

Estadística Descriptiva e Introducción a la Probabilidad

Juan Antonio Maldonado Jurado

Departamento de Estadística e Investigación Operativa
Universidad de Granada



UNIVERSIDAD
DE GRANADA

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Tema 3. Espacios de probabilidad: Definición axiomática y propiedades básicas de la probabilidad

Fenómenos y experimentos aleatorios. Álgebra de sucesos

Introducción

Fenómenos y experimentos aleatorios

Álgebra de sucesos

Diferentes concepciones de probabilidad

Axiomática de Kolmogorov. Propiedades básicas de la probabilidad

“La Estadística es la ciencia que estudia cómo debe emplearse la información y cómo dar una guía de acción en situaciones prácticas que envuelven incertidumbre”

V. Barnett (1973)

3.1 Fenómenos y experimentos aleatorios. Álgebra de sucesos

- ▶ *Experimentos determinísticos*: aquellos que dan lugar al mismo resultado siempre que se realicen bajo idénticas condiciones.
- ▶ *Experimentos aleatorios*: se caracterizan porque sus resultados pueden variar, incluso si el experimento se realiza bajo idénticas condiciones iniciales.

3.1 Fenómenos y experimentos aleatorios. Álgebra de sucesos

Características de los experimentos aleatorios:

- a) El experimento se puede repetir indefinidamente bajo idénticas condiciones.
- b) Cualquier modificación mínima en las condiciones iniciales de la repetición puede modificar completamente el resultado final del experimento.
- c) Se puede determinar el conjunto de posibles resultados del experimento, pero no se puede predecir previamente un resultado particular.
- d) Si el experimento se repite un número grande de veces, entonces aparece algún modelo de regularidad estadística en los resultados obtenidos.

3.1 Fenómenos y experimentos aleatorios. Álgebra de sucesos

Espacio muestral

- Si consideramos un experimento aleatorio arbitrario, cada uno de sus posibles resultados indescomponibles en otros más simples (de forma que no pueden ocurrir dos simultáneamente, pero sí uno necesariamente) se denomina **resultado elemental, suceso elemental o punto muestral**.
- El conjunto formado todos los sucesos elementales asociados a un experimento aleatorio se le denomina **espacio muestral** y se le designa por Ω . Por ejemplo, en el experimento aleatorio consistente en lanzar un dado, el espacio muestral es $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. El espacio muestral asociado a un experimento aleatorio puede ser de tres tipos, dependiendo de su cardinal: finito, infinito numerable o continuo.

3.1 Fenómenos y experimentos aleatorios. Álgebra de sucesos

Sucesos

Llamaremos **suceso aleatorio** o simplemente **suceso** a cualquier característica, hecho o proposición lógica que pueda formularse en relación a un experimento aleatorio, cuya ocurrencia o no pueda ser observada tras la realización del experimento. Así, todo suceso puede identificarse con un subconjunto del espacio muestral, el conjunto de resultados o sucesos elementales cuya aparición implica la ocurrencia del suceso. Esta identificación de un suceso con un subconjunto del espacio muestral hace posible el uso de la Teoría de Conjuntos para especificar las relaciones y operaciones entre sucesos.

3.1 Fenómenos y experimentos aleatorios. Álgebra de sucesos

Sucesos

Cabe destacar, en principio, cuatro tipos de sucesos, según el número de elementos que lo constituyan:

- ▶ **Suceso elemental, suceso simple o punto muestral** es cada uno de los resultados posibles del experimento aleatorio; es decir, un suceso elemental consta de un solo elemento del espacio muestral Ω .
- ▶ **Suceso compuesto**, es el que consta de dos o más sucesos elementales.
- ▶ **Suceso seguro, cierto o universal**, es aquel que ocurre siempre. Consta de todos los sucesos elementales del espacio muestral y se identifica con el espacio muestral total Ω .
- ▶ **Suceso imposible**, es el que no ocurre nunca. No contiene ningún elemento del espacio muestral y se identifica con \emptyset .

3.1 Fenómenos y experimentos aleatorios. Álgebra de sucesos

Operaciones y relaciones entre sucesos

- **Suceso contenido en otro.** Dados dos sucesos A y B de un experimento aleatorio, diremos que el suceso A **está contenido** en B , y lo notaremos por $A \subset B$ si siempre que ocurre el suceso A , también ocurre el suceso B . En la identificación con conjuntos, si cada suceso elemental perteneciente a A pertenece también a B . También se dice que A **implica** B y se denota por $A \Rightarrow B$.

- **Igualdad de sucesos.** Dados dos sucesos A y B de un experimento aleatorio, diremos que son **iguales** si siempre que ocurre el suceso A ocurre el suceso B y siempre que ocurre el suceso B ocurre el suceso A .

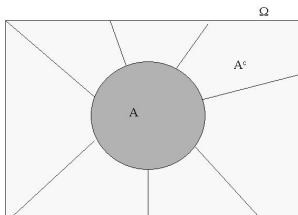
$$A = B \iff A \subset B \text{ y } B \subset A.$$

En la identificación con sucesos coincide con la definición de igualdad de conjuntos, es decir, dos sucesos serán iguales si contienen exactamente los mismos puntos muestrales.

