COMP562205 计算机视觉与模式识别 **Homework 11 - 05/08/2022**

Homework11

Lecturer: 苏远歧 *Scribe: 计试 91 王彦博 2173214287*

1、 求解导数

给定输入的张量是x，这是一个$N \times C_{in} \times w \times h$的张量；

给定模板的张量是h，这是一个$C_{out} \times C_{in} \times 3 \times 3$的张量；

进行卷积运算的参数，采用$\text{Padding} = 1$，然后$\text{Stride} = 1$，

现在已知张量y是通过模板对输入进行模板运算的结果，如下：

$$y = x \otimes h$$

其中$\otimes$是模板运算，另外已知损失函数相对于y的偏导数为：

$$\frac{\partial L}{\partial y}$$

请尝试推导：

1） 损失函数相对于输入的导数$\dfrac{\partial L}{\partial x}$

2） 损失函数相对于模板的导数$\dfrac{\partial L}{\partial h}$

(1)

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial L}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} \tag{1}$$

考虑 x_{in_i,w_i,h_i} (为方便处理, 不考虑图片张数 N, 后续处理时可对于每张图片独立处理), 有:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial x_{in_i,w_i,h_i}} &= \sum_{out_j=1,w_j=-W+w_i,h_j=-H+h_i}^{C_{out},W+w_i,H+h_i} \frac{\partial L}{\partial y_{out_j,w_j,h_j}} \frac{\partial y_{out_j,w_j,h_j}}{\partial x_{in_i,w_i,h_i}} \\
&= \sum_{out_j=1,w_j=-W+w_i,h_j=-H+h_i}^{C_{out},W+w_i,H+h_i} \frac{\partial L}{\partial y_{out_j,w_i+(w_j-w_j),h_i+(h_j-h_i)}} \frac{\partial y_{out_j,w_i+(w_j-w_j),h_i+(h_j-h_i)}}{\partial x_{in_i,w_i,h_i}} \\
&= \sum_{out_j=1,w_j-w_i=-W,h_j-h_i=-H}^{C_{out},W,H} \frac{\partial L}{\partial y_{out_j,w_i+(w_j-w_j),h_i+(h_j-h_i)}} h_{in_i,out_j,-(w_j-w_i),-(h_j-h_i)}
\end{aligned} \tag{2}$$

上式恰好为卷积运算定义公式, 其中模板上下左右翻转 (等同于旋转 180°). 故:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial L}{\partial y} \otimes h^{rotate\ 180^\circ} \tag{3}$$

(2)

$$\frac{\partial L}{\partial h} = \frac{\partial L}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial h} \tag{4}$$

与 (1) 类似, 考虑 h_{in_i,out_i,w_i,h_i}, 有:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial h_{in_i,out_i,w_i,h_i}} &= \sum_{out_j=1,w_j=-W+w_i,h_j=-H+h_i}^{C_{out},W+w_i,H+h_i} \frac{\partial L}{\partial y_{out_j,w_j,h_j}} \frac{\partial y_{out_j,w_j,h_j}}{\partial h_{in_i,out_i,w_i,h_i}} \\
&= \sum_{out_j=1,w_j=-W+w_i,h_j=-H+h_i}^{C_{out},W+w_i,H+h_i} \frac{\partial L}{\partial y_{out_j,w_i+(w_j-w_j),h_i+(h_j-h_i)}} \frac{\partial y_{out_j,w_i+(w_j-w_j),h_i+(h_j-h_i)}}{\partial h_{in_i,out_i,w_i,h_i}} \\
&= \sum_{out_j=1,w_j-w_i=-W,h_j-h_i=-H}^{C_{out},W,H} \frac{\partial L}{\partial y_{out_j,w_i+(w_j-w_j),h_i+(h_j-h_i)}} x_{in_i,w_i-w_j,h_i-h_j}
\end{aligned} \tag{5}$$

上式恰好为卷积运算定义公式, 其中模板上下左右翻转 (等同于旋转 180°). 故:

$$\frac{\partial L}{\partial h} = \frac{\partial L}{\partial y} \otimes x^{rotate\ 180^\circ} \tag{6}$$

2、假设现在有一个4×4的具有两个通道的特征如下所示。

$$F(c_{in}=1\cdot,\cdot,)=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\8&7&6&5\\9&10&11&12\\16&15&14&13\end{bmatrix},\quad F(c_{in}=2\cdot,\cdot,)=\begin{bmatrix}29&30&31&32\\28&27&26&25\\21&22&23&24\\20&19&18&17\end{bmatrix}$$

