原料油采购加工问题

一、问题重述

加工一种食用油需要精炼若干种原料油并把它们混合起来。原料油的来源有两类共5种：植物油VEG1、植物油VEG2、非植物油OIL1、非植物油OIL2、非植物油OIL3。购买每种原料油的价格（英镑/t）如表1-1所示，最终产品以150英镑/t的价格出售。植物油和非植物油需要在不同的生产线上进行精炼。每月能够精炼的植物油不超过200t，非植物油不超过250t。在精炼过程种，重量没有损失，精炼费用可以忽略不计。最终产品要符合硬度的技术条件。按硬度计量单位，它必须在3~6范围内。假定硬度的混合是线性的，而原材料的硬度如表1-2所示。为使利润最大，应该怎样指定它的月采购量和加工计划。

表1-1 原料油价格

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 原料油 | VEG1 | VEG2 | OIL1 | OIL2 | OIL3 |
| 价格  （英镑/t） | 110 | 120 | 130 | 110 | 115 |

表1-2原料油硬度表

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 原料油 | VEG1 | VEG2 | OIL1 | OIL2 | OIL3 |
| 硬度值  /（mol·） | 8.8 | 6.1 | 2.0 | 4.2 | 5.0 |

二、问题假设

1）加工食用油至少需要一种植物油和一种非植物油。

2）所生产的食用油没有滞销，全部卖完。

三、模型建立和求解

将原料油VEG1、VEG2、OIL1、OIL2、OIL3简记为1、2、3、4、5号油。令为食用油中第i号原料油的重量；为1t第i号原料油的价格；为第i号原料油的硬度，其中i=1，2，3，4，5。

根据假设，硬度的混合是线性的。则混合油的硬度为

则

生产食用油的成本为

根据题义以及假设（1），提炼的植物油的重量需满足

同理，提炼的非植物油的重量需满足

由于提炼重量不损失，于是问题就转化为最优化问题

令，则

取整数解，利用MATLAB软件编程求解，得。获得的最大利润为(英镑)(元)，硬度。

四、模型结论

为使得利润最大，每月应该采购159吨植物油VEG1，41吨植物油VEG2以及250吨非植物油OIL2。按照159：41：250的比例进行加工，可以获得最大利润155939元。

五、Matlab代码

c=(-1)\*[40;30;20;40;35];

intcon=[1,2,3,4,5];

a(1,:)=[1,1,0,0,0];

a(2,:)=[0,0,1,1,1];

a(3,:)=[-1,-1,0,0,0];

a(4,:)=[0,0,-1,-1,-1];

a(5,:)=[-5.8,-3.1,1,-1.2,-2];

a(6,:)=[2.8,0.1,-4,-1.8,-1];

b=[200;250;0;0;0;0];

vlb=zeros(5,1);

vub=[];

aeq=[];

beq=[];

[x,Y]=intlinprog(c,intcon,a,b,aeq,beq,vlb,vub)

Z=-Y

基金使用计划

一、问题重述

某校基金会有一笔数额为元的基金，打算将其存入银行或购买国债。假设国债每年至少发行一次，发行时间不定。当前银行存款及各期国债的利率如表1所示。取款政策参考银行的现行政策。

校基金会计划在年内每年用部分本息奖励优秀师生，要求每年的奖金额大致相同，且在年末仍保留原基金数额。校基金会希望获得最佳的基金使用计划，以提高每年的奖金额。请你帮助校基金会在如下情况下设计基金使用方案，并对万元，年给出具体结果。

（1）只存款不购买国债；

（2）可存款，也可购买国债；

（3）学校在基金到位后的第3年要举行百年校庆，基金会希望这一年的奖金比其它年度多20%。

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | 基准利率/% | 国债年利率/% |
| 活期 | 0.35 | —— |
| 半年期 | 1.3 | —— |
| 一年期 | 1.5 | —— |
| 二年期 | 2.1 | —— |
| 三年期 | 2.75 | 3.85 |
| 五年期 | 2.75 | 3.97 |

