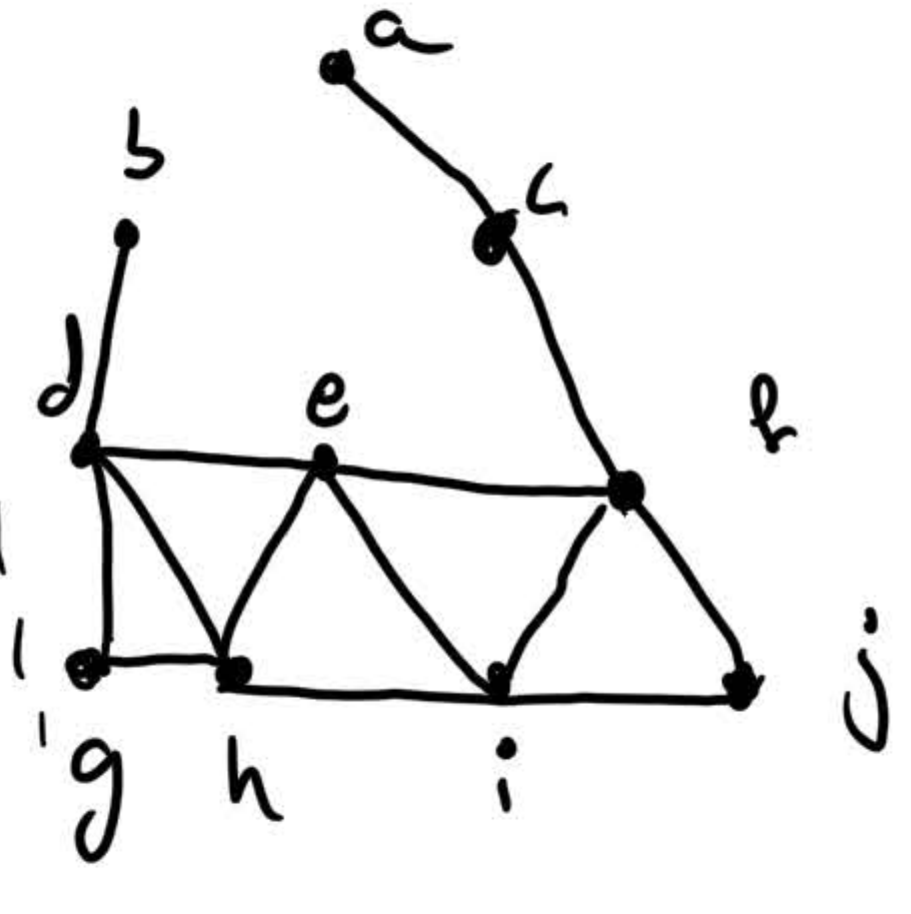
Volvemos a aplicar el algoritmo de Fleury.

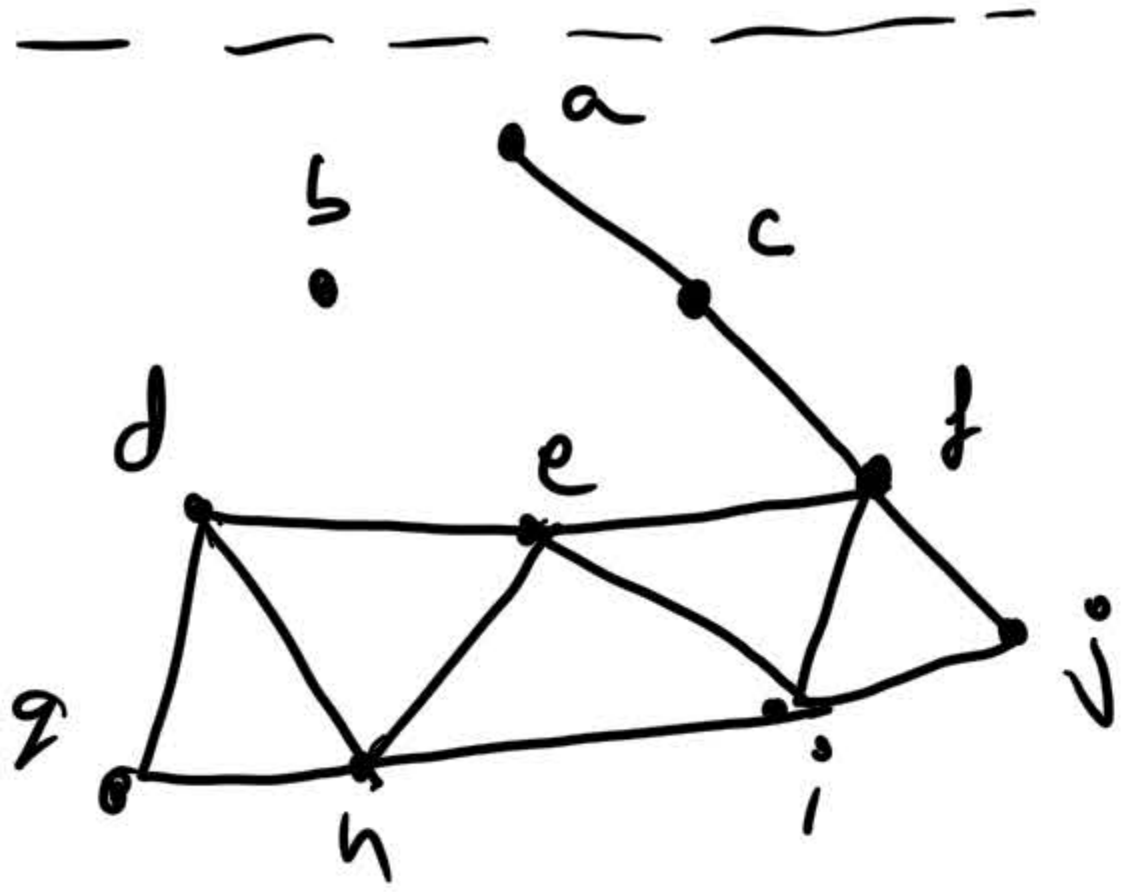












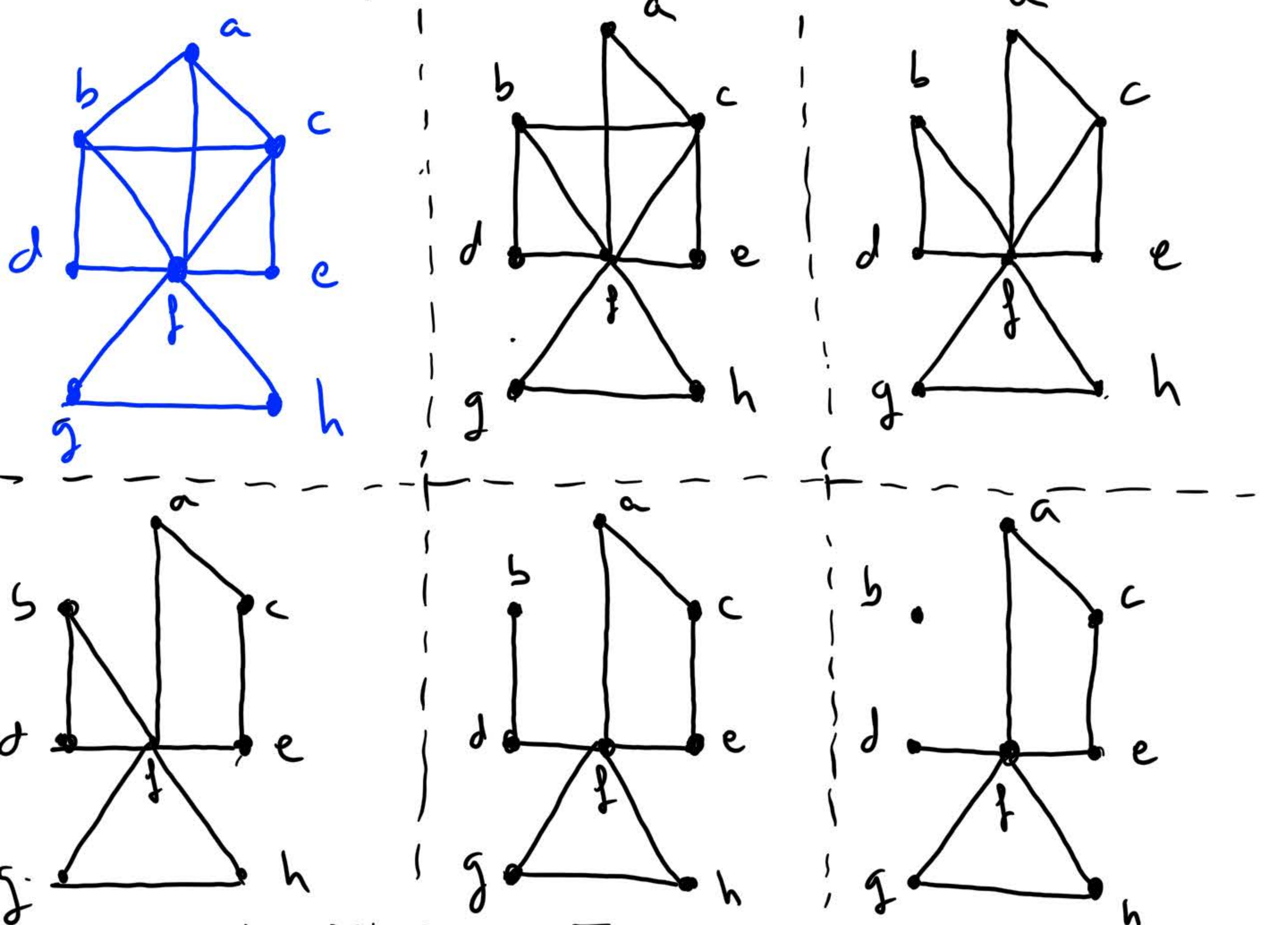
A partir de aquí podemos continuar sin dibujar. El resto del camino será dehdghijfiefca

