Solución de circuitos sencillos en corriente alterna

Isabel M. Tienda Luna

En este documento vamos a analizar los casos sencillos de una resistencia, un condensador y una bobina en un circuito alimentado por corriente alterna.

Vamos a suponer en nuestros ejemplos que la señal de corriente alterna que proporciona nuestra fuente es $v(t) = 10\cos\left(10^6 \frac{rad}{s} t\right) V$. Como puede verse, esta tensión varía con el tiempo, su amplitud es 10V y su frecuencia angular (ω) es $10^6 \frac{rad}{s}$. Notar también que representamos la tensión con una letra minúscula en lugar de las mayúsculas que hemos utilizado hasta ahora en corriente continua.

Como puede verse en la figura 1, $v(t)$ es la parte real del número complejo:

$$10e^{j10^6 \frac{rad}{s} t} V = \left(10\cos\left(10^6 \frac{rad}{s} t\right) + j10\sin\left(10^6 \frac{rad}{s} t\right)\right) V$$

Este número complejo tiene un módulo constante que vale $10V$ y un argumento ($10^6 \frac{rad}{s} t$) que depende del tiempo. Por tanto, el valor del argumento dependerá del instante de tiempo en el que nos encontremos, esto es, del valor concreto de t que tengamos. Por ejemplo, si $t = 0s$ el argumento valdrá 0 radianes; si $t = 1s$ el argumento valdrá 10^6 radianes y si $t = 10s$ el argumento valdrá 10^7 radianes.

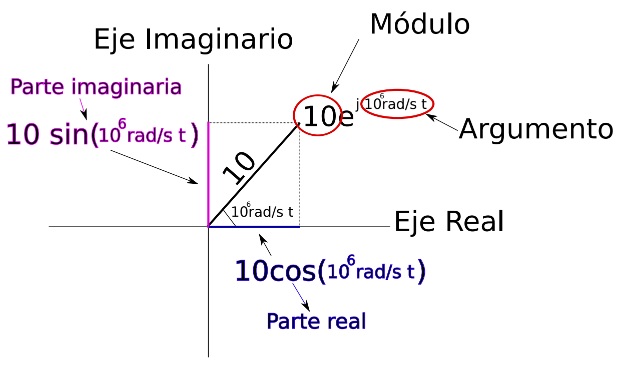

Figura 1: Número complejo expresado de distintas formas

Para evitar tener que resolver integrales o derivadas al aplicar las Leyes de Kirchhoff para resolver los circuitos en corriente alterna, utilizaremos el número complejo completo ($10e^{j10^6 \frac{rad}{s} t} V$) en lugar de su parte real ($10\cos\left(10^6 \frac{rad}{s} t\right) V$) como valor de la tensión de la fuente. Trabajar con todo el número complejo hace que podamos calcular la derivada o la integral de $v(t)$ fácilmente. Si queremos calcular la derivada de $v(t)$, sólo hay que que multiplicar $v(t)$ por $j\omega$ que en nuestro ejemplo es $j10^6 \frac{rad}{s}$. Entonces:

$$\frac{dv(t)}{dt} = j\omega\, v(t)$$

que en nuestro ejemplo será:

$$\frac{dv(t)}{dt} = j10^6 \frac{rad}{s} v(t)$$

De igual manera, si trabajo con el número complejo completo en lugar de con el coseno (su parte real), la integral de $v(t)$ puede calcularse sin más que dividir $v(t)$ por $j\omega$ que en nuestro ejemplo es $j10^6 \frac{rad}{s}$. Entonces:

$$\int v(t)dt = \frac{v(t)}{j\omega}$$

que en nuestro ejemplo será:

$$\int v(t)dt = \frac{v(t)}{j10^6 \frac{rad}{s}}$$

Precisamente estas facilidades de cálculo hacen posible que para **cualquier elemento** de un circuito (resistencia, bobina o condensador) podamos escribir la siguiente relación:

$$v(t) = Zi(t) \tag{1}$$

Esta relación se llama **Ley de Ohm Generalizada** porque es como la ley de Ohm (que sólo la podía usar en corriente continua para resistencias) pero puedo usarla **para cualquier tipo de elementos** (de ahí lo de generalizada).

