TEMA 1

Inducción y recurrencia.

Ejercicio 1.1. Demuestra las siguientes propiedades:

1. $m + 0 = 0 + m = m$.
2. $m + 1 = 1 + m = \sigma(m)$.
3. $(m + n) + p = m + (n + p)$.
4. $m + n = n + m$.
5. Si $m + p = n + p$, entonces $m = n$.
6. Si $m + n = 0$, entonces $m = n = 0$.
7. $0 \cdot m = m \cdot 0 = 0$
8. $1 \cdot m = m \cdot 1 = m$
9. $(m + n) \cdot p = m \cdot p + n \cdot p$
10. $m \cdot n = n \cdot m$
11. $(m \cdot n) \cdot p = m \cdot (n \cdot p)$
12. $m \leq m$.
13. Si $m \leq n$ y $n \leq m$, entonces $m = n$.
14. Si $m \leq n$ y $n \leq p$, entonces $m \leq p$.
15. Si $m \leq n$, entonces $\exists_1 p \in \mathbb{N}\ m + p = n$ y lo llamamos n menos m $(n - m)$.
16. Si $m \leq n$, entonces $m + p \leq n + p$.
17. Si $m \leq n$, entonces $m \cdot p \leq n \cdot p$.
18. Si $m \cdot p \leq n \cdot p$, entonces $p = 0$ o $m \leq n$.

Ejercicio 1.2. Demuestra por el método de inducción las siguientes propiedades:

1. $\forall n \geq 1,\ \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$
2. $\forall n \geq 1,\ \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
3. $\forall n \geq 1,\ \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$
4. $\forall n \geq 1,\ \sum_{k=1}^{n} k^5 + \sum_{k=1}^{n} k^7 = 2\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^4$.
5. $\forall n \geq 0,\ \sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$, siendo $a \neq 1$

6. $\forall n \geq 1,\ \sum_{k=1}^{n}(k \cdot k!) = (n+1)! - 1$

7. $\forall n \geq 2,\ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} > \sqrt{n}$

8. $\forall n \geq 4,\ 2^n \geq n^2$

9. $\forall n \geq 4,\ n! > 2^n$

Ejercicio 1.3. Demuestra que para todo $n \in \mathbb{N}$:

a) $3^{2n} - 2^n$ es divisible por 7,

b) $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ es divisible por 7,

c) $3^{2n+2} + 2^{6n+1}$ es divisible por 11,

d) $3 \cdot 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$ es divisible por 17,

e) $n(n^2+2)$ es múltiplo de 3,

f) $5^{n+1} + 2 \cdot 3^n + 1$ es múltiplo de 8,

g) $7^{2n} + 16n - 1$ es múltiplo de 64,

h) $(n+1)(n+2)\cdots(n+n)$ es múltiplo de 2^n

i) $4^{2n} - 2^n$ es divisible por 7,

j) $2^{3n} - 14^n$ es divisible por 6.

Ejercicio 1.4. Demuestra que la suma de los n primeros números naturales impares es igual a n^2.

Ejercicio 1.5. Demuestra por inducción que para todo número par k, el resto de dividir 2^k entre 3 es 1.

Ejercicio 1.6. Demuestra por inducción que para todo número impar k, el resto de dividir 2^k entre 3 es 2.

Ejercicio 1.7. Sea $x_0 = 1$, $x_1 = 2$ y $x_n = 4 + x_{n-2}$ para todo $n \geq 2$. Demuestra que $x_n = \frac{1}{2}(4n + 1 + (-1)^n)$ para todo $n \geq 0$.

