Estadística Descriptiva e Introducción a la Probabilidad

Juan Antonio Maldonado Jurado

Departamento de Estadística e Investigación Operativa
Universidad de Granada

UNIVERSIDAD DE GRANADA

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas. 2014/15

Tema 5. Variables aleatorias: distribuciones de probabilidad y características

Definición. Distribución de probabilidad. Función de distribución

Clasificación de variables aleatorias: variables aleatorias discretas y continuas

Funciones de variables aleatorias: cambio de variable

Características de una variable aleatoria: esperanza matemática, momentos y funciones generatrices

5.1 Definición. Distribución de probabilidad. Función de distribución

En términos generales, una variable aleatoria es una función que asigna un valor real a cada elemento de un espacio muestral.

Definición.- Una **variable aleatoria** es una función medible sobre un espacio de probabilidad, es decir una función

$$X : (\Omega, \mathcal{A}, P) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$$

tal que la imagen inversa de cualquier conjunto de Borel es medible (un suceso del σ-campo $\mathcal{A}$); esto es,

$$X^{-1}(B) \in \mathcal{A} \quad \forall B \in \mathcal{B}.$$

Basta con imponer que la imagen inversa de intervalos de la forma $(-\infty, x]$, $\forall x \in \mathbb{R}$ sea medible, es decir una función definida sobre un espacio de probabilidad con valores en $\mathbb{R}$

$$X : (\Omega, \mathcal{A}, P) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$$

es una variable aleatoria si

$$X^{-1}((-\infty, x]) \in \mathcal{A} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

5.1 Definición. Distribución de probabilidad. Función de distribución

Una variable aleatoria induce una medida de probabilidad P_X sobre el espacio de Borel (dando lugar a un espacio de probabilidad $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, P_X)$) de la siguiente forma:

$$P_X(B) = P[X^{-1}(B)] \quad \forall B \in \mathcal{B}$$

esto es, como la probabilidad, en el espacio de probabilidad de partida, de la imagen inversa del conjunto de Borel. Notemos que

$$P_X(B) = P[X^{-1}(B)] = \mathrm{P}[\{\omega \in \Omega | X(\omega) \in B\}]$$

que se notará por comodidad $\mathrm{P}[X \in B]$.

Definición.- Se define la **función de distribución** de una variable aleatoria como una función

$$F_X : \mathbb{R} \longrightarrow [0, 1]$$

de la siguiente forma

$$F_X(x) = P_X[(-\infty, x]] \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Dado que

$$P_X[(-\infty, x]] = P[X^{-1}((-\infty, x])] = P[\{\omega \in \Omega / X(\omega) \in (-\infty, x]\}] = P[\{\omega \in \Omega / X(\omega) \leq x\}]$$

lo cual, por simplicidad, se suele escribir como $P[X \leq x]$, la definición de función de distribución de una variable aleatoria queda como

$$F_X(x) = P[X \leq x]$$

5.1 Definición. Distribución de probabilidad. Función de distribución

Propiedades:

1) Es no decreciente. Si $x_1 < x_2$, entonces $F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$.
2) Es continua por la derecha.
3) $F_X(-\infty) = 0, \quad F_X(+\infty) = 1$

Otras propiedades:

- El conjunto de puntos de discontinuidad de una función de distribución es numerable.
- $F_X(x^-) = \mathrm{P}[X < x]$.
- Una función de distribución sólo puede tener discontinuidades de salto y la longitud de salto en un punto de discontinuidad es la probabilidad con que la variable toma ese valor.

$$\mathrm{P}[X = x] = \mathrm{P}[X \leq x] - \mathrm{P}[X < x] = F_X(x) - F_X(x^-)$$

- La función de distribución de una variable aleatoria es continua en un punto $x \in \mathbb{R}$ si y sólo si $\mathrm{P}[X = x] = 0$

5.2 Clasificación de variables aleatorias

Atendiendo a la forma de la función de distribución, las variables aleatorias pueden clasificarse, de forma general, en:

- Variables aleatorias discretas, si su función de distribución crece sólo a saltos
- Variables aleatorias continuas, si su función de distribución es absolutamente continua, es decir, si existe una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

- Variables aleatorias mixtas, en otro caso.

5.2 Clasificación de variables aleatorias

Variables aleatorias discretas. Función masa de probabilidad

Una variable aleatoria se dice que es de tipo discreto o simplemente discreta si existe un conjunto numerable $E \subset \mathbb{R}$ tal que $\mathrm{P}[X \in E] = 1$; es decir, si toma a lo sumo una cantidad numerable de valores posibles.

