

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DORTMUND

PROPOSAL
(ZUR BACHELORARBEIT)

Gruppentheorie des 2x2x2 Zauberwürfels und dessen Lösungsalgorithmen

Pina Kolling

betreut von
Dr. Lukasz CZAJKA

21. November 2020

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung/Ausgangslage	1
2	Würfel als Gruppe	3
3	Konfiguration des Würfels	5
4	Züge als Gruppenoperation	9
5	Valide Konfigurationen des Würfels	10
6	Quellen, Abbildungen, Tabellen etc.	13

1 Einleitung/Ausgangslage

Meine Bachelorarbeit soll sich mit dem 2x2x2 Zauberwürfel und dessen Algorithmen zur Lösung befassen. Dabei handelt es sich um ein Drehpuzzle, das ein mathematisches Problem darstellt.

Im Folgenden werde ich die Terminologie und den Aufbau des Würfels erklären.

Terminologie:

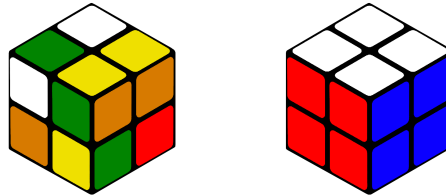


Abbildung 1: 2x2x2 Zauberwürfel
(links in ungelöstem und rechts in gelöstem Zustand (Startkonfiguration))
Der Zauberwürfel wird auch Würfel/Cube genannt.

Bei der Startkonfiguration (auch Grundposition, Grundstellung) des 2x2x2 Würfels hat jede Seite 4 Farbflächen einer Farbe. Der Würfel ist dann gelöst.

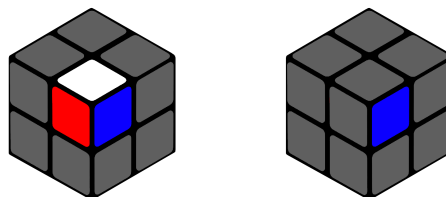


Abbildung 2: Ein 2x2x2 Würfel besteht aus acht (Eck-)Steinen (links), die jeweils drei Farbflächen (rechts) haben. Ein 2x2x2 Zauberwürfel hat also 24 Farbflächen.

Die Ecksteine können sich in jeder Ecke befinden, also gibt es pro Eckstein 8 mögliche Positionen im Würfel. Da es 8 Ecksteine gibt, gibt es also $8! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 40\,320$ mögliche Positionen für die Ecksteine.

Außerdem können die Ecksteine gedreht sein, also verschiedene Farbflächen oben sein. Da die Steine aus 3 Farbflächen bestehen, können sie durch Rotationen theoretisch 3 verschiedene Ausrichtungen annehmen. Es gibt also 3^8 Wege, wie die Ecksteine ausgerichtet sein können.

Somit ergibt es $3^8 \cdot 8!$ theoretisch mögliche Positionen für den Würfel. Das sind 264 539 520 Positionen.

Es sind aber nicht alle dieser Positionen valide. Eine Position ist valide, wenn sie durch drehen der Seiten erreicht werden kann, ausgehend von der Startkonfiguration aus.



Abbildung 3: Der 2x2x2 und der 3x3x3 Zauberwürfel haben jeweils 6 Seiten.



Abbildung 4: 3x3x3 Zauberwürfel
(links in ungelöstem und rechts in gelöstem Zustand (auch Grundstellung))

Im Gegensatz zum 3x3x3 Würfel hat der 2x2x2 Würfel weder Mittelsteine, noch Kantensteine.

Das besondere an den Mittelsteinen des 3x3x3 Würfels ist, dass sie bei der Rotation der Seiten (also bei Zügen des Würfels) nicht verändert werden. Somit ist beim 3x3x3 Würfel die obere Seite immer fest zu stellen: Die obere Seite hat immer das weiße Mittelstück in der Mitte.

Beim 2x2x2 muss auch noch geprüft werden, ob die aktuelle Konfiguration nicht einer vermeintlich anderen Konfiguration entspricht, bei der nur eine andere Seite nach oben gehalten wird.