3.1 Fenómenos y experimentos aleatorios. Álgebra de sucesos

Operaciones y relaciones entre sucesos

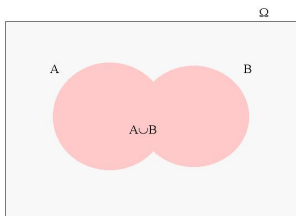
- **Suceso complementario o contrario.** Dado un suceso A , se define el suceso complementario o contrario de A como aquel suceso que ocurre si y sólo si no ocurre el suceso A ; o bien, es el suceso constituido por los sucesos elementales del espacio muestral Ω que no pertenecen a A . Lo notaremos por \bar{A} .



3.1 Fenómenos y experimentos aleatorios. Álgebra de sucesos

Operaciones y relaciones entre sucesos

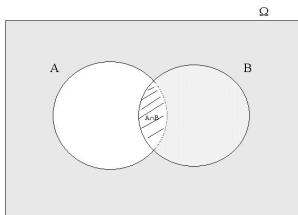
- **Unión de sucesos.** Dados dos sucesos A y B de un experimento aleatorio, se define la **unión** de ambos sucesos como aquel suceso que ocurre siempre que ocurra el suceso A , o el B o ambos a la vez y se denota por $A \cup B$. Está compuesto por los sucesos elementales que pertenecen a A , o a B o a ambos a la vez.



3.1 Fenómenos y experimentos aleatorios. Álgebra de sucesos

Operaciones y relaciones entre sucesos

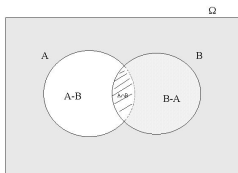
- **Intersección de sucesos.** Dados dos sucesos A y B de un experimento aleatorio, se define la **intersección** de ambos sucesos como aquel suceso que ocurre cuando ocurren A y B simultáneamente y se denota por $A \cap B$. Está constituido por los resultados elementales que pertenecen simultáneamente a A y a B .



3.1 Fenómenos y experimentos aleatorios. Álgebra de sucesos

Operaciones y relaciones entre sucesos

• **Diferencia de sucesos.** Dados dos sucesos A y B de un experimento aleatorio, se define la diferencia $A - B$ como aquel suceso que ocurre siempre que ocurra A y no ocurra B . Está constituido por los sucesos elementales que pertenecen a A y no pertenecen a B . $A - B = A \cap \bar{B}$. $B - A = B \cap \bar{A}$.



Diferencia simétrica de sucesos. Dados dos sucesos A y B , se define la diferencia simétrica $A \triangle B$ como el suceso que ocurre si ocurre uno y sólo uno de los dos. Está constituido por los sucesos elementales de B que no están en A y los de A que no están en B . $A \triangle B = (A - B) \cup (B - A)$

3.1 Fenómenos y experimentos aleatorios. Álgebra de sucesos

Operaciones y relaciones entre sucesos

- **Sucesos disjuntos, incompatibles o mutuamente**

excluyentes: dos sucesos A y B son disjuntos o incompatibles si no pueden ocurrir simultáneamente; o bien, dicho de otra forma, si siempre que ocurre uno de los sucesos no se verifica el otro, o sea, la ocurrencia de uno excluye la posibilidad de que ocurra el otro.

En términos de conjuntos, dados dos sucesos A y B de un experimento aleatorio, diremos que son disjuntos, incompatibles o mutuamente excluyentes si su intersección es el suceso imposible $A \cap B = \emptyset$, es decir, si no tienen ningún suceso elemental en común.

En general, dados n sucesos A_1, A_2, \dots, A_n diremos que son mutuamente excluyentes, disjuntos o incompatibles dos a dos, si cada pareja de sucesos son mutuamente excluyentes, es decir, si

$$A_i \cap A_j = \emptyset, \quad \forall i \neq j \ (i, j = 1, 2, \dots, n).$$

3.1 Fenómenos y experimentos aleatorios. Álgebra de sucesos

Operaciones y relaciones entre sucesos

- **Sistema exhaustivo de sucesos.** Si los sucesos A_1, A_2, \dots, A_n son tales que verifican que la unión de ellos es igual al espacio muestral

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \Omega$$

se dice que forman una colección o sistema exhaustivo de sucesos.

- **Sistema completo de sucesos o partición del espacio muestral.** Si un conjunto de sucesos constituyen un sistema exhaustivo de sucesos y, además, son mutuamente excluyentes, entonces se dice que forman un **sistema completo de sucesos** o **una partición** de Ω .

3.1 Fenómenos y experimentos aleatorios. Álgebra de sucesos

Estructuras de álgebra y σ -álgebra

• **Álgebra de Boole (Campo).** Una clase no vacía \mathcal{A} de conjuntos de Ω tiene estructura de **Álgebra de sucesos o Álgebra de Boole**, si es cerrada para uniones finitas y para la operación de complementario, esto es, si

1. $\forall A \in \mathcal{A}$ se verifica que su complementario $\bar{A} \in \mathcal{A}$.
2. $\forall A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ se verifica que $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{A}$.

