计算机视觉与模式识别作业十

姓名：	李云广	学号：	**2193712575**
班级：	计算机93	得分：	

1. 给定一个区域的梯度幅度和方向如下所示：

1	2	3	2	1
1	2	3	2	1
1	2	3	2	1
1	2	3	2	1
1	2	3	2	1

梯度幅值

$$\begin{bmatrix} -\frac{5}{8}\pi & -\frac{7}{16}\pi & -\frac{7}{16}\pi & 0 & -\frac{3}{8}\pi \\ \frac{1}{8}\pi & -\frac{3}{8}\pi & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{16}\pi & \frac{9}{16}\pi & \frac{5}{16}\pi & -\pi & -\frac{7}{8}\pi \\ \frac{1}{2}\pi & \frac{3}{4}\pi & \frac{3}{8}\pi & \frac{9}{16}\pi & -\frac{1}{2}\pi \\ \frac{5}{8}\pi & \frac{13}{16}\pi & -\frac{7}{16}\pi & \frac{7}{8}\pi & \frac{7}{8}\pi \end{bmatrix}$$

方向

所用的空间权重为：

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 4 & 2 \\ 3 & 6 & 9 & 6 & 3 \\ 2 & 4 & 6 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

分别计算：

（**1**）当采用**4**个**bins**来离散化方向空间时，请问梯度的直方图应该是多少？

（**2**）当采用**8**个**bins**来离散化方向空间时，请问梯度的直方图应该是多少？

(1)

4个bins也就是把$[0, 2\pi]$离散化为4个方向进行投票。

即离散化为：$0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$这四个方向。

投票的时候通过梯度的方向确定是向哪两个方向投票以及两个方向的权重，通过梯度的幅值和空间权重决定投票的大小。

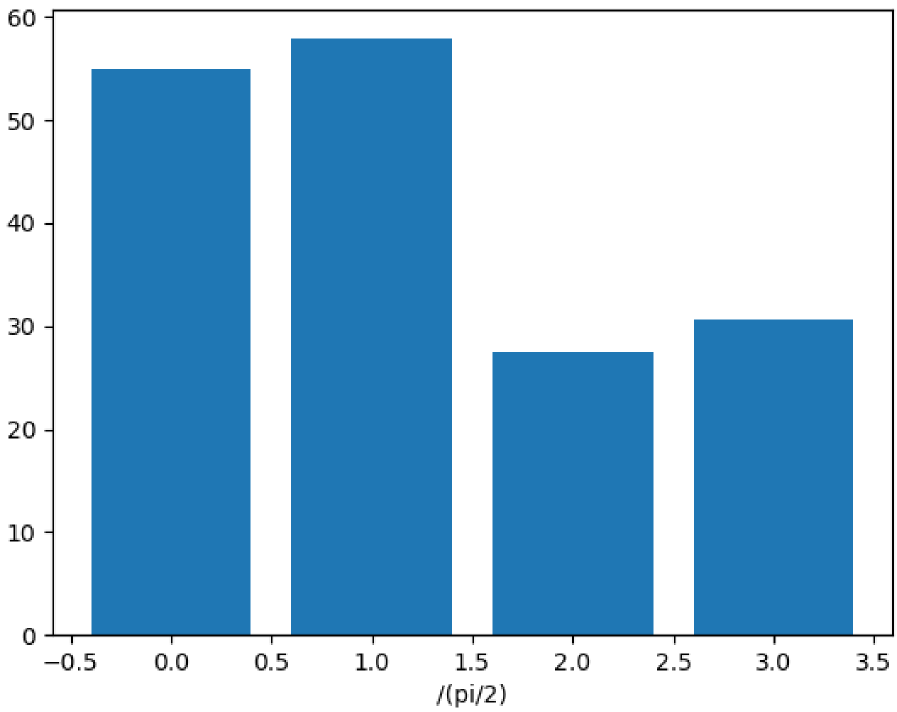
每一个像素点对于某个方向的投票数这样求：

$$value = G \cdot Mag \cdot (1 - \frac{\theta}{\pi/2})$$

将这些值叠加即可。

得到的四个方向的值分别为：

$$55.0 \quad 57.875 \quad 27.5 \quad 30.625$$



(2)