La Ley de Ohm Generalizada dice que el número complejo que representa la diferencia de potencial entre los extremos de un elemento ($v(t)$) es igual al producto de la impedancia Z y el número complejo que representa la intensidad que recorre dicho elemento ($i(t)$). Por tanto, si un elemento cumple la Ley de Ohm generalizada, yo puedo tratarlo como si fuera una resistencia. Una resistencia de un valor especial, Z. El valor de Z dependerá del elemento con el que estemos trabajando. Así, si mi elemento es una resistencia, $Z_R = R$. Si el elemento es un condensador, $Z_C = \frac{1}{j\omega C}$. Finalmente, si se trata de una bobina, $Z_L = j\omega L$. Las impedancias pueden asociarse en serie y en paralelo como las resistencias cumpliéndose que:

$$Z^{serie} = \sum_i Z_i$$

$$\frac{1}{Z^{paralelo}} = \sum_i \frac{1}{Z_i}$$

Ejemplo 1
Supongamos que tenemos una fuente de tensión $v(t) = 10\cos\left(10^6 \frac{rad}{s} t\right) V$ alimentando un circuito con una resistencia de valor $1k\Omega$. (Ver figura 2)
¿Cuánto vale la impedancia de la resistencia?

$$Z_R = R = 1k\Omega$$

Notar aquí que el valor de la impedancia es constante y **no depende** de la frecuencia de la fuente de tensión.

Ejemplo 2
Supongamos que tenemos una fuente de tensión $v(t) = 10\cos\left(10^6 \frac{rad}{s} t\right) V$ alimentando un circuito con un condensador cuya capaciadad es $C = 2nF$. (Ver figura 3)
¿Cuánto vale la impedancia del condensador?

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{j10^6 \frac{rad}{s} 2 \cdot 10^{-9} F} = \frac{1}{j2 \cdot 10^{-3}} \Omega = -j0{,}5{\cdot}10^3 \Omega = 0{,}5{\cdot}10^3 e^{-j\frac{\pi}{2}} \Omega$$

Notar aquí que el valor de la impedancia **depende** de la frecuencia de la fuente de tensión (ω). Por lo que si usáramos la fuente a otra frecuencia, el valor de la impedancia cambiaría.

Ejemplo 3
Supongamos que tenemos una fuente de tensión $v(t) = 10\cos\left(10^6 \frac{rad}{s} t\right) V$ alimentando un circuito con una bobina cuyo coeficiente de autoinducción es $L = 1mH$. (Ver figura 4)
¿Cuánto vale la impedancia de la bobina?

$$Z_L = j\omega L = j10^6 \frac{rad}{s} 10^{-3} H = j10^3 \Omega = 10^3 e^{j\frac{\pi}{2}} \Omega$$

Notar aquí que el valor de la impedancia **depende** de la frecuencia de la fuente de tensión (ω). Por lo que si usáramos la fuente a otra frecuencia, el valor de la impedancia cambiaría.

1. Resistencias

Supongamos que tenemos un circuito como el de la figura 2 formado por una resistencia de valor $R = 1k\Omega$ y una fuente de tensión alterna de valor $v(t) = 10\cos\left(10^6 \frac{rad}{s} t\right) V$ y que nos piden calcular la intensidad de corriente que recorre la resistencia. Para ello, usaremos la Ley de Ohm generalizada que dice que:

$$v_R(t) = Z_R i(t)$$

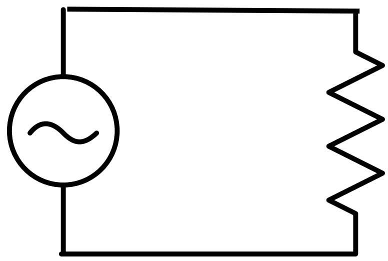

Figura 2: Circuito con una resistencia en CA

donde $v_R(t)$ es la diferencia de potencial entre los extremos de la resistencia (que es justo la que proporciona la fuente $v(t)$), Z_R es la impedancia asociada a la resistencia y $i(t)$ es la intensidad que nos piden. Por tanto, para calcular $i(t)$ lo único que tengo que hacer es despejarla de la Ley de Ohm generalizada:

$$i(t) = \frac{v(t)}{Z_R} \tag{2}$$

En la ecuación anterior sé lo que vale $v(t)$ pero no conozco el valor de Z_R así que lo siguiente que tengo que hacer es calcular lo que vale la impedancia. Como el elemento con el que estamos trabajando es una resistencia, $Z_R = R = 1k\Omega$. Ya sé Z_R y puedo calcular $i(t)$ como:

$$i(t) = \frac{10e^{j10^6 \frac{rad}{s}t}V}{1k\Omega} = 0{,}01e^{j10^6 \frac{rad}{s}t}A \tag{3}$$

donde para $v(t)$ he usado su expresión como número complejo (porque estoy haciendo uso de la Ley de Ohm Generalizada).

Notar aquí que el argumento de $i(t)$ es igual que el argumento de $v(t)$ pero sus módulos son diferentes. Además, los dos argumentos $(10^6 \frac{rad}{s}t)$ varían con el tiempo. Esto es, el valor del argumento dependerá del valor de t, del instante de tiempo en el que estemos.

Finalmente, si quiero expresar $i(t)$ adecuadamente, esto es sin usar números complejos, utilizo que $v(t) = 10\cos\left(10^6 \frac{rad}{s}t\right)V$ era la parte real del número complejo que he estado usando para representar la diferencia de potencial $(10e^{j10^6 \frac{rad}{s}t}V)$. Por tanto, para expresar $i(t)$ tendré que calcular la parte real al número complejo que he obtenido de la ecuación 3. Entonces, $i(t) = 0{,}01\cos\left(10^6 \frac{rad}{s}t\right)A$.

2. Condensadores

Supongamos que tenemos un circuito como el de la figura 3 formado por un condensador de capacidad $C = 2nF$ y una fuente de tensión alterna de valor $v(t) = 10\cos\left(10^6 \frac{rad}{s}t\right)V$ y que nos piden calcular la intensidad de

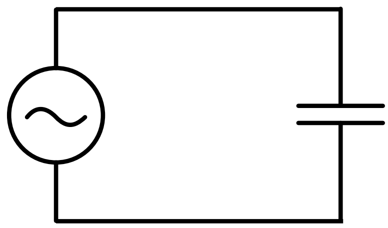

Figura 3: Circuito con un condensador en CA

corriente que recorre el condensador. Para ello, usaremos la Ley de Ohm generalizada que dice que:

$$v_C(t) = Z_C i(t)$$

donde $v_C(t)$ es la diferencia de potencial entre los extremos del condensador (que es justo la que proporciona la fuente $v(t)$), Z_C es la impedancia asociada al condensador y $i(t)$ es la intensidad que nos piden. Por tanto, para calcular $i(t)$ lo único que tengo que hacer es despejarla de la Ley de Ohm generalizada:

$$i(t) = \frac{v(t)}{Z_C} \tag{4}$$

De la ecuación anterior, conozco lo que vale $v(t)$ pero no sé lo que vale Z_C así que lo siguiente que tengo que hacer es calcular el valor de esta impedancia. Como el elemento con el que estamos trabajando es un condensador:

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{j10^6 \frac{rad}{s} 2 \cdot 10^{-9} F} = \frac{1}{j2 \cdot 10^{-3}} \Omega = -j0{,}5{\cdot}10^3 \Omega = 0{,}5{\cdot}10^3 e^{-j\frac{\pi}{2}} \Omega$$

Ya sé Z_C así que puedo calcular $i(t)$ como:

$$i(t) = \frac{10 e^{j10^6 \frac{rad}{s} t} V}{0{,}5 \cdot 10^3 e^{-j\frac{\pi}{2}} \Omega} = 0{,}02 e^{j\left(10^6 \frac{rad}{s} t + \frac{\pi}{2}\right)} A \tag{5}$$

donde para $v(t)$ tengo que usar su expresión como número complejo (porque estoy haciendo uso de la Ley de Ohm Generalizada).

