Capítulo 5

Inducción y recurrencia

5.1. Inducción y deducción.

Cuando realizamos una afirmación o proposición, una forma de clasificarla podría ser si corresponde con una proposición general (por ejemplo, una proposición general podría ser *a los niños les gusta el chocolate*), en la que se dice algo sobre todos los elementos de un conjunto, o con una proposición particular (por ejemplo, *al hijo de Juanito le gusta el chocolate*), en la que se afirma algo sobre algún elemento en particular de un conjunto.

Si admitimos como cierta una proposición general, podemos pasar a la certeza de las correspondientes proposiciones particulares. Por ejemplo, si fuera cierta la afirmación general que hemos puesto anteriormente de que a los niños les gusta el chocolate, de ahí podemos afirmar con seguridad que al hijo de Juanito (que es un niño) le gusta el chocolate.

El proceso por el cual inferimos la certeza de una proposición particular a partir de la certeza de una general, se llama *deducción*. Del hecho de que a los niños les gusta el chocolate hemos deducido que al hijo de Juanito le gusta el chocolate.

Recíprocamente, de la certeza de una o varias afirmaciones particulares, podemos inferir la certeza de una proposición general. A este proceso, se le suele llamar *inducción*. Por ejemplo, después de haber conocido a varios niños y haber comprobado que a todos ellos les gusta el chocolate podemos inducir que a todos los niños les gusta el chocolate.

En el avance científico están presentes ambos procesos. A partir de la observación de determinados fenómenos, se pasa a una afirmación general, que posteriormente permite deducir nuevos hechos. Por ejemplo, la ley de la Gravitación Universal fue una generalización de lo que se observaba que ocurría con los objetos que encontrábamos en la Tierra, así como el comportamiento de los planetas en su interacción con el Sol. Ahora, de esta afirmación general se han deducido gran cantidad de consecuencias que no son más que la particularización de esta ley al caso de dos o más objetos.

La certeza de una proposición general nos asegura la certeza de cada una de las proposiciones particulares. El proceso inverso (el paso de las proposiciones particulares a la general) sin embargo no es tan claro. Aunque hayamos observado que a cientos de niños les gusta el chocolate, no por ello podemos estar seguros de la certeza de que *a todos los niños les gusta el chocolate*.

En matemáticas, cuando afirmamos algo, hemos de tener la certeza absoluta de que lo que decimos es verdad. Nos preguntamos entonces: ¿tiene cabida la inducción en matemáticas?.

Para responder a esta pregunta, vamos a analizar qué ocurre cuando sumamos los números impares. Empezamos por la suma de sólo un número impar (el primero), continuamos calculando la suma de los dos primeros números impares, y así sucesivamente.

$$\begin{array}{lcrcl}
1 & = & 1 & = & 1^2 \\
1+3 & = & 4 & = & 2^2 \\
1+3+5 & = & 9 & = & 3^2 \\
1+3+5+7 & = & 16 & = & 4^2 \\
1+3+5+7+9 & = & 25 & = & 5^2 \\
1+3+5+7+9+11 & = & 36 & = & 6^2
\end{array}$$

Podemos comprobar, como por ejemplo, la suma $1+3+5+7+9+11+13+15+17+19$ vale 100, que es igual a 10^2.

A la vista de esto, ¿podemos imaginarnos cuánto valdría, por ejemplo, la suma de los números impares desde el 1 hasta el 199, sin necesidad de realizar la suma?

Esta suma se corresponde con la suma de los 100 primeros números impares, luego esa suma parece que debe valer $100^2 = 10000$. Con un programa sencillo de ordenador podemos comprobar que eso es cierto.

¿Nos permiten estos ejemplos inducir una regla para calcular la suma de los n primeros números enteros impares?. Todo apunta a que el valor de esa suma vale n^2.

> Antes de continuar, vamos a tratar de escribir más formalmente esta regla. Lo primero que tenemos que ver es cómo hacer referencia al quinto número impar, o al vigésimo cuarto número impar. Fácilmente vemos que el quinto número impar es $9 = 2\cdot 5-1$, y que el vigésimo cuarto es $47 = 2\cdot 24-1$. Por tanto, el n-ésimo número impar es $2n-1$. Entonces, lo que afirmamos es que la suma de los números impares, desde 1 hasta $2n-1$, vale n^2.
>
> $$1+3+5+\cdots+(2n-1) = n^2$$
>
> O si adoptamos la notación de sumatoria
>
> $$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$$

Podemos ahora tomar números al azar, por ejemplo, $n = 47$, $n = 134$, $n = 3627$, y comprobar que esta afirmación ($\sum\limits_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$) es verdadera.

Pero por muchos números que elijamos, eso no nos garantiza que esta afirmación sea cierta para cualquiera de los infinitos números naturales que existen.

Supongamos, por un momento, que la afirmación es cierta para $n = 78$ (no hace falta que lo comprobemos), es decir,

$$1+3+5+7+\cdots 151+153+155 = 78^2 = 6084$$

Entonces, para calcular la suma de los 79 primeros números impares, podemos aprovechar lo que tenemos

$$1+3+5+7+\cdots 153+155+157 = 78^2+157 = 6084+157 = 6241 = 79^2$$

Y vemos que si la afirmación es cierta para $n = 78$ entonces es cierta para $n = 79$. Tendríamos entonces que

$$1+3+5+7+\cdots 153+155+157+159 = 79^2+159 = 6241+159 = 6400 = 80^2$$

Y la afirmación sería cierta para $n = 80$. Es decir, el hecho de ser cierta para $n = 78$ nos garantiza que es cierta para $n = 79$, y para $n = 80$. ¿Podríamos repetir esto para obtener que es cierta para $n = 81$, $n = 82$, etc?

Vamos a escribirlo de otra forma

$$1+3+5+7+\cdots 153+155+157+159 = 79^2+159 = 79^2+2\cdot 79+1 = 79^2+2\cdot 79\cdot 1+1^2 = (79+1)^2 = 80^2$$

Y observamos que el valor concreto $n = 79$ no es relevante en el razonamiento anterior. Por tanto, para cualquier número natural n, si suponemos que

$$1+3+5+\cdots+(2n-3)+(2n-1) = n^2$$

entonces

$$1+3+5+\cdots+(2n-3)+(2n-1)+[2(n+1)-1]=n^2+2n+1=(n+1)^2$$

Dicho de otra forma, si la suma de los primeros n números impares vale n^2, entonces la suma de los $n+1$ primeros números impares vale $(n+1)^2$.

Entonces, si es cierto que $\sum_{k=1}^{78}(2k-1)=78^2$, también es cierto que $\sum_{k=1}^{79}(2k-1)=79^2$, y es cierto que $\sum_{k=1}^{80}(2k-1)=80^2$, y que $\sum_{k=1}^{81}(2k-1)=81^2$. Repitiendo este proceso las veces que haga falta, podríamos ver que es cierto que $\sum_{k=1}^{3421}(2k-1)=3421^2$, o que $\sum_{k=1}^{792348579}(2k-1)=792348579^2$.

Nosotros hemos comprobado que para $n=1$ la afirmación es cierta (y para $n=2,3,4,5,6$). Como cualquier número natural n lo podemos obtener a partir de 1 sumándole uno unas cuantas veces, entonces, para cualquier número natural $n\geq 1$ podemos afirmar que la suma de los primeros n números impares vale n^2, es decir,

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=n^2$$

Aquí termina el proceso de inducción. Si lo analizamos, vemos que lo que hemos hecho ha sido:

- A partir de unos cálculos, hemos inducido una regla que pensamos que debe ser válida para todos los números naturales.
- Hemos comprobado que esa regla vale para el número natural $n=1$.
- Suponiendo que la regla vale para un número natural n, hemos comprobado que vale para el número natural $n+1$.

Y esto nos garantiza la veracidad de la proposición general.

Para poder dar por cierta una afirmación matemática es necesario disponer de un argumento que asegure su veracidad. El hecho de comprobarla para unos cuantos casos particulares, por muchos que sean no nos garantiza nada. Por ejemplo, podemos observar lo siguiente:

O fijémonos en lo siguiente:

	$4=2+2$	$6=3+3$	$8=3+5$	$10=3+7$
$12=5+7$	$14=3+11$	$16=3+13$	$18=7+11$	$20=3+17$
$22=5+17$	$24=11+13$	$26=3+23$	$28=5+23$	$30=7+23$
$32=3+29$	$34=3+31$	$36=5+31$	$38=7+31$	$40=3+37$
$42=5+37$	$44=3+41$	$46=3+43$	$48=5+43$	$50=3+47$

Hemos tomado todos los números pares mayores que 2, hasta el 50, y todos los hemos podido expresar como suma de dos números primos.

No se ha encontrado ningún número par, mayor que 2, que no pueda expresarse como suma de dos números primos. De hecho, se ha comprobado para todos los números menores que 1 trillón. Sin embargo, eso es muy poco comparado con los infinitos números pares que existen.

Hasta el momento no se ha encontrado ningún argumento que permita afirmar que el resultado es cierto para todos los números pares. Por tanto, el resultado no pasa de ser una mera conjetura, conocida como *conjetura de Goldbach*, en honor a Christian Goldbach, matemático prusiano (de Königsberg, actual Kaliningrado) que en 1742 comunicó por carta a Leonard Euler que había conjeturado que todo número impar mayor que 5 es suma de tres números-primos. Euler le respondió diciendo que esta conjetura era equivalente a que todo número par mayor que 2 es suma de dos números primos.

5.2. Números naturales. Principio de inducción.

El ejemplo que acabamos de analizar es una aplicación del conocido *principio de inducción*. El contexto natural donde aplicarlo es el conjunto de los números naturales (aunque con algunas modificaciones podría extenderse a cualquier conjunto bien ordenado, o también al conjunto de los números enteros). Todos sabemos que a dicho conjunto se le suele denominar como $\mathbb{N}$, y que está formado por los elementos $0, 1, 2, \cdots$. Es decir, $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \cdots\}$. Para llegar a este conjunto podemos basarnos en los axiomas de Peano, o bien, partir de una construcción basada en los axiomas de la teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel, y de la que los axiomas de Peano son consecuencias de la construcción realizada.

No vamos a entrar en cómo obtener el conjunto $\mathbb{N}$. Lo que sí vamos a hacer es recordar algunas propiedades y características de este conjunto y sus elementos.

Para empezar, a los elementos del conjunto $\mathbb{N}$ los llamaremos números naturales. Dados dos números naturales m, n, tenemos definidos otros dos números naturales, llamados respectivamente suma y producto de m y n, y representados mediante $m + n$ y $m \cdot n$ (o simplemente mn). Esto nos define dos operaciones en $\mathbb{N}$, que satisfacen las siguientes propiedades:

i) Para cualesquiera $m, n, p \in \mathbb{N}$, $(m + n) + p = m + (n + p)$ (es decir, la suma es asociativa).

ii) Para cualesquiera $m, n \in \mathbb{N}$, $m + n = n + m$ (es decir, la suma es conmutativa).

iii) Existe en $\mathbb{N}$ un elemento, representado por 0 tal que para cada $m \in \mathbb{N}$ se tiene que $m + 0 = m$ (existencia de elemento neutro para la suma).

iv) Si $m + n = m + p$ entonces $n = p$ (Propiedad cancelativa).

v) Para cualesquiera $m, n, p \in \mathbb{N}$, $(m \cdot n) \cdot p = m \cdot (n \cdot p)$ (es decir, el producto es asociativo).

vi) Para cualesquiera $m, n \in \mathbb{N}$, $m \cdot n = n \cdot m$ (es decir, el producto es conmutativo).

vii) Existe en $\mathbb{N}$ un elemento, representado por 1 tal que para cada $m \in \mathbb{N}$ se tiene que $m \cdot 1 = m$ (existencia de elemento neutro para el producto).

viii) Si $m \cdot n = m \cdot p$ y $m \neq 0$ entonces $n = p$.

ix) Para cualesquiera $m, n, p \in \mathbb{N}$, $m \cdot (n + p) = m \cdot n + m \cdot p$ (la suma es distributiva respecto al producto).

Al conjunto de los números naturales, salvo el cero, lo denotaremos como $\mathbb{N}^*$. Es decir, $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \cdots\}$

Con estas propiedades, estamos diciendo que $\mathbb{N}$ es un semianillo conmutativo con elemento unidad. De momento hay muchos conjuntos para los que es cierto todo lo dicho hasta aquí. Por ejemplo, $\mathbb{Z}$ (los números enteros), $\mathbb{Q}$ (los números racionales), $\mathbb{R}$ (los números reales), $\mathbb{Q}^+$ (las fracciones mayores o iguales que cero), $\mathbb{R}^+$ (los números reales mayores o iguales que cero), los elementos de $\mathbb{Q}^+$ con denominador 5 ó 1, $\mathbb{C}$ (los números complejos), $\mathbb{Z}_p$, con p primo (los enteros módulo p), $\mathbb{R}[x]$ (los polinomios con coeficientes reales), etc.

También en $\mathbb{N}$ hay definida una relación como sigue:

$$m \leq n \text{ si existe } p \in \mathbb{N} \text{ tal que } m + p = n$$

que satisface las siguientes propiedades:

x) $m \leq m$ para todo $m \in \mathbb{N}$ (la relación es reflexiva).

xi) Si $m \leq n$ y $n \leq m$ entonces $m = n$ (la relación es antisimétrica).

xii) Si $m \leq n$ y $n \leq p$ entonces $m \leq p$ (la relación es transitiva).

xiii) Para cualesquiera $m, n \in \mathbb{N}$, $m \leq n$ ó $n \leq m$.

Una relación que satisface estas tres las propiedades x), xi), xii) es lo que se conoce como una relación de orden (u orden parcial). Si además satisface la propiedad xiii) entonces lo que tenemos es un orden total.

