第 1 次作业：

多级火箭问题

一、问题重述

1.1 问题背景

火箭是一种运输工具，它的任务是将具有一定质量的航天器送入太空。航天器在太空中的运行情况与它进入太空时的初始速度的大小和方向有关。一般地说，如果航天器进入飞行轨道的速度小于第一宇宙速度（7.91 千米/秒），航天器将落回地面；如果航天器进入轨道的速度介于第一宇宙速度与第二宇宙速度（11.2 千米/秒）之间时，它在地球引力场内飞行，成为人造地球卫星；当航天器进入轨道的速度介于第二宇宙速度与第三宇宙速度（16.7 千米/秒）之间时，它就飞离地球成为太阳系内的人造行星；当航天器进入轨道的速度达到或超过第三宇宙速度时，它就能飞离太阳系。随着人类逐渐进入深空探测和空间飞行器的功能增多，要求火箭具有更大的运载能力，因而出现了多级火箭。多级火箭就是把几个单级火箭连接在一起形成的，其中的一个火箭先工作，工作完毕后与其他的火箭分离，然后第二个火箭接着工作，依此类推。由几个火箭组成的就称为几级火箭，如二级火箭、三级火箭等等。多级火箭的优点是每过一段时间就把不再有用的结构抛弃掉，无需再消耗推进剂来带着它和有效载荷（航天器）一起飞行。因此，只要在增加推进剂质量的同时适当地将火箭分成若干级，最终可以使火箭达到足够大的运载能力。然而，级数太多不仅费用增加，可靠性降低，火箭性能也会因结构质量增加而变坏。

1.2 目标任务

建立数学模型，分析说明发射卫星为什么一般使用三级火箭系统。

二、问题分析

航天器若要成为人造卫星需要在进入轨道时速度需 7.9km/s 且小于 11.2km/s。火箭中喷出的燃气相对于火箭本身的速度称为喷气速度。目前广泛使用的液体燃料，喷气速度可达 3.5m/s 左右。

三、模型假设

1）火箭在飞行过程中沿直线运动。

2）火箭分离时不受到其他外力的作用。

3）令第i级的火箭质量为m_i，有效运载（卫星）的质量为m_p，且各级火箭与有效运载质量比$\mathrm{k}=\frac{m_i}{m_p}$保持不变。

4）在第i级火箭中，结构的质量为λm_i，燃料质量为$(1-\lambda)m_i$，取 λ=0.1。

四、模型建立

设火箭在t时刻的速度为m，速度为v。

设在时间dt内，火箭质量的减小量为dm，速度增加量为dv，火箭中燃料喷出后速度为u，相对于火箭本身速度为v_r，根据假设，火箭受到的外力为 0，由动量定理有

$$mv = (m - dm)(v + dv) - udm$$

略去二阶无穷小量$dmdv$，代入$v_r = u + v$得

$$mdv = v_r dm$$

即

$$\frac{dm}{m} = \frac{1}{v_r} dv$$

对此式进行积分，设火箭在喷射前的初始质量为m_0，速度为v_0，燃料全部消耗完时的质量为m_f，速度为v_f，且dm减小，则

$$\int_{m_0}^{m_f} \frac{dm}{m} = -\frac{1}{v_r} \int_{v_0}^{v_f} dv$$

得到燃料耗尽时，火箭速度大小为

$$v_f = v_0 + v_r \ln \frac{m_0}{m_f}$$

记$\ln \frac{m_0}{m_f} = N$，则上式可写为：

$$v_f = v_0 + v_r \ln N$$

取v_0=0km/s，则

$$v_f = v_r \ln N$$

五、模型求解

对于 1 级火箭：

$$v_f = v_r \ln N = v_r \ln \frac{m_1 + m_p}{\lambda m_1 + m_p} = v_r \ln \frac{k+1}{\lambda k + 1}$$

由$7.9km/h < v_f < 11.2km/s$，可解得

$$k > 192.6$$

k值过大，1 级火箭显然不可行，下不做讨论。

对于 2 级火箭，当 1 级火箭燃料燃烧完后：

$$v_{f1} = v_r \ln \frac{k+1}{\lambda k + 1}$$

2 级火箭燃料燃烧完后：

$$v_{f2} = v_{f1} + v_r \ln \frac{m_p + m_2}{\lambda m_2 + m_p} = v_{f1} + v_r \ln \frac{k+1}{\lambda k + 1} = 2\, v_r \ln \frac{k+1}{\lambda k + 1}$$

由$7.9km/h < v_f < 11.2km/s$，可解得

$$3.0 < k < 7.8$$

对于 3 级火箭：

$$v_{f3} = 3v_r \ln\frac{k+1}{\lambda k+1}$$

解得

$$1.4 < k < 2.7$$

对于 4 级火箭：

$$v_{f4} = 4v_r \ln\frac{k+1}{\lambda k+1}$$

解得

$$0.9 < k < 1.6$$

火箭总质量

$$\mathrm{m} = (\mathrm{nk}+1)m_p$$

表 1 各级火箭火箭总质量和有效运载质量比值

级数	2	3	4
$(\mathrm{nk}+1)$	(7，16.6)	(5.2，9.1)	(4.6，7.4)

六、模型结论

实际上，火箭在运动过程中会受到地球引力和摩擦力的影响，为使得火箭的速度可以达到 7.9km/s，在解方程$v_{fn} = nv_r \ln\frac{k+1}{\lambda k+1} > v$时，$v$的取值要比 7.9km/s 大许多。而由表 1 可知，当v取 11.2km/s 时，2 级火箭的质量比 3 级火箭的质量近乎一倍，在经济效益、火箭的可靠性上都不如 3 级火箭。而 4 级火箭的质量与 3 级火箭的质量相差比较小，且考虑随着级数的增加，火箭需要连接和分离的结构增多，不仅会使得火箭的质量增加，还会使得火箭的可靠性明显降低。因而综合考量来看，发射卫星选择 3 级火箭最为合适。

卫星和飞船的跟踪测控

一、 问题重述

1.1 问题背景

对卫星和飞船的发射及运行过程进行测控是航天系统的一个重要组成部分，理想的状况是对卫星和飞船进行全程跟踪测控。但测控设备只能观测到所在点切平面以上的空域，且在与地平面夹角 3° 的范围内测控效果不好，实际上每个测控站的测控范围只考虑与地平面夹角 3° 以上的空域。在一个卫星或飞船的发射与运行过程中，往往有多个测控站联合完成测控任务。

1.2 目标任务

问题一：在所有测控站都与卫星或飞船的运行轨道共面的情况下至少应该建立多少个测控站才能对其进行全程跟踪测控；

问题二：如果一个卫星或飞船的运行轨道与地球赤道平面有固定的夹角，且在离地面高度为 H 的球面 S 上运行。考虑到地球自转时该卫星或飞船在运行过程中相继两圈的经度有一些差异，问至少应该建立多少个测控站才能对该卫星或飞船可能飞行的区域全部覆盖以达到全程跟踪测控的目的；

问题三：收集我国一个卫星或飞船的运行资料和发射时测控站点的分布信息，分析这些测控站点对该卫星所能测控的范围。

二、 模型假设

1） 假设卫星或飞船与地球相比极小可视为质点；
2） 假设地球是一个规则球体；
3） 假设测控站的地理位置可任意选取；
4） 忽略测控站周围地理环境和天气环境对测控的影响。

三、 符号说明及名词解释

R	地球半径
H	卫星或飞船距地面高度
H_1	近地点高度
H_2	远地点高度
i	卫星或飞船的运行轨道倾角
φ	卫星或飞船的星下点纬度
λ	卫星或飞船的星下点经度
ω_0	卫星或飞船的升交点纬度
Ω_0	卫星或飞船的升交点经度
ω_s	卫星或飞船的角速度
ω_e	地球自转的角速度
t	从卫星或飞船经过升交点起的时间