Die Rotation des gesamten Würfels ist bei dem 3x3x3 Würfel also eindeutig vorgegeben, während sie beim 2x2x2 Würfel gedreht werden kann.

Algorithmen

Am 2x2x2 Zauberwürfel gibt es sechs verschiedene Drehseiten: oben, unten, links, rechts, vorne und hinten. Da der Würfel aber nur aus zwei Ebenen besteht, entspricht eine Drehung der oberen Ebene nach rechts, einer Drehung der unteren Ebene nach links.

Obwohl ich aber davon ausgehe, den kompletten Würfel beliebig zu rotieren, definiere ich die Drehungen der Ebenen für jede Ebene, damit die Algorithmen anschaulicher sind. Sonst entspräche ja eine Drehung der oberen Ebene im Uhrzeigersinn (U) einer dreifachen Drehung der unteren Ebene im Uhrzeigersinn (DDD) mit anschließender Rotation des kompletten Würfels im Uhrzeigersinn. Es ist aber übersichtlicher, jede Ebenendrehung als einzelnen Zug dar zu stellen.

Abkürzung	Beschreibung des Zugs
U	Drehung der oberen Ebene im Uhrzeigersinn
D	Drehung der unteren Ebene im Uhrzeigersinn
R	Drehung der rechten Ebene im Uhrzeigersinn
L	Drehung der linken Ebene im Uhrzeigersinn
F	Drehung der vorderen Ebene im Uhrzeigersinn
B	Drehung der hinteren Ebene im Uhrzeigersinn

Die Kürzel stehen für *Up*, *Down*, *Right*, *Left*, *Front*, *Back*.

Die entsprechende Ebene wird im Uhrzeigersinn gedreht, wenn man auf diese Ebene schaut. Es wirkt also so, also würde man die untere Ebene gegen den Uhrzeigersinn drehen, wenn man von oben auf den Würfel schaut.

2 Würfel als Gruppe

Darstellung des 2x2x2 Zauberwürfels mit dem mathematischen Konstrukt der Gruppe

Die Definition einer Gruppe (G, \circ) ist Grundlage für den folgenden Abschnitt:

- Abgeschlossenheit: $\forall a, b \in G. (a \circ b) \in G$
- Assoziativität: $\forall a, b, c \in G. (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$
- Existenz eines neutralen Elements n : $\forall a \in G, \exists n \in G. n \circ a = a \circ n = a$
- Existenz eines inversen Elements a^{-1} : $\forall a \in G, \exists a^{-1} \in G. a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = n$

Im folgenden setze ich die Definition der Gruppe des 3x3x3 Würfels aus dem Paper „Group Theory and the Rubik’s Cube“ von Janet Chen als Gruppe des 2x2x2 Würfels um. Die Gruppe von Janet Chen bezeichne ich als (G_{3x3x3}, \circ) , auch wenn Janet Chen sie als $(G, *)$ bezeichnet hat. Den Namen der Gruppe ändere ich aber, um klar zwischen dem 2x2x2 und dem 3x3x3 Würfel zu differenzieren. Das Symbol des Operators verändere ich, um Verwechslungen mit dem Multiplikationsoperator zu vermeiden.

Die Gruppe des 2x2x2 Würfels nenne ich (G_{2x2x2}, \circ) .

Die Menge G_{2x2x2} besteht aus allen möglichen Zügen des Würfels. Beispielsweise die Drehung der oberen Ebene ist ein Zug. Ein Zug kann aber auch aus mehreren Drehungen bestehen, z.B. das Drehen der oberen Ebene, gefolgt von dem Drehen der rechten Ebene stellt ebenfalls einen Zug dar.

Wenn zwei Züge die gleiche Würfelposition hervorrufen, sind die beiden Züge "gleich". Beispielsweise eine Drehung um 180° nach links oder nach rechts von einer Ebene führt zu dem gleichen Ergebnis und somit werden diese beiden Züge als gleich angesehen.