表1-银行利率和国债利率

二、模型假设

1）资金于年底一次性到位，自下一年起每年年底一次性发放奖金，且每年的奖金额固定；

2）在年内，银行利率和国债利率保持不变，且均按单利计算；

3）每次都能按需购买到国债。

三、符号说明

初始基金数额

每年发放的奖金额

年期存款的年利率（时表示活期）

年期国债的年利率

年期国债的总利率

第年用于年期存款的资金

四、模型建立与求解

4.1问题一：只存款不购买国债

考虑到基金一年使用一次，且活期和半年期的银行存款利率小于一年期，因而为了使每年发放的奖金额尽可能大，不考虑存活期以及半年期的情况。又由于三年期和五年期的银行存款利率相同，从资金活动性的角度考虑，选择存三年期而不存五年期。

第0年底（即基金到位那年），将初始基金分成三份，分别存入一、二、三年期。则：

从第一年起，每年年底回收的资金可以分成两部分，一部分用于发放该年的奖金，另一部分用于次年的投资，而投资又可以分别存入一、二、三年期。

故第1年底，回收的资金为，用于发放奖金和投资后，有

第2年底，回收的资金为，用于发放奖金和投资后，有

第年底，回收的资金为，用于发放奖金和投资后，有

由于在年末仍保留原基金数额，故有

求解上述线性规划模型，可得每年的奖金额万元。

每年的投资情况如下表所示：

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 年份 | 一年期存款 | 二年期存款 | 三年期存款 | 回收本息 | 投资金额 |
| 1 | 4332.0 | 340.3 | 327.6 | 4396.98 | 4269.283 |
| 2 | 0 | 0 | 4269.3 | 354.5926 | 226.8956 |
| 3 | 0 | 0 | 226.9 | 354.627 | 226.93 |
| 4 | 0 | 0 | 226.9 | 4621.51725 | 4493.82025 |
| 5 | 0 | 0 | 4493.9 | 245.61925 | 117.92225 |
| 6 | 0 | 0 | 118.0 | 245.61925 | 117.92225 |
| 7 | 0 | 0 | 118.0 | 4864.64675 | 4736.94975 |
| 8 | 0 | 0 | 4736.9 | 127.735 | 0.038 |
| 9 | 0 | 0 | 0 | 127.735 | 0.038 |
| 10 | 0 | 0 | 0 | 5127.69425 | 4999.99725 |

表2-只存款时每年的投资情况（单位：万元）

4.2问题二：可存款，也可购买国债

由于国债在一年内不定期发行，为保证有国债时能即时买到，可以考虑将资金存入银行半年期，若国债在上半年发行，则以活期利息提前支出，购买国债，当国债到期时取出，再存一个半年期，剩余的时间以活期计息；若国债在下半年发行，此时半年期已到期，再以活期存入银行，有国债时立即取出用以购买，国债到期后取出，剩余时间再存活期。购买国债之前及到期取出后的两段时间总计一年，因此购买一个年期的国债实际需要年。

故购买一个年期的国债的总利率

可将三年期国债视为四年期的银行存款，五年期国债视为六年期的银行存款，基金的回收与在投资模型与问题一相似，因此可以建立线性规划模型如下：

记

求解上述线性规划模型，可得每年的奖金额万元。

每年的投资情况如下表所示：

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 年份 | 一年期存款 | 二年期存款 | 三年期存款 | 三年期国债 | 五年期国债 | 回收本息 | 投资金额 |
| 1 | 412.7 | 148.0 | 142.5 | 4051.3 | 245.5 | 418.8905 | 264.688 |
| 2 | 0 | 0 | 0 | 137.1 | 127.6 | 154.216 | 0.0135 |
| 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 154.25625 | 0.05375 |
| 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 4556.49711 | 4402.29461 |
| 5 | 0 | 0 | 0 | 137.1 | 4265.3 | 154.19637 | -0.00613 |
| 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 296.6622 | 142.4597 |
| 7 | 0 | 0 | 142.5 | 0 | 0 | 154.19184 | -0.01066 |
| 8 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 154.19637 | -0.00613 |
| 9 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 154.25625 | 0.05375 |
| 10 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 5154.18852 | 4999.98602 |