Notar aquí que el argumento de $i(t)$ no es igual que el argumento de $v(t)$, de hecho, se diferencian en $\pi/2$. Pero, a pesar de ser diferentes, los dos argumentos varían con el tiempo de la misma manera (los dos tienen el término $10^6 \frac{rad}{s} t$). Esto es, el valor de estos argumentos dependerá del valor de t, del instante de tiempo en el que estemos.

Finalmente, si quiero expresar $i(t)$ adecuadamente, esto es sin usar números complejos, utilizo que $v(t) = 10 \cos\left(10^6 \frac{rad}{s} t\right) V$ era la parte real del número complejo que he estado usando para representar la diferencia de potencial ($10 e^{j10^6 \frac{rad}{s} t} V$). Por tanto, para expresar $i(t)$ tendré que calcular la parte real al número complejo que he obtenido de la ecuación 5. Entonces, $i(t) = 0{,}02 \cos\left(10^6 \frac{rad}{s} t + \frac{\pi}{2}\right) A$.

3. Bobinas

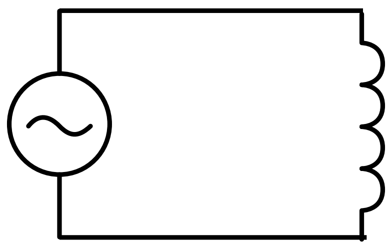

Figura 4: Circuito con una bobina en CA

Supongamos que tenemos un circuito como el de la figura 4 formado por una bobina de autoinducción $L = 1mH$ y una fuente de tensión alterna de valor $v(t) = 10\cos\left(10^6 \frac{rad}{s} t\right) V$ y que nos piden calcular la intensidad de corriente que recorre la bobina. Para ello, usaremos la Ley de Ohm generalizada que dice que:

$$v_L(t) = Z_L i(t)$$

donde $v_L(t)$ es la diferencia de potencial entre los extremos de la bobina (que es justo la que proporciona la fuente $v(t)$), Z_L es la impedancia asociada a la bobina y $i(t)$ es la intensidad que nos piden. Por tanto, para calcular $i(t)$ lo único que tengo que hacer es despejarla de la Ley de Ohm generalizada:

$$i(t) = \frac{v(t)}{Z_L} \tag{6}$$

De la ecuación anterior conozco lo que vale $v(t)$ pero no sé lo que vale Z_L así que lo siguiente que tengo que hacer es calcular el valor de esa impedancia. Como el elemento con el que estamos trabajando es una bobina:

$$Z_L = j\omega L = j10^6 \frac{rad}{s} 10^{-3} H = j10^3 \Omega = 10^3 e^{j\frac{\pi}{2}} \Omega$$

Ya sé Z_L así que puedo calcular $i(t)$ como:

$$i(t) = \frac{10 e^{j10^6 \frac{rad}{s} t} V}{10^3 e^{j\frac{\pi}{2}} \Omega} = 0{,}01 e^{j\left(10^6 \frac{rad}{s} t - \frac{\pi}{2}\right)} A \tag{7}$$

donde para $v(t)$ tengo que usar su expresión como número complejo (porque estoy haciendo uso de la Ley de Ohm Generalizada).

Notar aquí que el argumento de $i(t)$ no es igual que el argumento de $v(t)$, de hecho, se diferencian en $-\pi/2$. Pero, a pesar de ser diferentes, los dos argumentos varían con el tiempo de la misma manera (los dos tienen el término $10^6 \frac{rad}{s} t$). Esto es, el valor de estos argumentos dependerá del valor de t, del instante de tiempo en el que estemos.

