Technische Universität Dortmund
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl 14 für Software Engineering

Bachelorarbeit

Gruppentheorie des 2×2×2 Zauberwürfels und dessen Lösungsalgorithmen

Pina Kolling

Abgabe: Mai 2021

betreut von
Dr. Łukasz Czajka
und
M. Sc. Christoph Stahl

4. Februar 2021

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Motivation

Der Zauberwürfel ist ein mathematisches Drehpuzzle, das 1974 von dem ungarischen Professor Erño Rubik erfunden wurde. Er wollte damit seinen Studenten helfen, dreidimensionale Probleme zu verstehen. [2]

Terminologie

Diese Arbeit befasst sich mit dem 2×2×2-Zauberwürfel und dessen Algorithmen zur Lösung. Dabei handelt es sich um ein Drehpuzzle, das ein mathematisches Problem darstellt.
Im Folgenden wird die Terminologie und der Aufbau des Würfels erklärt.

2×2×2-Würfel (auch Zauberwürfel oder *Cube*)

Der Würfel ist in Abbildung 1 links verdreht und rechts im gelösten Zustand zu sehen. Der gelöste Zustand wird auch als Startkonfiguration bezeichnet.

Bei der Startkonfiguration (auch Grundposition, Grundstellung) des 2×2×2-Würfels hat jede Seite 4 Farbflächen einer Farbe. Der Würfel ist dann gelöst.

Bei dem verdrehten Würfel sind die Steine des Würfels an anderen Positionen und anders ausgerichtet.

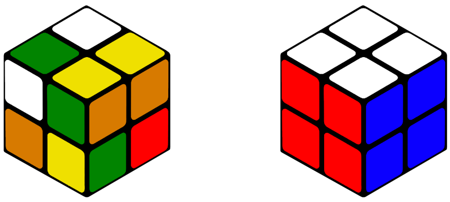

Abbildung 1: ungelöster und gelöster 2×2×2-Würfel

Eckstein und Farbfläche

Ein 2×2×2-Würfel besteht aus acht (Eck-)Steinen (links in abbildung 2), die jeweils drei Farbflächen (rechts in Abbildung 2) haben. Ein 2×2×2-Zauberwürfel hat also 24 Farbflächen.

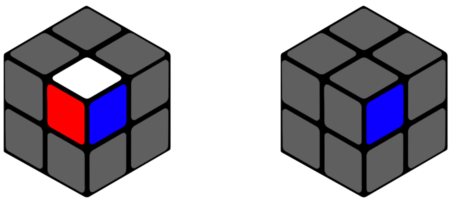

Abbildung 2: Eckstein und Farbfläche des Würfels

Seite

Der 2×2×2-und der 3×3×3-Würfel haben sechs Seiten (bestehend aus jeweils vier Farbflächen) und somit sechs Farben.

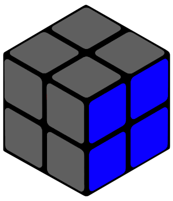

Abbildung 3: Seite des Würfels

3×3×3-Würfel

Wesentlich bekannter als der 2×2×2-*Cube* ist der 3×3×3-*Cube*. Er besteht aus 26 Steinen. In Abbildung 4 sieht man ihn links ungelöst und rechts in der Startkonfiguration.

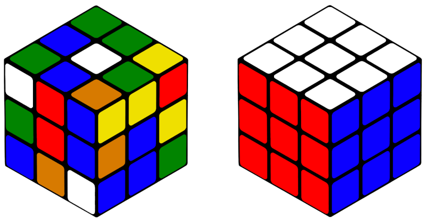

Abbildung 4: ungelöster und gelöster 3×3×3-Würfel

Eck- und Kantsteine

Im Gegensatz zum 2×2×2-hat der 3×3×3-Würfel Kantsteine und Mittelsteine (s. Abbildung 5).

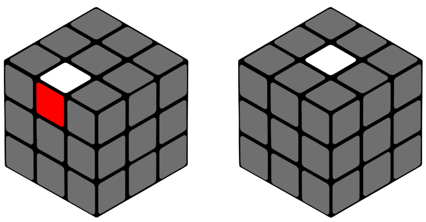

Abbildung 5: Kant- und Mittelsteine

Das besondere an den Mittelsteinen des 3×3×3-Würfels ist, dass sie bei einer Drehung der Ebenen (also bei Zügen des Würfels) nicht verändert werden. Somit ist beim 3×3×3-Würfel die obere Seite immer fest zu stellen: Die obere Seite hat immer das weiße Mittelstück in der Mitte.

Beim 2×2×2-*Cube* gibt es keine eindeutige Oberseite. Es ist also möglich, dass die aktuelle Konfiguration einer vermeintlich anderen Konfiguration entspricht, bei der nur eine andere Seite nach oben gehalten wird.

Die Ausrichtung des gesamten Würfels ist bei dem 3×3×3-Würfel also eindeutig vorgegeben, während sie beim 2×2×2-Würfel gedreht werden kann.

Das ist interessant, da in dieser Arbeit die Gruppentheorie des 3×3×3-*Cubes* auf den 2×2×2-Würfel übertragen werden soll.

Es wird sich dabei vorallem den Papern *Group Theory an the Rubik's Cube* von Janet Chen [3] und *Group Theory via Rubik's Cube* von Tom Davis [4] orientiert.

Grundzüge des Würfels

Am 2×2×2-Zauberwürfel gibt es sechs verschiedene Drehseiten: oben, unten, links, rechts, vorne und hinten.

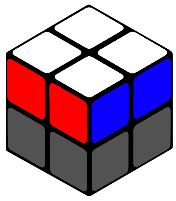

Abbildung 6: Der Würfel hat sechs verschiedene Ebenen. Hier sieht man die obere Ebene farblich markiert.

Abkürzung	Beschreibung des Zugs
U	Drehung der oberen Ebene im Uhrzeigersinn
D	Drehung der unteren Ebene im Uhrzeigersinn
R	Drehung der rechten Ebene im Uhrzeigersinn
L	Drehung der linken Ebene im Uhrzeigersinn
F	Drehung der vorderen Ebene im Uhrzeigersinn
B	Drehung der hinteren Ebene im Uhrzeigersinn

Tabelle 1: Ebenenrotationen

Die Kürzel stehen für *Up, Down, Right, Left, Front, Back*.

Die entsprechende Ebene wird im Uhrzeigersinn gedreht, wenn man auf diese Ebene schaut. Es wirkt also so, also würde man die untere Ebene gegen den Uhrzeigersinn drehen, wenn man von oben auf den Würfel schaut.

Auf die Rotationsmöglichkeiten des kompletten Würfels wird im Verlauf dieser Arbeit noch eingegangen.

2 Würfel als Gruppe

Definition einer Gruppe

Die Definition einer Gruppe $(G, \circ)$ ist Grundlage für die folgenden Abschnitte. Eine Menge G mit einer Verknüpfung $\circ$ nennt man Gruppe, wenn diese Bedingungen gelten:

- Abgeschlossenheit: $\forall a, b \in G.(a \circ b) \in G$
- Assoziativität: $\forall a, b, c \in G.(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$
- Existenz eines neutralen Elements n: $\forall a \in G, \exists n \in G.n \circ a = a \circ n = a$
- Existenz eines inversen Elements a^{-1}: $\forall a \in G, \exists a^{-1} \in G.a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = n$

Wenn es sich bei der Gruppe um eine kommutative Gruppe (auch abelsche Gruppe[1]) handelt, muss zusätzlich noch die Eigenschaft der Kommutativität gelten:

- $\forall a, b \in G.(a \circ b) = (b \circ a)$

Beispielgruppen

Zur Veranschaulichung der Gruppendefinition werden hier die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ und die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ mit dem Operator $+$ auf die Gruppenaxiome untersucht.

- Die Abgeschlossenheit gilt sowohl für $(\mathbb{N}, +)$ als auch für $(\mathbb{Z}, +)$, da zwei natürliche Zahlen addiert immer eine natürliche Zahl ergeben. Zwei ganze Zahlen addiert ergeben immer eine ganze Zahl.
  Beispielsweise sind $1 + 2 = 3$ und es gilt $1, 2, 3 \in \mathbb{N}$.
- Die Verknüpfung ist assoziativ, da das Pluszeichen so definiert ist.
- Das neutrale Element von $(\mathbb{N}, +)$ und $(\mathbb{Z}, +)$ ist 0. Es gilt also $\forall n \in N.\ n + 0 = 0 + n = n$ (und mit $\mathbb{Z}$ analog).
  Ein Beispiel zur Veranschaulichung: $3 + 0 = 0 + 3 = 3$
- Die letzte erfordleriche Eigenschaft einer Gruppe ist die Existenz eines Inversen Elements. Für die Gruppe $(\mathbb{Z}, +)$ ist $-z$ das Inverse Element für jedes $z \in \mathbb{Z}$. Für $(\mathbb{N}, +)$ gibt es kein Inverses Element.

Anhand der oberen Axiome kann man nun feststellen, dass $(\mathbb{Z}, +)$ die Gruppeneigenschaften erfüllt, $(\mathbb{N}, +)$ aber nicht.
$(\mathbb{Z}, +)$ ist also eine Gruppe und $(\mathbb{N}, +)$ nicht, da kein Inverses Element existiert.
Es ist aber zu beachten, dass es sich hierbei nicht um formelle Beweise, sondern um anschauliche Beschreibungen handelt.