升交点：卫星或飞船由南往北飞行轨迹在赤道上的交点

星下点：地球中心与卫星或飞船的连线在地球表面上的交点

四、 模型建立与求解

4.1 问题一

4.1.1 模型一：卫星或飞船的运行轨道为圆轨道

在忽略地球自转的条件下，位于 C 点处的测控站可跟踪测控劣弧 AB 间的轨道区域。如图 1 所示：

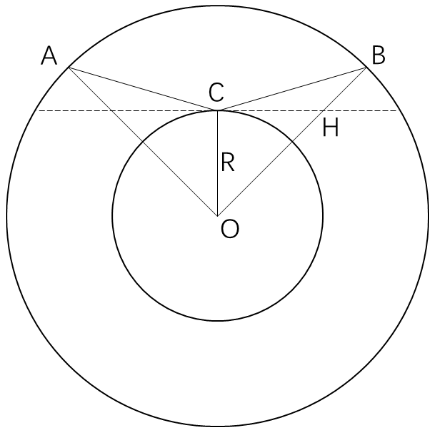


图 1：测控站对圆轨道的跟踪测控范围

在三角形 BOC 中，由正弦定理知，

$$\frac{R}{sin\angle OBC}=\frac{R+H}{sin\angle OCB}$$

根据题目条件及神州七号飞船运行轨道数据，知 R=6371km，H=343km，∠OCB=93°，代入方程得∠OBC=71.37°。故可测控的劣弧 AB 区域所对应的圆心角∠AOB=2∠BOC=2(180°-∠OBC-∠OCB)=31.26°，至少应建立的测控站数目$n=\left\lceil\frac{360^{\circ}}{31.26^{\circ}}\right\rceil=12$个。

4.1.2 模型二：卫星或飞船的运行轨道为椭圆轨道

忽略地球自转的影响，并假设地球的球心位于近地点附近的椭圆焦点上。以椭圆轨道中心为坐标原点，长径所在直线为 x 轴，建立平面直角坐标系。如图 2 所示：

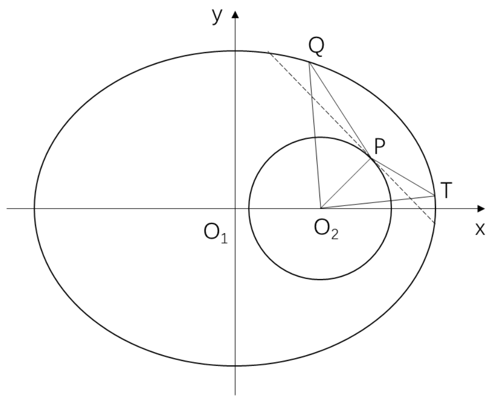


图 2：测控站对椭圆轨道的跟踪测控范围

设椭圆轨道方程为

$$\begin{cases} x = acos\varphi \\ y = bsin\varphi \end{cases} (0 \le \varphi \le 2\pi)$$

地球圆面方程为

$$\begin{cases} x = c + Rcos\theta \\ \ y = Rsin\theta \end{cases} (0 \le \theta \le 2\pi)$$

其中，$a = R + \frac{1}{2}(H_1 + H_2)$ ，$b = \sqrt{a^2 - c^2}$ ，$c = \frac{H_2 - H_1}{2}$

故有

$$\overrightarrow{O_2P} = \left(Rcos\theta，Rsin\theta\right)$$

$$\overrightarrow{PQ} = (acos\varphi - Rcos\theta - c, bsin\varphi - Rsin\theta)$$

根据题目条件知，$\overrightarrow{O_2P}$与$\overrightarrow{PQ}$夹角为 87°。

故

$$\overrightarrow{O_2P} \cdot \overrightarrow{PQ} = \left\|\overrightarrow{O_2P}\right\| \cdot \left\|\overrightarrow{PQ}\right\| \cdot cos87^{\circ}$$

代入数据，得

$$acos\varphi cos\theta + bsin\varphi sin\theta - ccos\theta - R$$

$$= cos87^{\circ} \cdot \sqrt{(acos\varphi - Rcos\theta - c)^2 + (bsin\varphi - Rsin\theta)^2}$$

令

$$F(\varphi,\theta) = acos\varphi cos\theta + bsin\varphi sin\theta - ccos\theta - R -$$

$$cos87^{\circ} \cdot \sqrt{(acos\varphi - Rcos\theta - c)^2 + (bsin\varphi - Rsin\theta)^2}$$

令θ取初始值θ_0，根据$F(\varphi,\theta_0) = 0$，可求出位于θ_0处的测控站可跟踪测控的范围在(φ_1,φ_2)之间。再令$\varphi_3 = \varphi_2$，$F(\varphi_3,\theta) = 0$，可求出另一个测控站的位置θ_1。再令$F(\varphi,\theta_1) = 0$，可求出位于θ_1处的测控站可跟踪测控的范围在(φ_3,φ_4)之间……不断迭代直至$\varphi_{2k} - \varphi_1 \ge 2\pi$。此时，测控站总数$n = k + 1$。

计算可得，$n = 14$。

4.2 问题二

由于卫星或飞船的运行轨道与地球赤道平面有固定的夹角，并且考虑到地球自转时，卫星或飞船在绕地球运动的过程中相继两圈的经度产生偏差，那么运行轨迹在地球表面的投影，即星下点轨迹像一条正弦曲线，经过长时间的运行，星下点轨迹形成一个带状区域。如图 3 所示：

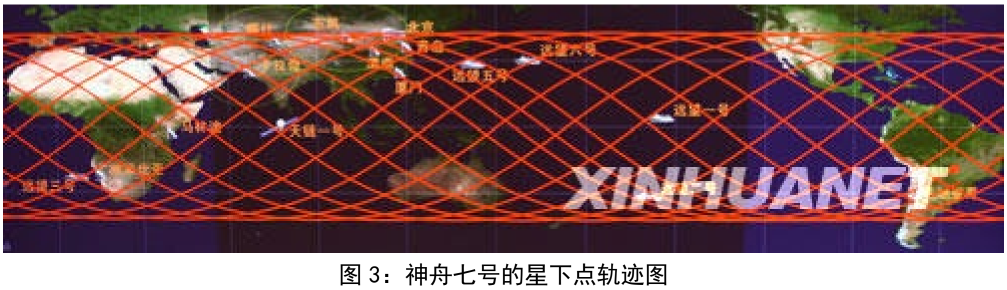


图 3：神舟七号的星下点轨迹图

卫星或飞船的星下点轨迹方程为：

$$\begin{cases} \varphi = \arcsin\left[sini \cdot \sin\left(\omega_s t + \omega_0\right)\right] \\ \lambda = \Omega_0 + \arctan[cosi \cdot \tan(\omega_s t + \omega_0)] - \omega_e t \end{cases}$$

（援引自参考文献：《卫星移动通信系统星间链路几何参数分析》）

以神州七号飞船为例， 发射点为甘肃酒泉，经度$\Omega_0 = 98.31°$，纬度$\omega_0 = 39.44°$，轨道倾角$i = 42.4°$，运行角速度$\omega_s = 1.1464 \times 10^{-3} rad/s$。利用 matlab 计算可得，星下点的纬度$\varphi$轨迹图如下：

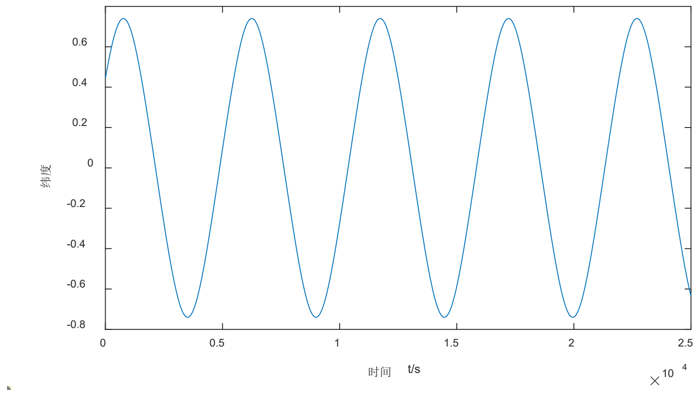


图 4：神舟 7 号飞船星下点纬度位置与时间的关系图

由于$|\varphi_{max}| = 0.74$，故飞船运行的带状区域在南、北纬 42.4°之间，如下图所示：

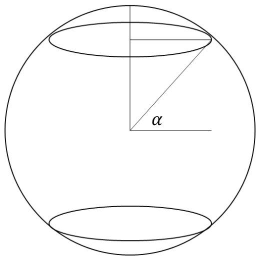


图 5：神舟七号飞船运行的带状区域示意图

易知上下两个球冠的面积为$2 \cdot 2\pi(R+H)^2(1-sin\alpha)$，故飞船运行的带状区域面积$S_1 = 4\pi(R+H)^2 - 2 \cdot 2\pi(R+H)^2(1-sin\alpha) = 4\pi(R+H)^2 sin\alpha$。（式中$\alpha = 42.4°$）

