Technische Universität Dortmund

Proposal
(zur Bachelorarbeit)

Zauberwürfel Algorithmen und deren Tiefe an einem 2x2x2 Würfel

Pina Kolling

betreut von
Dr. Lukasz Czajka

16. März 2020

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung/Ausgangslage

Meine Bachelorarbeit soll sich mit dem 2x2x2 Zauberwürfel und dessen Algorithmen zur Lösung befassen. Dabei handelt es sich um ein Drehpuzzle, das ein mathematisches Problem darstellt.
Ich möchte sowohl die Algorithmen mithilfe der Gruppentheorie darstellen, als auch einen Code zur Berechnung der tiefsten Tiefe (Definition der Tiefe folgt) schreiben als auch die 3x3x3 Algorithmen auf den 2x2x2 Würfel übertragen.
Im folgenden werde ich die Terminologie und des Aufbau des Würfels klären.
Terminologie:

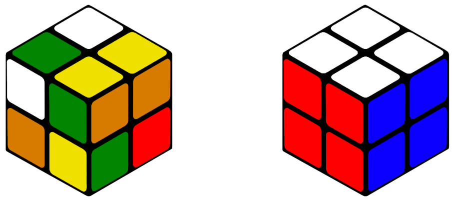


Abbildung 1: 2x2x2 Zauberwürfel
(links in ungelöstem und rechts in gelöstem Zustand (auch Grundstellung))
Der Zauberwürfel wird auch Würfel/Cube genannt.

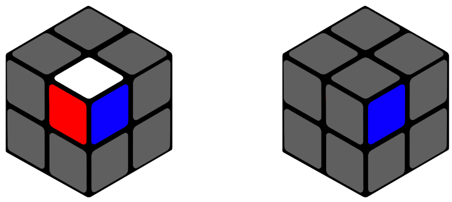


Abbildung 2: Ein 2x2x2 Würfel besteht aus 8 (Eck-)Steinen (links), die jeweils 3 Farbflächen (rechts) haben. Ein 2x2x2 Zauberwürfel hat also 24 Farbflächen.

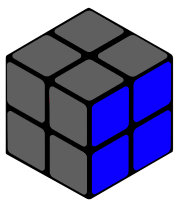


Abbildung 3: Der 2x2x2 und der 3x3x3 Zauberwürfel haben jeweils 6 Seiten.

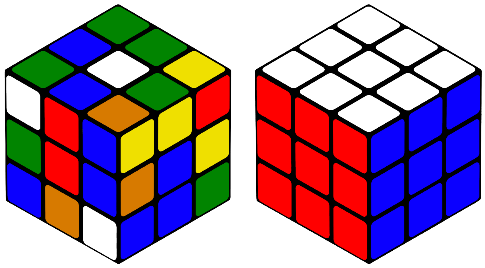


Abbildung 4: 3x3x3 Zauberwürfel
(links in ungelöstem und rechts in gelöstem Zustand (auch Grundstellung))

Definition der Tiefe:

Anzahl der Züge, die der Würfel von dem gelösten Zustand entfernt ist, wenn man den optimalen Lösungsweg wählt. Beim gelösten Zustand haben alle Felder auf einer Seite die gleiche Farbe. Die Tiefe des tiefsten Falls: Wie viele Züge kann der Würfel maximal von der Lösung entfernt sein?
Ein Zug ist das Drehen einer einzelnen Seite in eine beliebige Richtung, auch eine 180° Drehung.

Algorithmen

Am 2x2x2 Zauberwürfel gibt es an sich 6 verschiedene Drehseiten: oben, unten, links, rechts, vorne und hinten. Da der Würfel aber nur aus 2 Ebenen besteht, entspricht eine Drehung der oberen Ebene nach rechts einer Drehung der unteren Ebene nach links. Somit betrachte ich nur die Drehseiten oben, rechts und vorne.
Jede dieser Seiten kann nach im und gegen den Uhrzeigersinn gedreht werden, außerdem kann auch um 180° gedreht werden. Die Abkürzungen für die Züge sind folgende:

Abkürzung	Beschreibung des Zugs
U	Drehung der oberen Ebene im Uhrzeigersinn
U’	Drehung der oberen Ebene gegen den Uhrzeigersinn
U180	Drehung der oberen Ebene um 180°, also $U180 = UU = U'U'$
R	Drehung der rechten Ebene im Uhrzeigersinn
R’	Drehung der rechten Ebene gegen den Uhrzeigersinn
R180	Drehung der rechten Ebene um 180°, also $R180 = RR = R'R'$
F	Drehung der vorderen Ebene im Uhrzeigersinn
F’	Drehung der vorderen Ebene gegen den Uhrzeigersinn
F180	Drehung der vorderen Ebene um 180°, also $F180 = FF = F'F'$

2 (Geplante) Untersuchungen und Untersuchungsmethoden

Code schreiben, der die Tiefe eines 2x2x2 Zauberwüfel berechnet

Ich werde die Tiefe eines Zauberwürfels mit einem Java-Programm berechnen. Dazu werde ich den Würfel als Array darstellen. Jeder Farbfläche ist ein fester Index des Array zugeordnet, der die Farbe der Fläche als String enthält.