[1] „Zu Ehren von Niels Henrik Abel (1802-1829); norwegischer Mathematiker und einer der Begründer der Gruppentheorie. Starb leider verarmt und deprimiert im Alter von 26 Jahren an Tuberkulose, kurz bevor er als Anerkennung für seine genialen Arbeiten eine Dozentenstelle in Berlin angeboten bekam.)“ [7] (S.21, Z.23)

Nun kann man $(\mathbb{Z}, +)$ noch auf die Kommutativität untersuchen, um zu prüfen, ob es sich um eine abelsche Gruppe handelt.
Da der Plus-Operator als kommutativ definiert ist, ist $(\mathbb{Z}, +)$ eine abelsche Gruppe.

2×2×2-Zauberwüfel als Gruppe

Im Folgenden wird die Definition der Gruppe des 3×3×3-Würfels aus dem Paper *Group Theory and the Rubik's Cube* von Janet Chen [3] als Gruppe des 2x2x2-Würfels umgesetzt. Die Gruppe von Janet Chen wird hier als $(G_{3\times3\times3}, \circ)$ bezeichnet, auch wenn er sie als $(G, *)$ bezeichnet hat. Der Namen der Gruppe wird geändert, um klar zwischen dem 2×2×2-und dem 3×3×3-Würfel zu differenzieren. Das Symbol des Operators wird verändert, um Verwechslungen mit dem Multiplikationsoperator zu vermeiden.

Die Gruppe des 2×2×2-Würfels heißt $(G_{2\times2\times2}, \circ)$.

Die Menge $G_{2\times2\times2}$ besteht aus allen möglichen Zügen des Würfels. Beispielsweise die Drehung der oberen Ebene ist ein Zug. Ein Zug kann aber auch aus mehreren Drehungen bestehen, z.B. das Drehen der oberen Ebene, gefolgt von dem Drehen der rechten Ebene stellt ebenfalls einen Zug dar.
Wenn zwei Züge die gleiche Würfelposition hervorrufen, sind die beiden Züge gleich. Beispielsweise eine Drehung um 180° nach links oder nach rechts von einer Ebene führt zu dem gleihen Ergebnis und somit werden diese beiden Züge als gleich angesehen.

Der Operator $\circ$ ist als Konkatenation zweier Züge definiert. Wenn $Z_1 \in G_{2\times2\times2}$ und $Z_2 \in G_{2\times2\times2}$ zwei Züge sind, dann bedeutet $Z_1 \circ Z_2$, dass zuerst Z_1 und dann Z_2 ausgeführt wird. (Außerdem gilt dann auch $Z_1 \circ Z_2 \in G_{2\times2\times2}$.)
Im Folgenden wird gezeigt, dass $(G_{2\times2\times2}, \circ)$ eine Gruppe ist, indem $(G_{2\times2\times2}, \circ)$ bezüglich der Gruppenkriterien untersucht wird:

Abgeschlossenheit $\forall Z_1, Z_2 \in G_{2\times2\times2}.(Z_1 \circ Z_2) \in G_{2\times2\times2}$

Die Gruppe $G_{2\times2\times2}$ ist abgeschlossen unter dem Operator $\circ$. Wenn Z_1 und Z_2 Züge sind und somit Elemente von $G_{2\times2\times2}$, dann ist auch $Z_1 \circ Z_2$ ein Element der Gruppe, da alle Züge in $G_{2\times2\times2}$ enthalten sind.

Assoziativität $\forall Z_1, Z_2, Z_3 \in G_{2\times2\times2}.(Z_1 \circ Z_2) \circ Z_3 = Z_1 \circ (Z_2 \circ Z_3)$

Um die Assoziativität zu zeigen, wird eine Schreibweise für das Ausführen der Züge eingeführt. Ein beliebiger, fester Stein im Würfel wird s genannt. Beim Ausführen eines Zuges Z schreibt man nun $Z(s)$, um die neue Position des Steines zu erhalten. Die Positionen sind (wie oben beschrieben) 3-Buchstaben-Kürzel, bestehend aus u, d, l, r, t, b.
Wenn man nun $Z_1 \circ Z_2$ betrachtet, wird zuerst Z_1 und dann Z_2 ausgeführt. $Z_1(s)$ bewegt den Stein s zu der Position $Z_1(s)$. Der Zug Z_2 bewegt den Stein dann zu der Position $Z_2(Z_1(s))$. Also gilt $Z_1 \circ Z_2 = Z_2(Z_1(s))$.

Nun muss noch $(Z_1 \circ Z_2) \circ Z_3 = Z_1 \circ (Z_2 \circ Z_3)$ gezeigt werden. Man zeige also, dass sich $(Z_1 \circ Z_2) \circ Z_3$ und $Z_1 \circ (Z_2 \circ Z_3)$ beide zu $Z_3(Z_2(Z_1(s))$ umformen lassen:

$$\begin{aligned} & (Z_1 \circ Z_2) \circ Z_3 \\ \Leftrightarrow & ((Z_1 \circ Z_2) \circ Z_3)(s) \\ = & Z_3(Z_1 \circ Z_2)(s)) \\ = & Z_3(Z_2(Z_1(s))) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & Z_1 \circ (Z_2 \circ Z_3) \\ \Leftrightarrow & (Z_1 \circ (Z_2 \circ Z_3))(s) \\ = & (Z_2 \circ Z_3)(Z_1(s)) \\ = & \ Z_3(Z_2(Z_1(s))) \end{aligned}$$

Somit ist $(G_{2\times2\times2}, \circ)$ assoziativ.

Existenz eines neutralen Elements N

$\forall Z_1 \in G_{2\times2\times2}, \exists N \in G_{2\times2\times2}. N \circ Z_1 = Z_1 \circ N = Z_1$

Das neutrale Element N muss aus der Menge $G_{2\times2\times2}$ der Züge sein und es muss gelten: $N \circ Z_1 = Z_1 \circ N = Z_1$. Somit ist das neutrale Element der Gruppe $(G_{2\times2\times2}, \circ)$ der *leere* Zug. Es werden also keine der Ebenen des Würfels gedreht. Wenn man also einen Zug Z ausführt und dann den Zug N, bedeutet das *erst Z ausführen und dann nichts*, was das gleiche ist wie Z auszuführen.

Existenz eines inversen Elements Z_1^{-1}

$\forall\ Z_1 \in G_{2\times2\times2},\ \exists\ Z_1^{-1} \in G_{2\times2\times2}.\ \ Z_1 \circ Z_1^{-1} = Z_1^{-1} \circ Z_1 = N$

Da Z ein physisch ausführbarer Zug ist, kann man diesen auch rückgängig machen. Man muss die einzelnen Ebenenrotationen nur rückwärts und von hinten durchführen, um den Zug zu invertieren. Dann gilt $Z_1 \circ Z_1^{-1} = Z_1^{-1} \circ Z_1 = N$.

Somit ist $(G_{2\times2\times2}, \circ)$ eine Gruppe.

$(G_{2\times2\times2}, \circ)$ ist keine kommutative Gruppe, da beispielsweise eine Rotation der rechten Ebene im Uhrzeigersinn (R) und eine Rotation der vorderen Ebene im Uhrzeigersinn (F) in umgekehrter Reihenfolge ein anderes Ergebnis haben. Das sieht grafisch dargestellt so aus:

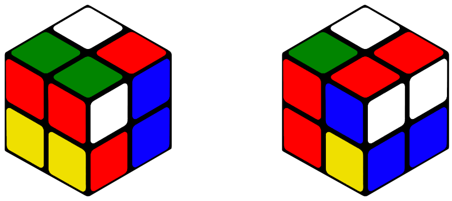

Abbildung 7: links: Würfel nach Zug RF, rechts: Würfel nach Zug FR, ausgehend von Startkonfiguration

Außerdem wäre das Lösen des Würfels trivial, wenn die Kommutativität gelten würde.[4] Die Reihenfolge der gedrehten Ebenen wäre dann egal und man müsste nur die Anzahl beachten.
Es gilt also nicht $\forall\ Z_1, Z_2 \in G_{2\times2\times2}. Z_1 \circ Z_2 = Z_2 \circ Z_1$. Der $\circ$-Operator der Gruppe ist also nicht kommutativ.

Das mehrfache Ausführen der Züge (U, D, F, B, L, R) kann man mit der Exponentenschreibweise darstellen. So schreibt man beispielsweise RR (also zwei mal eine Drehung der rechten Ebene im Uhrzeigersinn) auch als R^2.
Wenn man eine Ebene vier mal dreht, ist der Würfel wieder in der vorherigen Position. Somit gilt also beispielsweise $RRRR = R^4 = N$, wobei N für das neutrale Element (also den leeren Zug) steht. Das gilt für alle Züge des Würfels:

$$\begin{aligned} RRRR &= R^4 = N \\ LLLL &= L^4 = N \\ UUUU &= U^4 = N \\ DDDD &= D^4 = N \\ FFFF &= F^4 = N \\ BBBB &= B^4 = N \end{aligned}$$

Somit gilt dann auch $Z^0 = N$, mit Z als beliebigen Zug und N als neutrales Element.
In der mathematischen Schreibweise sieht das so aus: $\forall Z \in G_{2\times2\times2}\ .\ Z^0 = N$.
Es gilt also für alle Züge $Z \in G_{2\times2\times2}$:

$$\begin{aligned} Z^0 &= N \\ Z &= Z^1 \\ ZZ &= Z^2 \\ ZZZ &= Z^3 \end{aligned}$$

Für *einelementige* Züge Z (also U, D, F, B, L oder R) gilt auch $ZZZZ = Z^4 = N = Z^0$. Man kann den Exponenten in diesem Fall also *modulo* 4 rechnen, da vier Drehungen einer Ebene nacheinander wieder zum Startzustand führen.
Es gilt dann also:
$\forall\ Z \in \{U, D, F, B, L, R\}, n \in \mathbb{N}\ .\ Z^n = Z^{n \mod 4}$.

