

Ejemplo de resolución de circuitos en corriente continua

Isabel M. Tienda Luna

En este documento analizaremos cómo solucionar ejercicios de circuitos en corriente continua usando los métodos de mallas y de nudos. En lo que sigue utilizaré como sinónimos:

- Tensión = voltaje = potencial.
- Intensidad = intensidad de corriente = corriente.

1. Método de mallas

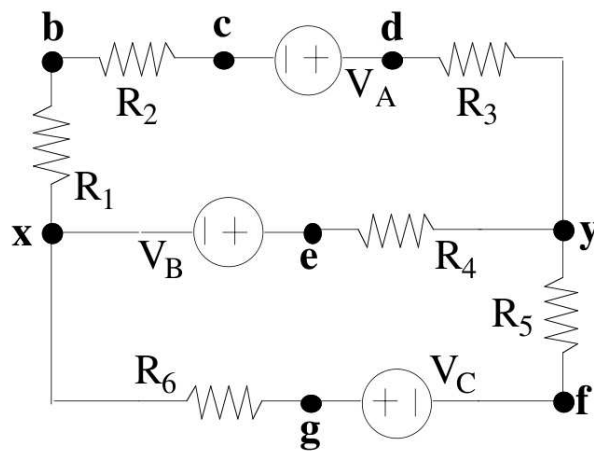


Figura 1: Circuito a resolver por el método de mallas.

Para aprender a utilizar el método de mallas, utilizaremos el circuito de la figura 1 usando los siguientes valores para las resistencias y fuentes: $R_1 = 1k\Omega$, $R_2 = 2k\Omega$, $R_3 = 3k\Omega$, $R_4 = 4k\Omega$, $R_5 = 5k\Omega$, $R_6 = 6k\Omega$, $V_A = 3V$, $V_B = 2V$ y $V_C = 1V$.

Como hemos visto en clase, a la hora de resolver circuitos utilizando el método de mallas vamos a seguir una serie de pasos que se enumeran a continuación:

1. Buscar el número de nudos esenciales (n) y el número de ramas esenciales (r) en el circuito.
2. Usar el n y r para calcular el número de mallas independientes. Escoger las mallas independientes.
3. Dibujar las intensidades en cada una de las mallas independiente escogidas.
4. Aplicar a cada malla la ley de Kirchhoff de mallas.
5. Calcular las intensidades de cada una de las mallas.

1.1. Buscar el número de nudos esenciales (n) y el número de ramas esenciales (r) en el circuito.

Para encontrar el número de nudos esenciales en el circuito recordamos la definición de nudo esencial que es aquel que une tres o más elementos. En el circuito de la figura 1 sólo hay **dos nudos** que cumplan esta condición y son los nudos x e y . Por tanto, $n = 2$.

Para encontrar el número de ramas esenciales en el circuito recordamos que una rama esencial es aquella que conecta dos nudos esenciales. Por tanto, para encontrar las ramas esenciales en el circuito hay que buscar los distintos caminos que conectan los nudos x e y . En la figura 1 puede verse que hay tres posibilidades para ir de x a y , por tanto, hay **tres ramas esenciales**. Esto es, $r = 3$.

1.2. Usar n y r para calcular el número de mallas independientes. Escoger las mallas independientes.

Para calcular el número de mallas independiente usamos la expresión que hemos visto en clase, esto es, el número de mallas independientes se puede calcular como $r - (n - 1)$. Si aplicamos esta fórmula, llegamos a que en el circuito de la figura 1 hay **dos mallas independientes**.

1.2.1. ¿Cómo escojo las mallas independientes con las que voy a trabajar?

La elección de las mallas con las que se va a trabajar es totalmente arbitraria, esto es, cada uno puede elegir las que quiera. En la figura 2 se muestran en rojo las posibles mallas que se pueden elegir para hacer el problema. Observar que sólo dos de las tres mallas son independientes, esto es que sólo necesito dos de las tres mallas de la figura 2 para recuperar el circuito completo de la figura 1.

