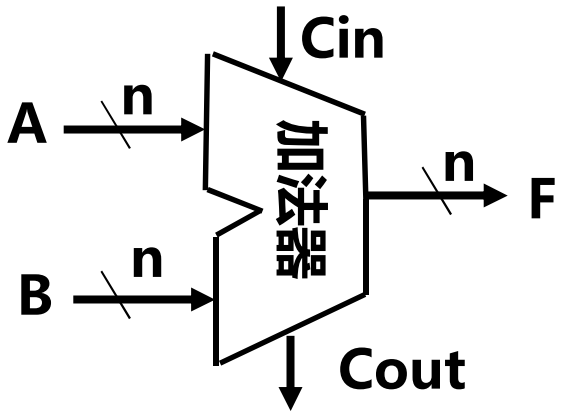
整数加减运算

南京大学
计算机科学与技术系
袁春风
email: cfyuan@nju.edu.cn
2015.6

整数加、减运算

- C语言程序中的整数有
  - 带符号整数，如char、short、int、long型等
  - 无符号整数，如unsigned char、unsigned short、unsigned等
- 指针、地址等通常被说明为无符号整数，因而在进行指针或地址运算时，需要进行无符号整数的加、减运算
- 无符号整数和带符号整数的加、减运算电路完全一样，这个运算电路称为整数加减运算部件，基于带标志加法器实现
- 计算机中的加法器，因为只有n位，所以是一种模2^n运算系统！



例：n=4，A=1001，B=1100

则：F=0101，Cout=1

回顾：整数加减运算部件

- 补码加减运算公式

  $[A+B]_{补} = [A]_{补} + [B]_{补}$ （MOD 2^n）

  $[A-B]_{补} = [A]_{补} + [-B]_{补}$ （MOD 2^n）

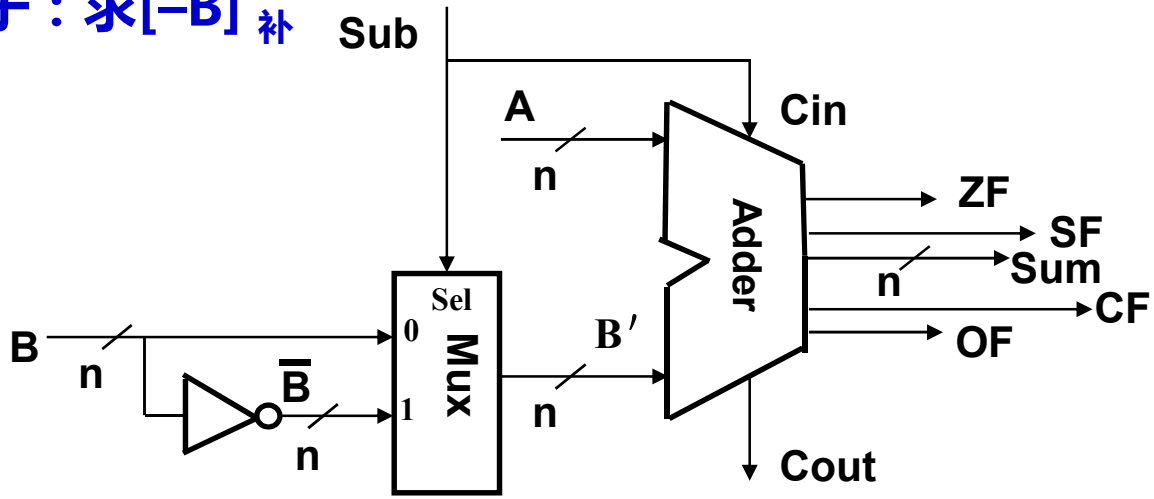
- 补码加减运算要点和运算部件
  - 加、减法运算统一采用加法来处理
  - 符号位(最高有效位MSB)和数值位一起参与运算
  - 直接用Adder实现两个数的加运算（模运算系统）