表3-可购国债时每年的投资情况（单位：万元）

4.3问题三：第三年的奖金比其它年度多20%

①若只存款不购买国债，只需将问题一中第三年的式子改写成

模型求解后可得，每年的奖金额万元。

每年的投资情况如下表所示：

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 年份 | 一年期存款 | 二年期存款 | 三年期存款 | 回收本息 | 投资金额 |
| 1 | 4322.8 | 333.3 | 343.9 | 4387.642 | 4262.5875 |
| 2 | 0 | 0 | 4262.6 | 347.2986 | 222.2441 |
| 3 | 0 | 0 | 222.2 | 372.27175 | 222.20635 |
| 4 | 0 | 0 | 222.2 | 4614.2645 | 4489.21 |
| 5 | 0 | 0 | 4489.2 | 240.5315 | 115.477 |
| 6 | 0 | 0 | 115.5 | 240.5315 | 115.477 |
| 7 | 0 | 0 | 115.5 | 4859.559 | 4734.5045 |
| 8 | 0 | 0 | 4734.5 | 125.02875 | -0.02575 |
| 9 | 0 | 0 | 0 | 125.02875 | -0.02575 |
| 10 | 0 | 0 | 0 | 5125.09625 | 5000.04175 |

表4-只存款且第三年奖金多20%时每年的投资情况（单位：万元）

②若可存款，也可购买国债，只需将问题二中第三年的式子改写成

模型求解后可得，每年的奖金额万元。

每年的投资情况如下表所示：

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 年份 | 一年期存款 | 二年期存款 | 三年期存款 | 三年期国债 | 五年期国债 | 回收本息 | 投资金额 |
| 1 | 404.0 | 144.9 | 167.3 | 4043.5 | 240.3 | 410.06 | 259.1127 |
| 2 | 0 | 0 | 0 | 134.2 | 124.9 | 150.9858 | 0.0385 |
| 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 181.10225 | -0.03451 |
| 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 4547.72445 | 4396.77715 |
| 5 | 0 | 0 | 0 | 134.2 | 4262.6 | 150.93474 | -0.01256 |
| 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 290.37852 | 139.43122 |
| 7 | 0 | 0 | 139.4 | 0 | 0 | 150.92916 | -0.01814 |
| 8 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 150.93474 | -0.01256 |
| 9 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 150.9005 | -0.0468 |
| 10 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 5150.92584 | 4999.97854 |

表5-可购国债且第三年奖金多20%时每年的投资情况（单位：万元）

五、Matlab代码

5.1只存款模型：

M=5000; %基金总额

r1=1+1.5/100; %一年期总利率

r2=1+2.1/100\*2; %二年期总利率

r3=1+2.75/100\*3; %三年期总利率

%构建不等式组左侧的系数矩阵

a=[zeros(10,30),-ones(10,1)];

a(1,1)=r1;

a(2,4)=r1;

a(2,2)=r2;

for i=3:10

a(i,3\*i-2)=r1;

a(i,3\*i-4)=r2;

a(i,3\*i-6)=r3;

end

%a(3,31)=-1.2;%求解问题三时去掉此行注释

a=-a;

%构建不等式组右侧的系数矩阵

b=zeros(10,1);

%构建目标函数的系数矩阵

c=[zeros(1,30),1];

%构建约束条件方程组左侧的系数矩阵

aeq=[zeros(11,30),-ones(11,1)];

aeq(1,1)=r1;

aeq(1,4)=-1;

aeq(1,5)=-1;

aeq(1,6)=-1;

aeq(2,4)=r1;

aeq(2,2)=r2;

aeq(2,7)=-1;

aeq(2,8)=-1;

aeq(2,9)=-1;

for i=3:9

aeq(i,3\*i-2)=r1;

aeq(i,3\*i-4)=r2;

aeq(i,3\*i-6)=r3;

aeq(i,3\*i+1)=-1;

aeq(i,3\*i+2)=-1;

aeq(i,3\*i+3)=-1;

end

aeq(10,1)=1;

aeq(10,2)=1;

aeq(10,3)=1;

aeq(10,31)=0;

aeq(11,29)=1;

aeq(11,30)=1;

aeq(11,27)=1;

aeq(11,28)=r1;

aeq(11,26)=r2;

aeq(11,24)=r3;

%aeq(3,31)=-1.2;%求解问题三时去掉此行注释

%构建约束条件方程组右侧的系数矩阵

beq=zeros(11,1);

beq(10,1)=M;

beq(11,1)=M;