En todos los ejemplos vistos en la observación anterior podemos definir una relación de orden total. Sin embargo, la forma de definirlo en $\mathbb{C}$ o en $\mathbb{R}[x]$ es algo rebuscada y "poco natural". Por tanto, de los conjuntos anteriores, nos quedamos con $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}_p$, $\mathbb{Q}^+$, $\mathbb{R}^+$, o los números racionales con denominador 1 ó 5 (el orden en $\mathbb{Z}_p$ sería $0 \leq 1 \leq 2 \leq \cdots \leq p-1$).

xiv) $m \leq n$ implica que $m+p \leq n+p$ para todo $p \in \mathbb{N}$.

xv) $m+p \leq n+p$ implica que $m \leq n$.

xvi) $m \leq n$ implica que $m \cdot p \leq n \cdot p$.

xvii) Si $m \cdot p \leq n \cdot p$ y $p \neq 0$ entonces $m \leq n$.

Las propiedades xiv) y xv) fallan en $\mathbb{Z}_p$. Por ejemplo, en $\mathbb{Z}_7$ tendríamos $2 \leq 5$, pero $2+4$ no es menor o igual que $5+4$. Las propiedades xvi) y xvii) fallan también en $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$. Por ejemplo, $2 \leq 5$ pero $2 \cdot (-1)$ no es menor o igual que $5 \cdot (-1)$.

Las 17 propiedades vistas hasta ahora valen, además de para $\mathbb{N}$, para otros conjuntos, como $\mathbb{Q}^+$, $\mathbb{R}^+$, los números racionales positivos con denominador 1 ó 5, etc. Lo que distingue a $\mathbb{N}$ de estos conjuntos es el *Principio de inducción*, que viene a decirnos que los números naturales podemos recorrerlos *de uno en uno, y empezando por cero.*

Principio de inducción:

Si A es un subconjunto de $\mathbb{N}$ tal que:

$0 \in A$

Si $n \in A$ entonces $n+1 \in A$

Entonces $A = \mathbb{N}$.

Es decir, cualquier número natural puede ser obtenido a partir del cero sin más que sumar uno las veces que sean necesarias. Si lo pensamos, para los conjuntos $\mathbb{Q}^+$ o $\mathbb{R}^+$ no se cumple esta propiedad, pues procediendo así siempre nos dejamos números "en medio".

También podemos enunciar este principio diciendo que si A es un subconjunto de $\mathbb{N}^*$ tal que $1 \in A$ y $(n \in A \Longrightarrow n+1 \in A)$, entonces $A = \mathbb{N}^*$.

El ejemplo que hemos analizado en la sección anterior, podemos verlo ahora así.

Tomamos $A = \{n \in \mathbb{N}^* : \sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2\}$.

Comprobamos que $1 \in A$ (de hecho, hemos comprobado que $1, 2, 3, 4, 5, 6 \in A$), y que si $n \in A$ entonces $n+1 \in A$.

Por el principio de inducción, tenemos que $A = \mathbb{N}^*$, luego para cualquier número natural $n \geq 1$ se tiene que $n \in A$, es decir, $\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$.

El principio de inducción es la base de muchas demostraciones en las que intervienen los números naturales. Veamos un ejemplo.

Ejemplo 5.2.1. *Empezamos observando lo siguiente:*

$$\begin{array}{lcrcl}
2^0 & = & 1 & = & 2^1 - 1 \\
2^0 + 2^1 & = & 3 & = & 2^2 - 1 \\
2^0 + 2^1 + 2^2 & = & 7 & = & 2^3 - 1 \\
2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 & = & 15 & = & 2^4 - 1 \\
2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 & = & 31 & = & 2^5 - 1 \\
2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 & = & 63 & = & 2^6 - 1
\end{array}$$

Luego parece ser que, para cualquier número natural n se verifica que

$$2^0 + 2^1 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$$

Para esto, consideramos el conjunto A cuyos elementos son los números naturales para los que se verifica la propiedad anterior, es decir,

$$A = \{n \in \mathbb{N} : 2^0 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1\}$$

Claramente se tiene que $0 \in A$, pues $2^0 = 2^{0+1} - 1$.

Supongamos ahora que $n \in A$, y veamos que $n+1 \in A$, es decir, supongamos que $2^0 + 2^1 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$ y comprobemos que $2^0 + 2^1 + \cdots + 2^n + 2^{n+1} = 2^{n+2} - 1$.

$$2^0 + 2^1 + \cdots + 2^n + 2^{n+1} = (2^0 + 2^1 + \cdots + 2^n) + 2^{n+1} = 2^{n+1} - 1 + 2^{n+1} = 2 \cdot 2^{n+1} - 1 = 2^{n+2} - 1$$

Por el principio de inducción se tiene que $A = \mathbb{N}$, es decir, la propiedad es cierta para todo $n \in \mathbb{N}$.

Una demostración basada en el principio de inducción es lo que se conoce como una demostración por inducción.

Si queremos demostrar por inducción que $P(n)$ es cierto para todo $n \in \mathbb{N}$ (donde $P(n)$ es una propiedad que hace referencia a n), podemos hacerlo como sigue:

- Caso base: Demostramos que $P(0)$ es cierto.
- Hipótesis de inducción: Suponemos que $P(n)$ es cierto.
- Paso inductivo: A partir de la hipótesis de inducción, demostramos que es cierto $P(n+1)$.

A continuación vamos a ver distintos ejemplos de aplicación de esto último.

Ejemplo 5.2.2.

1. *Vamos a comprobar que para todo $n \geq 1$ se verifica que*

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Hacemos esto por inducción:

- *Caso base: Para $n = 1$ el resultado es trivialmente cierto.*
- *Hipótesis de inducción: Para un número natural n se tiene que $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.*
- *Paso inductivo: A partir de la hipótesis de inducción hemos de probar que $1 + 2 + \cdots + n + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$*

$$(1 + 2 + \cdots + n) + n + 1 = \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Cuentan que cuando Gauss tenía 10 años de edad, su profesor de aritmética, enfadado por el mal comportamiento de sus alumnos, los puso a calcular la suma de los primeros 100 números naturales. Mientras, el profesor se sentó en su silla a leer el periódico, confiando en que los niños tardarían bastante tiempo en realizar la suma. Sin embargo, en poco tiempo, el pequeño Gauss, llegó con el resultado de la suma: 5050.

El profesor, intrigado por el poco tiempo que había tardado le pidió que le explicara cómo había obtenido tal resultado. Gauss entonces explicó que podemos escribir la suma como $1+2+3+\cdots+99+100$, pero también como $100+99+98+\cdots+2+1$.

Escribimos ambas sumas (que son iguales) una debajo de otra

$$\begin{array}{ccccccccccccc} 1 & + & 2 & + & 3 & + & \cdots & + & 98 & + & 99 & + & 100 \\ 100 & + & 99 & + & 98 & + & \cdots & + & 3 & + & 2 & + & 1 \end{array}$$

Y ahora sumamos en vertical

$$\begin{array}{ccccccccccccc} 1 & + & 2 & + & 3 & + & \cdots & + & 98 & + & 99 & + & 100 \\ 100 & + & 99 & + & 98 & + & \cdots & + & 3 & + & 2 & + & 1 \\ \hline 101 & + & 101 & + & 101 & + & \cdots & + & 101 & + & 101 & + & 101 \end{array}$$

La suma inferior vale $101 \cdot 100$, y puesto que esta suma es 2 veces la suma que nos piden, la suma de los 100 primeros números es $\frac{101 \cdot 100}{2} = 5050$.
Utilizando esta técnica podríamos haber obtenido también la fórmula que hemos visto de que $1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$.
Llamemos S a la suma. Entonces:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} S & = & 1 & + & 2 & + & 3 & + & \cdots & + & (n-2) & + & (n-1) & + & n \\ S & = & n & + & (n-1) & + & (n-2) & + & \cdots & + & 3 & + & 2 & + & 1 \\ \hline 2S & = & (n+1) & + & (n+1) & + & (n+1) & + & \cdots & + & (n+1) & + & (n+1) & + & (n+1) \end{array}$$

Es decir, $2S = n(n+1)$, luego $S = \frac{n(n+1)}{2}$.

2. *Vamos a demostrar que para cualquier número natural n, el número $7^n - 1$ es múltiplo de 6.*

   Procedemos también por inducción.

   - *Caso base: Aquí el primer caso es $n = 0$. Para $n = 0$ se tiene que $7^n - 1 = 7^0 - 1 = 1 - 1 = 0$, que claramente es múltiplo de 6.*
   - *Hipótesis de inducción: El número $7^n - 1$ es múltiplo de 6, es decir, para algún número entero k se tiene que $7^n - 1 = 6k$.*
   - *Paso inductivo: Suponiendo que la hipótesis de inducción es cierta, tenemos que probar que $7^{n+1} - 1$ es también múltiplo de 6.*
     Por la hipótesis de inducción sabemos que $7^n = 1 + 6k$. Entonces:

     $$7^{n+1} - 1 = 7 \cdot 7^n - 1 = 7 \cdot (1 + 6k) - 1 = 7 + 7 \cdot 6k - 1 = 6 \cdot 7k + 6 = 6 \cdot (7k + 1)$$

     que es múltiplo de 6.

   Con esto concluye la demostración.

   La inducción no es la única forma de demostrar afirmaciones sobre los números naturales.
   Por ejemplo, podemos demostrar la anterior afirmación operando como sigue:

   $$7^n - 1 = (7-1) \cdot (7^{n-1} + 7^{n-2} + \cdots + 7^1 + 7^0) = 6 \cdot (7^{n-1} + 7^{n-2} + \cdots + 7 + 1)$$

   lo que nos muestra que es múltiplo de 6.
   También podríamos haberlo hecho trabajando módulo 6. Decir que $7^n - 1$ es múltiplo de 6 es lo mismo que decir que $7^n - 1 = 0$ en $\mathbb{Z}_6$. Como en $\mathbb{Z}_6$ $7 = 1$, entonces $7^n - 1 = 1^n - 1 = 1 - 1 = 0$, como queríamos.

3. *Puede ocurrir que al demostrar algo por inducción, en el proceso nos aparezca alguna propiedad que también podemos probar por inducción. Por ejemplo, vamos a demostrar que para cualquier número natural n, el número $n^3 + 3n^2 + 2n$ es múltiplo de 6.*

   Como siempre, comprobamos el caso base, y demostramos el paso inductivo.

   - *Caso base: El resultado es cierto para $n = 0$, es decir, $0^3 + 3 \cdot 0^2 + 2 \cdot 0$ es múltiplo de 6.*
   - *Hipótesis de inducción: Para un número natural n, el número $n^3 + 3n^2 + 2n$ es múltiplo de 6, es decir, $n^3 + 3n^2 + 2n = 6k$ para algún número entero k.*
   - *Paso inductivo: A partir de la hipótesis de inducción, demostremos que $(n+1)^3 + 3 \cdot (n+1)^2 + 2 \cdot (n+1)$ es múltiplo de 6.*

$$\begin{aligned}(n+1)^3+3\cdot(n+1)^2+2\cdot(n+1) &= n^3+3n^2+3n+1+3(n^2+2n+1)+2n+2=\\ &= n^3+3n^2+3n+1+3n^2+6n+3+2n+2=\\ &= (n^3+3n^2+2n)+(3n^2+3n+1+6n+3+2)=\\ &= 6k+(3n^2+3n+6n+6)=\\ &= 6(k+n+1)+3(n^2+n).\end{aligned}$$

Si pudiéramos asegurar que el número n^2+n es múltiplo de 2 entonces $3(n^2+n)$ sería múltiplo de 6, y con eso concluiríamos que $(n+1)^3+3(n+1)^2+2(n+1)$ es múltiplo de 6, que es lo que queremos. Entonces abrimos aquí una nueva demostración.

Vamos a demostrar que para cualquier número natural n, n^2+n es múltiplo de 2. Lo hacemos por inducción.

- *Caso base: 0^2+0 es múltiplo de 2. Claramente es cierto.*
- *Hipótesis de inducción: n^2+n es múltiplo de 2, es decir, $n^2+n=2l$ para algún número entero l.*
- *Paso inductivo: Hemos de comprobar, apoyándonos en que $n^2+n=2l$, que $(n+1)^2+(n+1)$ es múltiplo de 2.*

$$(n+1)^2+(n+1)=n^2+2n+1+n+1=n^2+n+2n+2=2l+2n+2=2(l+n+1)$$

Y con esto, terminamos de demostrar que n^2+n es múltiplo de 2 para cualquier número natural n.
También lo podríamos haber hecho factorizando n^2+n, ya que $n^2+n=n(n+1)$. Puesto que n y $n+1$ son dos números consecutivos, uno de ellos tiene que ser múltiplo de 2, luego su producto es también múltiplo de 2.

Y ahora, como ya sabemos que $n^2+n=2l$ para algún número entero l tenemos que

$$(n+1)^3+3\cdot(n+1)^2+2\cdot(n+1)=6(k+n+1)+3\cdot 2l=6(k+n+1+l)$$

Y esto concluye nuestra demostración por inducción de que n^3+3n^2+2n es múltiplo de 6.

También aquí podríamos haber hecho la demostración sin usar el principio de inducción, ya que $n^3+3n^2+2n=n(n+1)(n+2)$. Entre los números n, $n+1$, $n+2$, uno de ellos es múltiplo de 3, luego su producto también lo es; y al menos uno de ellos es múltiplo de 2, luego su producto también lo es. Por tanto, n^3+3n^2+2n es múltiplo de 2 y de 3, luego es múltiplo de 6.

Como hemos dicho, para demostrar algún enunciado por inducción necesitamos dos cosas. Comprobar que el enunciado es cierto para el primer caso, y supuesto cierto para el caso n, comprobarlo para el caso $n+1$. Ambas cosas son importantes. La primera, nos permite arrancar el proceso de inducción. La segunda nos asegura que la máquina inductiva está en condiciones de hacer su trabajo. Pero si no la arrancamos, no conseguimos nada.

Por ejemplo, podríamos intentar probar que para cualquier $n\geq 1$, se verifica que $\sum\limits_{k=1}^{n}(2k-1)=n^2+1$ (algo que sabemos que no es cierto).

