Technische Universität Dortmund
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl 14 für Software Engineering

Bachelorarbeit

Gruppentheorie des 2x2x2 Zauberwürfels und dessen Lösungsalgorithmen

Pina Kolling

Abgabe: Mai 2021

betreut von
Dr. Lukasz Czajka
und
M. Sc. Christoph Stahl

20. Januar 2021

Inhaltsverzeichnis

Einleitung/Ausgangslage

Meine Bachelorarbeit befasst sich mit dem 2x2x2-Zauberwürfel und dessen Algorithmen zur Lösung. Dabei handelt es sich um ein Drehpuzzle, das ein mathematisches Problem darstellt.
Im Folgenden wird die Terminologie und der Aufbau des Würfels erklärt.
Terminologie:

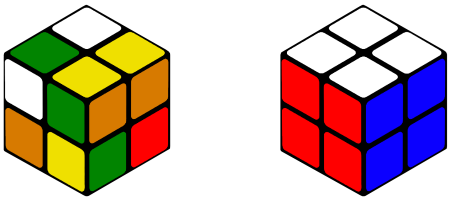


Abbildung 1: 2x2x2-Zauberwürfel
(links in ungelöstem und rechts in gelöstem Zustand (Startkonfiguration))
Der Zauberwürfel wird hier auch Würfel oder Cube genannt.

Bei der Startkonfiguration (auch Grundposition, Grundstellung) des 2x2x2-Würfels hat jede Seite 4 Farbflächen einer Farbe. Der Würfel ist dann gelöst.

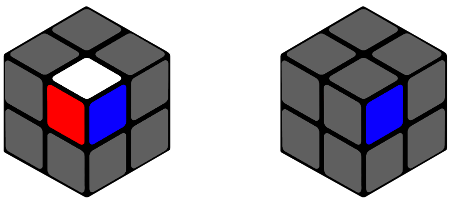


Abbildung 2: Ein 2x2x2-Würfel besteht aus acht (Eck-)Steinen (links), die jeweils drei Farbflächen (rechts) haben. Ein 2x2x2-Zauberwürfel hat also 24 Farbflächen.

Der 2x2x2-*Cube* hat theoretisch 3 674 160 mögliche Würfelkonfigurationen. Davin sind aber nicht alle durch Ebenenrotationen erreichbar.

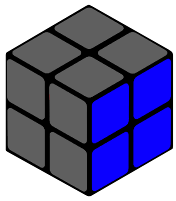


Abbildung 3: Der 2x2x2 und der 3x3x3 Zauberwürfel haben jeweils 6 Seiten.

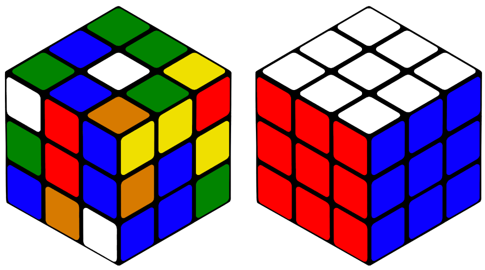


Abbildung 4: 3x3x3 Zauberwürfel
(links in ungelöstem und rechts in gelöstem Zustand (auch Grundstellung))

Im Gegensatz zum 3x3x3-Würfel hat der 2x2x2-Würfel weder Mittelsteine, noch Kantsteine.
Das besondere an den Mittelsteinen des 3x3x3-Würfels ist, dass sie bei der Rotation der Seiten (also bei Zügen des Würfels) nicht verändert werden. Somit ist beim 3x3x3-Würfel die obere Seite immer fest zu stellen: Die obere Seite hat immer das weiße Mittelstück in der Mitte.
Beim 2x2x2-*Cube* muss auch noch geprüft werden, ob die aktuelle Konfiguration nicht einer vermeintlich anderen Konfiguration entspricht, bei der nur eine andere Seite nach oben gehalten wird.
Die Rotation des gesamten Würfels ist bei dem 3x3x3-Würfel also eindeutig vorgegeben, während sie beim 2x2x2-Würfel gedreht werden kann.

Grundzüge des Würfels

Am 2x2x2-Zauberwürfel gibt es sechs verschiedene Drehseiten: oben, unten, links, rechts, vorne und hinten.

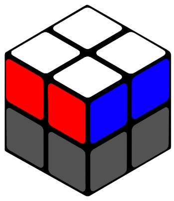


Abbildung 5: Der Würfel hat sechs verschiedene Ebenen. Hier sieht man die obere Ebene farblich markiert.

Abkürzung	Beschreibung des Zugs
U	Drehung der oberen Ebene im Uhrzeigersinn
D	Drehung der unteren Ebene im Uhrzeigersinn
R	Drehung der rechten Ebene im Uhrzeigersinn
L	Drehung der linken Ebene im Uhrzeigersinn
F	Drehung der vorderen Ebene im Uhrzeigersinn
B	Drehung der hinteren Ebene im Uhrzeigersinn

Die Kürzel stehen für *Up, Down, Right, Left, Front, Back*.

Die entsprechende Ebene wird im Uhrzeigersinn gedreht, wenn man auf diese Ebene schaut. Es wirkt also so, also würde man die untere Ebene gegen den Uhrzeigersinn drehen, wenn man von oben auf den Würfel schaut.

Auf die Rotationsmöglichkeiten des kompletten Würfels wird im Verlauf dieser Arbeit noch eingegangen.

Würfel als Gruppe

Darstellung des 2x2x2-Zauberwüfels mit dem mathematischen Konstrukt der Gruppe

Die Definition einer Gruppe $(G, \circ)$ ist Grundlage für den folgenden Abschnitt:

- Abgeschlossenheit: $\forall a, b \in G.(a \circ b) \in G$
- Assoziativität: $\forall a, b, c \in G.(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$
- Existenz eines neutralen Elements n: $\forall a \in G, \exists n \in G.n \circ a = a \circ n = a$
- Existenz eines inversen Elements a^{-1}: $\forall a \in G, \exists a^{-1} \in G.a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = n$

Im Folgenden wird die Definition der Gruppe des 3x3x3-Würfels aus dem Paper „Group Theory and the Rubik's Cube“ von Janet Chen [1] als Gruppe des 2x2x2-Würfels umgesetzt. Die Gruppe von Janet Chen wird hier als $(G_{3x3x3}, \circ)$ bezeichnet, auch wenn er sie als $(G, *)$ bezeichnet hat. Der Namen der Gruppe wird geändert, um klar zwischen dem 2x2x2- und dem 3x3x3-Würfel zu differenzieren. Das Symbol des Operators wird verändert, um Verwechslungen mit dem Multiplikationsoperator zu vermeiden.

Die Gruppe des 2x2x2-Würfels heißt $(G_{2x2x2}, \circ)$.

Die Menge G_{2x2x2} besteht aus allen möglichen Zügen des Würfels. Beispielsweise die Drehung der oberen Ebene ist ein Zug. Ein Zug kann aber auch aus mehreren Drehungen bestehen, z.B. das Drehen der oberen Ebene, gefolgt von dem Drehen der rechten Ebene stellt ebenfalls einen Zug dar.
Wenn zwei Züge die gleiche Würfelposition hervorrufen, sind die beiden Züge "gleich". Beispielsweise eine Drehung um 180° nach links oder nach rechts von einer Ebene führt zu dem gleihen Ergebnis und somit werden diese beiden Züge als gleich angesehen.