3 Konfiguration des Würfels

Um mit dem Würfel zu arbeiten, muss man wissen, in welcher Position er sich befindet. Dafür wird die Konfiguration des Würfels definiert, sie setzt sich aus zwei Parametern zusammen:

- Position der Ecksteine (angegeben als σ)
- Ausrichtung der Ecksteine (angegeben als x)

Also kann die Konfiguration des Würfels als ein 2-Tupel geschrieben werden: (σ, x).

Der Würfel kann aber auch komplett gedreht werden, ohne Züge auszuführen.

Positionen der Steine im Würfel

Die bijektive Funktion σ (für jede Ebenenrotation) stellt Übergänge der Würfelsteine als Funktion dar. Die Übergänge beschreiben die Positionsänderung der Steine bei einem Zug. σ bildet jede der Würfelpositionen auf die neue Position ab.

Die Würfelpositionen sind wie folgt eingeteilt:

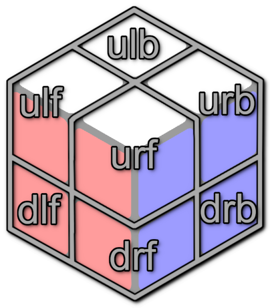

Abbildung 8: Die einzelnen Steinpositionen werden mit den Kürzeln benannt, die *up, down, left, right, front und back* beschreiben.

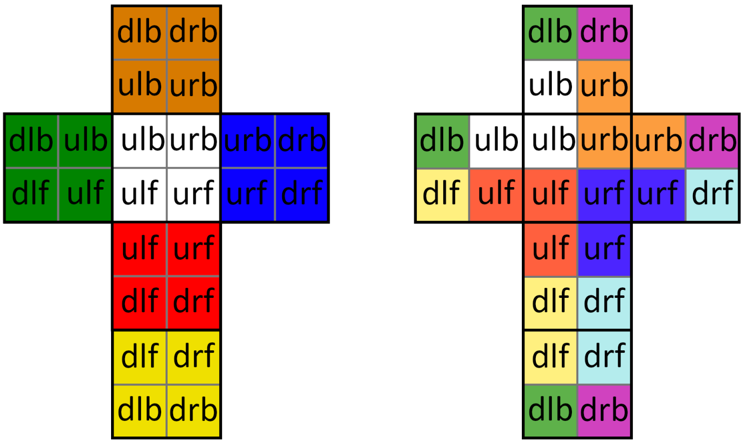

Abbildung 9: aufgeklappter Würfel mit Namen der Steinpositionen

Jeder Steinposition wird ein einzigartiger Name zugeordnet, um sich darauf zu beziehen. Dabei wird davon ausgegangen, dass die weiße Seite in der Startkonfiguration oben ist und die rote Seite vorne. Die Steinposition werden mit 3 Buchstaben beschrieben, die aus den Kürzeln *u, d, l, r, f, b* bestehen. Diese Kürzel stehen für *up, down, left, right, front, back.*
Somit heißt die Steinposition oben links beispielsweise *ulf* (für *up*, *left* und *front*).

Jeder Stein bekommt auch einen eindeutigen Namen, der seiner Steinposition im gelösten Zustand entspricht. Beispielsweise liegt der Stein *ulf* im gelösten Zustand an der Steinposition *ulf.*

Nun wird σ_U für eine Drehung der oberen Ebene um 90° im Uhrzeigersinn definiert:
Hier wird σ_U ausführlich beschrieben und verschiedene Schreibweisen angegeben. Die weiteren Drehungen sind analog definiert.

Die Drehung der oberen Ebene sieht grafisch dargestellt so aus:

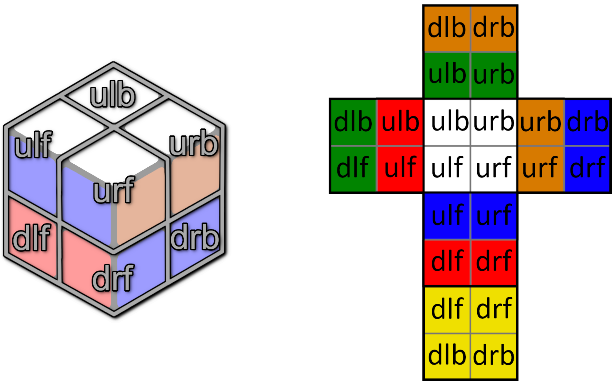

Abbildung 10: Steinpositionen nach Zug U

$$\begin{array}{llll} \sigma_U(ulf) = ulb & \sigma_U(ulb) = urb & \sigma_U(urb) = urf & \sigma_U(urf) = ulf \\ \sigma_U(dlf) = dlf & \sigma_U(dlb) = dlb & \sigma_U(drb) = drb & \sigma_U(drf) = drf \end{array}$$

Das kann man auch in der Form $i \mapsto j$ schreiben:

$$\begin{array}{llll} ulf \mapsto ulb & ulb \mapsto urb & urb \mapsto urf & urf \mapsto ulf \\ dlf \mapsto dlf & dlb \mapsto dlb & drb \mapsto drb & drf \mapsto drf \end{array}$$

Daraus entstehen folgende Zykel: $\sigma_U = \ (ulf\ ulb\ urb\ urf)\ (dlf)\ (dlb)\ (drb)\ (drf)$

Die Zykel mit nur einem Element müssen nicht aufgeschrieben werden. Dann ergibt sich $\sigma_U = \ (ulf\ ulb\ urb\ urf)$, was den Zykel beschreibt, in dem die Steine rotiert werden, wenn die obere Ebene gedreht wird.

Die Drehungen aller Ebenen können durch folgende Zykel beschrieben werden:

$$\begin{aligned} \sigma_U &= \ (ulf\ ulb\ urb\ urf) \\ \sigma_D &= \ (dlf\ drf\ drb\ dlb) \\ \sigma_F &= \ (ulf\ urf\ drf\ dlf) \\ \sigma_B &= \ (ulb\ dlb\ drb\ urb) \\ \sigma_L &= \ (ulb\ ulf\ dlf\ dlb) \\ \sigma_R &= \ (urb\ drb\ drf\ urf) \end{aligned}$$

Ausrichtung der Steine

Der $2 \times 2 \times 2$-Würfel besteht aus 8 Ecksteinen, die jeweils 3 Farbflächen haben. Somit hat jeder Stein 3 mögliche Ausrichtungen.
Um die Ausrichtung der Steine zu erkennen, bekommen die Würfelpositionen an einer Farbfläche einer Nummer zugeordnet. Dafür werden die weißen und die gelben Seiten

markiert und nummeriert. Auf diese Nummern wird sich als $x_i \in \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ bezogen - mit x_1 als Position 1, x_2 als Position 2, usw.

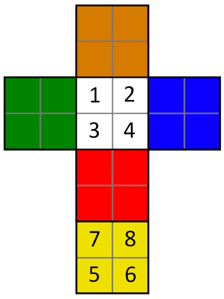

Abbildung 11: ausgeklappter Würfel mit Markierungen für x_i

Außerdem bekommt jeder Stein an jeder Farbfläche eine Zahlenzuordnung. Da jeder Stein 3 Ausrichtungen haben kann, wird mit 0, 1 und 2 nummeriert. Die Nummerierung beginnt mit der weißen/gelben Fläche bei 0 und zählt dann im Uhrzeigersinn die Flächen.

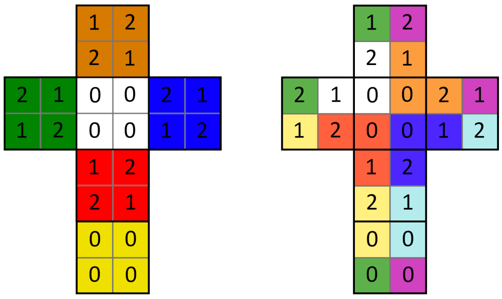

Abbildung 12: ausgeklappter Würfel mit Farbflächennummerierungen

In der Startkonfiguration sind alle $x_i = 0$, der Vektor x ist dann $(0,0,0,0,0,0,0,0)$. Das wird kurz als $x = 0$ geschrieben.

Nun wird der Zug R als Beispiel ausgeführt und die Veränderung der Nummerierung der Farbflächen dargestellt. R ist eine Rotation der rechten Ebene um 90° im Uhrzeigersinn.
Die Kennzeichnungen x_{1-8} bleiben an der gleichen Position, die Nummerierungen der Farbflächen ändern sich mit Rotation der Ebene und ermöglichen so eine Zuordnung der Ausrichtung der Ecksteine.
Die linke Seite der Würfels wird dabei nicht beeinflusst, also sind die Flächen an den Positionen x_1, x_3, x_5, x_7 alle 0.
Die anderen Positionen haben nun aber andere Farbflächen:

$$x_2 = 2 \qquad x_4 = 1 \qquad x_6 = 1 \qquad x_8 = 2$$

Also gilt $x = (0, 2, 0, 1, 0, 1, 0, 2)$ nach dem Zug R.