Der Operator \circ ist als Konkatenation zweier Züge definiert. Wenn $Z_1 \in G_{2x2x2}$ und $Z_2 \in G_{2x2x2}$ zwei Züge sind, dann bedeutet $Z_1 \circ Z_2$, dass zuerst Z_1 und dann Z_2 ausgeführt wird. (Außerdem gilt dann auch $Z_1 \circ Z_2 \in G_{2x2x2}$.)

Im folgenden werde ich begründen, wieso (G_{2x2x2}, \circ) eine Gruppe ist, indem ich (G_{2x2x2}, \circ) bezüglich der Gruppenkriterien untersuche:

- Abgeschlossenheit:

$$\forall Z_1, Z_2 \in G_{2x2x2}. (Z_1 \circ Z_2) \in G_{2x2x2}$$

Die Gruppe G_{2x2x2} ist abgeschlossen unter dem Operator \circ . Wenn Z_1 und Z_2 Züge sind und somit Elemente von G_{2x2x2} , dann ist auch $Z_1 \circ Z_2$ ein Element der Gruppe, da alle Züge in G_{2x2x2} enthalten sind.

- Assoziativität:

$$\forall Z_1, Z_2, Z_3 \in G_{2x2x2}. (Z_1 \circ Z_2) \circ Z_3 = Z_1 \circ (Z_2 \circ Z_3)$$

Die Züge $Z_i \in G_{2x2x2}$ können gruppiert werden und somit gilt die Assoziativität.

Um die Assoziativität zu zeigen, werde ich eine Schreibweise für das Ausführen der Züge einführen. Ich nenne einen bestimmten Stein im Würfel nun s . Beim Ausführen eines Zuges Z schreibe ich nun $Z(s)$, um die neue Position des Steines zu erhalten. Die Positionen sind (wie oben beschrieben) 3-Buchstaben-Kürzel, bestehend aus u, d, l, r, t, b .

Wenn wir nun $Z_1 \circ Z_2$ haben, wird zuerst Z_1 und dann Z_2 ausgeführt. $Z_1(s)$ bewegt den Stein s zu der Position $Z_1(s)$. Der Zug Z_2 bewegt den Stein dann zu der Position $Z_2(Z_1(s))$. Also gilt $Z_1 \circ Z_2 = Z_2(Z_1(s))$.

Nun muss noch $(Z_1 \circ Z_2) \circ Z_3 = Z_1 \circ (Z_2 \circ Z_3)$ gezeigt werden. Ich zeige also, dass sich $(Z_1 \circ Z_2) \circ Z_3$ und $Z_1 \circ (Z_2 \circ Z_3)$ beide zu $Z_3(Z_2(Z_1(s)))$ umformen lassen:

$$\begin{aligned} & (Z_1 \circ Z_2) \circ Z_3 \\ \Rightarrow & ((Z_1 \circ Z_2) \circ Z_3)(s) \\ & = Z_3(Z_1 \circ Z_2)(s) \\ & = Z_3(Z_2(Z_1(s))) \\ & Z_1 \circ (Z_2 \circ Z_3) \\ \Rightarrow & (Z_1 \circ (Z_2 \circ Z_3))(s) \\ & = (Z_2 \circ Z_3)(Z_1(s)) \\ & = Z_3(Z_2(Z_1(s))) \end{aligned}$$

Somit ist (G_{2x2x2}, \circ) assoziativ.

- Existenz eines neutralen Elements N :
 $\forall Z_1 \in G_{2x2x2}, \exists N \in G_{2x2x2}. N \circ Z_1 = Z_1 \circ N = Z_1$

Das neutrale Element N muss aus der Menge G_{2x2x2} der Züge sein und es muss gelten: $N \circ Z_1 = Z_1 \circ N = Z_1$. Somit ist das neutrale Element der Gruppe (G_{2x2x2}, \circ) der „leere“ Zug. Es werden also keine der Ebenen des Würfels gedreht. Wenn man also einen Zug Z ausführt und dann den Zug N , bedeutet das so viel wie „erst Z ausführen und dann nichts“, was das gleiche ist wie Z auszuführen.