Der Operator $\circ$ ist als Konkatenation zweier Züge definiert. Wenn $Z_1 \in G_{2x2x2}$ und $Z_2 \in G_{2x2x2}$ zwei Züge sind, dann bedeutet $Z_1 \circ Z_2$, dass zuerst Z_1 und dann Z_2 ausgeführt wird. (Außerdem gilt dann auch $Z_1 \circ Z_2 \in G_{2x2x2}$.)
Im Folgenden wird gezeigt, wieso $(G_{2x2x2}, \circ)$ eine Gruppe ist, indem $(G_{2x2x2}, \circ)$ bezüglich der Gruppenkriterien untersucht wird:

- Abgeschlossenheit:
  $\forall Z_1, Z_2 \in G_{2x2x2}.(Z_1 \circ Z_2) \in G_{2x2x2}$

  Die Gruppe G_{2x2x2} ist abgeschlossen unter dem Operator $\circ$. Wenn Z_1 und Z_2 Züge sind und somit Elemente von G_{2x2x2}, dann ist auch $Z_1 \circ Z_2$ ein Element der Gruppe, da alle Züge in G_{2x2x2} enthalten sind.

- Assoziativität:
  $\forall Z_1, Z_2, Z_3 \in G_{2x2x2}.(Z_1 \circ Z_2) \circ Z_3 = Z_1 \circ (Z_2 \circ Z_3)$

  Die Züge $Z_i \in G_{2x2x2}$ können gruppiert werden und somit gilt die Assoziativität. Um die Assoziativität zu zeigen, wird eine Schreibweise für das Ausführen der Züge eingeführt. Ein beliebiger, fester Stein im Würfel wird s genannt. Beim Ausführen eines Zuges Z schreibt man nun $Z(s)$, um die neue Position des Steines zu erhalten. Die Positionen sind (wie oben beschrieben) 3-Buchstaben-Kürzel, bestehend aus u, d, l, r, t, b.
  Wenn man nun $Z_1 \circ Z_2$ betrachtet, wird zuerst Z_1 und dann Z_2 ausgeführt. $Z_1(s)$ bewegt den Stein s zu der Position $Z_1(s)$. Der Zug Z_2 bewegt den Stein dann zu der Position $Z_2(Z_1(s))$. Also gilt $Z_1 \circ Z_2 = Z_2(Z_1(s))$.

  Nun muss noch $(Z_1 \circ Z_2) \circ Z_3 = Z_1 \circ (Z_2 \circ Z_3)$ gezeigt werden. Man zeige also, dass sich $(Z_1 \circ Z_2) \circ Z_3$ und $Z_1 \circ (Z_2 \circ Z_3)$ beide zu $Z_3(Z_2(Z_1(s))$ umformen lassen:

  $$\begin{aligned}&(Z_1 \circ Z_2) \circ Z_3\\ \Rightarrow\ &((Z_1 \circ Z_2) \circ Z_3)(s)\\ =&Z_3(Z_1 \circ Z_2)(s))\\ =&Z_3(Z_2(Z_1(s)))\end{aligned}$$

  $$\begin{aligned}&Z_1 \circ (Z_2 \circ Z_3)\\ \Rightarrow\ &(Z_1 \circ (Z_2 \circ Z_3))(s)\\ =\ &(Z_2 \circ Z_3)(Z_1(s))\\ =\ &Z_3(Z_2(Z_1(s)))\end{aligned}$$

  Somit ist $(G_{2x2x2}, \circ)$ assoziativ.

- Existenz eines neutralen Elements N:
  $\forall Z_1 \in G_{2x2x2}, \exists N \in G_{2x2x2}.N \circ Z_1 = Z_1 \circ N = Z_1$

  Das neutrale Element N muss aus der Menge G_{2x2x2} der Züge sein und es muss gelten: $N \circ Z_1 = Z_1 \circ N = Z_1$. Somit ist das neutrale Element der Gruppe $(G_{2x2x2}, \circ)$ der „leere " Zug. Es werden also keine der Ebenen des Würfels gedreht. Wenn man also einen Zug Z ausführt und dann den Zug N, bedeutet das so viel wie „erst Z ausführen und dann nichts ", was das gleiche ist wie Z auszuführen.

- Existenz eines inversen Elements Z_1':
  $\forall\ Z_1 \in G_{2x2x2},\ \exists\ Z_1' \in G_{2x2x2}.\ \ Z_1 \circ Z_1' = Z_1' \circ Z_1 = N$

  Da Z ein Zug ist, kann man diesen auch rückgängig machen. Man muss die einzelnen Ebenenrotationen nur rückwärts und von hinten durchführen, um den Zug zu invertieren. Dann gilt $Z_1 \circ Z_1' = Z_1' \circ Z_1 = N$.

Somit ist $(G_{2x2x2}, \circ)$ eine Gruppe.

Damit $(G_{2x2x2}, \circ)$ eine kommutaive Gruppe (oder Abelsche Gruppe) ist, muss zusätzlich noch die Kommutativität gelten.
Dies ist nicht der Fall, da beispielsweise eine Rotation der rechten Ebene im Uhrzeigersinn (R) und eine Rotation der vorderen Ebene im Uhrzeigersinn (F) in umgekehrter Reihenfolge ein anderes Ergebnis haben. Das sieht grafisch dargestellt so aus:

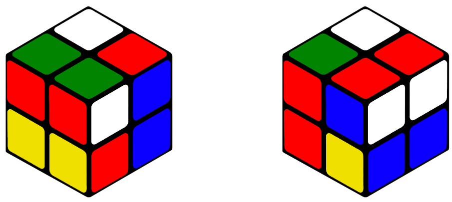


Abbildung 6: links: Würfel nach Zug RF, rechts: Würfel nach Zug FR, ausgehend von Startkonfiguration

Außerdem wäre das Lösen des Würfels trivial, wenn die Kommutativität gelten würde.[2] Es gilt also nicht $\forall\ Z_1, Z_2 \in G_{2x2x2}.Z_1 \circ Z_2 = Z_2 \circ Z_1$. Der $\circ$-Operator der Gruppe ist also nicht kommutativ.

Das mehrfache Ausführen der Züge (U, D, F, B, L, R) stelle ich mit Exponenten dar. So schreibe ich beispielsweise für RR (also zwei mal eine Drehung der rechten Ebene im Uhrzeigersinn) auch als R^2.
Wenn man eine Ebene vier mal dreht, ist der Würfel wieder in der vorherigen Position. Somit gilt also beispielsweise $RRRR = R^4 = N$, wobei N für das neutrale Element (also den leeren Zug) steht. Das gilt für alle Züge des Würfels:

$$
\begin{aligned}
RRRR &= R^4 = N \\
LLLL &= L^4 = N \\
UUUU &= U^4 = N \\
DDDD &= D^4 = N \\
FFFF &= F^4 = N \\
BBBB &= B^4 = N
\end{aligned}
$$

Somit gilt dann auch $Z^0 = N$, mit Z als beliebigen Zug und N als neutrales Element.
In der mathematischen Schreibweise sieht das so aus: $\forall Z \in G_{2x2x2}\ .\ Z^0 = N$.