Sea X una variable aleatoria discreta con valores en $E = \{x_i, \ i = 1, 2, \cdots\}$. A la función $P : E \longrightarrow [0, 1]$ que a cada valor de E le asigna la probabilidad con que la variable toma ese valor, se denomina **función masa de probabilidad, función de probabilidad o función de cuantía de la variable aleatoria**

$$x_i \longrightarrow \mathrm{P}[X = x_i] = p_i, \qquad i = 1, 2, \cdots$$

y verifica $0 \leq \mathrm{P}[X = x_i] \leq 1, \quad i = 1, 2, \cdots$ y $\sum_i \mathrm{P}[X = x_i] = 1$

La función de distribución de una variable aleatoria, a partir de la función masa de probabilidad, viene dada por

$$F(x) = \mathrm{P}[X \leq x] = \sum_{i | x_i \leq x} p_i$$

5.2 Clasificación de variables aleatorias

Variables aleatorias continuas. Función de densidad

Una variable aleatoria es de tipo continuo o simplemente continua si su función de distribución es absolutamente continua, es decir, si existe una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

A dicha función se le llama **función de densidad** de la variable aleatoria y verifica

1. $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
2. f es integrable Riemann ya que F tiene a lo sumo un número finito de discontinuidades sobre cada intervalo finito de $\mathbb{R}$.
3. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

5.3 Funciones de variables aleatorias: cambio de variable

En muchas ocasiones estamos interesados en, conocida la distribución de probabilidad de una variable aleatoria X, obtener la distribución de probabilidad de otra variable aleatoria Y que es función de la primera.

Teorema general de cambio de variable

Sea X una variable aleatoria definida como

$$X : (\Omega, \mathcal{A}, P) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}, P_X)$$

con distribución de probabilidad P_X conocida. Sea $Y = h(X)$ otra variable aleatoria (para ello basta exigir que $h : (\mathbb{R}, \mathcal{B}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ sea medible), entonces la distribución de probabilidad de Y, P_Y se puede obtener a partir de P_X como

$$\mathbf{P}_Y(B) = P_X(h^{-1}(B)) \qquad \forall B \in \mathcal{B}$$

La demostración es evidente, pues

$$P_Y(B) = P(Y^{-1}(B)) = P(X^{-1}(g^{-1}(B))) = P_X(g^{-1}(B)) \qquad \forall B \in \mathcal{B}$$

De aquí se deduce que la función de distribución de la variable aleatoria Y se puede obtener como

$$F_Y(y) = \mathrm{P}[Y \leq y] = \mathrm{P}_Y((-\infty, y]) = \mathrm{P}_X(h^{-1}(-\infty, y]) \qquad \forall y \in \mathbb{R}.$$

5.3 Funciones de variables aleatorias: cambio de variable

Función de una variable aleatoria discreta

Sea X una variable aleatoria discreta con valores en $E = \{x_i, \ i = 1, 2, \cdots\} \subset \mathbb{R}$ con función masa de probabilidad conocida y h una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ medible, entonces $Y = h(X)$ es una variable aleatoria discreta con función masa de probabilidad

$$P[Y = y] = \begin{cases} \displaystyle\sum_{x/h(x)=y} P[X = x] & y \in h(E) \\ 0 & y \notin h(E) \end{cases}$$

Función de una variable aleatoria continua
En este caso una función de una variable aleatoria continua puede dar lugar a una variable discreta, continua o mixta.

Teorema de cambio de variable de continua a discreta

Sea X una variable aleatoria continua con función de densidad f y con valores en un conjunto $A \subset \mathbb{R}$. Si h es una función medible tal que $Y = h(X)$ es una variable aleatoria discreta (es decir, $h(A)$ es numerable) entonces

$$\mathbf{P}[Y = y] = \begin{cases} \displaystyle\int_{\{x \in \mathbb{R}/h(x)=y\}} f(x)dx & y \in h(A) \\ 0 & y \notin h(A) \end{cases}$$

5.3 Funciones de variables aleatorias: cambio de variable

Teorema de cambio de variable de continua a continua

Sea X una variable aleatoria continua con función de densidad $f > 0 \ \ \forall x \in [a,b] \subset \mathbb{R}$. Si h es una función medible estrictamente monótona y derivable en dicho intervalo, entonces $Y = h(X)$ es un variable aleatoria continua con función de densidad

$$g(y) = \begin{cases} f(h^{-1}(y))|(h^{-1})'(y)| & y \in h([a,b]) \\ 0 & y \notin h([a,b]) \end{cases}$$

