

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DORTMUND

Fakultät für Informatik

Lehrstuhl 14 für Software Engineering

BACHELORARBEIT

**Gruppentheorie des
 $2 \times 2 \times 2$ Zauberwürfels und dessen
Lösungsalgorithmen**

Pina Kolling

Abgabe: Mai 2021

betreut von

Dr. Łukasz CZAJKA

und

M. Sc. Christoph STAHL

9. April 2021

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Motivation	1
1.2	Struktur	2
2	Der $2 \times 2 \times 2$-Würfel	3
2.1	Terminologie	3
2.2	Grundzüge des Würfels	5
3	Mathematische Grundlagen	7
3.1	Gruppe	7
3.2	Untergruppe	9
3.3	Erzeuger und zyklische Gruppe	10
3.4	Cayleygraph	10
3.5	Gruppenoperation	11
3.6	Kommutator	12
3.7	Äquivalenzrelation und -klasse	12
3.8	Permutationen und Zykelschreibweise	14
3.9	Parität	16
4	Konfiguration des Würfels	17
4.1	Positionen der Steine im Würfel	17
4.2	Ausrichtung der Steine	19
4.3	Züge ausführen	24
5	Würfel als Gruppe	26
5.1	Gleichheit von Zügen	26
5.2	Rotation des Würfels	27
5.3	Äquivalenzrelation der Züge	30
5.4	Äquivalenzklassen	33
5.5	$2 \times 2 \times 2$ -Zauberwürfel als Gruppe	33
5.6	Züge als Gruppenoperation	36
5.7	Ordnung der Permutationen	37
5.8	Zykelstruktur	38
5.9	Ordnung der Züge	40

6	Untergruppen von $G_{2 \times 2 \times 2}$	43
6.1	Untergruppen Beispiele	43
6.2	Erzeuger	44
6.3	Durch FF und RR erzeugte Untergruppe	44
6.4	Cayleygraph	46
7	Valide Konfigurationen des Würfels	48
7.1	Anzahl der validen Würfelkonfigurationen	48
7.2	Mächtigkeit von $G_{2 \times 2 \times 2}$	48
7.3	Ausrichtung der Steine (modulo 3)	49
8	Lösung des Würfels	52
8.1	Parität der Zykel	52
8.2	Kommutatoren	53
8.3	Lösungsansätze	54
8.4	Lösung des Würfels anhand eines Beispiels	54
8.5	Muster	58
8.6	Schraubendrehermethode	59
8.7	Algorithmen für die erste Ebene	60
8.8	Algorithmen für die zweite Ebene	61
9	Minimale Gruppe	65
9.1	Minimale Permutationen	65
9.2	Minimale Rotation des Würfels	65
9.3	Minimale Ausrichtung der Steine	66
9.4	Erzeuger und Cayleygraph von G_{min}	67
9.5	Äquivalenz der Gruppen	67
9.6	Minimaler Lösungsweg	69
10	Fazit	72
10.1	Zusammenfassung und Ergebnis	72
10.2	Ausblick	72
	Abbildungsverzeichnis	73

1 Einleitung

Der $3 \times 3 \times 3$ -Zauberwürfel ist ein mathematisches Drehpuzzle, das 1974 von dem ungarischen Professor Erő Rubik erfunden wurde. Er wollte damit seinen Studenten helfen, dreidimensionale Probleme zu verstehen. Erő Rubik selbst brauchte über einen Monat, um den $3 \times 3 \times 3$ -Würfel zum ersten Mal zu lösen. Der sogenannte *Rubik's Cube* wurde ab 1980 weltweit verkauft und 1982 fand in Budapest sogar die erste Weltmeisterschaft statt. Der Gewinner war Minh Thai aus den USA, der den Würfel in 22,95 Sekunden löste. [3] Im Jahr 2018 löste der Chinese Yusheng Du den Würfel bei einem Wettbewerb in 3,47 Sekunden und stellte damit einen neuen Rekord auf. [2] Das Patent für den kleineren $2 \times 2 \times 2$ -Würfel hat *Rubik* im Jahr 1981 angemeldet [11]. Um diesen Würfel geht es in dieser Arbeit.

Doch die Zauberwürfel sind nicht nur interessante Puzzle – sie bieten beispielsweise auch die Möglichkeit, sie maschinell mit Bild- und Farberkennung zu lösen. Außerdem können die Würfel als algebraische Strukturen dargestellt werden.

1.1 Motivation

Der $3 \times 3 \times 3$ -Würfel wurde mathematisch schon viel untersucht. Die *God's Number* – das ist die maximal mögliche Anzahl der nötigen Drehungen zur Lösung – wurde oft berechnet und durch neue Algorithmen verbessert. Die Berechnung der *God's Number* des $3 \times 3 \times 3$ -Würfels ist wesentlich anspruchsvoller und dadurch auch interessanter als die des $2 \times 2 \times 2$ -Würfels.

Auch als Gruppe wurde der $3 \times 3 \times 3$ -Würfel schon mehrfach dargestellt, während der $2 \times 2 \times 2$ -Würfel noch nicht umfangreich als Gruppe untersucht wurde. Ziel dieser Arbeit ist es, das Wissen des $3 \times 3 \times 3$ -Würfels auf den $2 \times 2 \times 2$ -Würfel zu übertragen. Der $2 \times 2 \times 2$ -Würfel hat im Gegensatz zum $3 \times 3 \times 3$ -Würfel weniger Steine und keine Kantsteine – dadurch ist der kleinere Würfel auch weniger komplex. Dafür kann der $2 \times 2 \times 2$ -Würfel aber aufgrund der fehlenden Mittelsteine rotiert werden und so kann die Oberseite beliebig geändert werden. In dieser Arbeit wird das Wissen der Gruppe des $3 \times 3 \times 3$ -Würfels übertragen und angepasst und somit der $2 \times 2 \times 2$ -Würfel mit der Gruppentheorie dargestellt.

Wer die Lösungsalgorithmen des $2 \times 2 \times 2$ -Zauberwürfels selber herleiten möchte, sollte dies vor dem Lesen dieser Arbeit tun, da diese hier teilweise erklärt und genutzt werden.

1.2 Struktur

Diese Arbeit setzt sich aus 10 Kapiteln zusammen. Im Folgenden werden die Inhalte und Themen dieser Kapitel aufgelistet.

- 1 In der Einleitung wird eine kurze Übersicht der Geschichte des Würfels gegeben. Außerdem befinden sich hier die Motivation und die Struktur.
- 2 In diesem Kapitel wird der Aufbau des $2 \times 2 \times 2$ -Würfels und die dazugehörige Terminologie erklärt. Außerdem werden die Grundzüge des Würfels definiert.
- 3 Hier werden die mathematischen Grundlagen erklärt. Dafür werden unter anderem Gruppen und andere algebraische Strukturen definiert und anhand von Beispielen erklärt.
- 4 In dem Kapitel *Konfiguration des Würfels* werden die Positionen der Steine und die Ausrichtung der Steine im Würfel erklärt. Daraus setzt sich die Konfiguration zusammen.
- 5 In diesem Kapitel wird die Gruppe des $2 \times 2 \times 2$ -Würfels beschrieben. Außerdem werden Äquivalenzrelationen eingeführt, um die Rotationen des Würfels zu realisieren.
- 6 Das Kapitel *Untergruppen* befasst sich mit Beispieluntergruppen, Erzeugern und Cayleygraphen der Gruppe des $2 \times 2 \times 2$ -Würfels.
- 7 Hier wird die Anzahl der möglichen Würfelkonfigurationen und die Mächtigkeit der Trägermenge der Gruppe des $2 \times 2 \times 2$ -Würfels berechnet.
- 8 In diesem Kapitel werden verschiedene Lösungsansätze und Algorithmen erklärt. Die Lösung des Würfels durch einen Menschen wird schrittweise erklärt und es gibt eine allgemeine Anleitung, mit der der $2 \times 2 \times 2$ -Würfel immer gelöst werden kann.
- 9 Hier wird die Untergruppe des Würfels mit minimalen Grundzügen beschrieben.
- 10 Am Schluss der Arbeit befindet sich die Zusammenfassung, das Ergebnis und der Ausblick.

2 Der $2 \times 2 \times 2$ -Würfel

In diesem Kapitel werden die Grundlagen des $2 \times 2 \times 2$ -Cubes erklärt. Zuerst wird der Aufbau und die Terminologie des Würfels erläutert. Dann wird kurz auf die Unterschiede zwischen dem $2 \times 2 \times 2$ - und dem $3 \times 3 \times 3$ -Würfel eingegangen. Außerdem werden die sechs Grundzüge des Würfels definiert und erklärt. Darauf basieren alle späteren Algorithmen und die Definition der Gruppe des Würfels.

2.1 Terminologie

Diese Arbeit befasst sich mit dem $2 \times 2 \times 2$ -Zauberwürfel, deshalb sind die Terminologie und der Aufbau des Würfels Grundlagen für die weiteren Kapitel. Im Folgenden wird die Terminologie und der Aufbau des Würfels erklärt.

$2 \times 2 \times 2$ -Würfel (auch Zauberwürfel oder *Cube*)

Der Würfel setzt sich aus acht kleinen Würfeln zusammen. In Abbildung 1 ist er links verdreht und rechts im gelösten Zustand zu sehen. Der gelöste Zustand wird auch als Startkonfiguration bezeichnet. Bei der Startkonfiguration (auch Grundposition, Grundstellung) des $2 \times 2 \times 2$ -Würfels hat jede Seite 4 Farbflächen einer Farbe. Der Würfel ist dann gelöst. Bei dem verdrehten Würfel können die Steine des Würfels an anderen Positionen sein und anders ausgerichtet sein.



Abbildung 1: ungelöster und gelöster $2 \times 2 \times 2$ -Würfel

Eckstein und Farbfläche

Ein $2 \times 2 \times 2$ -Würfel besteht aus acht Ecksteinen (links in Abbildung 2), die jeweils drei Farbflächen (rechts in Abbildung 2) haben. Ein $2 \times 2 \times 2$ -Zauberwürfel hat somit 24 Farbflächen. Die verschiedenen Farbpaare, die sich im gelösten Zustand jeweils gegenüberliegen, sind weiß und gelb, rot und orange, grün und blau.



Abbildung 2: Eckstein und Farbfläche des Würfels

Seite

Der $2 \times 2 \times 2$ - und der $3 \times 3 \times 3$ -Würfel haben sechs Seiten (bestehend aus jeweils vier Farbflächen) und somit sechs Farben. Die weiße Seite wird üblicherweise als obere Seite bezeichnet. Für den Mechanismus ist die Ausrichtung des Würfels aber nicht relevant.



Abbildung 3: Seite des Würfels

$3 \times 3 \times 3$ -Würfel

Wesentlich bekannter als der $2 \times 2 \times 2$ -*Cube* ist der $3 \times 3 \times 3$ -*Cube*. Er besteht aus 26 Steinen. In Abbildung 4 ist er links ungelöst und rechts in der Startkonfiguration zu sehen.



Abbildung 4: ungelöster und gelöster $3 \times 3 \times 3$ -Würfel

Mittel- und Kantsteine

Im Gegensatz zum $2 \times 2 \times 2$ - hat der $3 \times 3 \times 3$ -Würfel Kantsteine und Mittelsteine (s. Abbildung 5). Das Besondere an den Mittelsteinen des $3 \times 3 \times 3$ -Würfels ist, dass sie Ebenendrehungen (also bei den Zügen des Würfels) nicht verändert werden. Somit ist beim $3 \times 3 \times 3$ -Würfel die obere Seite immer festzustellen: Die obere Seite hat immer das weiße Mittelstück in der Mitte.



Abbildung 5: Kant- und Mittelsteine

Beim $2 \times 2 \times 2$ -Cube gibt es keine eindeutige Oberseite. Es ist dementsprechend möglich, dass die aktuelle Würfelkonfiguration einer vermeintlich anderen Konfiguration entspricht, bei der nur eine andere Seite nach oben gehalten wird. Die Ausrichtung des gesamten Würfels ist bei dem $3 \times 3 \times 3$ -Würfel also eindeutig vorgegeben, während sie beim $2 \times 2 \times 2$ -Würfel gedreht werden kann. Das muss beachtet werden, da in dieser Arbeit die Gruppentheorie des $3 \times 3 \times 3$ -Cubes auf den $2 \times 2 \times 2$ -Würfel übertragen wird. Es wird sich dabei vor allem an *Group Theory an the Rubik's Cube* von Janet Chen [4] und *Group Theory via Rubik's Cube* von Tom Davis [5] orientiert.

2.2 Grundzüge des Würfels

Am $2 \times 2 \times 2$ -Zauberwürfel gibt es sechs verschiedene Drehseiten (auch Ebenen): oben, unten, links, rechts, vorne und hinten. In Abbildung 6 ist die obere Ebene markiert.



Abbildung 6: Ebene des Würfels

Abkürzung	Beschreibung des Zugs
U	Drehung der oberen Ebene im Uhrzeigersinn
D	Drehung der unteren Ebene im Uhrzeigersinn
R	Drehung der rechten Ebene im Uhrzeigersinn
L	Drehung der linken Ebene im Uhrzeigersinn
F	Drehung der vorderen Ebene im Uhrzeigersinn
B	Drehung der hinteren Ebene im Uhrzeigersinn

Die Kürzel stehen für *Up*, *Down*, *Right*, *Left*, *Front*, *Back*. Die entsprechende Ebene wird um 90° im Uhrzeigersinn gedreht, wenn auf diese Ebene geschaut wird. Dementsprechend wirkt es so, als würde die untere Ebene gegen den Uhrzeigersinn gedreht werden, wenn von oben auf den Würfel geschaut wird. So ergibt sich die Menge der Grundzüge: $\{U, D, R, L, F, B\}$.

Da der $2 \times 2 \times 2$ -Würfel im Gegensatz zum $3 \times 3 \times 3$ -Würfel aber immer nur zwei statt drei nebeneinanderliegende Ebenen hat, entspricht eine Drehung der oberen Ebene nach rechts, einer Drehung der unteren Ebene nach links. Auf die Rotationsmöglichkeiten des kompletten Würfels wird im Verlauf dieser Arbeit noch eingegangen. Trotzdem werden die Drehungen für jede Ebene definiert. Das ist zwar nicht minimal, dient aber der besseren Anschaulichkeit und Übertragbarkeit der Algorithmen. Eine Drehung der oberen Ebene im Uhrzeigersinn (U) beispielsweise entspricht einer Drehung der unteren Ebene im Uhrzeigersinn (D) mit anschließender Rotation des kompletten Würfels. Es ist aber übersichtlicher, jede Ebenendrehung als einzelnen Zug darzustellen.

Eine minimale Menge der Grundzüge, die nicht voneinander ableitbar sind, ist $\{U, R, F\}$. Die minimale Abbildung des Würfels wird in Kapitel 9 behandelt.

3 Mathematische Grundlagen

In diesem Kapitel werden die mathematischen Grundlagen erklärt, die für den weiteren Inhalt dieser Arbeit relevant sind. Es werden Definitionen und Beispiele von Gruppen, Untergruppen, zyklischen Gruppen, Erzeugern, Gruppenoperationen, Kommutatoren, Äquivalenzrelationen, Permutationen und Zykelschreibweise angegeben. Die genannten Definitionen basieren auf denen von Tobias Glosauer aus dem Buch *Elementar(st)e Gruppentheorie* [8]. Dort können auch detailliertere Informationen und weitere Beispiele nachlesen. Des weiteren wird der Cayleygraph erklärt.

3.1 Gruppe

Definition einer Gruppe

Die Definition einer Gruppe (G, \circ) ist Grundlage für die folgenden Kapitel.

Definition 1 (Gruppe)

Eine Menge G (auch Trägermenge) mit einer Verknüpfung \circ wird Gruppe genannt, wenn diese Bedingungen gelten:

- *Abgeschlossenheit:* $\forall a, b \in G. (a \circ b) \in G$
- *Assoziativität:* $\forall a, b, c \in G. (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$
- *Existenz eines neutralen Elements n :* $\exists n \in G. \forall a \in G. n \circ a = a \circ n = a$
- *Existenz eines inversen Elements a^{-1} :* $\forall a \in G. \exists a^{-1} \in G. a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = n$

Wenn es sich bei der Gruppe um eine kommutative Gruppe (auch abelsche Gruppe¹) handelt, muss zusätzlich noch die Eigenschaft der Kommutativität gelten:

Definition 2 (Kommutative Gruppe)

Eine Gruppe (G, \circ) ist eine kommutative Gruppe, wenn gilt:

- *Kommutativität:* $\forall a, b \in G. (a \circ b) = (b \circ a)$

¹„Zu Ehren von Niels Henrik ABEL (1802-1829); norwegischer Mathematiker und einer der Begründer der Gruppentheorie. Starb leider verarmt und deprimiert im Alter von 26 Jahren an Tuberkulose, kurz bevor er als Anerkennung für seine genialen Arbeiten eine Dozentenstelle in Berlin angeboten bekam.“ [8, S.21, Z.23]

Beispiel 2.1 (Gruppe)

Zur Veranschaulichung der Gruppendefinition werden hier die natürlichen Zahlen \mathbb{N} und die ganzen Zahlen \mathbb{Z} mit dem Operator $+$ auf die Gruppenaxiome untersucht.

- Die Abgeschlossenheit gilt sowohl für $(\mathbb{N}, +)$ als auch für $(\mathbb{Z}, +)$, da zwei natürliche Zahlen addiert immer eine natürliche Zahl ergeben. Zwei ganze Zahlen addiert ergeben immer eine ganze Zahl.

Beispielsweise sind $1 + 2 = 3$ und es gilt $1, 2, 3 \in \mathbb{N}$.

- Die Verknüpfung ist assoziativ, da das Pluszeichen so definiert ist.
- Das neutrale Element von $(\mathbb{N}, +)$ und $(\mathbb{Z}, +)$ ist 0. Es gilt also $\forall n \in \mathbb{N}. n + 0 = 0 + n = n$ (und mit \mathbb{Z} analog).

Ein Beispiel zur Veranschaulichung: $3 + 0 = 0 + 3 = 3$

- Die letzte erforderliche Eigenschaft einer Gruppe ist die Existenz eines inversen Elements. Für die Gruppe $(\mathbb{Z}, +)$ ist $-z$ das inverse Element für jedes $z \in \mathbb{Z}$. Für $(\mathbb{N}, +)$ gibt es kein inverses Element.

Anhand der oberen Axiome kann nun festgestellt werden, dass $(\mathbb{Z}, +)$ die Gruppeneigenschaften erfüllt, $(\mathbb{N}, +)$ aber nicht. $(\mathbb{Z}, +)$ ist folglich eine Gruppe und $(\mathbb{N}, +)$ nicht, da kein inverses Element existiert. Es ist aber zu beachten, dass es sich hierbei nicht um formelle Beweise, sondern um anschauliche Beschreibungen handelt. Nun kann $(\mathbb{Z}, +)$ noch auf die Kommutativität untersucht werden, um zu prüfen, ob es sich um eine abelsche Gruppe handelt.

Da der Plus-Operator als kommutativ definiert ist, ist $(\mathbb{Z}, +)$ eine abelsche Gruppe.

Beispiel 2.2 (Gruppe)

Beispiele für endliche Gruppen sind die zyklischen Gruppen der Form $\mathbb{Z}_{\text{mod } n}$. Hier wird die Menge für $n = 6$ mit dem Additionsoperator auf die Gruppeneigenschaften untersucht. Die Elemente der Menge sind dann alle ganzen Zahlen modulo 6, also $\mathbb{Z}_{\text{mod } 6} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

- Die Abgeschlossenheit gilt für $(\mathbb{Z}_{\text{mod } 6}, +)$, da alle Elemente aus \mathbb{Z} nach der Anwendung von $\text{mod } 6$ in der Menge $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ liegen.
- Die Verknüpfung ist assoziativ, da das Pluszeichen so definiert ist.
- Das neutrale Element von $(\mathbb{Z}_{\text{mod } 6}, +)$ ist 0.
- Das Inverse Element für alle $z \in \mathbb{Z}_{\text{mod } 6}$ ist definiert als $(6 - z)$. Für 1 ist es demnach 5, für 2 ist es 4 und für 3 ist das neutrale Element die 3.

$(\mathbb{Z}_{\text{mod } 6}, +)$ ist eine endliche Gruppe, da die vier Gruppeneigenschaften erfüllt sind und die Trägermenge $\mathbb{Z}_{\text{mod } 6}$ endlich ist.

Mächtigkeit einer Gruppe

Die Mächtigkeit einer Gruppe (G, \circ) wird auch Gruppenordnung genannt und sagt aus, wie viele Elemente die Menge G der Gruppe enthält.

Definition 3 (Mächtigkeit einer Gruppe)

Die Mächtigkeit einer Gruppe (G, \circ) ist der Betrag der Menge G , also $|G|$.

Wenn $|G| < \infty$, wird von einer endlichen Gruppe gesprochen.

Beispiel 3.1 (Mächtigkeit einer endlichen Gruppe)

Die Mächtigkeit der Gruppe $(\mathbb{Z}_{\text{mod } 6}, +)$ ist 6. Die Menge $\mathbb{Z}_{\text{mod } 6}$ enthält die Elemente $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ und somit ist $|\mathbb{Z}_{\text{mod } 6}| = 6$.

Beispiel 3.2 (Mächtigkeit einer unendlichen Gruppe)

Die Mächtigkeit der Gruppe $(\mathbb{Z}, +)$ ist ∞ , da $|\mathbb{Z}|$ (abzählbar) unendlich ist.

3.2 Untergruppe

Im Folgenden werden Untergruppen definiert.

Definition 4 (Untergruppe)

Eine Gruppe (H, \circ) ist eine Untergruppe einer Gruppe (G, \circ) , wenn $H \subseteq G$ gilt. Dann wird auch $(H, \circ) \leq (G, \circ)$ geschrieben.

Das Symbol \leq ist zu lesen als *ist Untergruppe von*. Nicht jede Teilmenge $H \subseteq G$ muss auch eine Gruppe sein.