Es gilt also für alle Züge $Z \in G_{2x2x2}$:

$$\begin{aligned} Z^0 &= N \\ Z &= Z^1 \\ ZZ &= Z^2 \\ ZZZ &= Z^3 \end{aligned}$$

Für „einelementige Züge“ (also U, D, F, B, L oder R) gilt auch $YYYY = Y^4 = N = Y^0$.
Man kann den Exponenten in diesem Fall also *modulo* 4 rechnen, da vier Drehungen einer Ebene nacheinander wieder zum Startzustand führen.
Es gilt dann also:
$\forall\ Y \in \{U, D, F, B, L, R\}, n \in \mathbb{N}\ .\ Y^n = Y^{n \bmod 4}$.

Konfiguration des Würfels

Die Konfiguration des Würfels, also die Position/Verdrehung des Würfels setzt sich aus zwei Parametern zusammen:

- Position der Ecksteine (angegeben als σ)
- Ausrichtung der Ecksteine (angegeben als x_i)

Also kann die Konfiguration des Würfels als ein 2-Tupel geschrieben werden: (σ, x).

Der Würfel kann aber auch komplett gedreht werden, ohne Züge auszuführen.

Positionen der Steine im Würfel

Um die Übergänge der Würfelsteine als Funktion darzustellen, definiere ich eine bijektive Funktion σ für jede Ebenenrotation. σ bildet jede der Würfelpositionen auf die neue Position ab.

Die Würfelpositionen habe ich wie folgt eingeteilt:

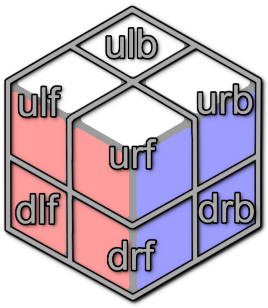
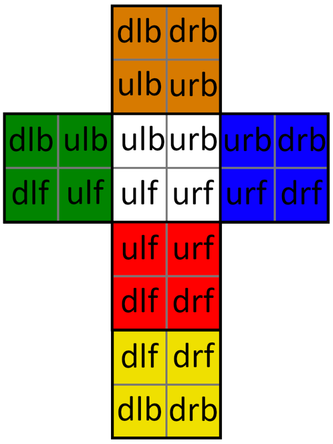
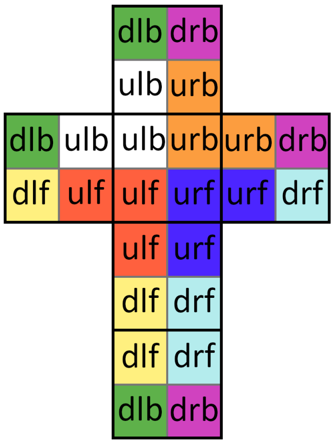


Abbildung 7: Die einzelnen Steinpositionen werden mit den Kürzeln benannt, die *up, down, left, right, front und back* beschreiben.



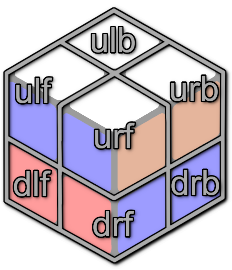


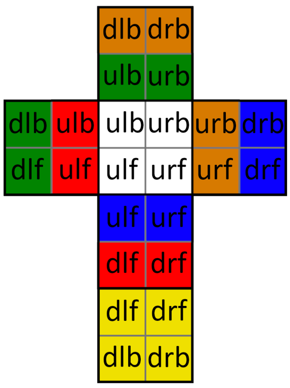
Ich ordne jeder Steinposition einen einzigartigen Namen zu, um mich darauf zu beziehen. Dabei gehe ich davon aus, dass die weiße Seite in der Startkonfiguration oben ist. Die Steinposition beschreibe ich mich 3 Buchstaben, die aus den Kürzeln *u, d, l, r, f, b* bestehen. Diese Kürzel stehen für *up, down, left, right, front, back*.
Somit heißt die Steinposition oben links also ulf (für up, left und front).

Jeder Stein bekommt auch einen einzigartigen Namen, der seiner Steinposition im gelösten Zustand entspricht. Beispielsweise liegt der Stein ulf im gelösten Zustand an der Steinposition ulf.

Nun definiere ich σ_U für eine Drehung der oberen Ebene um 90° im Uhrzeigersinn:
Ich beschreibe σ_U ausführlich und gebe verschiedene Schreibweisen an. Die weiteren Drehungen funktionieren dann analog.

Die Drehung der oberen Ebene sieht grafisch dargestellt so aus:





$\sigma_U(ulf) = ulb \qquad \sigma_U(ulb) = urb \qquad \sigma_U(urb) = urf \qquad \sigma_U(urf) = ulf$

$\sigma_U(dlf) = dlf \qquad \sigma_U(dlb) = dlb \qquad \sigma_U(drb) = drb \qquad \sigma_U(drf) = drf$

Das kann man auch in der Form $i \mapsto j$ schreiben:

$$\begin{array}{llll} ulf \mapsto ulb & ulb \mapsto urb & urb \mapsto urf & urf \mapsto ulf \\ dlf \mapsto dlf & dlb \mapsto dlb & drb \mapsto drb & drf \mapsto drf \end{array}$$

Daraus entstehen folgende Zykel: $\sigma_U = \ (ulf\ ulb\ urb\ urf)\ (dlf)\ (dlb)\ (drb)\ (drf)$

Die Zykel mit nur einem Element müssen nicht aufgeschrieben werden. Dann ergibt sich $\sigma_U = \ (ulf\ ulb\ urb\ urf)$, was den Zykel beschreibt, in dem die Steine rotiert werden, wenn die obere Ebene gedreht wird.

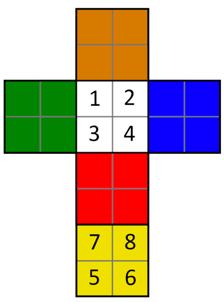
Die Drehungen aller Ebenen können durch folgende Zykel beschrieben werden:

$$\begin{aligned} \sigma_U &= \ (ulf\ ulb\ urb\ urf) \\ \sigma_D &= \ (dlf\ drf\ drb\ dlb) \\ \sigma_F &= \ (ulf\ urf\ drf\ dlf) \\ \sigma_B &= \ (ulb\ dlb\ drb\ urb) \\ \sigma_L &= \ (ulb\ ulf\ dlf\ dlb) \\ \sigma_R &= \ (urb\ drb\ drf\ urf) \end{aligned}$$

Die Identitätspermutation schreibe ich als $\sigma = 1$.

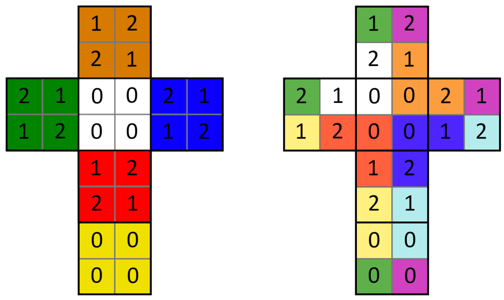
Ausrichtung der Steine

Der 2x2x2-Würfel besteht aus 8 Ecksteinen, die jeweils 3 Farbflächen haben. Somit hat jeder Stein 3 mögliche Ausrichtungen.
Um die Ausrichtung der Steine zu erkennen, bekommen Würfelpositionen an einer Farbfläche einer Nummer zugeordnet. Dafür habe ich die weißen und die gelben Seiten markiert und nummeriert. Auf diese Nummern beziehe ich mich als $x_i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ mit x_1 als Position 1, x_2 als Position 2, usw.



