

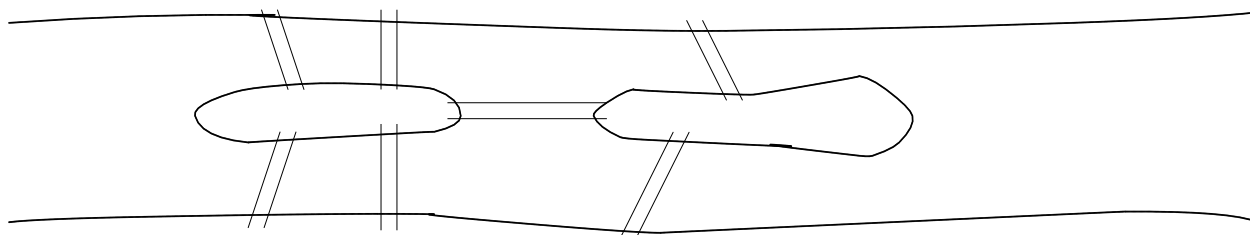
## Capítulo 6

# Introducción a la teoría de grafos

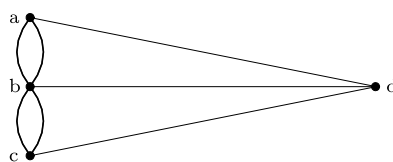
### 6.1. Generalidades sobre grafos

En esta sección vamos a comenzar el estudio de la teoría de Grafos. El inicio de esta teoría tuvo lugar en 1736, en un artículo de Leonhard Euler. El trabajo surgió de un problema conocido como el *problema de los puentes de Königsberg*.

Durante el Siglo XVIII, la ciudad de Königsberg, en Prusia Oriental estaba dividida en cuatro zonas por el río Pregel. Había siete puentes que comunicaban estas regiones, tal y como se muestra en el dibujo. Los habitantes de la ciudad hacían paseos dominicales tratando de encontrar una forma de caminar por la ciudad, cruzando cada puente una sola vez, y regresando al lugar de partida.



Para resolver este problema, Euler representó las cuatro zonas como cuatro puntos, y los puentes como aristas que unen los puntos, tal y como se muestra en la figura.



Más adelante veremos cómo resolver el problema.

Por ahora nos quedamos con la representación que hizo Euler. En ella intervienen cuatro puntos (a los que denominaremos vértices), a saber,  $a, b, c, d$  y siete aristas o lados que conectan algunos de los vértices. Esto da pie a la siguiente definición de grafo.

**Definición 56.** Un grafo  $G$  es un par  $(V, E)$ , donde  $V$  y  $E$  son conjuntos, junto con una aplicación

$$\gamma_G : E \rightarrow \{\{u, v\} : u, v \in V\}.$$

Al conjunto  $V$  se le llama conjunto de vértices; al conjunto  $E$  conjunto de lados o aristas, y a la aplicación  $\gamma_G$  (o simplemente  $\gamma$ ) aplicación de incidencia.

**Ejemplo 6.1.1.** En el caso de los puentes de Königsberg, el grafo correspondiente tiene como conjunto de vértices al conjunto  $V = \{a, b, c, d\}$ , como conjunto de lados el conjunto  $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$  y la aplicación de incidencia es la dada por:

$$\gamma_G(e_1) = \gamma_G(e_2) = \{a, b\} \quad \gamma_G(e_3) = \gamma_G(e_4) = \{b, c\} \quad \gamma_G(e_5) = \{a, d\} \quad \gamma_G(e_6) = \{b, d\} \quad \gamma_G(e_7) = \{c, d\}.$$

Si  $e_1$  y  $e_2$  son dos lados tales que  $\gamma_G(e_1) = \gamma_G(e_2)$ , se dice que son *lados paralelos*.

Un lado tal que  $\gamma_G(e) = \{v\}$  se dice *un lazo*.

Algunos autores, al definir un grafo, no incluyen la posibilidad de que tenga lados paralelos ni lazos. En tal caso, lo que aquí hemos definido como un grafo lo denominan como *multigrafo*.

**Definición 57.** Un grafo dirigido u orientado es un par  $(V, E)$ , donde  $V$  y  $E$  son conjuntos, junto con dos aplicaciones  $s, t : E \rightarrow V$ .

Al conjunto  $V$  se le llama conjunto de vértices, al conjunto  $E$  conjunto de lados, y a las aplicaciones  $s$  y  $t$  aplicaciones dominio y codominio ("source" y "target").

**Definición 58.** Sea  $G = (V, E)$  un grafo con aplicación de incidencia  $\gamma_G$ . Un subgrafo de  $G$  es un nuevo grafo  $G' = (V', E')$  donde  $V' \subseteq V$ ,  $E' \subseteq E$  y se verifica que  $\gamma_{G'}(e) = \gamma_G(e)$  para cualquier  $e \in E'$ .

Si  $G' = (V', E')$  es un subgrafo de un grafo  $G = (V, E)$ , se dice que es un subgrafo completo si dado  $e \in E$  tal que  $\gamma_G(e) \subseteq V'$ , se verifica que  $e \in E'$ . Dicho de otra forma, si tiene todos los lados que tenía  $G$  y que unen vértices de  $V'$ .

#### Observación:

Un subgrafo completo está completamente determinado por el conjunto de vértices. Así, para determinar un subgrafo de un grafo  $G$  en ocasiones explicitaremos únicamente el conjunto de vértices de dicho subgrafo, sobreentendiendo que se trata del subgrafo completo con dicho conjunto de vértices.

**Definición 59.** Sea  $G$  un grafo. Un camino de longitud  $n$  es una sucesión de lados  $e_1 e_2 \cdots e_n$ , junto con una sucesión de vértices  $v_0 v_1 \cdots v_n$  tales que  $\gamma_G(e_i) = \{v_{i-1}, v_i\}$ .

En tal caso se dice que el camino  $e_1 e_2 \cdots e_n$  es un camino del vértice  $v_0$  al vértice  $v_n$ .

Se considera un camino de longitud cero de  $v$  a  $v$  a aquel cuya sucesión de vértices es  $v$  y cuya sucesión de lados es vacía.

Para dar un camino en un grafo, en ocasiones daremos únicamente la sucesión de vértices, y en ocasiones daremos únicamente la sucesión de lados.

Nótese que si  $e_1 e_2 \cdots e_n$  es un camino de  $u$  a  $v$ , entonces  $e_n e_{n-1} \cdots e_2 e_1$  es un camino de  $v$  a  $u$ .

Un camino en el que no aparecen lados repetidos se llama *recorrido*.

Un recorrido en el que no hay vértices repetidos (salvo eventualmente el primero y el último) se llama *camino simple*.

Un camino en el que coinciden el primer y el último vértice se llama *camino cerrado*.

Un recorrido que es a la vez camino cerrado se llama *circuito*.

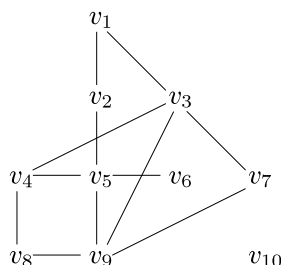
Un circuito que a su vez es camino simple es un *ciclo*.

La siguiente tabla puede ayudar a aclarar estas definiciones.

Vértices repetidos	Aristas repetidas	Abierto	Nombre
No No		No	Camino
	No	No	Camino cerrado
	No	No	Recorrido
	No	No	Circuito
	No	No	Camino simple
	No	No	Ciclo

Por tanto, en un circuito puede haber o puede no haber vértices repetidos. Sin embargo, no puede haber aristas repetidas. Se tiene entonces, por ejemplo, que todo ciclo es un circuito, es un camino cerrado y es un camino.

**Ejemplo 6.1.2.** Consideramos el siguiente grafo:



La sucesión  $v_7v_3v_9v_5v_4v_8v_9v_3$  es un camino de longitud 7 que une  $v_7$  con  $v_6$ . No es recorrido, pues el lado que une  $v_3$  con  $v_9$  aparece dos veces en el camino.

La sucesión  $v_1v_3v_9v_8v_4v_3v_7$  es un camino de longitud 6 que une  $v_1$  con  $v_7$ . Es un recorrido, pues ningún lado se repite. Sin embargo, el camino pasa dos veces por el vértice  $v_3$ . No es por tanto un camino simple.

$v_3v_4v_8v_9$  es un camino simple de longitud 3.

La sucesión  $v_1v_3v_7v_9v_3v_4v_5v_2v_1$  es un camino cerrado de longitud 8. Es además un circuito, pues ningún lado se encuentra repetido. No es un ciclo, ya que el vértice  $v_3$  se repite.

Un ejemplo de ciclo podría ser  $v_1v_2v_5v_9v_7v_3v_1$ .

**Proposición 6.1.1.** Sea  $G$  un grafo. Supongamos que existe un camino de  $u$  a  $v$ . Entonces existe un camino simple de  $u$  a  $v$ .

*Demostración:* Supongamos que el camino es  $u = v_1v_2 \cdots v_n = v$ . Si el camino no es simple, debe haber dos vértices repetidos. Sean estos  $v_i$  y  $v_j$ , con  $i < j$ . En tal caso, se tiene que  $v_1 \cdots v_iv_{j+1} \cdots v_n$  es un camino de  $u$  a  $v$ . Si este camino no fuera simple, repetiríamos el proceso, hasta llegar a un camino simple. ■

**Proposición 6.1.2.** Sea  $G$  un grafo, y sean  $u$  y  $v$  dos vértices distintos. Supongamos que tenemos dos caminos simples distintos de  $u$  a  $v$ . Entonces existe un ciclo en  $G$ .

**Ejemplo 6.1.3.** En el Ejemplo 6.1.2 teníamos un camino de longitud 6 que une  $v_1$  con  $v_7$  ( $v_1v_3v_9v_8v_4v_3v_7$ ). Este camino no es simple, pues el vértice  $v_3$  está repetido. Eliminamos los vértices que se encuentran entre las dos apariciones de  $v_3$  y obtenemos el camino  $v_1v_3v_7$ , que es un camino simple que une  $v_1$  con  $v_7$ .

Por otra parte, tenemos dos caminos simples que unen  $v_3$  con  $v_8$ , como son  $v_3v_4v_8$  y  $v_3v_9v_8$ . A partir de estos dos caminos podemos obtener el ciclo  $v_3v_4v_8v_9v_3$ , recorriendo en primer lugar uno de los caminos que une  $v_3$  con  $v_8$ , y recorriendo a continuación el otro en sentido contrario.

Nótese que si partimos de los caminos simple  $v_3v_4v_8$  y  $v_3v_1v_2v_5v_4v_8$  y repetimos lo hecho en el párrafo precedente obtenemos el camino cerrado  $v_3v_4v_8v_4v_5v_2v_1v_3$  que no es un ciclo, pues el vértice  $v_4$  está repetido (o el lado  $v_4v_8$ ). Sin embargo, la existencia de los dos caminos simples sí nos da la existencia de un ciclo, a saber,  $v_3v_4v_5v_2v_1v_3$ .

A la luz de estos dos ejemplos se deja como ejercicio demostrar la proposición 6.1.2.

**Definición 60.** Sea  $G$  un grafo. Se dice que  $G$  es conexo, si dados  $u$  y  $v$  dos vértices de  $G$  existe al menos un camino de  $u$  a  $v$ .

En general, si  $G$  es un grafo, podemos definir en el conjunto de vértices la relación:

$$uRv \text{ si existe un camino de } u \text{ a } v.$$

Esta relación es de equivalencia, pues:

Es reflexiva ya que todo vértice está unido con él mismo por un camino de longitud cero.

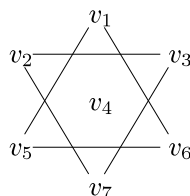
Es simétrica pues si  $e_1e_2 \cdots e_n$  es un camino de  $u$  a  $v$  entonces  $e_n e_{n-1} \cdots e_1$  es un camino de  $v$  a  $u$ .

Es transitiva pues si  $e_1e_2 \cdots e_n$  es un camino de  $u$  a  $v$  y  $e'_1e'_2 \cdots e'_m$  es un camino de  $v$  a  $w$ , entonces  $e_1e_2 \cdots e_n e'_1e'_2 \cdots e'_m$  es un camino de  $u$  a  $w$ .

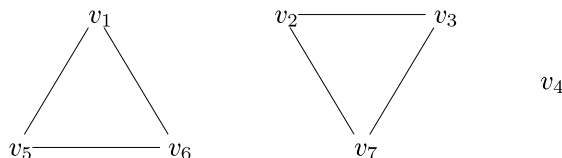
Se tiene entonces que un grafo es conexo si el conjunto cociente por la relación que acabamos de definir tiene un solo elemento.

A partir de esta relación, podemos considerar, para cada clase de equivalencia, el subgrafo (completo) determinado por los vértices de dicha clase de equivalencia. Cada uno de estos grafos es lo que se denomina una *componente conexa* de  $G$ .

**Ejemplo 6.1.4.** Consideramos el siguiente grafo:



tiene tres componentes conexas. Éstas son



## 6.2. Matrices asociadas a grafos

En esta sección vamos a ver cómo podemos representar los grafos finitos mediante matrices. A partir de estas matrices podremos obtener propiedades sobre los grafos.

**Definición 61.** Sea  $G$  un grafo cuyo conjunto de vértices es  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ . Se define su matriz de adyacencia como la matriz  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{N})$  cuyo coeficiente  $(i, j)$  es igual al número de lados  $e$  que unen  $v_i$  con  $v_j$  (es decir, que verifican que  $f(e) = \{v_i, v_j\}$ ).

### Observaciones:

1. La matriz de adyacencia de un grafo es una matriz simétrica, pues cada lado que une  $v_i$  con  $v_j$  une también  $v_j$  con  $v_i$ .
2. Si tomáramos otra ordenación de los vértices, la matriz de adyacencia es diferente. Por tanto, un grafo puede tener varias matrices de adyacencia. En general, si  $A$  y  $C$  son dos matrices de adyacencia de un mismo grafo, entonces existe una matriz de permutación  $P$  tal que  $P^{-1}CP = A$  (una matriz de permutación es una matriz que tiene en cada fila y en cada columna un coeficiente que vale "uno" y el resto toman el valor "cero". Es una matriz que se obtiene a partir de la matriz identidad realizando intercambio de filas y/o columnas).

