Función de transferencia de un circuito RC

Isabel M. Tienda Luna

En este documento vamos a analizar la función de transferencia (que voy a llamar T) del circuito de la figura 1 formado por una fuente de CA y una resistencia en serie con un condensador. Como puede verse, la salida del circuito se ha colocado entre los extremos del condensador (morado) y la entrada del circuito se ha colocado entre los extremos de la fuente de tensión (rojo).

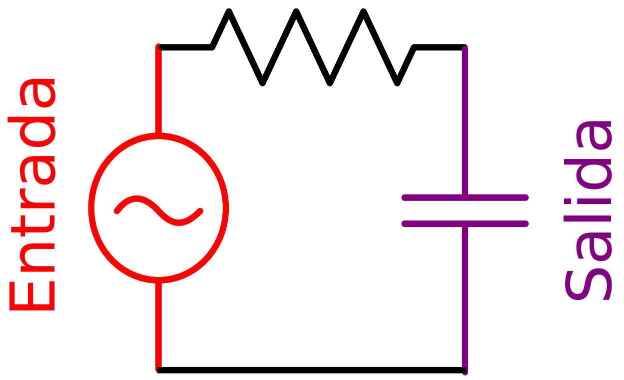

Figura 1: Circuito RC.

Vamos a suponer para el cálculo numérico los siguientes valores: para la fuente $v_i(t) = 10\cos(\omega t)V$, $R = 1k\Omega$ y $C = 10nF = 10\,10^{-9}F = 10^{-8}F$.

Para resolver este problema, lo más cómodo (sobre todo para aquellos que tengan aún problemas para trabajar con números complejos) es dejar los cálculos con números complejos para el final del ejercicio y trabajar con letras. Esto es, haremos el ejercicio sin sustituir las expresiones de las impedancias hasta el final.

1. Función de Transferencia.

En esta sección voy a calcular la **función de transferencia** que se obtiene al tomar la salida del circuito en el condensador y la entrada en la fuente que alimenta el circuito de la figura 1. Voy a trabajar con fasores para representar las fuentes (parte independiente del tiempo del número complejo), por lo que para representar la señal de la fuente de tensión del circuito utilizaré el fasor $V_i = 10V$ (recordar que el número complejo completo es $v_i(t) = 10e^{j\omega t}V$ y que el fasor es la parte independiente del tiempo de ese número complejo completo).

La función de transferencia de un circuito es el cociente entre una magnitud a la salida y la misma magnitud a la entrada de un circuito. En nuestro caso esa magnitud es la **diferencia de potencial**. Entonces, la función de transferencia se calcula como el cociente entre la diferencia de potencial a la salida y a la entrada:

$$T = \frac{V_{salida}}{V_{entrada}} = \frac{V_C}{V_i} \tag{1}$$

donde V_C es el fasor que representa la diferencia de potencial entre los extremos del condensador (donde vamos a colocar la salida) y V_i es el fasor que representa la diferencia de potencial entre los extremos de la fuente (donde vamos a colocar la entrada). Notar que para representar los fasores se utilizan letras mayúsculas y no minúsculas.

Por tanto, mi problema de cálculo de la función T se reduce a calcular el cociente $\frac{V_C}{V_i}$.

Una vez calculada, la función de transferencia permite estudiar cómo varía la salida (la diferencia de potencial en el condensador) cuando cambio la entrada (la diferencia de potencial de la fuente). En realidad, podemos variar la entrada de distintas formas. Podemos cambiar su amplitud, podemos cambiar su fase y podemos cambiar su frecuencia angular (o lo que es lo mismo, su periodo o su frecuencia). En este caso, nuestro objetivo es estudiar cómo afectan a la salida (a los valores de diferencia de potencial entre los extremos del condensador) los cambios en la frecuencia angular de la entrada y por eso, a partir de ahora escribiré $T(\omega)$ en lugar de T.