Generalización

Una generalización de este teorema puede hacerse en el caso en que h no tenga una única inversa y cada valor de la nueva variable $Y = h(X)$ proceda de un número finito, o infinito numerable de valores de X. En este caso, la función de densidad de Y será

$$h(y) = \sum_{k=1}^{\infty} f(h_k^{-1}(y)) \left| \frac{dh_k^{-1}(y)}{dy} \right|$$

siendo $h_1^{-1}(y), h_2^{-1}(y), \cdots$ las antiimagenes de y, $\forall y \in h([a,b])$.

5.4 Características de una variable aleatoria

Esperanza matemática

Sea X una variable aleatoria discreta con valores en $E = \{x_i,\ i = 1, 2, \cdots\} \subset \mathbb{R}$, se define la **esperanza matemática, media o valor esperado** de X, y se denota por $\mathrm{E}[X]$, como

$$\mathrm{E}[X] = \sum_i x_i \mathrm{P}[X = x_i]$$

siempre que dicha serie sea absolutamente convergente.

Si la variable aleatoria X es continua con función de densidad f se define su **esperanza matemática, media o valor esperado** como

$$\mathrm{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

siempre que dicha integral sea absolutamente convergente.

En caso de no convergencia absoluta de la serie o de la integral se dice que no existe la esperanza de dicha variable aleatoria.

5.4 Características de una variable aleatoria

Propiedades de la esperanza matemática

- La esperanza de una constante es la propia constante $\mathrm{E}[c] = c$.
- Si una variable aleatoria está acotada; esto es, si $\exists M$ tal que $\mathrm{P}[|X| \leq M] = 1$ entonces $\mathrm{E}[X] \leq M$.
- Si $X \geq 0$ y existe su esperanza, entonces $\mathrm{E}[X] \geq 0$
- Si X es una variable aleatoria con distribución simétrica respecto del valor c, entonces si $\exists$ $\mathrm{E}[X]$, su valor será igual a c.

5.4 Características de una variable aleatoria

Propiedades de la esperanza matemática

- Esperanza o media de una función de una variable aleatoria.

- Sea X una variable aleatoria discreta con valores en $E = \{x_i,\ i = 1, 2, \cdots\}$ e $Y = h(X)$ otra variable aleatoria función de ella, entonces existe la $\mathrm{E}[Y]$ si

$$\sum_i |h(x_i)|\mathrm{P}[X = x_i] < \infty$$

y, en caso de que exista

$$\mathrm{E}[Y] = \sum_i h(x_i)\mathrm{P}[X = x_i]$$

- Sea X una variable aleatoria continua con función de densidad f e $Y = h(X)$ otra variable aleatoria con h en las condiciones del Teorema de cambio de variable de continua a continua, entonces existe la $\mathrm{E}[Y]$ si

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(x)|f(x)dx < \infty$$

y, en caso de que exista

$$\mathrm{E}[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} h(x)f(x)dx$$

5.4 Características de una variable aleatoria

Propiedades de la esperanza matemática

- Linealidad. Si $\exists\ \mathrm{E}[X_i],\ i = 1, 2, \cdots, n$, entonces

$$\exists\ \mathrm{E}\left[\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathrm{E}[X_i]$$

- Dada X una variable aleatoria y sean $g(X)$ y $h(X)$ dos funciones de X, variables aleatorias cuyas esperanzas existen, entonces

$$\exists\ \mathrm{E}[a\ g(X) + b\ h(X)] = a\ \mathrm{E}[g(X)] + b\ \mathrm{E}[h(X)], \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

- Dada X una variable aleatoria y sean $g(X)$ y $h(X)$ dos funciones de X, variables aleatorias cuyas esperanzas existen; si $g(X) \leq h(X)$, entonces

$$\mathrm{E}[g(X)] \leq \mathrm{E}[h(X)]$$

- La esperanza matemática minimiza el error cuadrático medio

$$\text{mín}_d\ \mathrm{E}[(X-d)^2] = \mathrm{E}[(X - \mathrm{E}[X])^2]$$

5.4 Características de una variable aleatoria

Momentos de una variable aleatoria

Se define el **momento no centrado, o centrado en el origen, de orden** k de la variable aleatoria X, y lo denotaremos como m_k, como

$$m_k = \mathrm{E}[X^k], \qquad k = 1, 2, \cdots$$

Si existe el momento no centrado de orden uno de una variable aleatoria X, $m_1 = \mathrm{E}[X]$, se define el **momento centrado de orden** k de la variable aleatoria X, y lo denotaremos como μ_k, como

$$\mu_k = \mathrm{E}[(X - \mathrm{E}[X])^k], \qquad k = 1, 2, \cdots$$

Existen unas relaciones entre los momentos centrados y no centrados de una variable aleatoria.