%求解c的最大值相当于求解-c的最小值

[x,fval]=linprog(-c,a,b,aeq,beq,zeros(31,1))

5.2可购买国债模型：

M=5000; %基金总额

r1=1+1.5/100; %一年期总利率

r2=1+2.1/100\*2; %二年期总利率

r3=1+2.75/100\*3; %三年期总利率

p3=(1+3\*3.85/100)\*(1+0.35/2/100)\*(1+1.3/2/100);

%三年期国债的总利率

p5=(1+5\*3.97/100)\*(1+0.35/2/100)\*(1+1.3/2/100);

%五年期国债的总利率

%构建不等式组左侧的系数矩阵

a=[zeros(10,50),-ones(10,1)];

a(1,1)=r1;

a(2,6)=r1;

a(2,2)=r2;

for i=3:10

a(i,5\*i-4)=r1;

a(i,5\*i-8)=r2;

a(i,5\*i-12)=r3;

end

a(4,4)=p3;

a(5,9)=p3;

for i=6:10

a(i,5\*i-16)=p3;

a(i,5\*i-25)=p5;

end

%a(3,51)=-1.2;%求解问题三时去掉此行注释

a=-a;

%构建不等式组右侧的系数矩阵

b=zeros(10,1);

%构建目标函数的系数矩阵

c=[zeros(1,50),1];

%构建约束条件方程组左侧的系数矩阵

aeq=[zeros(11,50),-ones(11,1)];

aeq(1,1)=r1;

aeq(2,6)=r1;

aeq(2,2)=r2;

for i=3:9

aeq(i,5\*i-4)=r1;

aeq(i,5\*i-8)=r2;

aeq(i,5\*i-12)=r3;

end

aeq(4,4)=p3;

aeq(5,9)=p3;

for i=6:9

aeq(i,5\*i-16)=p3;

aeq(i,5\*i-25)=p5;

end

for i=1:9

aeq(i,5\*i+1)=-1;

aeq(i,5\*i+2)=-1;

aeq(i,5\*i+3)=-1;

aeq(i,5\*i+4)=-1;

aeq(i,5\*i+5)=-1;

end

aeq(10,1)=1;

aeq(10,2)=1;

aeq(10,3)=1;

aeq(10,4)=1;

aeq(10,5)=1;

aeq(10,51)=0;

aeq(11,47)=1;

aeq(11,48)=1;

aeq(11,49)=1;

aeq(11,50)=1;

aeq(11,43)=1;

aeq(11,44)=1;

aeq(11,45)=1;

aeq(11,39)=1;

aeq(11,40)=1;

aeq(11,35)=1;

aeq(11,30)=1;

aeq(11,46)=r1;

aeq(11,42)=r2;

aeq(11,38)=r3;

aeq(11,34)=p3;

aeq(11,25)=p5;

%aeq(3,51)=-1.2;%求解问题三时去掉此行注释

%构建约束条件方程组右侧的系数矩阵

beq=zeros(11,1);

beq(10,1)=M;

beq(11,1)=M;

%求解c的最大值相当于求解-c的最小值

[x,fval]=linprog(-c,a,b,aeq,beq,zeros(51,1))

汽车租赁问题

一、问题重述

某投资者拟在甲、乙两城市间开设一家汽车租赁公司，租赁者可在两城中任意租借或归还汽车。在运营中发现，在甲城中租车的顾客约有60%在本城归还，而有40%在乙城归还；在乙城中租车的顾客约有70%在本城归还，而有30%在甲城归还。请预测该公司的汽车流向。

二、模型假设

1）假设在一轮租赁周期内汽车全部租出

2）一轮租赁周期结束后汽车全部归还

3）甲、乙两城租借的汽车总量保持不变

三、符号说明

n次租借后甲城的汽车数量

n次租借后乙城的汽车数量

甲、乙两城的汽车总量

四、模型建立与求解

第n轮租赁周期结束后，甲城的汽车数量为

化简得

解得

故

同理，有

化简得

解得

故

因此，当经历一段相当长的时间后，甲、乙两城的汽车数量比为3:4。

五、模型验证

用Matlab可以验证，无论甲、乙两城初始的汽车数量、为何值，随着时间的增长，即迭代次数的增加，最终甲城的汽车总量趋于0.428571，乙城的汽车总量趋于0.571429，甲、乙两城的汽车数量比趋近于0.75。下图中，蓝色表示甲城汽车数量，红色表示乙城汽车数量，黄色表示甲乙两城的汽车数量比。