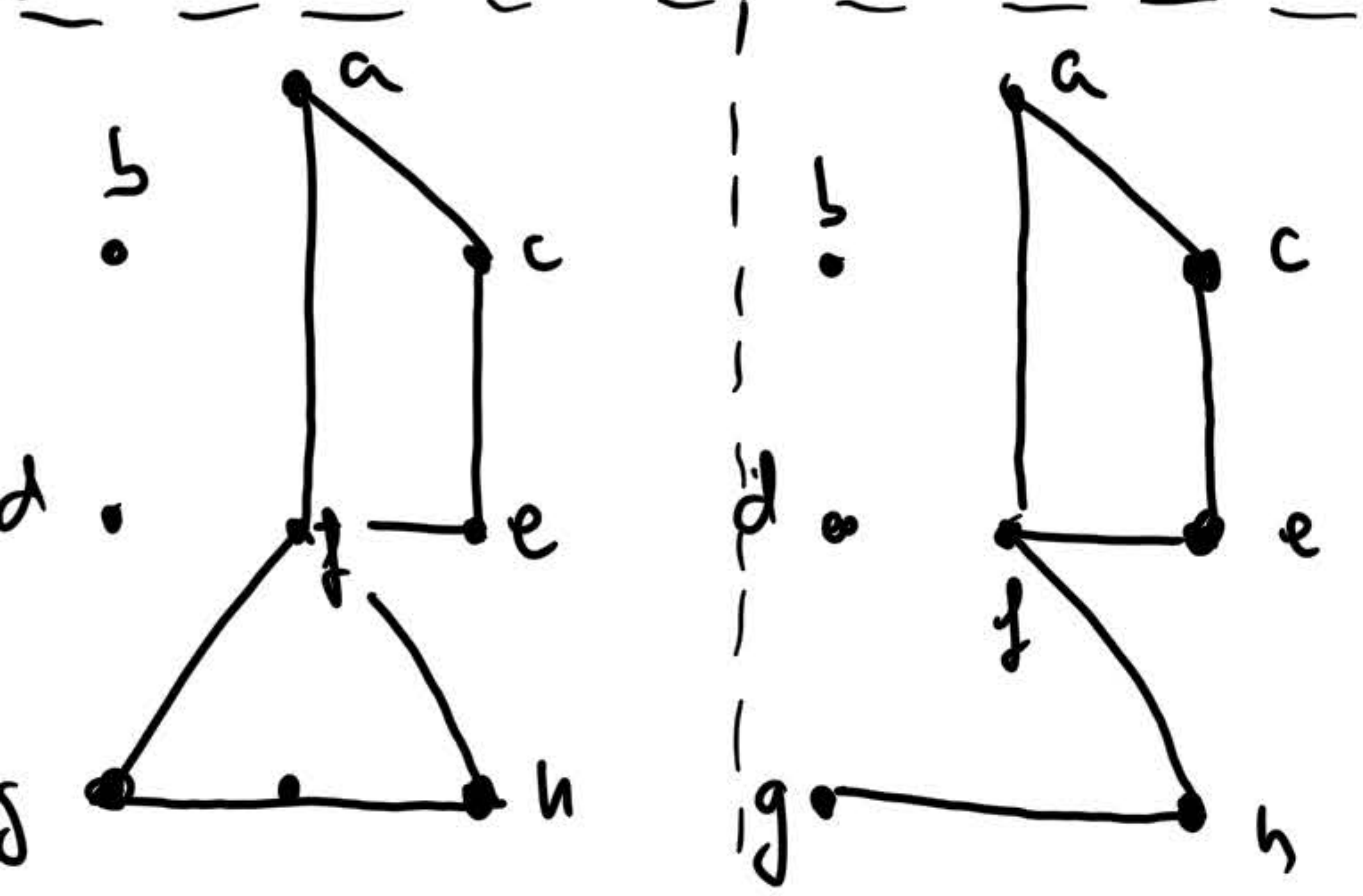
Por lo tanto el circuito de Euler es:

$\boxed{a, b, c, e, b, d, e, h, d, g, h, i, j, f, i, e, f, c, a}$

c)