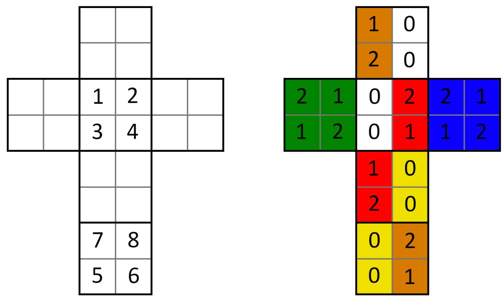

Abbildung 13: links: Positionen x_1 bis x_8, rechts: Veränderung der nummerierten Ecksteine nach dem Zug R

Züge als Gruppenoperation

Wenn der Zauberwürfel in einer Konfiguration $C = (\sigma, x)$ ist, wird der Würfel durch das Ausführen eines Zuges $M \in G_{2\times2\times2}$ in eine neue Konfiguration gebracht. Diese Konfiguration wird als $C \cdot M$ geschrieben.

Definition einer Gruppenoperation mit der Gruppe $(G_{2\times2\times2}, \circ)$ und dem Menge C:

- $\cdot : C \times G_{2\times2\times2} \to C$ mit $(c, g) \to c \cdot g$
- $c \cdot N = x$ für alle $c \in C$ und das neutrale Element $N \in G_{2\times2\times2}$
- $c \cdot (u \circ v) = (c \cdot h) \cdot v$ für alle $u, v \in G_{2\times2\times2}$ und $c \in C$

Angenommen der Würfel befindet sich in der Konfiguration C. Wenn nun der Zug $M_1 \in G_{2\times2\times2}$ ausgeführt wird, ist die neue Konfiguration des Würfels $C \cdot M_1$. Wenn nun noch ein weiterer Zug $M_2 \in G_{2\times2\times2}$ ausgeführt wird,ist die neue Konfiguration des Würfels $(C \cdot M_1) \cdot M_2$.
Anders gesagt: Der Würfel hat in Konfiguration C gestartet und der Zug M_1M_2 wurde ausgeführt. Man kann die neue Konfiguration auch als $C \cdot (M_1M_2)$ schreiben und somit gilt $(C \cdot M_1) \cdot M_2 = C \cdot (M_1M_2)$.

Wenn der leeren Zug N ausgeführt wird, wird die Konfiguration des Würfels nicht verändert. Es gilt also $C \cdot N = C$.

Bei Gruppenoperationen beeinflussen die Elemente einer Gruppe eine Menge. In diesem Fall beeinflussen die Züge des Würfels die Konfiguration des Würfels.

Rotation des Würfels

Der 2×2×2-Würfel hat im Gegensatz zum 3×3×3-Würfel keine Mittelsteine, die fest darüber entscheiden, welche Seite die obere Seite ist.

Der 2×2×2-Würfel kann also im gelösten Zustand sein, ohne dass die obere Seite weiß ist. Deshalb muss es möglich sein, den Würfel ganz zu rotieren, ohne einen Zug auszuführen. Um die Drehungen zu benennen, werden die Achsen den Würfels wie folgt benannt:

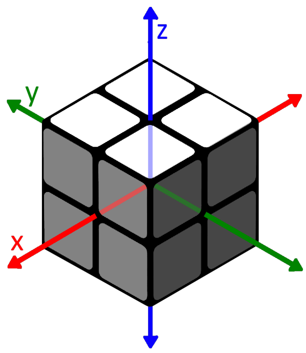

Abbildung 14: Würfel mit x, y und z-Achsen

Nun kann man für die möglichen Rotationen des Würfels Nachfolgekonfigurationen festlegen.
Dazu werden zuerst die einzelnen Rotationen des Würfels benannt:

Abkürzung	Beschreibung der Rotation
Z_l	Rotation des Würfels um die z-Achse nach links (gegen den Uhrzeigersinn)
Z_r	Rotation des Würfels um die z-Achse nach rechts (im Uhrzeigersinn)
Y_l	Rotation des Würfels um die y-Achse nach links (gegen den Uhrzeigersinn)
Y_r	Rotation des Würfels um die y-Achse nach rechts (im Uhrzeigersinn)
X_l	Rotation des Würfels um die x-Achse nach links (gegen den Uhrzeigersinn)
X_r	Rotation des Würfels um die x-Achse nach rechts (im Uhrzeigersinn)

Tabelle 2: Rotationen des Würfels

Die Steine werden durch eine Rotation alle an einen neuen Platz gebracht. Anders als bei der Drehung der Ebenen, wo nur einige Steine die Position ändern, ändern hier alle Steine die Position, ohne dass der Würfel verändert wird, da er komplett gedreht wird.

Anhand der Rotation Z_r, also einer Rotation des kompletten Würfels um die z-Achse um 90° im Uhrzeigersinn, wird nun die Veränderung der Würfelpositionen gezeigt.

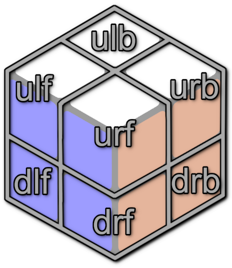

Abbildung 15: Würfel nach Rotation um z-Achse

Da bei den Rotationen alle Steine die Position wechseln, muss es 8 Funktionen δ geben, also für jeden Eckstein eine Funktion δ:

$\delta_{Z_r}(urf) = ulf$	$\delta_{Z_r}(ulf) = ulb$	$\delta_{Z_r}(ulb) = urb$	$\delta_{Z_r}(urb) = urf$
$\delta_{Z_r}(drf) = dlf$	$\delta_{Z_r}(dlf) = dlb$	$\delta_{Z_r}(dlb) = drb$	$\delta_{Z_r}(drb) = drf$

Wenn man das nun in der Form $i \mapsto j$ schreibt, erhält man:

$urf \mapsto ulf$	$ulf \mapsto ulb$	$ulb \mapsto urb$	$urb \mapsto urf$
$drf \mapsto dlf$	$dlf \mapsto dlb$	$dlb \mapsto drb$	$drb \mapsto drf$

In der Zykel-Schreibweise sieht die Veränderung der Steinnamen dann so aus:
$\delta_{Z_r} = (urf\ ulf\ ulb\ urb)(drf\ dlf\ dlb\ drb)$

Alle Rotationen sehen in Zykel-Schreibweise folgendermaßen aus:

$$\begin{aligned}
\delta_{Z_r} &= (ulf\ ulb\ urb\ urb)\ (dlf\ dlb\ drb\ drf) \\
\delta_{Z_l} &= (ulf\ urf\ urb\ ulb)\ (dlf\ drf\ drb\ dlb) \\
\delta_{Y_r} &= (ulf\ ulb\ dlb\ dlf)\ (urf\ urb\ drb\ drf) \\
\delta_{Y_l} &= (ulf\ dlf\ dlb\ ulb)\ (urf\ drf\ drb\ urb) \\
\delta_{X_r} &= (ulf\ urf\ drf\ dlf)\ (urb\ ulb\ dlb\ drb) \\
\delta_{X_l} &= (ulf\ dlf\ drf\ urf)\ (urb\ ulb\ dlb\ drb)
\end{aligned}$$

Bei den Rotationen wird (analog zu den Zügen) die mehrfache Ausführung einer Roatation mit der Exponentenschreibweise geschrieben.
Somit gilt dann auch hier $RRRR = R^4 = N$ (für $R \in \{Z_r, Z_l, Y_r, Y_l, X_r, X_l\}$) und $R^0 = N$ (für alle Rotationen). (N ist das neutrale Element, also der leere Zug und R eine beliebige Rotation des Würfels.)
Analog zu den Zügen gilt bei den Rotationen also für jede Rotation:
$\forall R \in \{Z_r, Z_l, Y_r, Y_l, X_r, X_l\}, n \in \mathbb{N}\ .\ R^n = R^{n \bmod 4}$.

Äquivalenzrelationen der Rotationen

Um die Rotationen des Würfels umzusetzen, werden Äquivalenzrelationen eingeführt. Eine Relation $R \subseteq A \times A$ heißt Äquivalenzrelation auf A, wenn für alle $x, y, z \in A$ die drei folgenden Eigenschaften gelten: Reflexivität, Symmetrie, Transitivität. [7]

In dem Fall der Gruppe $(G_{2\times2\times2}, \circ)$ handelt es sich um eine Relation von zwei Zügen $Z_1, Z_2 \in G_{2\times2\times2}$.

Die Äquivalenzrelation ist folgendermaßen definiert:

$Z_1 \sim Z_2 :=$ *Z_1 und Z_2 ergeben (mit optionaler Rotation) die gleiche Würfelkonfiguration*

Daraus ergibt sich $Z_1 \sim Z_2 :\Leftrightarrow Z_1 = WZ_2$ mit W als Element (oder Kombination von Elementen) aus $\{Z_r, Z_l, Y_r, Y_l, X_r, X_l, \epsilon\}$, wobei ϵ die *leere* Rotation darstellt, also keine Rotation des Würfels.

Somit ergibt sich beispielsweise $F \sim L \Leftrightarrow F = Z_r L$, da eine Drehung der vorderen Ebene und eine Drehung des Würfels nach links mit einer Drehung der linken Ebene die gleiche Würfelkonfiguration ergeben. Der Würfel ist dann nur verschieden ausgerichtet.

In Abbildung 16 sieht man dieses Beispiel nochmal grafisch: Links befindet sich der gelöste Würfel, in der Mitte der gelöste Würfel nach dem Zug F und rechts der gelöste Würfel nach dem Zug $Z_r L$.
Die beiden rechten Würfel sind in der gleichen Konfigurationen, aber anders gedreht.