测控站的跟踪测控范围为一球冠区域，如下图所示：

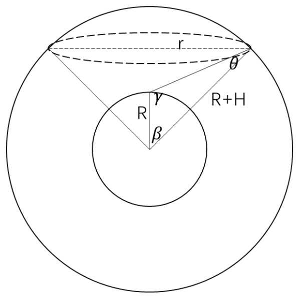


图 6：测控站跟踪测控的球冠区域示意图

由正弦定理，知

$$\frac{R+H}{sin\gamma}=\frac{R}{sin\theta}$$

且$\gamma=93^{\circ}$，$\beta=180^{\circ}-\gamma-\theta$

故测控站跟踪测控的球冠面积

$$S_2=2\pi(R+H)^2(1-cos\beta)=2\pi(R+H)^2[1+\cos(\gamma+arcsin\frac{Rsin\gamma}{R+H})]$$

因此，要想完全覆盖飞船的运行区域，测控站的最少个数

$$n=\left\lceil\frac{S_1}{S_2}\right\rceil=\left\lceil\frac{2sin\alpha}{1+\cos(\gamma+arcsin\frac{Rsin\gamma}{R+H})}\right\rceil$$

代入神舟七号飞船的相关数据，可得$n=37$。

实际上，测控站的跟踪测控范围会相互重叠，因而上述结论不够准确。为了获得更加准确的数据，我们使用圆内接正六边形来代替测控站的实际跟踪测控范围，其面积

$$S_3=\frac{3\sqrt{3}}{2}r^2=\frac{3\sqrt{3}}{2}[(R+H)sin\beta]^2=\frac{3\sqrt{3}}{2}[(R+H)sin(\gamma+arcsin\frac{Rsin\gamma}{R+H})]^2$$

此时，测控站的个数

$$n=\left\lceil\frac{S_1}{S_3}\right\rceil=\left\lceil\frac{4\pi sin\alpha}{\frac{3\sqrt{3}}{2}sin^2(\gamma+arcsin\frac{Rsin\gamma}{R+H})}\right\rceil$$

代入神舟七号飞船的相关数据，可得$n=45$。

4.3 问题三

神舟 7 号测控站的地理位置分布如下表所示：

	测控站	经度	纬度
1	东风站	98.50° E	39.70° N
2	酒泉卫星发射中心	100.50° E	41.83° N
3	喀什卫星测控站	75.99° E	39.45° N
4	和田站	79.92° E	37.10° N
5	青岛站	120.30° E	36.20° N
6	陕西渭南卫星测控站	109.50° E	34.50° N
7	厦门卫星测控站	118.01° E	24.07° N
8	纳米比亚站	14.52° E	22.67° N
9	卡拉奇卫星测控站	66.99° E	24.82° N
10	马林迪站	40.10° E	3.22° S
11	圣地亚哥站	70.10° E	33.43° S
12	望远一号测控船	77.00° W	20.00° S
13	望远二号测控船	150.0° W	31.0° S
14	望远三号测控船	0.0° E	1.0° N
15	望远四号测控船	135.0° E	30.0° N
16	望远五号测控船	180.0° E	32.0° N

表 1：神舟 7 号测控站的地理位置分布表

神舟 7 号测控站的地理位置分布及其测控范围如下图所示：

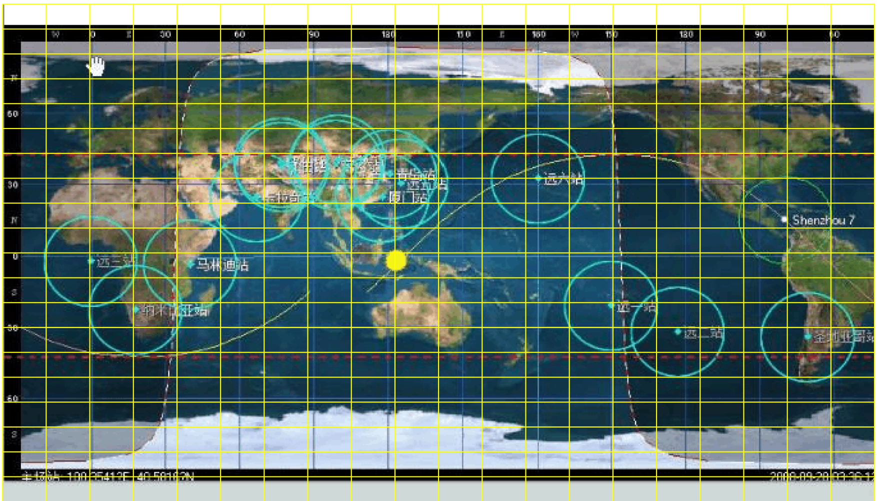


图 7：测控站地理位置分布及其测控范围

图中蓝色的圆形区域表示测控站的跟踪测控范围，用 18*20 个黄色方格将地图划分成不同区域，圆形区域占方格一半的视为一个方格的面积。根据第二小问，已知神舟七号飞船的运行范围在南、北纬 42.4° 之间，其所占方格个数$N_1 = 170$。而测控站的跟踪测控范围所占的方格个数$N_2 = 59$。故测控站对飞船运行区域的覆盖率$\eta = \frac{N_2}{N_1} = 34.7\%$。

五、 Matlab 代码

5.1 星下点的纬度φ轨迹图：

```
ws=0.0011464;
w0=39.44*pi/180;
i=42.4*pi/180;
t=0:1:25000;
fai=asin(sin(i)*sin(ws*t+w0));
plot(t,fai)
L1=max(fai)
L2=min(fai)
```

5.2 测控站地理位置分布图的网格划分：

```
p = imread('map.jpg');
[mm,nn,~] = size(p);
x = 0:nn/20:nn;
y = 0:mm/20:mm;
M = meshgrid(x,y);
N = meshgrid(y,x);
imshow(p);
hold on
plot(x,N,'y');
plot(M,y,'y');
```

第 2 次作业：

销售量问题

一、问题重述

根据经验，当一种新产品投入市场后，随着人们对它的拥有量的增加，其销售量下降的速度与销售量成正比。广告宣传可给销售量添加一个增长速度，它与广告费成正比，但广告只能影响这种商品在市场上未饱和的部分。试建立一个销售的模型，若广告宣传只进行有限时间，且广告费为常数，问销售量如何变化？

二、问题分析

销售量的变化与已销售量、广告宣传以及市场饱和度有关，已销售量与销售量下降速度成正比，广告宣传影响市场上未饱和的部分使销售量增长。

三、模型假设

1）销售量下降速度：$\mathrm{v}_1 = k_1 \cdot s(t)$

2）广告宣传给销售量的增长速度：$\mathrm{v}_2 = k_2 \cdot s(t)$

3）广告宣传从 0 时刻开始持续 r 时间

4）0 时刻销售量为 0

5）销售量的变化仅与已销售量、广告宣传、市场饱和度有关

四、符号说明

1）s(t)为 t 时刻的销售量

2）k_1为销售量下降速度：$\mathrm{k}_1 = 0.01$

3）k_2为广告宣传给销售量增长速度：$\mathrm{k}_2 = 0.02$

4）M 为饱和量：M=50000

5）$\mathrm{a}(\mathrm{t})$为 t 时刻的广告费：$a(t) = 2 \cdot t^2$

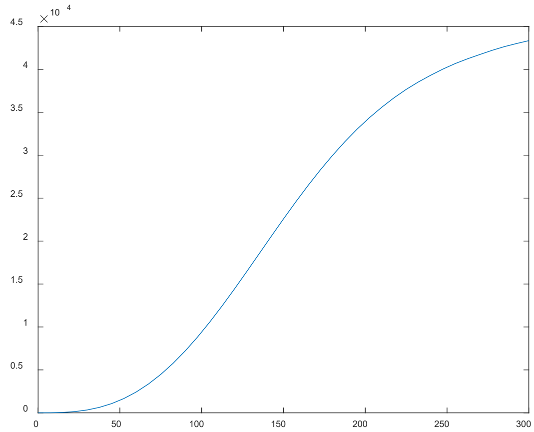
6）r 为广告宣传进行的有限时间：r=30 天

7）a 为广告宣传进行的 r 时间内的广告费用：a=30000

五、模型建立及求解

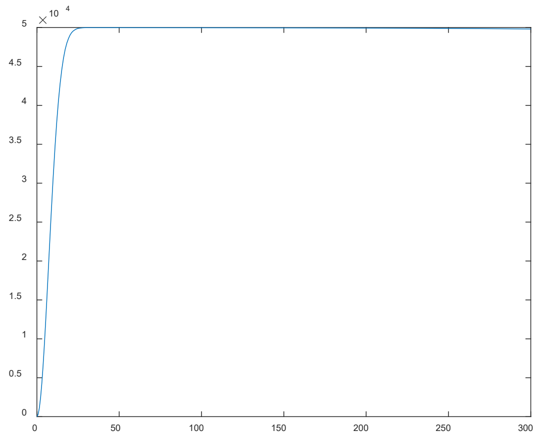
1. $$\begin{cases} \frac{ds}{dt} = k_2 * a(t) * \left(1 - \frac{s(t)}{M}\right) - k_1 * s(t) \\ s(0) = 0 \end{cases}$$