$$\mu_k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (-1)^i m_{k-i} m_1^i$$

$$m_k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \mu_{k-i} m_1^i$$

5.4 Características de una variable aleatoria

Momentos de una variable aleatoria. Varianza

$$\sigma_X^2 = \mathrm{Var}[X] = \mu_2(X) = \mathrm{E}(X - \mathrm{E}[X])^2$$

Propiedades de la varianza

- $\mathrm{Var}[X] = \mathrm{E}[X^2] - (\mathrm{E}[X])^2$
- Sea X una variable aleatoria cuya varianza existe, entonces

$$\exists \ \mathrm{Var}[aX + b] = a^2\mathrm{Var}[X], \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

- Sean X e Y variables aleatorias independientes cuyas varianzas existen, entonces

$$\exists \ \mathrm{Var}[X \pm Y] = \mathrm{Var}[X] + \mathrm{Var}[Y]$$

- Si $X_1, X_2, \cdots, X_n$ son variables aleatorias independientes cuyas varianzas existen entonces

$$\exists \ \mathrm{Var}[\sum_{i=1}^{n} a_i X_i] = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \mathrm{Var}[X_i]$$

- La varianza de una variable aleatoria X es cero si y sólo si la variable aleatoria es degenerada o constante.

La varianza se expresa en unidades al cuadrado, por ello se introduce la **desviación típica**, que se define como la raíz cuadrada positiva de la varianza y se suele denotar como $\sigma_X = \sqrt{\mathrm{Var}[X]}$

5.4 Características de una variable aleatoria

Función generatriz de momentos

Definición.- Dada una variable aleatoria X, si $\exists t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\forall t \in (-t_0, t_0)$ existe la esperanza

$$\mathrm{E}\left[\mathrm{e}^{tX}\right]$$

se dice que existe la **función generatriz de momentos** de X y se define como

$$M_X(t) = \mathrm{E}\left[\mathrm{e}^{tX}\right], \qquad \forall t \in (-t_0, t_0).$$

La función generatriz de momentos de una variable aleatoria no tiene por qué existir (por ejemplo, para la distribución de Cauchy), pero si la variable aleatoria está acotada entonces siempre existe.

<u>Expresión de la función generatriz de momentos para una variable aleatoria discreta</u>

Sea X una variable aleatoria discreta con valores en $E = \{x_i, i = 1, 2, \cdots\}$, entonces

$$M_X(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{e}^{tx_i} \mathrm{P}[X = x_i]$$

<u>Expresión de la función generatriz de momentos para una variable aleatoria continua</u>

Sea X una variable aleatoria continua con función de densidad f, entonces

$$M_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{tx} f(x) dx$$

5.4 Características de una variable aleatoria

Función generatriz de momentos

Teorema de unicidad.
La función generatriz de momentos de una variable aleatoria, si existe, es única y determina de forma única la distribución de la variable. Es decir, una variable aleatoria no puede tener dos funciones generatrices de momentos ni dos variables aleatorias con distinta distribución la misma función generatriz de momentos.

Teorema (Relación con los momentos)

Si existe la función generatriz de momentos de una variable aleatoria, entonces,
a) Existen todos los momentos de la variable aleatoria.
b) Para todo t en el entorno de definición

$$M_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n \mathrm{E}[X^n]}{n!}$$

c) Existe la derivada de todos los órdenes de $M_X(t)$ en un entorno de cero y se verifica

$$M_X^{k)}(t)|_{t=0} = \mathrm{E}[X^k], k = 1, 2, \cdots$$

Otras propiedades

- $M_X(0) = 1$
- Sea X una variable aleatoria con función generatriz de momentos $M_X(t)$, $\forall t \in (-t_0, t_0)$, sea $Y = aX + b,\ a, b \in \mathbb{R}$, entonces la función generatriz de momentos de Y, para t tal que $at \in (-t_0, t_0)$, verifica

$$M_Y(t) = \mathrm{e}^{bt} M_X(at)$$