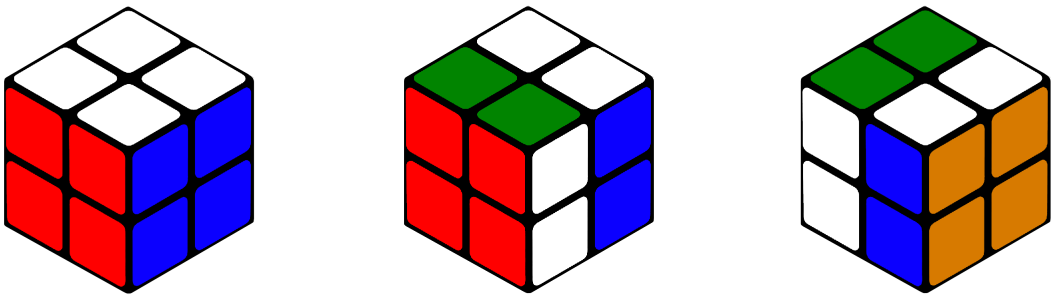

Abbildung 16: Würfel gelöst, nach Zug F und nach $Z_r L$

Damit $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist, müssen Reflexivität, Symmetrie und Transitivität gelten, was im folgenden Abschnitt bewiesen wird.

- Reflexivität:
  Für die Reflexivität muss $Z \sim Z$ für alle $Z \in G_{2\times2\times2}$ gelten.

$$Z_1 \sim Z_2 :\Leftrightarrow Z_1 = WZ_2$$

Es wird W als ϵ gewählt, so dass keine Rotation ausgeführt wird.

$$\begin{aligned} Z_1 \sim Z_2 :&\Leftrightarrow Z_1 = WZ_2 \\ &\Leftrightarrow Z_1 = \epsilon Z_2 \\ &\Leftrightarrow Z_1 = Z_2 \end{aligned}$$

Also gilt die Reflexivität für $\sim$, da für $Z_1 \sim Z_2$ mit $W = \epsilon$ immer $Z_1 = Z_2$ gilt.

- Symmetrie:
  Für die Symmetrie muss gelten: Aus $Z_1 \sim Z_2$ folgt $Z_2 \sim Z_1$.

$$Z_1 \sim Z_2 \Rightarrow Z_2 \sim Z_1$$
$$mit\ Z_1 \sim Z_2 :\Leftrightarrow Z_1 = WZ_2$$
$$\Leftrightarrow Z_1 = W_1Z_2 \Rightarrow Z_2 = W_2Z_1$$

Das gilt, wenn W_2 das Inverse von W_1 ist. Das Inverse ist die Rotation um die gleiche Achse, aber in die andere Richtung.
Das Inverse von W wird als W^{-1} geschrieben.

Das sind die Rotationen mit den dazugehörigen Inversen:

Rotation W	Z_r	Z_l	Y_r	Y_l	X_r	X_l	ϵ
Inverses W^{-1}	Z_l	Z_r	Y_l	Y_r	X_l	X_r	ϵ

Tabelle 3: Inverse der Rotationen

Dann gilt:

$$Z_1 = WZ_2 \Rightarrow Z_2 = W^{-1}Z_1$$

Das gilt, da durch W^{-1} der Würfel in die entgegengesetzte Richtung rotiert wird und die Züge somit wieder die gleiche Würfelkonfiguration ergeben.
Also gilt die Symmetrie für $\sim$.

- Transitivität:
  Es muss gelten: Aus $Z_1 \sim Z_2$ und $Z_2 \sim Z_3$ folgt $Z_1 \sim Z_3$.

$$\begin{aligned} &Z_1 \sim Z_2 && \wedge Z_2 \sim Z_3 && \Rightarrow Z_1 \sim Z_3 \\ \Leftrightarrow\ &Z_1 = W_1Z_2 && \wedge Z_2 = W_2Z_3 && \Rightarrow Z_1 = W_3Z_3 \end{aligned}$$

Das gilt, für $W_3 = W_1W2$.

$$\Leftrightarrow Z_1 = W_1Z_2 \ \wedge Z_2 = W_2Z_3 \ \Rightarrow Z_1 = W_1W_2Z_3$$

Da die Züge Z_1 und Z_2 mit der Rotation W_1 die gleiche Würfelkonfiguration ergeben, und die Züge Z_2 und Z_3 nach der Rotation W_2 auch die gleiche Würfelkonfiguration ergeben, gilt das auch für die beiden Züge Z_1 und Z_3 nach der Rotation $W_3 = W_1W_2$, da dann alle nötigen Rotationen durchgeführt wurden.

Ordnung der Züge

Wie bereits beschrieben, gilt $\forall Z \in \{U, D, F, B, L, R\}, n \in \mathbb{N}\ .\ Z^n = Z^{n \bmod 4}$, da alle Steine des Würfels in ihrer vorherigen Position bleiben, wenn eine Ebenen- oder eine Würfelrotation vier mal hintereinander ausgeführt wird. Deshalb werdeb die Züge U, D, F, B, L, R als Züge der Ordnung 4 bezeichnet.

Die Exponentenschreibweise kann man für alle Züge aus $G_{2\times2\times2}$ anwenden, auch wenn sie mehr als eine Ebene rotieren. Beispielsweise mit $LLFF$. $(LLFF)^2$ ist dann $LLFFLLFF$ und $(LLFF)^3$ ist $LLFFLLFFLLFF$, was wieder die Ausgangsposition ergibt.

Nicht nur die Züge U, D, F, B, L, R kommen nach Wiederholen in den Ausgangszustand. Auch alle anderen Züge bringen den Würfel wieder in die Ausgangsposition des Zuges [4]. Es sind aber je nach Zug verschieden viele Wiederholungen nötig. Der Zug $(LLFF)$ hat dann beispielsweise die Ordnung 3.
So gilt zum Beispiel: $R^4 = N$ (Ordnung 4), $(RRFF)^3 = N$ (Ordnung 3) oder auch $(LF)^{15} = N$ (Ordnung 15).
Dabei muss beachtet werden, dass die Ordnung die Anzahl der Durchführungen beschreibt, die benötigt wird, damit alle Steine wieder an der Ausgangsposition sind. Die Ausrichtung der Steine wird hier aber nicht berücksichtigt.

Der folgende Beweis orientiert sich an dem Beweis aus dem Paper *Group Theory via Rubik's Cube* von Tom Davis [4]:
Jedes Mal wenn ein Zug wiederholt wird, werden die Steine im Würfel neu angeordnet. Da es eine endliche Anzahl an Würfelkonfigurationen gibt, muss eine Würfelposition wiederholt werden, wenn man den Zug oft genug durchführt.
Die Zahl der validen Würfelkonfigurationen ist zwar sehr groß, aber endlich. Also muss eine Position wiederholt werden, wenn man den Zug öfter ausführt, als es mögliche Würfelpositionen gibt.

Bei einem beliebigen Zug $Z \in G_{2\times2\times2}$ gelangt man also irgendwann in eine Würfelposition, die sich wiederholt. Die wiederholende Würfelposition tritt zuerst nach $n \in \mathbb{N}$ Wiederholungen auf und das zweite Mal nach $m \in \mathbb{N}$ Wiederholungen. Das sieht dann so aus: $Z^n = Z^m$ mit $n < m$.

Also gilt $Z^{n-1} \neq Z^{m-1}$, da m das zweite Vorkommen der gleichen Position repräsentiert. Wenn $n = 0$ ist, hat man $Z^0 = N$, was den leeren Zug (bzw. das neutrale Element) repräsentiert. Der Würfel wird dabei nicht verändert und somit wird die Würfelposition bei jedem Zug $Z \in G_{2\times2\times2}$ mit Z^0 wiederholt.

Es gilt $Z^n = Z^m$. Wenn man nun auf die gleiche Ausgangsposition n-mal oder m-mal Z anwendet, kommt man in der gleichen Endposition an.
Wenn man nun Z^{-1} anwendet, kommt man wieder in die gleiche Endposition. Dabei ist es egal, ob man vorher n-mal oder m-mal Z ausgeführt hat, da man von der gleichen Startposition ausgehend in die gleiche Endposition kommt, wenn man den gleichen Zug ausführt.

Beim Anwenden von Z^{-1} wird die letzte Ausführung von Z wieder rückgängig gemacht. Wenn man Z also n-mal ausführt und dann Z^{-1} ausführt, ist es das gleiche wie $n-1$-mal Z ausführen, also $Z^n Z^{-1} = Z^{n-1}$. Das gilt natürlich auch für m, also $Z^m Z^{-1} = Z^{m-1}$.

Demnach gilt dann $Z^{n-1} = Z^{m-1}$. Das widerspricht dann aber der Annahme, dass m der kleinste Wert für eine Wiederholung der Position ist. Also muss $n = 0$ sein, damit m die erste Wiederholung einer Position repräsentiert.

Daraus folgt: Wenn man einen beliebigen Zug $Z \in G_{2\times2\times2}$ wiederholt auf den gelösten Würfel anwendet, kommt man wieder in die Startkonfiguration.

Zykelstruktur

Anhand der Zykelstruktur lässt sich die Ordnung des jeweiligen Zuges bestimmen. Die Ordnung beschreibt die Anzahl der Wiederholungen, die ein Zug durchgeführt werden muss, damit die Steine die gleiche Anordnung wie zu Beginn des Zuges haben. Dabei geht es um die Steinpositionen und nicht um die Steinausrichtungen.
Der Würfel kann also alle Steine an der richtigen Position haben und trotzdem ungelöst sein, da die Steine verdreht sein können.