Con lo visto anteriormente, es sencillo comprobar que si $\sum\limits_{k=1}^{n}(2k-1)=n^2+1$ entonces $\sum\limits_{k=1}^{n+1}(2k-1)=(n+1)^2+1$. Pero en cuanto intentamos comprobarlo para $n=1$ vemos que habría que probar que $1=2$, lo cual no es cierto.

Ya hemos hablado antes de lo que significan las demostraciones en matemáticas. Éstas son una herramienta que permiten afirmar que un determinado enunciado es cierto con total seguridad, en contraste con las ciencias experimentales, en las que esta seguridad no se alcanzará nunca. Por ejemplo, según la ley de gravitación universal dos cuerpos cualesquiera se atraen por una fuerza descrita en esa ley. Esto es algo que todos experimentamos día a día, al ver todos los objetos atraídos por la Tierra. Y se ha observado en miles de objetos celestes. A partir de esta experiencia se ha formulado una afirmación referente a todos los cuerpos en el espacio. ¿Podemos estar seguros de que nunca vamos a encontrar dos cuerpos que violen esta ley?.

Las distintas teorías físicas han ido cambiando a lo largo de la historia. Tras varias teorías sobre el Sistema Solar, se llegó a la Teoría de la Gravitación de Newton que logró dar una explicación bastante coherente del Universo a gran escala. Sin embargo, la concepción del Universo surgida a través de la ley de la Gravitación universal tuvo que ser modificada con la aparición de la Teoría de la Relatividad de Einstein.

En matemáticas, cuando se demuestra alguna afirmación o algún teorema se asegura que ese teorema es cierto, y que nada podrá ponerlo en entredicho (siempre que la demostración sea correcta).

Por ejemplo, podemos afirmar que para cualquier número natural n, la suma de las distintas potencias de 2 hasta 2^n vale $2^{n+1}-1$. Esta afirmación puede venir de la experimentación con números. $1+2=2^2-1$; $1+2+2^2=2^3-1$; $1+2+2^2+2^3=2^4-1$, y así con más números.

Podemos seguir realizando los cálculos para los 100 primeros números naturales, y en todos podríamos ver que se satisface nuestra afirmación. Podemos elegir más números al azar, y en todos veríamos que se satisface. Sin embargo, eso no es suficiente para poder decir que es cierto para todos los números. Por muchos números para los que lo comprobemos no podremos estar seguros de que no existe un número para el que no hayamos probado y que eche por tierra nuestra tesis. Sin embargo, la demostración que acabamos de hacer nos puede ahorrar todos esas comprobaciones y el resultado es mucho más contundente. Nunca podremos encontrar un número natural que no cumpla la propiedad anterior ya que ese número no existe.

Sin ese paso de la demostración (el pasar de una comprobación para unos cuantos a la afirmación de que es cierta para todos) podríamos cometer errores, y dar por ciertas algunas propiedades que no lo son. Por ejemplo, para cada número natural $n\geq 3$ vamos a calcular $2^{n-1}-1$ lo vamos a dividir entre n, y nos vamos a quedar con el resto.

- Para $n=3$, $2^{n-1}-1=3$, que dividido entre 3 da resto 0.

- Para $n=4$, $2^{n-1}-1=7$, que dividido entre 4 da resto 3.

- Para $n=5$, $2^{n-1}-1=15$, que dividido entre 5 da resto 0.

- Para $n=6$, $2^{n-1}-1=31$, que dividido entre 6 da resto 1.

- Para $n=7$, $2^{n-1}-1=63$, que dividido entre 7 da resto 0.

- Para $n=8$, $2^{n-1}-1=127$, que dividido entre 8 da resto 7.

- Para $n=9$, $2^{n-1}-1=255$, que dividido entre 9 da resto 3.

- Para $n=10$, $2^{n-1}-1=511$, que dividido entre 10 da resto 1.

- Para $n=11$, $2^{n-1}-1=1023$, que dividido entre 11 da resto 0.

Vemos que para los números 3, 5, 7 y 11 el resto de la división es 0, mientras que para los restantes es distinto de 0. Podemos seguir así, y si llegamos hasta 100 vemos que el resto de la división es 0 para los números 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, mientras que para los otros números el resto de la división es distinto de 0.

Es decir, dado $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 3$, entonces $2^{n-1}-1$ es múltiplo de n implica que n es primo. Dicho de otra forma, si llamamos $P(n)$ a la afirmación

$$2^{n-1}-1 \text{ es múltiplo de } n \implies n \text{ es primo.}$$

hemos comprobado que $P(3)$, $P(4)$, $P(5)$, $P(6)$, $P(7)$, $P(8)$, $P(9)$, $P(10)$, $P(11)$ son ciertas, y hemos afirmado que la afirmación sigue siendo cierta hasta $n=100$.

Esto nos induce a pensar que $P(n)$ es cierta para todo número natural n. Podríamos seguir comprobándolo para todos los números naturales hasta llegar a 200 (2^{199} es un número de 61 cifras) y el resultado sería el mismo. Pero eso no nos garantiza ni mucho menos que el resultado no vaya a fallar alguna vez. De hecho, se tiene que

$$2^{340}-1=2239744742177804210557442280568444278121645497234649534899989100963791871180160945380877493271607115775$$

que es múltiplo de 341, y sin embargo 341 no es primo, pues es el producto de 11 y 31. Dicho de otra forma, la afirmación $P(341)$ es falsa, ya que la primera parte de la implicación es cierta ($2^{341-1}-1$ es múltiplo de 341) mientras que la segunda es falsa (pues 341 no es primo).

O recordemos la conjetura de Goldbach (todo número par mayor que 2 es suma de dos números primos), que explicamos en la sección anterior

El principio de inducción nos dice que si A es un subconjunto de $\mathbb{N}$ que satisface las dos siguientes propiedades:

- $0 \in A$
- $n \in A \Longrightarrow n+1 \in A$

Entonces $A = \mathbb{N}$. Este axioma puede leerse de la forma siguiente:

> Si A es un subconjunto de $\mathbb{N}$ que es distinto de $\mathbb{N}$, entonces, o $0 \notin A$, o existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \in A$ y $n+1 \notin A$.

Esta formulación del principio de inducción (equivalente a la vista anteriormente) nos permite demostrar una propiedad importante de los números naturales.

Teorema 5.2.1. *[Principio de buena ordenación] Sea A un subconjunto de $\mathbb{N}$ distinto del conjunto vacío. Entonces A tiene mínimo.*

Se dice que m es el mínimo de A si $m \in A$ y $m \leq n$ para todo $n \in A$.

Demostración: Sea B el conjunto de las cotas inferiores de A, es decir

$$B = \{m \in \mathbb{N} : m \leq n \text{ para todo } n \in A\}$$

Claramente $B \neq \mathbb{N}$ (pues si $m \in A$, $m+1 \notin B$).
También es cierto que $0 \in B$ (¿por qué?).
Por tanto, debe existir $m \in \mathbb{N}$ tal que $m \in B$ y $m+1 \notin B$
Por pertenecer m a B se tiene que $m \leq n$ para todo $n \in A$. Queda entonces comprobar que $m \in A$.
Ahora bien, supongamos que $m \notin A$, entonces, para cualquier $n \in A$ se tiene que $m \leq n$ (pues $m \in B$) y que $m \neq n$ (pues $m \notin A$), luego $m+1 \leq n$ para todo $n \in A$. Por tanto, tendríamos que $m+1 \in B$, lo cual no es posible.
Deducimos por tanto que $m \in A$, como queríamos. ■

El principio de inducción puede adoptar distintas formas. Por ejemplo, si queremos demostrar que una propiedad es cierta para todos los números naturales que son mayores o iguales que un cierto número $n_0 \in \mathbb{N}$, entonces podemos hacerlo demostrando que la propiedad es cierta para n_0, y supuesta cierta para un número n, entonces es cierta para $n+1$.

> Si queremos demostrar que la propiedad $P(n)$ es cierta para todo número natural $n \geq n_0$, tomamos $A = \{m \in \mathbb{N} : P(m+n_0) \text{ es cierta }\}$. Entonces:
>
> - Comprobamos que $0 \in A$. Esto es equivalente a comprobar que $P(n_0)$ es cierta.
> - Probamos que si $m \in A$ entonces $m+1 \in A$. Esto es lo mismo que probar que para $n \geq n_0$, si $P(n)$ es cierta, entonces $P(n+1)$ es cierta.

Incluso, en el comentario anterior podemos cambiar números naturales por *números enteros*. Es decir, para demostrar que una propiedad es cierta para todos los números enteros que son mayores o iguales que un cierto entero n_0, podemos proceder como acabamos de decir.

Ejemplo 5.2.3.

1. *Vamos a demostrar que para $n \geq 7$ se verifica que $3^n < n!$ (suponemos que es conocido lo que representa $n!$. De todas formas, más adelante, en el ejemplo 5.3.1 daremos una definición de esta función).*

   - *Caso base: En este caso es $n = 7$. En tal caso, y puesto que $3^7 = 2187$ y $7! = 5040$, lo que tenemos es que $2187 < 5040$, que claramente es cierto.*
   - *Hipótesis de inducción: Si $n \geq 7$, suponemos que $3^n < n!$.*
   - *Paso inductivo: Ahora, comprobamos que $3^{n+1} < (n+1)!$.*

   $$3^{n+1} = 3^n \cdot 3 < n! \cdot 3 < n! \cdot (n+1) = (n+1)!.$$

   A partir de esto podemos afirmar que sea cual sea el número natural n mayor que 6, se tiene que $3^n < n!$.

2. *Vamos ahora a comprobar que para cualquier entero mayor o igual que* -2 *se verifica que* $n^2+7n+11>0$.

   - *Caso base: Lo comprobamos en primer lugar para* $n=-2$. *Puesto que* $(-2)^2+7\cdot(-2)+11=4-14+11=1>0$ *tenemos que para* $n=-2$ *es cierto.*
   - *Hipótesis de inducción:* $n^2+7n+11>0$ *para* $n\geq 2$.
   - *Paso inductivo: A partir de la hipótesis de inducción, tenemos que comprobar que* $(n+1)^2+7(n+1)+11>0$.

   $$(n+1)^2+7(n+1)+11=n^2+2n+1+7n+7+11=(n^2+7n+11)+(2n+1+7)>0+2n+8\geq 2(-2)+8=4>0$$

   Por tanto, para cualquier entero $n\geq -2$ *se verifica que* $n^2+7n+11$ *es un número natural.*

   Notemos que $(-3)^2+7\cdot(-3)+11=-1$. *Es decir, para* $n=-3$ *el enunciado anterior es falso.*

3. *Cuando intentamos dar el paso inductivo, hemos de prestar atención, pues ese paso debe ser válido para todos los números naturales para los que queremos que sea cierta la propiedad. Por ejemplo, demostremos que para cualquier número natural* n *se verifica que* $2n<n^2+1$.

   - *Caso base: Para* $n=0$, *lo que tendríamos es* $0<1$, *que es verdad.*
   - *Hipótesis de inducción:* $2n<n^2+1$ *para* $n\geq 0$.
   - *Paso inductivo: Tenemos que comprobar que* $2(n+1)<(n+1)^2+1$.

   $$2(n+1)=2n+2<n^2+1+2<n^2+2n+2=n^2+2n+1+1=(n+1)^2+1.$$

   Donde en la segunda desigualdad hemos sustituido 1 *por* $2n$ *(es decir, hemos usado la desigualdad* $1<2n$*). Esta desigualdad vale si* $n\geq 1$, *pero para* $n=0$ *es falsa. Por tanto, el paso inductivo no nos permite pasar de 0 hasta 1.*

   De hecho, la desigualdad no es cierta para $n=1$ *(en tal caso tenemos* $2<2$, *que no es verdad).*

   El paso inductivo sí nos permitiría pasar desde 1 hasta 2, pero para eso necesitamos que sea cierta para $n=1$, *que ya sabemos que no es así.*

   Para $n=2$ *sí es cierta* $(4<5)$, *y el paso inductivo permite pasar desde 2 hasta 3, desde 3 hasta 4, y así sucesivamente. Por tanto, esta desigualdad es cierta para* $n\geq 2$.

4. *Ahora vamos a demostrar que para cualquier número natural* n, *se tiene que* $2n\leq n^2+1$. *Esta desigualdad sí es cierta para todos los números naturales, pero si intentamos demostrarla por inducción, nos encontramos con el mismo problema de antes. El paso inductivo no nos deja pasar desde cero hasta uno.*

   Entonces, podemos demostrar la desigualdad para todos los números naturales mayores o iguales que 1 (aquí no habría problema en demostrarlo por inducción), y posteriormente comprobarla para $n=0$.

   También tenemos la alternativa de no usar el principio de inducción. Para esto escribimos la desigualdad como $0\leq n^2-2n+1$. *Y esta podemos verla como* $0\leq(n-1)^2$. *Claramente, eso es verdad para cualquier número natural (y entero).*

5. *Comprobemos que para* $n\geq 2$ *se tiene que* $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{n^2}<2-\frac{1}{n}$.