3. La existencia de lados paralelos se traduce en la matriz de adyacencia en la existencia de coeficientes mayores que 1. De la misma forma, la existencia de lazos se traduce en que algún elemento de la diagonal principal de la matriz de adyacencia es distinto de cero.
4. Si tenemos un grafo dirigido, también podemos definir su matriz de adyacencia. En este caso, el coeficiente  $a_{ij}$  es el número de lados que verifican que  $s(e) = v_i$  y  $t(e) = v_j$ . En este caso, la matriz no tiene porqué ser simétrica.
5. La matriz de adyacencia de un grafo determina a éste. Además, toda matriz cuadrada con coeficientes en  $\mathbb{N}$  es la matriz de adyacencia de un grafo (dirigido o no) finito. Podríamos entonces tomar como definición de grafo la de una matriz cuadrada con coeficientes en  $\mathbb{N}$ .

El siguiente resultado nos muestra la importancia de las matrices de adyacencia.

**Proposición 6.2.1.** *Sea  $G$  un grafo cuyo conjunto de vértices es  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  y sea  $A$  su matriz de adyacencia. Entonces el coeficiente  $(i, j)$  de la matriz  $A^n$  es igual al número de caminos de longitud  $n$  que unen  $v_i$  con  $v_j$ .*

*Demostración:* Hagamos la demostración por inducción. Para  $n = 1$  el resultado no es más que la definición de la matriz de adyacencia.

Supongamos que el resultado es cierto para  $n - 1$  y demostrémoslo para  $n$ .

Sea entonces  $B = A^{n-1}$  y  $C = A^n$ . Queremos probar que  $c_{ij}$  es el número de caminos de longitud  $n$  que unen  $v_i$  con  $v_j$ . Es claro que  $c_{ij} = \sum_{k=1}^n b_{ik} a_{kj}$ .

Todos los caminos de longitud  $n$  entre  $v_i$  y  $v_j$  se obtienen añadiendo a un camino de longitud  $n - 1$  entre  $v_i$  y  $v$  el vértice  $v_j$ ; y esto podremos hacerlo únicamente cuando tengamos un lado que incide en los vértices  $v$  y  $v_j$ . Por tanto, para contar los caminos de longitud  $n$  entre  $v_i$  y  $v_j$  necesitamos, para cada vértice  $v_k : k = 1, 2, \dots, n$  contar los caminos de longitud  $n - 1$  entre  $v_i$  y  $v_k$ , y por cada uno de estos, contar los lados (caminos de longitud 1) entre  $v_k$  y  $v_j$ . Luego, realizar la suma de los resultados obtenidos para cada  $k$ . Es decir, estamos diciendo que el número de caminos de longitud  $n$  entre  $v_i$  y  $v_j$  es:

$$b_{i1}a_{1j} + b_{i2}a_{2j} + \dots + b_{in}a_{nj} = c_{ij}$$

como queríamos.

Nótese que este razonamiento vale tanto si el grafo  $G$  es dirigido como si no lo es. ■

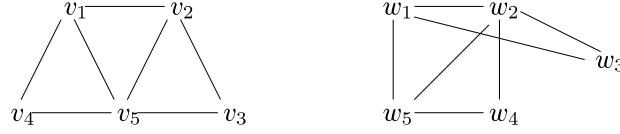
**Definición 62.** *Sea  $G$  un grafo cuyo conjunto de vértices es  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  y cuyo conjunto de lados es  $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ . Se define la matriz de incidencia del grafo  $G$  como una matriz  $n \times m$  que tiene en la posición  $(i, j)$  un 1 si  $v_i \in \gamma_G(e_j)$  y 0 en otro caso.*

#### Observación:

1. Si tomamos otra ordenación de los vértices y/o lados, la matriz de incidencia puede ser diferente. En este caso, dos matrices de incidencia corresponden al mismo grafo si se puede pasar de una a otra mediante operaciones elementales por filas y/o columnas Tipo I (intercambio de filas y/o columnas).
2. El que un grafo tenga lados paralelos se traduce en que tenga dos columnas iguales en la matriz de incidencia, mientras que los lazos se traducen en filas con un único coeficiente "uno".
3. Si el grafo es dirigido, se puede definir también la matriz de incidencia. En este caso, el coeficiente  $(i, j)$  puede también tomar el valor  $-1$  (si el lado  $e_j$  parte del vértice  $v_i$ ). En tal caso, el grafo no podría tener lazos.

### 6.3. Isomorfismo de grafos

Consideremos los siguientes grafos

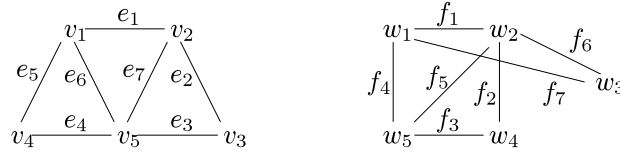


En una primera observación apreciamos dos grafos diferentes. Sin embargo, si profundizamos algo más encontramos muchas semejanzas entre ellos. Por ejemplo, ambos tienen igual número de vértices e igual número de lados. Existe un vértice en cada uno de ellos ( $v_5$  en el primero y  $w_2$  en el segundo) que está unidos al resto de vértices.

Siguiendo en esta línea, vemos que podemos renombrar los vértices del segundo grafo  $w_1 \mapsto v'_1$ ,  $w_2 \mapsto v'_5$ ,  $w_3 \mapsto v'_4$ ,  $w_4 \mapsto v'_3$  y  $w_5 \mapsto v'_2$ , y tenemos que por cada lado que une dos vértices  $v_i$  y  $v_j$  en el primer grafo tenemos un lado que une los vértices  $v'_i$  y  $v'_j$  en el segundo.

Vemos entonces que ambos grafos podemos considerarlos iguales. Lo único que los diferencia es el nombre que le hemos dado a los vértices (y a los lados) y la forma en que los hemos representado. Pero todo lo que digamos sobre un grafo es válido para el otro.

Para precisar un poco más lo que hemos hecho, vamos a ponerle nombre a los lados:



Entonces, lo que tenemos son dos biyecciones  $h_V : V_G \rightarrow V_{G'}$  y  $h_E : E_G \rightarrow E_{G'}$ , que en este caso serían:

$$\begin{array}{ll} h_V & h_E \\ v_1 \mapsto w_1 & e_1 \mapsto f_4 \\ v_2 \mapsto w_5 & e_2 \mapsto f_3 \\ v_3 \mapsto w_4 & e_3 \mapsto f_2 \\ v_4 \mapsto w_3 & e_4 \mapsto f_6 \\ v_5 \mapsto w_2 & e_5 \mapsto f_7 \\ & e_6 \mapsto f_1 \\ & e_7 \mapsto f_5 \end{array}$$

verificando que si  $\gamma_G(e) = \{u, v\}$  entonces  $\gamma_{G'}(h_E(e)) = \{h_V(u), h_V(v)\}$ .

Nótese que en este caso, la aplicación  $h_V$  determina totalmente a la aplicación  $h_E$ .

Esto da pie a la siguiente definición:

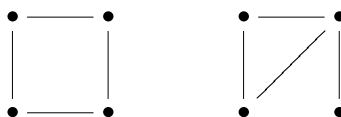
**Definición 63.** Sean  $G = (V, E)$  y  $G' = (V', E')$  dos grafos con aplicaciones de incidencia  $\gamma_G$  y  $\gamma_{G'}$ . Se dice que  $G$  y  $G'$  son isomorfos si existen dos biyecciones  $h_V : V \rightarrow V'$  y  $h_E : E \rightarrow E'$  tales que para cada lado  $e \in E$  se verifica que  $\gamma_{G'}(h_E(e)) = \{h_V(u), h_V(v)\}$  donde  $\{u, v\} = \gamma_G(e)$ .

En tal caso, diremos que las aplicaciones  $h_V$  y  $h_E$  forman un isomorfismo de  $G$  a  $G'$ .

#### Observación:

1. Si los grafos no tienen lados paralelos, entonces la aplicación  $h_V$  determina de forma única a la aplicación  $h_E$ . De ahí, que normalmente, para dar un isomorfismo de grafos se da únicamente como actúa sobre los vértices.
2. Si  $h = (h_V, h_E)$  es un isomorfismo de  $G$  a  $G'$  entonces  $((h_V)^{-1}, (h_E)^{-1})$  es un isomorfismo de  $G'$  a  $G$ .

En general, no es fácil determinar cuando dos grafos son isomorfos o no lo son. Claramente, si dos grafos son isomorfos deben tener igual número de vértices e igual número de lados. Sin embargo, esto no es suficiente, como pone de manifiesto el siguiente ejemplo.



pues ambos tiene cuatro vértices y cuatro lados, y sin embargo no son isomorfos (¿por qué?).

Vemos que tenemos dos números asociados a cada grafo (número de vértices y número de lados) que deben coincidir para que los grafos sean isomorfos. Es lo que se llama *invariante por isomorfismo*. Obviamente, la coincidencia de estos números no implica que los grafos sean isomorfos.

**Definición 64.** Una propiedad se dice *invariante por isomorfismo* si dados dos grafos isomorfos  $G$  y  $G'$ , uno satisface la propiedad si, y sólo si, la satisface el otro.

**Definición 65.** Sea  $G$  un grafo y  $v$  un vértice de  $G$ . Se define el *grado* de  $v$ , y lo denotaremos como  $gr(v)$ , como el número de lados (no lazos) de  $G$  que son incidentes en  $v$  más 2 veces el número de lazos incidentes en  $v$ .

Denotaremos por  $D_k(G)$  como el número de vértices de  $V$  que tienen grado igual a  $k$ . A partir de esto, podemos construir la sucesión

$$D_0(G), D_1(G), D_2(G), \dots, D_k(G), \dots$$

que llamaremos sucesión de grados.

Nótese que si  $G$  es un grafo con  $n$  vértices  $v_1, v_2, \dots, v_n$  y  $l$  lados entonces

$$gr(v_1) + gr(v_2) + \dots + gr(v_n) = 2l,$$

pues al contar todos los lados que inciden en todos los vértices (el miembro de la izquierda) estamos contando cada lado 2 veces (por cada uno de los vértices en los que incide)

### Ejemplo 6.3.1.

1. En los grafos siguientes



se tiene que  $gr(v_3) = gr(v_4) = 2$ ,  $gr(v_1) = gr(v_2) = 3$ ,  $gr(v_5) = 4$ . Por tanto,  $D_0(G) = D_1(G) = 0$ ,  $D_2(G) = 2$ ,  $D_3(G) = 2$ ,  $D_4(G) = 1$ . La sucesión de grados es por tanto

$$0, 0, 2, 2, 1, 0, 0, \dots$$

Para el otro grafo se tiene que  $gr(w_3) = gr(w_4) = 2$ ,  $gr(w_1) = gr(w_5) = 3$ ,  $gr(w_2) = 4$ . La sucesión de grados resulta ser la misma que en el grafo anterior.

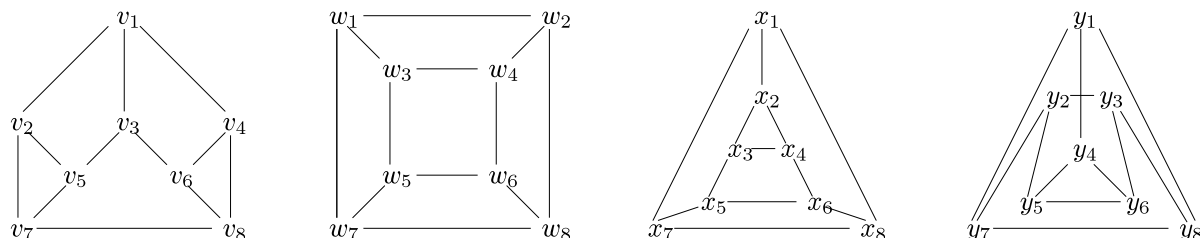
2. Las sucesiones de grados de los grafos



son respectivamente  $0, 0, 4, 0, 0, \dots$  y  $0, 1, 2, 1, 0, \dots$

Es fácil comprobar que si  $(h_V, h_E) : G \rightarrow G'$  es un isomorfismo de grafos y  $v \in V$  entonces  $gr(v) = gr(h_V(v))$ , de donde deducimos que las sucesiones de grados de dos grafos isomorfos son iguales. El recíproco no es cierto, como podemos ver en el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 6.3.2.** Consideramos los siguientes grafos:



En los cuatro grafos la sucesión de grados es la misma, pues todos los vértices tienen grado 3 (es decir, la sucesión de grados es en los cuatro casos  $0, 0, 0, 8, 0, \dots$ ). Sin embargo, el primero, tercero y cuarto son isomorfos y los isomorfismos vienen dados por

$$\begin{aligned} v_1 &\mapsto x_5 \mapsto y_2 \\ v_2 &\mapsto x_7 \mapsto y_7 \\ v_3 &\mapsto x_6 \mapsto y_3 \\ v_4 &\mapsto x_3 \mapsto y_5 \\ v_5 &\mapsto x_8 \mapsto y_8 \\ v_6 &\mapsto x_4 \mapsto y_6 \\ v_7 &\mapsto x_1 \mapsto y_1 \\ v_8 &\mapsto x_2 \mapsto y_4 \end{aligned}$$

mientras que el segundo no es isomorfo a ninguno de los otros tres, ya que en este segundo no hay ciclos de longitud 3, mientras que en los otros sí los hay ( $v_2v_5v_7$  por ejemplo).

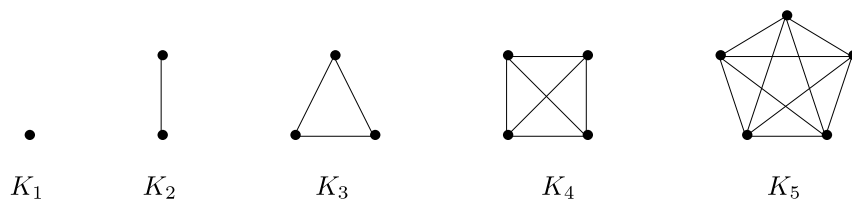
Los cuatro grafos que intervienen en este ejemplo tienen una peculiaridad, y es que todos los vértices tienen el mismo grado. Estos grafos reciben el nombre de *grafos regulares* de grado  $n$  (si  $n$  es el grado común de todos los vértices). En el ejemplo precedente, los cuatro grafos son grafos regulares de grado 3. Un ejemplo importante de grafos regulares son los grafos completos.

**Definición 66.** Se llama *grafo completo* de  $n$  vértices al grafo (con  $n$  vértices) que no tiene vértices ni lados paralelos, y dados dos vértices hay un lado que los une. Dicho de otra forma, su matriz de adyacencia toma el valor "cero" en todos los elementos de la diagonal y el valor "uno" en el resto.

