Estadística Descriptiva e Introducción a la Probabilidad

Juan Antonio Maldonado Jurado

Departamento de Estadística e Investigación Operativa
Universidad de Granada

UNIVERSIDAD DE GRANADA

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Tema 4. Probabilidad condicionada: teoremas básicos. Independencia de sucesos

4.1 Probabilidad condicionada

Definición.- Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio probabilístico arbitrario y A un suceso ($A \in \mathcal{A}$) tal que $P(A) > 0$. Para cualquier otro suceso $B \in \mathcal{A}$, se define la **probabilidad condicionada de B dado A** o **probabilidad de B condicionada a A** como

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

De la propia definición se tiene que

$P(A \cap B) = P(A)P(B|A) \quad$ si $P(A) > 0$ o bien

$P(A \cap B) = P(B)P(A|B) \quad$ si $P(B) > 0$

4.2 Teoremas básicos de probabilidad condicionada

Teorema de la probabilidad compuesta o Regla de la multiplicación

Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad y $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ con $P\left[\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right] > 0$, entonces

$$P\left[\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right] = P(A_1)\cdot P(A_2|A_1)\cdot P(A_3|A_1 \cap A_2)\cdot \ldots \cdot P\left[A_n|\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right].$$

Teorema de la probabilidad total

Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad y sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ un sistema completo de sucesos o partición de Ω con $P(A_n) > 0, \ \forall n \in \mathbb{N}$. Sea B un suceso cualquiera de $\mathcal{A}$, entonces

$$P(B) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)P(B|A_n).$$

4.2 Teoremas básicos de probabilidad condicionada

Regla de Bayes o de la probabilidad inversa

En las mismas condiciones del Teorema de la probabilidad total

$$P(A_n|B) = \frac{P(B|A_n)P(A_n)}{\sum_{n\in\mathbb{N}} P(B|A_n)P(A_n)}$$

El razonamiento lógico que subyace en el cálculo de estas probabilidades es el siguiente: Interpretar el suceso B como el resultado obtenido al realizar un experimento y los sucesos A_n como el conjunto de todas las “causas"que pueden producir la aparición del suceso B; entonces, si para cada “causa"´´ conocemos su *probabilidad a priori* $P(A_n)$ y la *verosimilitud* $P(B|A_n)$ de que el suceso B haya sido causado por A_n, la ocurrencia de B, nos permite asignar, mediante la aplicación del Teorema de Bayes, una “probabilidad a posteriori"$P(A_n|B)$ al suceso de que la verdadera causa haya sido A_n.

4.3 Independencia de sucesos

Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad y $A \in \mathcal{A}$ con $P(A) > 0$. La ocurrencia del suceso A puede alterar la probabilidad de ocurrencia de cualquier otro suceso $B \in \mathcal{A}$. Al estudiar dichas probabilidades, pueden darse los siguientes casos:

1. $P(B|A) \neq P(B)$, es decir la ocurrencia del suceso A modifica la probabilidad de ocurrencia de B. Diremos entonces que el suceso B **depende** del suceso A.

   Si $P(B|A) > P(B)$ se dice que el suceso A **favorece** al B.
   Si $P(B|A) < P(B)$ se dice que el suceso A **desfavorece** al B.

2. Si $P(B|A) = P(B)$, es decir, la ocurrencia del suceso A no tiene ningún efecto sobre el suceso B, se dice que el suceso B es **independiente** del suceso A.

Caracterización de independencia

Sea $A \in \mathcal{A}$ con $P(A) > 0$.

Un suceso B es independiente de $A \iff P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Este teorema pone de manifiesto la simetría de la definición, es decir, si $P(A) > 0$ y $P(B) > 0$, A es independiente de B si y sólo si B lo es de A y diremos, en general, que A y B son independientes.

4.3 Independencia de sucesos

Proposición.- Si A y B son independientes, entonces

1. A y $\overline{B}$ son independientes.
2. $\overline{A}$ y B son independientes.
3. $\overline{A}$ y $\overline{B}$ son independientes.

La definición de independencia puede extenderse a una familia de sucesos y en esta extensión caben dos definiciones:

Definición 1: INDEPENDENCIA DOS A DOS.- Dado un espacio probabilístico $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ y una clase de sucesos $\mathcal{U} \subset \mathcal{A}$ no vacía, diremos que sus sucesos son **independientes dos a dos**, si

$$\forall A, B \in \mathcal{U}, \;\; A \neq B, \quad A \text{ y } B \text{ son independientes}$$

Definición 2: INDEPENDENCIA MUTUA.- Dado un espacio probabilístico $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ y una clase de sucesos $\mathcal{U} \subset \mathcal{A}$ no vacía, diremos que sus sucesos son **mutuamente (completamente o totalmente) independientes** o simplemente **independientes**, si para toda subcolección finita $\{A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_k}\}$ de suceso distintos de $\mathcal{U}$ se verifica

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = \prod_{j=1}^{k} P(A_{i_j})$$