Außerdem bekommt jeder Stein an jeder Farbfläche eine Zahlenzuordnung. Da jeder Stein

3 Ausrichtungen haben kann, nummeriere ich mit 0, 1 und 2. Ich beginne mit der weißen/gelben Fläche bei 0 und zähle dann im Uhrzeigersinn die Flächen.



In der Startkonfiguration sind alle $x_i = 0$, also $x = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$. Das schreibe ich kurz als $x = 0$.

Nun stelle ich dar, wie sich die Nummerierung der Farbflächen verändert, wenn der Zug R ausgeführt wird. R ist eine Rotation der rechten Ebene um 90° im Uhrzeigersinn.
Die Nummerierungen der Position (x) bleiben an der gleichen Position, die Nummerierungen $(0, 1, 2)$ der Farbflächen ändern sich mit Rotation der Ebene und ermöglichen so eine Zuordnung der Ausrichtung der Ecksteine.
Die linke Seite der Würfels wird dabei nicht beeinträchtig, also sind die Flächen an den Positionen x_1, x_3, x_5, x_7 alle 0.
Die anderen Positionen haben nun aber andere Farbflächen:
$x_2 = 2 \qquad x_4 = 1 \qquad x_6 = 1 \qquad x_8 = 2$
Also $x = (0, 2, 0, 1, 0, 1, 0, 2)$ nach dem Zug R.

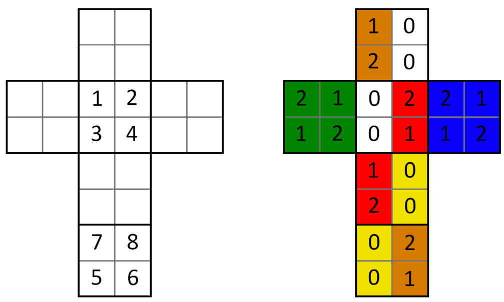


Abbildung 8: links: Positionen x_1 bis x_8, rechts: Veränderung der nummerierten Ecksteine nach dem Zug R

Züge als Gruppenoperation

Wenn der Zauberwürfel in einer Konfiguration $C = (\sigma, x)$ ist, wird der Würfel durch das Ausführen eines Zuges $M \in G_{2x2x2}$ in eine neue Konfiguration gebracht. Diese Konfiguration schreibe ich als $C \cdot M$.

Definition einer Gruppenoperation mit der Gruppe $(G_{2x2x2}, \circ)$ und der Menge C:

- $\cdot : C \times G_{2x2x2} \to C$ mit $(c, g) \to c \cdot g$
- $c \cdot N = x$ für alle $c \in C$ und das neutrale Element $N \in G_{2x2x2}$
- $c \cdot (u \circ v) = (c \cdot h) \cdot v$ für alle $u, v \in G_{2x2x2}$ und $c \in C$

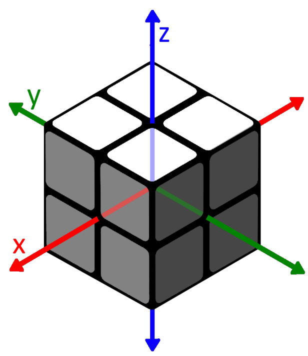
Angenommen der Würfel befindet sich in der Konfiguration C. Wenn nun der Zug $M_1 \in G_{2x2x2}$ ausgeführt wird, ist die neue Konfiguration des Würfels $C \cdot M_1$. Wenn nun noch ein weiterer Zug $M_2 \in G_{2x2x2}$ ausgeführt wird,ist die neue Konfiguration des Würfels $(C \cdot M_1) \cdot M_2$.
Anders gesagt: Der Würfel hat in Konfiguration C gestartet und der Zug $M_1 M_2$ wurde ausgeführt. Man kann die neue Konfiguration auch als $C \cdot (M_1 M_2)$ schreiben und somit gilt $(C \cdot M_1) \cdot M_2 = C \cdot (M_1 M_2)$.

Wenn wir den leeren Zug N ausführen, wird die Konfiguration des Würfels nicht verändert. Es gilt also $C \cdot N = C$.

Bei Gruppenoperationen beeinflussen die Elemente einer Gruppe eine Menge. In diesem Fall beeinflussen die Züge des Würfels die Konfiguration des Würfels.
Es handelt sich hier um eine Rechtsoperation, da die Elemente der Gruppe rechts stehen.

Rotation des Würfels

Die Konfiguration des Würfels ist definiert als $C = (\sigma, x)$.
Allerdings hat der 2x2x2-Würfel im Gegensatz zum 3x3x3-Würfel keine Mittelsteine, die fest darüber entscheiden, welche Seite die obere Seite ist.
Der 2x2x2-Würfel kann also im gelösten Zustand sein, ohne dass die obere Seite weiß ist.
Deshalb muss es möglich sein, den Würfel ganz zu rotieren, ohne einen Zug auszuführen.
Um die Drehungen zu benennen, benenne ich die Achsen den Würfels wie folgt:



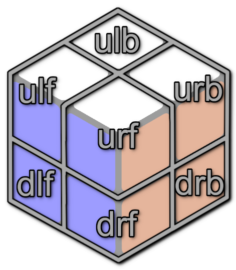
Nun kann ich für die möglichen Rotationen des Würfels Nachfolgekonfigurationen festlegen.

Dazu benenne ich zuerst die einzelnen Rotationen des Würfels:

Abkürzung	Beschreibung der Rotation
Z_l	Rotation des Würfels um die z-Achse nach links (gegen den Uhrzeigersinn)
Z_r	Rotation des Würfels um die z-Achse nach rechts (im Uhrzeigersinn)
Y_l	Rotation des Würfels um die y-Achse nach links (gegen den Uhrzeigersinn)
Y_r	Rotation des Würfels um die y-Achse nach rechts (im Uhrzeigersinn)
X_l	Rotation des Würfels um die x-Achse nach links (gegen den Uhrzeigersinn)
X_r	Rotation des Würfels um die x-Achse nach rechts (im Uhrzeigersinn)

Die Steine werden durch eine Rotation alle an einen neuen Platz gebracht. Anders als bei der Drehung der Ebenen, wo nur einige Steine die Position ändern, ändern hier alle Steine die Position, ohne dass der Würfel verändert wird, da er komplett gedreht wird.

Anhand der Rotation Z_r, also einer Rotation des kompletten Würfels um die z-Achse um 90° im Uhrzeigersinn, zeige ich nun die Veränderung der Würfelpositionen.