Wenn (H, \circ) eine Untergruppe der Gruppe (G, \circ) ist, wird (G, \circ) auch Obergruppe von (H, \circ) genannt. Jede Gruppe (G, \circ) mit neutralem Element N hat die beiden trivialen Untergruppen (H_N, \circ) mit $H_N = \{N\}$ und (H_G, \circ) mit $H_G = G$.

Beispiel 4.1 (keine Untergruppe)

Bei dem oben genannten Beispiel mit $(\mathbb{N}, +)$ und $(\mathbb{Z}, +)$ stellt sich heraus, dass $(\mathbb{Z}, +)$ eine Gruppe ist und $(\mathbb{N}, +)$ nicht. Obwohl $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$, ist $(\mathbb{N}, +)$ *keine* Untergruppe von $(\mathbb{Z}, +)$, da die Gruppeneigenschaft *Existenz eines inversen Elements* nicht erfüllt sind.

Beispiel 4.2 (Untergruppe)

Es gilt $\mathbb{Z}_{\text{mod } 6} \subseteq \mathbb{Z}$. Da sowohl $(\mathbb{Z}, +)$, als auch $(\mathbb{Z}_{\text{mod } 6}, +)$ Gruppen sind, ist $(\mathbb{Z}_{\text{mod } 6}, +)$ eine Untergruppe von $(\mathbb{Z}, +)$. $(\mathbb{Z}_{\text{mod } 6}, +)$ und $(\mathbb{Z}, +)$ wurden im Abschnitt über Gruppen auf die Gruppeneigenschaften untersucht.

3.3 Erzeuger und zyklische Gruppe

Definition 5 (Erzeuger)

Sei die Menge $M \subseteq G$ eine nicht leere Teilmenge der Trägermenge einer Gruppe (G, \circ) . Dann wird die Untergruppe (M, \circ) von M erzeugt und ist die kleinste Untergruppe von (G, \circ) , für die $M \subseteq G$ gilt. (M, \circ) wird dann Erzeugnis von M genannt und die Elemente aus M sind die Erzeuger der Untergruppe (M, \circ) .

Wenn (M, \circ) durch M erzeugt wird, ist dann eine M enthaltende Untergruppe.

Eine zyklische Gruppe ist eine Gruppe, die von nur einem Element erzeugt wird. Sie besteht nur aus Potenzen dieses Elementes

Definition 6 (Zyklische Gruppe)

Sei (G, \circ) eine Gruppe. (G, \circ) wird zyklische Gruppe genannt, wenn es ein Element $a \in G$ gibt, das jedes Element in G erzeugt. Dann schreibt man auch:

$$\langle a \rangle := \{a^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

Beispiel 6.1 (Erzeuger und zyklische Gruppe)

Ein Beispiel für Erzeuger findet sich anhand der Gruppe der ganzen Zahlen $(\mathbb{Z}, +)$ und der Addition als Verknüpfung, die bereits als Beispiel der Gruppe beschrieben wurde.

Die Operationen sind hier die Addition und der Übergang von einer Zahl z zu der negativen Zahl $-z$.

Ein Erzeuger dieser Gruppe ist die einelementige Menge $M = \{1\}$. Jede positive Zahl n lässt sich durch die n -fache Addition von 1 erzeugen und jede negative Zahl durch die Addition von $((-1) + (-1) \dots)$.

3.4 Cayleygraph

Ein Cayleygraph ist ein Graph, der die Struktur einer Gruppe beschreibt. Er hängt von der Menge der Erzeuger ab und dient dazu, Gruppen bildlich darzustellen. Es handelt sich dabei um einen Graphen mit Knoten, die die verschiedenen Gruppenelemente darstellen.

Pfeile zeigen von einem Element zum nächsten, wenn dies durch einen der Erzeuger erreicht werden kann. [13]

Beispiel (Cayleygraph)

In Abbildung 7 ist den Cayleygraphen der Gruppe $(\mathbb{Z}_{\text{mod } 6}, +)$ mit dem Erzeuger 1 zu sehen.



Abbildung 7: Cayleygraph von $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +)$ mit Erzeuger 1

3.5 Gruppenoperation

Es gibt Links- und Rechtsoperationen auf Gruppen. Da in dieser Arbeit nur Rechtsoperationen genutzt werden, beschränkt sich die Definition darauf.

Definition 7 (Rechtsoperation)

Eine Rechtsoperation einer Gruppe (G, \circ) auf einer Menge M ist eine Verknüpfung mit $m \in M$, e als neutralem Element von (G, \circ) und $g, h \in G$:

$$\cdot : M \times G \rightarrow M \quad (m, g) \mapsto m \cdot g$$

Die folgenden beiden Eigenschaften gelten:

$$\begin{aligned} m \cdot e &= m \\ m \cdot (g \circ h) &= (m \cdot g) \cdot h \end{aligned}$$

Dann operiert G von rechts auf M .

Beispiel 7.1 (Rechtsoperation)

Als Beispiel werden die Gruppe $(\mathbb{Z}_{\text{mod } 6}, +)$ und die Menge \mathbb{Z} mit der Verknüpfung $-$

betrachtet. Die folgenden Eigenschaften gelten, da $(\mathbb{Z}_{\text{mod } 6}, +)$ eine Rechtsoperation auf \mathbb{Z} ist, mit $z \in \mathbb{Z}$ und $g, h \in \mathbb{Z}_{\text{mod } 6}$.

- Die Eigenschaft $z - 0 = z$ ist erfüllt. 0 ist das neutrale Element von $(\mathbb{Z}_{\text{mod } 6}, +)$.
- Da sich $z - (g + h)$ zu $z - g - h$ umformen lässt, gilt $z - (g + h) = (z - g) - h$

Demnach operiert $(\mathbb{Z}_{\text{mod } 6}, +)$ mit $-$ von rechts auf \mathbb{Z} .

3.6 Kommutator

Die Komplexität eines Kommutators sagt etwas darüber aus, wie stark zwei Elemente einer Gruppe das Kommutativgesetz verletzen. Bei kommutativen Gruppen ist der Kommutator zweier Elemente das neutrale Element der Gruppe [5]. Man sagt dann, dass die beiden Elemente kommutieren.

Definition 8 (Kommutator)

Als Kommutator von zwei Elementen a, b einer Gruppe (G, \circ) bezeichnet man $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$.

Beispiel 8.1 (Kommutator)

$[5, 7]$ ist ein Kommutator der Gruppe $(\mathbb{Z}, +)$. $[5, 7]$ ist das Gleiche wie $5 + 7 - 5 - 7 = 0$ und 0 ist das neutrale Element der Gruppe. Die Gruppe $(\mathbb{Z}, +)$ ist kommutativ, deshalb ist der Kommutator von allen Elementen der Gruppe 0.

3.7 Äquivalenzrelation und -klasse

Äquivalenzrelation

Mit Relationen lassen sich Beziehungen von Elementen einer Menge zueinander beschreiben.

Definition 9 (Äquivalenzrelation)

Eine Relation $\sim \subseteq A \times A$ heißt Äquivalenzrelation auf A , wenn für alle $x, y, z \in A$ die drei folgenden Eigenschaften gelten: Reflexivität, Symmetrie, Transitivität.

Hier wird $x \sim y$ als x ist äquivalent zu y gelesen. Im Folgenden werden noch die Bedeutungen von Reflexivität, Symmetrie und Transitivität aufgelistet:

$x \sim x$	(Reflexivität)
Aus $(x \sim y)$ folgt $(y \sim x)$.	(Symmetrie)
Aus $(x \sim y)$ und $(y \sim z)$ folgt $(x \sim z)$.	(Transitivität)

Beispiel 9.1 (Relation)

Für die Menge $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ wird die Relation $x < y$ betrachtet:

Bei der Relation $<$ handelt es sich nicht um eine Äquivalenzrelation, da die Eigenschaft der Reflexivität nicht gilt: $1 \not\sim 1$. Auch die Symmetrie gilt nicht.

Beispiel 9.2 (Äquivalenzrelation)

Für die Menge $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ wird die Relation $x = y$ betrachtet:

Bei der Relation $=$ gilt die Reflexivität für alle Elemente, da die Gleichheit reflexiv ist. Auch die Symmetrie und die Transitivität gelten für die Gleichheit. Somit ist es eine Äquivalenzrelation.

Beispiel 9.3 (Äquivalenzrelation)

Für die Menge $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ wird die Relation $x \sim_+ y$ betrachtet, die als $|x| = |y|$ definiert ist:

Bei der Relation \sim_+ gilt die Reflexivität für alle Elemente, da die Gleichheit reflexiv ist. Auch die Symmetrie und die Transitivität gelten für die Gleichheit mit Betrag. Somit ist es eine Äquivalenzrelation.

Äquivalenzklasse und Faktormenge

Äquivalenzklassen sind Mengen, die äquivalente Elemente enthalten.

Definition 10 (Äquivalenzklassen)

Sei \sim eine Äquivalenzrelation auf der Menge M und $x \in M$. Die Äquivalenzklasse von x wird dann als $[x]$ geschrieben und ist definiert als $\{y \in M \mid y \sim x\} \subseteq M$.

Jedes Element der Äquivalenzklasse $[x]$ heißt *Repräsentant von $[x]$* . Alle Repräsentanten von $[x]$ sind äquivalent zu x .

Beispiel 10.1 (Äquivalenzklassen)

Es wird die Äquivalenzrelation $x \sim_+ y$, die als $|x| = |y|$ definiert ist, auf der Menge $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ betrachtet. Die Äquivalenzklasse von $[1]$ beispielsweise ist dann $[1] = \{x \in A \mid x \sim_+ 1\}$. $[1]$ enthält dann die Elemente 1 und -1 .

Definition 11 (Faktormenge)

Die Faktormenge M/\sim der Menge M bezüglich der Äquivalenzrelation \sim besteht aus allen Äquivalenzklassen und ist definiert als $\{[x] \mid x \in M\}$.

M/\sim wird als M modulo \sim gelesen. Die Elemente von M/\sim sind Äquivalenzklassen.

Beispiel 11.1 (Faktormenge)

Es wird wieder die Äquivalenzrelation $x \sim_+ y$, die als $|x| = |y|$ definiert ist, auf der Menge $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ betrachtet.

Die Faktormenge A/\sim_+ enthält dann die Äquivalenzklassen $[1]$, $[2]$, $[3]$ und $[0]$. A/\sim_+ also vier Elemente, während A sieben Elemente hat.

3.8 Permutationen und Zykelschreibweise

Unter einer Permutation versteht man die Reihenfolge von Objekte.

Definition 12 (Permutation)

Bei einer n -elementigen Menge M ist eine (n -stellige) Permutation ist eine bijektive Abbildung $\pi : M \rightarrow M$.

Die Zykelschreibweise ist eine kurze Schreibweise für eine Permutation. Die Zykelschreibweise wird nun anhand eines Beispiels erklärt. Die Definition geht über den Rahmen dieser Arbeit hinaus, sie kann aber in dem Buch *Elementar(st)e Gruppentheorie* von Tobias Glosauer [8] nachgelesen werden.

Beispiel 12.1 (Permutationen und Zykelschreibweise)

Sei M eine Menge mit fünf Objekten: 1, 2, 3, 4 und 5. Nun können diese Objekte in fünf Plätzen arrangiert werden. Die Plätze werden als 1 bis 5 nummeriert. Dann kann eine Funktion $\pi : \{1, 2, 3, 4, 5\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5\}$ definiert werden, bei der $\pi(i)$ die Zahl ist, die in Slot i liegt. Wenn die Zahlen in der Reihenfolge 5 1 4 3 2 amgeordnet werden, ist 5 auf Platz 1, 1 auf Platz 2, usw. Das ist auch in der folgenden Tabelle zu sehen:

Platz	1	2	3	4	5
Zahl	5	1	4	3	2

Die Funktion π sieht für diese Permutation (s. Tabelle) so aus:

$$\pi(1) = 5 \quad \pi(2) = 1 \quad \pi(3) = 4 \quad \pi(4) = 3 \quad \pi(5) = 2$$

π kann auch als eindeutige Zuordnung der Form $i \mapsto j$ (für $\pi(i) = j$) geschrieben werden [4]:

$$1 \mapsto 5 \qquad 2 \mapsto 1 \qquad 3 \mapsto 4 \qquad 4 \mapsto 3 \qquad 5 \mapsto 2$$

Das kann auch in der Zykelschreibweise geschrieben werden:

$$\pi = (1 \ 5 \ 2) \ (3 \ 4)$$

Das wird so gelesen: Die 1 geht auf die 5, die 5 geht auf die 2, die 2 geht wieder auf die 1. Damit ist der erste Zykel geschlossen. Beim zweiten Zykel geht die 3 auf die 4 und die 4 auf die 3. π besteht somit aus zwei Zykeln: ein Zykel hat die Länge drei und der andere die Länge zwei. Die Zykeln sind auch in Abbildung 8 zu sehen.



Abbildung 8: Zykel $\pi = (1 \ 5 \ 2) \ (3 \ 4)$

Bei der Zykelschreibweise ist die Reihenfolge der Elemente ausschlaggebend. Beispielsweise ist $(1 \ 2 \ 3)$ nicht das gleiche wie $(1 \ 3 \ 2)$.

Die Identitätspermutation wird als $\pi = 1$ geschrieben. Dabei werden alle Elemente auf sich selbst abgebildet und die Zykeln bleiben somit unverändert.

Definition 13 (Anzahl der Permutationen)

Für n verschiedene Objekte ist die Anzahl der Permutationen $n!$.

Beispiel 13.1 (Anzahl der Permutationen)

Sei $M = \{1 \ 2 \ 3\}$ eine Menge mit drei Elementen. Für das erste Objekt der Permutation gibt es 3 Möglichkeiten: 1, 2 oder 3. Für das zweite Objekt dann nur noch 2 Möglichkeiten (da eine ja bereits im ersten Schritt eliminiert wurde) und danach nur eine. Es gibt dann also $3 \cdot 2 \cdot 1 = 3! = 6$ Permutationsmöglichkeiten.

Definition 14 (Ordnung von Permutationen)

Die Ordnung einer Permutation ist das kleinste gemeinsame Vielfache der Zykellängen.

Die Ordnung einer Permutation ist die kleinste Zahl $n \in \mathbb{N}$, so dass nach n -facher Ausführung der Permutation die identische Permutation heraus kommt. Man kann die Ordnung einer Permutation π als $\text{ord}(\pi)$ schreiben.

Beispiel 14.1 (Ordnung von Permutationen)

Sei die Permutation $\pi = (1\ 2\ 3)$. Die Ordnung von π ist 3, da π aus nur einem 3-elementigen Zykel besteht. $\pi \cdot \pi \cdot \pi = (1\ 2\ 3) \cdot (1\ 2\ 3) \cdot (1\ 2\ 3) = (1\ 2\ 3)$

Beispiel 14.2 (Ordnung von Permutationen)

Sei die Permutation $\pi = (1\ 5\ 2)\ (3\ 4)$. Das kleinste gemeinsame Vielfache von 3 und 2 ist 6. Somit hat π die Ordnung 6.

3.9 Parität

Definition 15 (Parität)

Eine Zahl $n \in \mathbb{Z}$ ist gerade, wenn sie ganzzahlig ohne Rest durch zwei teilbar ist. Ansonsten ist sie ungerade. Die Menge der ganzen Zahlen wird dadurch in zwei Teilmengen zerlegt. Das nennt man Parität.

Ungerade Zahlen ergeben bei der Division durch 2 immer einen Rest von 1. Gerade Zahlen haben dabei den Rest 0.

Beispiel 15.1 (Parität)

Sei $M = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Die Teilmenge $\{-2, 0, 2\}$ enthält nur gerade Elemente und die Teilmenge $\{-1, 1\}$ nur ungerade Elemente.

4 Konfiguration des Würfels

Um mit dem Würfel zu arbeiten, muss festgestellt werden können, in welcher Position er sich befindet. Deshalb wird in diesem Kapitel die Konfiguration des Würfels definiert, bevor der Würfel in Kapitel 5 als Gruppe dargestellt wird. Eine Würfelkonfiguration setzt sich aus zwei Parametern zusammen:

- Position der Ecksteine (angegeben als σ)
- Ausrichtung der Ecksteine (angegeben als x)

Die Konfiguration des Würfels kann als 2-Tupel geschrieben werden: (σ, x) . In diesem Kapitel wird die Position der Ecksteine als σ und die Ausrichtung der Ecksteine als Vektor x erklärt. Außerdem wird die Veränderung der Würfelkonfiguration an einem Beispielzug schrittweise erklärt.

4.1 Positionen der Steine im Würfel

Die Menge der bijektiven Funktionen σ (für jede Ebenenrotation) stellt Übergänge der Würfelsteine als Funktion dar. Die Übergänge beschreiben die Positionsänderung der Steine bei einem Zug. σ bildet jede der Würfelpositionen auf die neue Position ab. Es handelt sich dabei um eine Permutation. Permutationen wurden in Abschnitt 3.8 erklärt.

Die Einteilung der Würfelpositionen sind in den Abbildungen 9 und 10 zu sehen. Die einzelnen Steinpositionen werden mit den Kürzeln benannt, die *up*, *down*, *right*, *left*, *front* und *back* beschreiben.



Abbildung 9: Namen der Steinpositionen im Würfel



Abbildung 10: aufgeklappter Würfel mit Namen der Steinpositionen

Jeder Steinposition wird ein einzigartiger Name zugeordnet, um sich darauf zu beziehen. Dabei wird davon ausgegangen, dass die weiße Seite in der Startkonfiguration oben ist und die rote Seite vorne. Die Steinposition werden mit 3 Buchstaben beschrieben, die aus den Kürzeln u , d , r , l , f , b bestehen. Diese Kürzel stehen für *up*, *down*, *right*, *left*, *front*, *back*. Somit heißt die Steinposition oben links beispielsweise *ulf* (für *up*, *left* und *front*). Jeder Stein bekommt auch einen eindeutigen Namen, der seiner Steinposition im gelösten Zustand entspricht. Beispielsweise liegt der Stein *ulf* im gelösten Zustand an der Steinposition *ulf*.

Nun wird zur Veranschaulichung die Permutation σ_U für eine Drehung der oberen Ebene um 90° im Uhrzeigersinn definiert. Grundlagen zu Permutationen und der Zykelschreibweise wurden in Abschnitt 3.8 erklärt. Hier wird σ_U ausführlich beschrieben und verschiedene Schreibweisen angegeben. Die weiteren Drehungen sind analog definiert. Die Drehung der oberen Ebene ist in Abbildung 11 grafisch dargestellt.



Abbildung 11: Steinpositionen nach Zug U

Die Funktion σ_U sieht dann so aus:

$$\begin{array}{llll} \sigma_U(ulf) = ulb & \sigma_U(ulb) = urb & \sigma_U(urb) = urf & \sigma_U(urf) = ulf \\ \sigma_U(dlf) = dlb & \sigma_U(dlb) = drb & \sigma_U(drb) = drf & \sigma_U(drf) = dlf \end{array}$$

Das kann auch in der Form $i \mapsto j$ geschrieben werden:

$$\begin{array}{llll} ulf \mapsto ulb & ulb \mapsto urb & urb \mapsto urf & urf \mapsto ulf \\ dlf \mapsto dlb & dlb \mapsto drb & drb \mapsto drf & drf \mapsto dlf \end{array}$$

Daraus entstehen folgende Zyklen: $\sigma_U = (ulf\ ulb\ urb\ urf)(dlf)(dlb)(drb)(drf)$

Die Zyklen mit nur einem Element müssen nicht aufgeschrieben werden. Dann ergibt sich $\sigma_U = (ulf\ ulb\ urb\ urf)$, was den Zyklus beschreibt, in dem die Steine rotiert werden, wenn die obere Ebene gedreht wird.

Die Drehungen aller Ebenen können durch folgende Zyklen beschrieben werden:

$$\begin{aligned} \sigma_U &= (ulf\ ulb\ urb\ urf) \\ \sigma_D &= (dlf\ drf\ drb\ dlb) \\ \sigma_F &= (ulf\ urf\ drf\ dlf) \\ \sigma_B &= (ulb\ dlb\ drb\ urb) \\ \sigma_L &= (ulb\ ulf\ dlf\ dlb) \\ \sigma_R &= (urb\ drb\ drf\ urf) \end{aligned}$$

Die Indizes an den Funktionen σ stehen für die verschiedenen Grundzüge des Würfels. Diese wurden in Abschnitt 2.2 erklärt.

Die Identitätspermutation ist als $\sigma = 1$ geschrieben.

4.2 Ausrichtung der Steine

Der $2 \times 2 \times 2$ -Würfel besteht aus 8 Ecksteinen, die jeweils 3 Farbflächen haben. Somit hat jeder Stein 3 mögliche Ausrichtungen. Um die Ausrichtung der Steine zu erkennen, bekommen die Würfelpositionen an einer Farbfläche einer Nummer zugeordnet. Dafür werden die weißen und die gelben Seiten markiert und nummeriert. Auf diese Nummern

wird sich als x_i mit $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ bezogen - mit x_1 als Position 1, x_2 als Position 2, usw.

Außerdem bekommt jeder Stein an jeder Farbfläche eine Zahlenzuordnung. Da jeder Stein 3 Ausrichtungen haben kann, werden die Farbflächen mit 0, 1 und 2 nummeriert. Die Nummerierung beginnt mit der weißen bzw. gelben Fläche bei 0 und zählt dann im Uhrzeigersinn die Flächen. In der Startkonfiguration sind alle $x_i = 0$, der Vektor x ist dann $(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$. Das wird kurz als $x = 0$ geschrieben.



