Analisi II - ottava parte

Curve equivalenti

Siano $\gamma_1 : I_1 \to \mathbb{R}^n$ e $\gamma_2 : I_2 \to \mathbb{R}^n$. Si dice che γ_1 e γ_2 sono equivalenti se esiste $h : I_2 \to I_1$ t.c.

1. h è biiettiva
2. h è di classe C^1 con $h'(s) \neq 0$ in I_2, ovvero h è solo crescente o decrescente
3. $\gamma_1(h(s)) = \gamma_2(s)$, $\forall s \in I_2$

Osservazione

Se γ_1 e γ_2 sono equivalenti allora $sost(\gamma_1) = sost(\gamma_2)$

Orientazione di una curva

Siano γ_1 e γ_2 due curve equivalenti.
Si dice che γ_1 e γ_2 hanno la stessa orientazione/sono equiverse se $h'(s) > 0 \forall s \in I_2$ e si scrive $\gamma_1 \sim \gamma_2$
Si dice che γ_1 e γ_2 hanno orientazione opposte se $h'(s) < 0 \forall s \in I_2$ e si scrive $\gamma_1 \sim -\gamma_2$

Osservazione

Siano γ_1, γ_2 due curve **regolari** ($\gamma_1'(t) \neq 0$ e $\gamma_2'(t) \neq 0$, $\forall t$) equivalenti. Si ha:

- se γ_1 e γ_2 hanno la stessa orientazione, allora $\tau_1(h(s)) = \tau_2(s)$ in I_2
- altrimenti ($\gamma_1 \sim -\gamma_2$), allora $\tau_1(h(s)) = -\tau_2(s)$ in I_2
  Infatti:
  $$\tau_2(s) = \frac{\gamma_2'(s)}{||\gamma_2'(s)||} = \frac{\frac{d}{ds}\gamma_1(h(s))}{||\frac{d}{ds}\gamma_1(h(s))||} = \frac{\gamma_1'(h(s)) \cdot h'(s)}{||\gamma_1'(h(s)) \cdot h'(s)||} = \frac{\gamma_1'(h(s)) \cdot h'(s)}{||\gamma_1'(h(s)) \cdot h'(s)||} = \begin{cases} \tau_1(h(s)) \text{ se } \gamma_1 \sim \gamma_2 \\ -\tau_1(h(s)) \text{ se } \gamma_1 \sim -\gamma_2 \end{cases}$$

Integrazione su curve

Integrazione di linea di un campo scalare

Siano $\gamma : I = [a, b] \to \mathbb{R}^n$ una curva regolare e $f : E(\subseteq \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ un campo scalare (---...?---)
Si definisce integrale di f su $\gamma \int_\gamma f ds = \int_a^b f(\gamma(t))||\gamma'(t)||dt$

Osservazione

Se $f = 1$ in E allora $\int_\gamma 1ds = \int_a^b ||\gamma'(t)||dt = l(\gamma)$

Proposizione

Se γ_1 e γ_2 sono curve regolari equivalenti e f è un campo scalare continuo $\int_{\gamma_1} fds = \int_{\gamma_2} fds$
(si verifica tramite la funzione $h : I_2 \to I_1$ e cambio di variabile integrazione unidimensionale)

Integrali di linea di campi vettoriali

Siano $\gamma : I = [a,b] \to \mathbb{R}^n$ una curva regolare e $g : E(\subseteq \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$ un campo vettoriale continuo, con $\gamma(I) \subseteq E$. Si definisce integrale di linea di g su $\gamma \int_\gamma < g, \tau > ds = \int_a^b < g(\gamma(t)), \gamma'(t) > dt$

Osservazione

$$\int_a^b < g(\gamma(t)), \gamma'(t) > dt) = \int_a^b < g(\gamma(t)), \underbrace{\frac{\gamma'(t)}{||\gamma'(t)||}}_{\tau(t)} > \cdot||\gamma'(t)||dt = \int_a^b < g(\gamma(t)), \tau(t) > ||\gamma'(t)||dt = \int_\gamma < g, \tau > dt$$