Da bei den Rotationen alle Steine die Position wechseln, muss es 8 Funktionen δ geben, also für jeden Eckstein eine Funktion δ:

$\delta_{Z_r}(urf) = ulf$ $\delta_{Z_r}(ulf) = ulb$ $\delta_{Z_r}(ulb) = urb$ $\delta_{Z_r}(urb) = urf$
$\delta_{Z_r}(drf) = dlf$ $\delta_{Z_r}(dlf) = dlb$ $\delta_{Z_r}(dlb) = drb$ $\delta_{Z_r}(drb) = drf$

Wenn man das nun in der Form $i \mapsto j$ schreibt, erhält man:

$urf \mapsto ulf$ $ulf \mapsto ulb$ $ulb \mapsto urb$ $urb \mapsto urf$
$drf \mapsto dlf$ $dlf \mapsto dlb$ $dlb \mapsto drb$ $drb \mapsto drf$

In der Zykel-Schreibweise sieht die Veränderung der Steinnamen dann so aus:
$\delta_{Z_r} = (urf\ ulf\ ulb\ urb)(drf\ dlf\ dlb\ drb)$

Alle Rotationen sehen in Zykel-Schreibweise folgendermaßen aus:

$$\begin{aligned}
\delta_{Z_r} &= (ulf\ ulb\ urb\ urb)\ (dlf\ dlb\ drb\ drf)\\
\delta_{Z_l} &= (ulf\ urf\ urb\ ulb)\ (dlf\ drf\ drb\ dlb)\\
\delta_{Y_r} &= (ulf\ ulb\ dlb\ dlf)\ (urf\ urb\ drb\ drf)\\
\delta_{Y_l} &= (ulf\ dlf\ dlb\ ulb)\ (urf\ drf\ drb\ urb)\\
\delta_{X_r} &= (ulf\ urf\ drf\ dlf)\ (urb\ ulb\ dlb\ drb)\\
\delta_{X_l} &= (ulf\ dlf\ drf\ urf)\ (urb\ ulb\ dlb\ drb)
\end{aligned}$$

Bei den Rotationen schreibe (analog zu den Zügen) die mehrfache Ausführung einer Roatation mit der Exponentenschreibweise.
Somit gilt dann auch hier $RRRR = R^4 = N$ (für $R \in \{Z_r, Z_l, Y_r, Y_l, X_r, X_l\}$) und $R^0 = N$ (für alle Rotationen). (N ist das neutrale Element, also der leere Zug und R eine beliebige Rotation des Würfels.)
Analog zu den Zügen gilt bei den Rotationen also für jede Rotation:
$\forall R \in \{Z_r, Z_l, Y_r, Y_l, X_r, X_l\}, n \in \mathbb{N}\ .\ R^n = R^{n \mod 4}$.

Äquivalenzrelationen der Rotationen

Um die Rotationen des Würfels umzusetzen, führe ich Äquivalenzrelationen ein.
Eine Relation $R \subseteq A \times A$ heißt Äquivalenzrelation auf A, wenn für alle $x, y, z \in A$ die drei folgenden Eigenschaften gelten: Reflexivität, Symmetrie, Transitivität. [3]

In dem Fall der Gruppe $(G_{2x2x2}, \circ)$ handelt es sich um eine Relation von zwei Zügen $Z_1, Z_2 \in G_{2x2x2}$.

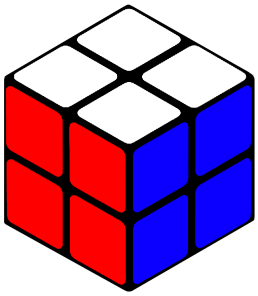
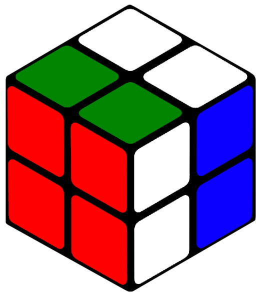
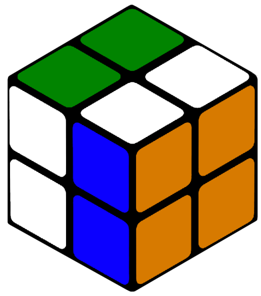
Ich definiere:

$$Z_1 \sim Z_2 :\Leftrightarrow \quad Z_1\ und\ Z_2\ ergeben\ (mit\ optionaler\ Rotation)\ die\ gleiche\ Würfelkonfiguration$$

Daraus ergibt sich $Z_1 \sim Z_2 :\Leftrightarrow \ Z_1 = WZ_2$ mit W als Element (oder Kombination von Elementen) aus $\{Z_r, Z_l, Y_r, Y_l, X_r, X_l, \epsilon\}$, wobei ϵ die „leere" Rotation darstellt, also keine Rotation des Würfels.

Somit ergibt sich beispielsweise $F \sim L \Leftrightarrow F = Z_rL$, da eine Drehung der vorderen Ebene und eine Drehung des Würfels nach links mit einer Drehung der linken Ebene die gleiche Würfelkonfiguration ergeben. Der Würfel ist dann nur verschieden ausgerichtet.

In der folgenden Abbildung sieht man dieses Beispiel nochmal grafisch: Links befindet sich der gelöste Würfel, in der Mitte der gelöste Würfel nach dem Zug F und rechts der gelöste Würfel nach dem Zug Z_rL.
Die beiden rechten Würfel sind in der gleichen Konfigurationen, aber anders gedreht.

Damit $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist, müssen Reflexivität, Symmetrie und Transitivität gelten, was ich im folgenden Abschnitt beweise.

- Reflexivität:
  Für die Reflexivität muss $Z \sim Z$ für alle $Z \in G_{2x2x2}$ gelten.

  $$Z_1 \sim Z_2 :\Leftrightarrow Z_1 = WZ_2$$

  Ich wähle W als ϵ, so dass keine Rotation ausgeführt wird.

  $$\begin{aligned} Z_1 \sim Z_2 :&\Leftrightarrow Z_1 = WZ_2 \\ &\Leftrightarrow Z_1 = \epsilon Z_2 \\ &\Leftrightarrow Z_1 = Z_2 \end{aligned}$$

  Also gilt die Reflexivität für $\sim$, da für $Z_1 \sim Z_2$ mit $W = \epsilon$ immer $Z_1 = Z_2$ gilt.

- Symmetrie:
  Für die Symmetrie muss gelten: Aus $Z_1 \sim Z_2$ folgt $Z_2 \sim Z_1$.

  $$Z_1 \sim Z_2 \Rightarrow Z_2 \sim Z_1$$
  $$mit\ Z_1 \sim Z_2 :\Leftrightarrow Z_1 = WZ_2$$
  $$\Leftrightarrow Z_1 = W_1 Z_2 \Rightarrow Z_2 = W_2 Z_1$$

  Das gilt, wenn W_2 das Inverse von W_1 ist. Das Inverse ist die Rotation um die gleiche Achse, aber in die andere Richtung.
  Ich schreibe das Inverse von W als W^{-1}.

  Das sind die Rotationen mit den dazugehörigen Inversen:

Rotation W	Z_r	Z_l	Y_r	Y_l	X_r	X_l	ϵ
Inverses W^{-1}	Z_l	Z_r	Y_l	Y_r	X_l	X_r	ϵ

  Dann gilt:

  $$Z_1 = WZ_2 \Rightarrow Z_2 = W^{-1} Z_1$$

  Das gilt, da durch W^{-1} der Würfel in die entgegengesetzte Richtung rotiert wird und die Züge somit wieder die gleiche Würfelkonfiguration ergeben.
  Also gilt die Symmetrie für $\sim$.

- Transitivität:
  Es muss gelten: Aus $Z_1 \sim Z_2$ und $Z_2 \sim Z_3$ folgt $Z_1 \sim Z_3$.

$$\begin{aligned} & Z_1 \sim Z_2 && \wedge Z_2 \sim Z_3 && \Rightarrow Z_1 \sim Z_3 \\ \Leftrightarrow\ & Z_1 = W_1 Z_2 && \wedge Z_2 = W_2 Z_3 && \Rightarrow Z_1 = W_3 Z_3 \end{aligned}$$

  Das gilt, für $W_3 = W_1 W2$.

$$\Leftrightarrow Z_1 = W_1 Z_2 \ \wedge Z_2 = W_2 Z_3 \ \Rightarrow Z_1 = W_1 W_2 Z_3$$

  Da die Züge Z_1 und Z_2 mit der Rotation W_1 die gleiche Würfelkonfiguration ergeben, und die Züge Z_2 und Z_3 nach der Rotation W_2 auch die gleiche Würfelkonfiguration ergeben, gilt das auch für die beiden Züge Z_1 und Z_3 nach der Rotation $W_3 = W_1 W_2$, da dann alle nötigen Rotationen durchgeführt wurden.