Abbildung 12: ausgeklappter Würfel mit Markierungen für x_i (links) und Farbflächennummerierungen (rechts)

In den folgenden Absätzen wird der Zug R zur Veranschaulichung ausgeführt (s. Abbildung 13) und die Veränderung Farbflächennummerierung dargestellt. R ist eine Rotation der rechten Ebene um 90° im Uhrzeigersinn. Die Kennzeichnungen x_{1-8} bleiben an der gleichen Position, die Nummerierungen der Farbflächen ändern sich mit Rotation der Ebene und ermöglichen so eine Zuordnung der Ecksteinausrichtung. Die linke Seite der Würfels wird dabei nicht beeinflusst. Deshalb sind die Flächen an den Positionen x_1, x_3, x_5, x_7 alle 0, da sie sich in der linken Hälfte des Würfels befinden. Die anderen Positionen von x zeigen nun aber andere Farbflächen:

$$x_2 = 2 \quad x_4 = 1 \quad x_6 = 1 \quad x_8 = 2$$

Daher gilt $x = (0, 2, 0, 1, 0, 1, 0, 2)$ nach dem Zug R . Das ist auch in Abbildung 13 zu sehen.

$$\Gamma_{R_6}((x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8)) = \begin{cases} (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, 1, x_7, x_8) & \text{falls } x_2 = 0 \\ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, 2, x_7, x_8) & \text{falls } x_2 = 1 \\ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, 0, x_7, x_8) & \text{falls } x_2 = 2 \end{cases}$$

$$\Gamma_{R_8}((x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8)) = \begin{cases} (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, 2) & \text{falls } x_6 = 0 \\ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, 0) & \text{falls } x_6 = 1 \\ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, 1) & \text{falls } x_6 = 2 \end{cases}$$

Es gibt für den Zug R acht Funktionen Γ_R – eine für jeden Vektoreintrag. Die Funktionen Γ_{R_2} und Γ_{R_8} verändern verschiedene Vektoreinträge auf die gleiche Weise, die Funktionen Γ_{R_4} und Γ_{R_6} ebenfalls. Auch die Funktionen $\Gamma_{R_1}, \Gamma_{R_3}, \Gamma_{R_5}$ und Γ_{R_7} sind analog. Da diese Funktionen gleich aufgebaut sind, reichen drei verschiedene Funktionen für die Veränderung von x nach dem Zug R aus.

$$g(x) = \begin{cases} 2 & \text{falls } x = 0 \\ 0 & \text{falls } x = 1 \\ 1 & \text{falls } x = 2 \end{cases} \quad h(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x = 0 \\ 2 & \text{falls } x = 1 \\ 0 & \text{falls } x = 2 \end{cases} \quad i(x) = x$$

Die Funktionen g und h können auch ohne Fallunterscheidung mit modulo 3 geschrieben werden:

$$g(x) = (x + 2) \bmod 3 \quad h(x) = (x + 1) \bmod 3$$

Da i die Identitätsfunktion ist, kann diese weggelassen werden. Mit den Funktionen g und h lassen sich die Ausrichtungen der Steine nach jedem Zug bestimmen. So wird der Vektor x nach dem Zug R durch die Funktion γ_R verändert, die sich aus den Funktionen $\Gamma_{R_{1-8}}$ zusammensetzt:

$$\begin{aligned} \gamma_R((x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8)) \\ = (x_1, g(x_4), x_3, h(x_8), x_5, h(x_2), x_7, g(x_6)) \end{aligned}$$

Analog dazu gibt es für jeden der sechs Grundzüge eine Funktion γ , die die Veränderung der Steinausrichtung realisieren:

$$\begin{aligned}\gamma_U &((x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8)) \\ &= (x_3, x_1, x_4, x_2, x_5, x_6, x_7, x_8)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma_D &((x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8)) \\ &= (x_1, x_2, x_3, x_4, x_6, x_8, x_5, x_7)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma_R &((x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8)) \\ &= (x_1, g(x_4), x_3, h(x_8), x_5, h(x_2), x_7, g(x_6))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma_L &((x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8)) \\ &= ((h(x_5), x_2, g(x_1), x_4, g(x_7), x_6, h(x_3), x_8))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma_F &((x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8)) \\ &= (x_1, x_2, h(x_7), g(x_3), x_5, x_6, g(x_8), h(x_4))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma_B &((x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8)) \\ &= (g(x_2), h(x_6), x_3, x_4, h(x_1), g(x_5), x_7, x_8)\end{aligned}$$

Das oben genannte Beispiel des Zuges R wird nun schrittweise mithilfe von γ_R berechnet werden. Dafür befindet sich der Würfel in der Startkonfiguration ($x = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$). Wenn der Zug R ausgeführt wird, wird $\gamma_R((0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0))$ berechnet:

$$\begin{aligned}\gamma_R &((0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)) \\ &= (0, g(0), 0, h(0), 0, h(0), 0, g(0)) \\ &= (0, 2, 0, 1, 0, 1, 0, 2)\end{aligned}$$

Der Vektor x sieht nach dem Zug R von der Startkonfiguration ausgehend so aus: $(0, 2, 0, 1, 0, 1, 0, 2)$.

4.3 Züge ausführen

Eine Würfelkonfiguration $C = (\sigma, x)$ wird durch das Ausführen eines Zuges verändert. Die Permutation σ repräsentiert dann die neue Position der Steine im Würfel und der Vektor x die Ausrichtung der Steine. Ein Zug Z kann dabei einer der Grundzüge (U, D, R, L, F, B) oder eine Aneinanderreihung von Grundzügen sein. Wird ein Zug Z auf einer Würfelkonfiguration C ausgeführt, wird das als $C \cdot Z$ geschrieben. Das Ergebnis von $C \cdot Z$ ist dann eine neue Folgekonfiguration C' .

Die Startkonfiguration $C = (1, 0)$ wird im folgenden Beispiel durch das dreifache Ausführen des Zuges $LLFF$ ($LLFF^3 = LLFFLLFFLLFF$) schrittweise verändert. Die Position der Steine – dargestellt durch σ – verändert sich nach dem Ausführen von $LLFF$ wie folgt:

Zug	ulb	urb	ulf	urf	dlb	drb	dlf	drf
L	ulf	urb	dlf	urf	ulb	drb	dlb	drf
L	dlf	urb	dlb	urf	ulf	drb	ulb	drf
F	ulf	urb	dlb	drf	urf	drb	ulb	dlf
F	urf	urb	dlb	dlf	drf	drb	ulb	ulf

Der neue Vektor x wird nach dem Teilzug $LLFF$ durch $\gamma_F(\gamma_F(\gamma_L(\gamma_L(x))))$ berechnet.

$$\begin{aligned}
\gamma_F(\gamma_F(\gamma_L(\gamma_L(x)))) &\Rightarrow \gamma_F(\gamma_F(\gamma_L(\gamma_L((0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)))) \\
&= \gamma_F(\gamma_F(\gamma_L((h(0), 0, g(0), 0, g(0), 0, h(0), 0)))) \\
&= \gamma_F(\gamma_F(\gamma_L((1, 0, 2, 0, 2, 0, 1, 0)))) \\
&= \gamma_F(\gamma_F((h(1), 0, g(2), 0, g(2), 0, h(1), 0))) \\
&= \gamma_F(\gamma_F((0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0))) \\
&= \gamma_F((0, 0, h(0), g(0), 0, 0, g(0), h(0))) \\
&= \gamma_F((0, 0, 1, 2, 0, 0, 2, 1)) \\
&= (0, 0, h(1), g(2), 0, 0, g(2), h(1)) \\
&= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)
\end{aligned}$$

Aus dieser Rechnung geht hervor, dass der Vektor nach Ausführen der Drehung L $(1, 0, 2, 0, 2, 0, 1, 0)$ ist. Wird L dann nochmal ausgeführt, so ist der Vektor dann wieder $(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$. Der Würfel ist dann aber nicht gelöst, da die Position der Steine

(σ) verändert ist. Wird nun die Drehung F zweimal ausgeführt, geht der Vektor über $(0, 0, 1, 2, 0, 0, 2, 1)$ wieder in $(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$ über.

Die Konfiguration C' nach dem Teilzug $LLFF$ ist somit

$$C' = ((\text{ulb urf dlf})(\text{dlb drf ulf}), (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0))$$

oder kurz $C' = ((\text{ulb urf dlf})(\text{dlb drf ulf}), 0)$.

Wenn der Zug $LLFF$ nun nochmal ausgeführt wird, verändert der Vektor x sich wieder auf die gleiche Weise und ist dann wieder $(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$. Die Permutation σ der Position ergibt nach dem zweiten Ausführen von $LLFF$ $(\text{urf dlf ulb})(\text{drf ulf dlb})$. Die Folgekonfiguration nach dem zweiten Ausführen von $LLFF$ ist somit

$$C'' = ((\text{dlf urf ulb})(\text{ulf drf dlb}), (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)).$$

Das dritte Ausführen von $LLFF$ bringt den Würfel wieder in die Ausgangskonfiguration. Die Permutationsfunktion ist dann 1 (die Identität) und der Vektor x ist wieder $(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$. Die Konfiguration ist dann

$$C''' = (1, 0).$$

Daraus folgt, dass der Zug $LLFF$ den Würfel nach dreifacher Ausführung wieder in den Ausgangszustand bringt. Darauf wird genauer in Abschnitt 5.7 eingegangen.

5 Würfel als Gruppe

In diesem Kapitel wird die Gruppe des $3 \times 3 \times 3$ -*Cubes* auf den $2 \times 2 \times 2$ -*Cube* übertragen. Dafür wird die Gruppe des $2 \times 2 \times 2$ -Würfels auf die vier Gruppenaxiome (Abgeschlossenheit, Assoziativität, Existenz eines neutralen Elements und Existenz eines inversen Elements) untersucht. Außerdem wird geprüft, ob es sich um eine Abelsche Gruppe handelt und dafür die Kommutativität untersucht. Auf der Gruppe des $2 \times 2 \times 2$ -Würfels wird dann eine Gruppenoperation für das Ausführen von Zügen definiert.

Vorher wird die Rotation des Würfels und die Gleichheit zweier Züge durch Äquivalenzrelationen und Äquivalenzklassen realisiert. Das ist notwendig, damit gleiche Züge in der Trägermenge der Gruppe nicht doppelt vorkommen. Gleiche Züge werden dann durch eine Äquivalenzklasse repräsentiert. Es werden auch die Ordnung von Permutationen und Zügen und die Äquivalenz von Zügen berechnet.

5.1 Gleichheit von Zügen

Zwei Züge Z_1 und $Z_2 \in A_Z$ gelten als gleich, wenn sie mit gleicher Ausgangskonfiguration des Würfels die gleiche Zielkonfiguration hervorrufen. A_Z ist die Menge aller Züge. Ein Zug besteht aus einem oder mehreren Grundzügen (U, D, F, B, L, R). Das mehrfache Ausführen von Zügen kann mit der Exponentenschreibweise dargestellt werden. So wird beispielsweise RR (zwei Drehungen der rechten Ebene im Uhrzeigersinn) auch als R^2 geschrieben.

Ein Beispiel für die Gleichheit von Zügen wird nun genauer betrachtet: Wird eine Ebene vier mal hintereinander gedreht, ist der Würfel wieder in der vorherigen Position. Wenn der Würfel in einer Konfiguration $C = (\sigma, x)$ ist und ein Zug $Z \in \{U^4, D^4, R^4, L^4, F^4, B^4\}$ ausgeführt wird, ist die Folgekonfiguration wieder C .

$$C \cdot Z = C \text{ mit } Z \in \{U^4, D^4, R^4, L^4, F^4, B^4\} \text{ und } C \text{ als Würfelkonfiguration}$$

Das bedeutet, dass jeder Zug $Z = Z_1 Z_2 Z_3$ mit $Z_2 \in \{U^4, D^4, R^4, L^4, F^4, B^4\}$ die gleiche Konfiguration wie der Zug $Z_1 Z_3$ hervorruft. Der Exponent kann in diesem Fall *modulo* 4 gerechnet, da vier Drehungen einer Ebene nacheinander wieder zum Startzustand führen. Es gilt folglich:

$$\forall Z \in \{U, D, F, B, L, R\}. n \in \mathbb{N} . Z^n = Z^{n \bmod 4}$$

Dabei gilt für $n \bmod 4 = 0$ dann $Z^n = Z^{n \bmod 4} = Z^0$. Z^0 repräsentiert dabei einen leeren Zug. Das entspricht keiner Veränderung der Folgekonfiguration des Würfels.

Da die Anzahl der möglichen Züge im Gegensatz zur Anzahl der validen Würfelkonfigurationen (s. Kapitel 7) unendlich ist, gibt es viele Fälle, in denen zwei Züge die gleiche Folgekonfiguration hervorrufen und somit als gleich gelten. Dies wird im weiteren Verlauf dieser Arbeit durch Äquivalenzklassen realisiert. Die Berechnung aller gleichen Züge überschreitet den Rahmen dieser Arbeit – eine Realisierungsmöglichkeit dafür wären Termersetzungssysteme (*Rewriting*).

5.2 Rotation des Würfels

Der $2 \times 2 \times 2$ -Würfel hat im Gegensatz zum $3 \times 3 \times 3$ -Würfel keine Mittelsteine, die fest darüber entscheiden, welche Seite die obere Seite ist. Der $2 \times 2 \times 2$ -Würfel kann daher im gelösten Zustand sein, ohne dass die obere Seite weiß ist. Deshalb muss es möglich sein, den Würfel ganz zu rotieren. Das soll im nächsten Abschnitt als Äquivalenzrelationen umgesetzt werden. Dafür werden die Rotationsmöglichkeiten des Würfels in diesem Abschnitt definiert. Um die Drehungen zu benennen, werden die Achsen des Würfels als x , y und z definiert. Das ist in Abbildung 14 zu sehen.



Abbildung 14: Würfel mit x , y und z -Achsen

Nun können für die möglichen Rotationen des Würfels Nachfolgekonfigurationen festgelegt werden. Dazu werden zuerst die einzelnen Rotationen des Würfels benannt.

Abkürzung	Beschreibung der Rotation
Z_l	Rotation des Würfels um die z -Achse nach links (gegen den Uhrzeigersinn)
Z_r	Rotation des Würfels um die z -Achse nach rechts (im Uhrzeigersinn)
Y_l	Rotation des Würfels um die y -Achse nach links (gegen den Uhrzeigersinn)
Y_r	Rotation des Würfels um die y -Achse nach rechts (im Uhrzeigersinn)
X_l	Rotation des Würfels um die x -Achse nach links (gegen den Uhrzeigersinn)
X_r	Rotation des Würfels um die x -Achse nach rechts (im Uhrzeigersinn)
N_R	keine Rotation des Würfels

Die Rotationen sind nicht minimal definiert, da beispielsweise Z_l das gleiche wie Z_r^3 ist. Dies dient der Anschaulichkeit.

Die Steine werden durch eine Rotation alle an einen neuen Platz gebracht. Anders als bei der Drehung der Ebenen, wo nur einige Steine die Position ändern, ändern hier alle Steine die Position, ohne dass die Würfelkonfiguration verändert wird, da er komplett gedreht wird.

Anhand der Rotation Z_r , also einer Rotation des kompletten Würfels um die z -Achse um 90° im Uhrzeigersinn, wird nun die Veränderung der Würfelpositionen gezeigt. Die Rotation Z_r ist in Abbildung 15 zu sehen.



Abbildung 15: Würfel nach Rotation um z -Achse

Da bei den Rotationen alle Steine die Position wechseln, muss es demnach 8 Funktionen δ geben, also für jeden Eckstein eine Funktion δ :

$$\begin{array}{llll}
\delta_{Z_r}(urf) = ulf & \delta_{Z_r}(ulf) = ulb & \delta_{Z_r}(ulb) = urb & \delta_{Z_r}(urb) = urf \\
\delta_{Z_r}(drf) = dlf & \delta_{Z_r}(dlf) = dlb & \delta_{Z_r}(dlb) = drb & \delta_{Z_r}(drb) = drf
\end{array}$$

Das kann nun in der Form $i \mapsto j$ geschrieben werden:

$$\begin{array}{cccc} urf \mapsto ulf & ulf \mapsto ulb & ulb \mapsto urb & urb \mapsto urf \\ drf \mapsto dlf & dlf \mapsto dlb & dlb \mapsto drb & drb \mapsto drf \end{array}$$

In der Zykel-Schreibweise sieht die Veränderung der Steinpositionen dann so aus:

$$\delta_{Z_r} = (urf\ ulf\ ulb\ urb\)(drf\ dlf\ dlb\ drb\)$$

Alle Funktionen der Rotationen sehen in Zykel-Schreibweise folgendermaßen aus:

$$\begin{aligned} \delta_{Z_r} &= (ulf\ ulb\ urb\ urf\)(dlf\ dlb\ drb\ drf\) \\ \delta_{Z_l} &= (ulf\ urf\ urb\ ulb\)(dlf\ drf\ drb\ dlb\) \\ \delta_{Y_r} &= (ulf\ ulb\ dlb\ dlf\)(urf\ urb\ drb\ drf\) \\ \delta_{Y_l} &= (ulf\ dlf\ dlb\ ulb\)(urf\ drf\ drb\ urb\) \\ \delta_{X_r} &= (ulf\ urf\ drf\ dlf\)(urb\ ulb\ dlb\ drb\) \\ \delta_{X_l} &= (ulf\ dlf\ drf\ urf\)(urb\ ulb\ dlb\ drb\) \end{aligned}$$

Da die Rotationen die Würfelkonfiguration verändern, muss es nicht nur Permutationsfunktionen für die Veränderung der Steinposition geben, sondern auch Übergangsfunktionen für den Vektor x , der die Ausrichtung der Steine darstellt. Die Funktionen Γ wurden für jeden Zug des Würfels bereits in Kapitel 4.2 beschrieben. Die Vektoreinträge werden dort mit den Funktionen g, h und i verändert.

$$g(x) = (x + 2) \bmod 3 \quad h(x) = (x + 1) \bmod 3 \quad i(x) = x$$

Für der Rotationen gibt es eine Funktion β , die den Vektor in seinen Folgezustand überführt. Die Identitätsfunktion i muss nicht geschrieben werden. Die Funktionen β für die Rotationen sind im Folgenden definiert:

$$\begin{aligned} \beta_{Z_r}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8) \\ &= (x_3, x_1, x_4, x_2, x_7, x_5, x_8, x_6) \\ \\ \beta_{Z_l}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8) \\ &= (x_2, x_4, x_1, x_3, x_6, x_8, x_5, x_7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta_{Y_r}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8) \\ = (h(x_3), g(x_4), g(x_7), h(x_8), g(x_1), h(x_2), h(x_5), g(x_6))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta_{Y_l}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8) \\ = (h(x_5), g(x_6), g(x_1), h(x_2), g(x_7), h(x_8), h(x_3), g(x_4))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta_{X_r}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8) \\ (g(x_5), h(x_1), h(x_7), g(x_3), h(x_6), g(x_2), g(x_8), h(x_4))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta_{X_l}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8) \\ (g(x_2), h(x_6), h(x_4), g(x_8), h(x_1), g(x_5), g(x_3), h(x_7))\end{aligned}$$

Die mehrfache Ausführung einer Rotation wird auch mit der Exponentenschreibweise geschrieben. Somit gilt für jede Rotation $TTTT = T^4 = N_R$ (für $T \in \{Z_r, Z_l, Y_r, Y_l, X_r, X_l, N_R\}$) und $T^0 = N_R$ (für alle Rotationen T). Dabei ist N_R die leere Rotation und T ist eine beliebige Rotation des Würfels. Dementsprechend gilt bei den Rotationen auch für jede Rotation:

$$\forall T \in \{Z_r, Z_l, Y_r, Y_l, X_r, X_l, N_R\}. n \in \mathbb{N} . T^n = T^{n \bmod 4}$$

5.3 Äquivalenzrelation der Züge

Da der $2 \times 2 \times 2$ -Würfel im Gegensatz zum $3 \times 3 \times 3$ -Würfel keine feste Ausrichtung hat, werden in diesem Abschnitt Äquivalenzrelationen eingeführt, um die Rotationen des Würfels umzusetzen. Für Äquivalenzrotationen müssen die drei folgenden Eigenschaften gelten: Reflexivität, Symmetrie, Transitivität. In Abschnitt 3.7 findet sich die Definition und Erklärung.

In dem Fall des $2 \times 2 \times 2$ -Würfels handelt es sich um eine Relation von zwei Zügen Z_1, Z_2 aus der Menge aller Züge A_Z (ohne Rotationen).

Die Äquivalenzrelation der Rotation wird hier so definiert:

$$Z_1 \sim Z_2 := \quad Z_1 \text{ und } Z_2 \text{ ergeben (mit optionaler Rotation) die gleiche} \\ \text{Würfelkonfiguration}$$

Die Relation \sim prüft zwei Züge Z_1 und Z_2 auf Gleichheit und berücksichtigt dabei gleichzeitig die Rotation des Würfels.

Daraus ergibt sich $Z_1 \sim Z_2 :\Leftrightarrow C \cdot Z_1 = C \cdot WZ_2$ mit C als Würfelkonfiguration und W als Element (oder Kombination von Elementen) aus $\{Z_r, Z_l, Y_r, Y_l, X_r, X_l, N_R\}$. Dabei stellt N_R die *leere* Rotation dar – das entspricht keiner Rotation des Würfels. Somit ergibt sich beispielsweise $F \sim L \Leftrightarrow C \cdot F = C \cdot Z_r L$, da eine Drehung der vorderen Ebene und eine Drehung des Würfels nach links mit einer Drehung der linken Ebene die gleiche Würfelkonfiguration ergeben. Der Würfel ist dann nur verschieden ausgerichtet. In Abbildung 16 ist dieses Beispiel grafisch dargestellt: Links befindet sich der gelöste Würfel, in der Mitte der gelöste Würfel nach dem Zug F und rechts der gelöste Würfel nach dem Zug $Z_r L$. Die beiden rechten Würfel sind in der gleichen Konfiguration, aber anders gedreht.



Abbildung 16: Würfel gelöst (links), nach Zug F (mitte) und nach $Z_r L$ (rechts)

Damit \sim eine Äquivalenzrelation ist, müssen Reflexivität, Symmetrie und Transitivität gelten, was im folgenden Abschnitt bewiesen wird.