Proposizione

Se γ_1 e γ_2 sono curve regolari equivalenti con la stessa orientazione, allora $\displaystyle\int_{\gamma_1} < g, \tau > ds = \int_{\gamma_2} < g, \tau > ds$
Se γ_1 e γ_2 sono curve regolari equivalenti con orientazione opposta, allora $\displaystyle\int_{\gamma_1} < g, \tau > ds = -\int_{\gamma_2} < g, \tau > ds$

Intepretazione fisica

Sia g un campo di forze: $\int_\gamma < g, \tau > ds$ è il lavoro che il campo g compie per portare un punto dalla posizione $\gamma(a)$ alla posizione $\gamma(b)$ lungo il percorso γ

Notazione

- $N = 2$, $g(x,y) = (X(x,y), Y(x,y))^T$ e $\gamma(t) = (x(t), y(t))^T$
  $\displaystyle\int_\gamma < g, \tau > ds = \int_a^b < g(\gamma(t)), \gamma'(t) > dt = \int_a^b (X(\gamma(t))x'(t) +$

$Y(\gamma(t))y'(t))dt =$

$= \int_\gamma Xdx + Ydy \rightarrow$ forma differenziale $\begin{pmatrix} x(t)dt = dx \\ y(t)dt = dy \end{pmatrix}$

- $N = 3$, $g(x,y,z) = (X(z,y,z) + Y(z,y,z) + Z(z,y,z))^T$
  $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))^T$
  $$\int_\gamma < g, \tau > ds = \int_a^b < g(\gamma(t)), \gamma'(t) > dt = \int_a^b < g(\gamma(t)), \gamma'(t) > dt =$$
  $$\int_a^b (X(\gamma(t)x'(t) + Y(\gamma(t))y'(t) + Z(\gamma(t))z'(t))dt$$
  $$\int_\gamma Xdx + Ydy + Zdz \rightarrow$$ forma differenziale

Problemi

Siano $g : A(\subseteq \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($N = 2$ o 3) un campo vettoriale continuo, con A aperto e $\gamma : [a, b] \rightarrow A$ una curva regolare

1. Quando $\int_\gamma < g, \tau > ds$ dipende dal punto iniziale $\gamma(a)$ e dal punto terminale $\gamma(b)$, ma **non** dal percorso?
2. Quando esiste un campo scalare $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ differenziale tale che $\nabla f = g$ in A?

Campi vettoriali conservativi

Si dice che $g : A(\subseteq \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^n$, con A aperto è conservativo **in A** se esiste $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ differenziabile in A e si dice che f è un potenziale di g su A

NB

Se $N = 1$:

1. g conservativo $\Leftrightarrow g$ primitivabile
2. g continua $\Rightarrow g$ primitivabile $\Rightarrow$ conservativa

Proposizione

Se $g : A(\subseteq \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^n$, A aperto connesso, è conservativo in A e $f_1, f_2 : A \rightarrow \mathbb{R}$ sono potenziali di g in A, allora esiste $c \in \mathbb{R}$ t.c. $f_1(x) = f_2(x) + c$ in A

Dimostrazione

Poniamo
$h = f_1 - f_2$. Si ha che
$\nabla h(\underline{x}) = \nabla f_1(\underline{x}) - \nabla f_2(\underline{x}) = g(\underline{x}) - g(\underline{x}) = 0$ in A.
Poichè A è aperto e connesso si conclude che esiste $c \in \mathbb{R}$ t.c. $h(\underline{x}) = c$ in A.

Teorema (di Torricelli per campi vettoriali conservativi)

Se $g: A(\subseteq \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$ è continuo e conservativo in A e $\gamma : [a, b] \to A$ è una curva regolare, allora si ha $\int_\gamma < g, \tau > ds = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$ dove f è un potenziale di g su A.

Dimostrazione

Si ha $\int_\gamma < g, \tau > ds = \int_a^b \underbrace{< g(\gamma(t)), \gamma'(t) >}_{\frac{d}{dt}f(\gamma(t))} dt = \int_A^b < \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) > dt =$