Der Zug U als $\sigma_U = (ulf\ ulb\ urb\ urf)$ (eine Drehung der oberen Ebene um 90° im Uhrzeigersinn) besteht aus einem 4-elementigen Zykel.
Wenn der Zug U also viermal ausgeführt wird, befindet sich der Würfel wieder in seiner vorherigen Position:

Ausführung	ulf	ulb	urb	urf
1	ulb	urb	urf	ulf
2	urb	urf	ulf	ulb
3	urf	ulf	ulb	urb
4	ulf	ulb	urb	urf

Tabelle 4: Permutationen des Zuges U

Die vierte Zeile der Tabelle hat die selbe Anordnung der Steine wie die oberste Zeile (vor Ausführung von U).
Somit hat die beschriebene Ebenenrotation U die Ordnung 4. Das gilt auch für jede andere Ebenenrotation (D, F, B, L, R).

Es gilt also für jeden Zug Z, der aus nur einem n-elementigen Zykel besteht:
$\forall\ Z \in G_{2\times2\times2}\ mit\ \sigma_Z = (i_1\ i_2\ ...\ i_n), n \in \mathbb{N}\ .\ Z^n = 1.$

Wenn man Z mehrfach ausführt, kommt man nach jeder n-ten Wiederholung in den Ausgangszustand. [4] Es gilt also auch $\forall\ Z \in G_{2\times2\times2}\ mit\ Z = (i_1\ i_2\ ...\ i_n), n, k \in \mathbb{N}\ .\ Z^{k*n} = 1.$

Auch bei komplexeren Zügen kann anhand der Zykelstruktur die Ordnung bestimmt werden. Dazu muss das kleinste gemeinsame Vielfache aller Zykelgrößen bestimmt werden. [4]

Der besseren Übersichtlichkeit halber, sind die Zykel aller Züge in Abbildung 17 grafisch dargestellt:

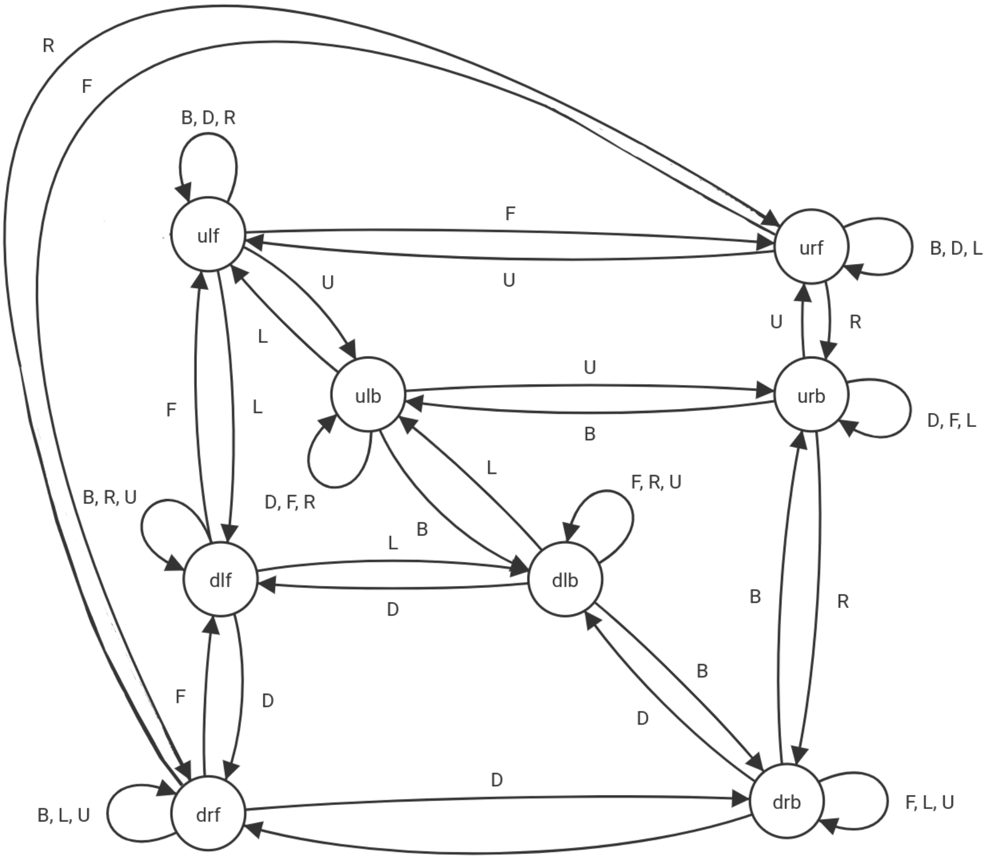

Abbildung 17: Graph aller Zugpermutationen

Dieser Graph vereinfach das Ablesen der Zykel, wenn bei einem Zug mehrere Ebenenrotationen kombiniert werden.

So kann man nun anhand des Beispielzuges $LLFF$ die Zykelstruktur darstellen.

Zuerst wird eine Tabelle erstellt, die jede Position auf ihre neue Position abbildet.

	ulb	urb	ulf	urf	dlb	drb	dlf	drf
L	ulf	urb	dlf	urf	ulb	drb	dlb	drf
L	dlf	urb	dlb	urf	ulf	drb	ulb	drf
F	ulf	urb	dlb	drf	urf	drb	ulb	dlf
F	urf	urb	dlb	dlf	drf	drb	ulb	ulf

Tabelle 5: Permutationen des Zuges $LLFF$

Die grauen Positionen bleiben bei dem jeweiligen Zug unverändert.

Grafisch dargestellt sehen die Zykel des Zuges $LLFF$ so aus:

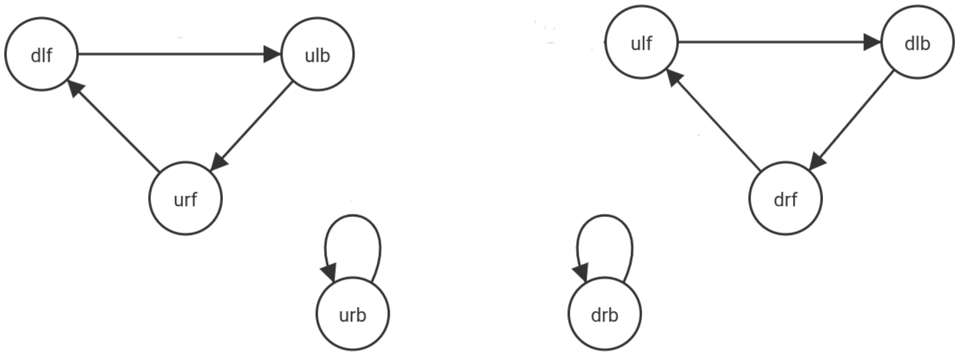

Abbildung 18: Zykel des Zuges $LLFF$

In Zykelschreibeweise also $\sigma_{LLFF} = (dlf\ ulb\ urf)(ulf\ dlb\ drf)$.
Da es also zwei Zykel der Länge drei gibt, befinden sich alle Würfelsteine nach drei Zügen ($KGV(3,3,1,1) = 3$) wieder in ihrer Ausgangsposition.
In diesem Fall sind die Steine nicht nur an der richtigen Position sondern auch so ausgerichtet, wie zu Beginn des Zuges.

Außerdem kann man erkennen, dass sechs der acht Steine bei dem Zug $LLFF$ bewegt werden. Die anderen beiden (urb und drb) bleiben unverändert.

Äquivalenz von Zügen

Es kann schwierig sein, die Äquivalenz von Zügen oder Roatationen anhand der Funktionen (σ und δ) in der Zykelschreibweise zu erkennen.
Das liegt daran, dass man die Zykel in verschiedener Reihenfolge schreiben kann. So ist der Zug U beispielsweise $(ulf\ ulb\ urb\ urf)$, aber auch $(urb\ urf\ ulf\ ulb)$.
Um das zu vereinfachen, werden die Würfelpositionen priorisiert, so dass die Position mit der höchsten Priorität immer vorne steht und zwei Äquivalente Zykel somit gleich aussehen.

Die Positionen werden wie folgt priorisiert:

Priorität	1	2	3	4	5	6	7	8
Position	ulb	urb	ulf	urf	dlb	drb	dlf	drf

Tabelle 6: Priorität der Positionen (für Zykelschreibweise)

Somit ist die angepasste Schreibweise für den Zug U dann $(ulb\ urb\ urf\ ulf)$, da ulb (falls vorhanden) ganz vorne stehen muss.

4 Untergruppen von $\mathbf{G}_{2\times2\times2}$

Eine Gruppe $(H, \circ)$, ist eine Untergruppe einer Gruppe $(G, \circ)$, wenn $H \subseteq G$ gilt.
Dann schreibt man auch $H \leqslant G$.
Das Symbol $\leqslant$ ist zu lesen als *ist Untergruppe von*.

Jede Gruppe G mit neutralem Element N hat die beiden trivialen Untergruppen $H_N = \{N\}$ und $H_G = G$ (hier: $G = G_{2\times2\times2}$). Also sind H_N und H_G die trivialen Untergruppen von $G_{2\times2\times2}$. ($H_N \leqslant G_{2\times2\times2}$ und $H_G \leqslant G_{2\times2\times2}$)
Die Gruppe $G_{2\times2\times2}$ hat viele Untergruppen, deshalb kann hier nur auf einen Teil davon erwähnt werden.

Da die trivialen Untergruppen nicht sonderlich interessant sind, geht der folgende Abschnitt auf einige anschauliche Untergruppen zum Lösen des Würfels ein. Diese Gruppen hat Tom Davis (in seinem Paper *Group Theory via Rubik's Cube*) [4] für den 3x3x3-Würfel genannt. Hier werden zwei seiner Untergruppen auf den 2x2x2 übertragen:

Die Untergruppe H_{E1}, die nur die Rotation einer Ebene zulässt, hat nur vier erreichbare Würfelkonfigurationen (sowohl beim 2x2x2- als auch beim 3x3x3-Würfel). Das kann man auch gut an einem *Cube* nachvollziehen, da man durch das Drehen von nur einer Ebene auch nur vier verschiedene Ergebnisse erzielen kann.