Reflexivität

Für die Reflexivität muss $Z \sim Z$ für alle Züge gelten.

$$Z_1 \sim_R Z_2 : \Leftrightarrow C \cdot Z_1 = C \cdot WZ_2$$

Es wird die Rotation W als N_R gewählt, so dass keine Rotation ausgeführt wird.

$$\begin{aligned} Z_1 \sim Z_2 : &\Leftrightarrow C \cdot Z_1 = C \cdot WZ_2 \\ &\Leftrightarrow C \cdot Z_1 = C \cdot N_R Z_2 \\ &\Leftrightarrow C \cdot Z_1 = C \cdot Z_2 \end{aligned}$$

Es gilt somit die Reflexivität für \sim , da bei $Z_1 \sim Z_2$ mit $W = N_R$, die Züge Z_1 und Z_2 immer äquivalent sind, da sie die gleiche Folgekonfiguration des Würfels erreichen.

Symmetrie

Für die Symmetrie muss gelten: Aus $Z_1 \sim Z_2$ folgt $Z_2 \sim Z_1$.

$$\begin{aligned} Z_1 \sim Z_2 &\Rightarrow Z_2 \sim Z_1 \\ \text{mit } Z_1 \sim Z_2 : &\Leftrightarrow C \cdot Z_1 = C \cdot W Z_2 \\ &\Leftrightarrow C \cdot Z_1 = C \cdot W_1 Z_2 \Rightarrow C \cdot Z_2 = C \cdot W_2 Z_1 \end{aligned}$$

Das gilt, wenn W_2 das Inverse von W_1 ist. Das Inverse ist die Rotation um die gleiche Achse, aber in die andere Richtung. Das Inverse von W wird als W^{-1} geschrieben. Das sind alle Rotationen mit ihren dazugehörigen Inversen:

Rotation W	Z_r	Z_l	Y_r	Y_l	X_r	X_l	N_R
Inverses W^{-1}	Z_l	Z_r	Y_l	Y_r	X_l	X_r	N_R

Dann gilt:

$$C \cdot Z_1 = C \cdot W Z_2 \Rightarrow C \cdot Z_2 = C \cdot W^{-1} Z_1$$

Das gilt, da durch W^{-1} der Würfel in die entgegengesetzte Richtung rotiert wird und die Züge somit wieder die gleiche Würfelkonfiguration ergeben. Folglich gilt die Symmetrie für \sim .

Transitivität

Es muss gelten: Aus $Z_1 \sim Z_2$ und $Z_2 \sim Z_3$ folgt $Z_1 \sim Z_3$.

$$\begin{aligned} Z_1 \sim Z_2 &\quad \wedge \quad Z_2 \sim Z_3 &\Rightarrow Z_1 \sim Z_3 \\ \Leftrightarrow C \cdot Z_1 = C \cdot W_1 Z_2 &\quad \wedge \quad C \cdot Z_2 = C \cdot W_2 Z_3 &\Rightarrow C \cdot Z_1 = C \cdot W_3 Z_3 \end{aligned}$$

Das gilt für $W_3 = W_1 W_2$.

$$\Leftrightarrow C \cdot Z_1 = C \cdot W_1 Z_2 \quad \wedge \quad C \cdot Z_2 = C \cdot W_2 Z_3 \Rightarrow C \cdot Z_1 = C \cdot W_1 W_2 Z_3$$

Da die Züge Z_1 und Z_2 mit der Rotation W_1 die gleiche Würfelkonfiguration ergeben, und die Züge Z_2 und Z_3 nach der Rotation W_2 auch die gleiche Würfelkonfiguration ergeben, gilt das auch für die beiden Züge Z_1 und Z_3 nach der Rotation $W_3 = W_1 W_2$, da dann alle nötigen Rotationen durchgeführt wurden.

5.4 Äquivalenzklassen

Äquivalenzklassen und Faktormengen wurden in Abschnitt 3.7 eingeführt. In diesem Abschnitt werden die Äquivalenzklassen der Relation \sim auf der Menge aller Züge A_Z definiert. Die Faktormenge A_Z / \sim wird $G_{2 \times 2 \times 2}$ genannt. Sie enthält die Äquivalenzklassen aller Würfelzüge, ohne dabei gleiche Züge oder Würfelrotationen doppelt zu enthalten. Die Elemente von $G_{2 \times 2 \times 2}$ sind definiert als $\{[Z] \mid Z \in A_Z\}$. Im weiteren Verlauf dieser Arbeit werden die eckigen Klammern der Äquivalenzklassen in $G_{2 \times 2 \times 2}$ aber weggelassen, um die Notation zu vereinfachen. $G_{2 \times 2 \times 2}$ enthält alle möglichen Züge des Würfels ohne dabei doppelte Züge zu enthalten. Alle äquivalenten Elemente einer Äquivalenzklasse $[Z]$ werden als Repräsentanten dieser Äquivalenzklasse bezeichnet. So ist der Zug $RRRRR$ beispielsweise ein Repräsentant der Äquivalenzklasse $[R]$, da beide Züge äquivalent sind.

5.5 $2 \times 2 \times 2$ -Zauberwürfel als Gruppe

Im Folgenden wird die Definition der Gruppe des $3 \times 3 \times 3$ -Würfels aus *Group Theory and the Rubik's Cube* von Janet Chen [4] als Gruppe des $2 \times 2 \times 2$ -Würfels umgesetzt. Die Gruppe von Janet Chen wird hier als $(G_{3 \times 3 \times 3}, *)$ bezeichnet, auch wenn er sie als $(G, *)$ bezeichnet hat. Der Namen der Gruppe wird geändert, um klar zwischen dem $2 \times 2 \times 2$ - und dem $3 \times 3 \times 3$ -Würfel zu differenzieren. Die Gruppe des $2 \times 2 \times 2$ -Würfels heißt $(G_{2 \times 2 \times 2}, \circ)$. Die Grundlagen und Definition der Gruppe wurden in Abschnitt 3.1 erklärt.

Die Faktormenge $G_{2 \times 2 \times 2}$ besteht aus allen möglichen Zügen des Würfels, ohne doppelte Züge zu enthalten. Ein Beispielzug ist die Drehung der oberen Ebene (U). Ein Zug kann aber auch aus mehreren Drehungen bestehen, z. B. das Drehen der oberen Ebene, gefolgt von dem Drehen der rechten Ebene stellt ebenfalls einen Zug dar (UR).

Der Operator \circ ist als Konkatenation zweier Züge definiert. Wenn Z_1 und $Z_2 \in G_{2 \times 2 \times 2}$ zwei Züge sind, dann bedeutet $Z_1 \circ Z_2$, dass zuerst Z_1 und dann Z_2 ausgeführt wird. $Z_1 \circ Z_2$ kann auch als $Z_1 Z_2$ geschrieben werden.

Im Folgenden wird gezeigt, dass $(G_{2 \times 2 \times 2}, \circ)$ eine Gruppe ist, indem $(G_{2 \times 2 \times 2}, \circ)$ bezüglich der Gruppenkriterien untersucht wird:

Abgeschlossenheit

$$\forall Z_1, Z_2 \in G_{2 \times 2 \times 2}. (Z_1 \circ Z_2) \in G_{2 \times 2 \times 2}$$

Die Gruppe $G_{2 \times 2 \times 2}$ ist abgeschlossen unter dem Operator \circ . Wenn Z_1 und Z_2 Züge sind und somit Elemente von $G_{2 \times 2 \times 2}$, dann ist auch $Z_1 \circ Z_2$ ein Element der Gruppe, da alle Züge (bzw. die Äquivalenzklassen der Züge) in $G_{2 \times 2 \times 2}$ enthalten sind. Jede Konkatenation von zwei Zügen ist auch ein Zug. In $G_{2 \times 2 \times 2}$ findet sich zu jeder validen Würfelkonfiguration ein Zug, mit dem diese erreicht werden kann und jede Verknüpfung von zwei validen Zügen führt zu einer validen Würfelkonfiguration. Daher gilt die Abgeschlossenheit bei der Gruppe $(G_{2 \times 2 \times 2}, \circ)$.

Assoziativität

$$\forall Z_1, Z_2, Z_3 \in G_{2 \times 2 \times 2}. (Z_1 \circ Z_2) \circ Z_3 = Z_1 \circ (Z_2 \circ Z_3)$$

Um die Assoziativität zu zeigen, wird eine Schreibweise für das Ausführen der Züge eingeführt. Ein beliebiger, fester Stein im Würfel wird hier s genannt. Beim Ausführen eines Zuges Z wird nun $Z(s)$ geschrieben, um die neue Position des Steines zu erhalten. Die Positionen sind (wie oben beschrieben) 3-Buchstaben-Kürzel, bestehend aus u, d, l, r, t, b .

Bei der Betrachtung von $Z_1 \circ Z_2$, wird zuerst Z_1 und dann Z_2 ausgeführt. $Z_1(s)$ bewegt den Stein s zu der Position $Z_1(s)$. Der Zug Z_2 bewegt den Stein dann zu der Position $Z_2(Z_1(s))$. Folglich gilt $Z_1 \circ Z_2 = Z_2(Z_1(s))$.

Nun muss noch $(Z_1 \circ Z_2) \circ Z_3 = Z_1 \circ (Z_2 \circ Z_3)$ gezeigt werden. Dafür wird gezeigt, dass sich $(Z_1 \circ Z_2) \circ Z_3$ und $Z_1 \circ (Z_2 \circ Z_3)$ beide zu $Z_3(Z_2(Z_1(s)))$ umformen lassen:

$$\begin{aligned} & (Z_1 \circ Z_2) \circ Z_3 \\ \Leftrightarrow & ((Z_1 \circ Z_2) \circ Z_3)(s) \\ = & Z_3(Z_1 \circ Z_2)(s)) \\ = & Z_3(Z_2(Z_1(s))) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & Z_1 \circ (Z_2 \circ Z_3) \\ \Leftrightarrow & (Z_1 \circ (Z_2 \circ Z_3))(s) \\ = & (Z_2 \circ Z_3)(Z_1(s)) \\ = & Z_3(Z_2(Z_1(s))) \end{aligned}$$

Somit ist $(G_{2 \times 2 \times 2}, \circ)$ assoziativ.

Existenz eines neutralen Elements N

$$\exists N \in G_{2 \times 2 \times 2}. \forall Z_1 \in G_{2 \times 2 \times 2}. N \circ Z_1 = Z_1 \circ N = Z_1$$

Das neutrale Element N muss aus der Menge $G_{2 \times 2 \times 2}$ der Züge sein und es muss gelten: $N \circ Z_1 = Z_1 \circ N = Z_1$. Somit ist das neutrale Element der Gruppe $(G_{2 \times 2 \times 2}, \circ)$ der *leere* Zug. Es werden dabei keine der Ebenen des Würfels gedreht. Wenn ein Zug Z ausführt wird und dann der Zug N , bedeutet das *erst Z ausführen und dann nichts*, was das gleiche ist wie Z *auszuführen*.

Wenn eine Ebene beispielsweise vier mal gedreht wird, ist der Würfel wieder in der vorherigen Position. Somit gilt beispielsweise $RRRR = R^4 = N$, wobei N für das neutrale Element (bzw. den leeren Zug) steht. Das gilt für alle Grundzüge des Würfels:

$$RRRR = R^4 = N$$

$$LLLL = L^4 = N$$

$$UUUU = U^4 = N$$

$$DDDD = D^4 = N$$

$$FFFF = F^4 = N$$

$$BBBB = B^4 = N$$

Diese sind dann alle als Repräsentanten für den leeren Zug in der Äquivalenzklasse von N enthalten. Somit gilt dann auch $Z^0 = N$, mit Z als beliebigen Zug und N als neutrales Element.

Das neutrale Element N von $(G_{2 \times 2 \times 2}, \circ)$ ist somit der leere Zug bzw. jeder Repräsentant der Äquivalenzklasse des leeren Zuges.

Existenz eines inversen Elements Z^{-1}

$$\forall Z \in G_{2 \times 2 \times 2}. \exists Z^{-1} \in G_{2 \times 2 \times 2}. Z \circ Z^{-1} = Z^{-1} \circ Z = N$$

Da jeder Zug Z als Permutation definiert ist, kann diese invertiert werden. Wenn man eine Permutation invertieren will, kehrt man die Reihenfolge der Elemente der Zykel um. Heraus kommt bei einer Verknüpfung dieser beiden Permutationen das die Identitätspermutation bzw. das neutrale Element. Somit gilt dann $Z \circ Z^{-1} = Z^{-1} \circ Z = N$.

Somit ist $(G_{2 \times 2 \times 2}, \circ)$ eine Gruppe.

$(G_{2 \times 2 \times 2}, \circ)$ ist keine kommutative Gruppe, da beispielsweise eine Rotation der rechten Ebene im Uhrzeigersinn (R) und eine Rotation der vorderen Ebene im Uhrzeigersinn (F) in umgekehrter Reihenfolge ein anderes Ergebnis haben. Das ist in Abbildung 17 grafisch dargestellt oder kann händisch an einem Würfel ausprobiert werden.



Abbildung 17: Würfel nach Zügen FR (links) und RF (rechts)

Außerdem wäre das Lösen des Würfels trivial, wenn die Kommutativität gelten würde. [5] Die Reihenfolge der gedrehten Ebenen wäre dann irrelevant und es müsste nur die Anzahl beachtet werden. Es gilt dementsprechend nicht $\forall Z_1, Z_2 \in G_{2 \times 2 \times 2}. Z_1 \circ Z_2 = Z_2 \circ Z_1$ und der \circ -Operator der Gruppe ist somit nicht kommutativ.

5.6 Züge als Gruppenoperation

Im Folgenden wird eine Gruppenoperation beschrieben, die eine Würfelkonfiguration durch das Ausführen eines Zuges auf eine neue Würfelkonfiguration abbildet. Bei Gruppenoperationen beeinflussen die Elemente einer Gruppe eine Menge. In diesem Fall beeinflussen die Züge des Würfels die Konfiguration des Würfels. Es handelt sich um eine Rechtsoperation, die im Abschnitt 3.5 definiert wurde.

Der Punktoperator ist definiert als $\cdot : M_C \times G_{2 \times 2 \times 2} \rightarrow M_C$. Wenn der Zauberwürfel in einer Konfiguration $C = (\sigma, x)$ aus der Menge der Konfigurationen M_C ist, wird er durch das Ausführen eines Zuges $Z \in G_{2 \times 2 \times 2}$ in eine neue Konfiguration gebracht. Diese Konfiguration wird als $(C \cdot Z) \in M_C$ geschrieben. Die folgenden beiden Eigenschaften müssen bei der Rechtsoperation gelten:

$C \cdot N = C$ für alle $C \in M_C$ und das neutrale Element $N \in G_{2 \times 2 \times 2}$

Wenn der leeren Zug N ausgeführt wird, wird die Konfiguration des Würfels nicht verändert. Daher gilt $C \cdot N = C$.

$C \cdot (Z_1 \circ Z_2) = (C \cdot Z_1) \cdot Z_2$ für alle $Z_1, Z_2 \in G_{2 \times 2 \times 2}$ und $C \in M_C$

Angenommen, der Würfel befindet sich in der Konfiguration C . Wenn nun der Zug

$Z_1 \in G_{2 \times 2 \times 2}$ ausgeführt wird, ist die neue Konfiguration des Würfels $C \cdot Z_1$. Wenn nun noch ein weiterer Zug $Z_2 \in G_{2 \times 2 \times 2}$ ausgeführt wird, ist die neue Konfiguration des Würfels $(C \cdot Z_1) \cdot Z_2$. Anders gesagt: Der Würfel hat in Konfiguration C gestartet und der Zug $Z_1 Z_2$ wurde ausgeführt. Die neue Konfiguration kann auch als $C \cdot (Z_1 Z_2)$ geschrieben werden und somit gilt $(C \cdot Z_1) \cdot Z_2 = C \cdot (Z_1 Z_2)$.

5.7 Ordnung der Permutationen

Wie bereits beschrieben, gilt $\forall Z \in \{U, D, F, B, L, R\}. n \in \mathbb{N} . C \cdot Z^n = C \cdot Z^{n \bmod 4}$, da alle Steine des Würfels wieder in ihre vorherige Position gelangen, wenn eine Ebenen- oder eine Würfelrotation vier mal hintereinander ausgeführt wird. Deshalb werden die Züge U, D, F, B, L, R als Permutationen der Ordnung 4 bezeichnet. Die Exponentenschreibweise kann für alle Züge aus $G_{2 \times 2 \times 2}$ angewendet werden, auch wenn sie mehr als eine Ebene rotieren. Das wird beispielhaft bei dem Zug $LLFF$ gezeigt: $(LLFF)^2$ entspricht dann $LLFFLLFF$ und $(LLFF)^3$ ist $LLFFLLFFLLFF$.

Nicht nur die Züge U, D, F, B, L, R kommen nach dem Wiederholen in den Ausgangszustand. Auch alle anderen Züge bringen den Würfel bei Wiederholtem Ausführen wieder in die Ausgangsposition, die der Würfel vor Ausführung des Zuges hatte [5]. Es sind aber je nach Zug verschieden viele Wiederholungen nötig. Die Permutation des Zuges $(LLFF)$ hat beispielsweise die Ordnung 3, da der Würfel sich nach dreifacher Wiederholung von $(LLFF)$ wieder in der Ausgangsposition befindet. Es gilt dann $(LLFF)^3 = N$. Weitere Beispielzüge mit Angabe der Ordnung sind: $R^4 = N$ (Ordnung 4) oder $(RRFF)^3 = N$ (Ordnung 3).

Die genannten Beispiele können an einem $2 \times 2 \times 2$ -Würfel händisch ausprobiert werden. Dabei muss beachtet werden, dass sich die Ordnung der Permutationen und der Ordnung der Züge unterscheiden. Die Ordnung der Permutationen ist die Anzahl der Durchführungen, die benötigt wird, damit alle Steine wieder an der Ausgangsposition sind. Die Ausrichtung der Steine wird hier aber nicht berücksichtigt. Wenn die ganze Würfelkonfiguration beachtet wird, handelt es sich um die Ordnung der Züge.

Der Zug LF beispielsweise hat die Ordnung 15, die Permutation der Steine hat aber die Ordnung 5. Nach 5 Wiederholungen von LF befinden sich alle Steine wieder an ihrer Ausgangsposition (links in Abbildung 18 von der Startkonfiguration ausgehend). Nach 15 Wiederholungen befindet sich der Würfel wieder in der gleichen Konfiguration, wie vor dem Zug (rechts in Abbildung 18).



Abbildung 18: Ordnung des Zuges und der Permutation LF

Man kann in Abbildung 18 sehen, dass die Würfelsteine alle an der richtigen Position sind, aber nicht richtig ausgerichtet. Die Würfelkonfiguration ist nach dem Anwenden von $(LF)^5$ auf den Startzustand $(1, (1, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 1))$. Der Würfel ist nach fünf Wiederholungen von LF nicht gelöst, da die Ausrichtung der Steine verändert ist – die Ordnung der Permutation von LF ist 5. Die Ordnung des Zuges von LF ist allerdings 15, da der Würfel dann wieder in seiner Ausgangskonfiguration ist. Die Würfelkonfiguration nach dem Ausführen von $(LF)^{15}$ auf dem Startzustand ist $(1, 0)$.

5.8 Zykelstruktur

Anhand der Zykelstruktur lässt sich die Ordnung der jeweiligen Permutation bestimmen. Die Ordnung der Permutationen beschreibt die Anzahl der Wiederholungen, die ein Zug durchgeführt werden muss, damit die Steine die gleiche Anordnung wie zu Beginn des Zuges haben. Dabei geht es um die Steinpositionen und nicht um die Steinausrichtungen.

Der Zug U als $\sigma_U = (\text{ulb } \text{urb } \text{urf } \text{ulf})$ (eine Drehung der oberen Ebene um 90° im Uhrzeigersinn) besteht aus einem 4-elementigen Zykel. Wenn der Zug U viermal ausgeführt wird, befindet sich der Würfel wieder in seiner vorherigen Position:

Ausführung	ulf	ulb	urb	urf
1	ulb	urb	urf	ulf
2	urb	urf	ulf	ulb
3	urf	ulf	ulb	urb
4	ulf	ulb	urb	urf

Die vierte Zeile der Tabelle hat die selbe Anordnung der Steine wie die oberste Zeile (vor Ausführung von U). Somit hat die Permutation der beschriebenen Ebenenrotation U die Ordnung 4. Das gilt auch für jede andere Ebenenrotation (D, F, B, L, R). Es gilt folglich für jede Permutation eines Zuges Z , der aus nur einem n -elementigen Zykel besteht (und Würfelkonfiguration $C = (\sigma, x)$): $\forall Z \in G_{2 \times 2 \times 2}$ mit $\sigma_Z = (i_1 i_2 \dots i_n), n \in \mathbb{N} \cdot (\sigma, x) \cdot Z^n = (\sigma, x')$. Wenn Z mehrfach ausgeführt wird, wird nach jeder n -ten Wiederholung der Ausgangszustand der Permutationen erreicht. [5] Es gilt folglich auch $\forall Z \in G_{2 \times 2 \times 2}$ mit $Z = (i_1 i_2 \dots i_n).n, k \in \mathbb{N} \cdot (\sigma, x) \cdot Z^{k \cdot n} = (\sigma, x')$. Auch bei komplexeren Permutationen von Zügen kann anhand der Zykelstruktur die Ordnung bestimmt werden. Dazu muss das kleinste gemeinsame Vielfache (kurz kgV) aller Zykelgrößen bestimmt werden. [5]

Der besseren Übersichtlichkeit halber, sind die Zyklen aller Züge in Abbildung 19 grafisch dargestellt. Dieser Graph vereinfacht das Ablesen der Zyklen, wenn bei einem Zug mehrere Ebenenrotationen kombiniert werden.