取 k1=0.01，k2=0.02，a(t)=2*t^2，由 matlab 绘制出图形为：



2. $$\begin{cases} \frac{ds}{dt} = k_2 * (a * t / r) * \left(1 - \frac{s(t)}{M}\right) - k_1 * s(t) \\ s(0) = 0 \end{cases}$$

取 k1=0.01，k2=0.02，a=30000，r=30，由 matlab 绘制出图形为：



六、模型结果分析

开始的时候曲线的斜率不断增大，表示销售速度在不断的增大，说明投入广告可以使销售速度在一定的范围内得到一定的增长；

随着销售量的变大，曲线的斜率开始慢慢变下，说明销售速度与之前相比在减小；

销售量在广告结束的时候达到饱和。

七、模型的评价

模型将销售量在投入广告后的过程变化清晰准确额描述出来。但是实际投入广告时间过短并不能够让销售量达到饱和，在实际过程中并不完全符合该模型。

八、Matlab 代码

程序一：

函数文件 func1.m

```
function dy=func1(t,s);
k1=0.01;
k2=0.02;
M=50000;
dy=k2*(2*t^2)*(1-s/M)-k1*s;
```

主程序文件 main1.m

```
clear,clc
t0=[0 300];
s0=0;
[t s]=ode45('func1',t0,s0);
plot(t,s)
```

程序二：

函数文件 func2.m

```
function dy=func2(t,s);
k1=0.01;
a=30000;
r=30;
M=50000;
if t<r
    dy=a*t/r*(1-s/M)-k1*s*(1-s/M);
else
    dy=-k1*s*(1-s/M);
end
```

主程序文件 main2.m

```
clear,clc
t0=[0 300];
s0=0;
[t s]=ode45('func2',t0,s0);
plot(t,s)
```

DDT 对介壳虫和澳洲瓢虫种群数量的影响问题

一、问题重述

1968 年，介壳虫偶然从澳大利亚传入美国，威胁着美国的柠檬生产。随后，美国又从澳大利亚引入了介壳虫的天然捕食者——澳洲瓢虫。后来，DDT 被普通用来消灭害虫，柠檬园主想利用 DDT 进一步杀死介壳虫。谁料，DDT 同样杀死了澳洲瓢虫。结果，介壳虫增加起来，澳洲瓢虫却减少了。试建立数学模型解释这个现象。

二、问题分析

介壳虫和澳洲瓢虫是捕食与被捕食的关系，根据 Lotka 和 Volterra 提出的捕食者-猎物模型，介壳虫的种群数量$U(t)$和澳洲瓢虫的种群数量$V(t)$随时间t的变化满足下列关系：

$$\begin{cases}\dfrac{dU}{dt} = \alpha U - \gamma UV \\ \dfrac{dV}{dt} = -\beta V + e\gamma UV\end{cases}$$

其中，α为介壳虫在资源充足，没有天敌下的自然增长率，β为澳洲瓢虫因缺少猎物下的自然死亡率。γ为介壳虫在单位时间内被澳洲瓢虫捕食的比率，因而dU=$-\gamma UVdt$。e为澳洲瓢虫捕食介壳虫而产生子代的转换因子。

三、模型假设

1）介壳虫在柠檬园中没有其他天敌，澳洲瓢虫也只以介壳虫为食。

2）没有自然灾害等因素对介壳虫和澳洲瓢虫的种群数量造成影响。

3）DDT 农药对于介壳虫和澳洲瓢虫的毒害作用相同，造成的死亡率为λ。

4）在使用 DDT 前，介壳虫的种群数量$N_1 = 100$，澳洲瓢虫的总群数量$N_2 = 25$。

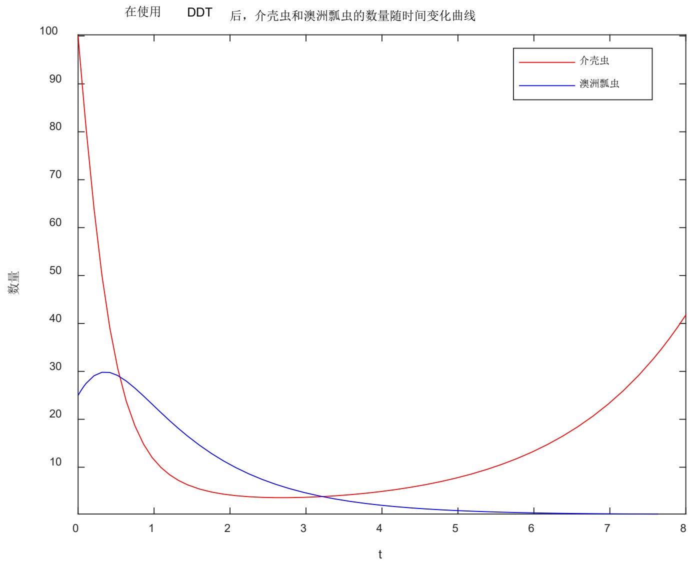
四、模型求解

在使用 DDT 后，考虑农药对介壳虫和澳洲瓢虫种群数量的影响，对猎物-捕食者模型进行修正：

$$\begin{cases}\dfrac{dU}{dt} = (\alpha - \lambda)U - \gamma UV \\ \dfrac{dV}{dt} = (-\beta - \lambda)V + e\gamma UV \\ U(0) = 100，V(0) = 25\end{cases}$$

取α=1，β=0.5，γ=0.1，e=0.2，λ=0.4

经 matlab 求解，绘制图形为：

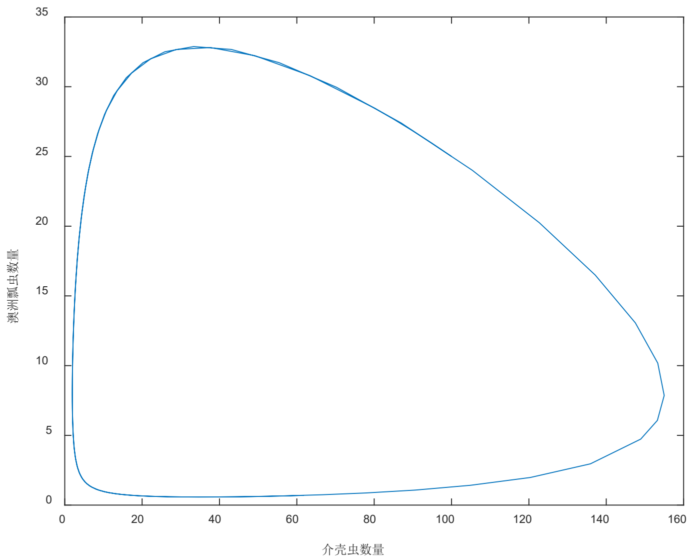


五、模型结论

由图像可以看出，在短期时间内，介壳虫的数量急剧下降，澳洲瓢虫的数量短暂上升。但是在一段时间后，介壳虫的数量反而增加，澳洲瓢虫的数量下降。

六、模型讨论

若以介壳虫的数量为横轴，澳洲瓢虫的数量为纵轴，绘制的曲线为：



图像显示其曲线是闭合的，表示周期运动。且介壳虫的数量在最大和最小值之间波动。当介壳虫数量最大时，澳洲瓢虫数量有最大的增长率。并且介壳虫的数量减小后，澳洲瓢虫的数量才达到最大值。即澳洲瓢虫数量的增长落后于介壳虫，符合实际规律，验证了模型的合理性。

七、Matlab 代码

math.m

```
function xprime=math(t,x)
xprime=[0.8*x(1)-0.1*x(1)*x(2);-0.7*x(2)+0.02*x(1)*x(2)];
```

test.m

```
x0=[100 25];
tspan=[0,20];
[t,x]=ode45(@math,tspan,x0)
plot(t,x(:,1),'r');
hold on
plot(t,x(:,2),'b');
```

第 3 次作业：

Durer 魔方问题

关于 4 阶 Durer 魔方,如何判定哪 7 个位置可以作为自由变量?