$f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$

Intepretazione fisica

Siano

- p punto materiale di massa m
- $\gamma(t)$ legge oraria
- $g(\underline{x})$ campo di forze conservativo (stazionario)
- $f(\underline{x})$ potenziale di g
- $m\gamma''(t) = g(\gamma(t))$ equazione del moto
  Moltiplicando l'equazione del moto per $\gamma'(t)$ e integrando tra $t_1 < t_2$ si ottiene
  $\int_{t_1}^{t_2} m < \gamma'(t), \gamma''(t) > dt = \int_{t_1}^{t_2} \underbrace{< g(\gamma(t)), \gamma'(t) >}_{\frac{d}{dt}f(\gamma(t))} dt$, dove $g = \nabla f$
  e quindi
  $\frac{1}{2}m||\gamma'(t_1)||^2 - \frac{1}{2}m||\gamma'(t_2)||^2 = f(Y(t_2)) - f(\gamma(t_1))$, cioè
  $\underbrace{\underbrace{\frac{1}{2}m||\gamma'(t_2)||^2}_{\text{Energia cinetica}} - \underbrace{f(\gamma(t_2))}_{\text{Energia potenziale}}}_{\text{Energia meccanica}} = \frac{1}{2}m||\gamma'(t_1)||^2 - f(\gamma(t_1))$

Conclusione

Energia meccanica+Energia potenziale=Energia meccanica
Si conserva nel tempo (teorema di conservazione dell'energia)

Caratterizzazione dei campi conservativi

Curva regolare a tratti

Si dice che una curva $\gamma : I = [a, b] \to \mathbb{R}^n$ **continua** è regolare a trattise esiste una decomposizione $\delta \in \Delta(I)$, individuata dai nodi
$a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b$ t.c. $\gamma_{|_{[t_{i-1} - t_i]}}$ è una curva regolare per $i = 1, ..., n$
Sia $A \in \mathbb{R}^n$ aperto e connesso.
$\forall \underline{x}, \underline{y} \in A$ poniamo

$\Gamma(\underline{x},\underline{y})) = \{\gamma : [a,b] \to A | \gamma \text{ è una curva regolare a tratti e } \gamma(a) = \underline{x} \text{ e } \gamma(b) = \underline{y}\}$
$\Gamma(\underline{x},\underline{y}) \neq \emptyset$ poichè A è connesso

Caratterizzazione dei campi conservativi

Sia $g : A(\setminus\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$ un campo vettoriale continuo con A aperto connesso. Si ha che g è conservativo in A se e solo se
(c) $\forall \underline{x},\underline{y} \in A$ e per ogni $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma(\underline{x},\underline{y})$,
$\int_{\gamma_1} < g, \tau > ds = \int_{\gamma_2} < g, \tau > ds$

Dimostrazione (idea)

- g conservativo $\Rightarrow$ (c) (segue dal teorema di Torricelli)
- $int_{\gamma_1} < g, \tau > ds = f(\underline{y}) - f(\underline{x}) = \int_{\gamma_2} < g, \tau > ds$ con f è un potenziale di g in A
- (c) $\Rightarrow g$ conservativo
  Fissiamo $\underline{x}^0 \in A$ generico
  Poniamo $f(\underline{x}) \int_{\gamma} < g, \tau > ds$, dove $\gamma \in \Gamma(\underline{x}^0, \underline{x})$. Per (c) il valore $f(\underline{x})$**non** dipende da γ si verifica che f è differenziabile e $\nabla f = g$ in A.

Notazione

Per ogni $\underline{x},\underline{y} \in A$ e $\forall \gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma(\underline{x},\underline{y})$ indichiamo con $-\gamma_2$ la curva equivalente a γ_2 orientata in senso opposto e con γ la curva chiusa individuata da γ_1 e $-\gamma_2$

Osservazione

Si ha $\int_{\gamma_1} < g, \tau > ds = \int_{\gamma_2} < g, \tau > ds \Leftrightarrow 0 = \int_{\gamma_1} < g, \tau > ds - \int_{\gamma_2} < g, \tau > ds = \int_{\gamma_1} < g, \tau > ds + \int_{-\gamma_2} < g, \tau > ds = \int_{\gamma} < g, \tau > ds$
La condizione (c) è equivalente a (D) per ogni curva chiusa regolare a tratti, $\gamma : [a,b] \to A$,
$$\oint_{\gamma} < g, \tau > ds = 0$$
Circuitazione o circotazione di g su γ

Problema

trovare condizioni più agevoli da verificare di (c) o (D)