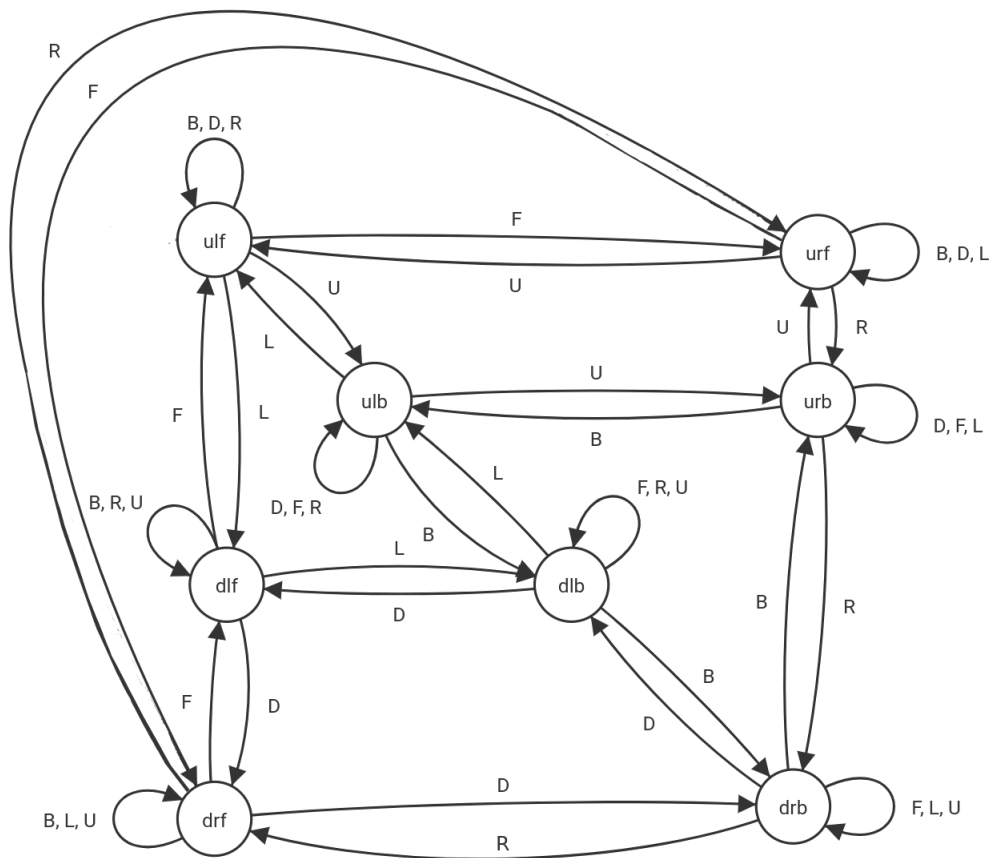


Abbildung 19: Graph aller Zugpermutationen

Mithilfe des Graphens oder der Permutationsfunktionen kann nun anhand des Beispielzuges $LLFF$ die Zykelstruktur der Permutationen dargestellt werden. Dazu wird eine Tabelle

erstellt, die jede Position auf ihre neue Position abbildet. Der Zug $LLFF$ setzt sich aus den Zügen L und F zusammen.

Zug	ulb	urb	ulf	urf	dlb	drb	dlf	drf
L	ulf	urb	dlf	urf	ulb	drb	dlb	drf
L	dlf	urb	dlb	urf	ulf	drb	ulb	drf
F	ulf	urb	dlb	drf	urf	drb	ulb	dlf
F	urf	urb	dlb	dlf	drf	drb	ulb	ulf

Die grauen Positionen bleiben bei der jeweiligen Ebenenrotation unverändert. Die Zykel des Zuges $LLFF$ sind in Abbildung 20 grafisch dargestellt.

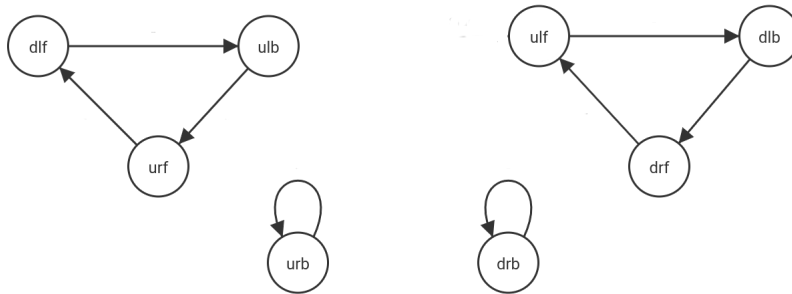


Abbildung 20: Zykel des Zuges $LLFF$

In der Zykelschreibeweise wird der Zug $LLFF$ als $\sigma_{LLFF} = (dlf\ ulb\ urf)(ulf\ dlb\ drf)$ geschrieben. Da es demnach zwei Zyklen der Länge drei gibt, befinden sich alle Würfelsteine nach drei Zügen ($KGV(3, 3, 1, 1) = 3$) wieder in ihrer Ausgangsposition. In diesem Fall sind die Steine nicht nur an der richtigen Position sondern auch so ausgerichtet, wie zu Beginn des Zuges. Die Permutation des Zuges $LLFF$ hat also die Ordnung 3. Außerdem ist zu sehen, dass sechs der acht Steine bei dem Zug $LLFF$ bewegt werden. Die anderen beiden (urb und drb) bleiben unverändert.

5.9 Ordnung der Züge

Im folgenden Abschnitt wird bewiesen, dass der Würfel wieder in die Ausgangsposition gelangt, wenn ein beliebiger Zug $Z \in G_{2 \times 2 \times 2}$ wiederholt auf den Würfel angewendet wird. Der folgende Beweis orientiert sich an dem Beweis aus *Group Theory via Rubik's Cube* von Tom Davis [5].

Jedes Mal wenn ein Zug wiederholt wird, werden die Steine im Würfel neu angeordnet und ausgerichtet. Da es eine endliche Anzahl an Würfelkonfigurationen gibt, muss eine Würfelkonfiguration wiederholt werden, wenn ein Zug oft genug durchführt wird. Die Zahl der validen Würfelkonfigurationen ist zwar sehr groß, aber endlich (3 674 160). Demnach muss eine Konfiguration wiederholt werden, wenn der Zug öfter ausführt, als es mögliche Würfelkonfigurationen gibt. Die Anzahl der validen Würfelkonfigurationen wird in Kapitel 7 berechnet.

Bei einem beliebigen Zug $Z \in G_{2 \times 2 \times 2}$, der auf eine Konfiguration C angewendet wird, wird also irgendwann eine Würfelkonfiguration wiederholt. Wenn die wiederholte Konfiguration zuerst nach $n \in \mathbb{N}$ Wiederholungen auftritt und das zweite Mal nach $m \in \mathbb{N}$ Wiederholungen, sieht das so aus: $C \cdot Z^n = C \cdot Z^m$ mit $0 < n < m$. Somit gilt dann $C \cdot Z^{n-1} \neq C \cdot Z^{m-1}$, da m das zweite Vorkommen der gleichen Position repräsentiert. Sonst wäre das erste Vorkommen der wiederholenden Positionen ja nach $n - 1$ bzw. $m - 1$ Wiederholungen.

Wenn $n = 0$ wäre, ergibt das $C \cdot Z^0 = C$, was den leeren Zug repräsentiert. Der Würfel wird dabei nicht verändert und somit ist die erste Wiederholung der Konfiguration nach m -facher Ausführung von Z .

Wenn $C \cdot Z^n = C \cdot Z^m$ mit $0 < n < m$ gilt, kommt der Würfel in die gleiche Folgekonfiguration, wenn (auf die gleiche Ausgangskonfiguration) n -mal oder m -mal Z angewendet wird. Wenn dann Z^{-1} angewendet wird, ist die Folgekonfiguration wieder gleich. Dabei ist es irrelevant, ob vorher n -mal oder m -mal Z ausgeführt wurde, da von der gleichen Ausgangskonfiguration ausgehend die gleiche Folgekonfiguration erreicht wird, wenn der gleiche Zug ausführt wird.

Beim Anwenden von Z^{-1} auf die Konfiguration C wird die letzte Ausführung von Z wieder rückgängig gemacht. Wenn Z n -mal ausgeführt wird und danach Z^{-1} ausführt wird, ist es das gleiche wie $n - 1$ -mal Z ausführen. Folglich gilt $C \cdot Z^n Z^{-1} = C \cdot Z^{n-1}$. Das gilt natürlich auch für m , also $C \cdot Z^m Z^{-1} = C \cdot Z^{m-1}$. Demnach gilt dann $C \cdot Z^{n-1} = C \cdot Z^{m-1}$. Das widerspricht dann aber der Annahme, dass m der kleinste Wert für eine Wiederholung der Position ist. Deshalb muss $n = 0$ sein, damit m die erste Wiederholung einer Position repräsentiert.

Daraus folgt: Wenn ein Zug wiederholt auf einen Würfel angewendet wird, kommen die Steine wieder in die Ausgangsposition.

Die Anzahl der Wiederholungen eine Zuges, bis der Würfel wieder in der Ausgangskonfiguration ist, nennt man Ordnung eines Zuges. Für die Berechnung dieser wird nun ein Algorithmus entworfen, der als Pseudocode dargestellt wird.

Algorithmus 1: Ordnung eines Zuges bestimmen

Data: Konfiguration $C(\sigma, x)$, Zug Z

Result: $kgV(count, ord)$ gibt die Ordnung eines Zuges

```
1   $ord \leftarrow$  Ordnung der Permutation von  $Z$ 
2   $x' \leftarrow x$ 
3   $count \leftarrow 1$ 
4   $C \leftarrow C \cdot Z^{ord}$ 
5  while  $x \neq x'$  do
6     $C \leftarrow C \cdot Z^{ord}$ 
7     $count \leftarrow count + 1$ 
8  return  $kgV(count, ord)$ 
```

Der Pseudocode braucht für die Berechnung der Ordnung eines Zuges Z zwei Eingabeparameter: Den Zug Z und die Ausgangskonfiguration C des Würfels. In Zeile 1 wird die Variable ord mit der Ordnung der Permutationen von Z initialisiert. Die Berechnung der Permutationsordnung wurde in Abschnitt 5.7 beschrieben. Dann wird der Wert des Vektors x in der Variablen x' gespeichert, um in der weiteren Berechnung Vergleiche damit durchzuführen (Zeile 2). Außerdem wird in Zeile 3 die Variable $count$ mit 1 initialisiert – sie zählt die nötigen Ausführungen des Zuges Z , bis der Vektor wieder in der Ausgangskonfiguration ist. $count$ wird mit 1 initialisiert, da vor der *while*-Schleife in Zeile 4 bereits eine Anwendung von Z durchgeführt wird. Die Anzahl der Ausführung von Z ist dabei immer ord , da die Ordnung des Zuges die Ausrichtung der Steine und die Steinposition berücksichtigt. Die Steine sind nur nach Vielfachen von ord Zügen an der richtigen Position.

Die *while*-Schleife in Zeile 5 wird ausgeführt, bis x wieder in der gleichen Konfiguration wie zum Start ist. Bei jeder Ausführung wird Z^{ord} ausgeführt (Zeile 6) und $count$ inkrementiert (Zeile 7). Die Ordnung des Zuges Z setzt sich zusammen aus der Ordnung der Permutation von Z und der Anzahl der Durchführungen von Z^{ord} , bis die Ausrichtung der Steine wieder in der Anfangskonfiguration ist. Daher ist die Ordnung eines Zuges das kleinste gemeinsame Vielfache von diesen beiden Werten (Zeile 9).

6 Untergruppen von $G_{2 \times 2 \times 2}$

Dieses Kapitel behandelt die Untergruppen der Gruppe $(G_{2 \times 2 \times 2}, \circ)$. Im ersten Teil wird auf die trivialen Untergruppen eingegangen. Außerdem werden noch weitere Untergruppen beschrieben und erzeugt. Die Definition und Erklärung der Untergruppe und des Erzeugers findet sich in Abschnitt 3.2. Außerdem werden die Cayleygraphen zu zwei Untergruppen dargestellt und erklärt. Die Untergruppe, die den $2 \times 2 \times 2$ -Würfel minimal aber komplett abbildet, findet sich in Kapitel 9.

6.1 Untergruppen Beispiele

Wie bereits in Kapitel 3.2 erklärt, hat jede Gruppe zwei triviale Untergruppen. Demnach sind (H_N, \circ) und (H_G, \circ) die trivialen Untergruppen von $G_{2 \times 2 \times 2}$ ($(H_N, \circ) \leq (G_{2 \times 2 \times 2}, \circ)$ und $(H_G, \circ) \leq (G_{2 \times 2 \times 2}, \circ)$). Die Untergruppe (H_N, \circ) enthält in der Trägermenge H_N nur das neutrale Element N . Bei der Untergruppe (H_G, \circ) hingegen ist die Trägermenge H_G die gleiche Menge wie $G_{2 \times 2 \times 2}$. Die Gruppe $G_{2 \times 2 \times 2}$ hat viele Untergruppen, deshalb kann hier nur auf einen Teil davon eingegangen werden.

Da die trivialen Untergruppen nicht sonderlich aussagekräftig sind, geht der folgende Abschnitt auf einige anschauliche Untergruppen zum Lösen des Würfels ein. Die folgenden Untergruppen hat Tom Davis (in *Group Theory via Rubik's Cube*) [5] für den $3 \times 3 \times 3$ -Würfel genannt. Hier werden zwei seiner Untergruppen auf den $2 \times 2 \times 2$ übertragen:

- Die Untergruppe (H_{E1}, \circ) , die nur die Rotation einer Ebene zulässt, hat nur vier erreichbare Würfelkonfigurationen (sowohl beim $2 \times 2 \times 2$ - als auch beim $3 \times 3 \times 3$ -Würfel). Das kann auch gut an einem *Cube* nachvollzogen werden, da durch das Drehen von nur einer Ebene auch nur vier verschiedene Ergebnisse erzielt werden können.

Die Trägermenge H_{E1} , die Äquivalenzklassen aller möglichen Züge enthält, enthält hier nur vier Elemente. Jeder Zug, der durch die Drehung einer Ebene ausgeführt wird, ist ein Repräsentant dieser vier Züge.

- Eine weitere Untergruppe von $(G_{2 \times 2 \times 2}, \circ)$ ist (H_{E2}, \circ) . Hier dürfen zwei gegenüberliegende Ebenen gedreht werden. Bei der Gruppe des $3 \times 3 \times 3$ -Würfels ergeben sich daraus 16 mögliche Würfelkonfigurationen [5]. Bei dem $2 \times 2 \times 2$ -*Cube* allerdings nur vier, da es nur zwei Ebenen gibt und nicht anhand der Mittelsteine oben und unten unterschieden werden kann.

6.2 Erzeuger

Die folgenden Beispiele stammen aus Tom Davis' *Group Theory via Rubik's Cube* [5] und werden hier von der Gruppe des $3 \times 3 \times 3$ -Cubes auf den $2 \times 2 \times 2$ -Cube übertragen. Erzeuger wurden bereits in Kapitel 3.3 erklärt.

Ein Beispiel eines Erzeugers einer Untergruppe (G_F, \circ) von $(G_{2 \times 2 \times 2}, \circ)$ wird von dem einzelnen Zug $\{F\}$ erzeugt. Es können nur 4 Würfelkonfigurationen erreicht werden und die Untergruppe (G_F, \circ) enthält somit nur die Elemente N, F, FF, FFF , da alle weiteren Züge äquivalent zu einem dieser Züge sind. Beispielsweise ist $FFFF$ das gleiche wie das neutrale Element N und der Würfel befindet sich nach Ausführen dieses Zuges wieder in der Ausgangsposition.

Ein weitere Beispiel ist die Untergruppe, die von $\{FF\}$ erzeugt wird. Dabei können die Ebenen nur halbe Drehungen (statt Vierteldrehungen) machen und somit nur zwei Positionen erreichen. Die Untergruppe enthält daher nur FF und $FFFF$.

Die komplette Gruppe $(G_{2 \times 2 \times 2}, \circ)$ wird erzeugt durch $\{U, D, R, L, F, B\}$.

Die Untergruppen, die mit nur einem Element aus $G_{2 \times 2 \times 2}$ erzeugt werden, sind zyklische Gruppen. Die oben beschriebene Untergruppe (G_F, \circ) , die durch F erzeugt wird, ist somit eine zyklische Untergruppe. (G_F, \circ) wird erzeugt durch $\langle F \rangle = \{F^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Das bedeutet, dass $G_F = \{N, F^1, F^2, F^3, F^4, \dots\}$ ist. Es gibt auch unendliche zyklische Gruppen, diese hier sind aber endlich, da $N = FFFF$. Die Züge werden (wie bereits in Kapitel 5 beschrieben) modulo 4 gerechnet. Das gilt für jeden Erzeuger, der nur aus einer einzelnen Ebenendrehung besteht.

Da die Gruppe $(G_{2 \times 2 \times 2}, \circ)$ endlich ist, erzeugt jedes Element der Gruppe eine endliche zyklische Untergruppe [5]. Die Größe dieser Untergruppe hängt von der Ordnung des Zuges ab. Die Ordnung wurde in Abschnitt 5.7 beschrieben. Die Ordnung des Zuges FR ist 15 – wenn FR 15-mal auf dem $2 \times 2 \times 2$ -Würfel ausführt wird, ist er wieder in der Ausgangsposition. Die Gruppe, die durch $\{FR\}$ erzeugt wird, hat somit 15 Elemente. Bei dem $3 \times 3 \times 3$ -Würfel ist die Ordnung des Zuges FR allerdings 105 [5].

6.3 Durch FF und RR erzeugte Untergruppe

Das Beispiel der durch $\{FF, RR\}$ erzeugten Untergruppe hat Tom Davis auch gewählt [5] und hier wird es von dem $3 \times 3 \times 3$ - auf den $2 \times 2 \times 2$ -Würfel übertragen. Da die beiden Züge als Einheiten gesehen werden, muss jede der Ebenendrehungen eine halbe Drehung

sein. Es wurde in Kapitel 5 bereits gezeigt, dass $(FF)^2 = N$ und $(RR)^2 = N$ gilt, da der Würfel dann wieder in der Ausgangsposition ist.

Wenn bei einem gelösten $2 \times 2 \times 2$ -Würfel $FFRR$ ausgeführt wird, befindet sich der Würfel nach 3 Wiederholungen wieder in der Startkonfiguration. Das gilt auch für den Zug $RRFF$. Die Ordnung von $FFRR$ und $RRFF$ ist daher 3. Bei dem $3 \times 3 \times 3$ -Cube ist die Ordnung dieser Züge 6 [5].

Die durch $\{FF, RR\}$ erzeugte Untergruppe des $3 \times 3 \times 3$ -Würfels hat somit auch mehr Elemente als die des $2 \times 2 \times 2$ -Würfels. Hier werden (alle) Mitglieder der Untergruppe des $2 \times 2 \times 2$ -Cubes aufgelistet, wenn dabei berücksichtigt wird, dass $FFFF$ und $RRRR$ keine Veränderung ergeben: $N, FF, RR, FFRR, RRFF, FFRRFF, FFRRFF, (FFRR)^2, (RRFF)^2, FF(RRFF)^2, RR(FFRR)^2, (FFRR)^2FF$ und $(RRFF)^2RR$. Da FF und RR die Ordnung 2 haben und $FFRR$ die Ordnung 3, sind alle komplexeren Zugkationen bereits abgedeckt. Wenn diese Züge an einem Würfel ausprobiert werden, stellt sich aber heraus, dass beispielsweise $(RRFF)^2RR$ bei gleichem Startzustand die gleiche Würfelkonfiguration wie FF ergibt. Wenn diese Doppelungen aussortiert werden, verbleiben folgende sieben Gruppenelemente:

$$\begin{array}{cccc} N & RR & FFRR & RRFFRR \\ & FF & RRFF & FFRRFF \end{array}$$

Zum Vergleich: Tom Davis erhält bei dem $3 \times 3 \times 3$ -Würfel zwölf Elemente in der durch $\{FF, RR\}$ erzeugten Untergruppe.

Die doppelten Elemente können natürlich auch mathematisch erkannt werden, dafür müssen dann nicht alle Optionen an einem Würfel ausprobiert werden. Das wird im Folgenden beispielhaft mit dem Zug $(RRFF)^2RR$ gemacht. Das ist ausgeschrieben $RRFFRRFFRR$. Da $RRFF$ die Ordnung 3 hat, befindet sich der Würfel nach $(RRFF)^3 = RRFFRRFFRRFF$ wieder in der Ausgangsposition. Daraus kann geschlossen werden, dass von dem Zug $RRFFRRFFRR$ aus nur noch FF bis zur Ausgangsposition fehlt und dass (da es sich um halbe Drehungen handelt) die Position, die durch $RRFFRRFFRR$ erreicht wird auch durch FF erreichbar ist.

Die Tatsache, dass $\{FF, RR\}$ eine Untergruppen mit nur 7 bzw. 12 Elementen bei dem $2 \times 2 \times 2$ - bzw. dem $3 \times 3 \times 3$ -Würfel erzeugt, ist besonders überraschend, da $\{F, R\}$ bei dem $3 \times 3 \times 3$ -Würfel eine Untergruppe der Größe 73 483 200 erzeugt [5]. Bei dem $2 \times 2 \times 2$ -Cube kommt die Untergruppe mit $5! \cdot 3^5$ auf 29 160 Mitglieder [5], aber auch das ist deutlich größer als 7.

6.4 Cayleygraph

Cayleygraphen wurden in Abschnitt 3.4 eingeführt. Sie dienen der Visualisierung von Untergruppen und deren Erzeugern.