Dicho grafo se suele denotar como  $K_n$ .

**Ejemplo 6.3.3.**

Veamos cuales son los cinco primeros grafos completos:





## 6.4. Sucesiones gráficas.

Sea  $G$  un grafo sin lazos ni lados paralelos, cuyo conjunto de vértices es  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ . Para cada  $i$  entre 1 y  $n$ , sea  $d_i = gr(v_i)$ . Tenemos de esta forma una secuencia  $d_1, d_2, \dots, d_n$ , que se corresponde con los grados de los vértices del grafo  $G$ .

Nos planteamos si dada una lista de  $n$  números naturales  $d_1, d_2, \dots, d_n$ , existe algún grafo (sin lazos ni lados paralelos) con  $n$  vértices tal que los grados de esos vértices sean estos números naturales. Y en caso de que exista, cómo podríamos dar un grafo con tales características.

Antes de responder a estas cuestiones, vamos a introducir un poco de nomenclatura.

**Definición 67.** Sean  $d_1, d_2, \dots, d_n \in \mathbb{N}$ . Decimos que la sucesión  $d_1, d_2, \dots, d_n$  es una sucesión gráfica si existe un grafo  $G$  sin lazos ni lados paralelos, con conjunto de vértices  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  y tal que  $d_i = gr(v_i)$ .

Si  $d_1, d_2, \dots, d_n$  es una sucesión gráfica, y  $G$  es un grafo con  $n$  vértices cuyos grados son los términos de la sucesión, diremos que  $G$  es una realización de la sucesión  $d_1, d_2, \dots, d_n$ .

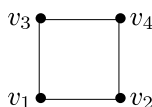
### Ejemplo 6.4.1.

1. La sucesión de  $n$  términos  $0, 0, \dots, 0$  es una sucesión gráfica. Podemos considerar un grafo cuyo conjunto de vértices tiene  $n$  elementos, y cuyo conjunto de lados es el conjunto vacío.
2. La sucesión  $1, 1, 1, 1, 1, 1$  es una sucesión gráfica. Podemos verlo con el siguiente grafo.



En general, cualquier sucesión con un número par de unos es una sucesión gráfica.

3. La sucesión  $2, 2, 2, 2$  es una sucesión gráfica. El siguiente grafo es una realización de dicha sucesión.



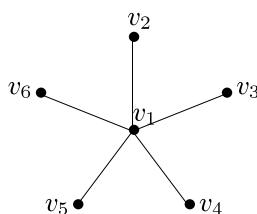
4. La sucesión  $4, 3, 3, 2, 2, 1$  no es una sucesión gráfica. Si esos fueran los grados de los vértices de un grafo, tendríamos que la suma de los grados de los vértices valdría 15, y eso es imposible, pues sabemos que esa suma es igual al doble del número de lados (lo que supondría que el grafo tiene siete lados y medio).
5. La sucesión  $5, 4, 3, 2, 2$  no es una sucesión gráfica. De serlo, tendríamos un grafo (sin lazos ni lados paralelos) con cinco vértices, y un vértice de grado 5. Pero el grado de un vértice no puede ser mayor que 4, pues como mucho, un vértice puede estar unido a los cuatro restantes.

Los dos últimos ejemplos nos dan dos condiciones necesarias para que una sucesión sea gráfica. Por una parte, la suma de los elementos de la sucesión debe ser un número par, y por otra, cualquier elemento de la sucesión debe ser menor que el número de términos.

Sin embargo, estas dos condiciones no son suficientes. Por ejemplo, consideramos la sucesión  $5, 4, 4, 2, 2, 1$ . Vamos a ver que no es una sucesión gráfica.

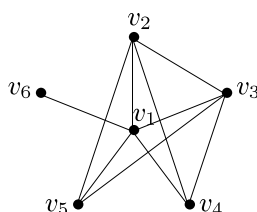
Vemos que la suma de los términos de la sucesión es 18, que es un número par. Además, hay seis términos y el mayor de ellos vale 5. Por tanto, las dos condiciones que hemos visto son satisfechas por esta sucesión.

Supongamos que hubiera un grafo con seis vértices cuyos grados fueran los elementos de la sucesión. Sean estos vértices  $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$ . Hay uno de los vértices cuyo grado es cinco, luego este vértice debe estar unido a los cinco restantes. Suponemos que dicho vértice es  $v_1$ . Es decir, tendríamos:



También tiene que haber un vértice de grado 1. Supongamos que es, por ejemplo,  $v_6$ . Este vértice está unido a  $v_1$ , luego ya no puede unirse a ninguno más.

Por último, tenemos dos vértices de grado 4. Por ejemplo,  $v_2$  y  $v_3$ . Entonces, estos deben unirse a 3 vértices más. Como no pueden unirse a  $v_6$ , las únicas posibilidades son, que  $v_2$  esté unido a  $v_3$ ,  $v_4$  y  $v_5$  y que  $v_3$  esté unido a  $v_2$ ,  $v_4$  y  $v_5$ . Tenemos entonces:



Y vemos que los vértices  $v_4$  y  $v_5$  tienen grado 3, cuando deberían tener grado 2.

De esta forma hemos visto que la sucesión 5, 4, 4, 2, 2, 1 no es gráfica. Pero esta forma de ir probando a ver si encontramos o no un grafo con las condiciones requeridas parece no ser muy práctica.

Lo que vamos a hacer es dar un método más preciso para determinar si una sucesión dada es una sucesión gráfica. Para esto, necesitamos el siguiente resultado.

**Teorema 6.4.1** (Havel-Hakimi). *Sea  $d_1, d_2, \dots, d_n$  una sucesión de números naturales. Supongamos que están ordenados en orden decreciente, es decir,  $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n$  y que  $d_1 < n$ .*

*Entonces esta sucesión es gráfica si, y sólo si, lo es la sucesión  $d_2 - 1, \dots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, \dots, d_n$ .*

#### Observación:

La condición  $d_1 < n$  lo que nos dice es que no puede haber un vértice cuyo grado sea mayor o igual al número de vértices. Sabemos que si esto no se da, la sucesión no es gráfica, luego esto no supone ninguna restricción.

Podríamos comprobar en un principio si la suma  $d_1 + \dots + d_n$  es un número par, pues sabemos que si esa suma es impar la sucesión no es gráfica. Pero no es necesario realizar esa comprobación, pues en el proceso que vamos a dar, detectaremos esa circunstancia.

#### Demostración:

Demostremos en primer lugar que si existe un grafo  $G$  tal que los grados de sus vértices son  $d_2 - 1, \dots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, \dots, d_n$ , entonces existe un grafo  $G'$  tal que los grados de sus vértices son  $d_1, d_2, \dots, d_n$ .

Sea  $G$  un tal grafo, y supongamos que el conjunto de vértices de  $G$  es  $\{v_1, v_2, \dots, v_{d_1}, v_{d_1+1}, \dots, v_{n-1}\}$ , y que

$$gr(v_i) = \begin{cases} d_{i+1} - 1 & \text{si } 1 \leq i \leq d_1 \\ d_{i+1} & \text{si } d_1 < i \leq n-1 \end{cases}$$

es decir,

$$gr(v_1) = d_2 - 1; \quad gr(v_2) = d_3 - 1; \quad \dots \quad gr(v_{d_1}) = d_{d_1+1} - 1; \quad gr(v_{d_1+1}) = d_{d_1+2}; \quad \dots \quad gr(v_{n-1}) = d_n$$

Formamos entonces el grafo  $G'$  añadiendo un nuevo vértice  $v_0$  al grafo  $G$ , y los lados  $\{v_0, v_1\}, \{v_0, v_2\}, \dots, \{v_0, v_{d_1}\}$ . Entonces:

$gr(v_0) = d_1$ , pues  $v_0$  está unido a los vértices  $v_1, v_2, \dots, v_{d_1}$ .

El grado de los vértices  $v_1, v_2, \dots, v_{d_1}$  ha aumentado en uno, pues cada uno de ellos se ha unido al vértice  $v_0$ . Por tanto,  $gr(v_1) = d_2$ ,  $gr(v_2) = d_3, \dots, gr(v_{d_1}) = d_{d_1+1}$ .

El grado de los vértices  $v_{d_1+1}, \dots, v_{n-1}$  no ha variado.

Por tanto, tenemos:

Vértice	$v_0$	$v_1$	$\dots$	$v_{d_1}$	$v_{d_1+1}$	$\dots$	$v_{n-1}$
Grado	$d_1$	$d_2$	$\dots$	$d_{d_1+1}$	$d_{d_1+2}$	$\dots$	$d_n$

Es decir, hemos encontrado un grafo para el que los grados de sus vértices son los términos de la sucesión  $d_1, d_2, \dots, d_n$ .

Recíprocamente, supongamos que tenemos un grafo  $G$  con conjunto de vértices  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  tal que  $gr(v_i) = d_i$ .

Esto significa que el vértice  $v_1$  está unido a  $d_1$  vértices. Vamos a analizar en primer lugar el caso en que estos vértices son  $v_2, v_3, \dots, v_{d_1+1}$ .

Entonces, si eliminamos del grafo  $G$  el vértice  $v_1$  y todos los lados que inciden en  $v_1$ , obtenemos un nuevo grafo cuyo conjunto de vértices es  $\{v_2, \dots, v_n\}$ , y en el que el grado de los vértices  $v_2, \dots, v_{d_1+1}$  ha disminuido en uno (pues se ha eliminado el lado que lo une a  $v_1$ ), y el grado de los vértices restantes se mantiene igual. Por tanto, hemos construido un grafo  $G'$ , con  $n - 1$  vértices, y cuyos grados son  $d_2 - 1, \dots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, \dots, d_n$ .

Nos situamos ahora en el caso de que el conjunto de vértices a los que está unido el vértice  $v_1$  no es el conjunto  $\{v_2, \dots, v_{d_1+1}\}$ . En este caso, no podemos repetir el razonamiento que acabamos de hacer.

Lo que vamos a hacer es transformar el grafo  $G$  en otro grafo con los mismos vértices, con los mismos grados de cada vértice, pero que los vértices a los que está unido el grafo  $v_1$  sean los vértices  $v_2, \dots, v_{d_1+1}$ .

Puesto que el conjunto de vértices a los que está unido  $v_1$  no es el conjunto  $\{v_2, \dots, v_{d_1+1}\}$ , debe haber algún vértice de ese conjunto al que no está unido  $v_1$ , y debe haber algún vértice del conjunto  $\{v_{d_1+2}, \dots, v_n\}$  al que sí esté unido  $v_1$ .

Sean estos vértices  $v_i$  y  $v_j$  respectivamente. Tenemos:

- ▮ Un vértice  $v_i$ , con  $2 \leq i \leq d_1 + 1$  que no está unido por un lado al vértice  $v_1$  (no existe el lado  $\{v_1, v_i\}$ ).
- ▮ Un vértice  $v_j$ , con  $d_1 + 2 \leq j \leq n$  que está unido al vértice  $v_1$  (tenemos el lado  $\{v_1, v_j\}$ ).
- ▮ El grado de  $v_i$  es mayor o igual que el grado de  $v_j$ .

Por lo que acabamos de decir, debe haber un vértice  $v$  que esté unido a  $v_i$  pero que no esté unido a  $v_j$  (de no ser así, es decir, si todo vértice al que está unido  $v_i$  estuviera unido también a  $v_j$ , y puesto que además  $v_j$  está unido a  $v_1$ , el grado de  $v_j$  sería mayor que el de  $v_i$ ).

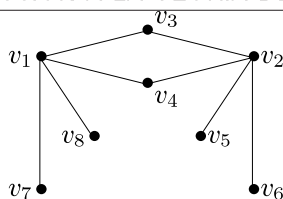
Tenemos entonces en nuestro grafo  $G$  los lados  $\{v_1, v_j\}$  y  $\{v_i, v\}$ , mientras que no están los lados  $\{v_1, v_i\}$  ni  $\{v_j, v\}$ .

Eliminamos estos dos lados ( $\{v_1, v_j\}$  y  $\{v_i, v\}$ ) del grafo  $G$ , y le añadimos los lados  $\{v_1, v_i\}$  y  $\{v_j, v\}$ . De esta forma, conseguimos un nuevo grafo  $G'$  con los mismos vértices que el grafo  $G$ , estos vértices tienen los mismos grados que en el grafo  $G$ , y ahora, el vértice  $v_1$  está unido en  $G'$  a todos los vértices del conjunto  $\{v_2, \dots, v_{d_1+1}\}$  que estaban unidos en el grafo  $G$  a  $v_1$ , y además está unido al vértice  $v_i$  (que está en ese mismo conjunto).

Esto que hemos hecho lo repetimos mientras queden vértices del conjunto  $\{v_2, v_3, \dots, v_{d_1+1}\}$  que no están unidos a  $v_1$ . Cuando esto ya no ocurra, procedemos a eliminar el vértice  $v_1$  y todos los lados que inciden en él.

■

**Ejemplo 6.4.2.** *Vamos a ilustrar con un ejemplo el razonamiento que hemos seguido en la demostración anterior. Partimos del grafo  $G$*



Y vemos que  $gr(v_1) = gr(v_2) = 4$ ,  $gr(v_3) = gr(v_4) = 2$ ,  $gr(v_5) = gr(v_6) = gr(v_7) = gr(v_8) = 1$ . Por tanto, la sucesión  $4, 4, 2, 2, 1, 1, 1, 1$  es una sucesión gráfica.

Vamos a dar un grafo con siete vértices, cuyos grados serán  $3, 1, 1, 0, 1, 1, 1$ .

Vemos en primer lugar que el vértice  $v_1$  está unido a los vértices  $v_3$ ,  $v_4$ ,  $v_7$  y  $v_8$ . Transformamos este grafo en otro con el mismo conjunto de vértices, y los mismos grados, pero de forma que los vértices adyacentes a  $v_1$  sean  $v_2$ ,  $v_3$ ,  $v_4$  y  $v_5$ .

De los vértices adyacentes a  $v_1$  sólo hay dos del conjunto  $\{v_2, v_3, v_4, v_5\}$ . Tomamos un vértice de este conjunto que no esté unido por un lado a  $v_1$  (por ejemplo, tomamos  $v_2$ ), y un vértice que no esté en ese conjunto y que sea adyacente a  $v_1$ , por ejemplo  $v_7$  (es decir, siguiendo la notación que hemos usado en la demostración,  $i = 2$  y  $j = 7$ ).