Operatori differenziali

Gradiente, rotore, divergenza
Sia $A \subseteq \mathbb{R}^3$ un aperto
L'operatore gradiente associa ad ogni campo scalare $f : A \to \mathbb{R}$ differenziabile. Il campo vettoriale $gradf = \nabla f : A(\subseteq \mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}^3$ con $\nabla f = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z})^T$, si ha $gradf :$
$\text{Campo scalare} \mapsto \text{Campo Vettoriale}$

L'operatore rotore associa a ogni campo vettoriale $g : A \to \mathbb{R}^3$ differenziabile, il campo vettoriale $rotg = \nabla \times g : A \to \mathbb{R}^3$, con

$$rotg = det \begin{pmatrix} \underline{e}_1 & \underline{e}_1 & \underline{e}_1 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial z}\right)\underline{e}_1 - \left(\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial z}\right)\underline{e}_2 +$$

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial y}\right)\underline{e}_3 = \left(\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial z}, \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial z}, \frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial y}\right)^T$$

Dove $g(x, y, z) = (X(z, y, z), Y(x, y, z), Z(x, y, z))^T$

L'operatore divergenza associa ad ogni campo vettoriale $g : A \to \mathbb{R}^3$ differenziabile. Il campo scalare $divg =< \nabla, g >: A \to \mathbb{R}$ con $divg = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}$

- Caso $N = 2$
  Sia $g : A(\subseteq \mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}^2$ un campo vettoriale differenziabile in A
  Si pone $\widetilde{g}(x, y, z) = (X(x, y), Y(x, y), 0)^T$, dove $g(x, y) = (X(x, y), Y(x, y))^T$ e si definiscono
  $rotg = rot\widetilde{g} = \left(\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial y}\underline{e}_3\right)$

Campi vettoriali irrotazionali

Si dice che $g : A(\subseteq \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$ ($N = 2$ o 3) differenziabile in A aperto è irrotazionale se $rotg(\underline{x}) = \underline{0}$ in A

Osservazione

- $N = 3$, $rotg = \left(\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial z}, \frac{\partial x}{\partial z} - \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial y}\right)^T = \underline{0} \Leftrightarrow Jg =$
  $\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial x} & \frac{\partial x}{\partial y} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial x} & \frac{\partial y}{\partial y} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{pmatrix}$ è simmetrica
  Un campo vettoriale è irrotazione se la matrice Jacobiana del campo è simmetrica

Teorema (condizione necessaria affinchè un campo vettoriale sia conservativo)

Se $g : A(\subseteq \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$ ($N = 2, 3$) è un campo vettoriale conservativo allora è irrotazionale (Jg è simmetrica)
Se g è conservativo e differenziabile, allora esiste un campo scalare f t.c. $\nabla f = g$, con f due volte differenziabile.
Per il teorema di Young si ha che $Hf = Jg$ è simmetrica ossita $rotg = \underline{0}$ in A

Problema

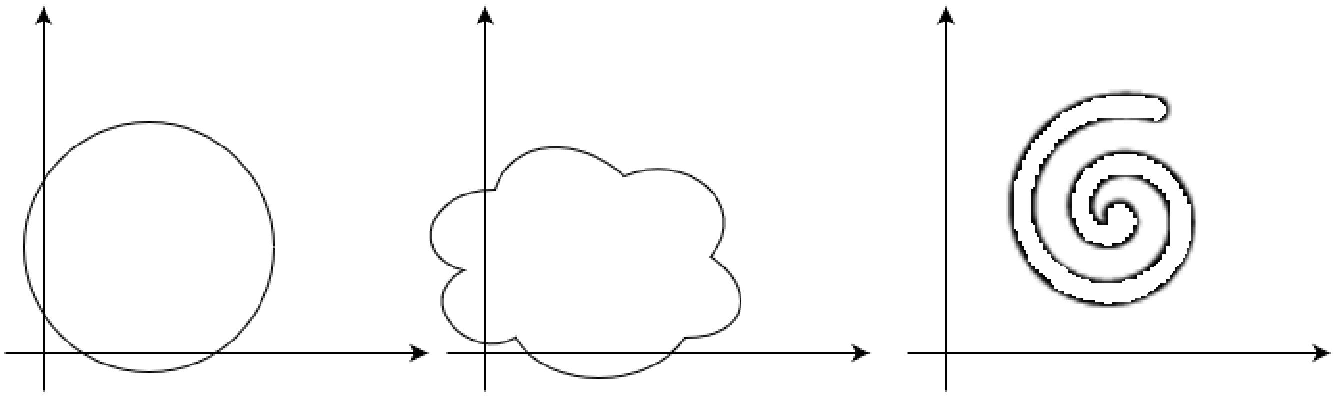
Un campo vettoriale è conservativo?
In generale, no