Abbildung 21: Cayleygraph zu Erzeuger $\{F\}$

Ein simples Beispiel ist in Abbildung 21 zu sehen: Der Cayleygraph der Untergruppe (G_F, \circ) von $(G_{2 \times 2 \times 2}, \circ)$, die durch $\{F\}$ erzeugt wird. Dieser Cayleygraph ist anschaulich, der er nicht sonderlich komplex ist. Die Untergruppe wird durch die Ebenendrehung F erzeugt, daraus ergibt sich durch hinzufügen einer weiteren Drehung der vorderen Ebene um 90° dann FF , dann FFF und dann $FFFF$, was dem neutralen Element von (G_F, \circ) entspricht.

Im Vergleich dazu ist der Cayleygraph der durch $\{FF, RR\}$ erzeugten Untergruppe etwas komplexer (s. Abbildung 22). Die roten Pfeile repräsentieren den Erzeuger $\{FF\}$ (da es sich dabei in der Startkonfiguration um die rote Seite des Würfels handelt) und die blauen Pfeile repräsentieren den Erzeuger $\{RR\}$ (da es sich dabei um die blaue Würfelseite handelt). Elemente die durch ein anderes Element in Kombination mit einem Erzeuger entstehen können, sind durch einen Pfeil (Erzeuger) miteinander verbunden. Die 7 Elemente der durch $\{FF, RR\}$ erzeugten Untergruppe sind die Knoten des Graphens. Anhand des Cayleygraphens ist zu sehen, dass $FFFF$ und $RRRR$ dem neutralen Element N entsprechen. Obwohl dieser Cayleygraph wesentlich komplexer ist, als der der Untergruppe (G_F, \circ) (Abbildung 21), stellt er eine sehr kleine erzeugte Untergruppe dar, im Vergleich zu der Größe der anderen erzeugbaren Untergruppen von $(G_{2 \times 2 \times 2}, \circ)$. Die Untergruppen und Cayleygraphen können bei der Gruppe des $2 \times 2 \times 2$ -Würfels (und des $3 \times 3 \times 3$ -Würfels) sehr groß werden.



Abbildung 22: Cayleygraph zu Erzeuger $\{FF, RR\}$

7 Valide Konfigurationen des Würfels

In diesem Kapitel wird Anzahl der validen Würfelkonfigurationen berechnet – sowohl anhand des Würfels als auch mithilfe der Gruppe $(G_{2 \times 2 \times 2}, \circ)$. Dazu wird die Mächtigkeit der Gruppe berechnet. Die Definition der Mächtigkeit und Beispiele sind in Abschnitt 3.1 zu finden.

Außerdem wird gezeigt, dass für die Ausrichtung x der Steine $(\sum_{i=1}^8 x_i) \bmod 3 = 0$ gilt.

7.1 Anzahl der validen Würfelkonfigurationen

Im Folgenden wird die Anzahl der möglichen Würfelkonfigurationen anhand des Würfels berechnet. Nicht jede der theoretisch möglichen Würfelkonfigurationen kann auch wirklich durch Ebenendrehungen erreicht werden. Wie viele Möglichkeiten es im $2 \times 2 \times 2$ -Würfel gibt und welche davon wirklich erreichbar sind, wird nun schrittweise anhand des Würfelaufbaus berechnet.

Dazu wird zuerst die Anzahl der möglichen Steinpositionen berechnet: Die Ecksteine können sich in jeder der acht Ecken befinden. Deshalb gibt es pro Eckstein 8 mögliche Positionen im Würfel. Da es 8 Ecksteine gibt, gibt es somit $8! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 40\,320$ mögliche Positionen für die Ecksteine.

Außerdem können die Ecksteine gedreht sein, es können also verschiedene Farbflächen oben sein. Da die Steine aus 3 Farbflächen bestehen, können sieben davon durch Ebenendrehungen 3 verschiedene Ausrichtungen annehmen. Der achte Stein kann durch die Möglichkeit der Rotation des kompletten Würfels als richtig gedreht angenommen werden. Es gibt folglich $3^7 = 2187$ Wege, wie die Ecksteine ausgerichtet sein können. Da es keine Mittelsteine im Würfel gibt, reduziert die Rotation des Würfels die Möglichkeiten um den Faktor 24, denn es gibt 6 Seiten, die jeweils 4 Ausrichtungen haben können. Das sind dann $6 \cdot 4 = 24$. Somit ergibt es $(3^7 \cdot 8!) \cdot \frac{1}{24}$ mögliche Positionen für den Würfel. Das sind 3 674 160 Positionen.

Die Anzahl der Würfelkonfigurationen ohne Berücksichtigung der Rotationen des Würfels liegt bei $8! \cdot 3^8 = 264\,539\,520$ [1]. Unter der Berücksichtigung der Rotationen liegt die Anzahl bei 3 674 160 Möglichkeiten.

7.2 Mächtigkeit von $G_{2 \times 2 \times 2}$

Die Mächtigkeit der Gruppe $(G_{2 \times 2 \times 2}, \circ)$ (bzw. $|G_{2 \times 2 \times 2}|$) ist die Anzahl der Elemente von $G_{2 \times 2 \times 2}$. Die Mächtigkeit der Gruppe ist die Anzahl der validen Würfelkonfigurationen,

da die $G_{2 \times 2 \times 2}$ die Äquivalenzklassen aller möglichen Züge enthält. Wenn zwei Züge mit gleicher Ausgangskonfiguration die gleiche Folgekonfiguration des Würfels hervorrufen, sind sie Repräsentanten der gleichen Äquivalenzklasse in $G_{2 \times 2 \times 2}$. Somit bringt jedes Element von $G_{2 \times 2 \times 2}$ den Würfel in eine andere Würfelkonfiguration und es sind keine äquivalenten Züge doppelt enthalten. Außerdem wurden die Äquivalenzklassen mit der Menge aller Züge des Würfels gebildet. Somit ist jeder mögliche Zug enthalten und $|G_{2 \times 2 \times 2}|$ ist die Anzahl der validen Würfelkonfigurationen.

Da die Mächtigkeit der Gruppe $(G_{2 \times 2 \times 2}, \circ)$ der Anzahl der validen Würfelkonfigurationen entspricht, setzt sie sich aus dem Produkt der Konfigurationsparameter σ und x zusammen. Daraufhin müssen aber auch die Äquivalenzen bezüglich der Rotationen des Würfels berücksichtigt werden.

σ ist die Menge der bijektiven Funktionen für jede Ebenenrotation. Es sind die Übergänge der acht Würfelsteine als Permutationen enthalten. Da es 8 Permutationsobjekte gibt, ist die Anzahl der Permutationsmöglichkeiten $8! = 40320$.

Der andere Parameter der Würfelkonfiguration ist der 8-dimensionale Vektor x . Jeder der Werte in x ist aus der Menge $\{0, 1, 2\}$. Somit gibt es drei Möglichkeiten für jeden Wert im Vektor. Das ergibt dann $3^8 = 6561$ mögliche Konfigurationen des Vektors.

Ohne Berücksichtigung der Äquivalenzklassen wird ein Wert von $40320 \cdot 6561 = 264\,539\,520$ möglichen Konfigurationen erreicht. Da durch die Rotationen eine der Steinausrichtungen in x als richtig angenommen werden kann, wird $264\,539\,520$ durch drei geteilt und ergibt dann $88\,179\,840$. Außerdem gibt es bei den Rotationen sechs Rotationsmöglichkeiten (und zusätzlich die *leere* Rotation). Jede dieser Rotationsmöglichkeiten kann vier verschiedene Rotationen hervorrufen. Das ergibt dann $6 \cdot 4 = 24$ Möglichkeiten, die in den Äquivalenzklassen berücksichtigt werden. Somit muss $88\,179\,840$ durch 24 geteilt werden, um die Mächtigkeit der Gruppe $(G_{2 \times 2 \times 2}, \circ)$ zu berechnen. $|G_{2 \times 2 \times 2}|$ ist dann $88\,179\,840 \div 24 = 3\,674\,160$.

Die Mächtigkeit der Gruppe $(G_{2 \times 2 \times 2}, \circ)$ ist also die Anzahl der validen Würfelkonfigurationen $3\,674\,160$.

7.3 Ausrichtung der Steine (modulo 3)

Die Konfiguration des Würfels ist definiert als $C = (\sigma, x)$. In diesem Abschnitt wird gezeigt, dass bei einer validen Würfelkonfiguration für die Werte des Vektors x

$$\left(\sum_{i=1}^8 x_i \right) \bmod 3 = 0$$

(modulo) gilt.

Sei $C' = (\sigma', x')$ eine Nachfolgekonfiguration der Konfiguration $C = (\sigma, x)$, dann gilt $(\sigma, x) \cdot Z = (\sigma', x')$. Dabei ist Z einer der Züge aus $G_{2 \times 2 \times 2}$. Es gilt dann:

$$\left(\sum_{i=1}^8 x'_i\right) \bmod 3 = \left(\sum_{i=1}^8 x_i\right) \bmod 3$$

In Abbildung 13 in Abschnitt 4.2 ist diese Situation für den Zug R dargestellt. Dort sind außerdem auch die Funktionen γ definiert, die die Veränderungen des Vektor x für jeden der Züge realisieren.

Der Würfel kann nur durch einen der Grundzüge des Würfels oder einer Kombination der Grundzüge verändert werden. Die Veränderungen des Vektors x durch das Ausführen der Grundzüge sind in der folgenden Tabelle detailliert zu sehen. Die Variable s beschreibt dabei die Veränderung der Summe der Vektoreinträge.

Zug Z	Vektor x	s	$\bmod 3$
U	$(x_3, x_1, x_4, x_2, x_5, x_6, x_7, x_8)$	+0	0
D	$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_6, x_8, x_5, x_7)$	+0	0
R	$(x_1, (x_4 + 2) \bmod 3, x_3, (x_8 + 1) \bmod 3, x_5, (x_2 + 1) \bmod 3, x_7, (x_6 + 2) \bmod 3)$	+6	0
L	$((x_5 + 1) \bmod 3, x_2, (x_1 + 2) \bmod 3, x_4, (x_7 + 2) \bmod 3, x_6, (x_3 + 1) \bmod 3, x_8)$	+6	0
F	$(x_1, x_2, (x_7 + 1) \bmod 3, (x_3 + 2) \bmod 3, x_5, x_6, (x_8 + 2) \bmod 3, (x_4 + 1) \bmod 3)$	+6	0
B	$(x_2 + 2) \bmod 3, (x_6 + 1) \bmod 3, x_3, x_4, (x_1 + 1), (x_5 + 2) \bmod 3, x_7, x_8)$	+6	0

Jede valide Würfelkonfiguration C kann nur durch Züge erreicht werden. Züge bestehen aus Elementen der Menge $\{U, D, R, L, F, B\}$. In der Startkonfiguration ist der Summe der Vektoreinträge 0. Der Vektor x ist dabei $(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$ und die Summe der Einträge ist somit 0. Es gilt $0 \bmod 3 = 0$. Bei jedem der Grundzüge aus $\{U, D, R, L, F, B\}$ wird die Summe der Vektoreinträge um den Wert von s verändert. Die Variable s ist bei den Grundzügen entweder 0 oder 6. Es gilt auch $6 \bmod 3 = 0$ und damit auch $s \bmod 3 = 0$. Somit muss die Summe der Vektoreinträge immer 0 sein, wenn man modulo 3 rechnet, da jeder Zug Z aus einem der Grundzüge aus $\{U, D, R, L, F, B\}$ oder einer Kombination dieser besteht. Jedes Vielfache von 6 und 0 ergibt 0, wenn man modulo 3 rechnet. Es gilt also

$$(k \cdot s) \bmod 3 = 0 \text{ für } k \in \mathbb{N}$$

und somit gilt auch

$$\left(\sum_{i=1}^8 x'_i\right) \bmod 3 = \left(\sum_{i=1}^8 x_i\right) \bmod 3 = 0.$$

8 Lösung des Würfels

Die übliche, händische Methode zum Lösen eines Zauberwürfels ist das Kombinieren verschiedener Ebenendrehungen. Diese werden als eine Einheit angewendet und verändern die Konfiguration des Würfels dann spezifisch. Es gibt beispielsweise eine Kombination, die 3 der 4 Ecken der oberen Ebene untereinander im Uhrzeigersinn tauscht und deren Ausrichtung dabei nicht verändert.

In diesem Kapitel wird die Parität der Züge beschrieben und Kommutatoren erklärt. Dann wird beispielhaft ein Lösungsvorgang eines Menschen schrittweise beschrieben und erklärt. Außerdem werden Muster des Würfels algorithmisch beschrieben und grafisch dargestellt. Danach werden verschiedene Lösungsalgorithmen des $3 \times 3 \times 3$ -*Cubes* auf den $2 \times 2 \times 2$ -Würfel übertragen.

8.1 Parität der Zykel

Der Begriff der Parität wurde in Abschnitt 3.9 definiert und erklärt. Jeder n -Zykel kann als Produkt von 2-Zykeln geschrieben werden. Wenn n dabei gerade ist, hat das dazugehörige 2-Zykel-Produkt eine ungerade Anzahl an 2-Zykeln und anders herum. [5] Jede Würfelposition kann durch die Ebenendrehungen U, D, F, B, L, R (und die Rotation des Würfels) erreicht werden. Zur Erinnerung: Die Ebenendrehungen des Würfels sind durch folgende Zykel definiert:

$$\sigma_U = (ulf ulb urb urf)$$

$$\sigma_D = (dlf drf drb dlb)$$

$$\sigma_F = (ulf urf drf dlf)$$

$$\sigma_B = (ulb dlb drb urb)$$

$$\sigma_L = (ulb ulf dlf dlb)$$

$$\sigma_R = (urb drb drf urf)$$

Jeder Grundzug ist demnach als ein 4-Zykel definiert. Der 4-Zykel kann als Produkt aus drei 2-Zykeln geschrieben werden. Die Parität einer einzelnen Ebenendrehung ist demnach ungerade. Die Parität eines Zuges, der aus zwei Ebenendrehungen besteht (z. B. LF) ist somit gerade.

8.2 Kommutatoren

Der Kommutator von zwei Elementen Y, Z der Gruppe $(G_{2 \times 2 \times 2}, \circ)$ ist definiert als $[Y, Z] = YZY^{-1}Z^{-1}$ (s. Abschnitt 3.6). Kommutierende Elemente ergeben dabei das neutrale Element einer Gruppe. Wenn $Y = Z$ mit $Y, Z \in G_{2 \times 2 \times 2}$ gilt, kommutieren Y und Z . Dazu folgt nun der Beweis.

Zur besseren Übersichtlichkeit wird $[Y, Z]$ mit $Y = Z$ nun als $[Z, Z]$ geschrieben. Das ist dann das Gleiche wie $ZZZ^{-1}Z^{-1} = Z(ZZ^{-1})Z^{-1}$. (ZZ^{-1}) ist äquivalent mit dem neutralen Element N . Daraus ergibt sich $Z(N)Z^{-1} = ZZ^{-1} = N$. Somit kommutieren alle $Y, Z \in G_{2 \times 2 \times 2}$ mit $X = Y$.

Es kommutieren nicht nur zwei gleiche Züge sondern auch Züge, die nur gegenüberliegende Ebenen beeinflussen. Somit bewegen sie nicht dieselben Steine und elementfremde Zyklen kommutieren [12]. Das sind dann die Kommutatoren der Form $[U^n, D^n]$, $[F^n, B^n]$ und $[L^n, R^n]$ (und anders herum) mit $n \in \mathbb{N}$. Da die beiden Züge nicht dieselben Steine beeinflussen, ist es nicht relevant, dass die Gruppe nicht kommutativ ist und durch $YZY^{-1}Z^{-1}$ werden beide Züge wieder invertiert.

Auch wenn zwei Züge $Y, Z \in G_{2 \times 2 \times 2}$ nicht kommutieren, kann anhand der Komplexität des Kommutators festgestellt werden, wie groß die Veränderung der Würfelkonfiguration nach $[Y, Z]$ ist. Als Beispiel zur Veranschaulichung: Die Züge $Y = L$ und $Z = F$ verändern durch $[Y, Z]$ vier Steine im Würfel. Die anderen vier behalten ihre Position und Ausrichtung. Es wird dabei $LFL^{-1}F^{-1}$ ausgeführt. Das führt zu folgenden Permutationen:

Zug	ulb	urb	ulf	urf	dlb	drb	dlf	drf
L	ulf	urb	dlf	urf	ulb	drb	dlb	drf
F	urf	urb	ulf	drf	ulb	drb	dlb	dlf
L^{-1}	urf	urb	ulb	drf	dlb	drb	dlf	ulf
F^{-1}	ulf	urb	ulb	urf	dlb	drb	drf	dlf

Wenn nun die Kopfzeile der Tabelle und die unterste Zeile verglichen werden, zeigt sich, dass urb , urf , dlb und drb wieder an ihrer Ausgangsposition sind. Die anderen vier Steine (ulf , ulb , urf und ulf) haben die Positionen gewechselt:

$$ulb \mapsto ulf \quad ulf \mapsto ulb \quad dlf \mapsto drf \quad drf \mapsto dlf$$

Daraus ergibt sich $[L, F] = (ulb\ ulf)(dlf\ drf)$ in der Zykelschreibweise.

8.3 Lösungsansätze

Für die Lösung des Würfels sind Züge nützlich, die nur wenige Steine beeinflussen. So können dann gezielt bestimmte Steine gedreht oder getauscht werden.

Es gibt verschiedene Vorgehensweisen, um den Würfel zu lösen. Üblicherweise wird mit der weißen Seite angefangen, deshalb werden auch die folgenden Beispiele so vorgehen. Der Würfel wird ebenenweise gelöst und die gelbe Seite gehört zur letzten Ebene, die gelöst wird. Für die Lösungsalgorithmen ist die Farbe der ersten Seite nicht relevant. Es wird aber häufig mit weiß begonnen, da die Anordnung der Farben so leichter zu merken ist. Dann kann schneller gesehen werden, in welche Ebene ein Stein gehört [7].

Bei einem der Lösungsansätze wird zuerst die erste Ebene vollständig gelöst und danach die zweite. Die erste Ebene kann durch simplere Züge gelöst werden als die zweite Ebene. Grund dafür ist, dass die Anordnung der Steine der zweiten Ebene beim Lösen der ersten Ebene noch nicht relevant ist. Beim Lösen der zweiten Ebene müssen komplexere Züge genutzt werden, um den gelösten Zustand der ersten Ebene beizubehalten.

Eine gängige Lösungsmethode für die zweite Ebene geht so vor, dass zuerst alle Steine der Ebene richtig ausgerichtet werden. Dann sind alle $x_i = 0$. Danach werden die Positionen noch getauscht. Die Würfelkonfiguration ist dann $(1, 0)$.

Bei einem anderen Lösungsansatz werden zuerst alle Steine der ersten Ebene richtig ausgerichtet. Es gibt dann eine weiße Seite aber die Position der Steine ist dabei unwichtig. Danach werden alle Steine der zweiten Ebene ausgerichtet. Auch hier ist die Position nicht relevant. Wenn alle Steine korrekt ausgerichtet sind, werden sie untereinander getauscht und der Würfel wird so gelöst.

Die beiden beschriebenen Lösungsansätze führen nicht zu einer optimalen Lösung des Würfels. Mehr zu der optimalen Lösung findet sich am Ende von Kapitel 8.4 und in Kapitel 9.6.

8.4 Lösung des Würfels anhand eines Beispiels

In diesem Beispiel (Abbildung 23) wird der Würfel mit dem Zug $FUBRF^{-1}$ verdreht und so gelöst, wie ein Mensch den *Cube* lösen würde. Der Würfel befindet sich dann in der Konfiguration $C = ((ulf\ dlf\ dlb\ urf), (2, 2, 0, 0, 2, 2, 1, 0))$. In den Abbildungen wurde der Würfel noch um 90° um die z -Achse rotiert. Dann ist die Würfelkonfiguration $C' = ((ulb\ urb\ urf)(ulf\ dlb)(drb\ drf\ dlf), (0, 2, 0, 2, 1, 2, 0, 2))$.

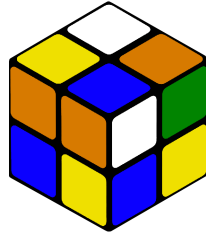


Abbildung 23: *Cube* nach Zug $FUBRF^{-1}$

Der erste Schritt für einen menschlichen Ansatz der Lösung des Würfels ist (meistens), die Steine der oberen Ebene so anzuordnen, dass die Farbflächen dort alle weiß sind und die vier oberen Steine in der richtigen Position zueinander sind. Für die Lösung der oberen Ebene muss $x_{1-4} = (0, 0, 0, 0)$ gelten und die Steine der Ebene müssen an der richtigen Position zueinander sein.

Der Lösende sucht nun Steine mit weißen Farbflächen und findet den weiß-orange-blauen Stein an der Position *urf*. Mit dem Zug F^{-1} findet der Stein seinen Platz in der oberen Ebene, mit der weißen Farbfläche oben. Nun ist $x''_{1-4} = (0, 2, 0, 1)$ und der Würfel sieht so aus, wie in Abbildung 24 dargestellt: Es befinden sich nun zwei Steine der oberen Ebene an der richtigen Position – der weiß-orange-blaue Stein und der weiß-rot-blaue Stein. Die neue Würfelkonfiguration ist dann $C'' = C' \cdot F^{-1} = ((ulb\ urb\ ulf\ dlb\ dlf\ drb\ urb), (0, 2, 0, 1, 1, 2, 2, 1))$.

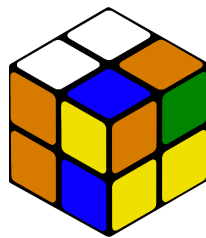


Abbildung 24: Lösung von Mensch: Schritt 1

Der nächste Stein, der angeordnet wird, ist hier der weiß-grün-orange Stein. Er wird durch den Zug R^{-1} in Position gebracht und findet seinen Platz neben dem weiß-orange-

blauen Stein in der oberen Ebene (s. Abbildung 25). Die Würfelkonfiguration C''' ist dann $C'' \cdot R^{-1} = ((ulb\ urf)(drb\ drf)(urb\ ulf\ dlb\ dlf), (0, 1, 0, 0, 2, 0, 1, 2))$.