Ejercicio 1.8. La sucesión de los números de Fibonacci se define de la siguiente forma:

$$F_0 = 0,\ F_1 = 1 \text{ y } F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \text{ para } n \geq 2.$$

Demuestra cada una de las siguientes propiedades:

1. $F_{n+2} > 2 \cdot F_n$ para todo $n \geq 2$
2. $\sum_{i=0}^{n} (F_i)^2 = F_n \cdot F_{n+1}$ para todo $n \geq 0$
3. 5 divide a F_{5n} para todo $n \geq 0$
4. $F_{n-1} \cdot F_{n+1} = (F_n)^2 + (-1)^n$ para todo $n \geq 1$
5. $mcd(F_n, F_{n+1}) = 1$ para todo $n \geq 0$

Ejercicio 1.9. Resuelve las ecuaciones en recurrencia siguientes:

- $x_0 = 1, x_1 = 1,\ x_n = 2x_{n-1} - x_{n-2}$ para $n \geq 2$.
- $x_0 = 1, x_1 = 2,\ x_n = 5x_{n-1} - 6x_{n-2}$ para $n \geq 2$.
- $x_0 = 1, x_1 = 1,\ x_n = 3x_{n-1} + 4x_{n-2}$ para $n \geq 2$.
- $x_0 = 1, x_1 = 2,\ x_n = -x_{n-1} + 6x_{n-2}$ para $n \geq 2$.
- $x_0 = 0, x_1 = 1,\ x_n = 2x_{n-1} - 2x_{n-2}$ para $n \geq 2$.

- $x_0 = 5, x_1 = 12$, $x_n = 6x_{n-1} - 9x_{n-2}$ para $n \geq 2$.
- $x_0 = 1, x_1 = 1, x_2 = 2$, $x_n = 5x_{n-1} - 8x_{n-2} + 4x_{n-3}$ para $n \geq 3$.
- $x_0 = 1, x_1 = 1, x_2 = 2$, $x_n = x_{n-1} + x_{n-2} - x_{n-3}$ para $n \geq 3$.
- $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2$, $x_n = x_{n-1} + 2x_{n-2} - x_{n-3}$ para $n \geq 3$.
- $x_0 = 1, x_1 = 1, x_2 = 3$, $x_n = 4x_{n-1} - 5x_{n-2} + 2x_{n-3}$ para $n \geq 3$.
- $x_0 = 1, x_1 = 3, x_2 = 7$, $x_n = 3x_{n-1} - 3x_{n-2} + x_{n-3}$ para $n \geq 3$.
- $x_0 = 0$, $x_n = 2x_{n-1} + 1$ para $n \geq 1$ (Torres de Hanoi).
- $x_0 = 1$, $x_n = x_{n-1} + n$ para $n \geq 1$ (regiones plano).
- $x_0 = 1$, $x_n = 2x_{n-1} + n$ para $n \geq 1$.
- $x_0 = 0$, $x_n - 2x_{n-1} = 3^n$ para $n \geq 1$.
- $x_0 = 0$, $x_n - 2x_{n-1} = (n+1)3^n$ para $n \geq 2$.
- $x_0 = 1/2, x_1 = 3$, $x_n = 2x_{n-1} + x_{n-2} + 3$ para $n \geq 2$.
- $x_0 = 0, x_1 = 1$, $x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2} + 2^n$ para $n \geq 2$.
- $x_0 = 0$, $x_n - 2x_{n-1} = n + 2^n$ para $n \geq 2$.
- $x_0 = 0, x_1 = 1$, $x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2} + 2^n + 2n$ para $n \geq 2$.

Ejercicio 1.10. Obtén una recurrencia lineal homogénea para cada una de las sucesiones siguientes definidas para todo $n \geq 0$:

1. $x_n = 4n + 1$.
2. $y_n = 2^n + n$.
3. $z_n = 2^n + 3^n(n+1)$.

Ejercicio 1.11. Para cada $n \geq 1$, definimos $x_n = \sqrt{n + \sqrt{(n-1) + \sqrt{\cdots + \sqrt{2 + \sqrt{1}}}}}$. Obtén una expresión recurrente para x_n y demuestra que $x_n < \sqrt{n} + 1$ para todo $n \geq 0$.

Ejercicio 1.12. Sea la sucesión $a_0 = 1$, $a_n = a_{n-1} + 4\sqrt{a_{n-1}} + 4$ para $n \geq 1$. Encuentra una expresión no recurrente para a_n y demuestra la validez de la misma.