Ordnung der Züge

Wie bereits beschrieben, gilt $\forall Z \in \{U, D, F, B, L, R\}, n \in \mathbb{N}$. $Z^n = Z^{n \mod 4}$ für alle einelementigen Züge (und Rotationen), da alle Steine des Würfels in ihrer vorherigen Position bleiben, wenn eine Ebenen- oder eine Würfelrotation vier mal hintereinander ausgeführt wird. Deshalb bezeichne ich die Züge U, D, F, B, L, R als Züge der Ordnung 4.

Die Exponentenschreibweise kann man für alle Züge aus G_{2x2x2} anwenden, auch wenn sie mehr als eine Ebene rotieren. Beispielsweise mit $Z_1 = LLFF$. $(LLFF)^2$ ist dann $LLFFLLFF$ und $(LLFF)^3$ ist $LLFFLLFFLLFF$, was wieder die Ausgangsposition ergibt.

Nicht nur die Züge U, D, F, B, L, R kommen nach Wiederholen in den Ausgangszustand. Auch alle anderen Züge bringen den Würfel wieder in die Ausgangsposition des Zuges [2]. Es sind aber je nach Zug verschieden viele Wiederholungen nötig. Der Zug $(LLFF)$ hat dann beispielsweise die Ordnung 3.
So gilt zum Beispiel: $R^4 = N$ (Ordnung 4), $(RRFF)^3 = N$ (Ordnung 3) oder auch $(LF)^{15} = N$ (Ordnung 15).
Dabei muss beachtet werden, dass die Ordnung die Anzahl der Durchführungen beschreibt, die benötigt wird, damit alle Steine wieder an der Ausgangsposition sind. Die Ausrichtung der Steine wird hier aber nicht berücksichtigt.

Im folgenden Beweis habe ich mich an dem Beweis aus dem Paper „Group Theory via Rubik's Cube“ von Tom Davis [2] orientiert:
Jedes Mal wenn ein Zug wiederholt wird, werden die Steine im Würfel neu angeordnet.
Da es eine endliche Anzahl an Würfelkonfigurationen gibt, muss eine Würfelposition wiederholt werden, wenn man den Zug oft genug durchführt.
Die Zahl der validen Würfelkonfigurationen ist zwar sehr groß, aber endlich. Also muss eine Position wiederholt werden, wenn man den Zug öfter ausführt, als es mögliche Würfelpositionen gibt.

Bei einem beliebigen Zug $Z \in G_{2x2x2}$ gelangt man also irgendwann in eine Würfelposition, die sich wiederholt. Die wiederholende Würfelposition tritt zuerst nach $n \in \mathbb{N}$ Wiederholungen auf und das zweite Mal nach $m \in \mathbb{N}$ Wiederholungen. Das sieht dann so aus: $Z^n = Z^m$ mit $n < m$.

Also gilt $Z^{n-1} \neq Z^{m-1}$, da m das zweite Vorkommen der gleichen Position repräsentiert. Wenn $n = 0$ ist, hat man $Z^0 = N$, was den leeren Zug (bzw. das neutrale Element) repräsentiert. Der Würfel wird dabei nicht verändert und somit wird die Würfelposition bei jedem Zug $Z \in G_{2x2x2}$ mit Z^0 „wiederholt".

Es gilt $Z^n = Z^m$. Wenn man nun auf die gleiche Ausgangsposition n-mal oder m-mal Z anwendet, kommt man in der gleichen Endposition an.
Wenn man nun Z^{-1} anwendet, kommt man wieder in die gleiche Endposition. Dabei ist es egal, ob man vorher n-mal oder m-mal Z ausgeführt hat, da man von der gleichen Startposition ausgehend in die gleiche Endposition kommt, wenn man den gleichen Zug ausführt.

Beim Anwenden von Z^{-1} wird die letzte Ausführung von Z wieder rückgängig gemacht. Wenn man Z also n-mal ausführt und dann Z^{-1} ausführt, ist es das gleiche wie $n-1$-mal Z ausführen, also $Z^n Z^{-1} = Z^{n-1}$. Das gilt natürlich auch für m, also $Z^m Z^{-1} = Z^{m-1}$.

Demnach gilt dann $Z^{n-1} = Z^{m-1}$. Das widerspricht dann aber der Annahme, dass m der kleinste Wert für eine Wiederholung der Position ist. Also muss $n = 0$ sein, damit m die erste Wiederholung einer Position repräsentiert.

Daraus folgt: Wenn man einen beliebigen Zug $Z \in G_{2x2x2}$ wiederholt auf den gelösten Würfel anwendet, kommt man wieder in die Startkonfiguration.

Zykelstruktur

Anhand der Zykelstruktur lässt sich die Ordnung des jeweiligen Zuges bestimmen. Die Ordnung beschreibt die Anzahl der Wiederholungen, die ein Zug durchgeführt werden muss, damit die Steine die gleiche Anordnung wie zu Beginn des Zuges haben. Dabei geht es um die Steinpositionen und nicht um die Steinausrichtungen.
Der Würfel kann also alle Steine an der richtigen Position haben und trotzdem ungelöst sein, da die Steine verdreht sein können.

Der Zug U als $\sigma_U = \ (ulf\ ulb\ urb\ urf)$ (eine Drehung der oberen Ebene um 90° im Uhrzeigersinn) besteht aus einem 4-elementigen Zykel.
Wenn der Zug U also viermal ausgeführt wird, befindet sich der Würfel wieder in seiner vorherigen Position:

Ausführung	ulf	ulb	urb	urf
1	ulb	urb	urf	ulf
2	urb	urf	ulf	ulb
3	urf	ulf	ulb	urb
4	ulf	ulb	urb	urf