- Existenz eines inversen Elements Z'_1 :
 $\forall Z_1 \in G_{2x2x2}, \exists Z'_1 \in G_{2x2x2}. Z_1 \circ Z'_1 = Z'_1 \circ Z_1 = N$

Da Z ein Zug ist, kann man diesen auch rückgängig machen. Man muss die einzelnen Ebenenrotationen nur rückwärts und von hinten durchführen, um den Zug zu invertieren. Dann gilt $Z_1 \circ Z'_1 = Z'_1 \circ Z_1 = N$.

Somit ist (G_{2x2x2}, \circ) eine Gruppe.

Damit (G_{2x2x2}, \circ) eine kommutative Gruppe (oder Abelsche Gruppe) ist, muss zusätzlich noch die Kommutativität gelten.

Dies ist nicht der Fall, da beispielsweise eine Rotation der oberen Ebene nach rechts und eine Rotation der rechten Ebene nach unten in umgekehrter Reihenfolge ein anderes Ergebnis haben. Es gilt also nicht $\forall Z_1, Z_2 \in G_{2x2x2}. Z_1 \circ Z_2 = Z_2 \circ Z_1$. Der \circ -Operator der Gruppe ist also nicht kommutativ.

3 Konfiguration des Würfels

Die Konfiguration des Würfels, also die Position/Verdrehung des Würfels setzt sich aus zwei Parametern zusammen:

- Position der Ecksteine (angegeben als σ)
- Ausrichtung der Ecksteine (angegeben als x_i)

Also kann die Konfiguration des Würfels als ein 2-Tupel geschrieben werden: (σ, x) .

Der Würfel kann aber auch komplett gedreht werden, ohne Züge auszuführen.

Positionen im Würfel und Zykel

Um die Übergänge der Würfelsteine als Funktion darzustellen, definiere ich eine bijektive Funktion σ für jede Rotation. σ bildet jede der Würfelpositionen auf die neue Position ab.

Die Würfelpositionen habe ich wie folgt eingeteilt:

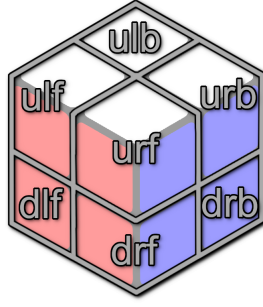
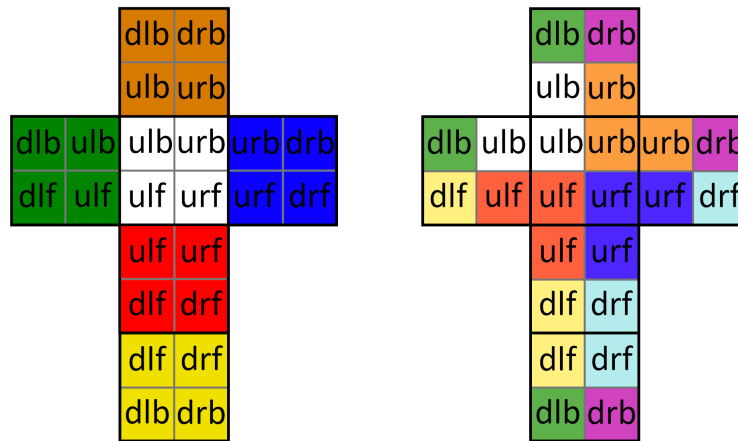


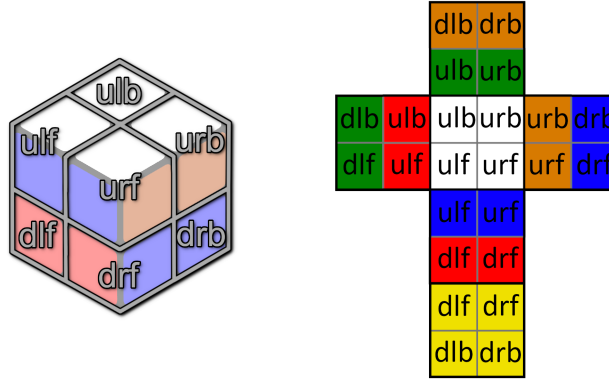
Abbildung 5: Die einzelnen Steinpositionen werden mit den Kürzeln benannt, die *up*, *down*, *left*, *right*, *front* und *back* beschreiben.