Insieme stellato

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto. Si dice che A è stellato se $\exists \underline{x}^0 \in A$ t.c. $\forall \underline{x} \in A$ (il segmento) $\sigma(t) = \underline{x}^0 + t(\underline{x} - \underline{x}^0) \in A$, $\forall t \in [0,1]$ cioè il segmento che congiunge $\underline{x}^0$ e $\underline{x}$ è interamente contenuto in A.

Osservazione

A convesso $\Rightarrow$ A stellato $\Rightarrow$ A connesso



Teorema di Poincarrè

Sia $g : A(\subseteq \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$ $(N = 2, 3)$ un campo vettoriale di classe C^1 e sia A aperto e stellato. Si ha che g è conservativo in $A \Leftrightarrow rotg = \underline{0}$ in A

Dimostrazione (Idea)

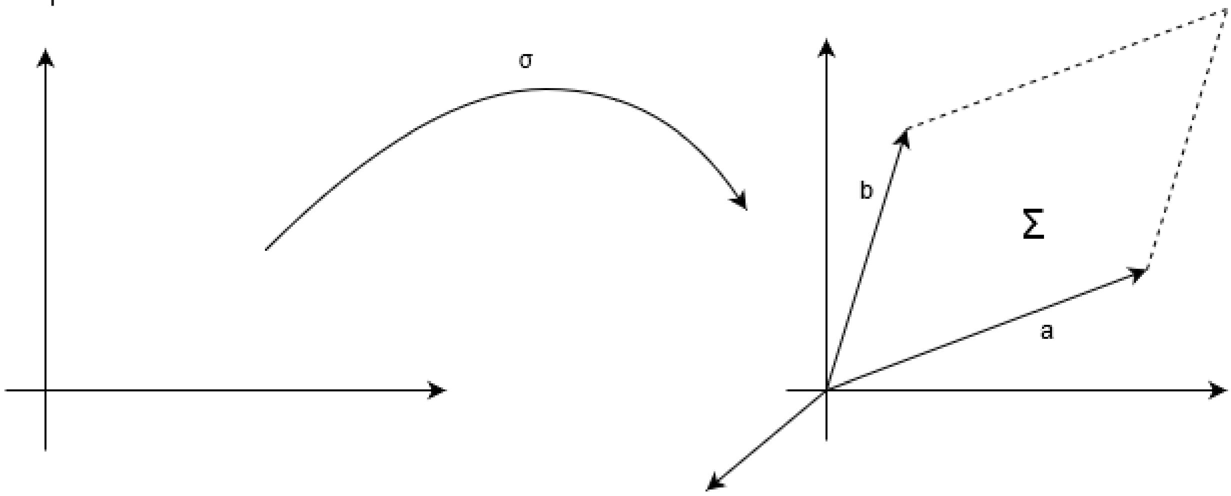
- g è conservativo $\Rightarrow rotg = \underline{0}$ in A
- $rotg = \underline{0} \Rightarrow g$ è conservativo in A
  Si definisce $F : A \to \mathbb{R}$, ponendo $\forall x \in A$
  $f(\underline{x}) = \int_\sigma < g, \tau > ds = \int_0^1 < g(\underline{x}^0 + t(\underline{x} - \underline{x}^0)), \underline{x} - \underline{x}^0 > dt$
  Dove $\sigma(t) = \underline{x}^0 + t(\underline{x} - \underline{x}^0)$ e $\underline{x}^0$ è un punto rispetto al quale A è stellato

Misure e integrazioni su superfici

Premessa

Siano $\underline{a}, \underline{b} \in \mathbb{R}^3$ linearmente indipendenti, cioè $\underline{a} \times \underline{b} \neq \underline{0}$
$\sigma : K = [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$
$\sigma(u, v) = \underline{a}u + \underline{b}v$.