Buscamos un vértice  $v$  que sea adyacente a  $v_2$  y no lo sea a  $v_7$ . Por ejemplo,  $v = v_5$ .

Eliminamos los lados  $\{v_1, v_7\}$  y  $\{v_2, v_5\}$ , y añadimos  $\{v_1, v_2\}$  y  $\{v_5, v_7\}$ . En el dibujo siguiente representamos los lados que eliminamos con línea discontinua, y los lados que añadimos con trazo doble.



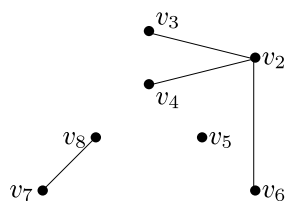
Y ahora tenemos un grafo con los mismos vértices que el de partida, cada vértice tiene el mismo grado, pero el vértice  $v_1$  está unido a tres vértices del conjunto  $\{v_2, v_3, v_4, v_5\}$ . Concretamente, a  $v_2$ ,  $v_3$  y  $v_4$ . Y está unido a un vértice de fuera de ese conjunto ( $v_8$ ). Como el vértice que falta del conjunto  $\{v_2, v_3, v_4, v_5\}$  tiene el mismo grado que el vértice  $v_8$  ahora no sería necesario realizar ningún cambio (sólo intercambiar los vértices  $v_8$  y  $v_5$ ). Pero vamos a proceder tal y como hemos dicho en la demostración.

Entonces, eliminamos los lados  $\{v_1, v_8\}$  y  $\{v_5, v_7\}$ , y añadimos dos lados nuevos, a saber,  $\{v_1, v_5\}$  y  $\{v_7, v_8\}$ .



Y así hemos conseguido un grafo con el mismo conjunto de vértices que el vértice  $G$ , cada vértice tiene el mismo grado que en el grafo  $G$ , pero ahora, el vértice  $v_1$  está unido a los vértices  $v_2$ ,  $v_3$ ,  $v_4$  y  $v_5$ .

Si ahora suprimimos del grafo  $G$  el vértice  $v_1$ , y todos los lados que inciden en  $v_1$  nos queda el grafo



*Y obtenemos un grafo con un vértice menos, y los grados de los vértices son 3, 1, 1, 0, 1, 1, 1*

Basándonos en el teorema, podemos determinar fácilmente si una sucesión es o no gráfica.

Para esto, partimos de una sucesión  $d_1, d_2, \dots, d_n$ . Si sus elementos no están ordenados, los ordenamos de mayor a menor, así que supondremos que se tiene que  $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n$ .

A partir de esta sucesión formamos la sucesión  $d_2 - 1, \dots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, \dots, d_n$ . Esta sucesión se obtiene en dos etapas: En primer lugar, eliminamos el primer término. En segundo lugar, a los  $d_1$  términos siguientes le restamos 1.

Si la respuesta a si esta sucesión es o no gráfica la conocemos, entonces sabremos si  $d_1, \dots, d_n$  es gráfica. Caso de no conocerla, repetimos el proceso para esta nueva sucesión.

Como en cada paso vamos disminuyendo, tanto el tamaño de la sucesión como el valor de sus términos, en un número finito de pasos terminaremos.

### Ejemplo 6.4.3.

1. Consideramos la sucesión 2, 2, 2, 2, que sabemos que es gráfica. Vamos a comprobarlo usando el método aquí descrito.

*Como están ordenados los elementos, formamos la nueva sucesión eliminando el primer 2, y restando 1 a los dos términos siguientes. Tenemos entonces la sucesión  $(2 - 1), (2 - 1), 2$ , es decir, 1, 1, 2. Esta es la nueva sucesión que tenemos que estudiar si es gráfica.*

*La ordenamos (nos queda 2, 1, 1). Eliminamos el primer término (tenemos así 1, 1) y a los dos términos siguientes, le restamos uno (y llegamos a la sucesión 0, 0).*

*Esta sucesión sabemos que es gráfica, como ya hemos visto anteriormente.*

2. Tomamos ahora la sucesión 5, 4, 4, 2, 2, 1, que sabemos que no es gráfica. Vamos a comprobarlo usando el método que acabamos de describir.

5	4	4	2	2	1	<i>Eliminamos el 5 y restamos uno a los 5 términos siguientes.</i>
	3	3	1	1	0	<i>Están ordenados. Eliminamos el 3 y restamos uno a los 3 términos siguientes.</i>
		2	0	0	0	<i>Eliminamos el 2 y restamos uno a los 2 términos siguientes.</i>
			-1	-1	0	

*Y hemos llegado a una sucesión que no es gráfica, pues no puede haber vértices con grado igual a -1. Por tanto, la sucesión de partida no puede ser gráfica.*

3. Sea ahora la sucesión 4, 3, 3, 2, 2, 1, que sabemos que no es gráfica pues la suma de sus términos es un número impar. Vamos a comprobarlo ahora basándonos en el teorema 6.4.1.

4	3	3	2	2	1	<i>Eliminamos el 4 y restamos uno a los 4 términos siguientes.</i>
	2	2	1	1	1	<i>Eliminamos el 2 y restamos uno a los 2 términos siguientes.</i>
		1	0	1	1	<i>Reordenamos.</i>
		1	1	1	0	<i>Eliminamos el primer 1 y restamos uno al siguiente término.</i>
			0	1	0	<i>Reordenamos.</i>
			1	0	0	<i>Eliminamos el 1 y restamos uno al siguiente término.</i>
				-1	0	

*Y vemos como nos ha vuelto a aparecer un -1.*

*Consideramos la sucesión 4, 4, 3, 2, 2, 2, 1. Nos planteamos si es o no una sucesión gráfica.*

4	4	3	2	2	2	1	<i>Eliminamos el 4 y restamos uno a los 4 términos siguientes.</i>
	3	2	1	1	2	1	<i>Reordenamos.</i>
	3	2	2	1	1	1	<i>Eliminamos el 3 y restamos uno a los 3 términos siguientes.</i>
		1	1	0	1	1	<i>Reordenamos.</i>
		1	1	1	1	0	<i>Eliminamos el 1 y restamos uno al término siguiente.</i>
			0	1	1	0	<i>Reordenamos.</i>
			1	1	0	0	<i>Eliminamos el 1 y restamos uno al siguiente término.</i>
				0	0	0	

*Y al llegar a una sucesión de ceros, deducimos que la sucesión de partida es una sucesión gráfica.*

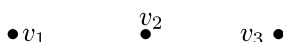
Supongamos que tenemos una sucesión, a la que le hemos aplicado el proceso anterior, y hemos llegado a una sucesión de ceros. Sabemos por tanto que la sucesión es gráfica. Nos planteamos encontrar un grafo de forma que los grados de sus vértices sean los términos de la sucesión.

La idea es ir recorriendo las distintas sucesiones que nos han ido apareciendo al revés, y en cada paso ir construyendo un grafo en el que se materialice la sucesión correspondiente.

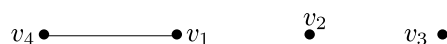
Para esto, en cada paso, lo que hacemos es añadir un vértice que lo uniremos a tantos vértices como nos indica su grado.

**Ejemplo 6.4.4.** *Tenemos la sucesión 4, 4, 3, 2, 2, 2, 1, que sabemos que es gráfica pues lo hemos visto en el ejemplo precedente, ya que hemos llegado a la sucesión 0, 0, 0.*

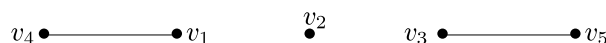
*Comenzamos con la sucesión 0, 0, 0, y formamos un grafo con tres vértices y cuyos grados sean estos, es decir, un grafo sin lados.*



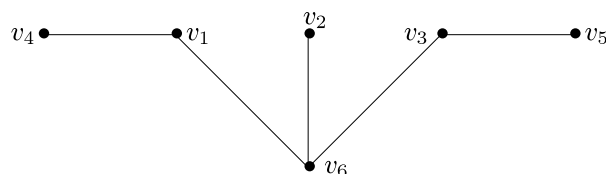
*Ahora pasamos a la sucesión 1, 1, 0, 0. Para esto, añadimos un vértice de grado 1, y lo unimos a uno de los que tenía grado cero (que pasa de grado cero a grado uno), por ejemplo, a  $v_1$ .*



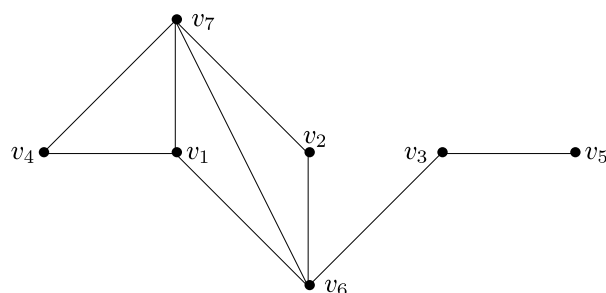
*La siguiente sucesión es 1, 1, 1, 1, 0, que proviene de **0**, 1, 1, 0 (donde hemos marcado en negrita el término de la sucesión que aumenta en uno). Por tanto, hemos de añadir un vértice nuevo ( $v_5$ ) de grado uno, y unirlo a uno de grado cero (por ejemplo, a  $v_3$ ).*



*De esta sucesión reordenada (**1**, **1**, **0**, 1, 1) pasamos a 3, 2, 2, 1, 1, 1. Por tanto, hemos de añadir un vértice ( $v_6$ ), de grado 3, y unirlo a tres vértices de grados 1, 1 y 0 respectivamente. Tomamos entonces, por ejemplo,  $v_1$ ,  $v_3$  y  $v_2$ .*



*Y por último, llegamos a la sucesión 4, 4, 3, 2, 2, 2, 1, que proviene de **3**, **2**, **1**, **1**, 2, 1 añadiendo un 4, y sumando 1 a los términos que están en negrita. Por tanto, añadimos un vértice ( $v_7$ ), de grado 4, y que estará unido a un vértice de grado 3 ( $v_6$ ), uno de grado 2 (por ejemplo,  $v_1$ ) y dos vértices de grado 1 (por ejemplo,  $v_4$  y  $v_2$ ).*



*Y de esta forma, ya hemos encontrado un grafo con 7 vértices, y cuyos grados son 4, 4, 3, 2, 2, 2, 1.*

## 6.5. Grafos de Euler

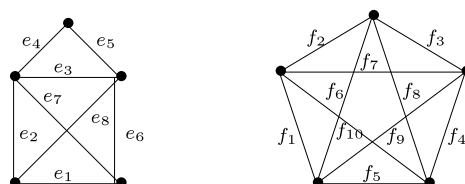
**Definición 68.** Sea  $G$  un grafo conexo. Un camino de Euler es un recorrido en el que aparecen todos los lados.

Un circuito de Euler es un camino de Euler que es cerrado.

Un grafo con un circuito de Euler es un grafo de Euler.

### Ejemplo 6.5.1.

Consideramos los grafos



La sucesión  $e_2e_4e_5e_8e_1e_7e_3e_6$  es un camino de Euler en el primer grafo, mientras que  $f_1f_2f_3f_4f_5f_6f_8f_{10}f_7f_9$  es un circuito de Euler en el segundo.

**Proposición 6.5.1.** Sea  $G$  un grafo. Entonces si  $G$  tiene un circuito de Euler, el grado de cada vértice es par, mientras que si  $G$  tiene un camino de Euler,  $G$  tiene exactamente dos vértices de grado impar (exactamente los vértices donde empieza y termina el camino).

*Demostración:*

Sea  $G$  un grafo en el que tenemos un circuito de Euler. Supongamos que queremos ver cual es el grado de un vértice  $v$ , es decir, vamos a contar cuantos lados inciden en dicho vértice. Para esto, tomamos el circuito de Euler, y lo recorremos empezando en un vértice que no sea el que estamos considerando. Conforme lo recorremos vamos contando los lados que son incidentes en  $v$ . Ahora bien, cada vez que pasemos por  $v$  nos encontramos con dos lados incidentes en él, por el que llegamos a  $v$  y por el que salimos de  $v$ . Por tanto, el número total de lados incidentes en  $v$  será el doble del número de veces que el circuito pase por el vértice  $v$ .

Si lo que tenemos es un camino de Euler que empieza en  $u$  y termina en  $v$ , añadimos al grafo un lado que une los vértices  $u$  y  $v$ . Tenemos entonces, con este nuevo lado, un circuito de Euler en el nuevo grafo. El grado de cada vértice es entonces par.

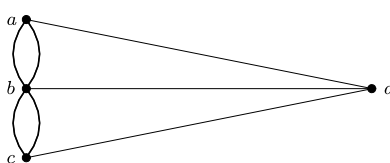
Al eliminar el lado que hemos añadido, el grado de todos los vértices se mantiene igual, salvo el de los vértices  $u$  y  $v$  que disminuye en 1. Por tanto, estos dos vértices tendrán grado impar, y el resto tendrán grado par. ■

### Ejemplo 6.5.2.

1. En el primer grafo del ejemplo anterior, tenemos que hay dos vértices de grado 3, un vértice de grado 2 y dos vértices de grado 4. Podemos ver cómo el camino de Euler que teníamos empezaba en uno de los vértices de grado tres y terminaba en el otro.

En el segundo grafo del ejemplo se tiene que todos los vértices tienen grado 4.

2. Si consideramos el grafo que representaba el problema de los puentes de Königsberg



Jesús García Miranda



vemos que  $a$ ,  $c$  y  $d$  tiene grado 3, mientras que  $b$  tiene grado 5. Como todos los vértices tienen grado impar, deducimos que no existe ningún circuito de Euler. Por tanto, el problema de los puentes de Königsberg no tiene solución.

Hemos visto una condición necesaria para que un grafo tenga un circuito o un camino de Euler. Veamos a continuación que esta condición es también suficiente.

**Teorema 6.5.1.** *Sea  $G$  un grafo conexo. Entonces  $G$  es un grafo de Euler si, y sólo si, el grado de cada vértice es par.*

Antes de pasar a la demostración del teorema, veamos el siguiente lema.

**Lema 6.5.1.** *Sea  $G$  un grafo en el que cada vértice tiene grado mayor que 1. Entonces  $G$  contiene un circuito (y por tanto un ciclo).*

*Demostración:* Elegimos un vértice cualquiera  $v = v_0$ . Puesto que el grado de  $v$  es mayor que 1, tomamos un lado que incida en  $v_0$ . Sea éste  $e_0$ , y  $v_1$  el otro vértice sobre el que incide  $e_0$ . Podría darse el caso de que  $v_0 = v_1$ , en cuyo caso ya tendríamos el recorrido.