    问题：模是多少？运算结果高位丢弃，保留低n位，相当于取模2^n
  - 实现减法的主要工作在于：求$[-B]_{补}$

问题：如何求$[-B]_{补}$？

$[-B]_{补} = \overline{B} + 1$

当Sub为1时，做减法
当Sub为0时，做加法

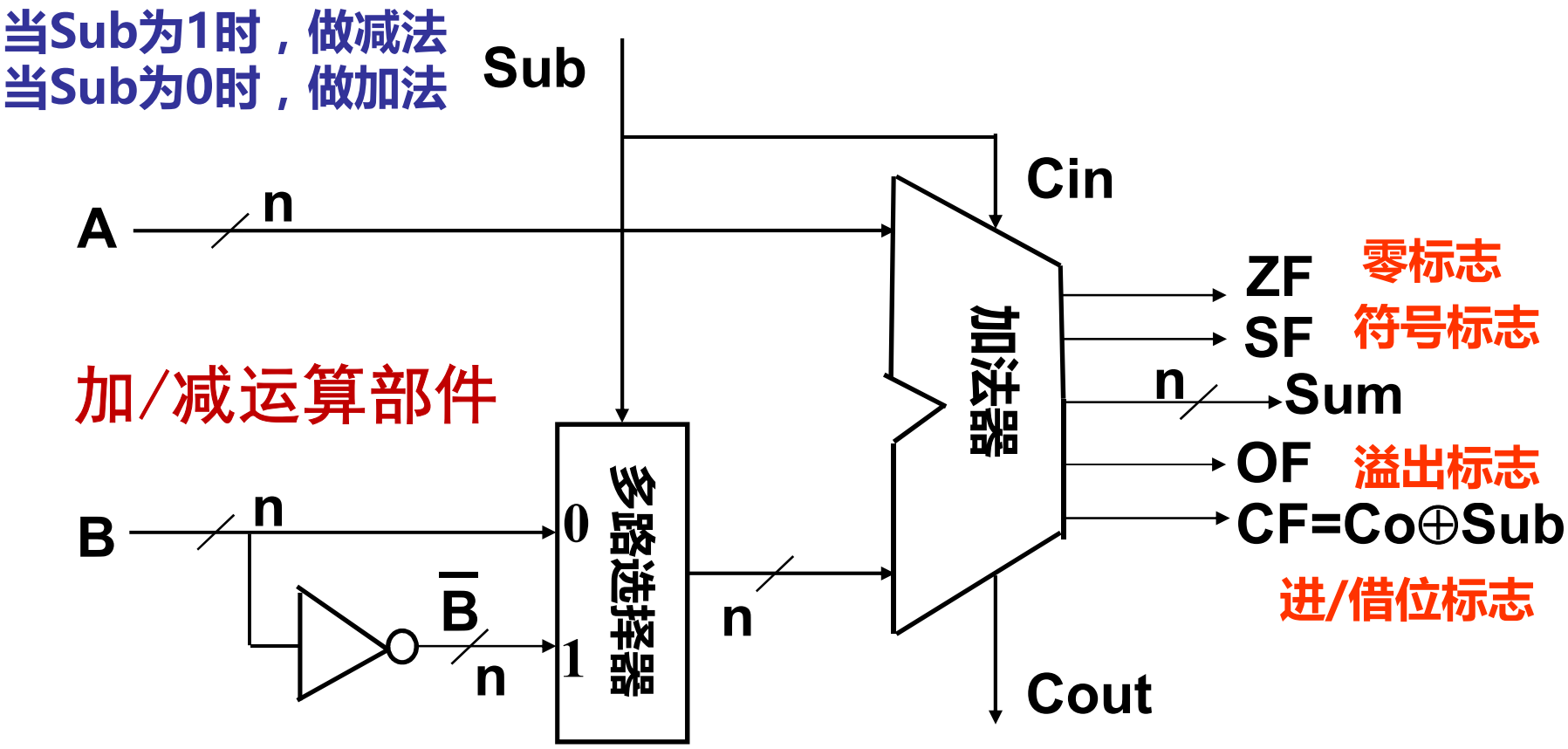


所有运算电路的核心

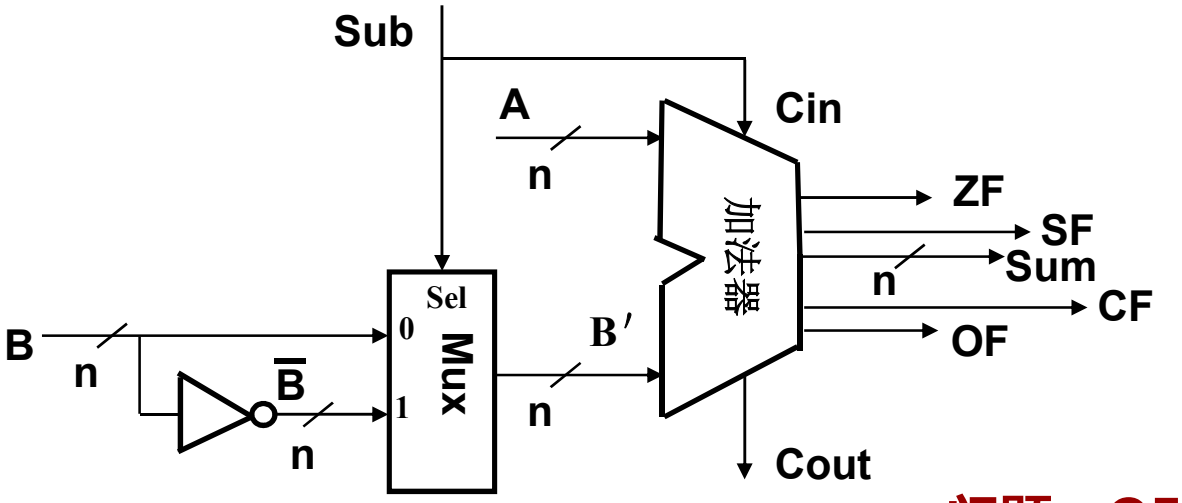
重要认识1：计算机中所有运算都基于加法器实现！