Finalmente, si quiero expresar $i(t)$ adecuadamente, esto es sin usar números complejos, utilizo que $v(t) = 10\cos\left(10^6 \frac{rad}{s} t\right) V$ era la parte real del número complejo que he estado usando para representar la diferencia de potencial ($10e^{j10^6 \frac{rad}{s} t} V$). Por tanto, para expresar $i(t)$ tendré que calcular la parte real al número complejo que he obtenido de la ecuación 7. Entonces, $i(t) = 0{,}01\cos\left(10^6 \frac{rad}{s} t - \frac{\pi}{2}\right) A$.

4. Consecuencias

1. Como los argumentos de las intensidades y los argumentos de las diferencias de potencial varían con el tiempo de igual manera (los dos tienen el término $10^6 \frac{rad}{s} t$). Por tanto, en los ejercicios voy a olvidarme de esta parte del argumento y la añadiré al final, cuando haya terminado de hacer todas las cuentas. Eso significa que voy a trabajar sólo con la parte independiente del tiempo (lo que se llama **fasor**) del número complejo que representa la intensidad o la diferencia de potencial. Entonces, a partir de ahora, me olvido de la dependencia temporal para hacer las cuentas, trabajo con fasores y añado el término ωt al final.

   Esto significaría que el ejercicio anterior podría haber resuelto usando como diferencia de potencial el fasor $V = 10V$. El fasor que representa la intensidad se calcula como $I = \frac{V}{Z}$. Por tanto:

$$\begin{aligned}
\text{Para la resistencia} \quad &\rightarrow \quad I = \frac{10V}{1k\Omega} = 0{,}01A \\
\text{Para el condensador} \quad &\rightarrow \quad I = \frac{10V}{0{,}5 \cdot 10^3 e^{-j\frac{\pi}{2}}\Omega} = 0{,}02e^{j\frac{\pi}{2}} A \\
\text{Para la bobina} \quad &\rightarrow \quad I = \frac{10V}{10^3 e^{j\frac{\pi}{2}}\Omega} = 0{,}01e^{-j\frac{\pi}{2}} A
\end{aligned}$$

   Una vez calculado el fasor que representa la intensidad (I) calculo el número complejo total $i(t) = I\ e^{j10^6 \frac{rad}{s} t}$:

$$\begin{aligned}
\text{Para la resistencia} \quad &\rightarrow \quad i(t) = 0{,}01e^{j10^6 \frac{rad}{s} t} A \\
\text{Para el condensador} \quad &\rightarrow \quad i(t) = 0{,}02e^{j\left(10^6 \frac{rad}{s} t + \frac{\pi}{2}\right)} A \\
\text{Para la bobina} \quad &\rightarrow \quad i(t) = 0{,}01e^{j\left(10^6 \frac{rad}{s} t - \frac{\pi}{2}\right)} A
\end{aligned}$$

   Finalmente, me quedo con la parte real de ese número complejo porque la fuente era tipo coseno:

$$\begin{aligned}
\text{Para la resistencia} \quad &\rightarrow \quad i(t) = 0{,}01 \cos\left(10^6 \frac{rad}{s} t\right) A \\
\text{Para el condensador} \quad &\rightarrow \quad i(t) = 0{,}02 \cos\left(10^6 \frac{rad}{s} t + \frac{\pi}{2}\right) A \\
\text{Para la bobina} \quad &\rightarrow \quad i(t) = 0{,}01 \cos\left(10^6 \frac{rad}{s} t - \frac{\pi}{2}\right) A
\end{aligned}$$

2. En los circuitos en CA voy a usar **SIEMPRE** la Ley de Ohm Generalizada con lo que voy a tratar cualquier elemento (resistencia, bobina o condensador) como si fuera una resistencia en el sentido de que se va a cumplir que $v(t)$ es igual a una constante por $i(t)$. Esa constante se llama impedancia, la representamos por la letra Z y la forma de calcular su valor depende del tipo de elemento.