Cualquier conjunto de dos (son dos porque hay dos mallas independientes) de las mallas que aparecen en la figura 2 es adecuado para resolver el

problema. En este documento se van a usar las mallas de las figuras 2 (a) y 2 (b) pero se podrían haber usado las de las figuras 2 (a) y 2 (c) o las de las figuras 2 (b) y 2 (c). Un buen ejercicio sería usar otro par de mallas y comprobar que los resultados finales son los mismos.

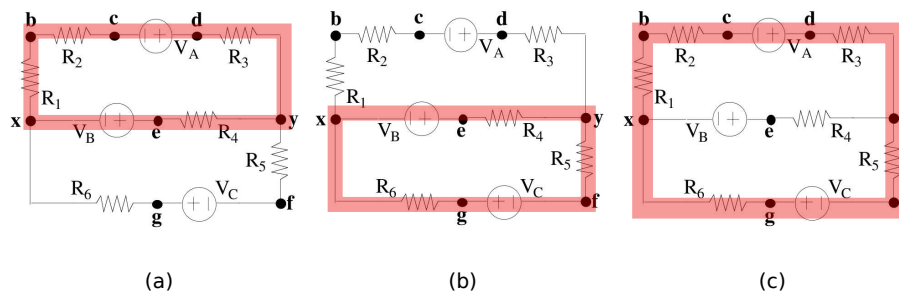


Figura 2: Posibles mallas a escoger.

1.3. Dibujar las intensidades en cada una de las mallas independiente escogidas.

El siguiente paso consiste en dibujar las intensidades que circulan por cada malla. De nuevo, existen varias posibilidades de elección. Las distintas posibilidades que existen para el circuito de la figura 1 están representadas en la figura 3 donde se ha usado el color rojo para aquellas intensidades que recorren la malla en sentido horario y verde para las que lo recorren en sentido antihorario. Cualquiera de las cuatro posibles elecciones mostradas en la figura 3 es adecuada porque lo que hacemos al dibujar es suponer que la intensidad de malla tiene un determinado. Cuando resolvamos el circuito y calculemos las intensidades, el signo de las mismas nos dirá si nuestra suposición era correcta o si por el contrario no equivocamos de sentido de recorrido.

En este ejercicio realizaremos la suposición mostrada en la figura 3 (a), esto es, suponemos que las dos intensidades de malla recorren la misma en el sentido horario.

1.4. Aplicar a cada malla la ley de Kirchhoff de mallas.

Antes de aplicar a cada malla la ley de Kirchhoff de mallas, vamos a distinguir entre las dos mallas del circuito, vamos a llamar a una de ellas malla 1 y a la otra malla 2. Esta nomenclatura puede verse en la figura 4.

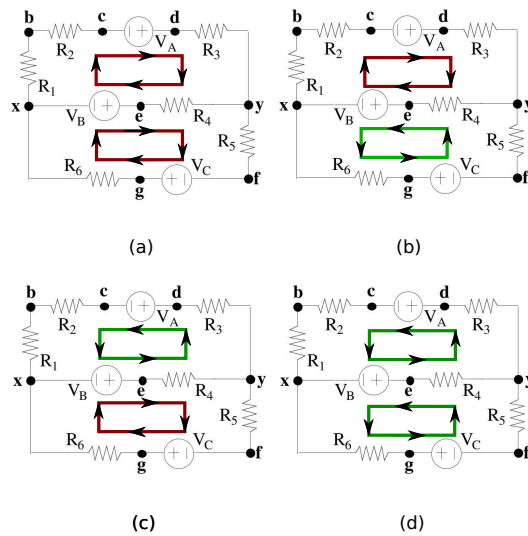


Figura 3: Posibles elecciones de las intensidades de malla.