Volvemos a aplicar el algoritmo de Fleury





Para el grafo que queda podemos ver que el camino será

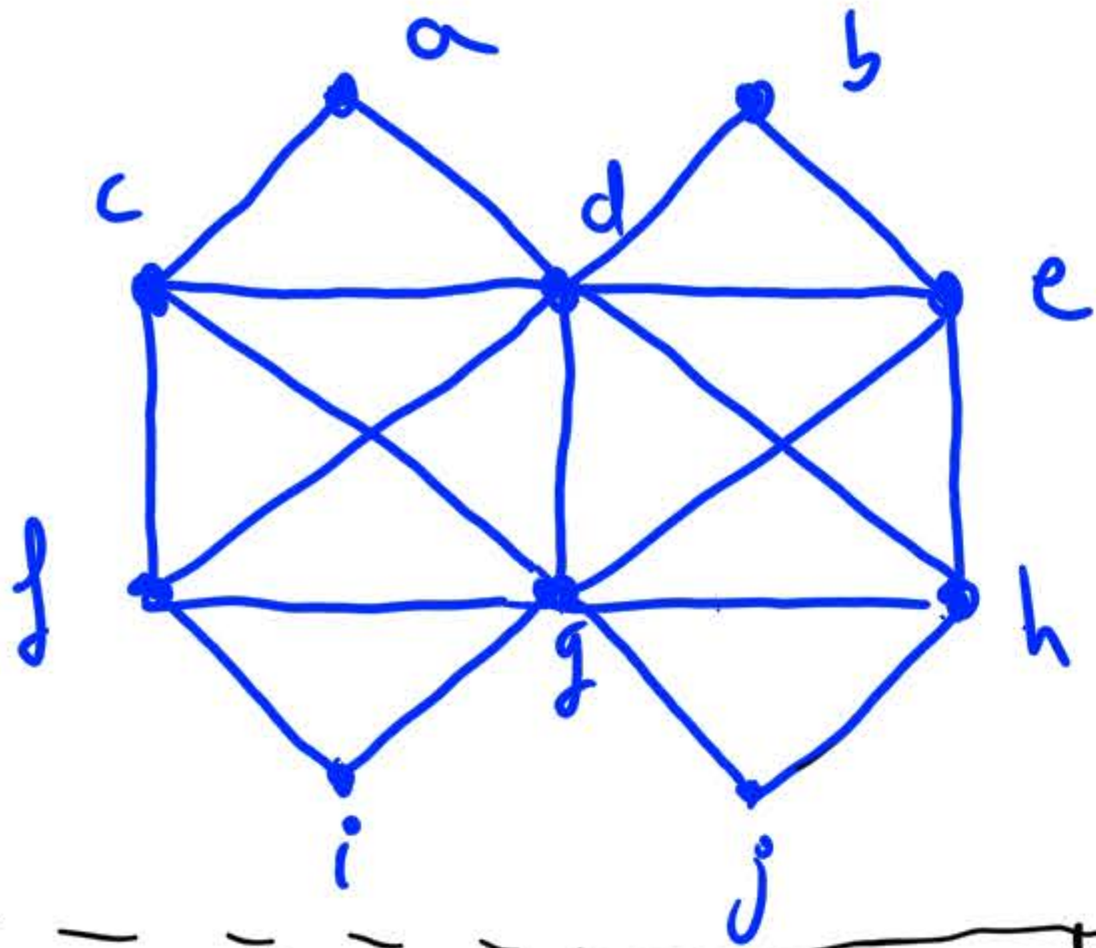
g, h, f, e, c, a, f

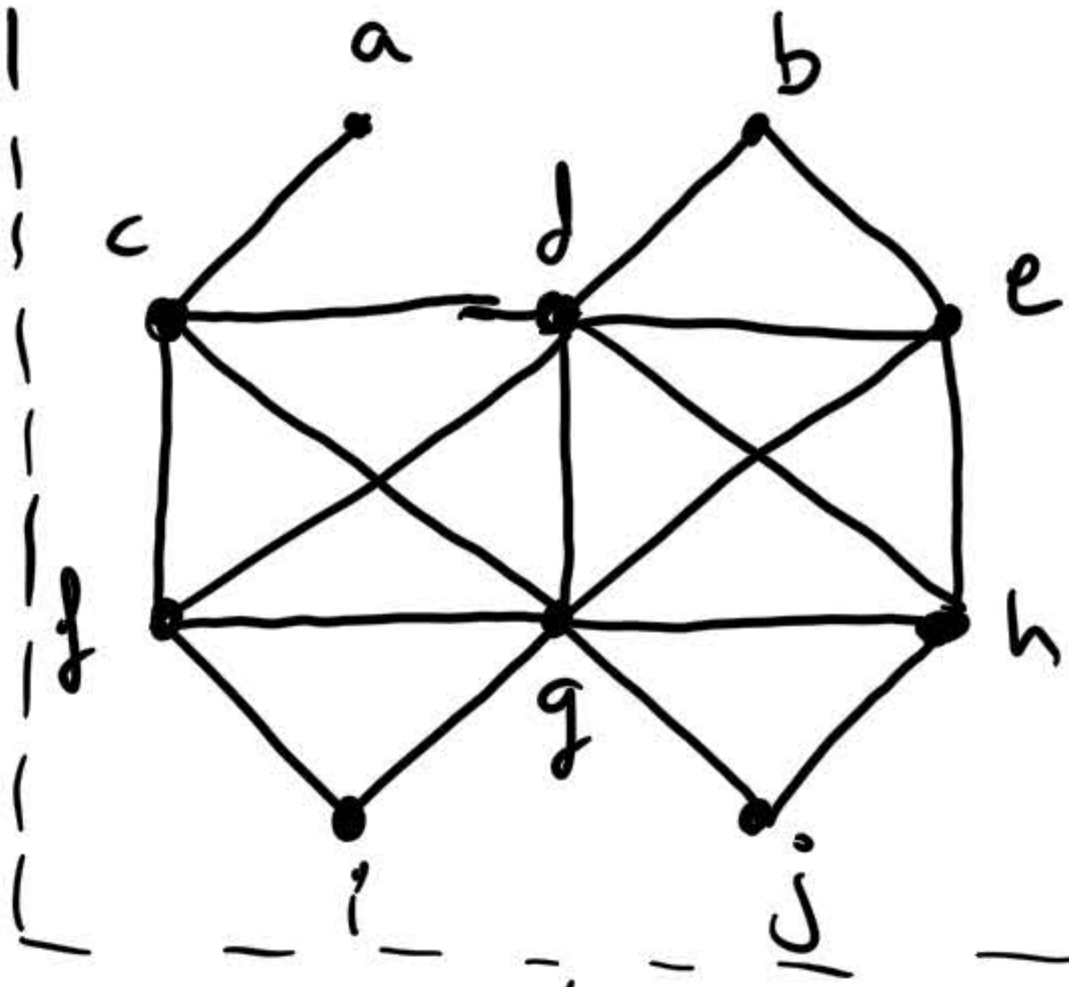
Por lo tanto un camino de Euler para este grafo es:

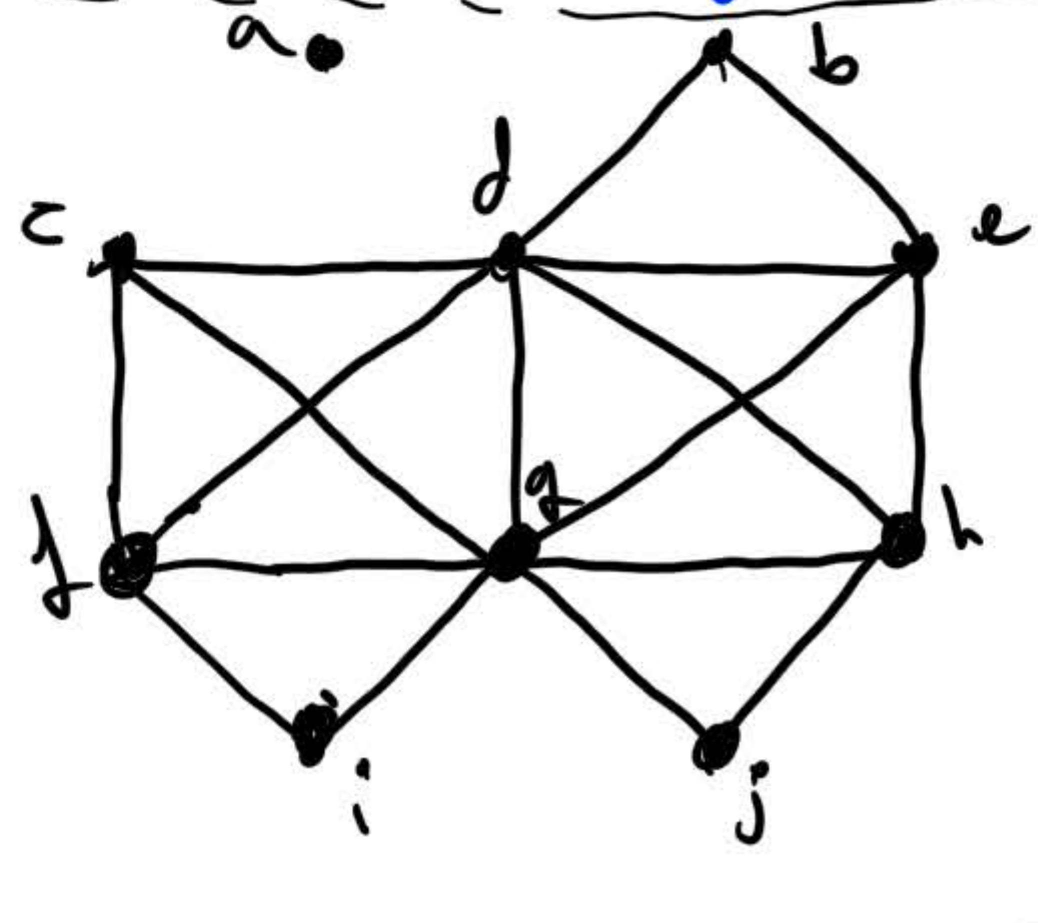
[a, b, c, f, b, d, f, g, h, f, e, c, a, f