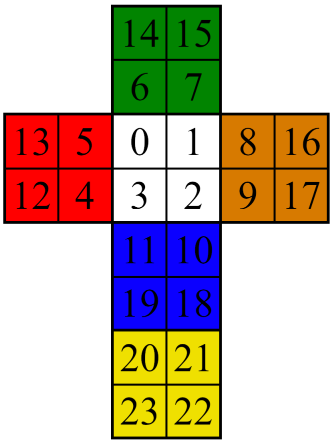


Abbildung 5: Zuordnung der Farbflächen zu den Indizes des Arrays.

Das Array, das die Grundstellung repräsentiert, sieht beispielsweise folgendermaßen aus:

```
String [] solvedPosition =  {"white", "white", "white", "white", "red",
"red", "green", "green", "orange", "orange", "blue", "blue", "red",
"red", "green", "green", "orange", "orange", "blue", "blue", "yellow",
"yellow", "yellow", "yellow"};
```

Von dem gelösten Würfel ausgehend wird nun die Tiefe des tiefsten Falls gesucht.
Wenn der Würfel sich in einem Zustand der Tiefe n befindet und ein Zug durchgeführt wird, muss einer der folgenden drei Fälle eintreten: Vorgang grafisch darstellen

- Die Tiefe der neuen Position ist $n+1$, der Würfel ist also einen Zug mehr von der Lösung entfernt.
- Die Tiefe der neuen Position ist die der alten, also $n+1$.
- Die Tiefe der neuen Positionen ist $n-1$, die Würfelposition ist also näher an der Lösung.

Die Tiefe kann nicht negativ sein. Wenn man in einem Zustand der Tiefe 0 einen Zug macht, hat der Würfel im Folgezustand immer die Tiefe 1.
Vorgang grafisch darstellen Wenn man die maximale Tiefe n_max erreicht hat, können die Folgezustände nur noch die Tiefe n_{max} und $n_{max}-1$ haben.

Die möglichen Züge werden als einzelne Methoden implementiert (z.B. die Vorderseite um 90° nach rechts drehen:

```
private static final int AMOUNT_FIELDS = 24;

    // Front um 90 Grad im Uhrzeigersinn (nach rechts) drehen
    public static String[] front (String [] currentPosition){
        String [] newPosition = new String[24];
        for (int i = 0; i < AMOUNT_FIELDS; i++){
            if (i < 2 || (i > 4 && i < 8) || (i > 12 && i < 17) || i > 21) {
                newPosition[i] = currentPosition[i];
            }
            }

        newPosition[2] = currentPosition[4];
        newPosition[3] = currentPosition[12];
        newPosition[4] = currentPosition[20];
        newPosition[9] = currentPosition[3];
        newPosition[10] = currentPosition[11];
        newPosition[11] = currentPosition[19];
        newPosition[12] = currentPosition[21];
        newPosition[17] = currentPosition[2];
        newPosition[18] = currentPosition[10];
        newPosition[19] = currentPosition[18];
        newPosition[20] = currentPosition[9];
        newPosition[21] = currentPosition[17];

        return newPosition;
        }
```

Bei der Implementierung der Züge werden die Züge F, R, U implementiert und alle anderen lassen sich dadurch umsetzen. Zum Beispiel gilt $F' = FFF$ oder $U = F'$.
Mit diesen Methoden kann dann berechnet werden, welche Position welche Tiefe hat und so der Zustand mit der maximalen Tiefe errechnet werden.

Darstellung des 2x2x2 Zauberwüfels mit dem mathemtischen Konstrukt der Gruppe

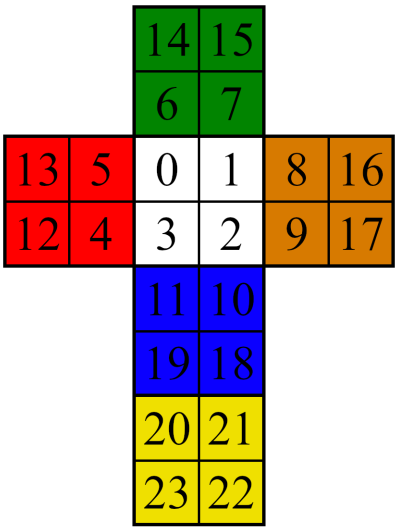
Definition einer kommutativen Gruppe $(G, \circ)$ (auch abelsche Gruppe):

- Abgeschlossenheit: $\forall a, b \in G.(a \circ b) \in G$
- Assoziativität: $\forall a, b, c \in G.(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$
- Existenz eines neutralen Elements n: $\forall a \in G, \exists n \in G.n \circ a = a \circ n = a$
- Existenz eines inversen Elements a^{-1}: $\forall a \in G, \exists a^{-1} \in G.a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = n$
- Kommutaivität: $\forall a, b \in G.a \circ b = b \circ a$