Eine weitere Untergruppe von $G_{2\times2\times2}$ ist H_{E2}. Hier dürfen zwei gegenüberliegende Ebenen gedreht werden.
Bei der Gruppe des 3×3×3-Würfels ergeben sich daraus 16 mögliche Würfelkonfigurationen [4]. Bei dem 2×2×2-*Cube* allerdings nur vier, da es nur zwei Ebenen gibt und man nicht anhand der Mittelsteine oben und unten unterscheiden kann.

5 Valide Konfigurationen des Würfels

Zuerst wird die Anzahl der theoretisch möglichen Würfelkonfigurationen berechnet:

Die Ecksteine können sich in jeder Ecke befinden, also gibt es pro Eckstein 8 mögliche Positionen im Würfel. Da es 8 Ecksteine gibt, gibt es also $8! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 40\,320$ mögliche Positionen für die Ecksteine.

Außerdem können die Ecksteine gedreht sein, also verschiedene Farbflächen oben sein. Da die Steine aus 3 Farbflächen bestehen, können sieben davon durch Ebenendrehungen theoretisch 3 verschiedene Ausrichtungen annehmen. Der achte Stein kann durch die Möglichkeit der Rotation des kompletten Würfels als richtig gedreht angenommen werden. Es gibt also 3^7 Wege, wie die Ecksteine ausgerichtet sein können.

Da es keine Mittelsteine im Würfel gibt, reduziert die Rotation des Würfels die Möglichkeiten um den Faktor 24.
Somit ergibt es $(3^7 \cdot 8!) \cdot \frac{1}{24}$ mögliche Positionen für den Würfel. Das sind $3\,674\,160$ Positionen.

Die theoretische Obergrenze der Würfelkonfigurationen liegt bei $8! \cdot 3^8 = 264\,539\,520$ [1]. Wenn man nun die Rotation des Würfels berücksichtig kommt man auf $11\,022\,480$ theoretische Würfelkonfigurationen.
Davon sind aber nicht alle Konfigurationen durch Ebenendrehungen erreichbar – für einige braucht man einen Schraubendreher oder Superkleber. Diese Konfigurationen werden hier als ungültige Konfigurationen bezeichnet.

Es ist also nur $\frac{1}{3}$ der Würfelkonfigurationen valide.

Ausrichtung der Steine (modulo 3)

Die Konfiguration des Würfels ist definiert als $C = (\sigma, x)$.

In diesem Abschnitt wird gezeigt, dass bei einer validen Würfelkonfiguration $\Sigma\ x_i \mod 3 = 0$ (modulo) gilt.
Wenn $C' = (\sigma', x')$ eine Nachfolgekonfiguration von $C = (\sigma, x)$ ist, dann gilt $(\sigma, x) \cdot M = (\sigma', x')$.
Dabei ist M eine der Züge aus U, D, R, L, F, B. Es gilt dann $\Sigma\ x'_i \mod 3 = \Sigma\ x_i \mod 3$.
In Abbildung 6 (s.o.) kann ist diese Situation für den Zug R dargestellt. Das kann man auch anhand dieser Tabelle sehen:

Zug M	x	x'	$\Sigma\ x'_i$	$\Sigma\ x'_i \mod 3 = 0$
D	$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8)$	$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_6, x_8, x_5, x_7)$	0	0
U	$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8)$	$(x_3, x_1, x_4, x_2, x_5, x_6, x_7, x_8)$	0	0
R	$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8)$	$(x_1, 2, x_3, 1, x_5, 1, x_7, 2)$	6	0
L	$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8)$	$(1, x_2, 2, x_4, 2, x_6, 1, x_8)$	6	0
F	$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8)$	$(x_1, x_2, 1, 2, x_5, x_6, 2, 1)$	6	0
B	$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8)$	$(2, 1, x_3, x_4, 1, 2, x_7, x_8)$	6	0

Tabelle 7: Ausrichtung der Steine (modulo 3)

Für jede valide Würfelposition gilt also $\Sigma\ x'_i \mod 3 = \Sigma\ x_i \mod 3$.

Wenn es also eine valide Konfiguration $C' = (\sigma', x')$, für die gilt $\Sigma x'_i \mod 3 = 0$, dann gibt es einen Zug $M \in G_{2\times2\times2}$, so dass $M \cdot C'$ die Steine in die richtigen Positionen bringt also $(1, x)$.

Von dieser Konfiguration $(1, x)$ ausgehend gibt es einen Zug $M \in G_{2\times2\times2}$, so dass alle Eckstücke richtig ausgerichtet sind. Dann ergibt sich die Konfiguration $(1, 0)$ und alle Eckstücke sind in der richtigen Ausrichtung und Position. Der Würfel befindet sich also in der Startkonfiguration.

6 Lösung des Würfels

Die übliche, händische Methode zum Lösen eines Zauberwürfels ist das Kombinieren verschiedener Ebenendrehungen. Diese werden als eine Einheit angewendet und verändern den Würfel dann sehr spezifisch.
Es gibt beispielsweise eine Kombination, die 3 der 4 Ecken der oberen Ebene untereinander im Uhrzeigersinn tauscht und deren Ausrichtung dabei nicht verändert.

Parität

Jeder n-Zykel kann als Produkt von 2-Zykeln geschrieben werden. Wenn n dabei gerade ist, hat das dazugehörige 2-Zykel-Produkt eine ungerade Anzahl an 2-Zykeln und anders herum. [4]
Jede Würfelposition kann durch die Ebenendrehungen U, D, F, B, L, R (und die Rotation des Würfels) erreicht werden.
Zur Erinnerung: Die Ebenendrehungen des Würfels sind durch folgende Zykel definiert:

$$\begin{aligned}
\sigma_U &= (ulf\ ulb\ urb\ urf) \\
\sigma_D &= (dlf\ drf\ drb\ dlb) \\
\sigma_F &= (ulf\ urf\ drf\ dlf) \\
\sigma_B &= (ulb\ dlb\ drb\ urb) \\
\sigma_L &= (ulb\ ulf\ dlf\ dlb) \\
\sigma_R &= (urb\ drb\ drf\ urf)
\end{aligned}$$

Jeder Zug ist also als ein 4-Zykel definiert. Den 4-Zykel kann man als Produkt aus drei 2-Zykeln schreiben.
Die Parität einer einzelnen Ebenendrehung ist also ungerade. Die Parität eines Zuges, der aus zwei Ebenendrehungen besteht (z.B. LF) ist somit gerade.

Kommutatoren

Der Kommutator von zwei Elementen Y, Z der Gruppe $(G_{2\times2\times2}, \circ)$ ist definiert als $YZY^{-1}Z^{-1}$. Das schreibt man auch als $[Y, Z]$.

Bei kommutativen Gruppen ist der Kommutator zweier Elemente das neutrale Element der Gruppe. [4] Man sagt dann, dass die beiden Elemente kommutieren.

Obwohl $(G_{2\times2\times2}, \circ)$ keine kommutative Gruppe ist, gibt es kommutierende Elemente.

Wenn $Y = Z$ mit $Y, Z \in G_{2\times2\times2}$ gilt, kommutieren Y und Z beispielsweise.
Zur Veranschaulichung des Beweises wird $[Y, Z]$ mit $Y = Z$ nun als $[Z, Z]$ geschrieben. Das ist dann das Gleiche wie $ZZZ^{-1}Z^{-1}$.
Geklammert sieht das so aus: $Z(ZZ^{-1})Z^{-1}$. (ZZ^{-1}) ist äquivalent mit dem neutralen

Element N.
Daraus ergibt sich $Z(N)Z^{-1} = ZZ^{-1} = N$.
Somit kommutieren alle $Y, Z \in G_{2\times2\times2}$ mit $X = Y$.

Es kommutieren auch Züge, die nur gegenüberliegende Ebenen beeinflussen und somit nicht dieselben Steine bewegen.
Das sind dann die Kommutatoren der Form $[U^n, D^n]$, $[F^n, B^n]$ und $[L^n, R^n]$ mit $n \in \mathbb{N}_0$.
Da die beiden Züge nicht dieselben Steine beeinflussen, ist es nicht relevant, dass die Gruppe nicht kommutativ ist und durch $YZY^{-1}Z^{-1}$ werden beide Züge wieder invertiert.

Auch wenn zwei Züge $Y, Z \in G_{2\times2\times2}$ nicht kommutieren, kann anhand der Komplexität des Kommutators festgestellt werden, wie groß die Veränderung der Würfelkonfiguration nach $[Y, Z]$ ist.
Als Beispiel zur Veranschaulichung: Die Züge $Y = L$ und $Z = F$ verändern durch $[Y, Z]$ vier Steine im Würfel. Die anderen vier behalten ihre Position und Ausrichtung.
Es wird also $LFL^{-1}F^{-1}$ ausgeführt. Das führt zu folgenden Permutationen:

	ulb	urb	ulf	urf	dlb	drb	dlf	drf
L	ulf	urb	dlf	urf	ulb	drb	dlb	drf
F	urf	urb	ulf	drf	ulb	drb	dlb	dlf
L^{-1}	urf	urb	ulb	drf	dlb	drb	dlf	ulf
F^{-1}	ulf	urb	ulb	urf	dlb	drb	drf	dlf

Tabelle 8: Permutationen von $[L, F]$

Wenn man nun die Kopfzeile der Tabelle und die unterste Zeile vergleicht, sieht man, dass urb, urf, dlb und drb wieder an ihrer Ausgangsposition sind. Die anderen vier Steine (ulf, ulb, urf und ulf) haben die Positionen gewechselt:

$ulb \mapsto ulf$ $\quad$ $ulf \mapsto ulb$ $\quad$ $dlf \mapsto drf$ $\quad$ $drf \mapsto dlf$

(Daraus ergibt sich $[L, F] = (ulb\ ulf)(dlf\ drf)$ in der Zykelschreibweise.)