重要认识2：加法器不知道所运算的是带符号数还是无符号数。

重要认识3：加法器不判定对错，总是取低n位作为结果，并生成标志信息。



条件标志位（条件码CC）



整数加/减运算部件

问题：为什么要生成并保存条件标志？

为了在分支指令（条件转移指令）中被用作是否转移执行的条件！

问题：OF=？ZF=？
SF=？CF=？

```
if (i>j) {
 …
}
```

还记得如何得到各个标志位吗？

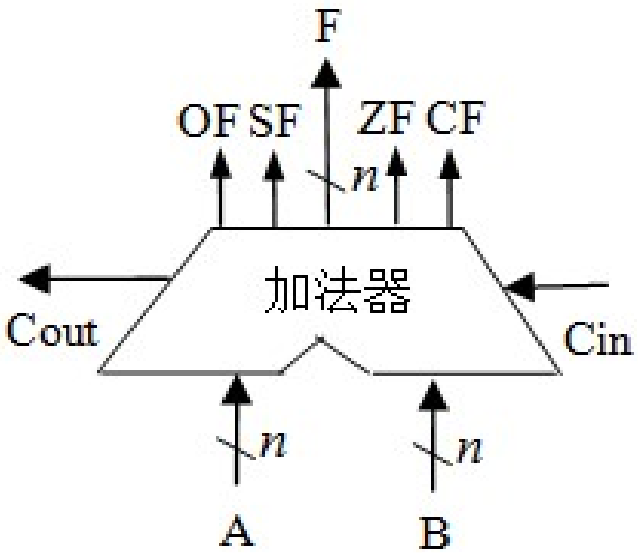