   - *Caso base: Ahora es para* $n=2$, *nos diría* $1+\frac{1}{4}<2-\frac{1}{2}$. *Es decir,* $\frac{5}{4}<\frac{3}{2}$.
   - *Hipótesis de inducción: Para un número natural* n *se verifica que* $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{n^2}<2-\frac{1}{n}$.
   - *Paso inductivo: Demostremos que* $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}<2-\frac{1}{n+1}$.

$$\begin{aligned}1+\tfrac{1}{4}+\cdots+\tfrac{1}{n^2}+\tfrac{1}{(n+1)^2} &< 2-\tfrac{1}{n}+\tfrac{1}{(n+1)^2}\\ &= 2-\tfrac{(n+1)^2}{n(n+1)^2}+\tfrac{n}{n(n+1)^2}\\ &= 2-\tfrac{n^2+2n+1}{n(n+1)^2}+\tfrac{n}{n(n+1)^2}\\ &= 2-\tfrac{n^2+2n+1-n}{n(n+1)^2}\\ &= 2-\tfrac{n^2+n+1}{n(n+1)^2}\\ &< 2-\tfrac{n^2+n}{n(n+1)^2}\\ &= 2-\tfrac{n(n+1)}{n(n+1)^2}\\ &= 2-\tfrac{1}{n+1}\end{aligned}$$

Donde $2-\frac{n^2+n}{n(n+1)^2} > 2-\frac{n^2+n+1}{n(n+1)^2}$ *ya que la cantidad que le restamos a 2 en el primer caso es más pequeña que la que le restamos en el segundo.*

El problema de Basilea consistía en calcular el valor de la serie $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$*. En 1735, Leonhard Euler calculó el valor de dicha suma, que resulta ser* $\frac{\pi^2}{6}$*, y cuyo valor numérico es* $1'6449...$ *A partir de esto, lo que acabamos de demostrar resulta obvio.*

6. *Dado un número natural* n*, mayor que cero, demostremos que* $\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}<1$.

   Antes de dar la demostración, vamos a fijarnos en lo siguiente:

$$\begin{array}{lcccc} \frac{1}{2} & = & \frac{1}{2} & < & 1\\ \frac{1}{2}+\frac{1}{4} & = & \frac{3}{4} & < & 1\\ \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8} & = & \frac{7}{8} & < & 1\\ \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16} & = & \frac{15}{16} & < & 1\\ \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32} & = & \frac{31}{32} & < & 1\end{array}$$

   Notemos como cada una de las sumas que tenemos a la izquierda de las desigualdades se obtiene de la suma anterior sumándole la mitad de lo que le falta para llegar a la unidad. En el primer caso, la suma vale $\frac{1}{2}$*. Falta* $\frac{1}{2}$ *para llegar a la unidad, y se le suma* $\frac{1}{4}$ *(que es la mitad de* $\frac{1}{2}$*).*

   La segunda suma vale $\frac{3}{4}$*, luego falta* $\frac{1}{4}$ *para llegar a la unidad. La mitad es* $\frac{1}{8}$*, que es lo que se suma en el siguiente.*

   Y eso es lo que ocurre en los casos siguientes. Por ejemplo, la cuarta suma vale $\frac{15}{16}$*, luego falta* $\frac{1}{16}$ *para llegar a la unidad. La mitad es* $\frac{1}{32}$*, y eso es lo que sumamos en la quinta.*

   Se ve entonces que como siempre sumamos la mitad de lo que falta para llegar a la unidad, siempre nos vamos a mantener por debajo, luego la suma debe ser menor que 1 en cualquier caso.

   Vamos a intentar demostrarlo.

   - *Caso base: Para* $n=1$ *ya lo hemos comprobado.*
   - *Hipótesis de inducción:* $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}<1$.
   - *Paso inductivo: Demostremos que* $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^{n+1}}<1$*, a partir de la hipótesis de inducción.*

Pero si lo intentamos de la forma que parece más natural, nos encontramos con $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} < 1 + \frac{1}{2^{n+1}}$.
Y ahora, no hay forma de demostrar que esto último es menor o igual que 1.

Para intentar resolver el problema, vamos a escribirlo de otra forma. Probaremos dos maneras distintas:

i) Multiplicamos ambos miembros de la desigualdad por 2^n *(que al ser un número positivo no cambia la desigualdad). En tal caso, lo que tenemos que demostrar es que* $\frac{2^n}{2^1} + \frac{2^n}{2^2} + \cdots + \frac{2^n}{2^n} < 2^n$, *o lo que es lo mismo,* $1 + 2 + \cdots + 2^{n-1} < 2^n$.

Y ahora esto lo demostramos por inducción:

- *Caso base: Que es para* $n = 0$. *Lo que nos dice es* $1 < 2$.
- *Hipótesis de inducción. Para un número* $n \geq 1$ *se verifica que* $1 + 2 + \cdots + 2^{n-1} < 2^n$.
- *Paso inductivo: A partir de la hipótesis de inducción veamos que* $1 + 2 + \cdots + 2^{n-1} + 2^n < 2^{n+1}$.

$$1 + 2 + \cdots + 2^{n-1} + 2^n < 2^n + 2^n = 2^{n+1}$$

ii) Observando con detalle los cinco ejemplos que hemos puesto antes, podemos inducir la igualdad $\frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}$.
Si conseguimos demostrar esto, habremos demostrado lo que buscábamos, ya que $1 - \frac{1}{2^n} < 1$. *De hecho, demostrar que* $\frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}$ *es demostrar más de lo que nos pedían, pues no sólo demostramos que la suma* $\frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^n}$ *es menor que 1, sino que calculamos exactamente cuánto le falta a esa suma para llegar a 1.*

- *Caso base: Ya está hecho. Es simplemente comprobar que* $\frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2}$.
- *Hipótesis de inducción: Si* $n \geq 1$, $\frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}$.
- *Paso inductivo: Demostremos que* $\frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} = 1 - \frac{1}{2^{n+1}}$

$$\frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} = 1 - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} = 1 - \frac{2}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}} = 1 - \frac{1}{2^{n+1}}$$

Entre las distintas formas que puede adoptar el principio de inducción, una de ellas es la que se denomina *inducción fuerte* o *segundo principio de inducción.*

Teorema 5.2.2. *[Segundo principio de inducción]*
Sea A *un subconjunto de* $\mathbb{N}$. *Supongamos que se verifica:*

1. $0 \in A$.
2. *Para cualquier* n, $\{0, 1 \cdots n-1\} \subseteq A \Longrightarrow n \in A$

Entonces $A = \mathbb{N}$.

Formalmente, la primera condición no es necesaria, pues para $n = 0$ la segunda condición afirma $\emptyset \subseteq A \Longrightarrow 0 \in A$, y puesto que la primera parte es siempre cierta ($\emptyset \subseteq A$), la condición 2 implica que $0 \in A$. Sin embargo, en la práctica suele ser necesario comprobar que $0 \in A$.

Notemos también que si la condición 1 se cambia por una de la forma $0, 1, \cdots, k \in A$, la tesis del teorema sigue siendo cierta.

También, si queremos demostrar que una propiedad $P(n)$ es cierta para todo número natural (o entero) mayor o igual que n_0, podemos usar este segundo principio de inducción. Probamos que $P(n_0)$ es cierta, y que si $P(n_0)$, $P(n_0+1), \cdots, P(n-1)$ son ciertas (sea quien sea $n > n_0$) entonces $P(n)$ es cierta.

Demostración: Supongamos que $A \neq \mathbb{N}$. Entonces el conjunto $B = \mathbb{N} \setminus A$ es distinto del conjunto vacío. Por tanto, por el principio de buena ordenación tenemos que B tiene un mínimo. Sea este n_0. Esto implica que $\{0, 1, \cdots, n_0 - 1\} \subseteq A$ (pues ninguno de sus elementos pertenece a B), luego por la condición 2 tenemos que $n_0 \in A$, lo que es imposible, pues $n_0 \in B$. Deducimos entonces que $A = \mathbb{N}$ ■

Es decir, para demostrar que la propiedad $P(n)$ es cierta para cualquier número natural n:

- Demostramos que $P(0)$ es cierta.
- Dado un número natural n, si $P(0),\ P(1),\ \cdots P(n-1)$ son ciertas, entonces demostramos que $P(n)$ es cierta.

En cuyo caso, por el segundo principio de inducción, la propiedad es cierta para todo número natural n.

Ejemplo 5.2.4. *Vamos a usar este segundo principio de inducción para demostrar un conocido resultado. El* Teorema fundamental de la aritmética. *Es decir, vamos a ver que dado $n \geq 2$, entonces, o n es primo, o n se puede descomponer como producto de primos.*

- *Tenemos que para $n = 2$ el resultado es cierto, pues 2 es un número primo.*
- *Sea $n \geq 3$, y supongamos que todos los números menores que n, o son primos, o se descomponen como producto de números primos.*

  Pueden ocurrir dos cosas:

  - *Que n sea primo. En tal caso, el resultado es cierto para n.*
  - *Que n no sea primo. En este caso, n tiene un divisor que no es ni 1 ni n. Sea este a. Eso significa que $n = a \cdot b$ para algún número natural b.*

    Es claro que tanto a como b son distintos de 1, y son menores que n. Por tanto, ambos números son producto de números primos (o son ellos números primos). Es decir, $a = p_1p_2 \cdots p_r$ y $b = q_1q_2 \cdots q_s$ para algunos números primos $p_1, \cdots p_r, q_1, \cdots, q_s$ (donde bien r, bien s podrían valer 1). De aquí deducimos que

    $$n = a \cdot b = (p_1p_2 \cdots p_r) \cdot (q_1q_2 \cdots q_s)$$

    Es decir, n es producto de números primos, como queríamos.

5.3. Recurrencia.

5.3.1. Definiciones recursivas.

Vamos a centrarnos a continuación en las aplicaciones cuyo dominio es el conjunto de los números naturales. Recordemos que dados dos conjuntos X e Y, una aplicación de X en Y es una forma de asignar, a cada elemento de X, un elemento (y sólo uno) de Y. A las aplicaciones cuyo dominio son los números naturales, las denominaremos sucesiones.

Definición 52. *Sea X un conjunto. Una sucesión en X es una aplicación $x : \mathbb{N} \to X$.*

Si $x : \mathbb{N} \to X$ es una sucesión, denotaremos normalmente al elemento $x(n)$ como x_n.

A la hora de definir una sucesión en X podemos definir explícitamente la forma de asignar a cada número natural n el elemento $x_n \in X$ mediante alguna regla. Por ejemplo, podemos definir la sucesión $x : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ como $x_n = n - n^2$.

Hemos dado una regla que nos permite calcular la imagen de cualquier número natural. Por ejemplo, $x_{25} = 25 - 25^2 = -600$, $x_{100} = 100 - 100^2 = -9900$. Y así para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

Pero en ocasiones puede resultar más sencillo definir la imagen de un número natural n en términos de la imagen de otros números naturales. Es decir, para definir la sucesión recurrimos a la propia sucesión. Esta forma de hacerlo se llama *recursión.*

La estructura de los números naturales, que queda reflejada en el principio de inducción, da muchas posibilidades para la recursión.

Supongamos que queremos definir una sucesión $x : \mathbb{N} \to X$ recursivamente. La primera forma de hacerlo es siguiendo los siguientes pasos:

- Paso base: Se elige un elemento $x_0 \in X$, que va a ser el valor de la sucesión en $n = 0$.

- Paso recursivo: Dado un número natural n, se proporciona una regla para definir x_{n+1} a partir del conocimiento de x_n.

El principio de inducción nos garantiza que de esta forma tenemos definida de forma única una función $x : \mathbb{N} \to X$.

Ejemplo 5.3.1.

1. *Definimos la siguiente sucesión* $x : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$*:*

$$x_0 = 1; \qquad x_{n+1} = 2 \cdot x_n$$

Vamos a calcular los primeros términos de la sucesión:

- $x_0 = 1$. *Por definición.*
- $x_1 = 2 \cdot x_0 = 2 \cdot 1 = 2$ *(el paso recursivo para* $n = 0$*).*
- $x_2 = 2 \cdot x_1 = 2 \cdot 2 = 4$ *(el paso recursivo para* $n = 1$*).*
- $x_3 = 2 \cdot x_2 = 2 \cdot 4 = 8$ *(el paso recursivo para* $n = 2$*).*
- $x_4 = 2 \cdot x_3 = 2 \cdot 8 = 16$ *(el paso recursivo para* $n = 3$*).*
- $x_5 = 2 \cdot x_4 = 2 \cdot 16 = 32$ *(el paso recursivo para* $n = 4$*).*

Vemos que lo que hemos definido es la sucesión $x_n = 2^n$. *Esto habría que probarlo por inducción.*

2. *De forma análoga a como hemos definido la sucesión* $x_n = 2^n$*, podemos definir, dado* $a \in \mathbb{R}$ *la siguiente sucesión.*

$$y_0 = 1; \qquad y_{n+1} = a \cdot y_n$$

Que no es sino una forma de definir el valor de a^n.

3. *Vamos a definir el factorial de un número natural. Para esto definimos la sucesión* $z : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *como sigue:*

$$z_0 = 1; \qquad z_{n+1} = (n+1) \cdot z_n$$

Al número z_n *se le conoce como el* factorial *de* n*, y se representa como* $n!$.

Por ejemplo, se tiene que $0! = 1$, $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$, $4! = 24$, $5! = 120$, $6! = 720$.

4. *Sea* $u : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *la sucesión:*

$$u_0 = 0; \qquad u_{n+1} = u_n + 5$$

Calculamos los primeros términos de esta sucesión. $u_0 = 0$, $u_1 = 5$, $u_2 = 10$, $u_3 = 15$, $u_4 = 20$. *Y vemos que en realidad, lo que tenemos es que* $u_n = 5 \cdot n$.

Si en lugar del número 5 *hubiéramos tomado otro número natural* m*, entonces lo que habríamos hecho es definir la sucesión* $u_n = m \cdot n$.

> *Todos sabemos que la multiplicación de números naturales no es más que "sumar muchas veces la misma cantidad". Así, para multiplicar números naturales sólo necesitamos saber sumar. Esta idea queda reflejada en la anterior definición. Hemos definido la multiplicación* $m \cdot n$ *a partir únicamente de la suma. Para formalizar el sumar muchas veces utilizamos la recursión. Así, para multiplicar* $5 \cdot 4$ *lo que hacemos es sumar el 5 cuatro veces.*
>
> *De la misma forma, sabemos que multiplicar muchas veces la misma cantidad es lo mismo que calcular una potencia. Esto ha quedado plasmado en las sucesiones* x_n *e* y_n *definidas previamente.*
>
> *También podemos ver la suma como "sumar muchas veces uno". Y así, a partir del conocimiento de como sumar uno (es decir, de contar), podemos definir la suma de dos números naturales. Esto es lo que hacíamos cuando usábamos los dedos para sumar.*

5. *Definimos la sucesión w_n como sigue:*

   - $w_1 = 1$.
   - $w_{n+1} = w_n + (n+1)$.