Ich ordne jeder Steinposition einen einzigartigen Namen zu, um mich darauf zu beziehen. Dabei gehe ich davon aus, dass die weiße Seite in der Startkonfiguration oben ist. Die Steinposition beschreibe ich mich 3 Buchstaben, die aus den Kürzeln *u*, *d*, *l*, *r*, *f*, *b* bestehen. Diese Kürzel stehen für *up*, *down*, *left*, *right*, *front*, *back*. Somit heißt die Steinposition oben links also *ulf* (für *up*, *left* und *front*).

Nun definiere ich σ_U für eine Drehung der oberen Ebene um 90° im Uhrzeigersinn: Ich beschreibe σ_U ausführlich und gebe verschiedene Schreibweisen an. Die weiteren Drehungen funktionieren dann analog.

Die Drehung der oberen Ebene sieht grafisch dargestellt so aus:



$$\begin{array}{llll}
 \sigma_U(ulf) = ulb & \sigma_U(ulb) = urb & \sigma_U(urb) = urf & \sigma_U(urf) = ulf \\
 \sigma_U(dlf) = dlf & \sigma_U(dlb) = dlb & \sigma_U(drb) = drb & \sigma_U(drf) = drf
 \end{array}$$

Das kann man auch in der Form $i \mapsto j$ schreiben:

$$\begin{array}{llll}
 ulf \mapsto ulb & ulb \mapsto urb & urb \mapsto urf & urf \mapsto ulf \\
 dlf \mapsto dlf & dlb \mapsto dlb & drb \mapsto drb & drf \mapsto drf
 \end{array}$$

Daraus entstehen folgende Zykel: $\sigma_U = (ulf \ ulb \ urb \ urf) \ (dlf) \ (dlb) \ (drb) \ (drf)$

Die Zykel mit nur einem Element müssen nicht aufgeschrieben werden. Dann ergibt sich $\sigma_U = (ulf \ ulb \ urb \ urf)$, was den Zykel beschreibt, in dem die Steine rotiert werden, wenn die obere Ebene gedreht wird.

Die Drehungen der anderen Ebenen können durch folgende Zykel beschrieben werden:

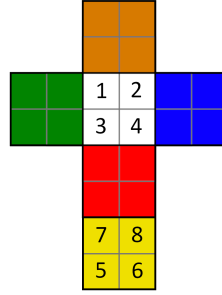
$$\begin{array}{l}
 \sigma_U = (ulf \ ulb \ urb \ urf) \\
 \sigma_D = (dlf \ drf \ drb \ dlb) \\
 \sigma_F = (ulf \ urf \ drf \ dlf) \\
 \sigma_B = (ulb \ dlb \ drb \ urb) \\
 \sigma_L = (ulb \ ulf \ dlf \ dlb) \\
 \sigma_R = (urb \ drb \ drf \ urf)
 \end{array}$$

Die Identitätspermutation schreibe ich als $\sigma = 1$.

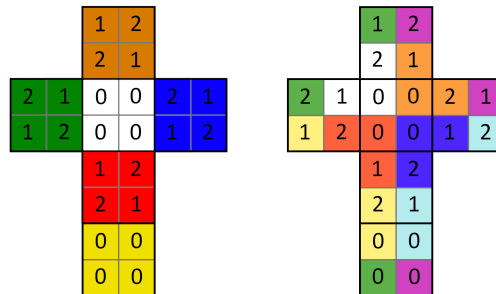
Ausrichtung der Steine

Der 2x2x2-Würfel besteht aus 8 Ecksteinen, die jeweils 3 Farbflächen haben. Somit hat jeder Stein 3 mögliche Ausrichtungen.

Um die Ausrichtung der Steine zu erkennen, bekommen Würfelpositionen an einer Farbfläche einer Nummer zugeordnet. Dafür habe ich die weißen und die gelben Seiten markiert und nummeriert. Auf diese Nummern beziehe ich mich als $x_i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ mit x_1 als Position 1, x_2 als Position 2, usw.