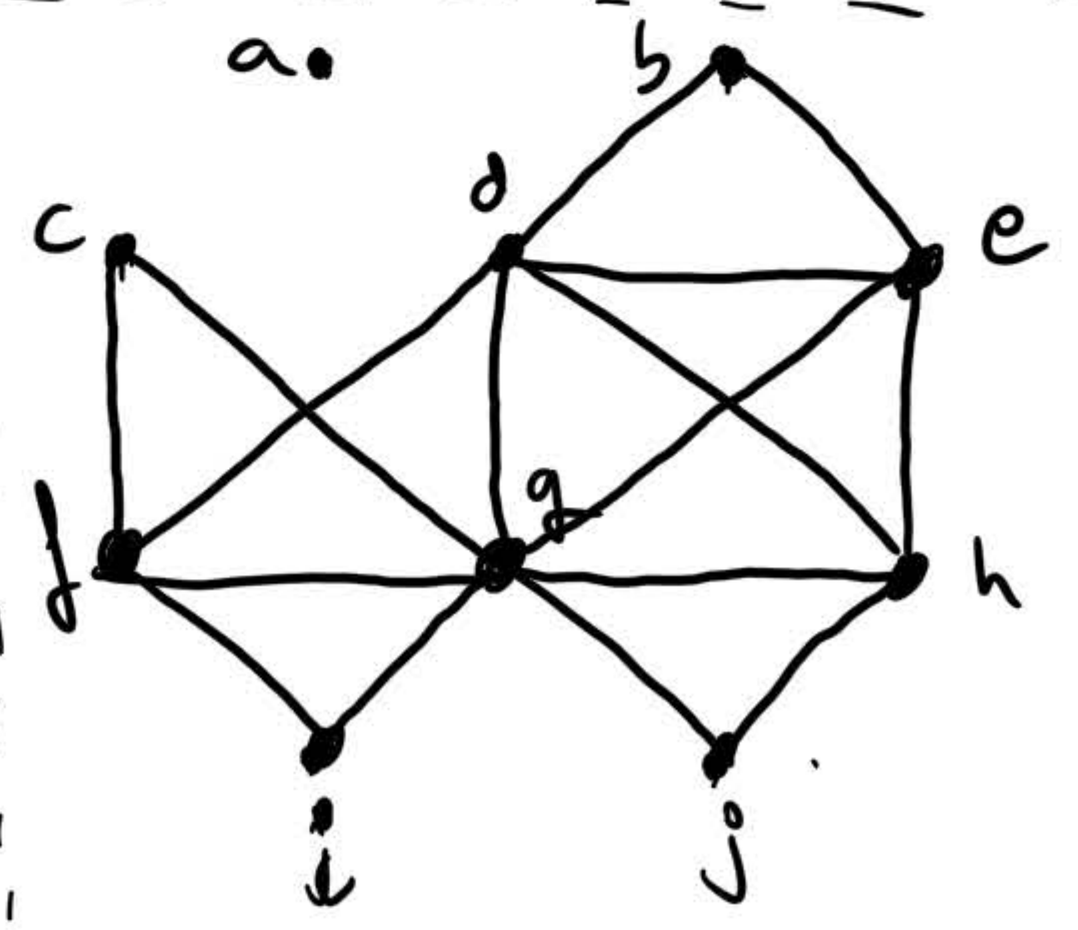
d)

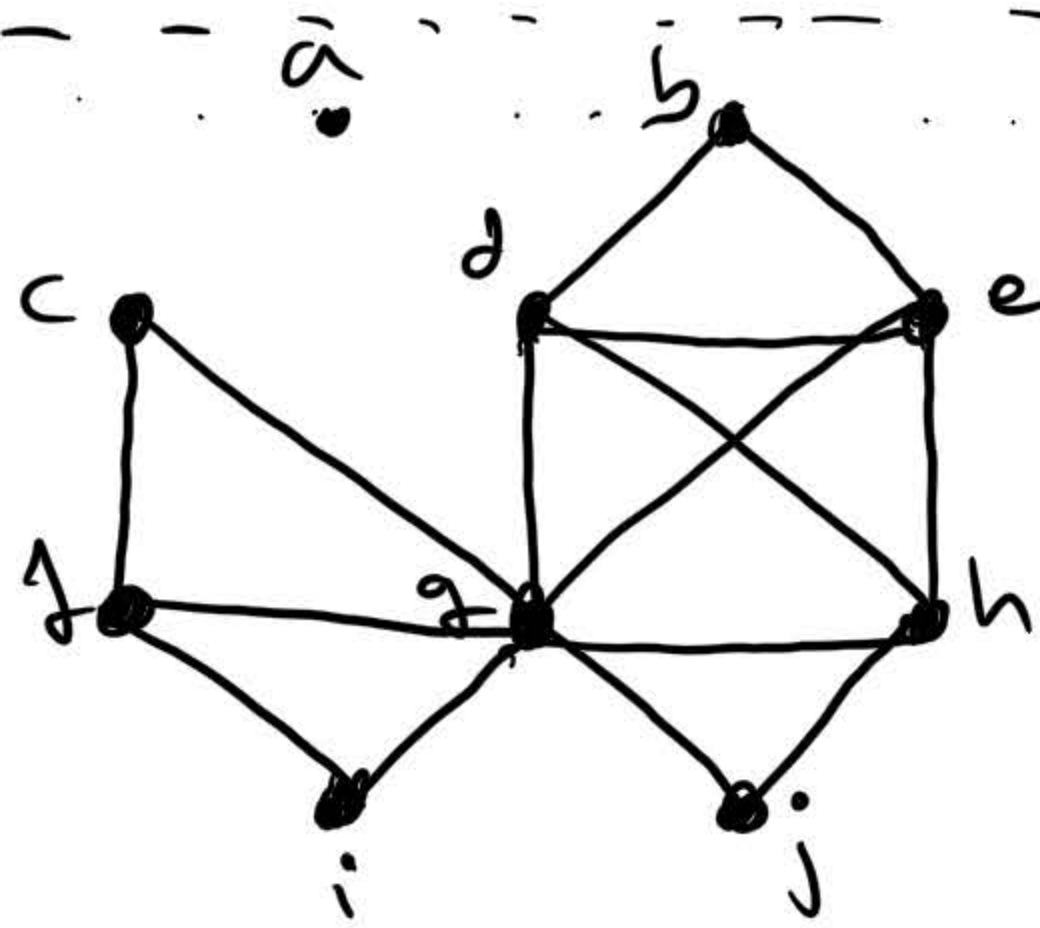
En este grafo, al igual que en el anterior, para el algoritmo de Fleury debemos empezar por uno de los dos vértices de grado impar.