对这个图像采用，如下的模板进行模板运算。

$$h(c_{out}=1,c_{in}=1,\cdot,\cdot)=\begin{bmatrix}-1&0&1\\-1&0&1\\-1&0&1\end{bmatrix}$$

$$h(c_{out}=1,c_{in}=2,\cdot,\cdot)=\begin{bmatrix}-1&-1&-1\\0&0&0\\1&1&1\end{bmatrix}$$

$$h(c_{out}=2,c_{in}=1,\cdot,\cdot)=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$h(c_{out}=2,c_{in}=2,\cdot,\cdot)=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$$

模板运算采用 Valid 输出尺寸，请问：

1）输出记为conv_1，请问conv_1是多少？

2）如果采用 ReLU 对这个输出进行激活，记为relu_1，请问激活后relu_1的值是多少？

3）如果将输出拉成一列，采用全连接网络，输出节点个数为 5，假设全连接所有权重都设置为$\dfrac{1}{10}$，输出记为fc_1，请问输出是多少？

4）假设采用 softmax 对这个 5 个节点的输出进行，概率值记为$p=[p_1,p_2,p_3,p_4,p_5]$，请问p是多少？

5）如果采用交叉熵对概率进行约束，如下所示

$$L=\sum_{i=1}^{5}-y_i\log p_i$$

如果$y_1=0,y_2=0,y_3=1,y_4=0,y_5=0$，请问损失函数是多少？

6）请问 $\dfrac{\partial L}{\partial p},\dfrac{\partial L}{\partial \mathrm{fc}_1},\dfrac{\partial L}{\partial \mathrm{relu}_1},\dfrac{\partial L}{\partial \mathrm{conv}_1}$ 分别是多少？

7）如果把全连接的权重记为W，请问 $\dfrac{\partial L}{\partial W}$ 是多少？

8）请问 $\dfrac{\partial L}{\partial h}$ 是多少？

(1)

分别对特征的 2 个 channel 使用对应的 2 个卷积核进行卷积, 得:

$$conv1 = \begin{bmatrix} -22 & -22 \\ -26 & -26 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 98 & 100 \\ 100 & 98 \end{bmatrix} \tag{7}$$

(2)

保留大于 0 的值, 得:

$$relu1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 98 & 100 \\ 100 & 98 \end{bmatrix} \tag{8}$$

(3)

计算得:

$$fc1 = \begin{bmatrix} 39.6 & 39.6 & 39.6 & 39.6 & 39.6 \end{bmatrix}^T \tag{9}$$

(4)

softmax 为 $\frac{exp(x_i)}{\sum_{j=1}^{n} exp(x_j)}$, 故计算得:

$$p = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 \end{bmatrix}^T \tag{10}$$

(5)

计算得 $L = -log(0.2)$.

(6)

$$\frac{\partial L}{\partial p} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{p_3} & 0 & 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -5 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \tag{11}$$

$\frac{\partial L}{\partial fc1}$ 为关于 softmax 层求导, 为:

$$\frac{\partial L}{\partial fc1} = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & p_3 - 1 & p_4 & p_5 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.2 & -0.8 & 0.2 & 0.2 \end{bmatrix}^T \tag{12}$$

$\frac{\partial L}{\partial relu1}$ 为关于全连接层求导, 为:(8 维向量, 省略号表示完全一样)

$$\frac{\partial L}{\partial relu1} = \begin{bmatrix} 0.1(p_1 + p_2 + p_3 - 1 + p_4 + p_5) & ... \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \tag{13}$$

$\frac{\partial L}{\partial conv1}$ 只要截去前向推导时小于 0 的部分即可, 仍然为:

$$\frac{\partial L}{\partial conv1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \tag{14}$$

(7)

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial W} &= \frac{\partial L}{\partial fc1} \frac{\partial fc1}{\partial W} \\ &= [p_1 \ p_2 \ p_3 - 1 \ p_4 \ p_5]^T \, [relu1_1 \ ... \ relu1_8] \end{aligned} \tag{15}$$

故:

$$\frac{\partial L}{\partial W} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 19.6 & 20 & 20 & 19.6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 19.6 & 20 & 20 & 19.6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -78.4 & -80 & -80 & -78.4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 19.6 & 20 & 20 & 19.6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 19.6 & 20 & 20 & 19.6 \end{bmatrix} \tag{16}$$

(8)

$$\frac{\partial L}{\partial h} = \frac{\partial L}{\partial conv1} \otimes F^{rotate \ 180^\circ} \tag{17}$$

虽然该情况下卷积核长度为偶数, 但不影响最终尺寸:

$$\frac{\partial L}{\partial h_{c_{in}=1, c_{out}=1}} = \frac{\partial L}{\partial h_{c_{in}=2, c_{out}=1}} = \frac{\partial L}{\partial h_{c_{in}=1, c_{out}=2}} = \frac{\partial L}{\partial h_{c_{in}=2, c_{out}=2}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{18}$$