De estas propiedades se deducen las siguientes:

- a) El espacio muestral $\Omega \in \mathcal{A}$. En efecto, dado un suceso $A \in \mathcal{A}$, por la condición 1 se verifica que $\bar{A} \in \mathcal{A}$ y por la condición 2, $A \cup \bar{A} = \Omega \in \mathcal{A}$.
- b) El suceso imposible $\emptyset \in \mathcal{A}$. En efecto, $\bar{\Omega} = \emptyset$.

3.1 Fenómenos y experimentos aleatorios. Álgebra de sucesos

Estructuras de álgebra y σ -álgebra

• **σ -ÁLGEBRA (σ -CAMPO).** Diremos que una clase de sucesos no vacía $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ tiene estructura de **σ -álgebra** si se verifica que es cerrada para complementarios y uniones numerables, esto es, si verifica las condiciones:

1. $\forall A \in \mathcal{A}$ se verifica que su complementario $\bar{A} \in \mathcal{A}$.
2. $\forall A_1, A_2, A_3, \dots \in \mathcal{A}$ se verifica que

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}.$$

De la misma forma que en el caso de álgebra se puede comprobar que el vacío y el total pertenecen a cualquier σ -álgebra. Toda σ -álgebra es un álgebra.

3.2 Diferentes concepciones de Probabilidad

- **Concepción clásica**

Sea A un suceso arbitrario asociado a un experimento aleatorio, que se puede presentar en m de los n posibles resultados igualmente factibles del experimento. Se define la **probabilidad del suceso A** como

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{\text{número de resultados favorables}}{\text{número de resultados posibles}}.$$

(Regla de Laplace)

3.2 Diferentes concepciones de Probabilidad

- **Concepción frecuentista**

Si se realizan N repeticiones de un experimento, y un determinado suceso A se ha presentado en N_A ocasiones, se define la **frecuencia relativa de A en las N pruebas** como

$$f_N(A) = \frac{N_A}{N}.$$

Supongamos que el número de realizaciones del experimento crece indefinidamente y consideremos la sucesión de frecuencias relativas de A : $f_N(A)$, $f_{N+1}(A)$, \dots , $f_{N+k}(A)$, \dots

Se define la probabilidad de A como el límite de dichas frecuencias relativas

$$P(A) = \lim_{N \rightarrow \infty} f_N(A)$$

3.3 Axiomática de Kolmogorov

- **Definición axiomática de Kolmogorov**

Sea (Ω, \mathcal{A}) un espacio medible asociado a un experimento aleatorio. Se define una **probabilidad** como una función de conjunto

$$P : \mathcal{A} \longrightarrow [0, 1]$$

que verifica los siguientes axiomas:

- I. *Axioma de no negatividad*: $P(A) \geq 0$, $\forall A \in \mathcal{A}$.
- II. *Axioma del suceso seguro*: $P(\Omega) = 1$.
- III. *Axioma de σ -aditividad o aditividad numerable*: Si $A_1, A_2, A_3 \dots$ es una sucesión de sucesos ($\in \mathcal{A}$) incompatibles, es decir $A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i \neq j; i, j = 1, 2, \dots$ entonces

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

3.3 Axiomática de Kolmogorov

- **Consecuencias de la definición axiomática**

1. La probabilidad del suceso imposible es nula: $P(\emptyset) = 0$.
2. Para cualquier suceso $A \in \mathcal{A}$ se verifica que la probabilidad de su complementario $P(\bar{A})$ es $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.
3. La probabilidad P es monótona no decreciente, es decir

$$\forall A, B \in \mathcal{A}, \text{ con } A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$$

y además $P(B - A) = P(B) - P(A)$.

4. Para cualquier suceso $A \in \mathcal{A}$, se verifica que $P(A) \leq 1$.
5. Para dos sucesos cualesquiera $A, B \in \mathcal{A}$ se verifica que

$$P(B - A) = P(B) - P(A \cap B)$$

6. Para dos sucesos cualesquiera $A, B \in \mathcal{A}$ se verifica que

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

3.3 Axiomática de Kolmogorov

- **Consecuencias de la definición axiomática**

- 7. Subaditividad finita:

$$P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$$

Y, en general, dados $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ se verifica

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \leq \sum_{i=1}^n P(A_i)$$

- 8. Subaditividad numerable: Dada una colección numerable de sucesos $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \in \mathcal{A}$ se verifica

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

3.3 Axiomática de Kolmogorov

- **Consecuencias de la definición axiomática**

9. Principio de inclusión-exclusión: Sean $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{A}$, entonces

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{i < j} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i < j < k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) + \dots + (-1)^{n-1} P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right)$$

10. Desigualdad de Bonferroni: Sean $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{A}$, entonces

$$\sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{i < j} P(A_i \cap A_j) \leq P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \leq \sum_{i=1}^n P(A_i)$$

11. Desigualdad de Boole: Dados $A, B \in \mathcal{A}$, entonces

$$P(A \cap B) \geq 1 - P(\bar{A}) - P(\bar{B})$$