假设 Durer 魔方的 Y 矩阵中的y_k元素给定，则去除系数矩阵 A 的第 k 列。若剩余的 9 列构成的子矩阵的秩等于 9，则说明指定的 7 个位置可以作为自由变量。

Matlab 代码如下：

```
%Y矩阵表示一个四阶Durer魔方，inf表示待确定的值
Y=[1,10,inf,inf;
   inf,26,5,inf;
   inf,inf,14,15;
   inf,inf,inf,7]
%A是一个14*16的系数矩阵
A=[1,1,1,1,-1,-1,-1,-1,0,0,0,0,0,0,0,0;
   0,0,0,0,1,1,1,1,-1,-1,-1,-1,0,0,0,0;
   0,0,0,0,0,0,0,0,1,1,1,1,-1,-1,-1,-1;
   -1,0,0,0,-1,0,0,0,-1,0,0,0,0,1,1,1;
   1,-1,0,0,1,-1,0,0,1,-1,0,0,1,-1,0,0;
   0,1,-1,0,0,1,-1,0,0,1,-1,0,0,1,-1,0;
   0,0,1,-1,0,0,1,-1,0,0,1,-1,0,0,1,-1;
   -1,0,0,0,0,0,0,1,0,0,0,1,-1,0,0,0;
   0,-1,0,1,-1,-1,0,0,0,0,0,0,1,0,0,1;
   1,1,-1,-1,1,1,-1,-1,0,0,0,0,0,0,0,0;
   0,0,1,1,0,0,1,1,-1,-1,0,0,-1,-1,0,0;
   0,0,0,0,0,0,0,0,1,1,-1,-1,1,1,-1,-1;
   -1,0,0,0,0,-1,0,0,0,0,0,1,0,0,1,0;
   1,0,0,-1,0,1,-1,0,0,-1,1,0,-1,0,0,1];
%定义符号变量
syms r1 r2 r3 r4 r5 r6 r7;
durer=[r1+r2,r6,r5+r7,r3+r4;
       r3+r5,r4+r7,r1+r6,r2;
       r4+r6,r2+r5,r3,r1+r7;
       r7,r1+r3,r2+r4,r5+r6];
%构建子矩阵
test=zeros(14,16);
for i=1:4
   for j=1:4
      if Y(i,j)==inf
         k=4*(i-1)+j;
         test(:,k)=A(:,k);
      end
```

```
    end
end
%判断自由变量
if rank(test)==9
    fprintf('可以确定一个durer魔方\n')
    t=1;
    for i=1:4
        for j=1:4
            if Y(i,j)~=inf
                eqn(t)=durer(i,j)==Y(i,j);
                t=t+1;
            end
        end
    end
    %求解线性方程组
    answer=solve(eqn(1),eqn(2),eqn(3),eqn(4),eqn(5),eqn(6),eqn(7),[r1,r2,r3,r4,r5,r6,r7]);
    %输出Durer魔方
    result=[answer.r1+answer.r2,answer.r6,answer.r5+answer.r7,answer.r3+answer.r4;
            answer.r3+answer.r5,answer.r4+answer.r7,answer.r1+answer.r6,answer.r2;
            answer.r4+answer.r6,answer.r2+answer.r5,answer.r3,answer.r1+answer.r7;
            answer.r7,answer.r1+answer.r3,answer.r2+answer.r4,answer.r5+answer.r6]
else
    fprintf('不能确定\n')
end
```

第 4 次作业：

PageRank 算法

看视频，学习 PageRank 排序算法，并回答以下问题：

1、创建谷歌时，拉里·佩奇和谢尔·盖布林对互联网的基本认识是什么？

互联网越来越普及，人们不可能去记住所有的网址，因此搜索变得越来越重要。对于搜索出的网页结果，对网页的排序十分重要。

2、谷歌 PageRank 模型的核心思想是什么？

如果一个网页被很多其他网页所链接，说明它受到普遍的承认和信赖，那么它的排名就高，由此来定义网页的重要性。网页的重要性由给该网页投票的重要性来决定（网页靠投票传递重要性），给网页排序。

3、请写出网页的重要性的计算公式

网页 i 的重要性：$x_i = \sum_{j:j\to i} \frac{x_j}{c_j}$ $\sum x_i = 1$（约束条件）

（x_j为投票给网页 i 的网页 j 的重要性，c_j为网页 j 的所有投票数）

4、互联网规模巨大，但思考和分析这个问题，我们却在一个规模非常小的问题上花了大量时间，称之为“武林秘笈”。请谈谈你的看法？

在思考一个规模非常大的问题时，可以从考虑简单的问题开始，简单的问题能够把问题用符号系统表达出来以方便处理，进而能应用算术技术解决问题并获得有效的解决方案，再延伸到原来的规模大的问题，是一个解决实际问题很好的方法。

第 5 次作业：

原料油采购加工问题

一、问题重述

加工一种食用油需要精炼若干种原料油并把它们混合起来。原料油的来源有两类共 5 种：植物油 VEG1、植物油 VEG2、非植物油 OIL1、非植物油 OIL2、非植物油 OIL3。购买每种原料油的价格（英镑/t）如表 1-1 所示，最终产品以 150 英镑/t 的价格出售。植物油和非植物油需要在不同的生产线上进行精炼。每月能够精炼的植物油不超过 200t，非植物油不超过 250t。在精炼过程种，重量没有损失，精炼费用可以忽略不计。最终产品要符合硬度的技术条件。按硬度计量单位，它必须在 3~6 范围内。假定硬度的混合是线性的，而原材料的硬度如表 1-2 所示。为使利润最大，应该怎样指定它的月采购量和加工计划。

表 1-1 原料油价格

原料油	VEG1	VEG2	OIL1	OIL2	OIL3
价格（英镑/t）	110	120	130	110	115

表 1-2 原料油硬度表

原料油	VEG1	VEG2	OIL1	OIL2	OIL3
硬度值 /（mol·L^{-1}）	8.8	6.1	2.0	4.2	5.0

二、问题假设

1）加工食用油至少需要一种植物油和一种非植物油。

2）所生产的食用油没有滞销，全部卖完。

三、模型建立和求解

将原料油 VEG1、VEG2、OIL1、OIL2、OIL3 简记为 1、2、3、4、5 号油。令 x_i为食用油中第 i 号原料油的重量；p_i为 1t 第 i 号原料油的价格；s_i为第 i 号原料油的硬度，其中 i=1，2，3，4，5。

根据假设，硬度的混合是线性的。则混合油的硬度为

$$S=\frac{\sum_{i=1}^{5} x_i s_i}{\sum_{i=1}^{5} x_i}$$

则 $3 \le S \le 6.$

生产食用油的成本为 $W=\sum_{i=1}^{5} x_i p_i$

根据题义以及假设（1），提炼的植物油的重量需满足 $0 < x_1+x_2 \le 200$

同理，提炼的非植物油的重量需满足 $0 < x_3 + x_4 + x_5 \le 250$

由于提炼重量不损失，于是问题就转化为最优化问题

$$\max z = \left(150\sum_{i=1}^{5} x_i - \sum_{i=1}^{5} x_i p_i\right)$$

令$q_i = 150 - p_i$，则

$$\max z = \sum_{i=1}^{5} q_i\, x_i$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} 0 < x_1 + x_2 \le 200 \\ 0 < x_3 + x_4 + x_5 \le 250 \\ x_i \ge 0 \\ 3\sum_{i=1}^{5} x_i \le \sum_{i=1}^{5} x_i s_i \le 6\sum_{i=1}^{5} x_i \end{cases}$$

取整数解，利用MATLAB软件编程求解，得$x_1 = 159$，$x_2 = 41$，$x_3 = 0$，$x_4 = 250$，$x_5 = 0$。获得的最大利润为$z = 17590$(英镑)$= 155939$(元)，硬度$S = 5.99$。

四、模型结论

为使得利润最大，每月应该采购159吨植物油VEG1，41吨植物油VEG2以及250吨非植物油OIL2。按照159：41：250的比例进行加工，可以获得最大利润155939元。

五、Matlab 代码

```
c=(-1)*[40;30;20;40;35];
intcon=[1,2,3,4,5];
a(1,:)=[1,1,0,0,0];
a(2,:)=[0,0,1,1,1];
a(3,:)=[-1,-1,0,0,0];
a(4,:)=[0,0,-1,-1,-1];
a(5,:)=[-5.8,-3.1,1,-1.2,-2];
a(6,:)=[2.8,0.1,-4,-1.8,-1];
b=[200;250;0;0;0;0];
vlb=zeros(5,1);
vub=[];
aeq=[];
beq=[];
[x,Y]=intlinprog(c,intcon,a,b,aeq,beq,vlb,vub)
Z=-Y
```

基金使用计划

一、问题重述

某校基金会有一笔数额为M元的基金，打算将其存入银行或购买国债。假设国债每年至少发行一次，发行时间不定。当前银行存款及各期国债的利率如表 1 所示。取款政策参考银行的现行政策。