Puesto que  $v_1$  tiene grado mayor que 1, debe haber otro lado incidente con  $v_1$ . Sea éste  $e_1$ , y  $v_2$  el otro vértice sobre el que incide. Tenemos entonces el camino dado por la sucesión de vértices  $v_0v_1v_2$  y la sucesión de lados  $e_0e_1$ .

Continuamos el proceso ahora con  $v_2$  hasta que se repita algún vértice (sin repetir ningún lado). En cuanto esto ocurra, ya habremos encontrado el circuito que buscábamos (obviamente, estamos hablando de grafos con un número finito de vértices y de lados). ■

*Demostración:*(Teorema 6.5.1)

Haremos la demostración por inducción sobre el número de lados.

El primer caso es para grafos con un solo lado. Si el grafo es conexo, tiene un solo lado, y el grado del único vértice es par, la única posibilidad es que el grafo sea



en cuyo caso, el circuito de Euler es el camino  $vv$ .

Supongamos que ahora que tenemos un grafo conexo, con  $n$  lados, y en el que el grado de cada vértice es par, y supongamos también que el resultado es cierto para cualquier grafo conexo con menor número de lados.

Por el lema precedente, puesto que el grado de cada vértice es mayor o igual que 2 deducimos que existe en  $G$  un circuito  $c$ .

Eliminamos de  $G$  todos los lados que intervienen en el circuito, y nos queda un grafo en el que todos los vértices tienen grado par (pues de cada vértice se han eliminado un número par de lados que inciden en él). El grafo resultante no tiene que ser conexo, pero cada una de sus componentes conexas sí lo es. Además, cada componente conexa debe tener al menos un vértice por el que se pasa en el circuito  $c$ .

Para cada una de ellas que tenga al menos un lado, tenemos un circuito de Euler. Sean estos circuitos  $c_1, c_2, \dots, c_r$ . Para cada uno de estos circuitos  $c_i$ , tenemos un vértice  $v_i$  que también está en el circuito  $c$ .

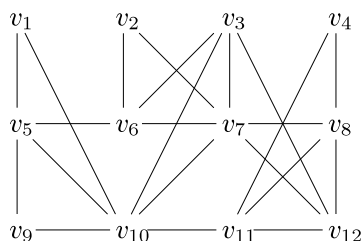
Recorremos entonces el circuito  $c$ . En cuanto lleguemos a algún vértice  $v_i$ , insertamos el circuito  $c_i$ , y continuamos con el circuito  $c$ . De esta forma, al cerrar el circuito  $c$  habremos recorrido todos los lados del grafo  $G$  una sola vez, es decir, tendremos un circuito de Euler. ■

**Corolario 6.5.1.** *Sea  $G$  un grafo conexo. Entonces  $G$  tiene un camino de Euler si, y sólo si,  $G$  tiene exactamente dos vértices de grado impar.*

### Ejemplo 6.5.3.

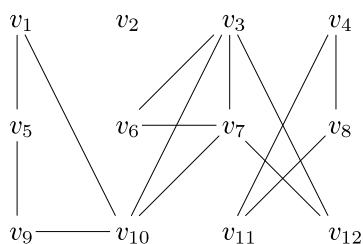
Consideramos el siguiente grafo



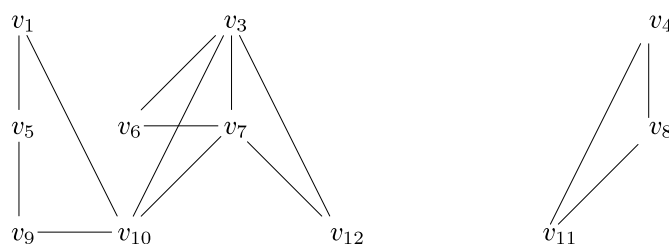


en el que vemos que los vértices  $v_1$ ,  $v_2$ ,  $v_4$  y  $v_9$  tienen grado 2; los vértices  $v_3$ ,  $v_5$ ,  $v_6$ ,  $v_8$ ,  $v_{11}$  y  $v_{12}$  tienen grado 4, mientras que los vértices  $v_7$  y  $v_{10}$  tienen grado 6. Como todos los vértices tienen grado par, sabemos que existe un circuito de Euler. Vamos a encontrarlo.

Para esto, buscamos un circuito cualquiera, por ejemplo,  $v_2v_6v_5v_{10}v_{11}v_{12}v_8v_7v_2$ , y eliminamos los lados que intervienen en este circuito. Nos queda entonces el grafo



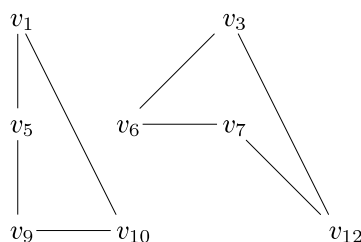
que tiene (aparte del vértice  $v_2$ ) dos componentes conexas que son las siguientes:



de los cuales hemos de encontrar un circuito de Euler. En el segundo grafo, este circuito sería  $v_4v_8v_{11}v_4$ .

Vamos a encontrarlo en el primero. Para ello, hacemos como hicimos al principio.

Buscamos un circuito en dicho grafo, que podría ser  $v_3v_7v_{10}v_3$ ; eliminamos los lados que intervienen, y nos queda entonces el grafo



que tiene dos componentes conexas. Para cada una de ellas es fácil encontrar un circuito de Euler. El circuito de la primera componente es  $v_1v_5v_9v_{10}v_1$ , mientras que el de la segunda es  $v_3v_6v_7v_{12}v_3$ .

Un vértice común entre los circuitos  $v_3v_7v_{10}v_3$  y  $v_1v_5v_9v_{10}v_1$  es  $v_{10}$ , mientras que un vértice común entre los circuitos  $v_3v_7v_{10}v_3$  y  $v_3v_6v_7v_{12}v_3$  podría ser  $v_3$  (o  $v_7$ ).

Recorremos entonces el circuito  $v_3v_7v_{10}v_3$ , y al llegar a los vértices que hemos elegido insertamos los circuitos de cada una de las componentes conexas.

$$v_3 \underbrace{v_6v_7v_{12}v_3}_{\text{circuit}} v_7v_{10} \underbrace{v_1v_5v_9v_{10}v_1}_{\text{circuit}} v_3$$

Volvemos ya al grafo de partida. En él elegimos un circuito ( $v_2v_6v_5v_{10}v_{11}v_{12}v_8v_7v_2$ ), que al eliminarlo dividía al grafo en dos componentes conexas. De cada una de éstas tomamos ahora un vértice común con

el circuito. Sean éstos  $v_6$  y  $v_{11}$ . Recorremos el circuito elegido, y al llegar a estos vértices insertamos los circuitos de Euler para cada una de las componentes. Tenemos entonces:

$$v_2 v_6 \underbrace{v_7 v_{12} v_3 v_7 v_{10} v_1 v_5 v_9 v_{10} v_3 v_6}_{v_5 v_{10} v_{11}} \underbrace{v_4 v_8 v_{11}}_{v_{12} v_8 v_7 v_2}$$

que es un circuito de Euler para el grafo del que partíamos.

A continuación veremos un algoritmo que calcula, dado un grafo del que sabemos que tiene un camino o circuito de Euler, un tal camino.

### Algoritmo de Fleury

Como entrada, tenemos un grafo  $G$ . Como salida, dos sucesiones  $S_V$  y  $S_E$ , que son las sucesiones de vértices y lados del camino buscado.

1. Si todos los vértices son de grado par, elegimos un vértice cualquiera  $v$ . Si  $G$  tiene dos vértices de grado impar elegimos uno de estos vértices.
2. Hacemos  $S_V = v$  y  $S_E = []$ .
3. Si  $G$  tiene sólo a  $v$ , devuelve  $S_V$  y  $S_E$ , y termina.
4. Si hay un único lado  $e$  que incida en  $v$ , llamamos  $w$  al otro vértice donde incida el lado  $e$ ; quitamos de  $G$  el vértice  $v$  y el lado  $e$  y vamos al paso 6.
5. Si hay más de un lado  $e$  que incida en  $v$ , elegimos uno de estos de forma que al quitarlo el grafo  $G$  siga siendo conexo. Llamamos  $e$  a dicho lado y  $w$  al otro vértice en el que incide  $e$ .
6. Añadimos  $w$  al final de  $S_V$  y  $e$  al final de  $S_E$ .
7. Cambiamos  $v$  por  $w$  y volvemos al paso 3.

## 6.6. Grafos de Hamilton

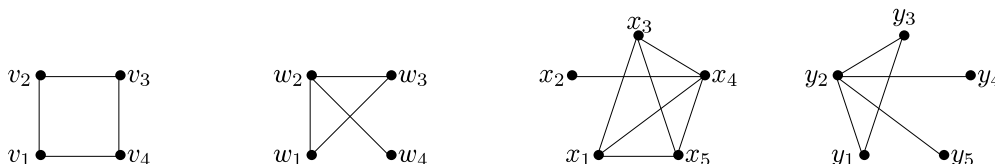
En la sección anterior estudiamos cuándo en un grafo podíamos encontrar un camino que recorriera todos los lados una sola vez. En esta, pretendemos estudiar como recorrer todos los vértices una sola vez.

**Definición 69.** Sea  $G$  un grafo. Un camino de Hamilton es un camino que recorre todos los vértices una sola vez.

Un circuito de Hamilton es un camino cerrado que recorre todos los vértices una sola vez (salvo los extremos).

Un grafo con un circuito de Hamilton se denomina grafo de Hamilton o grafo hamiltoniano.

**Ejemplo 6.6.1.** Consideramos los siguientes grafos:



Entonces, el primer grafo es un grafo de Hamilton. Un circuito de Hamilton es  $v_1 v_2 v_3 v_4 v_1$ . Obviamente, al tener un circuito de Hamilton, podemos encontrar también un camino de Hamilton ( $v_1 v_2 v_3 v_4$ ).

En el segundo grafo tenemos un camino de Hamilton ( $w_1 w_3 w_2 w_4$ ). Podemos ver como no existe ningún circuito de Hamilton, pues debería tener al menos dos lados incidentes en  $w_4$  (el lado entrante y el lado saliente).

*El mismo razonamiento sirve para ver que en el tercer grafo no es hamiltoniano. En este también podemos encontrar caminos de Hamilton. Por ejemplo  $x_1x_3x_5x_4x_2$ .*

*Por último, en el último grafo no hay caminos de Hamilton. Fácilmente, podemos ver que de haberlo debería empezar en  $y_4$  y terminar en  $y_5$  (o al revés). En ese caso, el camino debería empezar  $y_4y_2$ , y debería terminar  $y_2y_5$ , luego el vértice  $v_2$  aparecería repetido.*

*Nótese que en los grafos segundo y cuarto existen caminos de Euler, mientras que en el tercero no. Por tanto, no existe ninguna relación entre tener caminos de Hamilton y caminos de Euler.*

### Observaciones:

Puesto que a la hora de buscar un camino o circuito de Hamilton no podemos pasar dos veces por un mismo vértice, no es posible que el camino contenga dos lados paralelos, ni que contenga lazos. Supondremos por tanto en esta sección que todos los grafos que intervienen no tienen ni lazos ni lados paralelos.

Hemos visto en el ejemplo anterior, que si hay un vértice de grado 1, entonces el grafo no es de Hamilton.

Por otra parte, si un grafo con  $n$  vértices es de Hamilton, en el circuito de Hamilton intervienen  $n$  lados. Por tanto, un grafo de Hamilton con  $n$  vértices tiene al menos  $n$  lados.

Intuitivamente, cuantos más lados tenga un grafo con un número de vértices fijado, más fácil será poder encontrar un circuito de Hamilton. Veremos a continuación que si tenemos el número suficiente de lados, entonces tenemos garantizada la existencia de circuitos de Hamilton.

**Teorema 6.6.1.** *Sea  $G$  un grafo con  $n$  vértices.*

1. *Si el número de lados es mayor o igual que  $\frac{1}{2}(n-1)(n-2) + 2$ , entonces el grafo es hamiltoniano.*
2. *Si  $n \geq 3$  y para cada par de vértices no adyacentes se verifica que  $gr(v) + gr(w) \geq n$ , entonces  $G$  es un grafo de Hamilton.*

*Demostración:*

Hagamos en primer lugar la demostración de la segunda parte. Probemos que si  $G$  no es un grafo de Hamilton, hay al menos dos vértices no adyacentes tales que la suma de sus grados es menor que  $n$ .

Supongamos entonces que  $G$  es un grafo que no es de Hamilton. Añadimos un lado al grafo. Si sigue sin ser de Hamilton, volvemos a añadir un lado, y así sucesivamente, hasta que encontremos un grafo de Hamilton. Sea  $ab = v_1v_2$  el último lado que hemos añadido. El grafo obtenido es un grafo de Hamilton, y el ciclo de Hamilton debe contener al lado  $ab$ . Sea entonces dicho ciclo  $abv_3v_4 \cdots v_na$ .

Llamemos  $H$  al grafo que hemos obtenido justo antes de añadir el lado  $ab$ .

Para cada  $i$  entre 3 y  $n$ , vamos a ver que no pueden estar simultáneamente los lados  $av_{i-1}$  y  $bv_i$  en el grafo  $H$ .

Si  $i = 3$ , entonces  $av_{i-1} = av_2 = ab$ , que no está en  $H$ .

Si  $i \geq 4$ , en caso de que estuvieran ambos lados, podríamos construir el circuito de Hamilton

$$bv_iv_{i+1} \cdots v_n av_{i-1} v_{i-2} \cdots v_3 b$$

que no contiene al lado  $ab$ , lo cual no es posible, pues el grafo  $H$  no es de Hamilton.

Tenemos entonces que en el grafo  $H$ , se verifica que  $gr(a) + gr(b) < n$ , y como  $G$  es un subgrafo de  $H$ , entonces en  $G$  se verifica la misma propiedad. Hemos encontrado entonces dos vértices no adyacentes tales que la suma de sus grados es menor que  $n$ , como queríamos.

Demostremos ahora la primera parte.

Sean  $u$  y  $v$  dos vértices no adyacentes. Vamos a probar que  $gr(u) + gr(v) \geq n$ .

Sea  $G' = (V', E')$  el subgrafo completo (ver definición 58) de  $G$  formado por todos los vértices de  $G$  salvo  $u$  y  $v$ . Este grafo es un subgrafo de  $K_{n-2}$ , por tanto el número de lados de  $G'$  es menor o igual que  $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$ .