图1：初值情况一



图2：初值情况二



图3：初值情况三

六、Matlab代码

A1=rand(1,1);

B1=1-A1;

A=[A1];

B=[B1];

for i=1:50

A2=0.6\*A1+0.3\*B1;

A=[A,A2];

B2=0.4\*A1+0.7\*B1;

B=[B,B2];

A1=A2;

B1=B2;

end

C=[A./B];

plot(A,'\*')

hold on

plot(B,'-')

hold on

plot(C,'.')

养老保险问题

一、问题重述

养老是重要的民生问题，与每个人的切身利益息息相关，养老保险是保险中的一个重要险种。保险公司将提供不同的保险方案。例如每月缴费200元至60岁开始领取养老金，男子若25岁开始投保，届时每月可领取养老金2000元；如35岁投保，届时每月可领取养老金1000元。请建立数学模型分析保险公司为兑付保险责任，每月的投资收益率应至少为多少？

二、模型假设

1. 假设保险公司不会破产倒闭
2. 假设投保人完成投保（即投保人60岁以后身故）
3. 保险公司每月的投资收益率为定值

三、符号说明

投保人每月投保的金额

投保人60岁后每月领取的养老金

投保人60岁前保险公司收益（投保个月）

投保人60岁后保险公司收益（领取养老金个月）

保险公司每月的投资收益率

四、模型建立与求解

投保人投保个月后保险公司的收益额

即

已知

解得

投保人领取养老金个月后保险公司的收益额

即

已知

解得

保险公司为兑付保险责任，每月的投资收益率至少应使。

令，则的零点即为方程的解。显然，。又由Matlab作图可知，在区间的变化趋势为先减小后增大，且，故在区间上有唯一解。



图1：的变化趋势曲线

五、结论

若投保人25岁起投保，每月投保200元，60岁后每月领取2000元直至80岁去世，则保险公司每月的投资收益率

若投保人35岁起投保，每月投保200元，60岁后每月领取1000元直至80岁去世，则保险公司每月的投资收益率

六、Matlab代码

x=200;

y=2000;

n=(60-25)\*12;

m=(80-60)\*12;

f=@(k)((1+k).^(m+n+1)-(1+k).^(m+1))\*x-((1+k).^m-1)\*y

fplot(f,[0,0.01])

c=fzero(f,[0.0001,1])

全球定位系统

看视频（群文件3.1-3.5），回答以下问题：

**（1）全球定位系统GLONASS 是哪个国家/组织开发的？请简述其数学模型依赖的基本物理原理以及需要求解的基本问题。**

全球定位系统GLONASS是苏联开发的。

基本物理原理：电磁波传播速度恒定；利用伪码距进行单点定位

需要求解的基本问题：线性最小二乘问题。

**（2）对于中国北斗系统，其目前处于哪个发展阶段？请简述你对北斗系统及其发展的认识。**

中国北斗系统目前已经能实现全球大部分地区的覆盖，但商业应用还比较少。

北斗系统具有后发优势，虽然起步比较晚，但是发展前景很好。北斗卫星系统具有实时导航、快速定位、精准授时、位臵报告和短报文通信服务五大功能。

与其他卫星导航系统相比，北斗卫星导航系统具有以下优势：

1）北斗系统采用高、中、低三种轨道卫星组成混合星座，与其他卫星导航系统相比高轨卫星更多，抗遮挡能力强，尤其在低纬度地区服务优势更为明显；

2）北斗系统提供多个频点的导航信号，能够通过多频信号组合使用等方式提高服务精度；

3）北斗系统创新融合了导航与通信能力，具备基本导航、短报文通信、星基增强、国际搜救、精密单点定位等多种服务能力。

尽管存在着优势，但是北斗导航系统目前还处于建设时期，自身的发展还面临许多的技术难题，在精度，可靠性，系统的完整性上还存在一些不足，这对市场的推广应用造成巨大的影响。北斗系统仍需要不断的发展和完善，才能在市场占据更好的地位。