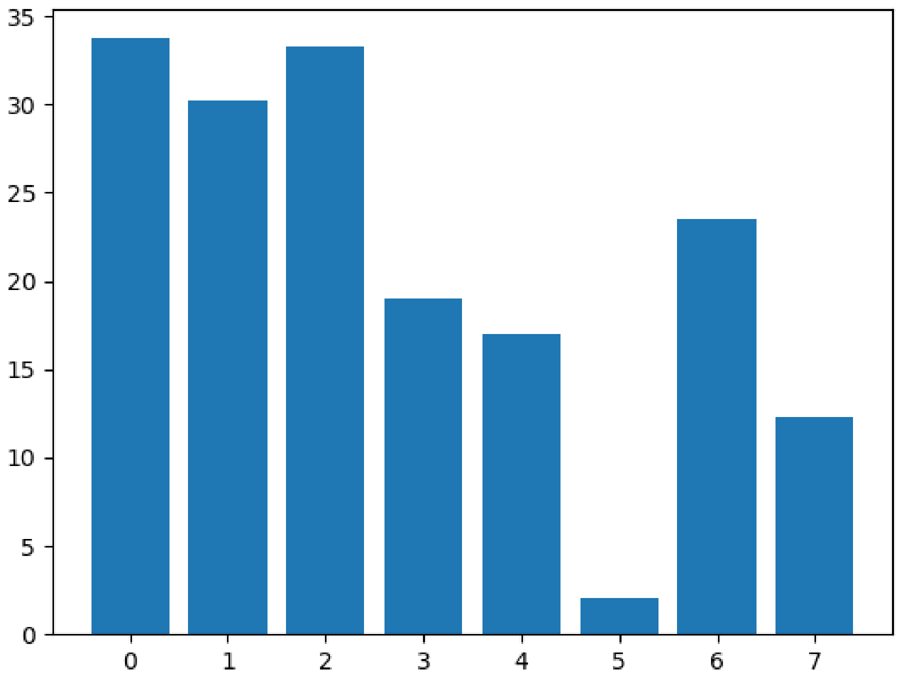
8个bins也就是离散化为：$0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi, \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}$这8个方向。

求法与（1）类似：

$$value = G \cdot Mag \cdot (1 - \frac{\theta}{\pi/4})$$

得到的8个方向的值分别为：

$$33.75 \quad 30.25 \quad 33.25 \quad 19.0 \quad 17.0 \quad 2 \quad 23.5 \quad 12.25$$



2. 给定的高斯函数如下：

$$G(x,y,\sigma)=\frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}$$

（1）高斯函数对应的拉普拉斯函数

（2）推导高斯函数的归一化的拉普拉斯函数

（3）根据有限差分形式推导高斯差分图像的形式

(1)

高斯函数对应的拉普拉斯函数：

$$\begin{aligned}\Delta G&=\frac{\partial^2G}{\partial x^2}+\frac{\partial^2G}{\partial y^2}\\&=\frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}(-\frac{2x}{2\sigma^2})+\frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}(-\frac{1}{\sigma^2})+\frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}(-\frac{2y}{2\sigma^2})+\frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}(-\frac{1}{\sigma^2})\\&=\frac{x^2+y^2}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}-\frac{1}{\pi\sigma^2}e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}\end{aligned}$$

(2)

高斯函数归一化的拉普拉斯函数：

$$\begin{aligned}\widetilde{\Delta}G&=\sigma^2(\frac{\partial^2G}{\partial x^2}+\frac{\partial^2G}{\partial y^2})\\&=\frac{x^2+y^2}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}-\frac{1}{\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}\end{aligned}$$

(3)

高斯差分图像DoG：

$$\begin{aligned}\frac{L(x,y,\sigma)-L(x,y,k\sigma)}{\sigma-k\sigma}\approx\frac{\partial L}{\partial\sigma}=\frac{\partial(I\otimes G)}{\partial\sigma}&=I\otimes\frac{\partial G}{\partial\sigma}\\\frac{\partial G}{\partial\sigma}&=\frac{1}{\pi\sigma^3}e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}(-1+\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2})\end{aligned}$$

可以得到：

$$\sigma\Delta G=\frac{\partial G}{\partial\sigma}\approx\frac{G(x,y,k\sigma)-G(x,y,\sigma)}{k\sigma-\sigma}$$

所以：

$$\begin{aligned}DoG&=G(x,y,k\sigma)-G(x,y,\sigma)\\&=(k-1)\sigma^2\Delta G\\&=\frac{(k-1)}{\pi\sigma^2}e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}(-1+\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2})\end{aligned}$$