   Notemos que aquí hemos definido una función $w : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}$. Dos formas de escribir la sucesión serían:

$$w_n = 1 + 2 + \cdots + n; \qquad w_n = \sum_{k=1}^{n} k$$

   Vamos a demostrar que $w_n = \frac{n(n+1)}{2}$. Para esto, utilizamos el principio de inducción.

   - *Caso base: $w_1 = \frac{1(1+1)}{2}$. Eso es cierto, pues por definición $w_1 = 1$, que es igual $\frac{1(1+1)}{2}$.*
   - *Suponemos que $w_n = \frac{n(n+1)}{2}$, y queremos demostrar que $w_{n+1} = \frac{(n+1)(n+1+1)}{2}$, es decir, $w_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$.*
     Tenemos que:

$$w_{n+1} = w_n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} =$$
$$= \frac{(n+2)(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Vamos a considerar la siguiente sucesión:
$f_0 = 0$; $f_1 = 1$; $f_2 = 1$; $f_3 = 2$; $f_4 = 3$; $f_5 = 5$; $f_6 = 8$; $f_7 = 13$; $f_8 = 21$; $f_9 = 34$; $f_{10} = 55$; $f_{11} = 89$; $\cdots$

Podemos ver la regla que seguimos para calcular un término de la sucesión. Es sumar los dos términos anteriores. Obviamente, para poder aplicar esta regla es necesario tener dos términos de la sucesión. Por tanto, f_0 y f_1 no siguen ese criterio. Una definición entonces podría ser:

- $f_0 = 0$; $f_1 = 1$.
- $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ si $n \geq 2$.

De esta forma, parece claro que está bien definido el valor de f_n para cualquier $n \in \mathbb{N}$. Sin embargo, esta definición no se ajusta al método de recurrencia dado anteriormente (pues en este caso, para calcular un término es necesario recurrir a los dos términos anteriores, mientras que en el método dado anteriormente, únicamente necesitamos conocer el término anterior).

La sucesión aquí definida se denomina *sucesión de Fibonacci.* Esta sucesión fue estudiada por Leonardo de Pisa, a principios del siglo XIII, mientras intentaba encontrar un modelo numérico para determinar el número de conejos que resultan en un año si se parte de una sola pareja. Más tarde, el alemán Johannes Kepler la utilizó en su estudio de cómo se ordenan las hojas de una planta alrededor de su tallo.

Esta sucesión satisface lo que se conoce como una *relación de recurrencia lineal homogénea.*

5.3.2. Recurrencia lineal homogénea.

Definición 53. *Sea $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ una sucesión. Decimos que dicha sucesión satisface una relación de recurrencia lineal homogénea con coeficientes constantes si existe $k \in \mathbb{N}$ y $a_1, \cdots, a_k \in \mathbb{R}$ tales que para cualquier $n \geq k$ se verifica que*

$$\sum_{j=0}^{k} a_j \cdot x_{n-j} = a_0 \cdot x_n + a_1 \cdot x_{n-1} + \cdots + a_k \cdot x_{n-k} = 0$$

donde $a_0 = 1$.

Al número k se le denomina orden de la relación.

A una sucesión que satisface una relación de recurrencia lineal homogénea la llamaremos sucesión lineal homogénea.

Observación:

Vamos a comentar brevemente el nombre que le hemos puesto a las sucesiones que satisfacen esta tipo de relaciones.

1. Se llama lineal pues todos los términos de la sucesión aparecen elevados a exponente 1. Es decir, no aparece en ningún sumando expresiones de la forma $x_i x_j$, $(x_i)^2$, $\sqrt{x_i}$, $sen(x_i)$, etc.

2. Se llama homogénea porque está igualada a cero.

Ejemplo 5.3.2.

1. *La sucesión de Fibonacci satisface una relación de recurrencia lineal homogénea de orden 2. Esto es fácil de ver, pues $f_n - f_{n-1} - f_{n-2} = 0$ para cualquier $n \geq 2$. En este caso, $a_1 = -1$ y $a_2 = -1$.*

2. *La primera sucesión definida en el ejemplo 5.3.1 satisface también una relación de recurrencia lineal homogénea de orden 1, en la que $a_1 = -2$.*

   Notemos que esta sucesión satisface una relación de recurrencia lineal homogénea de orden 2, pues si $n \geq 2$ se tiene que $x_n = 2x_{n-1} = 2(2x_{n-2}) = 4x_{n-2}$, es decir, $x_n - 4x_{n-2} = 0$.

   Esa no es la única forma de obtener una reclación de recurrencia lineal homogénea de orden 2 para x_n. Por ejemplo, podríamos haber operado así: $x_n = x_{n-1} + x_{n-1} = x_{n-1} + 2 \cdot x_{n-2}$.

En general, si x_n es una sucesión que satisface una relación de recurrencia lineal homogénea de orden k, entonces para cualquier $m \geq k$, x_n satisface una relación de recurrencia lineal homogénea de orden m.

Llamaremos *orden* de una sucesión lineal homogénea al menor grado de las relaciones de recurrencia lineal homogénea que satisface la sucesión.

Así, la sucesión de Fibonacci es una sucesión lineal homogénea de grado 2.

Lo que vamos a hacer a continuación es, dada una sucesión lineal homogénea, encontrar una expresión del término general.

En primer lugar, notemos que si x_n e y_n son dos sucesiones que satisfacen ambas una misma relación de recurrencia lineal homogénea, entonces para cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}$, la sucesión $z_n = ax_n + by_n$ satisface esa relación.

Ejemplo 5.3.3. *Sabemos que la sucesión $x_n = 2^n$ satisface la relación $x_n - 4x_{n-2} = 0$.*

La sucesión $y_n = (-2)^n$ satisface esa misma relación ($y_n - 4y_{n-2} = 0$).

Entonces, la sucesión $z_n = 2^n + (-2)^n$ satisface esa relación. Los primeros términos de la sucesión son

$z_0 = 2$, $z_1 = 0$, $z_2 = 8$, $z_3 = 0$, $z_4 = 32$, $z_5 = 0$, $z_6 = 128$, $z_7 = 0$.

Esta sucesión podría haber sido definida recursivamente como

- $z_0 = 2$; $z_1 = 0$.
- $z_n = 4 \cdot z_{n-2}$ *para* $n \geq 2$.

Observación:

Si tenemos una sucesión lineal homogénea de orden k, entonces para calcular cada término de la sucesión necesitamos conocer los k términos anteriores. Por tanto, para poder poner a funcionar la recurrencia nos son necesarios los k primeros términos de la sucesión. Estos términos de la sucesión es lo que se conoce como **condiciones iniciales.**

Dada una relación de recurrencia (no necesariamente lineal homogénea), nos vamos a plantear el problema de encontrar sucesiones que satisfagan dicha relación de recurrencia. Tenemos así, para cada relación de recurrencia, un *problema de recurrencia* (en el caso de que la recurrencia sea lineal homogénea, hablaremos de un problema de recurrencia lineal homogénea). A cada una de esas sucesiones las llamaremos *soluciones del problema de recurrencia* correspondiente.

Por ejemplo, planteamos el problema de recurrencia lineal homogénea siguiente: $x_n - 4x_{n-2} = 0$.

Son soluciones a dicho problema las sucesiones $u_n = 2^n$, $y_n = (-2)^n$, $z_n = 2^n + (-2)^n$, $w_n = 0$. Lo que diferencia a estas cuatro sucesiones son las condiciones iniciales. Estas son, para la primera sucesión $u_0 = 1$, $u_1 = 2$; para la segunda, $y_0 = 1$, $y_1 = -2$; para la tercera, $z_0 = 2$, $z_1 = 0$; y para la cuarta, $w_0 = 0$, $w_1 = 0$.

Hemos visto que si x_n e y_n son soluciones de un mismo problema recurrencia lineal homogénea con coeficientes constantes, entonces cualquier combinación lineal suya es solución de la misma relación de recurrencia. Como consecuencia, el conjunto de las soluciones a un problema de recurrencia lineal homogénea es un espacio vectorial. Puede comprobarse que la dimensión de este espacio vectorial coincide con el orden de la relación.

Ejemplo 5.3.4. *Vamos a buscar la solución al problema de recurrencia lineal homogénea $x_n = x_{n-1} + 2x_{n-2}$ con condiciones iniciales $x_0 = 2$, $x_1 = 1$. Para esto, calculamos unos cuantos términos de dicha sucesión:*

$$x_2 = 1+2\cdot 2 = 5; \quad x_3 = 5+2\cdot 1 = 7; \quad x_4 = 7+2\cdot 5 = 17; \quad x_5 = 17+2\cdot 7 = 31; \quad x_6 = 31+2\cdot 17 = 65$$

Comparamos ahora la sucesión x_n con la sucesión 2^n

$$\begin{array}{ccccccccc} x_n & \rightarrow & 2 & 1 & 5 & 7 & 17 & 31 & 65 \\ 2^n & \rightarrow & 1 & 2 & 4 & 8 & 16 & 32 & 64 \end{array}$$

Y vemos que la diferencia entre los términos de ambas sucesiones es 1 ó -1, dependiendo de que correspondan a un término par o impar. Por tanto, parece que el término general de la sucesión podría ser $x_n = 2^n + (-1)^n$.

Vamos a probar que esto es cierto. Para eso, usaremos el segundo principio de inducción.

Para $n = 0$ y $n = 1$ sabemos que es cierto, pues lo hemos comprobado (de hecho, está comprobado para $n = 2, 3, 4, 5, 6$).

Sea $n \geq 2$, y suponemos que para cualquier $k < n$ se verifica que $x_k = 2^k + (-1)^k$. Entonces:

$$\begin{aligned} x_n = x_{n-1} + 2x_{n-2} &= 2^{n-1} + (-1)^{n-1} + 2(2^{n-2} + (-1)^{n-2}) = 2^{n-1} + 2\cdot 2^{n-2} + (-1)^{n-1} + 2\cdot(-1)^{n-2} = \\ &= 2^{n-1} + 2^{n-1} + (-1)^{n-2}(-1+2) = 2\cdot 2^{n-1} + (-1)^{n-2} = 2^n + (-1)^n \end{aligned}$$

Y de aquí podemos deducir que el término general de la sucesión es $x_n = 2^n + (-1)^n$.

A continuación vamos a intentar ver cómo son las soluciones a un problema de de recurrencia lineal homogénea con coeficientes constantes. Hemos comentado anteriormente que el conjunto de las soluciones forma un espacio vectorial. Lo que pretendemos es encontrar una base de ese espacio vectorial.

Definición 54. *Dada el problema de recurrencia lineal homogénea con coeficientes constantes*

$$x_n + a_1 x_{n-1} + \cdots + a_k x_{n-k} = 0$$

Al polinomio $x^k + a_1 x^{k-1} + \cdots + a_{k-1}x + a_k$ se le conoce como polinomio característico *de la relación, y a la ecuación $x^k + a_1 x^{k-1} + \cdots + a_{k-1}x + a_k = 0$ la ecuación característica.*

Ejemplo 5.3.5.

1. *La ecuación característica del problema de recurrencia $x_n = 2x_{n-1}$ es $x - 2 = 0$.*
2. *La ecuación característica de la recurrencia que nos da la sucesión de Fibonacci es $x^2 - x - 1 = 0$.*
3. *La ecuación característica de la sucesión estudiada en el ejemplo 5.3.4 es $x^2 - x - 2 = 0$.*

Los ejemplos que hemos estado analizando nos conducen a la siguiente proposición.

Proposición 5.3.1. *Si α es una solución de la ecuación característica de un problema de recurrencia, entonces la sucesión $x_n = \alpha^n$ es una solución a dicho problema.*

Demostración:

Supongamos que la relación de recurrencia es $x_n + a_1 x_{n-1} + \cdots + a_k x_{n-k} = 0$. En tal caso, por ser α una raíz del polinomio característico se tiene que $\alpha^k + a_1 \alpha^{k-1} + \cdots + a_{k-1}\alpha + a_0 = 0$.

Sea $x_n = \alpha^n$. Vamos a ver que esta sucesión satisface la relación de recurrencia.

$$x_n + a_1x_{n-1} + \cdots + a_kx_{n-k} = \alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + \cdots + a_k\alpha^{n-k} = \alpha^{n-k}\cdot(\alpha^k + a_1\alpha^{k-1} + \cdots + a_{k-1}\alpha + a_0) = \alpha^k\cdot 0 = 0$$

■

Observación:

Si α_1 y α_2 son dos raíces del polinomio característico de una relación de recurrencia, entonces $x_n = (\alpha_1)^n$ e $y_n = (\alpha_2)^n$ son dos soluciones a dicha relación de recurrencia. Entonces también son soluciones todas las combinaciones lineales de estas dos sucesiones, es decir, todas las sucesiones de la forma $a(\alpha_1)^n + b(\alpha_2)^n$.

En general, si $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$ son todas las raíces del polinomio característico de una relación de recurrencia, entonces cualquier sucesión de la forma $x_n = b_1(\alpha_1)^n + b_2(\alpha_2)^n + \cdots + b_k(\alpha_k)^n$ es solución a la relación de recurrencia.

Además, es fácil ver que dichas soluciones son linealmente independientes.

En el caso de que la relación de recurrencia fuera de orden k, las sucesiones $(\alpha_1)^n$, $(\alpha_2)^n$, $\cdots$, $(\alpha_k)^n$ forman una base del espacio de dimensiones, y por tanto, cualquier solución sería de la forma anterior.

Las condiciones iniciales son las que nos determinarían cuáles son los coeficientes $b_1, b_2, \cdots, b_k$.

Ejemplo 5.3.6.