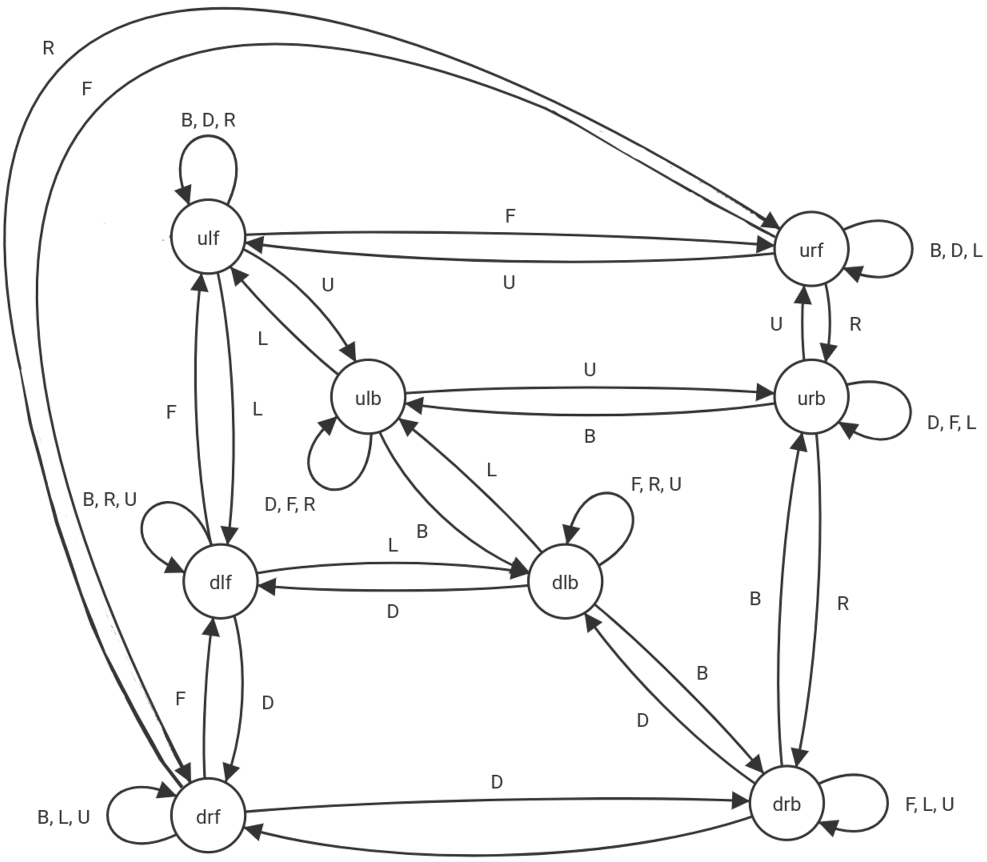
Die vierte Zeile der Tabelle hat die selbe Anordnung der Steine wie die oberste Zeile (vor Ausführung von U).
Somit hat die beschriebene Ebenenrotation U die Ordnung 4. Das gilt auch für jede andere Ebenenrotation (D, F, B, L, R).

Es gilt also für einen Zug Z, der aus nur einem n-elementigen Zykel besteht:
$\forall\ Z \in G_{2x2x2}\ mit\ Z = (i_1\ i_2\ ...\ i_n), n \in \mathbb{N}\ .\ Z^n = 1.$

Wenn man Z mehrfach ausführt, kommt man nach jeder n-ten Wiederholung in den Ausgangszustand. [2] Es gilt also auch $\forall\ Z \in G_{2x2x2}\ mit\ Z = (i_1\ i_2\ ...\ i_n), n, k \in \mathbb{N}\ .\ Z^{k*n} = 1.$

Auch bei komplexeren Zügen kann anhand der Zykelstruktur die Ordnung bestimmt werden. Dazu muss das KGV (kleinstes gemeinsames Vielfaches) aller Zykelgrößen bestimmt werden. [2]

Der besseren Übersichtlichkeit halber, habe ich die Zykel aller Züge auch grafisch dargestellt:



Dieser Graph vereinfach das Ablesen der Zykel, vorallem wenn bei einem Zug mehrere Ebenenrotationen kombiniert werden.

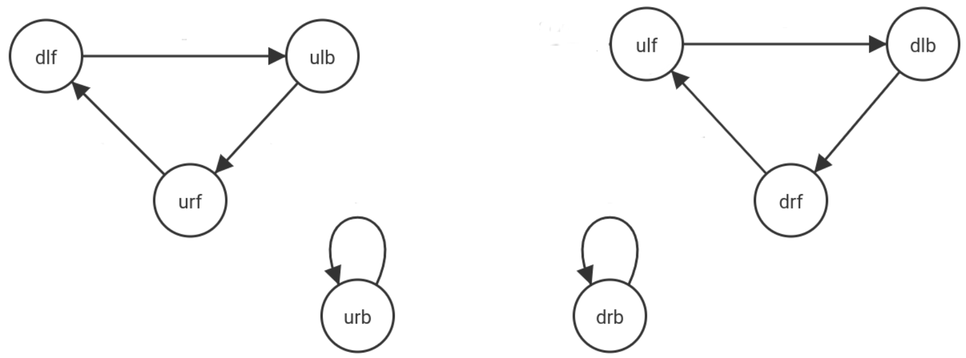
So kann ich nun anhand des Beispielzuges $LLFF$ die Zykelstruktur darstellen.

Zuerst erstelle ich eine Tabelle, die jede Position auf ihre neue Position abbildet.

	ulb	urb	ulf	urf	dlb	drb	dlf	drf
L	ulf	urb	dlf	urf	ulb	drb	dlb	drf
L	dlf	urb	dlb	urf	ulf	drb	ulb	drf
F	ulf	urb	dlb	drf	urf	drb	ulb	dlf
F	urf	urb	dlb	dlf	drf	drb	ulb	ulf

Die ausgegrauten Positionen bleiben bei dem jeweiligen Zug unverändert.

Grafisch dargestellt sehen die Zykel des Zuges $LLFF$ so aus:



In Zykelschreibeweise also $\sigma_{LLFF} = (dlf\ ulb\ urf)(ulf\ dlb\ drf)$.
Da es also zwei Zykel der Länge drei gibt, befinden sich alle Würfelsteine nach drei Zügen ($KGV(3, 3, 1, 1) = 3$) wieder in ihrer Ausgangsposition.
In diesem Fall sind die Steine nicht nur an der richtigen Position sondern auch so ausgerichtet, wie zu Beginn des Zuges.

Außerdem kann man erkennen, dass sechs der acht Steine bei dem Zug $LLFF$ bewegt werden. Die anderen beiden (urb und drb) bleiben unverändert.

Äquivalenz von Zügen

Es kann schwierig sein, die Äquivalenz von Zügen oder Roatationen anhand der Funktionen (σ und δ) in der Zykelschreibweise zu erkennen.
Das liegt daran, dass man die Zykel in verschiedener Reihenfolge schreiben kann. So ist der Zug U beispielsweise $(ulf\ ulb\ urb\ urf)$, aber auch $(urb\ urf\ ulf\ ulb)$.
Um das zu vereinfachen, priorisiere ich die Würfelpositionen, so dass die Position mit der höchsten Priorität immer vorne steht und zwei Äquivalente Zykel somit gleich aussehen.

Die Positionen priorisiere ich wie folgt:

Priorität	1	2	3	4	5	6	7	8
Position	ulb	urb	ulf	urf	dlb	drb	dlf	drf

Somit ist die angepasste Schreibweise für den Zug U dann $(ulb\ urb\ urf\ ulf)$, da ulb (falls vorhanden) ganz vorne stehen muss.

Untergruppen von $\mathbf{G}_{2x2x2}$

Eine Gruppe $(H, \circ)$, ist eine Untergruppe einer Gruppe $(G, \circ)$, wenn $H \subseteq G$ gilt.
Dann schreibt man auch $H \leqslant G$.
Das Symbol $\leqslant$ ist zu lesen als „ist Untergruppe von“.

Jede Gruppe G mit neutralem Element N hat die beiden trivialen Untergruppen $H_N = \{N\}$ und $H_G = G$ (hier: $G_2 = G_{2x2x2}$). Also sind H_N und H_G die trivialen Untergruppen von G_{2x2x2}. ($H_N \leqslant G_{2x2x2}$ und $H_G \leqslant G_{2x2x2}$)
Die Gruppe G_{2x2x2} hat viele Untergruppen, deshalb kann ich nur auf einen Teil davon eingehen.