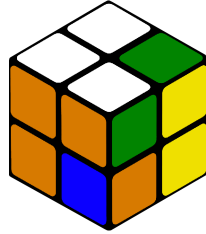


Abbildung 25: Lösung von Mensch: Schritt 2

Der letzte Stein mit weißer Farbfläche wird dann durch den Zug $RD^{-1}R^{-1}$ positioniert. Die obere Ebene ist nun gelöst und alle Steine mit weißen Farbflächen sind wie in der Startkonfiguration zueinander ausgerichtet. (s. Abbildung 26). Die Würfelkonfiguration ist $C^{IV} = ((ulb\ urf)(urb\ ulf)(drb\ drf\ dlf), (0, 0, 0, 0, 2, 0, 1, 0))$.

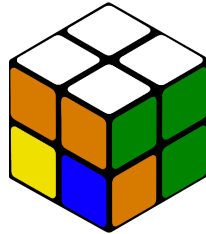


Abbildung 26: Lösung von Mensch: Schritt 3

Für den nächsten Schritt rotiert der Mensch den Würfel, hier zweimal um die y -Achse (s. Abbildung 27). Die weiße Seite ist nun unten und zwei der vier gelben Farbflächen sind nach oben ausgerichtet. Dann ist die Würfelkonfiguration $C^V = ((ulb\ drb\ urb\ dlb\ ulf\ drf)(urf\ dlf), (1, 0, 2, 0, 0, 0, 0, 0))$

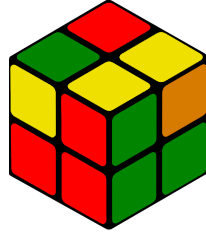


Abbildung 27: Lösung von Mensch: Schritt 4

Dann führt der Lösende den Zug $RUR^{-1}U^{-1}R^{-1}FRF^{-1}$ aus [6] und erhält einen gelösten Würfel, der falsch herum gehalten wird (s. Abbildung 28). Die Würfelkonfiguration ist $C^{VI} = ((ulb\ drb)(urb\ dlb)(ulf\ drf)(urf\ dlf), (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0))$

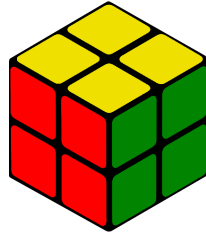


Abbildung 28: Der *Cube* ist gelöst, die weiße Seite ist unten.

Wenn dieser Würfel nun noch zweimal um die x -Achse gedreht wird, befindet er sich in der Konfiguration $C^{VII} = (1, 0)$.

Der Mensch folgt beim Lösen des *Cubes* (meistens) bestimmten Kombinationen, die in verschiedenen Situationen angewendet werden können. In diesem Fall hat der Mensch 13 Ebenen gedreht, während das Verdrehen nur 5 Ebenenrotationen benötigte. Der Mensch hat folglich nicht den kürzesten Weg gewählt, aber dafür einen Weg, den er bei verschiedenen Würfelkonfigurationen anpassen und verwenden kann. Wenn die Verdrehung des Würfels invertiert wird $((FUBRF^{-1})^{-1})$, ergibt das die Kombination $FR^{-1}B^{-1}U^{-1}F^{-1}$, um den Würfel zu lösen.

Es stellt sich die Frage, wie viele Ebenendrehungen der $2 \times 2 \times 2$ -Würfel maximal von der Lösung entfernt sein kann. Diese Zahl wird auch *God's Number* genannt.

Bei einer Ebenendrehung werden die Ebenen um 90° gedreht. Eine Ebenendrehung um

180° wird als zwei Vierteldrehungen gewertet. Das wird *Quarter-Turn* Metrik genannt. Es gibt noch andere Metriken, wie z. B. die *Half-Turn* Metrik, bei der eine Drehung der Ebene um 90° oder um 180° als eine Drehung gezählt werden [10]. Wenn in der *Quarter-Turn* Metrik gerechnet wird, ist die *God's Number* des 2×2×2-Würfels 14 [9]. Mehr zu der optimalen Lösung findet sich in Kapitel 9.6.

8.5 Muster

Dieser Abschnitt ist inspiriert von dem Part *Pretty Patterns* in Tom Davis' *Group Theory via Rubik's Cube* [5]. Dort zeigt er einige *hübsche* Muster des 3×3×3-Würfels und hier werden nun einige Muster des 2×2×2-Würfels gezeigt. In Abbildung 29 werden vier Muster des *Cubes* gezeigt und die dazugehörigen Algorithmen von der Startkonfiguration ausgehend beschrieben.

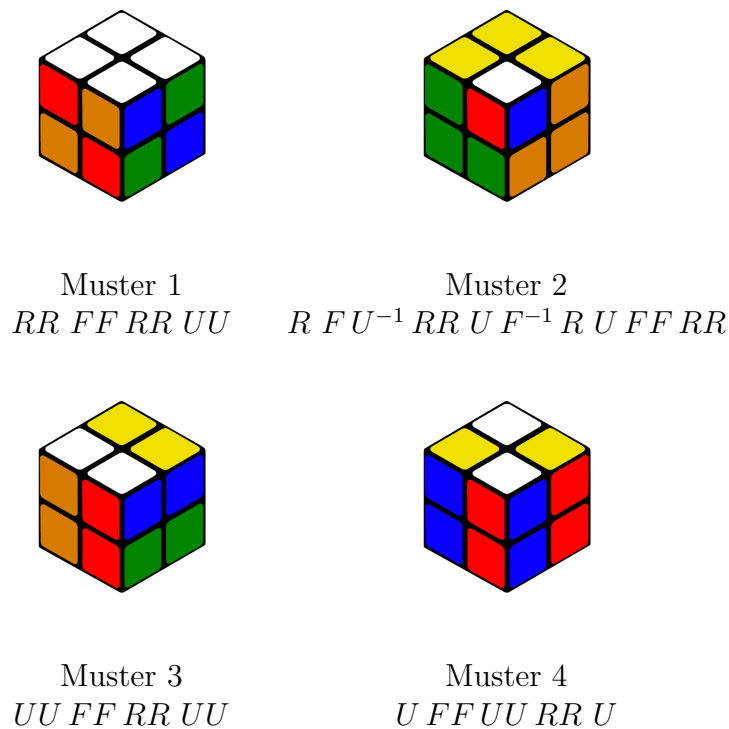


Abbildung 29: Muster des 2×2×2-Würfels

Muster 1 lässt die weiße und gelbe Seite unverändert und bildet ein Karomuster auf den anderen vier Seiten. Dabei werden die Farbpaare rot-orange und grün-blau zusammen im Karomuster angeordnet. Die Konfiguration des Würfels ist dann $C = ((ulb\ urf)(drb\ dlf), (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0))$.

Muster 2 hat einen *Würfel im Würfel*. Dabei werden zwei Steine getauscht, die keine gemeinsame Farbfläche haben. Der Würfel befindet sich dann in der Konfiguration $C = ((ulb\ drf)(ulf\ dlf)(drb\ urb), (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0))$

Muster 3 zeigt abwechselnd Quer- und Längsstreifen auf den verschiedenen Seiten. Die Konfiguration des Würfels ist dann $C = ((ulb\ dlf\ drb)(urb\ ulf\ drf), (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0))$.

Muster 4 ordnet die Farben wie vier Säulen an. Die weiße und die gelbe Seite ist dabei kariert, die anderen Seiten gestreift. Die Konfiguration des Würfels ist dann $C = ((urb\ dlf)(ulf\ drb), (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0))$.

Diese Muster sind in den meisten Fällen zwar keine üblichen Lösungsalgorithmen, sollten aber in dieser Arbeit auch nicht unerwähnt bleiben.

8.6 Schraubendrehermethode

Die Methode, die oft als simpelste Methode zum Lösen von Zauberwürfeln beschrieben wird, ist die Schraubendrehermethode. Bei den üblichen $2 \times 2 \times 2$ -Würfel ist auf einer oder mehreren Seiten in der Mitte zwischen den Steinen eine Schraube zu sehen (s. links in Abbildung 30). Um den Würfel auseinander zu bauen, muss diese Schraube gelockert werden. Daraufhin kann die Ebene ohne Probleme abgenommen werden. Dann werden die Steine neu arrangiert und der Würfel kann in der gelösten Konfiguration wieder zusammengebaut werden.

Ob das wirklich die simpelste Methode ist, liegt wohl im Auge des Betrachters und unter Berücksichtigung der Tatsache, dass der Weltrekord des $2 \times 2 \times 2$ -Würfels mit der Methode des algorithmischen, händischen Lösens bei 0,49 Sekunden liegt [2], ist die Schraubendrehermethode wohl kaum die schnellste Methode.

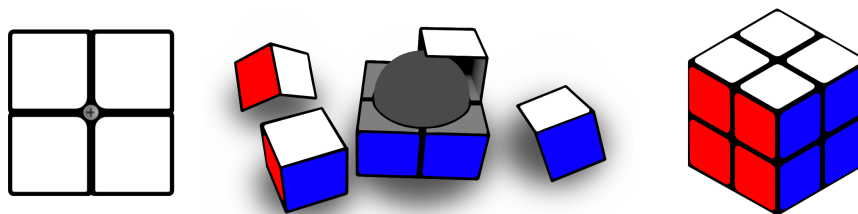


Abbildung 30: Lösung durch Schraubendrehermethode

8.7 Algorithmen für die erste Ebene

Da der $2 \times 2 \times 2$ -im Gegensatz zum $3 \times 3 \times 3$ -Würfel keine Mittelsteine hat, kann ein Eckstein als richtig angenommen werden, da der Würfel nur gedreht werden muss, um eine weiße Farbfläche zu finden. In diesen Beschreibungen wird sich an die Konvention gehalten, mit der weißen Seite oben zu beginnen. Es kann aber mit jeder anderen Seite des Würfels auch begonnen werden. Der $3 \times 3 \times 3$ -*Cube* muss entsprechend der Mittelsteine ausgerichtet werden und so ist vorbestimmt, welche Seite die weiße Seite wird, je nach Ausrichtung der Mittelsteine. Bei dem $2 \times 2 \times 2$ -*Cube* kann mit jeder beliebigen Seite begonnen werden. Wenn unbedingt mit einer bestimmten Seite als Oberseite begonnen werden soll, die noch keine weiße Farbfläche hat, so kann die Farbfläche durch maximal zwei Ebenendrehungen an diese Seite gebracht werden.

In Abbildung 31 wird der erste Eckstein der oberen Ebene positioniert. Das kann dort entweder durch den Zug R oder einer Rotation um die y -Achse passieren.

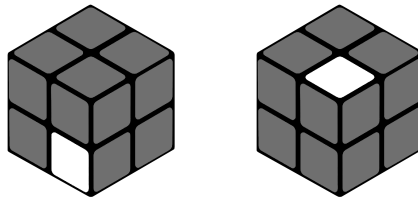


Abbildung 31: ersten Eckstein positionieren

Der zweite Stein kann dann hinzugefügt werden. Es gibt für den $2 \times 2 \times 2$ -Würfel Lösungsmethoden, bei denen zuerst alle weißen Farbflächen ausgerichtet und dann die Steinposition anpasst werden. Da hier aber Algorithmen des $3 \times 3 \times 3$ -Würfels übertragen werden, und bei diesem die Steine der oberen Ebene üblicherweise direkt richtig ausgerichtet und positioniert werden, wird hier auch so vorgegangen. Die Farbfläche des zweiten Steins muss sich für diesen Algorithmus seitlich an der unteren Ebene befinden. Optimalerweise befindet sich der Stein schon zufällig an der gewünschten, korrekten Position. Ansonsten wird D ausgeführt, bis der Stein sich unter seiner Zielposition befindet und er wird mit L , R , F oder R neben den bereits vorhandenen ersten Eckstein gedreht. Das ist auch in Abbildung 32 zu sehen.

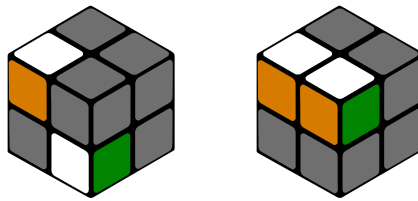


Abbildung 32: zweiten Eckstein positionieren

Dort sind auch orange und grüne Farbflächen abgebildet. Das gilt analog für die anderen benachbarten Farbflächen. Zu beachten ist, dass die beiden Farbflächen einer Seite auch die gleiche Farbe haben.

Sollte die weiße Farbfläche der Ecke unten am Würfel sein, so kann sie falsch herum ausgerichtet mit der Technik aus Abbildung 32 an die Position gesetzt werden. Dann befindet sich die weiße Farbfläche in der oberen Ebene, aber falsch herum ausgerichtet. Wenn das der Fall ist, kann der Stein mit einem der Züge L , R , F oder B herausgedreht werden und mit U in die untere Ebene geschoben werden. Dieser Vorgang ist auch in Abbildung 33 zu sehen. Danach wird er mit der oben beschriebenen Technik richtig ausgerichtet und positioniert eingefügt (s. Abbildung 32).

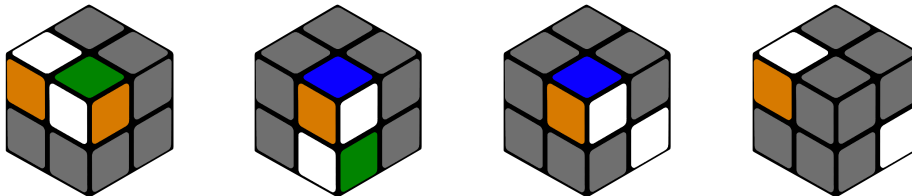


Abbildung 33: zweiter Eckstein: Sonderfall

Die anderen zwei Steine der ersten Ebene lassen sich mit der oben genannten Technik ebenfalls positionieren. Die obere Ebene ist dann gelöst. Bei dem $2 \times 2 \times 2$ -Würfel entspricht das Lösen der oberen Ebene sogar schon der Hälfte des Würfels.

8.8 Algorithmen für die zweite Ebene

Beim Lösen der zweiten Ebene muss beachtet werden, die erste Ebene nicht wieder zu verdrehen. Deshalb sind die Algorithmen hier länger, um spezifische Steine zu bewegen. In Abbildung 34 ist die obere Ebene des Würfels gelöst.

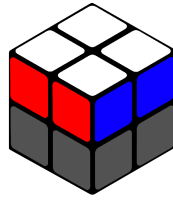
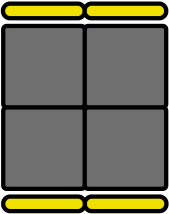
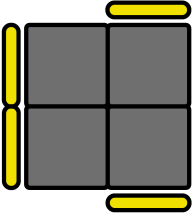


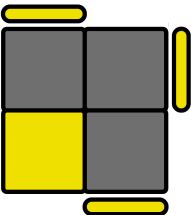
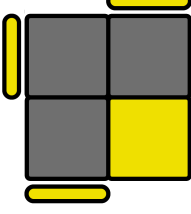
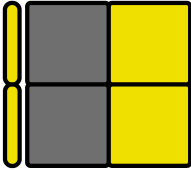
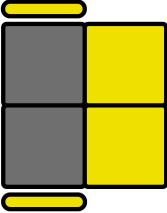
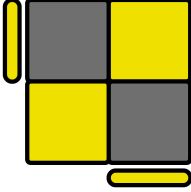
Abbildung 34: Würfel mit gelöster oberer Ebene

Ein Mensch dreht den Würfel zum Lösen der zweiten Ebene meistens um. Der Anschaulichkeit halber wird das hier auch gemacht.

Zuerst werden nun alle Steine richtig ausgerichtet, so dass die obere Seite des Würfels nur noch gelbe Farbflächen zeigt. Der Vektor x ist dann 0. Dann werden die Steine getauscht, bis sie richtig angeordnet sind. Dann ist die Permutationsfunktion σ 1.

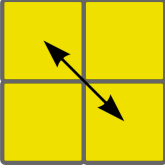
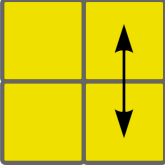
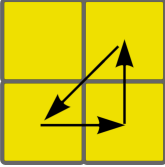
Da es auch nach Lösung der ersten Ebene noch viele mögliche Würfelkonfigurationen und Algorithmen zur Lösung dieser gibt, werden die möglichen Steinpositionen und Algorithmen in einer Tabelle aufgeführt. Die Algorithmen führen alle zu einer Würfelkonfiguration, bei der die untere (bereits gelöste) Ebene unverändert bleibt und die obere Seite nur gelbe Farbflächen zeigt. Viele dieser Algorithmen enthalten $(RUR^{-1}U^{-1})$, was der Kommutator $[R, U]$ ist.

Ausgangsposition	Algorithmus
	$F [R, U] [R, U] [R, U] F^{-1}$
	$F [R, U] [R, U] F^{-1}$

Ausgangsposition	Algorithmus
	$R U R^{-1} U R U U R^{-1}$
	$L^{-1} U^{-1} L U^{-1} L^{-1} U U L$
	$F [R, U] F^{-1}$
	$[R, U] [R^{-1}, F]$
	$F [R, U] R^{-1} F^{-1} R$

Die obere Seite des Würfels zeigt nach dem Ausführen der Algorithmen nur noch gelbe Farbfleichen. Die Ausrichtung der Steine ist dann bereits richtig und der Vektor x somit 0. Wenn alle Steine der zweiten Ebene auch bereits richtig zueinander angeordnet sind, muss die Ebene eventuell mit U , U^{-1} oder UU richtig zur ersten Ebene ausgerichtet werden. Ansonsten werden die Steine getauscht, bis sie richtig angeordnet sind.

Zum Vertauschen der Steine untereinander (ohne die Ausrichtung zu verändern), gibt es auch wieder verschiedene Algorithmen. Diese Algorithmen werden im Folgenden in einer Liste aufgeführt. Die Pfeile zeigen an, welche Steine beim Ausführen der Algorithmen an welche Würfelposition gelangen.

Steinpermutation	Algorithmus
	$F R U^{-1} [R^{-1}, U^{-1}] R^{-1} F^{-1} [R, U][R^{-1}, F]$
	$[R, U] R^{-1} F R R U^{-1} [R^{-1}, U^{-1}] R^{-1} F^{-1}$
	$R B^{-1} R F F R^{-1} B R F F R R$

Nach Wahl der passenden Algorithmen sollten beide Ebenen gelöst sein. Eventuell müssen die beiden Ebenen noch durch U , U^{-1} oder UU richtig zueinander ausgerichtet werden. Dann befindet sich der Würfel im gelösten Zustand und die Würfelkonfiguration ist somit $(1, 0)$.

9 Minimale Gruppe

In diesem Kapitel wird die Gruppe des $2 \times 2 \times 2$ -Würfels mit minimalen Zügen realisiert. Die Gruppe des $(G_{2 \times 2 \times 2}, \circ)$ ist eine vollständige Abbildung des $2 \times 2 \times 2$ -Würfels – sie ist aber nicht minimal. So eine minimale Abbildung wird in diesem Kapitel definiert. Diese minimale Abbildung ist eine Untergruppe von $(G_{2 \times 2 \times 2}, \circ)$.

9.1 Minimale Permutationen

Wie bereits beschrieben, sind die Züge U , D , R , L , F und B des $2 \times 2 \times 2$ -Würfels nicht minimal. Der Zug U und der Zug D beispielsweise sind äquivalent, aber mit einer Rotation des kompletten Würfels. Die Menge der minimalen Züge ist $\{U, R, F\}$. Die Permutationen dieser drei Grundzüge sind die Permutationen σ . Dabei handelt es sich um die gleichen Permutationsfunktionen wie in Kapitel 4.1. Es gibt aber nur drei statt sechs Funktionen für die Permutationen, da es auch nur drei Grundzüge gibt.

$$\sigma_U = (\text{ ulf ulb urb urf })$$

$$\sigma_R = (\text{ urb drb drf urf })$$

$$\sigma_F = (\text{ ulf urf drf dlf })$$

Keiner dieser drei Grundzüge lässt sich durch einen anderen Zug oder eine Kombination anderer Züge darstellen.

Die Untergruppe der minimalen Abbildung des $2 \times 2 \times 2$ -Würfels wird (G_{min}, \circ) genannt. Die Menge G_{min} enthält die Äquivalenzklassen der minimalen Züge des Würfels. Die Grundzüge U , R , und F sind somit die Erzeuger der Untergruppe (G_{min}, \circ) . Der Stein dlb (unten, links, hinten) wird durch keine dieser Permutationen bewegt. Das wird bei der Definition der minimalen Rotation des Würfels (Abschnitt 9.2) genauer beschrieben.

9.2 Minimale Rotation des Würfels

Da die Grundzüge des Würfels für die minimale Abbildung die Züge U , R und F sind, bleibt der Stein unten links hinten (dlb) immer unbewegt. Der Würfel muss demnach nicht rotiert werden, da er anhand des Steines dlb eine feste Ausrichtung hat. Dieser Stein ist in Abbildung 35 hervorgehoben, der Würfel wird dort von hinten gezeigt.

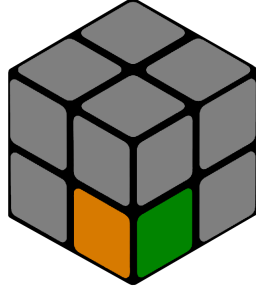


Abbildung 35: Würfel von hinten, farbig ist *fester* Stein *dlb*

Somit ist bei der minimalen Abbildung des $2 \times 2 \times 2$ -Würfels keine Rotation des Würfels nötig, da sich die Ausrichtung des Würfels anhand des Steins *dlb* immer fest bestimmen lässt.

9.3 Minimale Ausrichtung der Steine

Nachdem in Abschnitt 9.1 bereits die Positionen der Steine durch die minimale Anzahl der Permutationen abgebildet wurde, wird in diesem Abschnitt die Ausrichtung der Steine beschrieben. Das erfolgt über einen 8-dimensionalen Vektor x , der die Ober- und Unterseite des Würfels und die sich dort befinden Farbflächen der Steine abbildet. Die Definition des Vektors x der Gruppe $(G_{2 \times 2 \times 2}, \circ)$ findet sich in Abschnitt 4.2. Da der Stein an der Position *dlb* bei der minimalen Untergruppe (G_{min}, \circ) immer als fest angenommen wird, ist der fünfte Vektoreintrag immer 0.