OF：若A与B′同号但与Sum不同号，则1；否则0。SF：sum符号

ZF：如Sum为0，则1，否则0。CF：Cout ⊕ sub

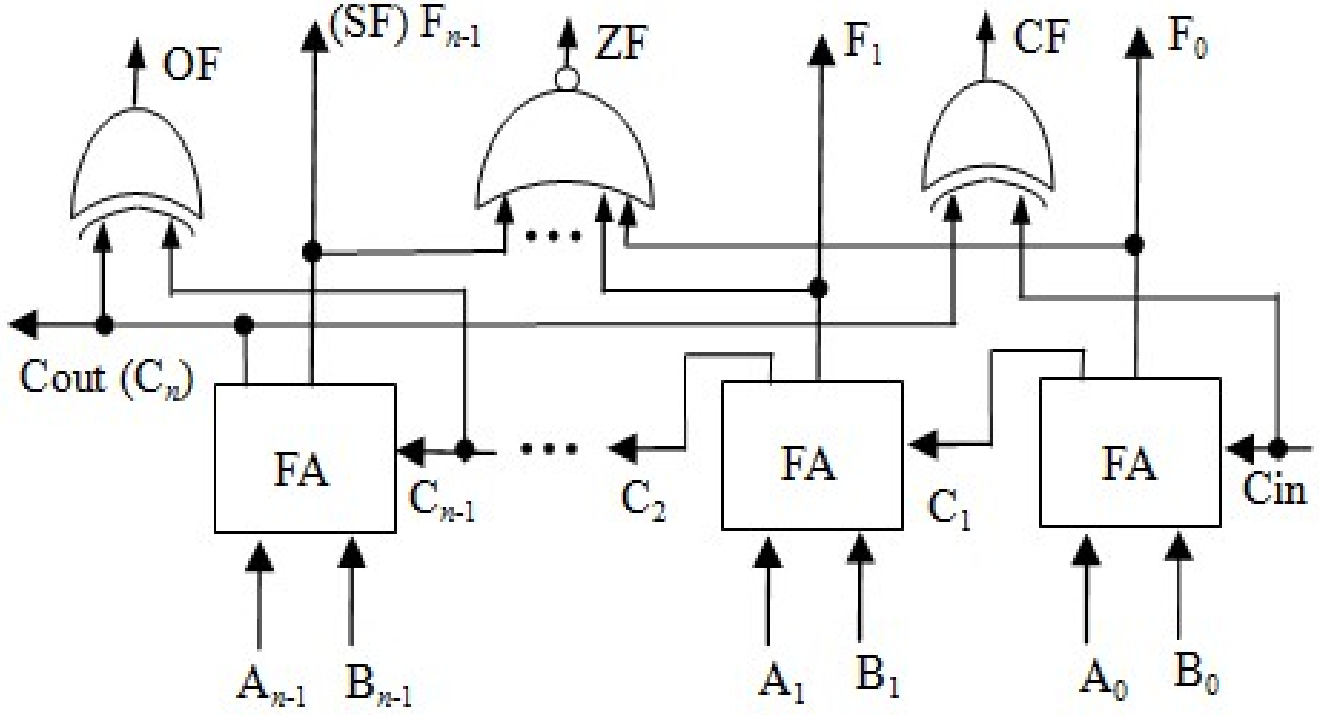
- 零标志ZF、溢出标志OF、进/借位标志CF、符号标志SF称为条件标志。
- 条件标志（Flag）在运算电路中产生，被记录到专门的寄存器中
- 存放标志的寄存器通常称为程序/状态字寄存器或标志寄存器。每个标志对应标志寄存器中的一个标志位。 如，IA-32中的EFLAGS寄存器