1. *Consideramos la sucesión definida por $x_n = 2x_{n-1}$, $x_0 = 1$.*

   La ecuación característica es $x - 2 = 0$, cuya única solución es $\alpha = 2$. Puesto que la relación es de orden 1, la sucesión x_n es de la forma $x_n = b\cdot 2^n$. A partir de la condición $x_0 = 1$, obtenemos que $1 = b\cdot 2^0$, luego $b = 1$.

   Por tanto, $x_n = 2^n$.

   Si tomamos la sucesión $y_n = 2y_{n-1}$, $y_0 = 3$, entonces la ecuación característica es la misma, luego $y_n = b\cdot 2^n$.

   Ahora, tenemos que $3 = y_0 = b\cdot 2^0 = b$. Por tanto, $y_n = 3\cdot 2^n$.

2. *Para esta sucesión, ver el ejemplo 5.3.4.*

   Consideramos la sucesión definida por $x_n = x_{n-1} + 2x_{n-2}$, $x_0 = 2$, $x_1 = 1$. Vamos a hallar el término general de esta sucesión. Para esto, vamos a seguir los siguientes pasos:

   - *Calculamos el polinomio característico. Este vale $x^2 - x - 2$.*
   - *Hallamos sus raíces. Podemos hacerlo siguiendo la fórmula $x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, o bien, usando la regla de Ruffini. En cualquier caso, obtenemos que las raíces son $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = -1$.*
   - *Escribimos la forma general de la sucesión.*

     Puesto que tenemos dos raíces, y la relación de recurrencia es de orden 2, la forma general es $x_n = a\cdot 2^n + b\cdot(-1)^n$.
   - *Planteamos, a partir de las condiciones iniciales, las ecuaciones para hallar a y b.*
     - *De la condición $x_0 = 2$ nos queda la ecuación $2 = a\cdot 2^0 + b\cdot(-1)^0 = a + b$.*
     - *De la condición $x_1 = 1$ nos queda la ecuación $1 = a\cdot 2^1 + b\cdot(-1)^1 = 2a - b$.*
   - *Resolvemos el sistema que nos ha quedado:*

     $$\left.\begin{array}{rcrcr} a & + & b & = & 2 \\ 2a & - & b & = & 1 \end{array}\right\} \quad \textit{Fácilmente vemos que la solución es } a = 1 \textit{ y } b = 1$$
   - *Sustituimos las soluciones obtenidas en la expresión de la forma general de la sucesión, para hallar el término n-ésimo de la sucesión.*

     $$x_n = 1\cdot 2^n + 1\cdot(-1)^n = 2^n + (-1)^n$$

     Y vemos que coincide con el obtenido en el ejemplo 5.3.4.

3. *Vamos a encontrar el término general de la sucesión definida por la relación* $x_n = 3x_{n-1} + 4x_{n-2}$, *con las condiciones iniciales* $x_0 = 0$, $x_1 = 1$.

   Seguimos los mismos pasos que en el ejemplo precedente.

   - *Polinomio característico:* $x^2 - 3x - 4$.
   - *Raíces del polinomio característico:* $\alpha_1 = 4$, $\alpha_2 = -1$.
   - *Forma general de la solución:* $x_n = a \cdot 4^n + b \cdot (-1)^n$.
   - *Sistema de ecuaciones para calcular los coeficientes:* $\left.\begin{array}{r} a+b=0 \\ 4a-b=1 \end{array}\right\}$
   - *Resolvemos el sistema.* $a = \frac{1}{5}$, $b = \frac{-1}{5}$.
   - *Sustituimos en la forma general de la solución.*

   $$x_n = \frac{1}{5}(4^n - (-1)^n)$$

   Ahora, podemos calcular algunos términos, y así comprobar que el resultado obtenido es correcto.

   $$\begin{array}{ll}
   x_2 = 3x_1 + 4x_0 = 3\cdot 1 + 4\cdot 0 = 3. & \frac{1}{5}(4^2 - (-1)^2) = \frac{1}{5}(16-1) = \frac{15}{5} = 3. \\
   x_3 = 3x_2 + 4x_1 = 3\cdot 3 + 4\cdot 1 = 13. & \frac{1}{5}(4^3 - (-1)^3) = \frac{1}{5}(64-(-1)) = \frac{65}{5} = 13. \\
   x_4 = 3x_3 + 4x_2 = 3\cdot 13 + 4\cdot 3 = 51. & \frac{1}{5}(4^4 - (-1)^4) = \frac{1}{5}(256-1) = \frac{255}{5} = 51. \\
   x_5 = 3x_4 + 4x_3 = 3\cdot 51 + 4\cdot 13 = 205. & \frac{1}{5}(4^5 - (-1)^5) = \frac{1}{5}(1024-(-1)) = \frac{1025}{5} = 205.
   \end{array}$$

4. *Vamos a calcular la expresión general del término n-ésimo de la sucesión de Fibonacci.*

   - *Polinomio característico:* $x^2 - x - 1$.
   - *Raíces del polinomio característico:* $\alpha = \frac{1\pm\sqrt{1+4}}{2}$. $\alpha_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\alpha_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.
   - *Forma general de la solución:* $f_n = a\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + b\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$.
   - *Sistema de ecuaciones:*

   $$\begin{array}{rcrcl} a & + & b & = & 0 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2}\,a & + & \frac{1-\sqrt{5}}{2}\,b & = & 1 \end{array}$$

   - *Resolución del sistema.*
     De la primera ecuación, tenemos que $b = -a$. *Sustituimos en la segunda y operamos:*

   $$1 = a\frac{1+\sqrt{5}}{2} - a\frac{1-\sqrt{5}}{2} = a\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = a\frac{2\sqrt{5}}{2} = a\cdot\sqrt{5}$$

     Luego $a = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$. *Por tanto,* $b = -\ \frac{\sqrt{5}}{5}$.
   - *Sustituimos.*
     $f_n = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$. *De donde:*

   $$f_n = \frac{\sqrt{5}}{5}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

5. *Vamos a hacer un ejemplo donde las raíces del polinomio característico no sean números reales.*

   Sea la sucesión $u_n = 2u_{n-1} - 2u_{n-2}$; $u_0 = 0$, $u_1 = 1$.

   - *Polinomio característico:* $x^2 - 2x + 2$.
   - *Soluciones de la ecuación característica:* $\alpha = \frac{2\pm\sqrt{4-2\cdot 4}}{2} = \frac{2\pm\sqrt{-4}}{2} = \frac{2\pm 2\sqrt{-1}}{2} = 1 \pm i$. *Es decir* $\alpha_1 = 1+i$, $\alpha_2 = 1-i$.
   - *Forma general de la sucesión:* $u_n = a(1+i)^n + b(1-i)^n$.

- *Sistema de ecuaciones:*

$$\begin{array}{rcrcl} a & + & b & = & 0 \\ (1+i)a & + & (1-i)b & = & 1 \end{array}$$

- *Resolución del sistema.*
  De la primera ecuación tenemos que $a = -b$. *Sustituimos en la segunda:*
  $1 = (1+i)a + (1-i)a = a(1+i-1+i) = a \cdot 2i$. *Por tanto,* $a = \frac{1}{2i} = \frac{i}{2i^2} = \frac{i}{-2} = \frac{-i}{2}$, *de donde* $b = \frac{i}{2}$.
- *Sustituimos:*

$$u_n = \frac{-i}{2}(1+i)^n + \frac{i}{2}(1-i)^n = \frac{i}{2}\big((1-i)^n - (1+i)^n\big)$$

  Podemos dejar así la sucesión, pero vamos a transformar la anterior expresión. Para ello:
  $1 + i = \sqrt{2}\left(cos\frac{\pi}{4} + i\ sen\frac{\pi}{4}\right)$, *o si queremos,* $1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$. *De donde*
  $(1+i)^n = \sqrt{2^n}\left(cos\frac{n\pi}{4} + i\ sen\frac{n\pi}{4}\right)$
  Esta última expresión puede obtenerse de:

$$(1+i)^n = (\sqrt{2})^n\left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^n = \sqrt{2^n}e^{i\frac{n\pi}{4}} = \sqrt{2^n}\left(cos\frac{n\pi}{4} + i\ sen\frac{n\pi}{4}\right), \quad pues\ e^{ix} = cos(x) + i\ sen(x)$$

  De la misma forma, se tiene que
  $(1-i)^n = \sqrt{2^n}\left(cos\frac{-n\pi}{4} + isen\frac{-n\pi}{4}\right) = \sqrt{2^n}\left(cos\frac{n\pi}{4} - isen\frac{n\pi}{4}\right)$
  Por tanto, tenemos que

$$\begin{aligned} u_n &= \tfrac{i}{2}\big((1-i)^n - (1+i)^n\big) = \\ &= \tfrac{i}{2}\sqrt{2^n}\left[\left(cos\tfrac{n\pi}{4} - i\ sen\tfrac{n\pi}{4}\right) - \left(cos\tfrac{n\pi}{4} + i\ sen\tfrac{n\pi}{4}\right)\right] \\ &= \tfrac{i}{2}\sqrt{2^n}\left(-2i\ sen\tfrac{n\pi}{4}\right) = -i^2\sqrt{2^n}\ sen\tfrac{n\pi}{4} \end{aligned}$$

  Es decir, $u_n = \sqrt{2^n}\ sen\frac{n\pi}{4}$.
  Como ejercicio, demuestra por inducción que esta expresión se corresponde con la sucesión u_n *que acabamos de definir.*

6. *Vamos a estudiar la sucesión* $x_n = 5x_{n-1} - 8x_{n-2} + 4x_{n-3}$; $x_0 = 2$, $x_1 = 1$, $x_2 = -3$. *Procedemos como en los casos anteriores.*

- *Polinomio característico:* $x^3 - 5x^2 + 8x - 4$.
- *Raíces del polinomio:*

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -5 & 8 & -4 \\ 1 & & 1 & -4 & 4 \\ \hline & 1 & -4 & 4 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrr} & 1 & -4 & 4 \\ 2 & & 2 & -4 \\ \hline & 1 & -2 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r|rr} & 1 & -2 \\ 2 & & 2 \\ \hline & 1 & 0 \end{array}$$

  Es decir, tiene dos raíces que son $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 2$.
- *Escribimos la forma de la solución* $x_n = a \cdot 1^n + b \cdot 2^n = a + b \cdot 2^n$.
- *Planteamos el sistema.*

$$\begin{array}{rcrcr} a & + & b & = & 2 \\ a & + & 2b & = & 1 \\ a & + & 4b & = & -3 \end{array}$$

- *Resolvemos el sistema. Podemos ver que el sistema es incompatible.*

En este último ejemplo tenemos un problema de recurrencia de lineal homogénea de orden 3. Resolviendo la ecuación característica hemos encontrado dos sucesiones que son solución de ese problema de recurrencia: la sucesión 1^n y la sucesión 2^n. Pero como el espacio de soluciones tiene dimensión 3, no todas las sucesiones son combinación lineal de esas dos. En concreto, la solución al problema planteado no puede expresarse como combinación lineal de estas dos sucesiones (por eso el sistema nos ha salido incompatible).

La siguiente proposición nos va a decir cómo encontrar una base del espacio de soluciones cuando el número de raíces del polinomio característico sea menor que el orden de la relación.

Proposición 5.3.2. *Supongamos que tenemos el problema de recurrencia $x_n + a_1x_{n-1} + \cdots + a_kx^{n-k}$, que $p(x)$ es el polinomio característico de esa relación y que α es una raíz doble de dicho polinomio. Entonces la sucesión $x_n = n \cdot \alpha^n$ es una solución a dicho problema.*

Demostración: Tenemos que demostrar que para cualquier $n \geq k$ se verifica que

$$n \cdot \alpha^n + (n-1) \cdot a_1 \cdot \alpha^{n-1} + \cdots + (n-k) \cdot a_k \cdot \alpha^{n-k} = 0$$

Tomamos el polinomio $q(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_kx^{n-k} = x^{n-k} \cdot p(x)$. Es claro que α es una raíz doble de $q(x)$ (pues $(x-\alpha)^2$ es un divisor de $q(x)$, ya que lo es de $p(x)$). Por tanto, α es una raíz de $q'(x)$.

Calculamos la derivada de $q(x)$. $q'(x) = n \cdot x^{n-1} + (n-1) \cdot a_1 \cdot x^{n-2} + \cdots + (n-k) \cdot a_{n-k} \cdot x^{n-k-1}$. Y ahora, sabemos que $q'(\alpha) = 0$, luego $\alpha\ q'(\alpha) = 0$. Por tanto

$$\begin{aligned} 0 = \alpha\ q'(\alpha) &= \alpha \cdot (n \cdot \alpha^{n-1} + (n-1) \cdot a_1 \cdot \alpha^{n-2} + \cdots + (n-k) \cdot a_{n-k} \cdot \alpha^{n-k-1}) = \\ &= n \cdot \alpha^n + (n-1) \cdot a_1 \cdot \alpha^{n-1} + \cdots + (n-k) \cdot a_k \cdot \alpha^{n-k} \end{aligned}$$

Como queríamos.

■

En el caso de que α fuera una raíz triple del polinomio característico la sucesión $y_n = n^2\alpha^n$ sería una solución de la recurrencia. Vamos a comprobarlo:

La relación de recurrencia es $x_n + a_1x_{n-1} + \cdots + a_kx_{n-k} = 0$.

El polinomio característico es $p(x) = x^k + a_1x^{k-1} + \cdots + a_k$. Este polinomio tiene a α como raíz triple, lo que significa que $(x-\alpha)^3$ es un divisor de $p(x)$.

El polinomio $x^{n-k}p(x)$ tambien tiene como raiz triple a α, pues es múltiplo de $(x-\alpha)^3$.

Su derivada tiene a α como raíz doble. La derivada de este polinomio es $nx^{n-1} + (n-1)a_1x^{n-2} + \cdots + (n-k)a_kx^{n-k-1}$.

Si multiplicamos este polinomio por x, el polinomio resultante vuelve a tener a α como raíz doble. Este polinomio es $nx^n + (n-1)a_1x^{n-1} + \cdots + (n-k)a_kx^{n-k}$.