校基金会计划在n年内每年用部分本息奖励优秀师生，要求每年的奖金额大致相同，且在n年末仍保留原基金数额。校基金会希望获得最佳的基金使用计划，以提高每年的奖金额。请你帮助校基金会在如下情况下设计基金使用方案，并对$M = 5000$万元，$n = 10$年给出具体结果。

（1）只存款不购买国债；

（2）可存款，也可购买国债；

（3）学校在基金到位后的第 3 年要举行百年校庆，基金会希望这一年的奖金比其它年度多 20%。

	基准利率/%	国债年利率/%
活期	0.35	——
半年期	1.3	——
一年期	1.5	——
二年期	2.1	——
三年期	2.75	3.85
五年期	2.75	3.97

表 1-银行利率和国债利率

二、模型假设

1）资金于年底一次性到位，自下一年起每年年底一次性发放奖金，且每年的奖金额固定；

2）在n年内，银行利率和国债利率保持不变，且均按单利计算；

3）每次都能按需购买到国债。

三、符号说明

M	初始基金数额
y	每年发放的奖金额
r_i	i年期存款的年利率（$i = 0$时表示活期）
R_i	i年期国债的年利率
p_i	i年期国债的总利率
$x_{n,i}$	第n年用于i年期存款的资金

四、模型建立与求解

4.1 问题一：只存款不购买国债

考虑到基金一年使用一次，且活期和半年期的银行存款利率小于一年期，因而为了使每年发放的奖金额尽可能大，不考虑存活期以及半年期的情况。又由于三年期和五年期的银行存款利率相同，从资金活动性的角度考虑，选择存三年期

而不存五年期。

第 0 年底（即基金到位那年），将初始基金分成三份，分别存入一、二、三年期。则：

$$M = x_{01} + x_{02} + x_{03}$$

从第一年起，每年年底回收的资金可以分成两部分，一部分用于发放该年的奖金，另一部分用于次年的投资，而投资又可以分别存入一、二、三年期。

故第 1 年底，回收的资金为$(1+r_1)x_{01}$，用于发放奖金和投资后，有

$$\begin{cases} (1+r_1)x_{01} \geq y \\ (1+r_1)x_{01} - y = x_{11} + x_{12} + x_{13} \end{cases}$$

第 2 年底，回收的资金为$(1+r_1)x_{11} + (1+2r_2)x_{02}$，用于发放奖金和投资后，有

$$\begin{cases} (1+r_1)x_{11} + (1+2r_2)x_{02} \geq y \\ (1+r_1)x_{11} + (1+2r_2)x_{02} - y = x_{21} + x_{22} + x_{23} \end{cases}$$

第$n(n \geq 3)$年底，回收的资金为$(1+r_1)x_{n-1,1} + (1+2r_2)x_{n-2,2} + (1+3r_3)x_{n-3,3}$，用于发放奖金和投资后，有

$$\begin{cases} (1+r_1)x_{n-1,1} + (1+2r_2)x_{n-2,2} + (1+3r_3)x_{n-3,3} \geq y \\ (1+r_1)x_{n-1,1} + (1+2r_2)x_{n-2,2} + (1+3r_3)x_{n-3,3} - y = x_{n,1} + x_{n,2} + x_{n,3} \end{cases}$$

由于在n年末仍保留原基金数额，故有

$$M = (1+r_1)x_{n-1,1} + (1+2r_2)x_{n-2,2} + (1+3r_3)x_{n-3,3} - y + x_{n-1,2} + x_{n-1,3} + x_{n-2,3}$$

求解上述线性规划模型，可得每年的奖金额$y_{max} = 127.697$万元。

每年的投资情况如下表所示：

年份	一年期存款	二年期存款	三年期存款	回收本息	投资金额
1	4332.0	340.3	327.6	4396.98	4269.283
2	0	0	4269.3	354.5926	226.8956
3	0	0	226.9	354.627	226.93
4	0	0	226.9	4621.51725	4493.82025
5	0	0	4493.9	245.61925	117.92225
6	0	0	118.0	245.61925	117.92225
7	0	0	118.0	4864.64675	4736.94975
8	0	0	4736.9	127.735	0.038
9	0	0	0	127.735	0.038
10	0	0	0	5127.69425	4999.99725

表 2-只存款时每年的投资情况（单位：万元）

4.2 问题二：可存款，也可购买国债

由于国债在一年内不定期发行，为保证有国债时能即时买到，可以考虑将资金存入银行半年期，若国债在上半年发行，则以活期利息提前支出，购买国债，当国债到期时取出，再存一个半年期，剩余的时间以活期计息；若国债在下半年发行，此时半年期已到期，再以活期存入银行，有国债时立即取出用以购买，国债到期后取出，剩余时间再存活期。购买国债之前及到期取出后的两段时间总计

一年，因此购买一个k年期的国债实际需要$k+1$年。

故购买一个k年期的国债的总利率

$$p_k = (1 + kR_k)(1 + \frac{r_0}{2})(1 + \frac{r_{0.5}}{2})$$

可将三年期国债视为四年期的银行存款，五年期国债视为六年期的银行存款，基金的回收与在投资模型与问题一相似，因此可以建立线性规划模型如下：

记 $W_i = x_{i1} + x_{i2} + x_{i3} + x_{i4} + x_{i6}\ (i \geq 0)$

$$S_i = (1 + r_1)x_{i-1,1} + (1 + 2r_2)x_{i-2,2} + (1 + 3r_3)x_{i-3,3}\ (i \geq 3)$$

$$M = W_0$$

$$\begin{cases} (1 + r_1)x_{01} \geq y \\ (1 + r_1)x_{01} - y = W_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1 + r_1)x_{11} + (1 + 2r_2)x_{02} \geq y \\ (1 + r_1)x_{11} + (1 + 2r_2)x_{02} - y = W_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} S_3 \geq y \\ S_3 - y = W_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} S_4 + p_3x_{04} \geq y \\ S_3 + p_3x_{04} - y = W_4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} S_5 + p_3x_{14} \geq y \\ S_5 + p_3x_{14} - y = W_5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} S_n + p_3x_{n-4,4} + p_5x_{n-6,6} \geq y \\ S_n + p_3x_{n-4,4} + p_5x_{n-6,6} - y = W_n \end{cases} (n \geq 6)$$

$$M = W_n + x_{n-1,2} + x_{n-1,3} + x_{n-1,4} + x_{n-1,6}$$
$$+ x_{n-2,3} + x_{n-2,4} + x_{n-2,6} + x_{n-3,4} + x_{n-3,6} + x_{n-4,6} + x_{n-5,6}$$

求解上述线性规划模型，可得每年的奖金额$y_{max} = 154.2025$万元。

每年的投资情况如下表所示：

年份	一年期存款	二年期存款	三年期存款	三年期国债	五年期国债	回收本息	投资金额
1	412.7	148.0	142.5	4051.3	245.5	418.8905	264.688
2	0	0	0	137.1	127.6	154.216	0.0135
3	0	0	0	0	0	154.25625	0.05375
4	0	0	0	0	0	4556.49711	4402.29461
5	0	0	0	137.1	4265.3	154.19637	-0.00613
6	0	0	0	0	0	296.6622	142.4597
7	0	0	142.5	0	0	154.19184	-0.01066
8	0	0	0	0	0	154.19637	-0.00613
9	0	0	0	0	0	154.25625	0.05375
10	0	0	0	0	0	5154.18852	4999.98602

表 3-可购国债时每年的投资情况（单位：万元）

4.3 问题三：第三年的奖金比其它年度多 20%

①若只存款不购买国债，只需将问题一中第三年的式子改写成

$$\begin{cases} (1 + r_1)x_{21} + (1 + 2r_2)x_{12} + (1 + 3r_3)x_{03} \geq 1.2y \\ (1 + r_1)x_{21} + (1 + 2r_2)x_{12} + (1 + 3r_3)x_{03} - 1.2y = x_{n,1} + x_{n,2} + x_{n,3} \end{cases}$$

模型求解后可得，每年的奖金额$y_{max} = 125.0545$万元。

每年的投资情况如下表所示：

年份	一年期存款	二年期存款	三年期存款	回收本息	投资金额
1	4322.8	333.3	343.9	4387.642	4262.5875
2	0	0	4262.6	347.2986	222.2441
3	0	0	222.2	372.27175	222.20635
4	0	0	222.2	4614.2645	4489.21
5	0	0	4489.2	240.5315	115.477
6	0	0	115.5	240.5315	115.477
7	0	0	115.5	4859.559	4734.5045
8	0	0	4734.5	125.02875	-0.02575
9	0	0	0	125.02875	-0.02575
10	0	0	0	5125.09625	5000.04175