Lösungsansätze

Für die Lösung des Würfels sind Züge nützlich, die nur wenige Steine bewegen. So kann man dann gezielt bestimmte Steine drehen oder tauschen.

Es gibt verschiedene Vorgehensweisen um den Würfel zu lösen. Üblicherweise fängt man mit der weißen Seite an, deshalb werden auch die folgenden Beispiele so vorgehen. Die gelbe Seite gehört dann zur letzten Ebene, die gelöst wird.
Für die Lösungsalgorithmen ist die Farbe der ersten Seite nicht relevant. Es wird aber häufig mit weiß begonnen, da man sich die Anordnung der Farben so leichter merken und und schneller sieht, in welche Ebene ein Stein gehört [6].

Eine gängige Lösungsmethode geht so vor, dass bei der letzten Ebene zuerst alle Steine richtig ausgerichtet werden. Dann sind alle $x_i = 0$. Danach werden die Positionen noch getauscht.
Dafür dreht man den Würfel üblicherweise, damit die gelbe Seite oben ist.

Ein Beispiel für einen Zug dieses Lösungsansatzes ist $[R, U][R^{-1}, F]$. Dabei werden zwei Steine der oberen Ebene gedreht und drei Steine verändern ihre Position. Dieser Zug kann für die Lösung der zweiten Ebene genutzt werden, ohne dabei die erste Ebene zu verändern. [5]

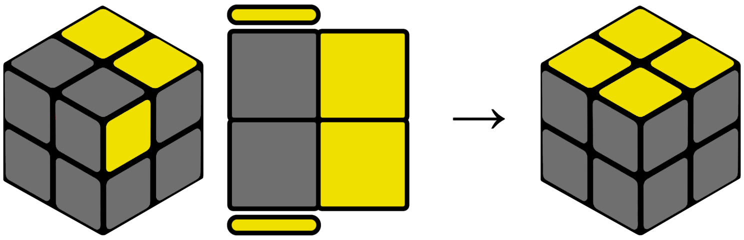

Abbildung 19: Bei der Ausgangsposition (links) wird durch den Zug $[R, U][R^{-1}, F]$ die obere Seite komplett gelb (rechts).

Man kann $[R, U][R^{-1}, F]$ auch als Zykel schreiben: $(ulb\ ulf\ urb)$.

Lösung des Würfels anhand eines Beispiels

In diesem Beispiel wird der Würfel mit dem Zug $FUBRF^{-1}$ verdreht und so gelöst, wie ein Mensch den *Cube* lösen würde.

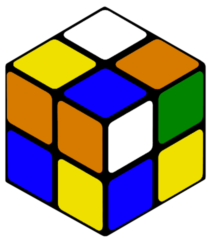

Abbildung 20: Der Würfel sieht nach $FUBRF^{-1}$ so aus. Er wurde bei dieser Ansicht noch um 180° um die z-Achse rotiert.

Der erste Schritt für einen menschlichen Ansatz der Lösung des Würfels ist (meistens), die Steine der oberen Ebene so anzuordnen, dass die Farbflächen dort alle weiß sind und die vier oberen Steine in der richtigen Position zueinander sind.
Es muss also $x_{1-4} = (0,0,0,0)$ gelten und $\sigma_{ulb} = ulb, \sigma_{urb} = urb, \sigma_{ulf} = ulf, \sigma_{urf} = urf$ bzw. die Äquivalenzklassen δ_{Z_r} und δ_{Z_l} davon.

Der Lösende sucht nun also Steine mit weißen Farbflächen und findet den weiß-orange-blauen Stein an der Position urf.
Mit dem Zug F^{-1} findet der Stein seinen Platz in der oberen Ebene, mit der weißen Farbfläche oben.
Nun ist $x_{1-4} = (0,2,0,1)$ und der Würfel sieht so aus:

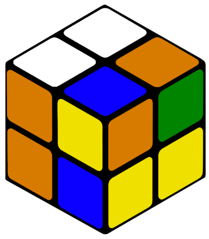

Abbildung 21: Lösung von Mensch: Schritt 1

Der nächste Stein, der angeordnet wird, ist hier der weiß-grün-orange Stein. Er wird durch den Zug R^{-1} in Position gebracht.

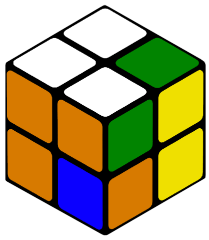

Abbildung 22: Lösung von Mensch: Schritt 2

Der letzte Stein mit weißer Farbfläche wird dann durch den Zug $RD^{-1}R^{-1}$ positioniert. Die obere ebene ist nun gelöst.

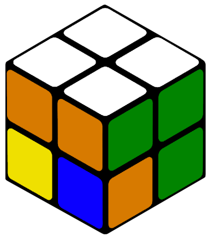

Abbildung 23: Lösung von Mensch: Schritt 3

Die obere ebene ist nun fertig. Es gilt $x_{1-4} = (0, 0, 0, 0)$ und durch die Äquivalenzklassen δ_{Z_r} oder δ_{Z_l} kann man sehen, dass die Steine der oberen Ebene richtig zueinander angeordnet sind. Sie sind aber um 180° gedreht zur Startkonfiguration.

Für den nächsten Schritt rotiert der Mensch den Würfel, hier um die y-Achse.

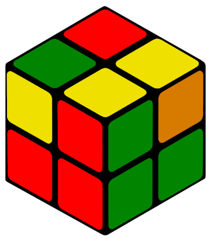

Abbildung 24: Lösung von Mensch: Schritt 4

Dann führt er den Zug $RUR^{-1}U^{-1}\ R^{-1}FRF^{-1}$ aus [5] und erhält einen gelösten Würfel.

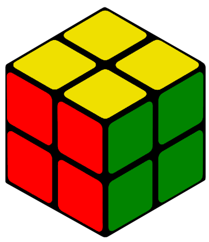

Abbildung 25: Der *Cube* ist gelöst, die weiße Seite ist unten.

Der Mensch folgt beim Lösen des *Cubes* (meistens) bestimmten Kombinationen, die man in verschiedenen Situtionen anwenden kann.

In diesem Fall hat der Mensch 13 Ebenen gedreht, während das Verdrehen nur 5 Ebenenrotationen benötigte. Der Mensch hat also nicht den kürzesten Weg gewählt, aber dafür einen Weg, den er bei verschiedenen Würfelkonfiguratonen anpassen und verwenden kann.

Wenn man die Verdrehung des Würfels invertiert, also $(FUBRF^{-1})^{-1}$ erhält man $FR^{-1}B^{-1}U^{-1}F^{-1}$, um den Würfel zu lösen.

Es stellt sich die Frage, wie viele Ebenendrehungen der 2×2×2-Würfel maximal von der Lösung entfernt sein kann. Diese Zahl wird auch *God's Number* genannt.
Wenn man davon ausgeht, dass jede 90°-Drehung einer Ebene als Drehung gezählt wird (und 180°-Drehungen als zwei Drehungen), ist die *God's Number* des Würfels 14. [8]

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

Literatur

[1] Muhammad Mirza Fathan Al Arsyad. *God's Algorithm in The 2x2x2 Rubik's Cube*. Website. Online erhältlich unter `https://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/Matdis/2019-2020/Makalah2019/13518111.pdf`; abgerufen am 20.01.2021. 2019.

[2] Rubik's Brand. *Our heritage*. Website. Online erhältlich unter `https://www.rubiks.com/en-eu/about`; abgerufen am 04.02.2021. Publiziert am 19.04.2018.

[3] Janet Chen. *Group Theory and the Rubik's Cube*. Website. Online erhältlich unter `http://people.math.harvard.edu/~jjchen/docs/Group_Theory_and_the_Rubik's_Cube.pdf`; abgerufen am 05.01.2021.

[4] Tom Davis. *Group Theory via Rubik's Cube*. Website. Online erhältlich unter `http://www.geometer.org/rubik/group.pdf`; abgerufen am 05.01.2021.

[5] Roland Frisch. *Schnelle Lösung für den 2x2x2 Pocket Cube (Ortega Methode)*. Website. Online erhältlich unter `https://freshcuber.de/loesung-2x2x2-ortega/`; abgerufen am 31.01.2021. Publiziert am 19.04.2018.

[6] Roland Frisch. *Zauberwürfel-Anfängerlösung Teil 1: Erste Ebene (weiß)*. Website. Online erhältlich unter `https://freshcuber.de/zauberwuerfel-loesung-teil1/`; abgerufen am 29.01.2021. Publiziert am 11.12.2017.

[7] Tobias Glosauer. *Elementar(st)e Gruppentheorie*. Wiesbaden: Springer Spektrum, 2016.

[8] David Joyner. *Adventures in Group Theory: Rubik's Cube, Merlin's Machine, and Other Mathematical Toys*. Online erhältlich unter `https://mike.verdone.ca/media/rubiks.pdf`; abgerufen am 12.01.2021. Baltimore, USA: Johns Hopkins University Press, 2008.