Capítulo 1

Los números reales

1.1. Definicion

El conjunto de los números reales, $\mathbb{R}$, verifica la siguientes propiedades.

Suma

1) Propiedad asociativa:

$$(a+b)+c = a+(b+c), \quad \forall\, a,b,c \in \mathbb{R}.$$

2) Existe elemento neutro, 0:

$$a+0 = 0+a = a, \quad \forall\, a \in \mathbb{R}.$$

3) Todo elemento tiene opuesto:

$$\text{dado } a \in \mathbb{R}, \text{ existe un único } b \in \mathbb{R} \text{ tal que } a+b=0.$$

Usaremos la notación usual $b = -a$.

4) Propiedad conmutativa:

$$a+b = b+a, \quad \forall\, a,b \in \mathbb{R}.$$

Producto

5) Propiedad asociativa:

$$(ab)c = a(bc), \quad \forall\, a,b,c \in \mathbb{R}.$$

6) Existe elemento neutro, 1:

$$a1 = 1a = a, \quad \forall\, a \in \mathbb{R}.$$

7) Todo elemento no nulo tiene inverso:

dado $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, existe un único $b \in \mathbb{R}$ tal que $ab = ba = 1$.

Usaremos la notación habitual $b = \frac{1}{b} = b^{-1}$.

8) Propiedad conmutativa:

$$ab = ba, \quad \forall\, a, b \in \mathbb{R}.$$

9) Propiedad distributiva:

$$a(b+c) = ab + ac, \quad \forall\, a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Orden

10) Reflexiva:

$$a \leq a, \quad \forall\, a \in \mathbb{R}.$$

11) Antisimétrica

$$\left.\begin{array}{l} a \leq b \\ b \leq a \end{array}\right\} \Longrightarrow a = b.$$

12) Transitiva

$$\left.\begin{array}{l} a \leq b \\ b \leq c \end{array}\right\} \Longrightarrow a \leq c.$$

13) Relación con la suma:

$$a \leq b \Longrightarrow a + c \leq b + c, \quad \forall\, c.$$

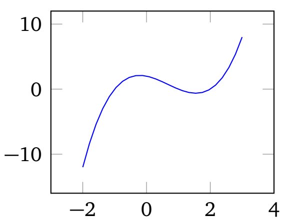
14) Relación con el producto

$$a \leq b \Longrightarrow ac \leq bc, \quad \forall\, c \geq 0.$$

15) Todos los elementos son comparables:

dados a, $b \in \mathbb{R}$ se cumple que $a \leq b$ o que $b \leq a$.

16) Dados $A, B \subset \mathbb{R}$ verificando que $a \leq b$ para cualquier $a \in A$, $b \in B$, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $a \leq c \leq b$, $\forall\, a \in A$, $\forall\, b \in B$.



Ejemplo 1.1.1. Podemos usar estas propiedades para describir conjuntos sencillos. Por ejemplo, ¿qué números verifican la desigualdad $x^3 - 2x^2 - x + 2 \geq 0$?

Usando que las raíces del polinomio son ± 1 y 2,

$$x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x+1)(x-1)(x-2)$$

tenemos cuatro intervalos en los que podemos dividir para discutir el signo de dicho polinomio.

- Si $x \leq -1$, $\underbrace{(x+1)}_{-}\underbrace{(x-1)}_{-}\underbrace{(x-2)}_{-} \leq 0$
- Si $-1 \leq x \leq 1$, $\underbrace{(x+1)}_{+}\underbrace{(x-1)}_{-}\underbrace{(x-2)}_{-} \geq 0$
- Si $1 \leq x \leq 2$, $\underbrace{(x+1)}_{+}\underbrace{(x-1)}_{+}\underbrace{(x-2)}_{-} \leq 0$
- Si $2 \leq x$, $\underbrace{(x+1)}_{+}\underbrace{(x-1)}_{+}\underbrace{(x-2)}_{+} \geq 0$

También es usual escribir los cambios de signo en forma de tabla. En este caso "+" está indicando mayor o igual que cero:

	$x \leq -1$	$-1 \leq x \leq 1$	$1 \leq x \leq 2$	$2 \leq x$
$x+1$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	$+$
x^3-2x^2-x+2	$-$	$+$	$-$	$+$

1.1.1. Subconjuntos destacados

Números naturales, enteros y racionales

- El conjunto de los *números naturales*[1], $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$, es el menor conjunto que verifica las dos siguientes propiedades:

  1) $1 \in \mathbb{N}$, y

  2) si $n \in \mathbb{N}$, entonces $n+1 \in \mathbb{N}$.

  Es sólo una convención el incluir o no el cero entre los elementos del conjunto de los números naturales. Por comodidad, nosotros no lo vamos a incluir.

- El conjunto de los números enteros $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$
- Los números racionales $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N} \right\}$
- Los números que no son racionales, los irracionales, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

[1] No hemos incluido el cero en el conjunto de los números naturales por una cuestión de comodidad, pero es habitual considerarlo como tal.

Intervalos

Los intervalos van a ser los conjuntos más usados a lo largo de estas notas. Es más sencillo enumerar todos los tipos posibles de intervalos que definir qué es un intervalo. De todas formas, incluimos la definición posteriormente.

$$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} \qquad [a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}$$

$$(a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\} \qquad (a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$$

$$[a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\} \qquad (-\infty,b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$$

$$(a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} \qquad (-\infty,b) = \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$$

Definición 1.1.2. Un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ es un *intervalo* si dados x e $y \in A$, se cumple que $(x, y) \subset A$.

Observación 1.1.3. Utilizaremos la notación (a, b) o $]a, b[$ indistintamente para denotar un intervalo abierto.

1.2. Desigualdades

1.2.1. Acotación

Definición 1.2.1. Un conjunto A de números reales está *acotado superiormente* si existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $a \leq M$, para cualquier $a \in A$. En ese caso, diremos que M es una cota superior de A.

Observación 1.2.2. Si M es una cota superior de A, cualquier número mayor o igual también es una cota superior. Por tanto, si un conjunto está acotado superiormente, el conjunto de las cotas es infinito.

Definición 1.2.3. Sea $A \subset \mathbb{R}$. Diremos que $a_0 \in A$ es el máximo de A si $a \leq a_0$, para todo $a \in A$.

Observación 1.2.4. El máximo, si es que existe, es una cota superior, la única que pertenece al conjunto y la más pequeña de todas.

Ejemplo 1.2.5.

1) El conjunto de los números naturales está acotado inferiormente; de hecho, tiene mínimo: $1 \leq n$ para cualquier número natural n. En cambio, no está acotado superiormente y, en particular, no tiene máximo.

2) Ni el conjunto de los números enteros, ni el conjunto de los números racionales están acotados.

3) Los intervalos tienen máximo si, y sólo si, el extremo superior pertenece al intervalo.

$$\nexists \, \text{máx}(0,1), \quad \text{máx}(1,3] = 3.$$

Sí que están acotados los dos intervalos anteriores, tanto superior como inferiormente.

1.2.2. Valor absoluto

El valor absoluto de un número real x es su distancia al cero. Algebraicamente es una función a trozos.

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0, \\ -x, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Sus propiedades se deducen de forma sencilla de la definición, como que $|x| = |-x| \geq 0$.

Proposición 1.2.6 (Propiedades del valor absoluto). *Sean x, $y \in \mathbb{R}$.*

1) $|x| \geq 0$,

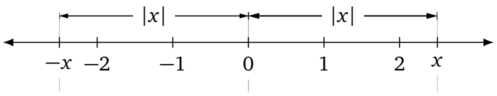


Figura 1.1: Interpretación geométrica del valor absoluto

2) $|x| = 0 \iff x = 0$,

3) $|x| \le y \iff -y \le x \le y$,

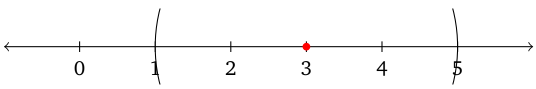
4) $|x+y| \le |x| + |y|$,

5) $||x| - |y|| \le |x - y|$

6) $|xy| = |x| \cdot |y|$, $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$.