Por otra parte,  $|E| = |E'| + gr(u) + gr(v)$  (pues el lado  $uv$  no está en  $E$ ), luego

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2} + 2 \leq |E| = |E'| + gr(u) + gr(v) \leq \frac{(n-2)(n-3)}{2} + gr(u) + gr(v)$$

por tanto,

$$\begin{aligned}
 gr(u) + gr(v) &\geq \frac{(n-1)(n-2)}{2} + 2 - \frac{(n-2)(n-3)}{2} \\
 &= \frac{(n-2)[n-1-(n-3)]+4}{2} \\
 &= \frac{(n-2)(n-1-n+3)+4}{2} \\
 &= \frac{(n-2)2+4}{2} \\
 &= \frac{2n-4+4}{2} = n
 \end{aligned}$$

■

Sabemos que si el número de lados de un grafo de  $n$  vértices es menor que  $n$  no es un grafo hamiltoniano. Si el número de lados está comprendido entre  $n$  y  $\frac{1}{2}(n-1)(n-2) + 1$ , en principio no podemos asegurar nada.

### Ejemplo 6.6.2.

1. Dado  $n$  un número natural mayor o igual que 2. Construimos el grafo  $K_{n-1}$ . El número de lados de este grafo es  $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ .

Tomamos un vértice más y lo unimos a un lado cualquiera de  $K_{n-1}$ . El grafo resultante no es de Hamilton, pues hay un vértice de grado 1. Tenemos entonces un grafo con  $n$  vértices,  $\frac{1}{2}(n-1)(n-2) + 1$  lados, y que no es hamiltoniano.

Por tanto, la mejor cota sobre el número de lados para asegurar que un grafo es de Hamilton es la dada en el teorema.

2. Sea  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ,  $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  y  $\gamma : E \rightarrow \{\{u, v\} : u, v \in V\}$  dada por  $\gamma(e_n) = \{v_1, v_n\}$  y  $\gamma(e_i) = \{v_i, v_{i+1}\}$  para  $1 \leq i \leq n-1$ .

Tenemos así un grafo de Hamilton con  $n$  vértices y  $n$  lados.

3. Sea  $G$  un grafo regular de grado 4 y 8 vértices. Dicho grafo tiene un total de 16 lados. Para 8 vértices, la cota para el número de lados es  $\frac{7 \cdot 6}{2} + 2 = 23$ .

Sin embargo, en tal caso podemos ver que la suma de los grados de cualquier pareja de vértices es

8. Por tanto, podemos asegurar que dicho grafo es hamiltoniano.

## 6.7. Grafos bipartidos

**Definición 70.** Sea  $G = (V, E)$  un grafo. Se dice que  $G$  es bipartido si podemos descomponer  $V$  en dos subconjuntos disjuntos  $V_1$  y  $V_2$  de forma que todo lado incide en un vértice de  $V_1$  y en un vértice de  $V_2$ .

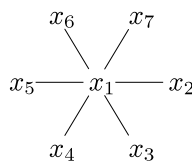
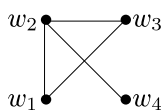
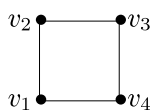
Un grafo  $G = (V, E)$  se dice bipartido completo si es bipartido, y para cada  $v_1 \in V_1$  y  $v_2 \in V_2$  existe un único lado  $e \in E$  tal que  $\gamma_G(e) = \{v_1, v_2\}$ .

Un grafo bipartido completo está completamente determinado por el cardinal de  $V_1$  y  $V_2$ .

Si  $G$  es un grafo bipartido completo en el que  $V_1$  tiene cardinal  $m$  y  $V_2$  tiene cardinal  $n$ , entonces denotaremos a  $G$  como  $K_{m,n}$ .

### Ejemplo 6.7.1.

1. Consideramos los siguientes grafos



Entonces el primer y el tercer grafos son bipartidos.

En el primero, se tiene que  $V_1 = \{v_1, v_3\}$  y  $V_2 = \{v_2, v_4\}$ . Además, podemos ver que cualquier para cualquier pareja formada por un vértice de  $V_1$  y un vértice de  $V_2$  hay un lado y sólo uno que los une. Por tanto, es un grafo bipartido completo. Dado que  $V_1$  y  $V_2$  tienen dos elementos, dicho grafo es  $K_{2,2}$ .

En el tercero tenemos  $V_1 = \{x_1\}$  y  $V_2 = \{x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}$ . Vemos también que este es un grafo bipartido completo, es decir, este grafo es  $K_{1,6}$ .

El segundo grafo no es bipartido. Para comprobarlo, supongamos que tenemos una división del conjunto de vértices de la forma  $\{w_1, w_2, w_3, w_4\} = V_1 \cup V_2$ . Entonces  $w_1$  pertenecerá a uno de los dos conjuntos. Supongamos que a  $V_1$ . En tal caso, se tiene que  $w_2 \in V_2$  (pues  $w_1$  y  $w_2$  están unidos por un lado) y  $w_3 \in V_2$  (por el mismo motivo). Tenemos entonces dos vértices en el mismo subconjunto de la partición, y unidos por un lado.

El siguiente teorema nos da una caracterización de los grafos bipartidos.

**Teorema 6.7.1.** Sea  $G = (V, E)$  un grafo. Entonces  $G$  es bipartido si, y sólo si,  $G$  no contiene ciclos de longitud impar.

Antes de demostrar el teorema veamos el siguiente lema, cuya demostración se deja como ejercicio.

**Lema 6.7.1.** Sea  $G$  un grafo bipartido con partición del conjunto de vértices  $V = V_1 \cup V_2$ . Supongamos que  $v_1 v_2 \cdots v_m$  es un camino en  $G$  y que  $v_1 \in V_1$ . Entonces  $\{v_1, v_3, v_5, \dots\} \subseteq V_1$  y  $\{v_2, v_4, \dots\} \subseteq V_2$ .

*Demostración:* (Teorema)

Veamos en primer lugar que si  $G$  contiene ciclos de longitud impar entonces  $G$  no es bipartido.

Supongamos que  $v_1 v_2 \cdots v_{m-1} v_m v_1$  es un ciclo de longitud impar, es decir,  $m = 2k + 1$  para algún  $k \in \mathbb{N}$ .

Si  $G$  fuera bipartido, tendríamos que  $v_1, v_3, \dots, v_{2k+1}$  están en el mismo subconjunto de la partición, mientras que  $v_2, v_4, \dots, v_{2m}, v_1$  están en el otro subconjunto de la partición.

Encontramos entonces un vértice ( $v_1$ ) que está simultáneamente en los dos subconjuntos, lo cual no es posible.

Hagamos la demostración del recíproco. Es decir, supongamos que el grafo no tiene ciclos de longitud impar, y veamos que entonces  $G$  es bipartido.

Vamos a hacer la demostración en el caso de que el grafo sea conexo. Caso de no serlo, se deja como ejercicio adaptar la demostración.

Sean  $u$  y  $v$  dos vértices de  $G$ . Definimos el número  $d(u, v)$  como la menor longitud posible de los caminos que unen  $u$  con  $v$ . Claramente, si  $d(u, v) = r$  entonces existe un camino simple que une  $u$  con  $v$ .

Elegimos un vértice  $v_0 \in V$ , y definimos los conjuntos:

$$V_1 = \{v \in V : d(v_0, v) \text{ es par}\}, \quad V_2 = \{v \in V : d(v_0, v) \text{ es impar}\}.$$

Es claro que  $V = V_1 \cup V_2$  y que  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ . Veamos que cualquier lado de  $G$  une un vértice de  $V_1$  con un vértice de  $V_2$ .

Sea  $e$  un lado incidente con los vértices  $w$  y  $w'$ , y sean  $r = d(v_0, w)$  y  $s = d(v_0, w')$ . Entonces pueden darse tres posibilidades:

- ▮  $r = s + 1$ . En tal caso, uno es par y el otro es impar. Por tanto, el lado considerado une un vértice de  $V_1$  con un vértice de  $V_2$ .
- ▮  $s = r + 1$ . Vale lo mismo a lo dicho en el caso anterior.

$r = s$ . Vamos a ver que esta situación no puede darse, pues de ser así tendríamos un ciclo de longitud impar.

Para comprobarlo, tomamos los dos caminos simples de longitud  $r$

$$v_0 v_1 v_2 \cdots v_r = w; v_0 v'_1 \cdots v'_r = w'.$$

Y a partir de ellos vamos a buscar un ciclo de longitud impar.

En principio, pueden ahora darse también dos situaciones:

1.  $\{v_1, v_2, \dots, v_r\} \cap \{v'_1 v'_2, \dots, v'_r\} = \emptyset$ .

Y aquí tenemos un ciclo  $v_0 v_1 \cdots v_r v'_r v'_{r-1} \cdots v'_1 v_0$  de longitud  $2r + 1$ , que tiene longitud impar.

2.  $\{v_1, v_2, \dots, v_r\} \cap \{v'_1 v'_2, \dots, v'_r\} \neq \emptyset$ .

La idea aquí es la misma, sólo que para obtener un ciclo hemos de eliminar los vértices repetidos.

En primer lugar, veamos que si  $v_i \in \{v_1, v_2, \dots, v_r\} \cap \{v'_1 v'_2, \dots, v'_r\}$  entonces  $v_i = v'_i$ . Esto es cierto pues si  $v_i = v'_j$  con  $j \neq i$  entonces, bien  $j < i$  o bien  $i < j$ . En el primer caso tenemos que  $v_0 v'_1 \cdots v'_j v_{i+1} \cdots v_r$  es un camino que une  $v_0$  con  $v_r = w$  de longitud menor que  $r$ , lo cual no es posible. En el segundo se razona de la misma forma.

Tomamos ahora el mayor  $i$  tal que  $v_i \in \{v_1, v_2, \dots, v_r\} \cap \{v'_1 v'_2, \dots, v'_r\}$ . En tal caso, podemos tomar el ciclo  $v_i v_{i+1} \cdots v_r v'_r v'_{r-1} \cdots v'_i = v_i$ , que tiene longitud  $2(r - i) + 1$ , es decir, un número impar.

■

**Proposición 6.7.1.** Sea  $G$  un grafo bipartido con partición  $V_1$  y  $V_2$ . Supongamos que  $|V_1| = n$  y  $|V_2| = m$ . Entonces:

Si  $G$  tiene un camino de Hamilton, entonces  $|n - m| \leq 1$ .

Si  $G$  es un grafo de Hamilton, entonces  $n = m$ .

Si  $G$  es completo y  $|n - m| \leq 1$ , entonces  $G$  tiene un camino de Hamilton.

Si  $G$  es completo y  $n = m$ , entonces  $G$  es un grafo de Hamilton.

La demostración se deja como ejercicio.

## 6.8. Grafos planos

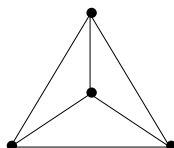
En esta sección vamos a estudiar los grafos que pueden ser representados en el plano.

**Definición 71.** Sea  $G$  un grafo. Una representación de  $G$  se dice plana si los vértices y los lados se encuentran todos en un plano, y las líneas que representan dos lados distintos no se cortan.

Un grafo se dice plano si admite una representación plana.

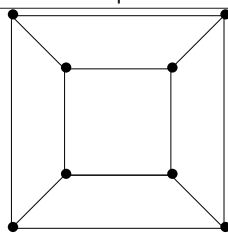
**Ejemplo 6.8.1.**

1. El grafo  $K_4$  es plano, pues admite una representación plana.



2. Cualquier poliedro tiene asociado un grafo. Los vértices son los vértices del poliedro, y los lados sus aristas. Este grafo es siempre plano.

Por ejemplo, el grafo correspondiente al tetraedro es  $K_4$ . El grafo correspondiente al cubo es



Una representación plana de un grafo divide al plano en que se encuentra en varias regiones, que denominaremos *caras*.

**Teorema 6.8.1** (Característica de Euler). *Sea  $G$  un grafo plano y conexo. Llamemos  $v$  al número de vértices,  $l$  al número de lados y  $c$  al número de caras de una representación plana. Entonces  $v - l + c = 2$ .*

*En general, si  $G$  es un grafo plano, y  $\chi$  es el número de componentes conexas entonces  $v - l + c = 1 + \chi$ .*

*Demostración:* Hagamos la demostración por inducción en el número de lados.

Para grafos (conexos) con un único lado el resultado es cierto, pues únicamente hay dos posibilidades, que son



y en el primer caso  $v = 1$ ,  $l = 1$  y  $c = 2$ , mientras que en el segundo  $v = 2$ ,  $l = 1$  y  $c = 1$ . Fácilmente se ve como en ambos casos se da la igualdad.

Supongamos que el resultado es cierto para todos los grafos planos, conexos y con  $n$  lados, y sea  $G$  un grafo plano, conexo con  $n + 1$  lados. Sean  $v$ ,  $l$  y  $c$  el número de vértices, lados y caras respectivamente de  $G$ .

Pueden ocurrir dos cosas:

- ▮ Que  $G$  contenga un ciclo.

En tal caso, sea  $G'$  el grafo que resulta de quitar de  $G$  un lado que formaba parte de un ciclo. Entonces  $G'$  sigue siendo conexo. Llamemos  $v'$ ,  $l'$  y  $c'$  al número de vértices, lados y caras de este nuevo grafo. Se tiene que  $v' = v$  (no hemos eliminado ningún vértice);  $l' = l - 1 = n$  (hemos eliminado un lado) y  $c' = c - 1$  (al quitar un lado de un ciclo, las dos caras que separaba ese lado se convierten en una).

Por tanto, se tiene que

$$v - l + c = v' - (l' + 1) + (c' + 1) = v' - l' - 1 + c' + 1 = v' - l' + c' = 2$$

pues, por hipótesis de inducción, para dicho grafo sí era cierta la tesis del teorema.

- ▮ Que  $G$  no contenga ningún ciclo.

En este caso, por el lema 6.5.1  $G$  debe tener algún vértice de grado 1.

Sea  $G'$  el grafo que resulta de eliminar este vértice y el lado que en él incide. Para el grafo resultante se tiene que  $v' = v - 1$ ,  $l' = l - 1$  y  $c' = c$  (pues el lado eliminado no separaba ninguna región).

Razonando igual que antes se tiene que  $v - l + c = 2$ .