La derivada de este polinomio tiene a α como raíz. Esta derivada vale $n^2x^{n-1} + (n-1)^2a_1x^{n-2} + \cdots + (n-k)^2a_kx^{n-k-1}$.

Si multiplicamos este polinomio por x nos da $n^2x^n + (n-1)^2a_1x^{n-1} + \cdots + (n-k)^2a_kx^{n-k}$. Y α es raíz de este polinomio.

Esto último significa que significa que

$$n^2\alpha^n + a_1(n-1)^2\alpha^{n-1} + \cdots + a_k(n-k)^2\alpha^{n-k} = 0$$

Si $y_n = n^2\alpha^n$ lo que estamos diciendo es que $y_n + a_1y_{n-1} + \cdots + a_ky_{n-k} = 0$, es decir, $n^2\alpha^n$ es una solución de la recurrencia de la que partíamos.

Si α es una raíz de multiplicidad r, entonces las sucesiones

$$\alpha^n; \quad n \cdot \alpha^n; \quad n^2 \cdot \alpha^n; \ \cdots \ n^{r-1}\alpha^n$$

son soluciones de la recurrencia.

Ejemplo 5.3.7. *Retomamos el último ejemplo analizado.*

Teníamos la sucesión $x_n = 5x_{n-1} - 8x_{n-2} + 4x_{n-3}$; $x_0 = 2$, $x_1 = 1$, $x_2 = -3$. Veíamos que el polinomio característico tenía dos raíces $\alpha_1 = 1$ y $\alpha_2 = 2$, lo que nos daba dos soluciones de la recurrencia $x_n = 5x_{n-1} - 8x_{n-2} + 4x_{n-3}$.

Pero la raíz $\alpha_2 = 2$ es una raíz doble. Por tanto, según la proposición anterior, tenemos una nueva solución, que es $n \cdot 2^n$.

La solución general es entonces $x_n = a + b \cdot 2^n + c \cdot n \cdot 2^n$. El sistema que hay que resolver es entonces

$$\begin{array}{ccccccc} a & + & b & & & = & 2 \\ a & + & 2b & + & 2c & = & 1 \\ a & + & 4b & + & 8c & = & -3 \end{array}$$

Y la solución del sistema es $a = 1$, $b = 1$, $c = -1$. Por tanto, la expresión del término general de la sucesión es

$$x_n = 1 + 2^n - n \cdot 2^n$$

Se puede probar por inducción que esta expresión es correcta.

Ejemplo 5.3.8. *Consideramos la sucesión definida por la recurrencia* $x_n = 3x_{n-1} - 3x_{n-2} + x_{n-3}$*, y las condiciones iniciales* $x_0 = 4$*,* $x_1 = 2$*,* $x_2 = 2$*.*

El polinomio característico es $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$*, que se factoriza como* $(x-1)^3$*. Por tanto, la solución general es* $x_n = a \cdot 1^n + bn \cdot 1^n + cn^2 \cdot 1^n = a + bn + cn^2$*.*

Sustituyendo las ecuaciones iniciales nos queda el sistema

$$\begin{array}{ccccccc} a & & & & & = & 4 \\ a & + & b & + & c & = & 2 \\ a & + & 2b & + & 4c & = & 2 \end{array}$$

Cuya solución es $a = 4$*,* $b = -3$*,* $c = 1$*. Por tanto, la sucesión es* $x_n = n^2 - 3n + 4$*.*

5.3.3. Recurrencia lineal no homogénea.

Definición 55. *Sea* $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *una sucesión. Decimos que dicha sucesión satisface una relación de recurrencia lineal con coeficientes constantes si existe* $k \in \mathbb{N}$*,* $a_1, \cdots, a_k \in \mathbb{R}$ *y* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *tales que para cualquier* $n \geq k$ *se verifica que*

$$\sum_{j=0}^{k} a_j \cdot x_{n-j} = a_0 \cdot x_n + a_1 \cdot x_{n-1} + \cdots + a_k \cdot x_{n-k} = f(n)$$

donde $a_0 = 1$*.*

Al número k *se le denomina* orden de la relación.

Ejemplo 5.3.9. *La sucesión definida como* $x_1 = 1$*,* $x_n = 2x_{n-1} + 1$ *satisface una relación de recurrencia lineal no homogénea.*

Puedes comprobar por inducción que $x_n = 2^n - 1$*. Más adelante veremos cómo llegar a esta solución.*

Dado un problema de recurrencia lineal no homogénea $x_n + a_1x_{n-1} + \cdots a_kx_{n-k} = f(n)$, al problema de recurrencia lineal homogénea $x_n + a_1x_{n-1} + \cdots a_kx_{n-k} = 0$ lo llamaremos el *problema de recurrencia lineal homogénea asociado.*

Proposición 5.3.3. *Sea* $x_n + a_1x_{n-1} + \cdots a_kx_{n-k} = f(n)$ *un problema de recurrencia lineal no homogénea.*

- *Supongamos que* u_n *y* v_n *son soluciones a dicho problema. Entonces la sucesión* $u_n - v_n$ *es una solución al problema de recurrencia lineal homogénea asociado.*
- *Si* y_n *es una solución al problema no homogéneo, entonces todas las soluciones a dicho problema son de la forma* $y_n + h_n$*, donde* h_n *es una solución al problema homogéneo.*

Demostración:
Por ser u_n y v_n soluciones al problema no homogéneo se tiene que $u_n + a_1u_{n-1} + \cdots a_ku_{n-k} = f(n)$, y que $v_n + a_1v_{n-1} + \cdots a_kv_{n-k} = f(n)$. Por tanto:

$$\begin{aligned} u_n - v_n &= a_1(u_{n-1} - v_{n-1} + \cdots a_k(u_{n-k} - v_{n-k}) = \\ &= u_n + a_1u_{n-1} + \cdots a_ku_{n-k} - (v_n + a_1v_{n-1} + \cdots a_kv_{n-k}) = \\ &= f(n) - f(n) = 0 - 0 = 0 \end{aligned}$$

La segunda parte se prueba de forma análoga.

■

Ejemplo 5.3.10. *Vamos a encontrar la solución general al problema de recurrencia lineal no homogénea* $x_n = 2x_{n-1} + 1$*.*

Vimos en el ejemplo anterior que $x_n = 2^n - 1$ *es una solución particular a dicha recurrencia.*

La recurrencia lineal homogénea asociada es $x_n = 2x_{n-1}$*, cuya solución general es* $a \cdot 2^n$*.*

Por tanto, la solución general es $y_n = a \cdot 2^n - 1$*.*

A la solución general del anterior problema de recurrencia hemos llegado a partir del conocimiento de una solución particular (y de cómo son las soluciones de la recurrencia homogénea asociada). Pero, ¿cómo obtener esa solución particular?.

Un forma consiste en intentar transformar la relación de recurrencia en una relación lineal homogénea. Vamos a ver algún ejemplo.

Ejemplo 5.3.11.

- *Nos situamos de nuevo en el problema de recurrencia lineal no homogénea* $x_n = 2x_{n-1} + 1$*. Lo que hace que no sea homogénea es el término* 1*. Vamos a tratar de "eliminarlo". Para esto, y puesto que la relación de recurrencia es válida para todos los números naturales mayores o iguales que 1, tomamos* $n \geq 2$ *y se tiene:*

$$\begin{array}{lclcl} x_n & = & 2x_{n-1} & + & 1 \\ x_{n-1} & = & 2x_{n-2} & + & 1 \end{array}$$

Y restando ambas igualdades nos queda:

$$x_n - x_{n-1} = 2x_{n-1} - 2x_{n-2} \implies x_n - 3x_{n-1} + 2x_{n-2} = 0$$

Y así vemos que toda solución al problema de recurrencia lineal no homogénea $x_n = 2x_{n-1} + 1$ *es solución al problema de recurrencia lineal homogénea* $x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2}$ *(el recíproco no es cierto. Basta tomar la sucesión constante* $x_n = 1$*).*

La ecuación característica de este problema es $x^2 - 3x + 2 = 0$*, cuyas soluciones son* $\alpha_1 = 2$ *y* $\alpha_2 = 1$*. Por tanto, todas las soluciones son de la forma* $x_n = a \cdot 2^n + b$

Ahora, seleccionamos aquellas que sean solución al problema $x_n = 2x_{n-1} + 1$*. Si* x_n *es una solución a tal problema, tenemos:*

$x_1 = 2a + b$

$x_1 = 2x_0 + 1 = 2(a + b) + 1 = 2a + 2b + 1$

Por tanto, $2a + b = 2a + 2b + 1$*, de donde deducimos que* $b = -1$*.*

Luego la solución general al problema $x_n = 2x_{n-1} + 1$ *es* $x_n = a \cdot 2^n - 1$*.*

- *Vamos a resolver el problema de recurrencia lineal no homogénea* $x_n + x_{n-1} = 2n$*.*

En primer lugar, tratamos de transformar la recurrencia no homogénea en una homogénea. Entonces, para cada $n \geq 2$ *tenemos:*

$$\begin{array}{l} x_n + x_{n-1} = 2n \\ x_{n-1} + x_{n-2} = 2(n-1). \end{array}$$

Restamos ambas igualdades, y nos queda que para $n \geq 2$*,* $x_n - x_{n-2} = 2$*. Por tanto, para* $n \geq 3$*,*

$$\begin{array}{l} x_n - x_{n-2} = 2. \\ x_{n-1} + x_{n-3} = 2. \end{array}$$

Y volviendo a restar, tenemos $x_n - x_{n-1} - x_{n-2} + x_{n-3} = 0$*. La ecuación característica es* $x^3 - x^2 + x + 1 = 0$*, cuyas raíces son* $\alpha_1 = -1$ *(simple) y* $\alpha_2 = 1$ *(doble).*

La solución general al problema de recurrencia lineal homogénea es $x_n = a(-1)^n + b + cn$*.*

Ahora, de todas esas soluciones hemos de seleccionar aquéllas que sean soluciones del problema $x_n + x_{n-1} = 2n$*.*

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} x_0 = a + b \\ x_1 = -a + b + c \end{array}\right\} \Rightarrow \quad x_1 + x_0 = 2b + c \\ \qquad\qquad\qquad\qquad x_1 + x_0 = 2 \cdot 1 = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \ 2b + c = 2 \\ \\ \left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} x_1 = -a + b + c \\ x_2 = a + b + 2c \end{array}\right\} \Rightarrow \ x_2 + x_1 = 2b + 3c \\ \qquad\qquad\qquad\qquad x_2 + x_1 = 2 \cdot 2 = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \ 2b + 3c = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \ c = 1; \ b = \frac{1}{2}$$

Luego la solución general al problema de recurrencia $x_n + x_{n-1} = 2n$ *es* $x_n = a(-1)^n + n + \frac{1}{2}$*.*

Vamos a fijarnos con un poco más de detalle en este ejemplo.

Partimos de una recurrencia lineal no homogénea ($x_n+x_{n-1}=2n$) cuya relación homogénea asociada es $x_n+x_{n-1}=0$, y por tanto su polinomio característico es $x+1$.

Lo que hemos hecho ha sido intentar eliminar la parte no homogénea. En un primer paso, hemos llegado a la relación $x_n-x_{n-2}=1$, cuya relación homogénea asociada es $x_n-x_{n-2}=0$, y su polinomio característico es $x^2-1=(x+1)(x-1)$.

En un segundo paso hemos llegado a la relación de recurrencia $x_n-x_{n-1}-x_{n-2}+x_{n-3}=0$, cuyo polinomio característico es $x^3-x^2-x+1=(x+1)(x-1)^2$.

Vemos que en cada uno de los pasos, hemos disminuido en 1 el grado de la parte no homogénea, mientras que el polinomio característico se multiplica por $(x-1)$.

Como conclusión de esto, podemos decir:

Proposición 5.3.4. *Supongamos que x_n es una sucesión que satisface una relación de recurrencia lineal no homogénea*

$$x_n+a_1x_{n-1}+\cdots+a_kx_{n-k}=f(n)$$

donde $f(n)$ es un polinomio de grado r.

Entonces x_n satisface una relación de recurrencia lineal homogénea cuyo polinomio característico es $(x^k+a_1x^{k-1}+\cdots+a_k)(x-1)^{r+1}$.

La demostración de esta proposición se haría por inducción, siguiendo la idea que hemos mostrados en el ejemplo precedente.

Ejemplo 5.3.12. *Sea x_n la sucesión definida por $x_n-x_{n-2}=n+1$, $x_0=1$, $x_1=-1$. Vamos a buscar el término general de la sucesión x_n.*

El polinomio característico de la relación lineal homogénea asociada es x^2-1. Como $n+1$ es un polinomio de grado 1, la sucesión x_n satisface una recurrencia lineal homogénea cuyo polinomio característico es $(x^2-1)(x-1)^2=(x+1)\cdot(x-1)^3$.

Por tanto, la sucesión x_n es de la forma $x_n=a\cdot(-1)^n+b+cn+dn^2$. Puesto que $x_2=x_0+3=4$ y $x_3=x_1+4=3$ tenemos que:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
a & + & b & & & & & = & 4\\
-a & + & b & + & c & + & d & = & -1\\
a & + & b & + & 2c & + & 4d & = & 4\\
-a & + & b & + & 3c & + & 9d & = & 3
\end{array}$$

Y al resolver el sistema nos queda $a=\frac{13}{8}$, $b=\frac{-5}{8}$, $c=1$, $d=\frac{1}{4}$. Por tanto, la forma general de x_n es

$$x_n=\frac{13\cdot(-1)^n-5+8n+2n^2}{8}$$

Vamos a modificar la forma de la función $f(n)$. Para esto, analizamos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 5.3.13. *Vamos a encontrar la solución al problema de recurrencia lineal $x_n=2x_{n-1}+n\cdot 4^n$.*

Ahora, el término no homogéneo es $n\cdot 4^n$.

El polinomio característico de la relación de recurrencia homogénea asociada es $x-2$.