表 4-只存款且第三年奖金多 20%时每年的投资情况（单位：万元）

②若可存款，也可购买国债，只需将问题二中第三年的式子改写成

$$\begin{cases} S_3 \geq 1.2y \\ S_3 - 1.2y = W_3 \end{cases}$$

模型求解后可得，每年的奖金额$y_{max} = 150.9473$万元。

每年的投资情况如下表所示：

年份	一年期存款	二年期存款	三年期存款	三年期国债	五年期国债	回收本息	投资金额
1	404.0	144.9	167.3	4043.5	240.3	410.06	259.1127
2	0	0	0	134.2	124.9	150.9858	0.0385
3	0	0	0	0	0	181.10225	-0.03451
4	0	0	0	0	0	4547.72445	4396.77715
5	0	0	0	134.2	4262.6	150.93474	-0.01256
6	0	0	0	0	0	290.37852	139.43122
7	0	0	139.4	0	0	150.92916	-0.01814
8	0	0	0	0	0	150.93474	-0.01256
9	0	0	0	0	0	150.9005	-0.0468
10	0	0	0	0	0	5150.92584	4999.97854

表 5-可购国债且第三年奖金多 20%时每年的投资情况（单位：万元）

五、Matlab 代码

5.1 只存款模型：

```
M=5000;            %基金总额
r1=1+1.5/100;      %一年期总利率
r2=1+2.1/100*2;    %二年期总利率
r3=1+2.75/100*3;   %三年期总利率
%构建不等式组左侧的系数矩阵
a=[zeros(10,30),-ones(10,1)];
a(1,1)=r1;
a(2,4)=r1;
a(2,2)=r2;
```

```
for i=3:10
    a(i,3*i-2)=r1;
    a(i,3*i-4)=r2;
    a(i,3*i-6)=r3;
end
%a(3,31)=-1.2;%求解问题三时去掉此行注释
a=-a;
%构建不等式组右侧的系数矩阵
b=zeros(10,1);
%构建目标函数的系数矩阵
c=[zeros(1,30),1];
%构建约束条件方程组左侧的系数矩阵
aeq=[zeros(11,30),-ones(11,1)];
aeq(1,1)=r1;
aeq(1,4)=-1;
aeq(1,5)=-1;
aeq(1,6)=-1;
aeq(2,4)=r1;
aeq(2,2)=r2;
aeq(2,7)=-1;
aeq(2,8)=-1;
aeq(2,9)=-1;
for i=3:9
    aeq(i,3*i-2)=r1;
    aeq(i,3*i-4)=r2;
    aeq(i,3*i-6)=r3;
    aeq(i,3*i+1)=-1;
    aeq(i,3*i+2)=-1;
    aeq(i,3*i+3)=-1;
end
aeq(10,1)=1;
aeq(10,2)=1;
aeq(10,3)=1;
aeq(10,31)=0;
aeq(11,29)=1;
aeq(11,30)=1;
aeq(11,27)=1;
aeq(11,28)=r1;
aeq(11,26)=r2;
aeq(11,24)=r3;
%aeq(3,31)=-1.2;%求解问题三时去掉此行注释
%构建约束条件方程组右侧的系数矩阵
beq=zeros(11,1);
beq(10,1)=M;
```

```
beq(11,1)=M;
%求解 c 的最大值相当于求解-c 的最小值
[x,fval]=linprog(-c,a,b,aeq,beq,zeros(31,1))
```

5.2 可购买国债模型：

```
M=5000;           %基金总额
r1=1+1.5/100;     %一年期总利率
r2=1+2.1/100*2;   %二年期总利率
r3=1+2.75/100*3;  %三年期总利率
p3=(1+3*3.85/100)*(1+0.35/2/100)*(1+1.3/2/100);
%三年期国债的总利率
p5=(1+5*3.97/100)*(1+0.35/2/100)*(1+1.3/2/100);
%五年期国债的总利率
%构建不等式组左侧的系数矩阵
a=[zeros(10,50),-ones(10,1)];
a(1,1)=r1;
a(2,6)=r1;
a(2,2)=r2;
for i=3:10
    a(i,5*i-4)=r1;
    a(i,5*i-8)=r2;
    a(i,5*i-12)=r3;
end
a(4,4)=p3;
a(5,9)=p3;
for i=6:10
    a(i,5*i-16)=p3;
    a(i,5*i-25)=p5;
end
%a(3,51)=-1.2;%求解问题三时去掉此行注释
a=-a;
%构建不等式组右侧的系数矩阵
b=zeros(10,1);
%构建目标函数的系数矩阵
c=[zeros(1,50),1];
%构建约束条件方程组左侧的系数矩阵
aeq=[zeros(11,50),-ones(11,1)];
aeq(1,1)=r1;
aeq(2,6)=r1;
aeq(2,2)=r2;
for i=3:9
    aeq(i,5*i-4)=r1;
    aeq(i,5*i-8)=r2;
    aeq(i,5*i-12)=r3;
```

```
end
aeq(4,4)=p3;
aeq(5,9)=p3;
for i=6:9
    aeq(i,5*i-16)=p3;
    aeq(i,5*i-25)=p5;
end
for i=1:9
    aeq(i,5*i+1)=-1;
    aeq(i,5*i+2)=-1;
    aeq(i,5*i+3)=-1;
    aeq(i,5*i+4)=-1;
    aeq(i,5*i+5)=-1;
end
aeq(10,1)=1;
aeq(10,2)=1;
aeq(10,3)=1;
aeq(10,4)=1;
aeq(10,5)=1;
aeq(10,51)=0;
aeq(11,47)=1;
aeq(11,48)=1;
aeq(11,49)=1;
aeq(11,50)=1;
aeq(11,43)=1;
aeq(11,44)=1;
aeq(11,45)=1;
aeq(11,39)=1;
aeq(11,40)=1;
aeq(11,35)=1;
aeq(11,30)=1;
aeq(11,46)=r1;
aeq(11,42)=r2;
aeq(11,38)=r3;
aeq(11,34)=p3;
aeq(11,25)=p5;
%aeq(3,51)=-1.2;%求解问题三时去掉此行注释
%构建约束条件方程组右侧的系数矩阵
beq=zeros(11,1);
beq(10,1)=M;
beq(11,1)=M;
%求解 c 的最大值相当于求解-c 的最小值
[x,fval]=linprog(-c,a,b,aeq,beq,zeros(51,1))
```

第 6 次作业：

汽车租赁问题

一、问题重述

某投资者拟在甲、乙两城市间开设一家汽车租赁公司，租赁者可在两城中任意租借或归还汽车。在运营中发现，在甲城中租车的顾客约有 60%在本城归还，而有 40%在乙城归还；在乙城中租车的顾客约有 70%在本城归还，而有 30%在甲城归还。请预测该公司的汽车流向。

二、模型假设

1）假设在一轮租赁周期内汽车全部租出
2）一轮租赁周期结束后汽车全部归还
3）甲、乙两城租借的汽车总量保持不变

三、符号说明

A_n	n 次租借后甲城的汽车数量
B_n	n 次租借后乙城的汽车数量
S	甲、乙两城的汽车总量

四、模型建立与求解

第 n 轮租赁周期结束后，甲城的汽车数量为

$$A_n = 0.6A_{n-1} + 0.3B_{n-1} = 0.6A_{n-1} + 0.3(S - A_{n-1}) = 0.3A_{n-1} + 0.3S$$

化简得

$$A_n - \frac{3}{7}S = \frac{3}{10}(A_{n-1} - \frac{3}{7}S)$$

解得

$$A_n = \frac{3}{7}S + (A_1 - \frac{3}{7}S) \cdot (\frac{3}{10})^{n-1}$$

故

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \frac{3}{7}S$$

同理，有

$$B_n = 0.4A_{n-1} + 0.7B_{n-1} = 0.4(S - B_{n-1}) + 0.7B_{n-1} = 0.3B_{n-1} + 0.4S$$

化简得

$$B_n - \frac{4}{7}S = \frac{3}{10}(B_{n-1} - \frac{4}{7}S)$$

解得

$$B_n = \frac{4}{7}S + (B_1 - \frac{4}{7}S) \cdot (\frac{3}{10})^{n-1}$$

故

$$\lim_{n\to\infty} B_n = \frac{4}{7}S$$

因此，当经历一段相当长的时间后，甲、乙两城的汽车数量比为 3:4。

五、模型验证

用 Matlab 可以验证，无论甲、乙两城初始的汽车数量A_1、B_1为何值，随着时间的增长，即迭代次数的增加，最终甲城的汽车总量趋于 0.428571 S，乙城的汽车总量趋于 0.571429 S，甲、乙两城的汽车数量比趋近于 0.75。下图中，蓝色表示甲城汽车数量，红色表示乙城汽车数量，黄色表示甲乙两城的汽车数量比。