La demostración del caso general (no conexo) se deja como ejercicio. ■

**Corolario 6.8.1.** *En un poliedro, si  $v$  es el número de vértices;  $l$  es el número de aristas y  $c$  es el número de caras entonces  $v - l + c = 2$ .*

**Ejemplo 6.8.2.**



1. En la representación plana que hicimos de  $K_4$  se tienen un total de 4 caras. Como en  $K_4$  se verifica que  $v = 4$  y  $l = 6$  entonces  $v - l + c = 4 - 6 + 4 = 2$ .
2. El cubo tiene 8 vértices, 12 aristas y 6 caras. Obviamente se ve que  $v - l + c = 2$ .
3. Vamos a demostrar aquí que sólo existen 5 sólidos regulares. Es decir, poliedros en donde todas las caras son polígonos regulares iguales.

Supongamos que tenemos un poliedro regular, y sea  $G$  el grafo asociado a dicho poliedro. Sabemos que se verifica que

$$v - l + c = 2$$

Sabemos además que este grafo es regular de grado  $r$  ( $r$  es el número de aristas que inciden en cada vértice) y que  $r \geq 3$ . Por tanto, se verifica que

$$rv = 2l.$$

Por otra parte, todas las caras son polígonos regulares de  $n$  lados. Si contamos el número de caras, y lo multiplicamos por  $n$  estamos contando el número de aristas dos veces, pues cada arista es arista común de dos caras. Por tanto, se tiene también que

$$nc = 2l.$$

Sustituyendo en la expresión  $v - l + c = 2$  obtenemos que

$$\frac{2l}{r} - l + \frac{2l}{n} = 2 \implies \frac{1}{r} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{l}$$

Sabemos que  $r \geq 3$  y  $n \geq 3$  (pues el polígono regular más simple es el triángulo). Si tanto  $n$  como  $r$  fueran simultáneamente mayores que 3, es decir,  $n \geq 4$  y  $r \geq 4$  tendríamos que  $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{4}$  y  $\frac{1}{r} \leq \frac{1}{4}$ , luego

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{l} = \frac{1}{r} + \frac{1}{n} \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \implies \frac{1}{l} \leq 0,$$

lo cual es imposible.

Por tanto, tenemos dos posibilidades:

- $n = 3$ . Las caras del sólido son triángulos.

En este caso tenemos

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{r} = \frac{1}{2} + \frac{1}{l} \implies \frac{1}{l} = \frac{1}{r} - \frac{1}{6} \implies l = \frac{6r}{6-r}.$$

Por tanto,  $r < 6$ , lo que nos da sólo tres posibilidades para  $r$ .

- a)  $r = 3$ . Entonces  $l = \frac{6 \cdot 3}{6-3} = 6$ . Puesto que  $nc = 2l$  deducimos que  $c = 4$ , y dado que  $rv = 2l$  también tenemos que  $v = 4$ . El sólido regular resulta ser el tetraedro.
- b)  $r = 4$ . Aquí  $l = \frac{24}{2} = 12$ , y de aquí deducimos que  $c = 8$  y  $v = 6$ . El sólido regular es el octaedro.
- c)  $r = 5$ . Ahora,  $l = 30$ , y por tanto  $c = 20$  y  $v = 12$ . El sólido es el icosaedro.
- $r = 3$ . Razonando igual que antes, pero intercambiando el papel de  $r$  y  $n$  tenemos tres posibilidades para  $n$ .
  - a)  $n = 3$ . Este caso ya lo hemos analizado. Es el tetraedro.
  - b)  $n = 4$ . Ahora las caras son cuadrados. Ahora  $l = 12$ , lo que implica que  $c = 6$  y  $v = 8$ . Estamos hablando del cubo.
  - c)  $n = 5$ . Las caras son pentágonos. Aquí  $l = 30$ , de donde  $c = 12$  y  $v = 20$ . El sólido es en este caso el dodecaedro.



**Corolario 6.8.2.** Sea  $G$  un grafo plano, conexo, sin lazos ni lados paralelos. Entonces  $3c \leq 2l$  y  $l \leq 3v - 6$ .

*Demostración:* Vamos a llamar grado de una cara al número de lados que delimitan dicha cara, o mejor dicho, al número de aristas que son frontera de la cara.

Es claro que al no tener lazos ni lados paralelos, el grado de cualquier cara es mayor o igual que 3. La suma de los grados de todas las caras será entonces mayor o igual que  $3c$ .

Por otra parte, al sumar los grados de todas las caras estamos contando dos veces el número de lados, pues cada lado es frontera común de dos caras. Tenemos entonces que  $3c \leq 2l$ .

La otra desigualdad es consecuencia del Teorema 6.8.1, pues

$$2 = v - l + c \leq v - l + \frac{2l}{3} = v - \frac{l}{3} \implies 6 \leq 3v - l \implies l \leq 3v - 6.$$

■

En la demostración del corolario se han utilizado dos hechos: que toda cara tiene al menos tres lados que son frontera y el Teorema 6.8.1. Si de un grafo pudiéramos asegurar que cada cara tiene al menos  $r$  lados que son frontera, entonces las dos desigualdades se transformarían en

$$rc \leq 2l, \quad (r - 2)l \leq r(v - 2).$$

**Ejemplo 6.8.3.** Vamos a comprobar que los grafos  $K_5$  y  $K_{3,3}$  no son planos.

En el grafo  $K_5$  tenemos que  $v = 5$ . De ser plano, se tendría que  $l \leq 3 \cdot 5 - 6 = 9$ . Sabemos, sin embargo que  $l = 10$ . Por tanto,  $K_5$  no puede ser plano.

Si utilizamos la misma expresión para  $K_{3,3}$ , y puesto que  $v = 6$ , obtendríamos que  $l \leq 3 \cdot 6 - 6 = 12$ , lo cual no supone contradicción alguna, ya que  $K_{3,3}$  tiene 9 lados.

Sin embargo, por ser  $K_{3,3}$  bipartido, no tiene ciclos de longitud impar, luego no puede haber caras que estén delimitadas por 3 lados. Como mínimo, hay cuatro lados fronterizos con cada cara. En este caso, tenemos que si fuera plano se verificaría que

$$(4 - 2)l \leq 4(6 - 2) \implies 2l \leq 16$$

que sabemos que no es cierto.

Deducimos por tanto que  $K_{3,3}$  no es plano.

Vamos a continuación a dar un teorema que viene a decirnos que, esencialmente, los únicos grafos no planos son los vistos en este ejemplo, es decir,  $K_5$  y  $K_{3,3}$ . Antes, hemos de introducir las contracciones en grafos.

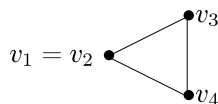
**Definición 72.** Sea  $G$  un grafo. Una contracción simple de  $G$  es el resultado de indentificar en  $G$  dos vértices adyacentes.

Una contracción de  $G$  es una cadena de contracciones simples.

**Ejemplo 6.8.4.** Consideramos los grafos



Si en el primer grafo identificamos los vértices  $v_1$  y  $v_2$  obtenemos el grafo



luego dicho grafo es una contracción del "cuadrado".

En el segundo grafo vamos a realizar una contracción simple identificando los vértices  $w_1$  y  $w_2$ , y otra identificando  $w_2$  y  $w_4$ . Los grafos que obtenemos son

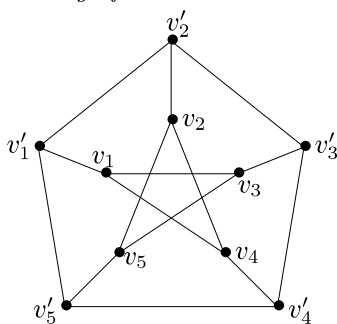


Es muy intuitivo ver que cualquier contracción de un grafo plano sigue siendo un grafo plano.

Estamos ya en condiciones de dar el siguiente teorema.

**Teorema 6.8.2** (Kuratowski). *Sea  $G$  un grafo. Entonces  $G$  es plano si, y sólo si, ningún subgrafo suyo puede contraerse a  $K_5$  ni a  $K_{3,3}$ .*

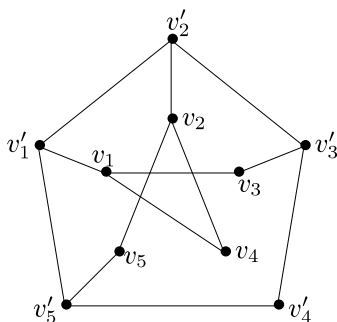
**Ejemplo 6.8.5.** Consideramos el siguiente grafo  $G$ :



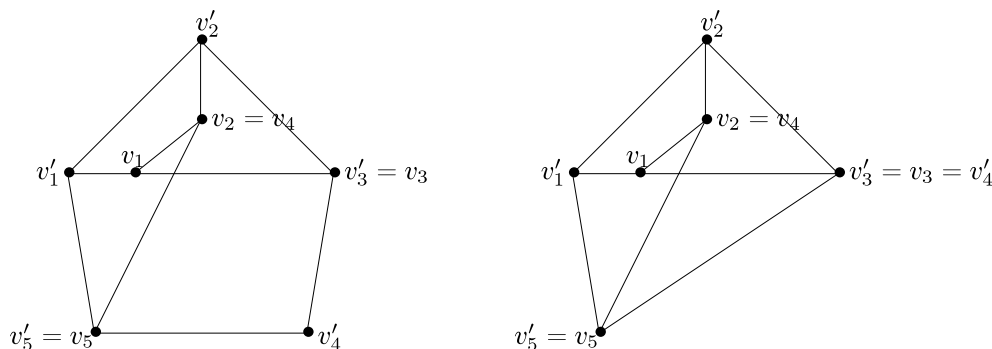
Entonces, si identificamos cada vértice  $v_i$  con  $v'_i$  (es decir, realizamos cinco contracciones) obtenemos el grafo  $K_5$ , que sabemos que no es plano. Deducimos por tanto que este grafo no es plano.

También podemos ver que este grafo no es plano como sigue:

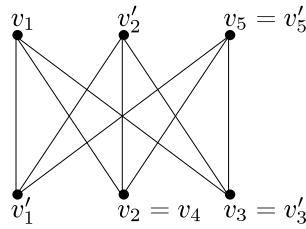
Tomamos el subgrafo de  $G$  con los mismos vértices, y del que se eliminan los lados que unen  $v_3$  con  $v_5$ , y  $v_4$  con  $v'_4$ . El grafo que obtenemos es



Identificamos los vértices  $v_2$  con  $v_4$ ,  $v_3$  con  $v'_3$  y  $v_5$  con  $v'_5$ , y a continuación  $v'_4$  con  $v_3 = v'_3$ . El grafo resultante es:



que podemos representar como



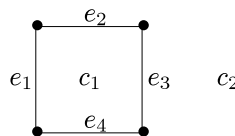
Es decir, hemos encontrado un subgrafo de  $G$  que puede contraerse hasta  $K_{3,3}$ .

La representación que hemos obtenido de  $K_{3,3}$  (no esta última) puede servirnos para comprobar que si en  $K_{3,3}$  se suprime algún lado, el grafo resultante es plano (basta suprimir el lado  $v_2v_5$  o el lado  $v_1v_3$ ).

Por último, para acabar esta sección introducimos el concepto de grafo dual.

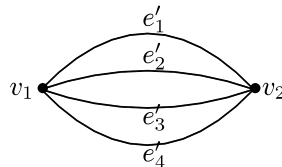
**Definición 73.** Sea  $G$  un grafo plano. Supongamos que tenemos una representación plana con caras  $c_1, c_2, \dots, c_r$ . Definimos el grafo dual para la representación dada como el grafo cuyo conjunto de vértices es igual al conjunto de caras (o tiene un vértice  $v'_i$  para cada cara  $c_i$ ), y cuyo conjunto de lados coincide (o es biyectivo) con el conjunto de lados de  $G$ . En el grafo dual, un lado une dos vértices si en la representación plana de  $G$  dicho lado es frontera común de las dos caras.

**Ejemplo 6.8.6.** Consideramos el grafo



que divide al plano en dos regiones  $c_1$  y  $c_2$ . El grafo dual, tendrá entonces dos vértices  $v_1$  y  $v_2$  (uno por cada cara), y cuatro lados (uno por cada lado de  $G$ ). Puesto que cada lado tiene frontera común con  $c_1$  y  $c_2$ , cada lado del dual unirá los vértices  $v_1$  y  $v_2$ .

El grafo dual es entonces:



Podemos ver que si hacemos el dual de este grafo obtenemos el grafo inicial.

Cuando hablamos de dual de un grafo, hacemos referencia a su representación plana. Esto es así porque el dual de un grafo depende de la representación plana que tomemos, como podemos ver en el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 6.8.7.** Vamos a considerar dos representaciones planas de un mismo grafo, y vamos a hallar el dual para cada una de las representaciones. El grafo tiene 5 vértices ( $v_1, v_2, v_3, v_4$  y  $v_5$ ) y 5 lados, de los que damos los dos vértices que unen ( $v_1v_2$ ,  $v_1v_3$ ,  $v_1v_4$ ,  $v_2v_3$  y  $v_2v_5$ ). Dos representaciones planas del mismo grafo podrían ser:



Calculamos el dual de cada una de las dos representaciones. Vemos que en ambos casos tenemos dos caras, lo que da lugar a 2 vértices en el grafo dual. Los grafos duales son entonces:

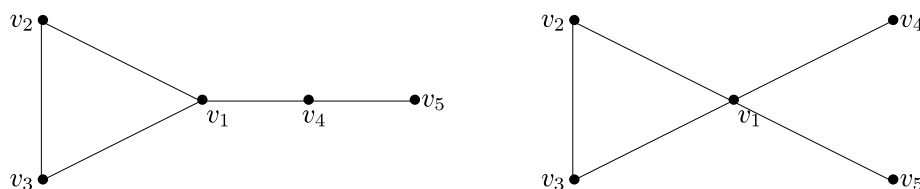


que podemos ver que no son isomorfos. Mientras el primer grafo tiene dos vértices de grado 5, el segundo tiene un vértice de grado 7 y uno de grado 3.

Del segundo grafo que hemos obtenido, podemos hacer varias representaciones planas. Por ejemplo,



y cada una de ellas tiene un dual diferente. En estos casos serían:



que no son isomorfos entre sí, ni isomorfos al grafo original (basta estudiar en cada caso la sucesión de grados).

Si quisiéramos obtener el grafo inicial, deberíamos tomar otra representación, aquella en la que uno de los lazos estaría "dentro" de la región  $c_2$ .