$\sigma_u = \underline{a}, \sigma_v = \underline{b}, \sigma_u \times \sigma_v = \underline{a} \times \underline{b} \neq 0$
Superficie regolare semplice
Questa formula, valida per i parallelogrammi, si estende ad una generica superficie regolare semplice

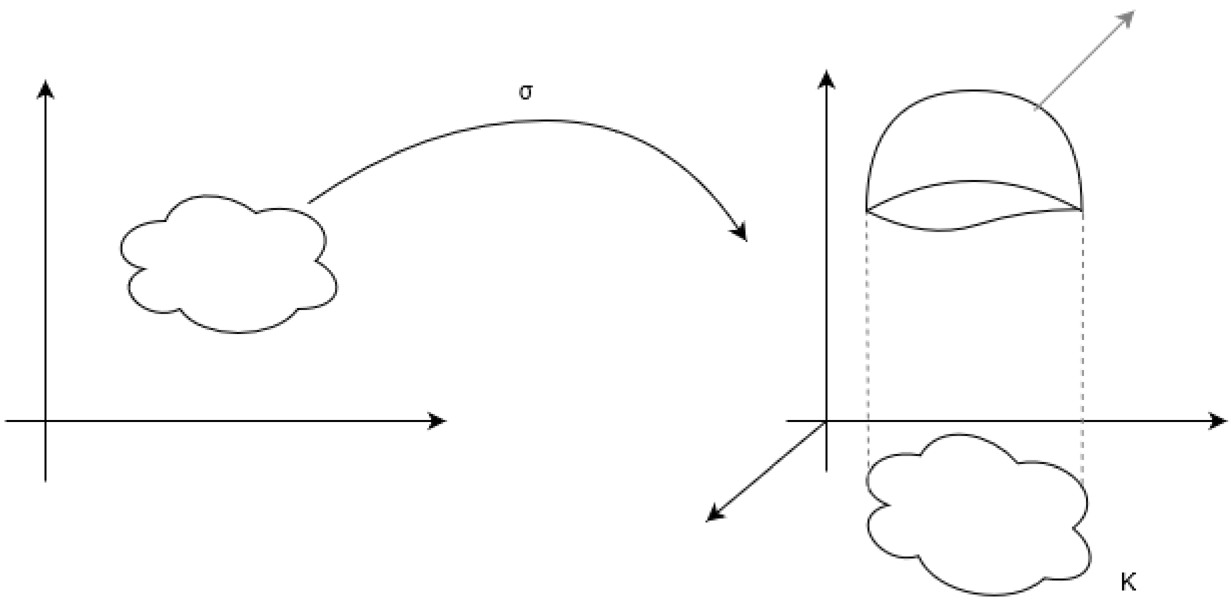


Area di una superficie

Sia $\sigma : K(\subseteq \mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}^3$ con $K = clA(= frA)$, A aperto misurabile in $\mathbb{R}^2$, una superficie regolare semplice
Si definisce $A(\Sigma) = \iint_K ||\sigma_u(u,v) \times \sigma_v(u,v)|| dudv$, con $\Sigma = \sigma(K)$

Superficie in forma cartesiana

Sia $f : K(\subseteq \mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}$ di classe C^1. La superficie in forma cartesiana $\sigma : K(\subseteq \mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}^3$, con $\sigma(u,v) = (u, v, f(u,v))^T$, è t.c. $\Sigma = \sigma(K) = G(f)$



Si ha $\sigma_u \times \sigma_v = det \begin{pmatrix} \underline{e}_1 & \underline{e}_2 & \underline{e}_3 \\ 1 & 0 & f_u \\ 0 & 1 & f_v \end{pmatrix} = (-f_u, -f_v, 1)^T$ e $||\sigma_v \times \sigma_u|| =$

$\sqrt{1+(f_u)^2+(f_v)^2} = \sqrt{1+||\nabla f||^2}$
$A(G(f)) = \iint_K \sqrt{1+||\nabla f||^2} dxdy$