Außerdem bekommt jeder Stein an jeder Farbfläche eine Zahlenzuordnung. Da jeder Stein 3 Ausrichtungen haben kann, nummeriere ich mit 0, 1 und 2. Ich beginne mit der weißen/gelben Fläche bei 0 und zähle dann im Uhrzeigersinn die Flächen.



In der Startkonfiguration sind alle $x_i = 0$, also $x = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$. Das schreibe ich kurz als $x = 0$.

Nun stelle ich dar, wie sich die Nummerierung der Farbflächen verändert, wenn der Zug R ausgeführt wird. R ist eine Rotation der rechten Ebene um 90° im Uhrzeigersinn.

Die Nummerierungen der Position (x) bleiben an der gleichen Position, die Nummerierungen (0, 1, 2) der Farbflächen ändern sich mit Rotation der Ebene und ermöglichen so eine Zuordnung der Ausrichtung der Ecksteine.

Die linke Seite der Würfels wird dabei nicht beeinträchtigt, also sind die Flächen an den Positionen x_1, x_3, x_5, x_7 alle 0.

Die anderen Positionen haben nun aber andere Farbflächen:

$$x_2 = 2 \quad x_4 = 1 \quad x_6 = 1 \quad x_8 = 2$$

Also $x = (0, 2, 0, 1, 0, 1, 0, 2)$ nach dem Zug R .

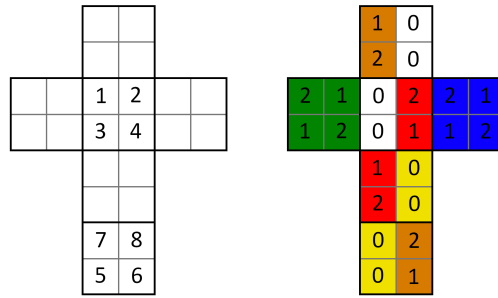


Abbildung 6: links: Positionen x_1 bis x_8 , rechts: Veränderung der nummerierten Ecksteine nach dem Zug R

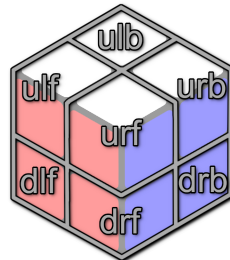
Rotation des Würfels

Die Konfiguration des Würfels ist definiert als $C = (\sigma, x)$.

Allerdings hat der 2x2x2-Würfel im Gegensatz zum 3x3x3-Würfel keine Mittelsteine, die fest darüber entscheiden, welche Seite die obere Seite ist.

Der 2x2x2-Würfel kann also gelöst sein, ohne dass die obere Seite weiß ist. Deshalb muss es möglich sein, den Würfel ganz zu rotieren, ohne einen Zug auszuführen.

Dafür nutze ich die Bezeichnungen der Steinpositionen, die ich bereits für die Positionen der Steine im Würfel verwendet habe:



Nun kann ich (genau wie bei den einzelnen Zügen des Würfels) für die möglichen Rotationen des Würfels Nachfolgekonfigurationen festlegen.

4 Züge als Gruppenoperation

Wenn der Zauberwürfel in einer Konfiguration $C = (\sigma, x)$ ist, wird der Würfel durch das Ausführen eines Zuges $M \in G_{2x2x2}$ in eine neue Konfiguration gebracht. Diese Konfiguration schreibe ich als $C \cdot M$.

Definition einer Gruppenoperation mit der Gruppe (G_{2x2x2}, \circ) und der Menge C :

- $\cdot : C \times G_{2x2x2} \rightarrow C$ mit $(c, g) \rightarrow c \cdot g$
- $c \cdot N = c$ für alle $c \in C$ und das neutrale Element $N \in G_{2x2x2}$
- $c \cdot (u \circ v) = (c \cdot u) \cdot v$ für alle $u, v \in G_{2x2x2}$ und $c \in C$

Angenommen der Würfel befindet sich in der Konfiguration C . Wenn nun der Zug $M_1 \in G_{2x2x2}$ ausgeführt wird, ist die neue Konfiguration des Würfels $C \cdot M_1$. Wenn nun noch ein weiterer Zug $M_2 \in G_{2x2x2}$ ausgeführt wird, ist die neue Konfiguration des Würfels $(C \cdot M_1) \cdot M_2$.