## 6.9. Coloración de grafos

**Definición 74.** Sea  $G = (V, E)$  un grafo. Una coloración  $G$  es una aplicación  $f : V \rightarrow C$ , donde  $C$  es un conjunto, de tal forma que para cualquier  $e \in E$ , si  $\gamma_G(e) = \{v, w\}$  con  $v \neq w$  entonces  $f(v) \neq f(w)$ .

Cuando el conjunto  $C$  sea un conjunto de colores, la aplicación  $f$  lo que hace es asignar un color a cada vértice de  $G$ , de forma que dos vértices adyacentes no tienen el mismo color.

Se llama número cromático de  $G$ , y lo representaremos como  $\chi(G)$  al cardinal del menor conjunto  $C$  para el que existe una coloración de  $G$ .

### Ejemplo 6.9.1.

1. El grafo  $\bullet \text{---} \bullet$  necesita al menos dos colores para colorearlo, ya que los dos vértices no pueden ser coloreados con el mismo color al ser adyacentes. Su número cromático es por tanto 2.
2. En general, el número cromático del grafo  $K_n$  es  $n$ , pues todos los vértices deben tener colores distintos, ya que dos vértices cualesquiera son adyacentes.
3. Una definición alternativa de grafo bipartido es la de un grafo cuyo número cromático es 2, pues se tiene que un grafo es bipartido si, y sólo si, su número cromático vale 2.  
Si el grafo es bipartido, con partición  $V = V_1 \cup V_2$ , entonces podemos colorear todos los vértices de  $V_1$  de un color, y todos los vértices de  $V_2$  de otro color. Es claro entonces que dos vértices adyacentes tienen distinta coloración.

4. Si  $G_1$  es un subgrafo de  $G_2$ , entonces  $\chi(G_1) \leq \chi(G_2)$ .
5. Si un grafo es plano, su número cromático es menor o igual que 4. Éste es un problema que se planteó por primera vez a mitad del siglo XIX, cuando se intentaba colorear los condados de un mapa de Inglaterra de forma que dos condados con frontera común tuvieran distinto color. El problema estuvo abierto durante más de un siglo, hasta que en 1976, Appel y Haken probaron el resultado basándose en un complicado análisis computacional.  
El recíproco de este resultado no es cierto.  $K_{3,3}$  tiene número cromático igual a 2, y sin embargo no es plano.

En general, determinar el número cromático de un grafo es complicado. Para ello, vamos a valernos del polinomio cromático.

**Definición 75.** Sea  $G$  un grafo y  $x \in \mathbb{N}$ . Vamos a denotar por  $p(G, x)$  al número de coloraciones distintas, con  $x$  colores, que tiene el grafo  $G$ .

### Ejemplo 6.9.2.

1. Si  $G$  es un grafo que tiene al menos un lado (que no es lazo) entonces  $p(G, 1) = 0$ .
2. Si queremos colorear el grafo  $K_2$  y disponemos de  $x$  colores, entonces para uno de los vértices podemos elegir cualquiera de los  $x$  colores, mientras que para el otro podemos elegir entre los  $x - 1$  restantes. El principio del producto nos dice entonces que  $p(K_2, x) = x(x - 1)$ .
3. En general, se tiene que  $p(K_n, x) = x(x - 1) \cdots (x - n + 1)$ . De aquí se deduce que si  $m \leq n$ ,  $p(K_n, m) = 0$ , mientras que  $p(K_n, n) = n!$ . Por tanto, el número cromático de  $K_n$  es  $n$ .
4. Si  $G$  es un grafo cuyas componentes conexas son  $G_1, G_2, \dots, G_m$  entonces  $p(G, x) = p(G_1, x) \cdot p(G_2, x) \cdots p(G_m, x)$ .  
Por tanto, nos limitaremos a estudiar las coloraciones de los grafos conexos.
5. Si  $G$  es un grafo con  $n$  vértices, que es un camino simple, entonces  $p(G, x) = x(x - 1)^{n-1}$ .  
Es decir,  $G = (V, E)$  donde  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  y  $E = \{e_1, e_2, \dots, e_{n-1}\}$  y  $\gamma_G(e_i) = \{v_i, v_{i+1}\}$ .  
En este caso, para elegir una coloración de  $G$  con  $x$  colores, podemos elegir el que queramos para  $v_1$ , y para el resto de los vértices tenemos  $x - 1$  posibilidades (todas menos la que hayamos elegido para  $v_{i-1}$ ). El principio del producto nos dice que  $p(G, x) = x(x - 1)^{n-1}$ .

Antes de ver cómo calcular el polinomio cromático de un grafo, realizamos la siguiente construcción.

Dado un grafo  $G$ , tomamos un lado  $e$  (que no sea un lazo) que una los vértices  $u$  y  $v$ . Entonces el grafo  $G_e$  es el grafo con los mismos vértices que  $G$ , pero al que se le ha quitado el lado  $e$ , y el grafo  $G'_e$  es el grafo que resulta de identificar en  $G_e$  los vértices  $u$  y  $v$ .

**Teorema 6.9.1.** Sea  $G$  un grafo, y  $u$  y  $v$  dos vértices adyacentes. Sea  $e$  el lado que los une. Entonces  $p(G_e, x) = p(G, x) + p(G'_e, x)$ .

*Demostración.* Vamos a descomponer el conjunto de las posibles coloraciones de  $G_e$  con  $x$  colores en dos subconjuntos, los cuales los identificaremos con las coloraciones de  $G$  y las de  $G'_e$  respectivamente (con  $x$  colores). Esto, junto con el principio de la suma, nos dará la relación que buscamos.

Puesto que en  $G_e$  los vértices  $u$  y  $v$  no son adyacentes, una coloración de  $G_e$  puede tener en los vértices  $u$  y  $v$  del mismo color o de distinto color.

Si tienen distinto color, lo que tenemos es una coloración del grafo  $G$  (obviamente, toda coloración de  $G$  es una coloración de  $G_e$ ). Por tanto, las coloraciones en las que  $u$  y  $v$  tienen distinto color pueden identificarse con las coloraciones de  $G$ .

Si  $u$  y  $v$  tienen el mismo color, entonces lo que tenemos es una coloración de  $G'_e$ . Recíprocamente, cualquier coloración de  $G'_e$  nos da lugar a una coloración de  $G_e$  en la que  $u$  y  $v$  tienen el mismo color. ■

Esta expresión podemos verla como  $p(G, x) = p(G_e, x) - p(G'_e, x)$ , lo cual nos permite reducir el cálculo del polinomio cromático de un grafo al cálculo de polinomios cromáticos de grafos más pequeños (con menos lados o con menos vértices). Veamos algún ejemplo.

**Ejemplo 6.9.3.** Para simplificar la notación, vamos a representar el polinomio cromático de un grafo encerrando el grafo entre corchetes.

1. Vamos a calcular el polinomio cromático de un ciclo de longitud 4.

$$\begin{aligned} \boxed{\begin{array}{c} \bullet \quad \bullet \\ | \quad | \\ \bullet \quad \bullet \end{array}} &= \boxed{\begin{array}{c} \bullet \quad \bullet \\ | \quad | \\ \bullet \quad \bullet \end{array}} - \boxed{\begin{array}{c} \bullet \quad \bullet \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \end{array}} = x(x-1)^3 - x(x-1)(x-2) \\ &= x(x-1)[x^2 - 2x + 1 - x + 2] \\ &= x(x-1)(x^2 - 3x + 3). \end{aligned}$$

2. Vamos a calcular otro polinomio cromático.

$$\begin{aligned} \boxed{\begin{array}{c} \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \quad \bullet \quad \bullet \end{array}} &= \boxed{\begin{array}{c} \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \quad \bullet \quad \bullet \end{array}} - \boxed{\begin{array}{c} \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \quad \bullet \quad \bullet \end{array}} = \boxed{\begin{array}{c} \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \quad \bullet \quad \bullet \end{array}} \cdot \bullet - \boxed{\begin{array}{c} \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \quad \bullet \quad \bullet \end{array}} - \boxed{\begin{array}{c} \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \quad \bullet \quad \bullet \end{array}} = \boxed{\begin{array}{c} \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \quad \bullet \quad \bullet \end{array}} \cdot [\bullet] - 2 \cdot \boxed{\begin{array}{c} \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \quad \bullet \quad \bullet \end{array}} \\ &= x(x-1)(x-2)(x-3) \cdot x - 2 \cdot x(x-1)(x-2)(x-3) = x(x-1)(x-2)^2(x-3). \end{aligned}$$

## 6.10. Árboles

Comenzamos en esta sección el estudio de un tipo especial de grafos, los llamados árboles. Éstos fueron estudiados por vez primera por Kirchhoff, en 1847, en su trabajo de redes eléctricas. Sin embargo, estas estructuras son hoy día muy importantes en el estudio de las estructuras de datos, las ordenaciones, etc.

**Definición 76.** Un árbol es un grafo conexo que no tiene ciclos.

Un grafo que no tenga ciclos se denomina bosque.

Dado un grafo conexo, un subgrafo suyo se dice árbol generador si tiene todos los vértices y es un árbol.

Nótese que un árbol no puede tener lazos ni lados paralelos.

Un primer resultado sobre árboles, muy intuitivo, es el siguiente:

**Proposición 6.10.1.** Todo grafo conexo tiene un árbol generador.

Este resultado es consecuencia inmediata del siguiente lema, cuya demostración se deja como ejercicio.

**Lema 6.10.1.** Sea  $G$  un grafo conexo que contiene un ciclo. Entonces, si quitamos uno de los lados del ciclo el grafo sigue siendo conexo.

Otro resultado, también muy intuitivo es:

**Proposición 6.10.2.** *Todo árbol es un grafo plano.*

*Demostración:* Usando el teorema de Kuratowski el resultado es trivial, pues al no tener ciclos no puede tener ningún subgrafo que pueda contraerse hasta  $K_5$  o  $K_{3,3}$ . No obstante, puede darse también una demostración sin hacer uso de este teorema, por inducción.

En realidad, lo que vamos a probar es que *todo grafo con  $n$  lados y que no tenga ciclos es un grafo plano*, y esto lo haremos por inducción en  $n$ .

Para  $n = 0$  el resultado es trivialmente cierto, pues al no haber lados no pueden cruzarse.

Supuesto el resultado cierto para  $n$  lo demostramos para  $n + 1$ .

Si tenemos un grafo sin ciclos con  $n + 1$  lados, le quitamos un lado y nos resulta un grafo plano (pues no tiene ciclos y tiene  $n$  lados). Al no tener ciclos no divide al plano en regiones, por lo que dos puntos cualesquiera pueden unirse por una línea. Por tanto, el lado que añadimos podemos dibujarlo sin que corte a ninguno de los ya existentes. ■

**Corolario 6.10.1.** *Sea  $G$  un grafo conexo con  $n$  vértices. Entonces  $G$  es un árbol si, y sólo si,  $G$  tiene  $n - 1$  lados.*

*Demostración:* Supongamos que  $G$  es un árbol. Entonces es un grafo plano, y el número de regiones en que se divide el plano es 1. Por el teorema 6.8.1 se tiene que  $n - l + 1 = 2$ , lo que implica que  $l = n - 1$ .

Recíprocamente, supongamos que tenemos un grafo conexo con  $n$  vértices y  $n - 1$  lados. Si no fuera un árbol, podríamos obtener un árbol generador quitando lados, lo que nos daría un árbol con  $n$  vértices y menos de  $n - 1$  lados, lo cual no es posible. ■

El siguiente teorema nos da una caracterización de los árboles.

**Teorema 6.10.1.** *Sea  $G$  un grafo con  $n$  vértices, sin lados paralelos ni lazos. Entonces son equivalentes:*

1.  $G$  es un árbol.
2. Dos vértices cualesquiera están unidos por un único camino simple.
3.  $G$  es conexo, pero si le quitamos un lado deja de serlo.
4.  $G$  no tiene ciclos, pero si le añadimos un lado tendrá algún ciclo.
5.  $G$  tiene  $n - 1$  lados.

Es decir, los árboles son los menores grafos conexos, o los mayores grafos sin ciclos.

Nótese también que para las caracterizaciones segunda, tercera y cuarta no es necesario suponer que el grafo no tiene lazos ni lados paralelos, pues de ellas se deduce.

*Demostración:* La equivalencia entre 1 y 5 ya la hemos visto. Vamos a ver que los enunciados 1,2,3,4 son equivalentes.

$1 \implies 2$

Supongamos que  $G$  es un árbol. Entonces es conexo, luego dados dos vértices cualesquiera hay un camino que los une. Por la proposición 6.1.1, hay un camino simple entre ambos vértices. Si hubiera más de uno, entonces el grafo contendría un ciclo (ver proposición 6.1.2), y esto no es posible, pues  $G$  es un árbol.

$2 \implies 3$

Puesto que dados dos vértices cualesquiera hay un camino (simple) que los une, el grafo es conexo. Eliminamos del grafo  $G$  un lado cualquiera. Supongamos que este lado une los vértices  $u$  y  $v$ . Entonces, en el grafo resultante (que llamaremos  $G'$ ) no hay ningún camino que una  $u$  y  $v$ .

Esto es así porque de haber un camino que uniera  $u$  y  $v$  tendríamos un camino simple que uniría  $u$  con  $v$  en  $G'$ , lo que nos daría dos caminos simples que unen  $u$  con  $v$  en  $G$ : el que hemos encontrado

en  $G'$  y el camino de longitud 1  $uv$ . Pero por hipótesis, entre dos vértices había un único camino simple.

Por tanto, al eliminar un lado cualquiera el grafo resultante no es conexo, como queríamos.

$3 \implies 4$

Supongamos que  $G$  tuviera un ciclo. Entonces, por el lema 6.10.1, podríamos quitarle un lado a  $G$  y el grafo seguiría siendo conexo. Por tanto,  $G$  no tiene ciclos.

Le añadimos a  $G$  un lado. Por ejemplo, el lado  $uv$ . Entonces, entre los vértices  $u$  y  $v$  hay al menos dos caminos simples. Uno, el camino  $uv$ , y otro, que podemos tomar en el grafo  $G$  por ser éste conexo.

Al haber dos caminos simples entre dos vértices, el grafo resultante contiene un ciclo (proposición 6.1.2).

$4 \implies 1$

Hay que demostrar que  $G$  es conexo, en cuyo caso será un árbol (por no contener ciclos).

Pero si  $G$  no fuera conexo, habría dos vértices  $u$  y  $v$  que no están unidos por ningún camino. Podríamos entonces añadir a  $G$  el lado  $uv$ , y el grafo no contendría ningún ciclo, en contra de nuestra hipótesis.

Por tanto, el grafo  $G$  es conexo.

■