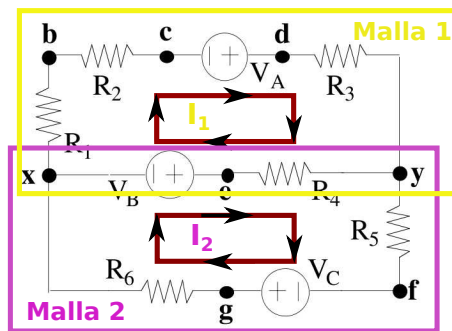


Figura 4: Nomenclatura.

1.4.1. Análisis de la malla 1

La ley de mallas de Kirchhoff dice:

$$\sum \varepsilon = \sum RI \quad (1)$$

por tanto, para aplicarla tenemos que calcular cada miembro de la ecuación por separado.

Comenzamos calculando el primer miembro de la ecuación 1. Para ello necesito saber cuántas fuentes hay en la malla 1. Según podemos observar en la figura 4, en la malla 1 hay 2 fuentes A y B . Además, para hacer la suma $\sum \varepsilon$ necesitamos considerar cada fuente con su signo.

¿Cómo se el signo de ε ? Si la intensidad de la malla que estoy analizando (I_1 en este caso) sale de la fuente por el polo positivo, entonces el signo de

la fuerza electromotriz de esa fuente es positivo. El signo será negativo en caso contrario. Esto es, si la intensidad de la malla que estoy analizando (I_1 en este caso) sale de la fuente por el polo negativo.

Entonces, aplicando el criterio anterior:

$$\sum \varepsilon = 3V - 2V = 1V \quad (2)$$

Para calcular el segundo miembro de la ecuación 1 hay que fijarse en cada una de las resistencias que están en la malla 1. Si nos fijamos en la figura 4, veremos que en la malla 1 hay 4 resistencias. Mientras que por R_1 , R_2 y R_3 sólo pasa la corriente de intensidad I_1 , por la resistencia R_4 pasan tanto la corriente I_1 como la I_2 .

¿Cómo se el signo de IR ? El criterio es el siguiente: si la intensidad I que atraviesa la resistencia R va en el mismo sentido que la intensidad de la malla que estoy analizando (I_1 en este caso), entonces IR es positivo. Será negativo en caso contrario. Esto es, si la intensidad I que atraviesa la resistencia R va en sentido contrario a la intensidad de la malla que estoy analizando (I_1 en este caso). Por tanto, el segundo miembro de la ecuación 1 se calcula de la siguiente manera:

$$\sum RI = 1k\Omega I_1 + 2k\Omega I_1 + 3k\Omega I_1 + 4k\Omega I_1 - 4k\Omega I_2 = 10k\Omega I_1 - 4k\Omega I_2 \quad (3)$$

Si sustituyo en la ecuación 1 los resultados obtenidos en las ecuaciones 2 y 3 obtengo:

$$\begin{aligned} \sum \varepsilon &= \sum RI \\ 1V &= 10k\Omega I_1 - 4k\Omega I_2 \end{aligned} \quad (4)$$

1.4.2. Análisis de la malla 2

Para realizar el análisis de la malla 2 comenzamos de nuevo calculando el primer miembro de la ecuación 1. Para ello necesito saber cuántas fuentes hay en la malla 2. Según podemos observar en la figura 4, en la malla 2 hay 2 fuentes B y C . Además, para hacer la suma $\sum \varepsilon$ necesitamos considerar cada fuente con su signo.

¿Cómo se el signo de ε ? Si la intensidad de la malla que estoy analizando (I_2 en este caso) sale de la fuente por el polo positivo, entonces el signo de la fuerza electromotriz de esa fuente es positivo. El signo será negativo en caso contrario. Esto es, si la intensidad de la malla que estoy analizando (I_2 en este caso) sale de la fuente por el polo negativo.