Anders gesagt: Der Würfel hat in Konfiguration C gestartet und der Zug $M_1 M_2$ wurde ausgeführt. Man kann die neue Konfiguration auch als $C \cdot (M_1 M_2)$ schreiben und somit gilt $(C \cdot M_1) \cdot M_2 = C \cdot (M_1 M_2)$.

Wenn wir den leeren Zug N ausführen, wird die Konfiguration des Würfels nicht verändert. Es gilt also $C \cdot N = C$.

Bei Gruppenoperationen beeinflussen die Elemente einer Gruppe eine Menge. In diesem Fall beeinflussen die Züge des Würfels die Konfiguration des Würfels.

Es handelt sich hier um eine Rechtsoperation, da die Elemente der Gruppe rechts stehen.

5 Valide Konfigurationen des Würfels

Die Konfiguration des Würfels ist definiert als $C = (\sigma, x)$.

In diesem Abschnitt werde ich zeigen, dass bei einer validen Würfelkonfiguration $\sum x_i \equiv_3 0$ (modulo) gilt.

Wenn $C' = (\sigma', x')$ eine Nachfolgekonfiguration von $C = (\sigma, x)$ ist, dann gilt $(\sigma, x) \cdot M = (\sigma', x')$. Dabei ist M eine der Züge aus U, D, R, L, F, B . Es gilt dann $\sum x'_i \equiv_3 \sum x_i$.

In Abbildung 6 (s.o.) kann ist diese Situation für den Zug R dargestellt. Das kann man auch anhand dieser Tabelle sehen:

Zug M	x	x'	$\sum x'_i$	$\sum x'_i \equiv_3 0$
D	$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8)$	$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_6, x_8, x_5, x_7)$	0	0
U	$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8)$	$(x_3, x_1, x_4, x_2, x_5, x_6, x_7, x_8)$	0	0
R	$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8)$	$(x_1, 2, x_3, 1, x_5, 1, x_7, 2)$	6	0
L	$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8)$	$(1, x_2, 2, x_4, 2, x_6, 1, x_8)$	6	0
F	$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8)$	$(x_1, x_2, 1, 2, x_5, x_6, 2, 1)$	6	0
B	$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8)$	$(2, 1, x_3, x_4, 1, 2, x_7, x_8)$	6	0

Wenn es also eine valide Konfiguration $C' = (\sigma', x')$, für die gilt $\sum x'_i \equiv_3 0$, dann gibt es einen Zug $M \in G_{2x2x2}$, so dass $M \cdot C'$ die Steine in die richtigen Positionen bringt also $(1, x)$.

Von dieser Konfiguration $(1, x)$ ausgehend gibt es einen Zug $M \in G_{2x2x2}$, so dass alle Eckstücke richtig ausgerichtet sind. Dann ergibt sich die Konfiguration $(1, 0)$ und alle Eckstücke sind in der richtigen Ausrichtung und Position. Der Würfel befindet sich also in der Startkonfiguration.

Zeitplan

Die Bachelorarbeit ist auf 4 Monate ausgelegt, das sind circa 16 Wochen.
Der Zeitplan wird etwa wie folgt aussehen:

Woche 1
Woche 2
Woche 3
Woche 4
Woche 5
Woche 6
Woche 7
Woche 8
Woche 9
Woche 10
Woche 11
Woche 12
Woche 13
Woche 14
Woche 15
Woche 16

6 Quellen, Abbildungen, Tabellen etc.

Ich habe das Paper „Group Theory and the Rubik’s Cube“ von Janet Chen als Quelle verwendet.

Alle bisher verwendeten Grafiken, Abbildungen und Tabellen habe ich selbst (mit GIMP, Photoshop oder LaTeX) erstellt, um Markennennungen zu vermeiden und eine einheitliche Darstellung zu gewährleisten.