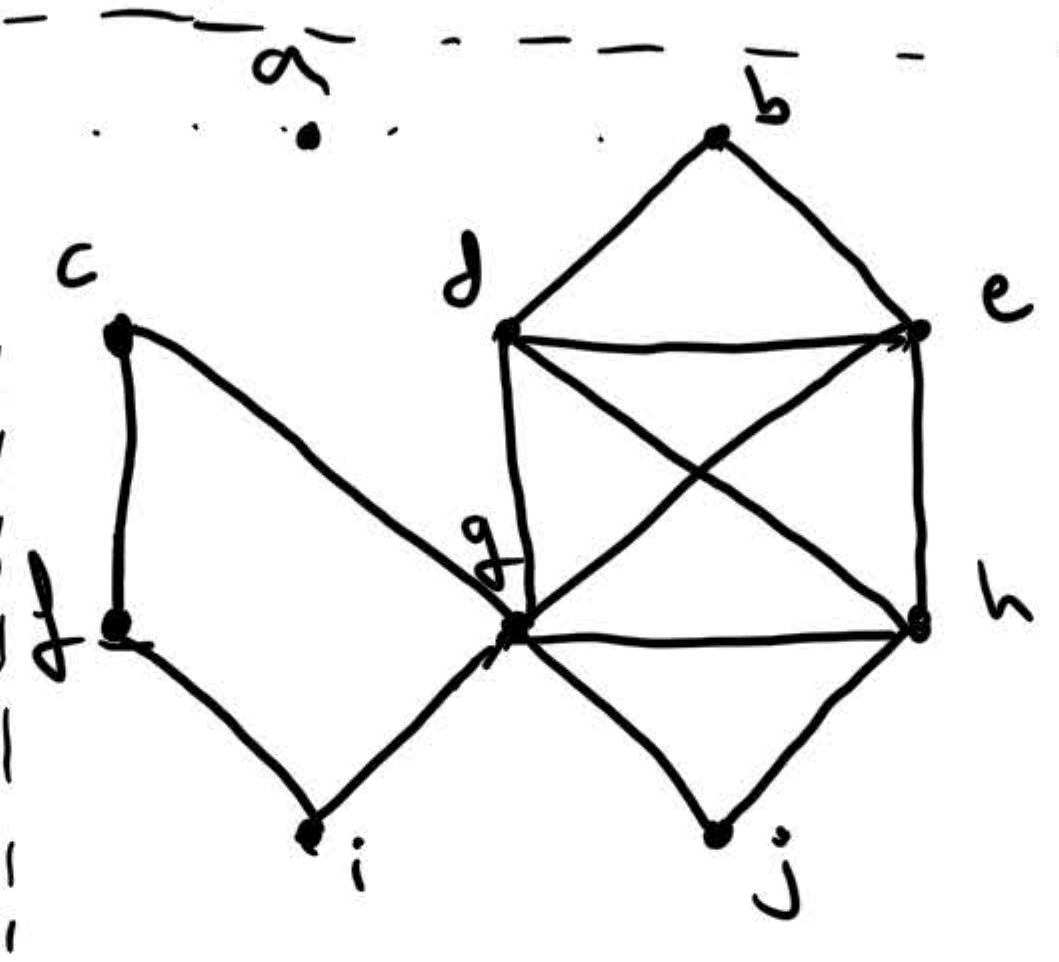


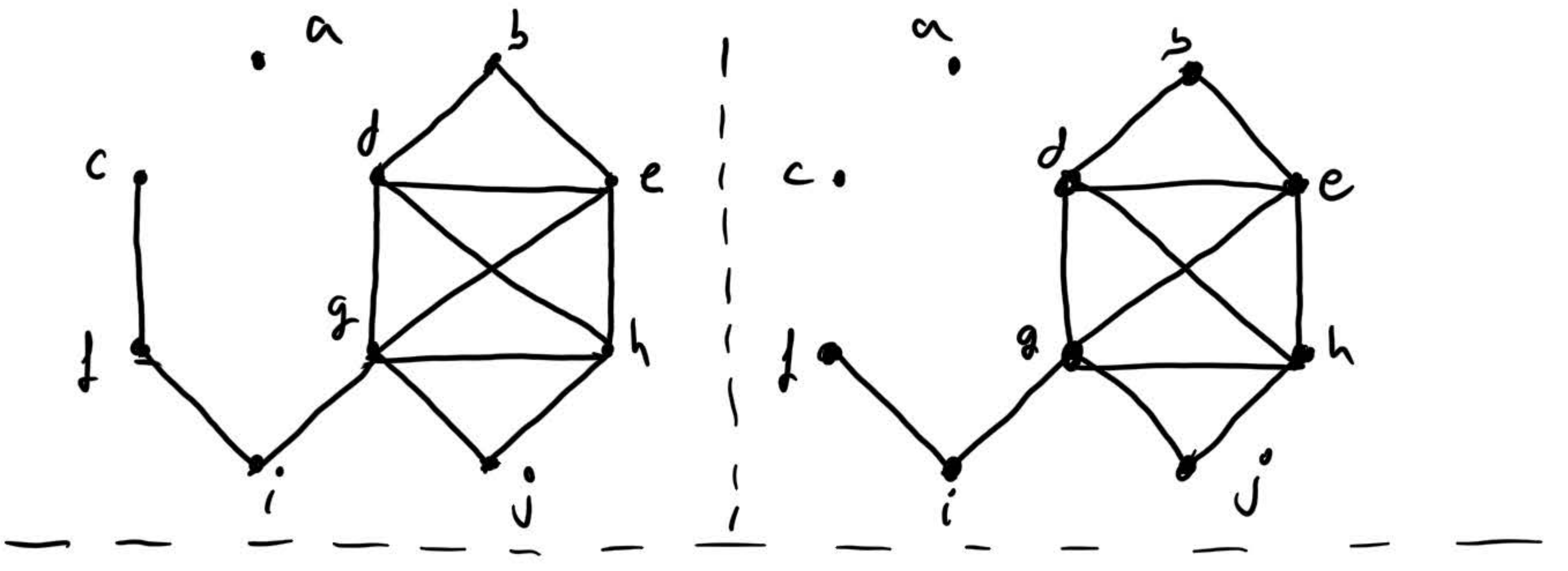












Podemos seguir aplicando el algoritmo para el grafo que queda y obtendremos:

f, i, g, j, h, e, g, h, d, b, e, d, g

Por lo tanto un camino de Euler es:

d, a, c, d, f, g, c, f, i, g, j, h, e, g, h, d, b, e, d, g

$\boxed{3.17}$ ¿Para qué valores de n, el grafo K_n es un circuito de Euler?

Para tener un circuito de Euler necesitamos que todos los vértices sean de grado par. Por otra parte tenemos que el grado de todos los vértices de un grafo completo es $n-1$ (ya que todos los vértices se conectan con todos menos consigo mismo).

Por lo tanto para que K_n sea un circuito de Euler debe tener un número de vértices (n) impar.

$\boxed{3.18}$ Obtén una fórmula para el número de lados de $K_{m,n}$

El número de vértices es $m+n$. Además tenemos que $gr(v_i) = n$ y $gr(w_j) = m$. Por tanto tenemos:

$$2l = gr(v_1) + \dots + gr(v_m) + gr(w_1) + \dots + gr(w_n) =$$

$$= n + \dots + n + m + \dots + m = 2nm$$. Por tanto, el número de lados es $\rightarrow$ $\boxed{l = n \cdot m}$

$\boxed{3.19}$ ¿Para qué valores de m y n el grafo $K_{m,n}$ es un circuito de Euler?

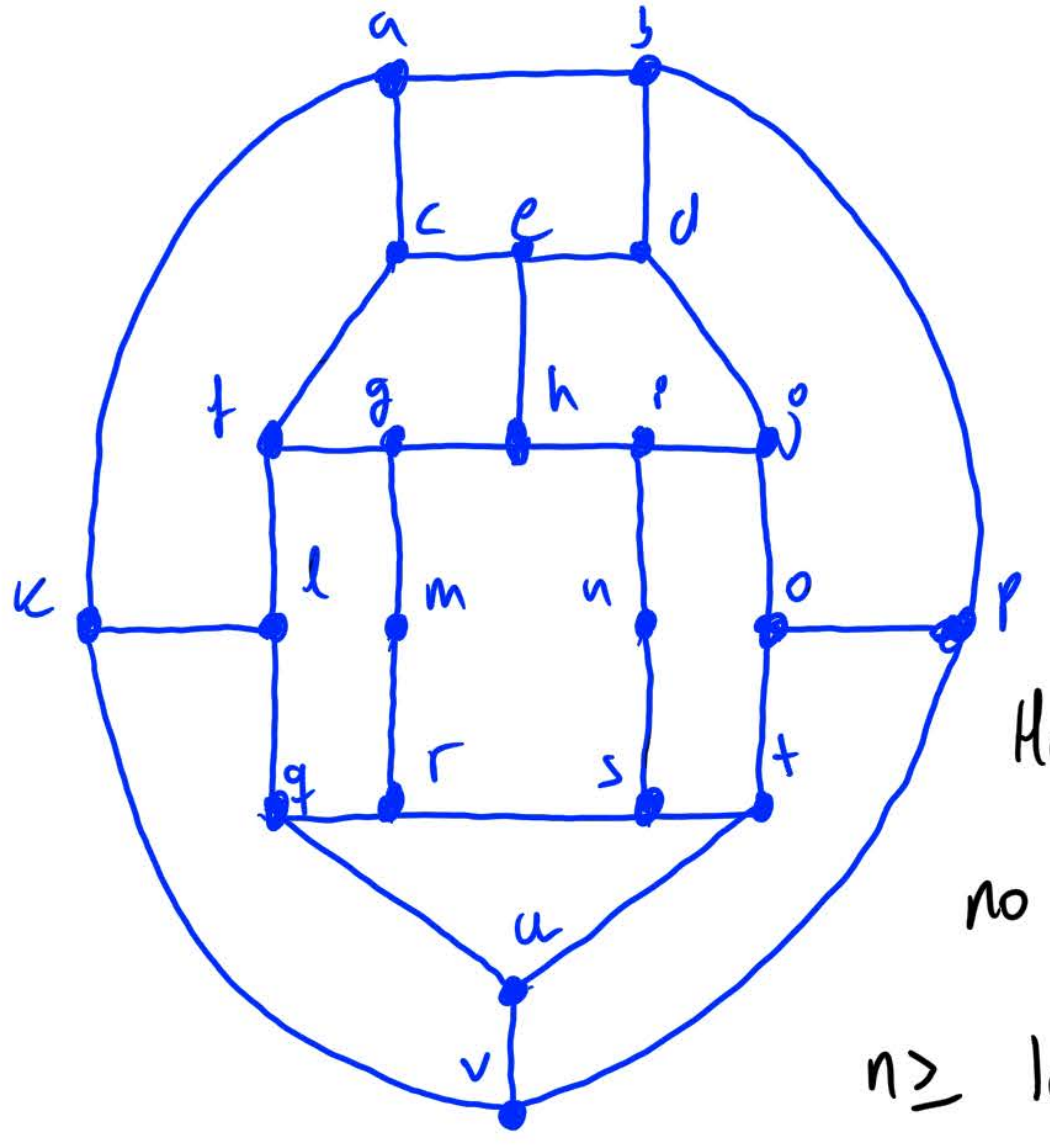
Para que sea un circuito de Euler todos sus vértices tienen que ser de grado par.