Da die trivialen Untergruppen nicht sonderlich interessant sind, gehe ich im folgenden Abschnitt auf einige anschauliche Untergruppen zum Lösen des Würfels ein. Diese Gruppen hat Tom Davis (in seinem Paper „Group Theory via Rubik's Cube“) [2] für den 3x3x3-Würfel genannt. Ich übertrage zwei seiner Untergruppen hier auf den 2x2x2:

Die Untergruppe H_{E1}, die nur die Rotation einer Ebene zulässt, hat nur vier erreichbare Würfelkonfigurationen (sowohl beim 2x2x2- als auch beim 3x3x3-Würfel). Das kann man auch gut an einem *Cube* nachvollziehen, da man durch das Drehen von nur einer Ebene auch nur vier verschiedene Ergebnisse erzielen kann.

Eine weitere Untergruppe von G_{2x2x2} ist H_{E2}. Hier dürfen zwei gegenüberliegende Ebenen gedreht werden.
Bei der Gruppe des 3x3x3-Würfels ergeben sich daraus 16 mögliche Würfelkonfigurationen [2]. Bei dem 2x2x2-*Cube* allerdings nur vier, da es nur zwei Ebenen gibt und man nicht anhand der Mittelsteine oben und unten unterscheiden kann.

Valide Konfigurationen des Würfels

Zuerst berechne ich die Anzahl der theoretisch möglichen Würfelkonfigurationen:

Die Ecksteine können sich in jeder Ecke befinden, also gibt es pro Eckstein 8 mögliche Positionen im Würfel. Da es 8 Ecksteine gibt, gibt es also $8! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 40\,320$ mögliche Positionen für die Ecksteine.

Außerdem können die Ecksteine gedreht sein, also verschiedene Farbflächen oben sein. Da die Steine aus 3 Farbflächen bestehen, können sieben davon durch Ebenendrehungen theoretisch 3 verschiedene Ausrichtungen annehmen. Der achte Stein kann durch die Möglichkeit der Rotation des kompletten Würfels als richtig gedreht angenommen werden. Es gibt also 3^7 Wege, wie die Ecksteine ausgerichtet sein können.

Da es keine Mittelsteine im Würfel gibt, reduziert die Rotation des Würfels die Möglichkeiten um den Faktor 24.
Somit ergibt es $(3^7 \cdot 8!) \cdot \frac{1}{24}$ theoretisch mögliche Positionen für den Würfel. Das sind $3\,674\,160$ Positionen.

Davon sind aber nicht alle Konfigurationen durch Ebenendrehungen erreichbar - für einige braucht man einen Schraubendreher oder Superkleber. Diese Konfigurationen bezeichne ich als ungültige Konfigurationen.

Ausrichtung der Steine (modulo 3)

Die Konfiguration des Würfels ist definiert als $C = (\sigma, x)$.

In diesem Abschnitt werde ich zeigen, dass bei einer validen Würfelkonfiguration $\Sigma\ x_i \mod 3 = 0$ (modulo) gilt.
Wenn $C' = (\sigma', x')$ eine Nachfolgekonfiguration von $C = (\sigma, x)$ ist, dann gilt $(\sigma, x) \cdot M = (\sigma', x')$.
Dabei ist M eine der Züge aus U, D, R, L, F, B. Es gilt dann $\Sigma\ x'_i \mod 3 = \Sigma\ x_i \mod 3$.
In Abbildung 6 (s.o.) kann ist diese Situation für den Zug R dargestellt. Das kann man auch anhand dieser Tabelle sehen:

Zug M	x	x'	$\Sigma\ x'_i$	$\Sigma\ x'_i \mod 3 = 0$
D	$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8)$	$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_6, x_8, x_5, x_7)$	0	0
U	$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8)$	$(x_3, x_1, x_4, x_2, x_5, x_6, x_7, x_8)$	0	0
R	$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8)$	$(x_1, 2, x_3, 1, x_5, 1, x_7, 2)$	6	0
L	$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8)$	$(1, x_2, 2, x_4, 2, x_6, 1, x_8)$	6	0
F	$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8)$	$(x_1, x_2, 1, 2, x_5, x_6, 2, 1)$	6	0
B	$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8)$	$(2, 1, x_3, x_4, 1, 2, x_7, x_8)$	6	0

Für jede valide Würfelposition gilt also $\Sigma\ x'_i \mod 3 = \Sigma\ x_i \mod 3$.

Wenn es also eine valide Konfiguration $C' = (\sigma', x')$, für die gilt $\Sigma x_i' \mod 3 = 0$, dann gibt es einen Zug $M \in G_{2x2x2}$, so dass $M \cdot C'$ die Steine in die richtigen Positionen bringt also $(1, x)$.

Von dieser Konfiguration $(1, x)$ ausgehend gibt es einen Zug $M \in G_{2x2x2}$, so dass alle Eckstücke richtig ausgerichtet sind. Dann ergibt sich die Konfiguration $(1, 0)$ und alle Eckstücke sind in der richtigen Ausrichtung und Position. Der Würfel befindet sich also in der Startkonfiguration.

Lösung des Würfels

Die „übliche" Methode zum Lösen eines Zauberwürfels ist das Kombinieren verschiedener Ebenendrehungen. Diese werden als eine Einheit angewendet und verändern den Würfel dann sehr spezifisch.
Es gibt beispielsweise eine Kombination, die 3 der 4 Ecken der oberen Ebene untereinander im Uhrzeigersinn tauscht und deren Ausrichtung dabei nicht verändert.

Parität

Jeder n-Zykel kann als Produkt von 2-Zykeln geschrieben werden. Wenn n dabei gerade ist, hat das dazugehörige 2-Zykel-Produkt eine ungerade Anzahl an 2-Zykeln und anders herum. [2]
Jede Würfelposition kann durch die Ebenendrehungen U, D, F, B, L, R (und die Rotation des Würfels) erreicht werden.
Zur Erinnerung: Die Ebenendrehungen des Würfels sind durch folgende Zykel definiert:

$$\begin{aligned}
\sigma_U &= (ulf\ ulb\ urb\ urf) \\
\sigma_D &= (dlf\ drf\ drb\ dlb) \\
\sigma_F &= (ulf\ urf\ drf\ dlf) \\
\sigma_B &= (ulb\ dlb\ drb\ urb) \\
\sigma_L &= (ulb\ ulf\ dlf\ dlb) \\
\sigma_R &= (urb\ drb\ drf\ urf)
\end{aligned}$$

Jeder Zug ist also als ein 4-Zykel definiert. Den 4-Zykel kann man als Produkt aus drei 2-Zykeln schreiben.
Die Parität einer einzelnen Ebenendrehung ist also ungerade. Die Parität eines Zuges, der aus zwei Ebenendrehungen besteht (z.B. LF) ist somit gerade.

Abbildungen und Tabellen

Alle verwendeteten Grafiken, Abbildungen und Tabellen habe ich selbst (mit GIMP, Photoshop oder LateX) erstellt, um Markennennungen zu vermeiden und eine einheitliche Darstellung zu gewährleisten.

Literatur

[1] Janet Chen. *Group Theory and the Rubik's Cube*. Website. Online erhältlich unter `http://people.math.harvard.edu/~jjchen/docs/Group_Theory_and_the_Rubik's_Cube.pdf`; abgerufen am 05.01.2020.

[2] Tom Davis. *Group Theory via Rubik's Cube*. Website. Online erhältlich unter `http://www.geometer.org/rubik/group.pdf`; abgerufen am 05.01.2020.

[3] Tobias Glosauer. *Elementar(st)e Gruppentheorie*. Wiesbaden: Springer Spektrum, 2016.