Superfici cilindriche

Sia $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ una curva regolare semplice e siano $f, g : E(\subseteq \mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}$, con $sost(\gamma) \subseteq E$ e $f(x,y) < g(x,y)$ in E.
Sia $\Sigma = \{(x,y,z)^T : (x,y)^T \in sost(\gamma), f(x,y) \leq z \leq g(x,y)\}$
Σ è il sostegno della superficie regolare semplice $\sigma(u,v) = x(u), y(u), v)^T$, con $\sigma : K(\subseteq \mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}^3$ e $K = \{(u,v) : a \leq u \leq b, f(\gamma(u)) \leq v \leq g(\gamma(u))\}$ dove $(x(u), y(u))^T = \gamma(u)$. Si ha $\sigma_u \times \sigma_v = det \begin{pmatrix} \underline{e}_1 & \underline{e}_2 & \underline{e}_3 \\ x'(u) & y'(u) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (\underline{e}_1 \cdot y'(u) - \underline{e}_2 \cdot x'(u) + 0 \cdot \underline{e}_3) = (y'(u), -x'(u), 0)^T$
$||\sigma_u \times \sigma_v|| \to$ norma del vettore normale
$||\gamma'(u)|| \to$ norma del vettore tangente
$\gamma(u) = (x'(u), y'(u), 0)^T$
$\iint_K ||\sigma_u \times \sigma_v|| dudv = \iint_K ||\gamma'(u)|| dudv = \int_a^b (\int_{f(\gamma(u))}^{g(\gamma(u))} ||\gamma'(u)|| dv) du = \int_a^b (g(\gamma(u)) - f(\gamma(u))) \cdot ||\gamma'(u)|| du = \int_\gamma (g-f) ds$

Superfici di rotazione

Sia $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ una curva regolare semplice, con $\gamma(u) = (x(u), z(u))^T$. $x(u) > 0$ in $]a,b[$.
Facendo ruotare $sost(\gamma)$ intorno all'asse z si 2π si ottiene il sostegno Σ di una superficie regolare semplice $\sigma : K(\subseteq \mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}^3$, con $\sigma(u,v) = (x(u)cosv, x(u)sinv, z(u))^T$ e $K = [a,b] \times [0, 2\pi]$. Si ha $\sigma_u \times \sigma_v = det \begin{pmatrix} \underline{e}_1 & \underline{e}_2 & \underline{e}_3 \\ x'(u)cosv & x^(u)sinv & z' \\ -x(u)sinv & x(u)cosv & 0 \end{pmatrix} = (-x(u)z(u)cosv, -x(u)z'(u)sinv, x(u)x'(u))^T$
e $||\sigma_u \times \sigma_v|| = [(x(u)z'(u)cosv)^2 + (x(u)z'(u)sinv)^2 + (x(u)x'(u))^2]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\underbrace{(x(u)z(u))^2 + (x(u)x'(u))^2}_{|x(u)|\sqrt{x'(u)+z'(u)}}} = x(u) \cdot ||\gamma'(u)||$
Quindi $A(\Sigma) = \iint_K x(u)||\gamma'(u)|| dudv \overset{Fubini}{=} \int_a^b (\int_0^{2\pi} x(u)||\gamma'(u)|| dv) du = 2\pi \int_a^b x(u)||\gamma'(u)|| du = 2\pi \underbrace{\frac{\int_\gamma xds}{l(\gamma)}}_{baricentro} l(\gamma) = 2\pi x_B l(\gamma)$, II teorema di Pappo-Guldino

Integrale di superficie del campo scalare

Sia $\gamma : K(\subseteq \mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}^3$ con $K = clA$, A aperto misurabile una superficie regolare semplice
Sia $f : E(\subseteq \mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}$ un campo scalare continuo con $\Sigma = \sigma(K) \subseteq E$. Si definisce

integrale di superficie di f su E: $\iint_\Sigma f \cdot \sigma = \iint_K f(\gamma(u,v)) \cdot \sigma_u(u,v) \times \sigma_v(u,v)||dudv$

Osservazione

Se $f = 1$ allora $\iint_\Sigma 1d\sigma = \iint_K ||\sigma_u \times \sigma_v||dudv = A(\Sigma)$
Applichiamo il calcolo di massa, baricentro, momento d'inerzia di una lamina piana di densità di massa $\mu(x,y,z)$, appoggiata sul $sost\Sigma$ di una superficie regolare semplice
Sia $\gamma : K(\subseteq \mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}^3$ con $K = clA$, A aperto misurabile una superficie regolare semplice.
Sia $g : E(\subseteq \mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale continuo con $\Sigma \subseteq E$ si definisce integrale di superficie di g su Σ
$\iint_\Sigma < g, v > ds = \iint_K < g(\sigma(u,v)), \sigma_u(u,v) \times \sigma_v(u,v) > dudv$