Tenemos que los grados de $K_{m,n}$ son:

$$gr(v_i) = n \quad y \quad gr(w_j) = m$$

Por lo tanto para que $K_{m,n}$ sea un circuito de Euler m y n deben ser números pares.

3.20 ¿Cuáles de los siguientes grafos contienen un circuito Hamiltoniano?

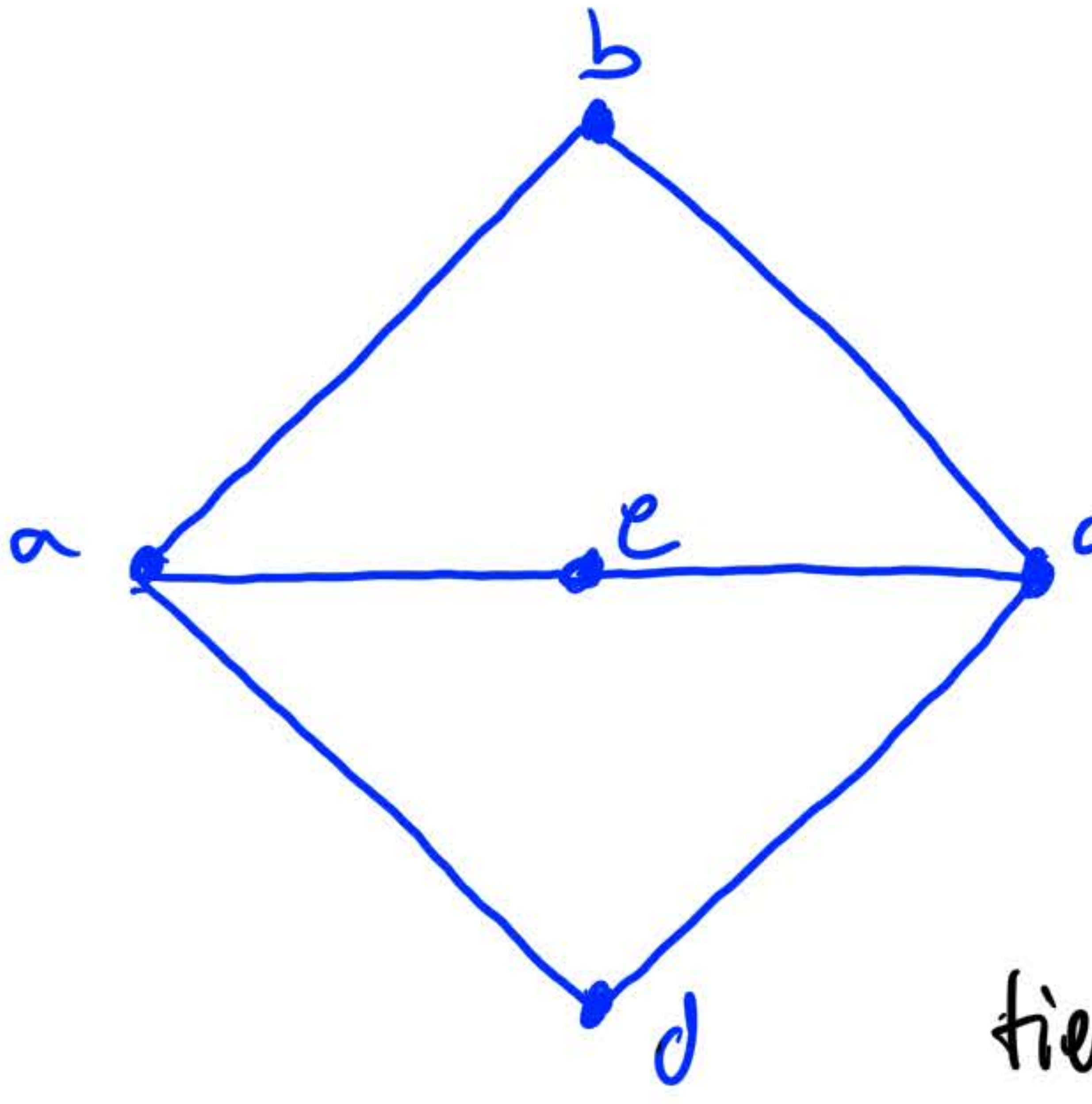


$n = 22$ vértices

Este grafo no contiene un circuito Hamiltoniano pues no cumple que para $n \geq$ la suma de los grados de 2 vértices no adyacentes cualesquiera es mayor o igual a n.

No se cumple. Cogemos por ejemplo los vértices k y p.

$gr(k) + gr(p) = 2+2 = 4 \not\geq 22 \rightarrow$ No se cumple



$n = 5$ vértices

Este grafo tampoco cumple la propiedad mencionada en el anterior apartado. Por tanto no tiene un circuito Hamiltoniano.

Ejemplo:

$gr(b) + gr(d) = 4 \not\geq 5 \rightarrow$ No se cumple.

3.22. Demuestra que si $n \geq 3$, entonces K_n contiene un circuito hamiltoniano.

- Teorema: Sea G un grafo con n vértices:
  1. Si el número de lados es mayor o igual que $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+2$, entonces G es hamiltoniano.
  2. Si $n \geq 3$ y para cada par de vértices no adyacentes se verifica que $gr(v) + gr(w) \geq$ $\geq n$, entonces G es hamiltoniano.

En este caso nos interesa el primer apartado.
Tenemos que en un grafo completo K_n se cumple que:

$$l = \frac{n(n-1)}{2}$$

Vamos a demostrar que $l \geq \frac{1}{2}(n-1)(n-2)+2$ para $n \geq 3$.

$$l = \frac{n(n-1)}{2} \geq \frac{1}{2}\left[(n-1)(n-2)+4\right)$$

$$n^2 - n \geq n^2 - 2n - n + 2 + 4$$

$$2n \geq 6$$

$$\boxed{n \geq 3}$$

Por lo tanto para $n \geq 3$ los grafos completos son hamiltonianos.