n位带标志加法器

- n位加法器无法用于两个n位带符号整数（补码）相加，无法判断是否溢出
- 程序中经常需要比较大小，通过（在加法器中）做减法得到的标志信息来判断



带标志加法器符号



带标志加法器的逻辑电路

溢出标志OF：

$OF=C_n \oplus C_{n-1}$

符号标志SF：

$SF=F_{n-1}$

零标志ZF=1当且仅当F=0；

进位/借位标志CF：

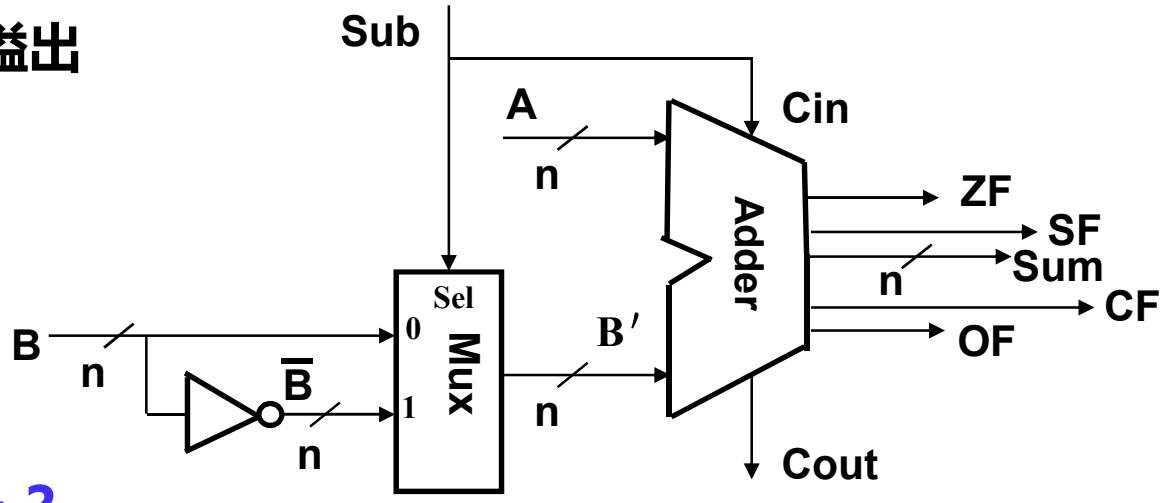
$CF=Cout \oplus Cin$

整数加法举例

做加法时，主要判断是否溢出

无符号加溢出条件：CF=1

带符号加溢出条件：OF=1



整数加/减运算部件

若n=8，计算107+46= ？

107_{10}= 0110 1011_2

46_{10} = 0010 1110_2

0 1001 1001

进位是真正的符号：+153

两个正数相加，结果为负数，
故溢出！即OF=1

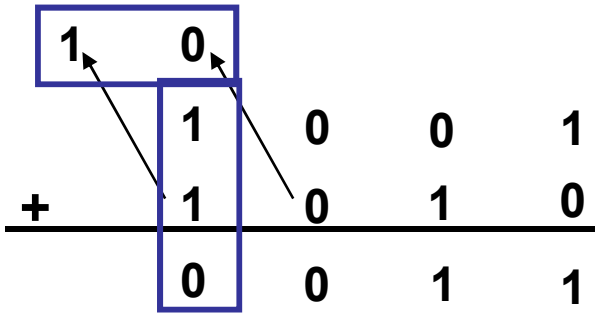
溢出标志OF=1、零标志ZF=0、
符号标志SF=1、进位标志CF=0

无符号：sum=153，因为CF=0，故未发生溢出，结果正确！

带符号：sum= -103，因为OF=1，故发生溢出，结果错误！

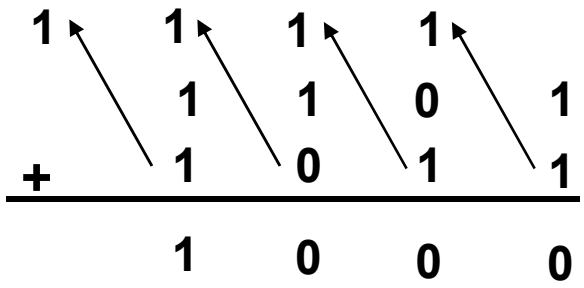
整数减法举例

-7- 6 = -7 + (-6) = +3 X
9 - 6 = 3 √



OF=1、ZF=0
SF=0、借位CF=0

-3 - 5 = - 3 + (- 5) = - 8 √
13 - 5 = 8 √



OF=0、ZF=0、
SF=1、借位CF=0

带符号溢出： (1) 最高位和次高位的进位不同
(2) 和的符号位和加数的符号位不同

无符号减溢出：差为负数，即借位CF=1

做减法以比较大小，规则：
Unsigned: CF=0时，大于