Entonces, aplicando el criterio anterior:

$$\sum \varepsilon = 2V + 1V = 3V \quad (5)$$

Para calcular el segundo miembro de la ecuación 1 hay que fijarse en cada una de las resistencias que están en la malla 2. Si nos fijamos en la

figura 4, veremos que en la malla 2 hay 3 resistencias. Mientras que por R_5 y R_6 sólo pasa la corriente de intensidad I_2 , por la resistencia R_4 pasan tanto la corriente I_1 como la I_2 .

¿Cómo se el signo de IR ? El criterio es el siguiente: si la intensidad I que atraviesa la resistencia R va en el mismo sentido que la intensidad de la malla que estoy analizando (I_2 en este caso), entonces IR es positivo. Será negativo en caso contrario. Esto es, si la intensidad I que atraviesa la resistencia R va en sentido contrario a la intensidad de la malla que estoy analizando (I_2 en este caso). Por tanto, el segundo miembro de la ecuación 1 se calcula de la siguiente manera:

$$\sum RI = 5k\Omega I_2 + 6k\Omega I_2 + 4k\Omega I_2 - 4k\Omega I_1 = 15k\Omega I_2 - 4k\Omega I_1 \quad (6)$$

Si sustituyo en la ecuación 1 los resultados obtenidos en las ecuaciones 5 y 6 obtengo:

$$\begin{aligned} \sum \varepsilon &= \sum RI \\ 3V &= 15k\Omega I_2 - 4k\Omega I_1 \end{aligned} \quad (7)$$

1.5. Calcular las intensidades de cada una de las mallas.

Finalmente, para calcular las intensidades de cada una de las mallas sólo hay que resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 1V &= 10k\Omega I_1 - 4k\Omega I_2 \\ 3V &= 15k\Omega I_2 - 4k\Omega I_1 \end{aligned}$$

cuya solución es:

$$\begin{aligned} I_1 &= 0,0002015A \\ I_2 &= 0,0002537A \end{aligned}$$

1.5.1. Cálculo de las intensidades de rama

Pero lo que realmente tiene sentido no son las intensidades de malla sino las de rama, las que pasan por cada uno de los elementos del circuito. A continuación vamos a calcular esas intensidades, esas corrientes de rama.

Si nos fijamos en el circuito de la figura 4, vemos que por las resistencias R_1 , R_2 y R_3 y la fuente A pasa la intensidad $I_1 = 0,0002015A$ mientras que por las resistencias R_5 y R_6 y la fuente C pasa la intensidad $I_2 = 0,0002537A$. Es por esto, que para los elementos anteriores no hay que hacer ninguna consideración o cálculo adicional una vez que se han calculado las corrientes de malla: sabiendo la intensidad de malla, se la de rama.

Sin embargo, si nos fijamos en la figura 5 vemos que por la resistencia R_4 y por la fuente B pasan tanto I_1 como I_2 . **¿Cuál es entonces la intensidad**

real que pasa por esos elementos? La intensidad que pasa por esos elementos se calcula usando I_1 e I_2 . Como I_1 e I_2 atraviesan estos elementos en sentidos contrarios, la intensidad que estamos buscando será la diferencia de las dos e irá en el sentido de la más grande (I_2 en este caso). Por tanto, por la fuente B y por la resistencia R_4 pasa una intensidad de corriente $I_2 - I_1 = 0,000052239A$ en el mismo sentido que I_2 , esto es, de izquierda a derecha.

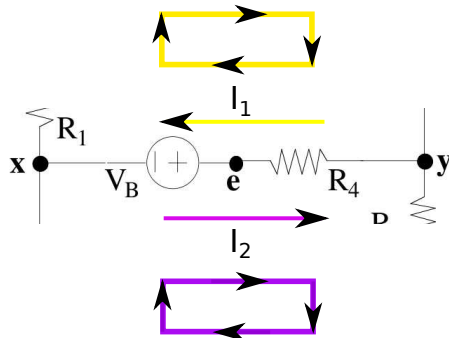


Figura 5: Detalle para calcular la intensidad por la rama donde está R_4 .