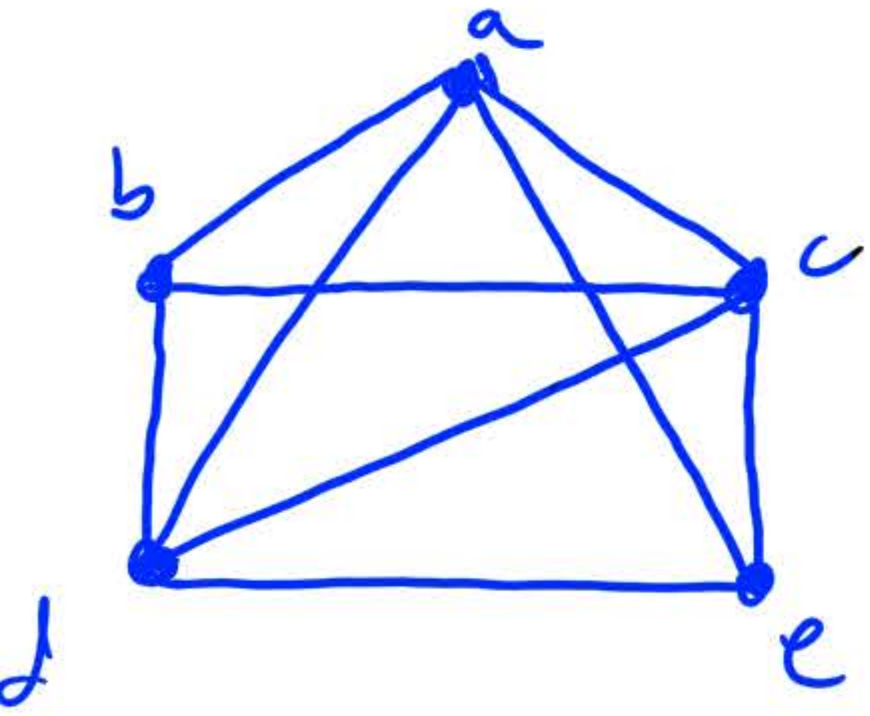
3.23 ¿Cuando $K_{m,n}$ es un grafo de Hamilton?

Siendo $K_{m,n}$ un grafo bipartido completo, donde m es el número de vértices de una partición y n el número de vértices de la otra partición.

Se cumple que si $n = m$, entonces es un grafo de Hamilton.

(Proposición 6.7.1 de apuntes y 6.8.1 del libro).

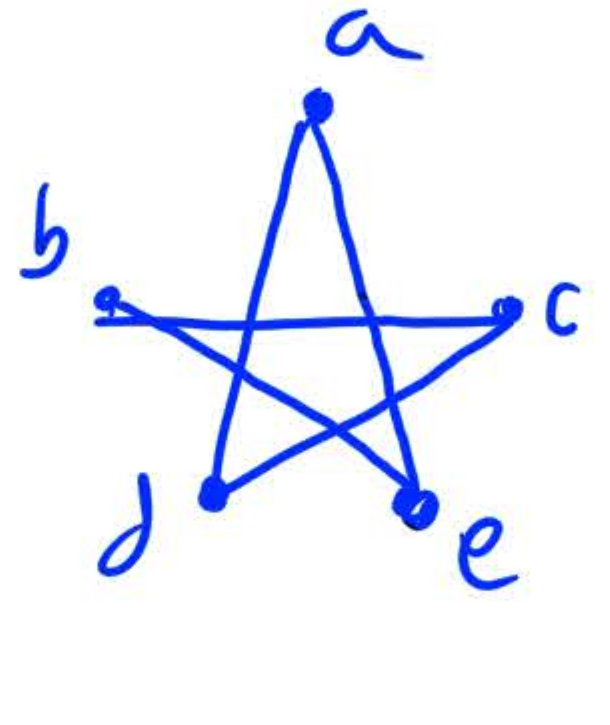
3.25 Determina cuáles de los siguientes grafos son planos



$v = 5$

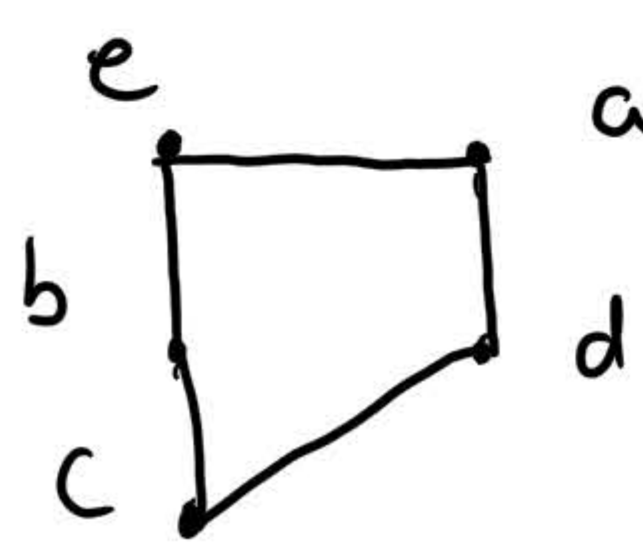
$l = 9$

Según el teorema de Kuratowski: este grafo es plano ya que ningún subgrafo se puede contraer a K_5 ni a $K_{3,3}$, esto es porque tiene menos lados que K_5 por lo tanto ninguna contracción será K_5 y mucho menos $K_{3,3}$.



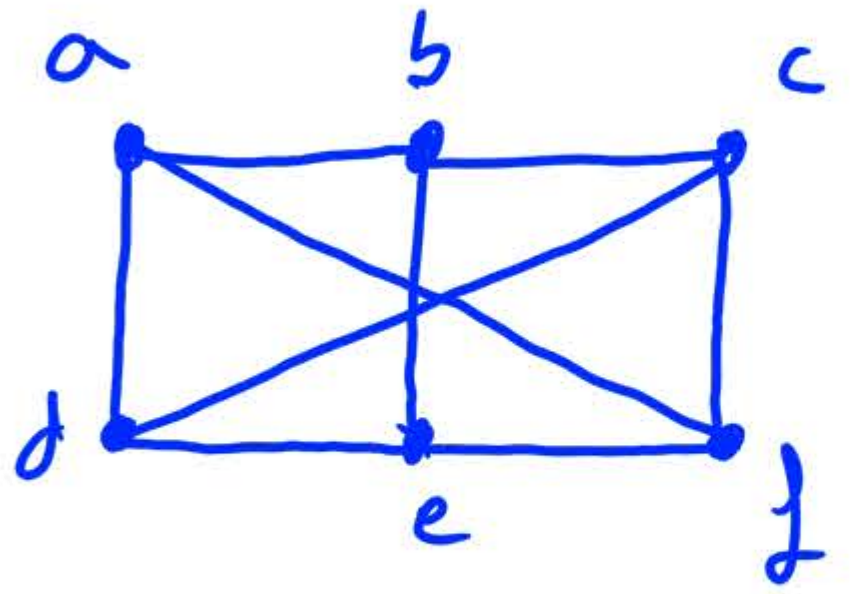
Este grafo es plano ya que no se puede contraer a K_5 ni a $K_{3,3}$.

Además podemos encontrar una representación plana.