3. 证明：

$$I\otimes G(.,.,\sigma_1)\otimes G(.,.,\sigma_2)\otimes\ldots\otimes G(.,.,\sigma_n)=I\otimes G(.,.,\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2+\ldots+\sigma_n^2})$$

证明：

由题意，只需要证明一下：

$$G(.,.,\sigma_1)\otimes G(.,.,\sigma_2)=G(.,.,\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2})$$

即可证明原等式。

$$\begin{aligned}G(x,y,\sigma_1)&=\frac{1}{2\pi\sigma_1^2}e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma_1^2}}\\G(x,y,\sigma_2)&=\frac{1}{2\pi\sigma_2^2}e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma_2^2}}\end{aligned}$$

证明如下：

$$
\begin{aligned}
&G(x,y,\sigma_1)\otimes G(x,y,\sigma_2)\\
&=\int\int G(\tau_1,\tau_2,\sigma_1)G(\tau_1-x,\tau_2-y,\sigma_2)d\tau_1 d\tau_2\\
&=\int\int \frac{1}{4\pi^2\sigma_1^2\sigma_2^2}\exp\left(-\frac{\tau_1^2+\tau_2^2}{2\sigma_1^2}-\frac{(\tau_1-x)^2+(\tau_2-y)^2}{2\sigma_2^2}\right)d\tau_1 d\tau_2\\
&=\int\int \frac{1}{4\pi^2\sigma_1^2\sigma_2^2}\exp\left(-(\frac{1}{2\sigma_1^2}+\frac{1}{2\sigma_2^2})(\tau_1^2+\tau_2^2)+\frac{x}{\sigma_2^2}\tau_1+\frac{y}{\sigma_2^2}\tau_2-\frac{x^2+y^2}{2\sigma_2^2}\right)d\tau_1 d\tau_2\\
&=\int\int \frac{1}{4\pi^2\sigma_1^2\sigma_2^2}\exp\left(-(\frac{1}{2\sigma_1^2}+\frac{1}{2\sigma_2^2})[(\tau_1-\frac{x\sigma_1^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2})^2+(\tau_2-\frac{y\sigma_1^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2})^2]+(\frac{1}{2\sigma_1^2}+\frac{1}{2\sigma_2^2})(\frac{x^2\sigma_1^4}{(\sigma_1^2+\sigma_2^2)^2}+\frac{y^2\sigma_1^4}{(\sigma_1^2+\sigma_2^2)^2})-\frac{x^2+y^2}{2\sigma_2^2}\right)d\tau_1 d\tau_2\\
&=\int\int \frac{1}{4\pi^2\sigma_1^2\sigma_2^2}\exp\left(-(\frac{1}{2\sigma_1^2}+\frac{1}{2\sigma_2^2})[(\tau_1-\frac{x\sigma_1^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2})^2+(\tau_2-\frac{y\sigma_1^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2})^2]+(\frac{\sigma_1^2}{2\sigma_2^2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}-\frac{1}{2\sigma_2^2})(x^2+y^2)\right)d\tau_1 d\tau_2\\
&=\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}\right)\int\int \frac{1}{4\pi^2\sigma_1^2\sigma_2^2}\exp\left(-(\frac{1}{2\sigma_1^2}+\frac{1}{2\sigma_2^2})[(\tau_1-b_1)^2+(\tau_2-b_2)^2]\right)d\tau_1 d\tau_2\\
&=\frac{1}{2\pi(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}\right)\int\int \frac{1}{2\pi}(\frac{1}{\sigma_1^2}+\frac{1}{\sigma_2^2})\exp\left(-(\frac{1}{2\sigma_1^2}+\frac{1}{2\sigma_2^2})[(\tau_1-b_1)^2+(\tau_2-b_2)^2]\right)d(\tau_1-b_1)d(\tau_2-b_2)\\
&=\frac{1}{2\pi(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}\right)\\
&=G(x,y,\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2})
\end{aligned}
$$

因此：

$$G(x,y,\sigma_1)\otimes G(x,y,\sigma_2)\otimes\ldots\otimes G(x,y,\sigma_n)=G(x,y,\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2})\otimes\ldots\otimes G(x,y,\sigma_n)=G(x,y,\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2+\ldots+\sigma_n^2})$$

所以：

$$I\otimes G(.,.,\sigma_1)\otimes G(.,.,\sigma_2)\otimes\ldots\otimes G(.,.,\sigma_n)=I\otimes G(.,.,\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2+\ldots+\sigma_n^2})$$