Vemos que si procedemos como antes, restando x_n-x_{n-1}, no conseguimos nada. Pero si calculamos x_n-4x_{n-1}, el término no homogéneo se simplifica.

$$\begin{array}{rcrcl}
x_n & = & 2x_{n-1} & + & n\cdot 4^n\\
4x_{n-1} & = & 8x_{n-2} & + & (n-1)\cdot 4^n\\
\hline
x_n-4x_{n-1} & = & 2x_{n-1}-8x_{n-2} & + & [n-(n-1)]\cdot 4^n\\
x_n & = & 6x_{n-1}-8x_{n-2} & + & 4^n
\end{array}$$

El polinomio característico de la recurrencia homogénea asociada es ahora $x^2-6x+8=(x-2)\cdot(x-4)$.

Y si ahora repetimos, nos queda:

$$\begin{array}{rcl} x_n & = & 6x_{n-1} - 8x_{n-2} \quad + \quad 4^n \\ 4x_{n-1} & = & 24x_{n-2} - 32x_{n-3} \quad + \quad 4^n \\ \hline x_n - 4x_{n-1} & = & 6x_{n-1} - 32x_{n-2} + 32x_{n-3} \\ x_n & = & 10x_{n-1} - 32x_{n-2} + 32x_{n-3} \end{array}$$

Y vemos que nos queda una relación de recurrencia lineal homogénea cuyo polinomio característico es $x^3 - 10x^2 + 32x - 32 = (x-2)\cdot(x-4)^2$.

La solución de esta recurrencia es $x_n = a \cdot 2^n + b \cdot 4^n + cn \cdot 4^n$. *Puesto que* $x_1 = 2x_0 + 4$ *y* $x_2 = 2x_1 + 32 = 2(2x_0+4) + 32 = 4x_0 + 40$, *para hallar la relación entre a, b y c planteamos el sistema:*

$$\begin{array}{rcrcrcl} a & + & b & & & = & x_0 \\ 2a & + & 4b & + & 4c & = & 2x_0 + 4 \\ 4a & + & 16b & + & 32c & = & 4x_0 + 40 \end{array}$$

cuya solución es $a = x_0 + 2$, $b = -2$, $c = 2$.

Si sustituimos en la sucesión tenemos la solución al problema de recurrencia:

$$x_n = 2^n x_0 + 2^{n+1} + (2n-2)\cdot 4^n$$

Que vemos que se corresponde con lo que habíamos dicho antes. La solución general de la recurrencia no homogénea es la solución de la recurrencia lineal homogénea ($2^n x_0$) *más una solución particular* ($2^{n+1} + (2n-2)4^n$).

A la luz de estos ejemplos, tenemos un resultado similar a la proposición 5.3.4.

Proposición 5.3.5. *Supongamos que* x_n *es una sucesión que satisface una relación de recurrencia lineal no homogénea*

$$x_n + a_1x_{n-1} + \cdots + a_kx_{n-k} = b^n \cdot f(n)$$

donde $f(n)$ *es un polinomio de grado* r.

Entonces x_n *satisface una relación de recurrencia lineal homogénea cuyo polinomio característico es* $(x^k + a_1x^{k-1} + \cdots + a_k)(x-b)^{r+1}$.

Observación:

En el caso de que la parte no homogénea fuera suma de dos términos de la forma que hemos dado en esta proposición, es decir, si tuviéramos una relación de recurrencia

$$x_n + a_1x_{n-1} + \cdots + a_kx_{n-k} = (b_1)^n \cdot f_1(n) + (b_2)^n \cdot f_2(n)$$

donde $f_1(n)$ y $f_2(n)$ son dos polinomios en n de grado r_1 y r_2 respectivamente entonces x_n satisface una relación de recurrencia homogénea cuya ecuación característica es

$$(x^k + a_1x^{k-1} + \cdots + a_k)\cdot(x-b_1)^{r_1+1}\cdot(x-b_2)^{r_2+1}$$

Y este resultado puede extenderse fácilmente al caso de que tengamos suma de tres o más términos de la forma indicada.

Vamos a concluir con algunos ejemplos que ilustran lo dicho hasta el momento.

Ejemplo 5.3.14.

1. *Nos preguntamos cuantos números hay cuya expresión en binario tiene n cifras, y no contiene dos ceros consecutivos.*

   Vamos a llamar a este número x_n, *y vamos a determinar el valor de* x_n.

   Sea a un número de tales características. Entonces, la cifra de la izquierda de a vale 1 (en su expresión binaria). Si la quitamos, nos quedan $n-1$ *cifras. Pueden darse dos casos:*

- *Que la cifra de la izquierda de este número sea también 1. En este caso, lo que nos queda es un número cuya expresión en binario tiene* $n-1$ *cifras, y no contiene dos ceros consecutivos. Números de estas características hay* x_{n-1}.
- *Que la cifra de la izquierda de este número sea cero. En este caso, la siguiente debe ser 1 (pues si no, el número a tendría dos ceros consecutivos). Si quitamos también el cero, lo que nos queda es un número de* $n-2$ *cifras en binario, y que no contiene dos ceros consecutivos. Números de estas características hay* x_{n-2}.

Por tanto, tenemos que $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$.

Además, $x_1 = 1$ *(el único número con una cifra es 1), y* $x_2 = 2$ *(los números con dos cifras son* 10 *y* 11*).*

Tenemos entonces que x_n *es la solución al problema de recurrencia lineal no homogénea* $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$. *La solución sabemos que es* $x_n = f_{n+1}$, *donde* f_n *es la sucesión de Fibonacci.*

2. *Comenzamos el capítulo calculando la suma de los n primeros números impares. Es decir, teníamos la sucesión*

$$\begin{array}{lcl} x_1 & = & 1 \\ x_2 & = & 1+3 \\ x_3 & = & 1+3+5 \\ x_4 & = & 1+3+5+7 \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n & = & 1+3+5+\cdots+(2n-1) \end{array}$$

Y vemos que la sucesión x_n *podemos definirla por recurrencia como* $x_n = x_{n-1} + (2n-1)$, $x_1 = 1$.

Tenemos entonces una relación de recurrencia lineal no homogénea donde la parte no homogénea es un polinomio de grado 1, y la parte homogénea tiene polinomio característico $x-1$.

Por tanto, x_n *satisface una relación de recurrencia lineal homogénea cuyo polinomio característico es* $(x-1)^3$, *y por tanto, el término general es* $x_n = a + bn + cn^2$.

El conocimiento de los tres primeros términos nos da el sistema

$$\begin{array}{ccccccc} a & + & b & + & c & = & 1 \\ a & + & 2b & + & 4c & = & 4 \\ a & + & 3b & + & 9c & = & 9 \end{array}$$

cuya solución es $a = 0$, $b = 0$, $c = 1$. *Es decir,* $x_n = n^2$.

3. *Sea* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. *Vamos a calcular una expresión para* A^n.

Notemos en primer lugar que A^n *responde a la forma* $\begin{pmatrix} 1 & a_n & b_n \\ 0 & 1 & a_n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *para ciertos números* a_n *y* b_n.

Y esto lo comprobamos por inducción. Para $n = 0$ *es cierto (basta tomar* $a_0 = b_0 = 1$*), y supuesto cierto para un número natural n se tiene que*

$$A^{n+1} = A^n \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & a_n & b_n \\ 0 & 1 & a_n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1+a_n & 1+a_n+b_n \\ 0 & 1 & 1+a_n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Y si tomamos $a_{n+1} = 1 + a_n$ *y* $b_{n+1} = 1 + a_n + b_n$ *vemos que* A^{n+1} *vemos que* A^{n+1} *responde a la misma forma.*

Vamos ahora a calcular el término general de las sucesiones a_n y b_n. Comenzamos por a_n. Esta sucesión está definida por:

$$a_0 = 0; \qquad a_{n+1} = 1 + a_n$$

Se ve fácilmente que la solución a esta recurrencia es $a_n = n$.

En cuanto a b_n, lo que tenemos es:

$$b_0 = 0; \qquad b_n = 1 + a_n + b_n = b_n + (n+1)$$

Y la solución a esta recurrencia ya la calculamos (ver ejemplo 5.3.1) y vale $b_n = \frac{n(n+1)}{2}$. Por tanto, tenemos que

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Como ejercicio, encuentra el término general de la sucesión $x_n = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$.

Ejemplo 5.3.15. *(Divide y vencerás)*

Un importante paradigma en el diseño de algoritmos es el conocido como divide y vencerás.

La idea es, dado un problema de tamaño n, transformar la resolución del problema en la resolución de otros problemas similares pero de tamaño menor (normalmente un divisor de n). Estos a su vez se vuelven a subdividir en problemas similares pero de menor tamaño hasta llegar a uno que por su tamaño sea sencillo de resolver. A continuación, las soluciones de cada uno de los subproblemas se combinan para llegar a la solución del problema inicial.

En el diseño de un algoritmo para resolver el problema, dicho algoritmo debe entonces llamarse a sí mismo. Esto da lugar a un algoritmo recursivo.

Un ejemplo de esto es el algoritmo merge sort *(ordenación por mezcla). Este algoritmo pretende, dada una lista de números de tamaño n, devolver otra lista de tamaño n con los mismos elementos que la inicial pero ordenados.*

Sea $l = [a_1, a_2, \cdots, a_n]$ una lista de tamaño n, y supongamos que n es par y sea $m = \frac{n}{2}$. El algoritmo divide esta lista en dos sublistas de tamaño m:

$$l_1 = [a_1, a_2, \cdots, a_m]; \qquad l_2 = [a_{m+1}, a_{m+2}, \cdots, a_n]$$

ordena estas dos sublistas, dando lugar a las listas $l_1' = [b_1, b_2, \cdots, b_m]$ y $l_2' = [c_1, c_2, \cdots, c_m]$.

Una vez tenemos las dos listas ordenadas, se mezclan para obtener una lista ordenada con todos los elementos que teníamos en la lista l.

La ordenación de las dos sublistas l_1 y l_2 se realiza de la misma forma: dividiendo cada una en dos sublistas, ordenando cada una de ellas y mezclándolas una vez ordenadas.

Para mezclar dos listas ordenadas de forma que obtengamos una nueva lista también ordenada se procede como sigue: se toma el primer elemento de cada lista y se comparan. El que sea menor se incorpora a una nueva lista y se elimina de lista en que se encontraba. Este proceso se repite hasta que se han recorrido todos los elementos de las dos listas.

Siguiendo este algoritmo vamos a contar el número de comparaciones que hemos de hacer para ordenar una lista de tamaño n. Vamos a llamar a este número t_n[1]*.*

Antes de eso, notemos que si $[b_1, b_2, \cdots, b_p]$ y $[c_1, c_2, \cdots, c_q]$ son dos listas ordenadas de tamaño p y q respectivamente (es decir, $b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_p$ y $c_1 \leq c_2 \leq \cdots \leq c_q$) necesitamos, en el peor de los casos, $p + q - 1$ comparaciones para obtener una lista ordenada con los elementos de ambas listas.

Con esto, tenemos que si n es un número par entonces $t_n = 2 \cdot t_{\frac{n}{2}} + n - 1$, pues para ordenar la lista de tamaño n necesitamos ordenar dos listas de tamaño $\frac{n}{2}$ (y para cada una de ellas vamos a necesitar $t_{\frac{n}{2}}$ comparaciones) y después mezclarlas, para lo que necesitamos $\frac{n}{2} + \frac{n}{2} - 1$ comparaciones.

En el caso de que n fuera impar, la idea es la misma salvo que el tamaño de las dos listas no sería el mismo (se diferencía en una unidad).

[1] Dependiendo de como sea la lista inicial podemos necesitar más o menos comparaciones. t_n denota entonces el número de comparaciones necesarias en el peor de los casos

Por otra parte, tenemos que $t_1 = 0$.

Vamos a llamar y_m *a la sucesión* t_{2^m}. *En este caso tenemos:*

$$y_0 = t_{2^0} = t_1 = 0; \qquad\qquad y_0 = 0$$
$$y_m = t_{2^m} = 2 \cdot t_{\frac{2^m}{2}} + 2^m - 1 = 2 \cdot t_{2^{m-1}} + 2^m - 1 = 2 \cdot y_{m-1} + 2^m - 1; \qquad y_m = 2 \cdot y_{m-1} + 2^m - 1$$

La solución de la recurrencia $y_m = 2 \cdot y_{m-1} + 2^m - 1$ *adopta la forma* $y_m = (a+bm)2^m + c$ *(al pasarlo a una recurrencia homogénea nos quedaría como ecuación característica* $(x-2)^2(x-1) = 0$*).*

Para calcular a, b *y* c *nos hacen falta dos términos más de la sucesión:*

$$y_1 = 2 \cdot y_0 + 2^1 - 1 = 2 \cdot 0 + 2 - 1 = 1; \qquad y_2 = 2 \cdot y_1 + 2^2 - 1 = 2 \cdot 1 + 4 - 1 = 5.$$

Y así nos queda el sistema:

$$\begin{array}{ccccccc} a & & & + & c & = & 0 \\ 2a & + & 2b & + & c & = & 1 \\ 4a & + & 8b & + & c & = & 5 \end{array}$$

cuya solución es $a = -1$, $b = 1$, $c = 1$. *Por tanto* $y_m = m \cdot 2^m - 2^m + 1$.

Sea $n = 2^m$. *En tal caso* $m = log_2(2^m) = log_2(n)$ *luego:*

$$t_n = t_{2^m} = y_m = m \cdot 2^m - 2^m + 1 = log_2(n) \cdot n - n + 1$$

Esta fórmula vale cuando $log_2(n)$ *es un número natural, es decir, cuando* n *es una potencia de 2. Si denotamos por* $\lceil a \rceil$ *al menor entero que es mayor o igual que el número* a *entonces se tiene que*

$$t_n \leq \lceil log_2(n) \rceil \cdot n - n + 1$$

y cuando n *es una potencia de 2 se da la igualdad.*

A partir de aquí se puede comprobar que $t_m \leq m \cdot log_2(m)$.