Ejemplo 1.2.7. La ecuación $|x-3| = 2$ podemos resolverla utilizando varios enfoques.

1) Geométricamente, la ecuación $|x-3| = 2$ representa a los puntos x cuya distancia a 3 vale 2. Las posibles soluciones se obtienen trazando la circunferencia de centro 3 y radio 2



con lo que las soluciones de la ecuación son $x = 1, 5$.

2) Usando la definición,

$$|x-3| = 2 \iff x-3 = 2 \quad \text{o} \quad x-3 = -2.$$

Resolviendo ambas ecuaciones obtenemos las mismas soluciones, $x = 1, 5$.

3) Usando que el cuadrado de un número siempre es positivo, se cumple que $|a|^2 = a^2$. Por tanto,

$$\begin{aligned} |x-3| = 2 &\iff |x-3|^2 = 2^2 \iff (x-3)^2 = 4 \\ &\iff x^2 - 6x + 5 = 0 \iff x = 1, 5. \end{aligned}$$

Utiliza alguno de estos métodos para resolver la ecuación $|x-1| = |x+3|$.

Ejemplo 1.2.8. En general, una ecuación con valores absolutos, se puede escribir como varias ecuaciones sin valores absolutos. Por ejemplo,

$$\begin{aligned} \big||2x-3| - 1\big| = 5 &\iff \begin{cases} |2x-3| - 1 = 5 \\ |2x-3| - 1 = -5 \end{cases} \iff \begin{cases} |2x-3| = 6 \\ |2x-3| = -4 \end{cases} \\ &\iff 2x - 3 = \pm 6 \end{aligned}$$

Con lo que nos quedan las soluciones $x = 9/2$ o $x = -3/2$.

Ejemplo 1.2.9. Si es necesario para conocer el valor absoluto, podemos distinguir casos. Por ejemplo, para resolver la ecuación $|x-1|+2|x-3|=7$, necesitaríamos saber si $x-1$ es positivo o no y lo mismo con $x-3$. Para esto, nos hace falta saber si x es mayor o menor que 1 y si es mayor o menor que 3. Tenemos, por tanto tres posibilidades.

1) Si $x \leq 1$, entonces $|x-1| = 1-x$ y $|x-3| = 3-x$, con lo que la ecuación que tenemos que resolver es

$$1-x+2(3-x)=7 \iff x=0$$

2) Si $1 \leq x \leq 3$, entonces $|x-1| = x-1$ y $|x-3| = 3-x$. La ecuación a resolver es $x-1+2(3-x)=7$, pero su solución, $x=-2$, no está en este intervalo por lo que no es válida.

3) Si $x \geq 3$, la ecuación que tenemos que resolver es

$$(x-1)+2(x-3)=7 \iff x=\frac{14}{3}.$$

Por tanto, $|x-1|+2|x-3|=7$ si, y sólo si, $x=0$, $14/3$.

Ejemplo 1.2.10. Encuentra aquellos valores de x que verifican que:

1) $\frac{1}{x}+\frac{1}{1-x}>0$.

   Resolvemos así:

$$0<\frac{1}{x}+\frac{1}{1-x}=\frac{1}{x(1-x)} \iff 0<x(1-x) \iff 0<x<1.$$

2) $|x+1|<|x+3|$.

   Vamos a usar que, *para números positivos*, $0<x<y \iff x^2<y^2$.

$$\begin{aligned}|x+1|<|x+3| &\iff |x+1|^2<|x+3|^2\\ &\iff (x+1)^2<(x+3)^2\\ &\iff x^2+2x+1<x^2+6x+9\\ &\iff -2<x.\end{aligned}$$

Ejemplo 1.2.11. ¿Qué valores verifican que $\big||x+1|-|x-1|\big| \leq 1/2$?