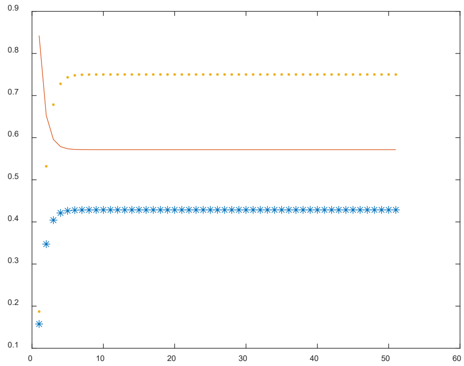


图 1：初值情况一

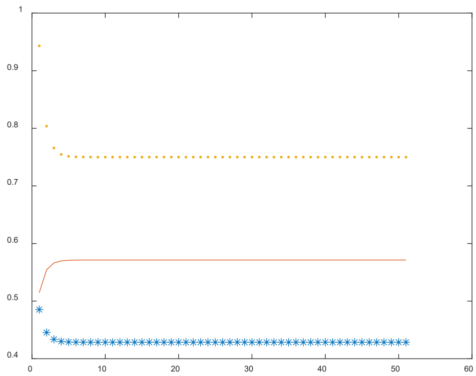


图 2：初值情况二

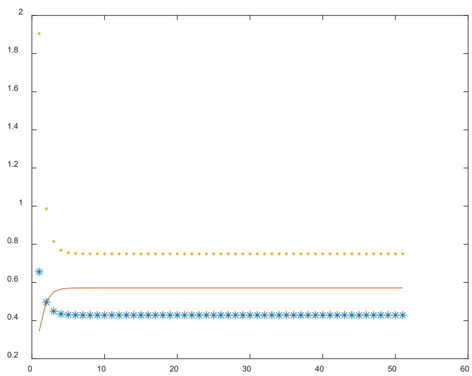


图 3：初值情况三

六、Matlab 代码

```
A1=rand(1,1);
B1=1-A1;
A=[A1];
B=[B1];
for i=1:50
    A2=0.6*A1+0.3*B1;
    A=[A,A2];
    B2=0.4*A1+0.7*B1;
    B=[B,B2];
    A1=A2;
    B1=B2;
end
C=[A./B];
plot(A,'*')
hold on
plot(B,'-')
hold on
plot(C,'.')
```

养老保险问题

一、问题重述

养老是重要的民生问题，与每个人的切身利益息息相关，养老保险是保险中的一个重要险种。保险公司将提供不同的保险方案。例如每月缴费 200 元至 60 岁开始领取养老金，男子若 25 岁开始投保，届时每月可领取养老金 2000 元；如 35 岁投保，届时每月可领取养老金 1000 元。请建立数学模型分析保险公司为兑付保险责任，每月的投资收益率应至少为多少？

二、模型假设

1）假设保险公司不会破产倒闭
2）假设投保人完成投保（即投保人 60 岁以后身故）
3）保险公司每月的投资收益率为定值

三、符号说明

x	投保人每月投保的金额
y	投保人 60 岁后每月领取的养老金
A_n	投保人 60 岁前保险公司收益（投保n个月）
B_m	投保人 60 岁后保险公司收益（领取养老金m个月）
k	保险公司每月的投资收益率

四、模型建立与求解

投保人投保n个月后保险公司的收益额

$$A_n=(1+k)(A_{n-1}+x)$$

即

$$A_n+\left(1+\frac{1}{k}\right)x=(1+k)[A_{n-1}+\left(1+\frac{1}{k}\right)x]$$

已知

$$A_1=(1+k)x$$

解得

$$A_n=\frac{(1+k)^{n+1}-(1+k)}{k}\cdot x$$

投保人领取养老金m个月后保险公司的收益额

$$B_m=(1+k)B_{m-1}-y$$

即

$$B_m-\frac{1}{k}\cdot y=(1+k)(B_{m-1}-\frac{1}{k}\cdot y)$$

已知

$$B_1=(1+k)A_n-y$$

解得

$$B_m=\frac{(1+k)^{m+n+1}-(1+k)^{m+1}}{k}\cdot x-\frac{(1+k)^m-1}{k}\cdot y$$

保险公司为兑付保险责任，每月的投资收益率k_{min}至少应使$B_m=0$。

令$f(k)=k\cdot B_m$，则 $f(k)$的零点即为方程$B_m=0$的解。显然，$f(0)=0$。又由 Matlab 作图可知，$f(k)$在区间$(0,+\infty)$的变化趋势为先减小后增大，且$f(1)>0$，故$f(k)$在区间$(0,1)$上有唯一解k_{min}。

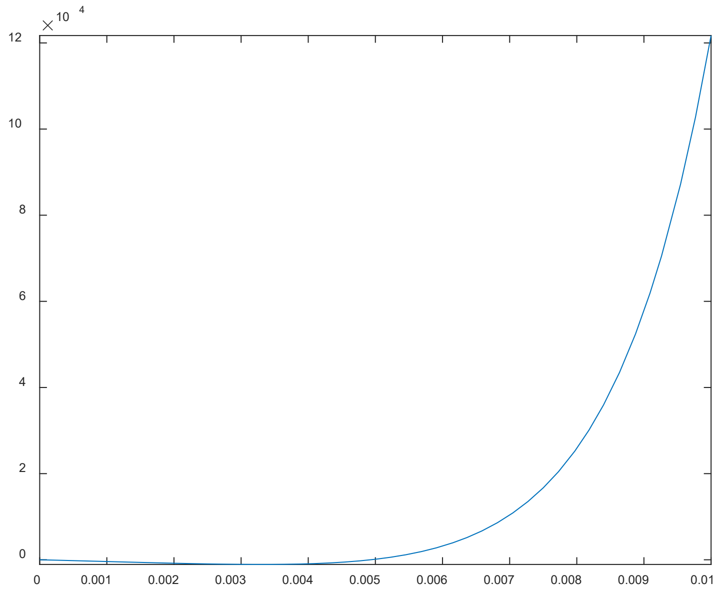


图 1：$f(k)$的变化趋势曲线

五、结论

若投保人 25 岁起投保，每月投保 200 元，60 岁后每月领取 2000 元直至 80 岁去世，则保险公司每月的投资收益率$k_{min}=0.49\%$

若投保人 35 岁起投保，每月投保 200 元，60 岁后每月领取 1000 元直至 80 岁去世，则保险公司每月的投资收益率$k_{min}=0.50\%$

六、Matlab 代码

```
x=200;
y=2000;
n=(60-25)*12;
m=(80-60)*12;
f=@(k)((1+k).^(m+n+1)-(1+k).^(m+1))*x-((1+k).^m-1)*y
fplot(f,[0,0.01])
c=fzero(f,[0.0001,1])
```

全球定位系统

看视频（群文件 3.1-3.5），回答以下问题：

（1）全球定位系统 GLONASS 是哪个国家/组织开发的？请简述其数学模型依赖的基本物理原理以及需要求解的基本问题。

全球定位系统 GLONASS 是苏联开发的。

基本物理原理：电磁波传播速度恒定；利用伪码距进行单点定位

需要求解的基本问题：线性最小二乘问题。

（2）对于中国北斗系统，其目前处于哪个发展阶段？请简述你对北斗系统及其发展的认识。

中国北斗系统目前已经能实现全球大部分地区的覆盖，但商业应用还比较少。

北斗系统具有后发优势，虽然起步比较晚，但是发展前景很好。北斗卫星系统具有实时导航、快速定位、精准授时、位路报告和短报文通信服务五大功能。

与其他卫星导航系统相比，北斗卫星导航系统具有以下优势：

1）北斗系统采用高、中、低三种轨道卫星组成混合星座，与其他卫星导航系统相比高轨卫星更多，抗遮挡能力强，尤其在低纬度地区服务优势更为明显；

2）北斗系统提供多个频点的导航信号，能够通过多频信号组合使用等方式提高服务精度；

3）北斗系统创新融合了导航与通信能力，具备基本导航、短报文通信、星基增强、国际搜救、精密单点定位等多种服务能力。

尽管存在着优势，但是北斗导航系统目前还处于建设时期，自身的发展还面临许多的技术难题，在精度，可靠性，系统的完整性上还存在一些不足，这对市场的推广应用造成巨大的影响。北斗系统仍需要不断的发展和完善，才能在市场占据更好的地位。