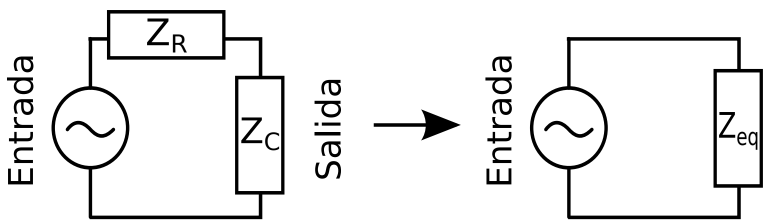

Figura 2: Circuito RC equivalente.

2. ¿Cómo se calcula V_C?

Si nos fijamos en el circuito de la izquierda de la figura 2 (donde hemos sustituido la resistencia y el condensador por sus impedancias), podemos ver que para calcular V_C podemos utilizar la Ley de Ohm Generalizada aplicada a la impedancia del condensador (Z_C):

$$V_C = Z_C I \tag{2}$$

donde Z_C es la impedancia del condensador e I es el fasor que representa la intensidad que pasa por dicha impedancia. Donde:

- Z_C la se calcular, se que es $\frac{1}{j\omega C}$ así que no me preocupo de ella ahora. Aunque sepa la expresión para calcularla voy a seguir haciendo las cuentas con Z_C.
- No se cuánto vale I. Por tanto, mi siguiente objetivo será obtener la expresión que me permita calcular I en función de las cosas que conozco (Z_R, Z_C y V_i).

3. ¿Cómo se calcula I?

Para calcular el fasor que representa la intensidad (I), tengo que resolver el circuito. Para resolver el circuito puedo usar cualquiera de los métodos que hemos estudiado en clase. En este caso, vamos a utilizar un método de simplificación en el que intentaremos simplificar el circuito asociando impedancias.

Si nos fijamos en el circuito de la izquierda de la figura 2, vemos que las impedancias de la resistencia y el condensador están en serie. Por tanto, podré simplificar el circuito asociando estas dos impedancias en serie y sustituyendo la asociación por su impedancia equivalente. La impedancia equivalente de la asociación se calcula como:

$$Z_{eq} = Z_R + Z_C \tag{3}$$

Una vez que tengo el circuito reducido a una fuente de tensión con una única impedancia (la Z_{eq}) como puede verse a la derecha de la figura 2, puedo aplicar la Ley de Ohm Generalizada a esa impedancia para calcular la intesidad de corriente que circula por ella:

$$I = \frac{V_i}{Z_{eq}} = \frac{V_i}{Z_R + Z_C} \tag{4}$$

y con esto ya sé cómo calcular I en función de magnitudes que conozco (V_i, Z_R) o que sé calcular (Z_C). Me paro aquí, no sustituyo, sigo trabajando con letras.

Como ya conozco la forma de calcular I, he obtenido una expresión que me lo permite, ya tengo todo lo necesario para calcular V_C.

4. ¿Cómo se calcula V_C cuando ya tengo I?

Una vez calculada I, ya puedo usarla en la Ley de Ohm Generalizada aplicada a la impedancia del condensador para calcular V_C:

$$V_C = Z_C I = Z_C \frac{V_i}{Z_R + Z_C} \tag{5}$$

donde se ha sustituido la expresión para la intensidad (I) que he calculado en el apartado anterior (ecuación 4).

Ya tengo la V_C expresada en función de magnitudes que conozco (V_i, Z_R) o que sé calcular (Z_C). Pero de nuevo no sustituyo valores, me quedo sólo con la fórmula, voy a seguir trabajando con letras.

4.1. ¿Cómo se calcula $T(\omega)$?