Signed：OF=SF时，大于

验证：9>6，故CF=0；13>5，故CF=0

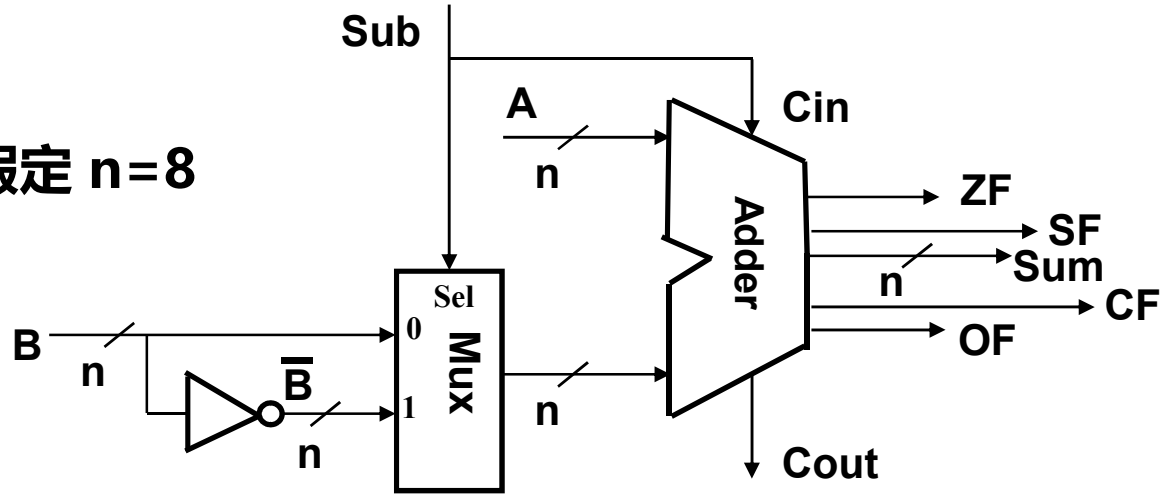
验证：-7<6，故OF≠SF
-3<5，故OF≠SF

整数减法举例

```
unsigned int x=134;
unsigned int y=246;
int m=x;
int n=y;
unsigned int z1=x-y;
unsigned int z2=x+y;
int k1=m-n;
int k2=m+n;
```

无符号和带符号加减运算都用该部件执行

假定 n=8



x和m的机器数一样：1000 0110，y和n的机器数一样：1111 0110

z1和k1的机器数一样：1001 0000，CF=1，OF=0，SF=1

z1的值为144（=134-246+256，x-y<0），k1的值为-112。

无符号减公式：

$$result=\begin{cases} x-y & (x-y>0) \\ x-y+2^n & (x-y<0) \end{cases}$$

带符号减公式：

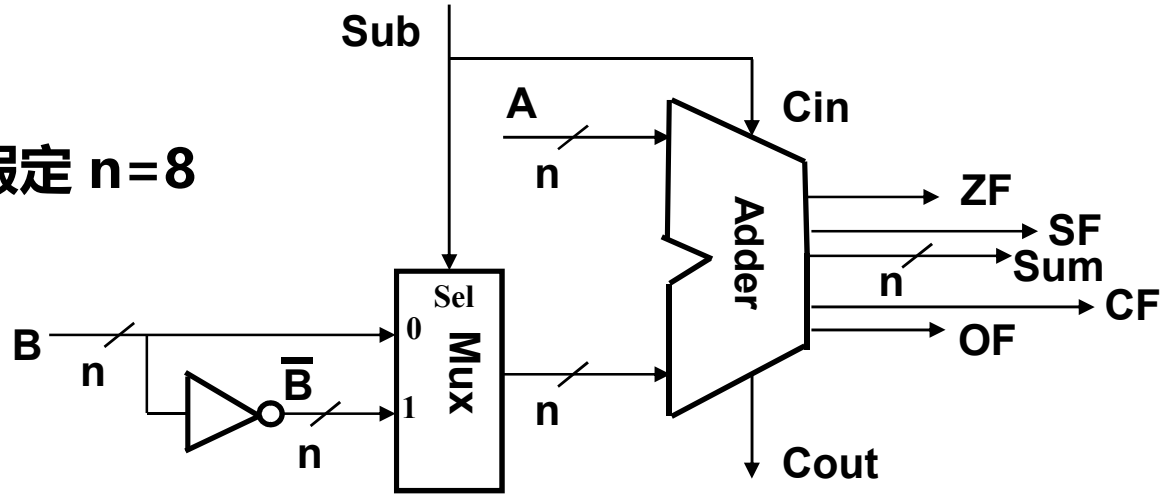
$$result=\begin{cases} x-y-2^n & (2^{n-1}\leqslant x-y) \quad \text{正溢出} \\ x-y & (-2^{n-1}\leqslant x-y<2^{n-1}) \quad \text{正常} \\ x-y+2^n & (x-y<-2^{n-1}) \quad \text{负溢出} \end{cases}$$

整数加法举例

```
unsigned int x=134;
unsigned int y=246;
int m=x;
int n=y;
unsigned int z1=x-y;
unsigned int z2=x+y;
int k1=m-n;
int k2=m+n;
```