TODO: Operatoren checken
Definition einer Permutationsgruppe $(G, \cdot)$:
(Gruppe von Permutationen einer endlichen Menge F (Menge der Farbflächen).)
Sei $G, \cdot$ eine Gruppe mit neutralem Element e:

- F ist eine endliche Menge.
- G operiert auf F: Es existiert eine Abbildung $G \times M \to M, (g, m) \mapsto g \circ m \in M$, für die gilt $\forall m \in M, g, h \in G.e \circ m = m, (g \cdot h) \circ m = g \circ (h \circ m)$
- Operation $\circ$ ist treu, es gilt: Ist $g \circ m = h \circ m. \forall m \in M$ dann folgt $g = h$. Gilt $g \circ m = m$ dann folgt $g = e$.

Die Gruppe des 2x2x2 nenne ich G_{2x2x2}.
Sei F die Menge aller Farbflächen, also $|F| = 24$ mit $F = \{0, 2, ..., 23\}$. Die drei (bzw sechs) Basiszüge sind $U, R, F \in S_F$ (bzw $U, D, R, L, F, B \in S_F$). S_F ist also die Menge aller Permutationen der Farbflächen.
Dann heißt die Permutationsgruppe der drei Basiszüge $G_{2x2x2} =< U, R, F >$.
G ist eine Gruppe, aber keine kommutative Gruppe. (?)



Vertauschung bei einer Drehung:
Wenn man nun den Zug F ausführt, also eine Drehung der blauen Ebene (der Vorderseite) um 90° nach rechts, treten folgende Vertauschungen auf:

Grundstellung	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
neuer Zustand	0	1	4	12	20	5	6	7	8	3	11	19
Grundstellung	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
neuer Zustand	21	13	14	15	16	2	10	19	9	17	22	23

Farberklärung: weiß, blau, grün, orange, gelb, rot

An diesem Beispiel sieht man, dass die Felder, die vor dem Zug blau waren, auch danach alle noch blau sind. Es befinden sich allerdings andere Farbflächen an ihrer Stelle, da ja die vordere (blaue) Fläche gedreht wurde.

Übertragung der 3x3x3 Algorithmen auf den 2x2x2 Zauberwüfel

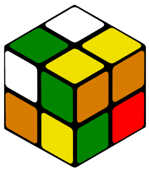
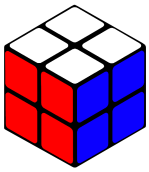
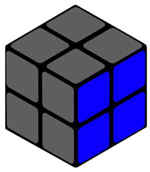
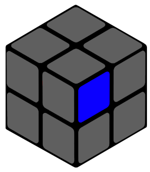
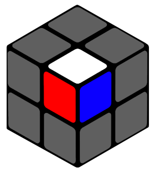
Wird im Laufe der Arbeit noch erarbeitet. Zuerst muss aber die Darstellung in der Gruppentheorie fertig sein. Der Umfang steht in Abhängigkeit zu dem Umfang des Codes und der Darstellung in der Gruppentheorie.

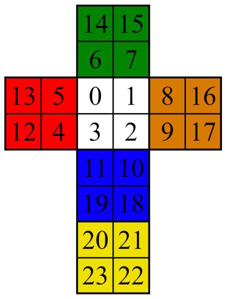
3 Zeitplan

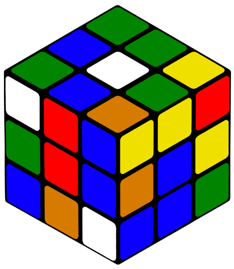
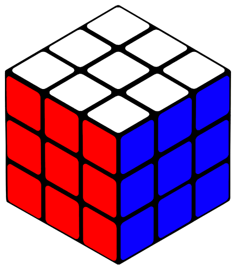
Die Abläufe und die geplanten Arbeiten (wie Literaturstudium, Feldarbeit inkl. Vorbereitungen, Dünnschliffherstellung, Laborarbeiten, schriftliches Verfassen der Arbeit, Druck) werden in einem Zeitplan festgehalten. Dabei ist unbedingt genügend Zeit für Unvorhergesehenes einzuplanen. Die Zeitplanung ist ein unerlässlicher Teil der Arbeit und hilft fokussiert auf gesetzte Termine hinzuarbeiten und diese einzuhalten. Eine genaue Zeitplanung hilft zudem unvorhergesehene Verzögerungen frühzeitig zu erkennen und notwendige Massnahmen zu ergreifen. Eine einfache Zeittabelle ist eine gute Möglichkeit, das Zeitmanagement darzu- stellen.

4 Abbildungen, Tabellen etc.

Alle bisher verwendeteten Grafiken und Abbildungen habe ich selbst mit GIMP erstellt, um Markennennungen zu vermeiden und eine einheitliche Darstellung zu gewährleisten.



GIT TEST