1.5.2. Uso de las intensidades de rama para calcular diferencias de potencial

Una vez calculadas las intensidades de rama, las que realmente pasan por cada uno de los elementos (sabemos su valor y su sentido), podemos conocer las diferencias de potencial entre los distintos nudos del circuito. Por ejemplo, puedo calcular la diferencia de potencial entre los nudos **d** e **y** ($V_d - V_y$). Para ello sólo tengo que aplicar la ley de Ohm a la resistencia R_3 :

$$V_d - V_y = R_3 I_1$$

¿Y por qué he escrito $V_d - V_y$ y no $V_y - V_d$? Porque como la intensidad de corriente va desde el nudo **d** al nudo **y**, el potencial (o lo que es lo mismo, la tensión, el voltaje) en el punto **d** es mayor que en el punto **y**. Dijimos en clase que el sentido de la intensidad de corriente me marcaba el movimiento de las cargas positivas. Las cargas positivas siempre van en la misma dirección que el campo eléctrico y el campo eléctrico siempre va hacia potenciales decrecientes (desde donde hay más potencial hasta donde hay menos potencial).

De la misma manera, podemos decir que, como por R_4 la intensidad real que pasa lo hace de izquierda a derecha, el nudo **e** tendrá mayor potencial que el nudo **y**. De nuevo, para calcular la diferencia de potencial anterior sólo tenemos que aplicar la ley de Ohm a la resistencia R_4 .

2. Método de nudos

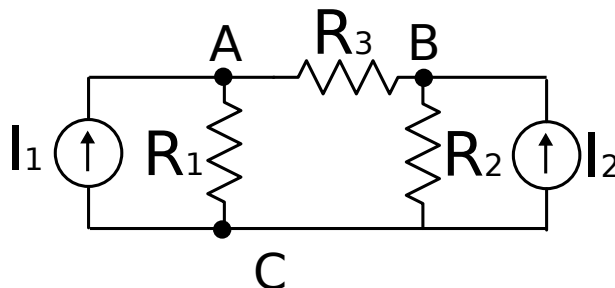


Figura 6: Circuito a resolver por el método de nudos.

Para aprender a utilizar el método de nudos, utilizaremos el circuito de la figura 6 usando los siguientes valores para las resistencias y fuentes: $R_1 = 1k\Omega$, $R_2 = 2k\Omega$, $R_3 = 3k\Omega$, $I_1 = 1A$ e $I_2 = 2A$.

Como hemos visto en clase, a la hora de resolver circuitos utilizando el método de nudos vamos a seguir una serie de pasos que se enumeran a continuación:

1. Buscar el número de nudos esenciales (n) en el circuito.
2. Escoger el nudo de referencia (0V, masa o tierra).
3. Dibujar las intensidades en cada una de las ramas.
4. Relacionar las intensidades de rama con los potenciales de los nudos esenciales.
5. Aplicar a cada nudo esencial la ley de Kirchhoff de nudos.
6. Calcular los potenciales de cada uno de los nudos.

2.1. Buscar el número de nudos esenciales (n) en el circuito.

Para encontrar el número de nudos esenciales en el circuito hay que recordar la definición de nudo esencial como aquel que conecta tres o más elementos. Si nos fijamos en la figura 6, vemos que en el circuito hay **3 nudos esenciales** que se han llamado A , B y C .

2.2. Escoger el nudo de referencia (0V, masa o tierra).

El nudo de referencia es aquel al que vamos a asignar el valor de referencia para la tensión, voltaje o potencial (0V). La elección de este nudo es totalmente arbitraria, esto es, el nudo de referencia puede ser cualquiera de

los nudos esenciales del circuito. Sin embargo, lo más conveniente de cara a facilitar la resolución de los problemas es escoger como nudo de referencia a aquel que conecta un mayor número de elementos. En el circuito de la figura 6 se trata del nudo C . Por tanto, en lo que sigue el nudo C será el nudo de referencia y esto significa que el valor de su potencial será $0V$.