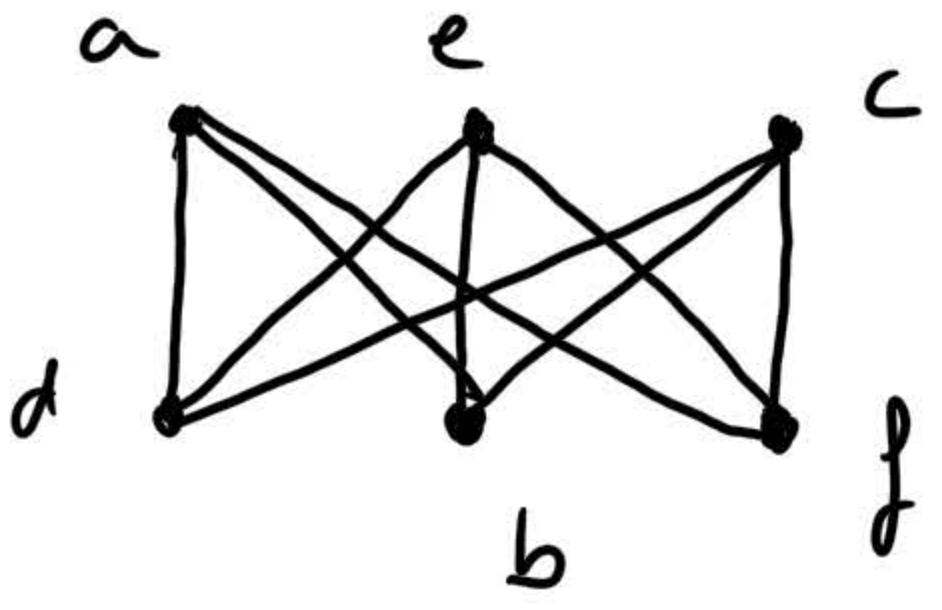


Además verifica que $V - l + c = 2$

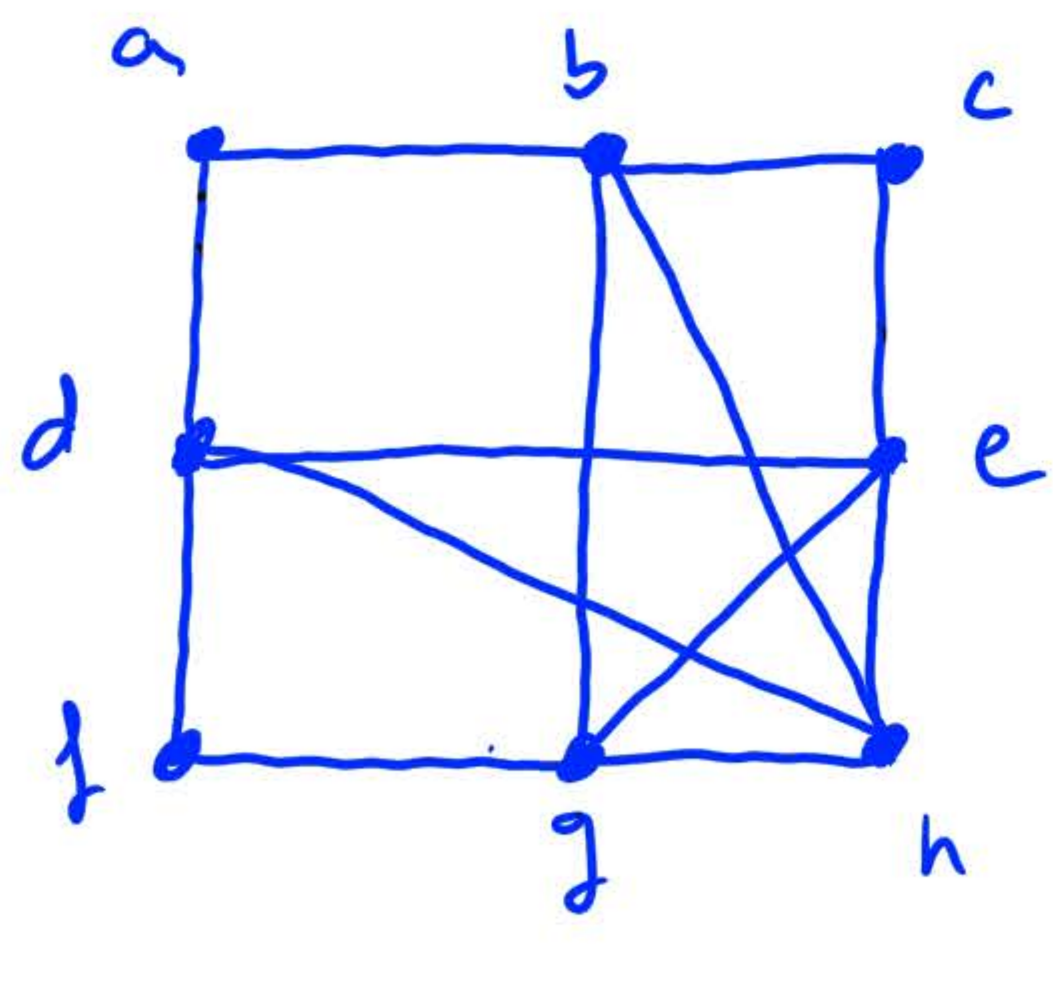
$5 - 5 + 2 = 2$ ✓



Este grafo __no__ es plano ya que se puede representar como $K_{3,3}$. Intercambiando las posiciones de los vértices b y e



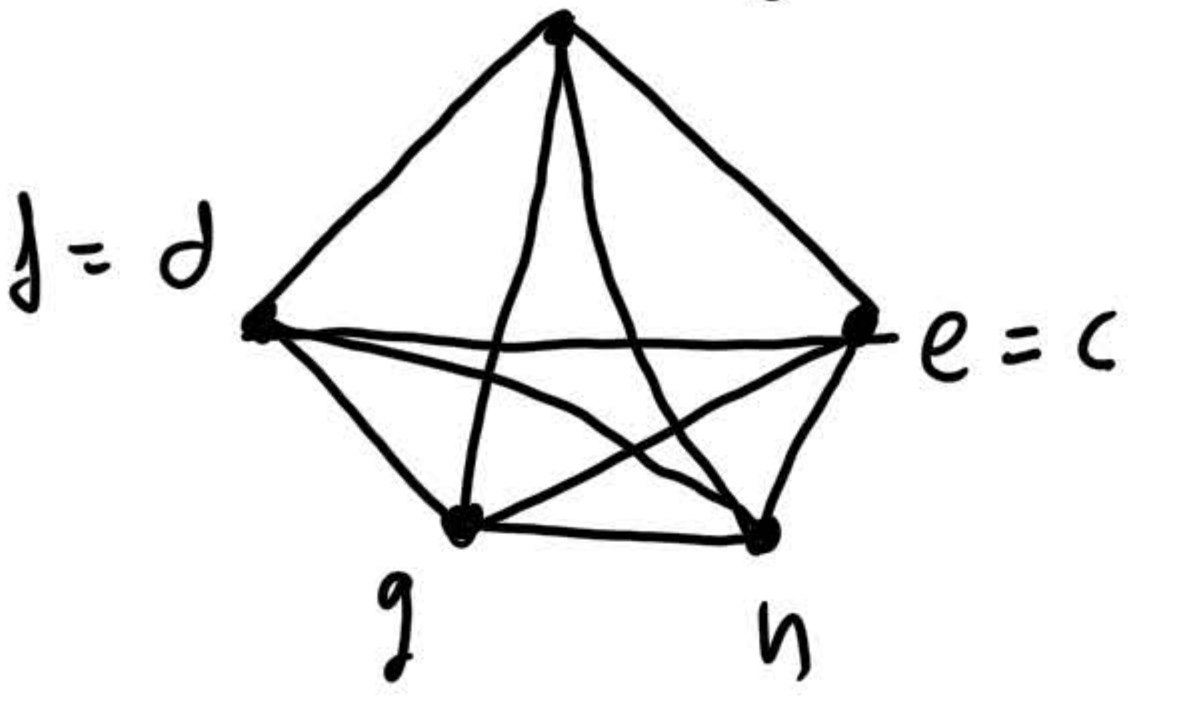
$\rightarrow K_{3,3}$



Este grafo __no__ es plano ya que lo podemos contraer a K_5.

Contracción:

a = b , c = e , f = d



$\rightarrow K_5$

3.26 Demuestra que cualquier grafo con cuatro vértices o menos es siempre plano.

Esto lo podemos demostrar con el teorema de Kuratowski que dice que un grafo es plano si y sólo si, ningún subgrafo suyo puede contraerse a K_5 o $K_{3,3}$.

Puesto que al contraer estamos eliminando vértices, para poder llegar a una contracción de K_5 o $K_{3,3}$ debemos partir de mínimo 5 vértices (son los que tiene K_5).

Por lo tanto si tenemos como mucho 4 vértices, no podemos contraerlo a K_5 ni $K_{3,3}$ y por lo tanto es plano.

$\boxed{3.27}$ Demuestra que si un grafo tiene a lo sumo cinco vértices y uno de ellos es de grado dos entonces es plano.

Un grafo de máximo 5 vértices y 1 de ellos de grado 2 lo podemos contraer a uno de 4 vértices. Esto lo hacemos identificando el vértice de grado 2 con alguno de los vértices adyacentes.

Por lo tanto, tenemos ahora un grafo de máximo 4 vértices, que como hemos demostrado en el ejercicio 3.26, según el teorema de Kuratowski, es plano.

$\boxed{3.28}$ Sea un grafo plano y conexo con nueve vértices de grado dos (tres veces), tres (tres veces), cuatro (dos veces) y cinco. ¿Cuántos lados hay?. ¿Y caras?

Como el grafo es plano y conexo cumple la característica de Euler. Esto es

$$v - l + c = 2.$$

Además sabemos que:

$$gr(v_1) + gr(v_2) + \dots gr(v_n) = 2l$$

Por lo tanto:

$$2l = 3 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 1 \cdot 5$$

$$l = 14$$

$$v - l + c = 2$$

$$9 - 14 + c = 2$$

$$c = 7$$

Por lo tanto tiene
9 vértices
14 lados
7 caras