Die Vektorübergangsfunktionen der Rotationen werden nicht gebraucht, da der Würfel eine feste Ausrichtung hat. Die Veränderung der Vektoreinträge kann also durch die drei Funktionen der Grundzüge vollständig abgedeckt werden.

$$\begin{aligned} \gamma_U((x_1, x_2, x_3, x_4, 0, x_6, x_7, x_8)) \\ = (x_3, x_1, x_4, x_2, 0, x_6, x_7, x_8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_R((x_1, x_2, x_3, x_4, 0, x_6, x_7, x_8)) \\ = (x_1, g(x_4), x_3, h(x_8), 0, h(x_2), x_7, g(x_6)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \gamma_F((x_1, x_2, x_3, x_4, 0, x_6, x_7, x_8)) \\
&= (x_1, x_2, h(x_7), g(x_3), 0, x_6, g(x_8), h(x_4))
\end{aligned}$$

9.4 Erzeuger und Cayleygraph von G_{min}

Die Untergruppe (G_{min}, \circ) wird durch $\{U, R, F\}$ erzeugt. Der vollständige Cayleygraph dieser Untergruppe hat 3 647 160 Mitglieder. Das ist die Anzahl der validen Würfelkonfigurationen. Jede Äquivalenzklasse aus G_{min} steht für die Züge, durch die man eine bestimmte Würfelkonfiguration erreichen kann. Da der vollständige Cayleygraph deutlich zu umfangreich für den Rahmen dieser Arbeit ist, ist in Abbildung 36 nur ein Ausschnitt dieses Graphens zu sehen. Die roten Pfeile repräsentieren den Zug F , R wird durch blau repräsentiert und U durch grün.

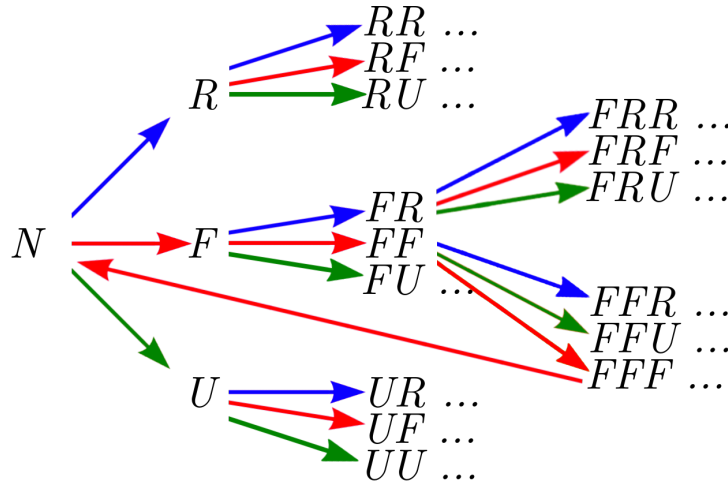


Abbildung 36: Cayleygraph der Untergruppe G_{min}

Am Knoten FFF kann man sehen, dass der Pfeil beim hinzufügen eines weiteren F zurück zu N führt. Das liegt daran, dass $FFFF$ und N aus der gleichen Äquivalenzklasse sind und den gleichen Zug repräsentieren.

9.5 Äquivalenz der Gruppen

In diesem Abschnitt wird bewiesen, dass die Mengen $G_{2 \times 2 \times 2}$ und G_{min} gleichmächtig sind und somit beide eine vollständige Abbildung des $2 \times 2 \times 2$ -Würfels bilden.

Dazu wird zuerst gezeigt, dass die Züge der minimalen Untergruppe (G_{min}, \circ) ausreichen, um alle Züge des Würfels zu repräsentieren. Bei den Elementen der Mengen $G_{2 \times 2 \times 2}$ und G_{min} handelt es sich um die Äquivalenzklassen der Züge. Die Elemente der Menge $G_{2 \times 2 \times 2}$ können aus den Grundzügen U, D, R, L, F und B bestehen. Die Rotationen des Würfels werden hier nicht als Züge berücksichtigt, da die Äquivalenzklassen die Gleichheit von zwei Würfelkonfigurationen mit Rotation berücksichtigen. Jeder der Grundzüge U, D, R, L, F und B der Gruppe $(G_{2 \times 2 \times 2}, \circ)$ kann durch einen der Grundzüge der minimalen Gruppe (G_{min}, \circ) dargestellt werden. Der Würfel kann dann verschieden rotiert sein, das wird aber durch die Äquivalenzklassen abgefangen, die die Gleichheit von zwei Zügen mit optionaler Rotation realisieren. In der folgenden Tabelle sind die Züge der Gruppe $(G_{2 \times 2 \times 2}, \circ)$ und die dazugehörigen, minimalen Repräsentanten der Untergruppe (G_{min}, \circ) dargestellt:

$G_{2 \times 2 \times 2}$	U	D	R	L	F	B
G_{min}	U	U	R	R	F	F

So kann jeder Zug aus $G_{2 \times 2 \times 2}$ mit den Zügen aus G_{min} dargestellt werden. Dabei muss die Ausrichtung des Würfels aber beachtet werden. Beispielsweise ruft der Zug ULF bei der Gruppe $(G_{2 \times 2 \times 2}, \circ)$ die gleiche Würfelkonfiguration hervor, wie der Zug URU bei der Untergruppe (G_{min}, \circ) , wenn dabei die Rotation des Würfels nicht berücksichtigt wird. Dadurch, dass er Zug nach Ausführen des Zuges L bzw. R unterschiedlich rotiert ist, verändert sich der Folgezug.

Wird also beispielweise der Zug L ausgeführt und in den Zug R überführt, um der minimalen Abbildung zu entsprechen, so müssen die folgenden Züge entsprechend verändert werden. Bei dem Zug L werden die Folgezüge wie folgt verändert:

$$\begin{array}{lll}
\rho_L(U) = B & \rho_L(D) = F & \rho_L(R) = R \\
\rho_L(L) = L & \rho_L(F) = U & \rho_L(B) = D
\end{array}$$

Bei den Zügen U, R, F bleiben die Folgezüge unverändert, da diese Züge in beiden Gruppen identisch sind. Bei den Zügen D, L, B werden die Folgezüge aufgrund der Würfelausrichtung verändert. Daraus ergibt sich die Überführung des Zuges ULF der Gruppe $(G_{2 \times 2 \times 2}, \circ)$ zum Zug URU bei der minimalen Untergruppe (G_{min}, \circ) :

$$U L F \Rightarrow U R \rho_L(F) \Rightarrow U R U$$

Die Überföhrungsfunktionen alle Grundzüge sind im Folgenden definiert:

$$\begin{array}{lll}
\rho_D(U) = U & \rho_D(D) = D & \rho_D(R) = F \\
\rho_D(L) = B & \rho_D(F) = L & \rho_D(B) = R \\
\\
\rho_L(U) = B & \rho_L(D) = F & \rho_L(R) = R \\
\rho_L(L) = L & \rho_L(F) = U & \rho_L(B) = D \\
\\
\rho_B(U) = R & \rho_B(D) = L & \rho_B(R) = D \\
\rho_B(L) = U & \rho_B(F) = F & \rho_B(B) = B
\end{array}$$

Anhand dieser Funktionen lassen sich alle Züge der Gruppe $(G_{2 \times 2 \times 2}, \circ)$ in Züge der minimalen Gruppe (G_{min}, \circ) überföhren. Die Funktionen ρ werden auf alle Elemente angewendet, die hinter dem entsprechenden Zug ausgeföhrt werden sollen. Die Funktion kann auch verschachtelt werden. Zur besseren Anschaulichkeit folgt noch ein Beispiel:

$$\begin{aligned}
& U \ R \ F \ \mathbf{B} \ R \ L \ F \\
\Rightarrow & U \ R \ F \ F \ \rho_B(R) \ \rho_B(L) \ \rho_B(F) \\
\Rightarrow & U \ R \ F \ F \ \mathbf{D} \ U \ F \\
\Rightarrow & U \ R \ F \ F \ U \ \rho_D(U) \ \rho_D(F) \\
\Rightarrow & U \ R \ F \ F \ U \ U \ \mathbf{L} \\
\Rightarrow & U \ R \ F \ F \ U \ U \ R
\end{aligned}$$

9.6 Minimaler Lösungsweg

Auf die *God's Number* des $2 \times 2 \times 2$ -Würfels wurde am Ende von Kapitel 8.4 bereits eingegangen. Bei der *Quarter-Turn Metrik* werden ausschließlich Vierteldrehungen der Ebenen als eine Ebenendrehung gezählt und die *God's Number* ist dann 14. Bei der *Half-Turn Metrik* werden auch halbe Drehungen einer Ebene als eine Ebenendrehung gewertet und somit ist die *God's Number* dann nur 11.

Die Suche nach dem optimalen Lösungsweg, ausgehend von einer Konfiguration C_0 , kann durch einen Baum realisiert werden. Um dies effizient zu gestalten, sollte der Baum möglichst klein sein. Im Folgenden werden verschiedene Ansätze für die Umsetzung eines

solchen Baumes beschrieben. Die Implementierung dafür überschreitet den Umfang dieser Arbeit. Deshalb wird hier nur das Konzept entworfen und die Größe berechnet.

Die Gruppe $(G_{2 \times 2 \times 2}, \circ)$ wird durch die Züge U, D, R, L, F und B erzeugt. Da diese Züge allerdings nicht minimal sind, reichen für einen minimalen Baum drei dieser Züge aus: U, R und F . Diese drei Züge erzeugen die Untergruppe (G_{min}, \circ) . Somit kann der minimale Baum von dieser Untergruppe ausgehend gebildet werden, da sie (genau wie $(G_{2 \times 2 \times 2}, \circ)$) den kompletten Würfel abbildet.

Wenn man jeden möglichen Zug für die *Quarter-Turn Metrik* betrachtet, erhält man sechs Züge, da jeder Ebene in zwei Richtungen gedreht werden kann. Es handelt sich dabei um die Züge F, F^{-1}, R, R^{-1}, U und U^{-1} .

Von jeder Konfiguration C_i ausgehend sieht der Baum dann so aus:

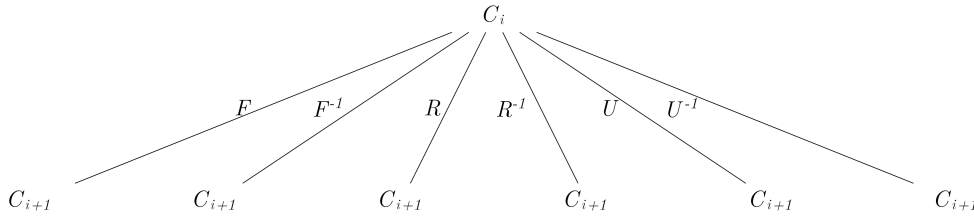


Abbildung 37: Lösungsbaum: *Quarter-Turn Metrik*

Jeder der Baumknoten hat demnach 6 Kinder. Da die *God's Number* in der *Quarter-Turn Metrik* 14 ist, ist der Würfel nach spätestens 14 Vierteldrehungen gelöst. Die Würfelkonfiguration ist dann $C_i = (1, 0)$ mit $i \leq 14$. Demnach hat der Baum eine maximale Größe von $6^{14} = 78\,364\,164\,096$ Knoten.

Wenn von der *Half-Turn Metrik* ausgegangen wird, sieht der Baum anders aus. Es gibt dann mehr mögliche Ebenendrehungen: $F, FF, F^{-1}, R, RR, R^{-1}, U, UU$ und U^{-1} . So sieht der Baum von jeder Konfiguration C_i ausgehend aus:

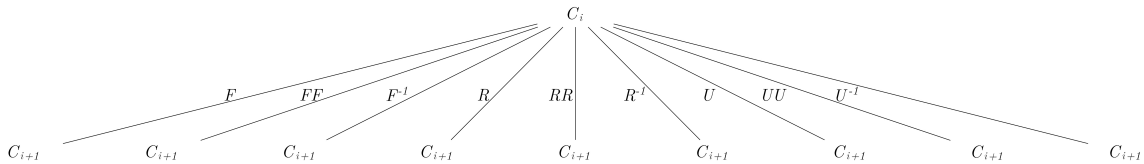


Abbildung 38: Lösungsbaum: *Half-Turn Metrik*

Bei diesem Baum hat jeder Knoten 9 Kinder. Da die *God's Number* in der *Half-Turn Metrik* 11 ist, hat der Baum eine maximale Tiefe von 11. Die maximale Größe des Baums

ist dann $9^{11} = 31\,381\,059\,609$. Der Baum der *Half-Turn Metrik* ist somit kleiner als der Baum der *Quarter-Turn Metrik*.

Die Berechnung der Lösung in der *Quarter-Turn Metrik* kann man auch mit dem Baum der *Half-Turn Metrik* umsetzen. Der Baum ist dann kleiner als der oben beschriebene Baum der *Quarter-Turn Metrik*. Der umgewandelte Baum hat pro Knoten 9 Kinder. Bei den Kanten mit halben Drehungen (FF , UU und RR) wird der Index der Folgekonfiguration aber um zwei statt um 1 inkrementiert. Dadurch kann mit diesem Baum auch der optimale Lösungsweg in der *Quarter-Turn Metrik* berechnet werden und die Größe des Baums ist maximal $9^{11} = 31\,381\,059\,609$.

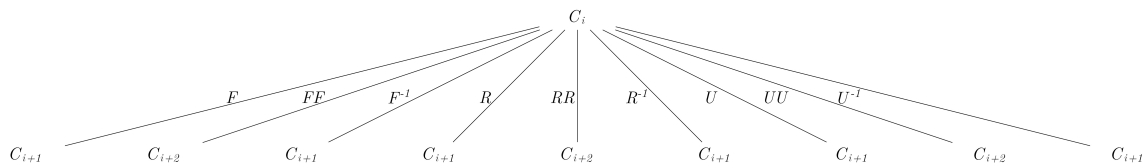


Abbildung 39: optimierter Lösungsbaum: *Half-Turn Metrik*

10 Fazit

10.1 Zusammenfassung und Ergebnis

In dieser Arbeit wurde die Gruppentheorie des $3 \times 3 \times 3$ -Würfels auf den $2 \times 2 \times 2$ -Würfel übertragen, da der $3 \times 3 \times 3$ - im Gegensatz zum $2 \times 2 \times 2$ -Würfel bereits oft untersucht wurde. Die Gruppe $(G_{2 \times 2 \times 2}, \circ)$ des $2 \times 2 \times 2$ -Würfels besteht aus der Menge aller Züge $(G_{2 \times 2 \times 2})$ und dem Operator \circ , der zwei Züge aneinander hängt. Die Mächtigkeit von $(G_{2 \times 2 \times 2}, \circ)$ ist die Anzahl der validen Würfelkonfigurationen, also ist $|G_{2 \times 2 \times 2}| = 3\,674\,160$. Die Rotation des kompletten Würfels wurde durch Äquivalenzrelationen realisiert. Außerdem wurden verschiedenen Lösungswege für den Würfel beschrieben und auf die *God's Number* eingegangen. Diese ist beim $2 \times 2 \times 2$ -Würfel 14.

Die Gruppe des $2 \times 2 \times 2$ -Würfels ist nützlich für die Veranschaulichung der Gruppentheorie an einem komplexen aber greifbaren Beispiel. Es können verschiedene Konzepte angewandt werden, wie Untergruppen, Erzeuger, zyklische Gruppen, Cayleygraphen, Gruppenoperationen, Kommutatoren, Äquivalenzrelationen, Mächtigkeit einer Gruppe, Ordnung von Gruppenelementen, Permutationen, Zykelschreibweise und symmetrische Gruppen.

10.2 Ausblick

Es wurden in dieser Arbeit Erzeuger und deren Cayleygraphen der Gruppe $(G_{2 \times 2 \times 2}, \circ)$ beschrieben. Die Generierung des Cayleygraphens der kompletten Gruppe wäre eine interessante Idee für eine andere Arbeit. Außerdem könnte eine *GUI* zum Lösen des $2 \times 2 \times 2$ -Würfels aufschlussreich sein, um effiziente Algorithmen zu finden und die Lösungswege des Würfels zu optimieren. Das kann auch mit dem Baum aus Kapitel 9.6 realisiert werden. Ein weiterer interessanter Aspekt ist das Finden eines Algorithmus, der die Gleichheit zweier Züge berechnet. Das kann mit einem Termersetzungssystem (*Rewriting*) umgesetzt werden und wäre nötig, um einen korrekten Cayleygraphen der Gruppe zu generieren.

Abbildungsverzeichnis

1	ungelöster und gelöster $2 \times 2 \times 2$ -Würfel	3
2	Eckstein und Farbfläche des Würfels	4
3	Seite des Würfels	4
4	ungelöster und gelöster $3 \times 3 \times 3$ -Würfel	4
5	Kant- und Mittelsteine	5
6	Ebene des Würfels	5
7	Cayleygraph von $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +)$ mit Erzeuger 1	11
8	Zykel $\pi = (1\ 5\ 2)\ (3\ 4)$	15
9	Namen der Steinpositionen im Würfel	17
10	aufgeklappter Würfel mit Namen der Steinpositionen	18
11	Steinpositionen nach Zug U	18
12	Markierungen x_i (links), Farbflächennummern (rechts)	20
13	links: x_1 bis x_8 , rechts: Veränderung nach dem Zug R	21
14	Würfel mit x, y und z -Achsen	27
15	Würfel nach Rotation um z -Achse	28
16	Würfel gelöst, nach Zug F und nach $Z_r L$	31
17	Würfel nach Zügen FR (links) und RF (rechts)	36
18	Ordnung des Zuges und der Permutation LF	38
19	Graph aller Zugpermutationen	39
20	Zykel des Zuges $LLFF$	40
21	Cayleygraph zu Erzeuger $\{F\}$	46
22	Cayleygraph zu Erzeuger $\{FF, RR\}$	47
23	<i>Cube</i> nach Zug $FUBRF^{-1}$	55
24	Lösung von Mensch: Schritt 1	55
25	Lösung von Mensch: Schritt 2	56
26	Lösung von Mensch: Schritt 3	56
27	Lösung von Mensch: Schritt 4	57
28	Lösung von Mensch: Schritt 5	57
29	Muster des $2 \times 2 \times 2$ -Würfels	58
30	Lösung durch Schraubendrehermethode	59
31	ersten Eckstein positionieren	60
32	zweiten Eckstein positionieren	61
33	zweiter Eckstein: Sonderfall	61

34	Würfel mit gelöster oberer Ebene	62
35	Würfel von hinten, farbig ist <i>fester Stein</i> <i>dlb</i>	66
36	Cayleygraph der Untergruppe G_{min}	67
37	Lösungsbaum: <i>Quarter-Turn Metrik</i>	70
38	Lösungsbaum: <i>Half-Turn Metrik</i>	70
39	optimierter Lösungsbaum: <i>Half-Turn Metrik</i>	71

Literatur

- [1] Muhammad Mirza Fathan Al Arsyad. *God's Algorithm in The 2x2x2 Rubik's Cube*. Online erhältlich unter <https://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/Matdis/2019-2020/Makalah2019/13518111.pdf>; abgerufen am 20.01.2021. 2019.
- [2] World Cube Association. *Rekorde*. Weltrekordliste. Online erhältlich unter <https://www.worldcubeassociation.org/results/records>; abgerufen am 09.02.2021.
- [3] Rubik's Brand. *Our heritage*. Website. Online erhältlich unter <https://www.rubiks.com/en-eu/about>; abgerufen am 04.02.2021. 2020 aktualisiert.
- [4] Janet Chen. *Group Theory and the Rubik's Cube*. Online erhältlich unter http://people.math.harvard.edu/~jjchen/docs/Group_Theory_and_the_Rubik's_Cube.pdf; abgerufen am 05.01.2021.
- [5] Tom Davis. *Group Theory via Rubik's Cube*. Online erhältlich unter <http://www.geometer.org/rubik/group.pdf>; abgerufen am 05.01.2021.
- [6] Roland Frisch. *Schnelle Lösung für den 2x2x2 Pocket Cube (Ortega Methode)*. Website. Online erhältlich unter <https://freshcuber.de/loesung-2x2x2-ortega/>; abgerufen am 31.01.2021. Publiziert am 19.04.2018.
- [7] Roland Frisch. *Zauberwürfel-Anfängerlösung Teil 1: Erste Ebene (weiß)*. Website. Online erhältlich unter <https://freshcuber.de/zauberwuерfel-loesung-teil1/>; abgerufen am 29.01.2021. Publiziert am 11.12.2017.
- [8] Tobias Glosauer. *Elementar(st)e Gruppentheorie*. Wiesbaden: Springer Spektrum, 2016.
- [9] David Joyner. *Adventures in Group Theory: Rubik's Cube, Merlin's Machine, and Other Mathematical Toys*. Online erhältlich unter <https://mike.verdone.ca/media/rubiks.pdf>; abgerufen am 12.01.2021. Baltimore, USA: Johns Hopkins University Press, 2008.
- [10] Tomas Rokicki. "Towards God's Number for Rubik's Cube in the Quarter-Turn Metric". In: *The College Mathematics Journal* 45.4 (2014), S. 242–253. DOI: [10.4169/college.math.j.45.4.242](https://doi.org/10.4169/college.math.j.45.4.242).
- [11] Erőo Rubik. US4378117A. 1983.
- [12] Olivier Sète. *Zur Zykel-schreibweise von Permutationen*. Website. Online erhältlich unter <https://www3.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/SS10/LinAlg1/Permutationen.pdf>; abgerufen am 01.03.2021. 2010.
- [13] Anna Tripi. "Cayley Graphs of Groups and Their Applications". Magisterarb. Missouri State University, 2017.