无符号和带符号加减运算都用该部件执行

假定 n=8



x和m的机器数一样：1000 0110，y和n的机器数一样：1111 0110

z2和k2的机器数一样：0111 1100，CF=1，OF=1，SF=0

z2的值为124（=134+246-256，x+y>256）

k2的值为124（=134+246-256，m+n>128，即正溢出）

无符号加公式：

$$\text{result}=\begin{cases} x+y & (x+y<2^n) \\ x+y-2^n & (2^n\leqslant x+y<2^{n+1}) \end{cases}$$

带符号加公式：

$$\text{result}=\begin{cases} x+y-2^n & (2^{n-1}\leqslant x+y) & \text{正溢出} \\ x+y & (-2^{n-1}\leqslant x+y<2^{n-1}) & \text{正常} \\ x+y+2^n & (x+y<-2^{n-1}) & \text{负溢出} \end{cases}$$

无符号整数加法溢出判断程序

如何用程序判断一个无符号数相加没有发生溢出

$$\text{result}=\begin{cases} x+y & (x+y<2^n) \\ x+y-2^n & (2^n \leqslant x+y<2^{n+1}) \end{cases}$$

发生溢出时，一定满足 result<x and result<y

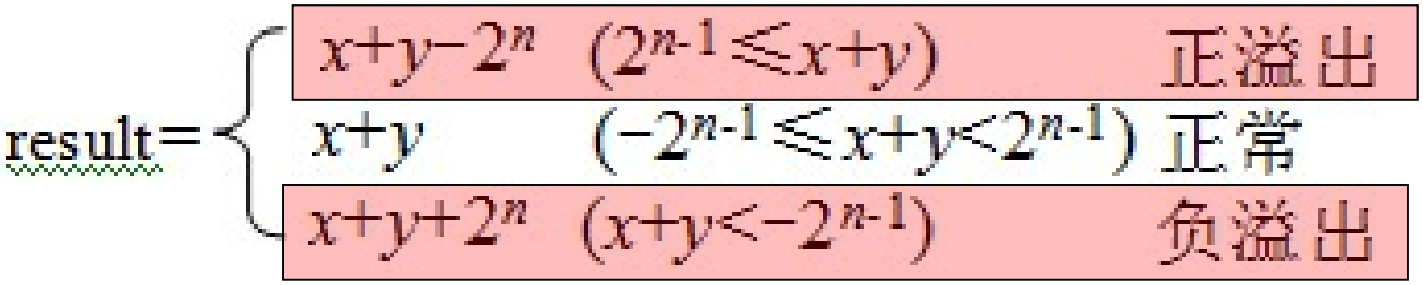
否则，若$x+y-2^n \geq x$，则 $y \geq 2^n$ ，这是不可能的！

```
/* Determine whether arguments can be added
without overflow */

int uadd_ok(unsigned x, unsigned y)
{
    unsigned sum = x+y;
    return sum >= x;
}
```

带符号整数加法溢出判断程序

如何用程序判断一个带符号整数相加没有发生溢出




```
/* Determine whether arguments can be added without
   overflow */

int tadd_ok(int x, int y) {
      int sum = x+y;
      int neg_over = x < 0 && y < 0 && sum >= 0;
      int pos_over = x >= 0 && y >= 0 && sum < 0;
      return !neg_over && !pos_over;
}
```

带符号整数减法溢出判断程序

以下程序检查带符号整数相减是否溢出有没有问题？

$$\text{result}=\begin{cases} x+y-2^n & (2^{n-1}\leqslant x+y) \quad \text{正溢出} \\ x+y & (-2^{n-1}\leqslant x+y<2^{n-1}) \quad \text{正常} \\ x+y+2^n & (x+y<-2^{n-1}) \quad \text{负溢出} \end{cases}$$

带符号整数加

$$\text{result}=\begin{cases} x-y-2^n & (2^{n-1}\leqslant x-y) \quad \text{正溢出} \\ x-y & (-2^{n-1}\leqslant x-y<2^{n-1}) \quad \text{正常} \\ x-y+2^n & (x-y<-2^{n-1}) \quad \text{负溢出} \end{cases}$$

带符号整数减

```
/* Determine whether arguments can be subtracted
without overflow */

/* WARNING: This code is buggy. */
int tsub_ok(int x, int y) {
      return tadd_ok(x, -y);
}
```

带符号减的溢出判断函数如何实现呢？

无符号减的溢出判断函数又如何实现呢？

当x=0，y=0x80000000时，该函数判断错误