2.3. Dibujar las intensidades en cada una de las ramas.

El siguiente paso consiste en dibujar cada una de las intensidades de rama en el circuito. Para ello, lo primero es saber cuántas ramas esenciales hay en el circuito. Recordamos que una rama esencial es el camino entre dos nudos esenciales consecutivos. En nuestro circuito hay 5 ramas esenciales, 5 caminos entre los tres nudos esenciales. En la figura 7 se han usado distintos colores para cada una de las ramas esenciales del circuito.

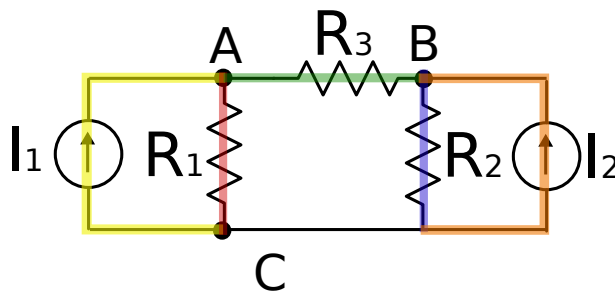


Figura 7: Ramas esenciales en el circuito.

Una vez localizadas las ramas esenciales, hay que dibujar la intensidad que circula por ellas. Por tanto, habrá tantas intensidades distintas como ramas esenciales haya en el circuito. ¿Cómo se dibujan las intensidades, qué sentido tienen? El sentido de la intensidad de rama es totalmente arbitrario. Esto es, como no conocemos las intensidades de rama las dibujamos suponiendo un sentido para ellas (el que queramos). En la figura 8 se han dibujado estas intensidades (I_1 , I_2 , I_{AC} , I_{BC} e I_{AB}). Esta es sólo una posibilidad para realizar este dibujo, cualquier suposición sobre el sentido de estas intensidades es igualmente válida. Una vez resuelto el ejercicio, se calcularán los valores numéricos de estas intensidades y el signo de estos valores numéricos dirán si la suposición que se ha hecho es correcta.

2.4. Relacionar las intensidades de rama con los potenciales de los nudos esenciales.

Para relacionar las intensidades de cada una de las ramas con los potenciales de los nudos esenciales hay que usar las herramientas que hemos

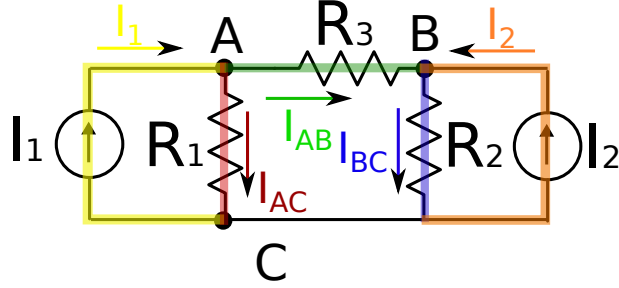


Figura 8: Elección del sentido de las intensidades de rama.

aprendido en este tema (concepto de fuente, ley de Ohm, asociación de resistencias, etc.). En este ejemplo concreto, sólo hay que usar la ley de Ohm en cada una de las resistencias. Esto es:

$$\text{Ley de Ohm en } R_1 \rightarrow I_{AC} = \frac{V_A - V_C}{1k\Omega} = \frac{V_A - 0V}{1k\Omega} \quad (8)$$

$$\text{Ley de Ohm en } R_2 \rightarrow I_{BC} = \frac{V_B - V_C}{2k\Omega} = \frac{V_B - 0V}{2k\Omega} \quad (9)$$

$$\text{Ley de Ohm en } R_3 \rightarrow I_{AB} = \frac{V_A - V_B}{3k\Omega} \quad (10)$$

en las fórmulas anteriores no aparecen ni I_1 ni I_2 porque sus valores son datos en este ejemplo: $I_1 = 1A$ y $I_2 = 2A$.