Una vez que he calculado la expresión de V_C, la función de transferencia se calcula como el cociente entre V_C y V_i:

$$T(\omega) = \frac{V_C}{V_i} = \frac{Z_C \frac{V_i}{Z_R+Z_C}}{V_i} = \frac{Z_C}{Z_R + Z_C} \tag{6}$$

La expresión anterior me da la fórmula necesaria para calcular la función de transferencia usando magnitudes que conozco (Z_R) o que sé calcular (Z_C). Y ahora que he llegado al final del cálculo, es cuando sustituyo cada una de las magnitudes que aparece en la fórmula por el número complejo que la representa:

$$T(\omega) = \frac{Z_C}{Z_R + Z_C} = \frac{\frac{1}{j\omega\, 10^{-8}}}{10^3 + \frac{1}{j\omega\, 10^{-8}}} = \frac{\frac{1}{j\omega\, 10^{-8}}}{\frac{10^3 j\omega\, 10^{-8}+1}{j\omega\, 10^{-8}}} = \frac{1}{j\omega\, 10^{-5} + 1} \tag{7}$$

Para hacer el cálculo anterior he usado que la impedancia de la resistecia es $Z_R = R = 10^3 \Omega$ y que la impedancia del condensador se calcula como:

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C} = \frac{-j}{\omega C} = \frac{1}{\omega C} e^{-j\frac{\pi}{2}} \tag{8}$$

en nuestro caso, su valor numérico será:

$$Z_C = \frac{1}{j\omega\, 10^{-8} F} = \frac{-j}{\omega\, 10^{-8} F} = \frac{1}{\omega\, 10^{-8} F} e^{-j\frac{\pi}{2}} \tag{9}$$

Notar que las expresiones anteriores son todas iguales y se obtienen unas de otras operando con los números complejos. Para pasar de la primera a la segunda calculo el cociente y para pasar de la segunda a la tercera lo que se ha hecho es expresar el número complejo en forma polar. Además, es importante resaltar aquí que Z_C depende del valor de ω, de manera que Z_C

es una función que tendrá un valor diferente dependiendo de lo que valga ω. A medida que ω cambie, Z_C cambiará y también lo hará la función de transferencia.

Ahora sólo me queda hacer la división que aparece en la expresión de la función de transferencia $T(\omega)$ que hemos calculado en la fórmula 7.Para ello, voy a expresar los números complejos que aparecen en el numerador y en el denominador de la función de transferencia en forma polar:

$$T(\omega) = \frac{1e^{j0}}{\sqrt{1^2 + (10^{-5}\omega)^2} e^{j \arctan{(10^{-5}\omega)}}} \tag{10}$$

Al dividir los dos números complejos en forma polar, el resultado es un nuevo número complejo cuyo módulo es la división de los módulos y cuyo argumento es el argumento del numerador menos el del denominador:

$$T(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1^2 + (10^{-5}\omega)^2}} e^{j0 - j \arctan{(10^{-5}\omega)}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (10^{-5}\omega)^2}} e^{-j \arctan{(10^{-5}\omega)}} \tag{11}$$

Como puede verse, la función de transferencia es un número complejo de módulo:

$$|T(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (10^{-5}\omega)^2}} \tag{12}$$

y argumento:

$$\arg T(\omega) = \arctan{(10^{-5}\omega)} \tag{13}$$

ambos dependientes del valor de la frecuencia ω.

5. Conclusiones

1. La función de transferencia depende de la frecuencia ω, es una función de la frecuencia así que tendrá un valor diferente para cada valor de ω de la fuente que haya en el circuito que esté analizando.

2. Como puede verse en la ecuación 11, la función de transferencia es un número complejo. Esto significa que para dar su valor tendré que decir lo que vale su parte real y su parte imaginaria o equivalentemente, lo que vale su módulo y lo que vale su argumento. En esta asignatura nosotros expresaremos las funciones de transferencia en forma polar y calcularemos siempre su módulo y su argumento.

3. Como la función de transferencia depende de ω, tanto su módulo como su argumento dependen en general de la frecuencia ω.

4. Puesto que $T(\omega)$ es un número complejo, para representar la función de transferencia en función de la frecuencia tendré que hacer dos gráficas. En una de ellas representaré el módulo en función de la frecuencia y

en la otra el argumento en función de la frecuencia. A cada una de esas gráficas se les llama **diagrama de Bode**.