2.5. Aplicar a cada nudo esencial la ley de Kirchhoff de nudos.

La ley de Kirchhoff de nudos dice que para cada nudo se cumple que:

$$\sum I_{entran} = \sum I_{salen} \quad (11)$$

2.5.1. Nudo A

Si nos fijamos en la figura 8, vemos que al nudo A entra sólo I_1 mientras que salen I_{AC} e I_{AB} . Esto es:

$$\begin{aligned} \sum I_{entran} &= I_1 = 1A \\ \sum I_{salen} = I_{AC} + I_{AB} &= \frac{V_A}{1k\Omega} + \frac{V_A - V_B}{3k\Omega} \end{aligned} \quad (12)$$

donde se han usado las ecuaciones 8 y 10 para sustituir los valores de I_{AC} y de I_{AB} .

Por tanto, si sustituimos las ecuaciones 12 en la ecuación 11 obtenemos:

$$\begin{aligned}\sum I_{entran} &= \sum I_{salen} \\ 1A &= \frac{V_A}{1k\Omega} + \frac{V_A - V_B}{3k\Omega}\end{aligned}\quad (13)$$

2.5.2. Nudo B

Si nos fijamos en la figura 8, vemos que al nudo B entran I_2 e I_{AB} mientras que sólo sale I_{BC} . Esto es:

$$\begin{aligned}\sum I_{entran} &= I_2 + I_{AB} = 2A + \frac{V_A - V_B}{3k\Omega} \\ \sum I_{salen} &= I_{BC} = \frac{V_B}{2k\Omega}\end{aligned}\quad (14)$$

donde se han usado las ecuaciones 9 y 10 para sustituir los valores de I_{BC} y de I_{AB} .

Por tanto, si sustituimos las ecuaciones 14 en la ecuación 11 obtenemos:

$$\begin{aligned}\sum I_{entran} &= \sum I_{salen} \\ 2A + \frac{V_A - V_B}{3k\Omega} &= \frac{V_B}{2k\Omega}\end{aligned}\quad (15)$$

2.6. Calcular los potenciales de cada uno de los nudos.

Finalmente, para calcular los potenciales, tensiones o voltajes de cada uno de los nudos sólo hay que resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}1A &= \frac{V_A}{1k\Omega} + \frac{V_A - V_B}{3k\Omega} \\ 2A &= -\frac{V_A - V_B}{3k\Omega} + \frac{V_B}{2k\Omega}\end{aligned}$$

cuya solución es:

$$\begin{aligned}V_A &= 1500V \\ V_B &= 3000V\end{aligned}$$

Con los potenciales anteriores, y haciendo uso de las ecuaciones 8, 9 y 10 podemos calcular cada una de las intensidades de rama:

$$\begin{aligned}\text{Ley de Ohm en } R_1 \rightarrow I_{AC} &= \frac{V_A - V_C}{1k\Omega} = \frac{1500V}{1k\Omega} = 1,5A \\ \text{Ley de Ohm en } R_2 \rightarrow I_{BC} &= \frac{V_B - V_C}{2k\Omega} = \frac{3000V}{2k\Omega} = 1,5A \\ \text{Ley de Ohm en } R_3 \rightarrow I_{AB} &= \frac{V_A - V_B}{3k\Omega} = \frac{1500V - 3000V}{3k\Omega} = -0,5A\end{aligned}$$

De los signos de las intensidades anteriores puede verse que nuestra suposición sobre el sentido de las intensidades I_{AC} e I_{BC} es correcta puesto que su signo es positivo. En el caso de I_{AB} , su signo negativo nos indica que el sentido que hemos supuesto es incorrecto y que en realidad la intensidad en esa rama va desde el nudo B hasta el nudo A (nosotros la habíamos dibujado desde el A hasta el B).