Giustificazione della rotazione

$\iint_K < g(\sigma(u,v)), \sigma_u(u,v) \times \sigma_v(u,v) > dudv$
$\iint_K < g(\sigma(u,v)), \dfrac{\sigma_u(u,v) \times \sigma_v(u,v)}{||\sigma_u(u,v) \times \sigma_v(u,v)||} > \cdot||\sigma_u(u,v) \times \sigma_v(u,v)||dudv =$
$= \iint_K < g(\sigma(u,v)), \nu(u,v) > ||\sigma_u(u,v) \times \sigma_v(u,v)||dvdu = \iint_\Sigma < g, \nu > ds$, dove $\nu = \dfrac{\sigma_u \times \sigma_v}{||\sigma_u \times \sigma_v||}$

Intepretazione fisica

Sia g un campo di velocità di un fluido in movimento
$\iint_K < g, \nu > ds$ ha il significato di flusso attraverso Σ

Dominio generalmente regolare in $\mathbb{R}^2$

Un aperto limitato e connesso $D \subseteq \mathbb{R}^2$ si dice (generalmente) regolare se esiste una curva γ regolare $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}$ regolare (a tratti) semplice e chiusa t.c. $frD = sost(\gamma)$
γ orienta positivamente frD e in tal caso γ si indica con $+frD$, se al crescere di $t \in [a,b]$. Il punto $\gamma(t)$ percorre frD in verso antiorario
Si ha $\underbrace{\tau(t)}_{\text{Vettore tangente}} = \underbrace{\dfrac{(x'(t), y'(t))^T}{||\gamma'(t)||}}_{\text{versore tangente}}$, dove $\gamma = (x(t), y(t))^T$
$\nu(t) = \dfrac{(y'(t) - x'(t))^T}{||\gamma'(t)||}$, versore normale esterno

Osservazione

frD misurabile $\Rightarrow$ D misurabile, sia $\sigma : B(\subseteq \mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}^3$, B aperto, t.c.

1. σ è di classe C^1 in B
2. $\sigma_u \times \sigma_v \neq \underline{0}$ in B

3. σ è iniettiva
   Sia D un dominio generalmente regolare $(D \subseteq B)$, t.c. $clD \subseteq B \Rightarrow \sigma_{|_{clD}}$ è una superficie regolare semplice
   Sia $\gamma : [a, b] \to B$ regolare a tratti semplice e chiusa che orienta positivamente frD, cioè $\gamma = +frD$
   Indichiamo con $+\partial\Sigma$ regolare a tratti $\sigma \circ \gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ si dice **bordo diΣ**

Teorema di Stokes (del rotore)

Se $g : A(\subseteq \mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}^3$ è un campo vettoriale di classe C^1 con $\Sigma \subset A$, allora

$$\underbrace{\iint_{\Sigma} < rotg, \nu > d\sigma}_{\text{Flusso del rotore}} = \underbrace{\int_{+\partial\Sigma} < g, \tau > ds}_{\text{Circolazione del campo}}$$

Caso particolare

Se $\sigma(u, v) = (u, v, 0)^T$, si ha che $\Sigma = clD$ e quindi $\iint_{clD} < rotg, \underbrace{\underline{e}_3}_{\text{Normale a } clD} > d\sigma \iint (Y_x - X_y) dxdy \overset{\text{Stokes}}{=} \int_{+frD} < g, \tau > ds$

Dominio regolare nello spazio $\mathbb{R}^3$

Sia $D \subseteq \mathbb{R}^3$ un aperto limitato e connesso. Si dice che D è un dominio regolare in $\mathbb{R}^3$ se esiste $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ di classe C^1 t.c. $D = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 : \varphi(\underline{x}) = 0\}$. $frD = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3, \varphi(\underline{x}) = 0\} = L_0(\varphi)$ e $\nabla\varphi \neq \underline{0}$ su frD. (cioè frD è una superficie regolare in forma implicita).
Il versore $\nu(\underline{x}) = \dfrac{\nabla\varphi(\underline{x})}{||\nabla\varphi(\underline{x})||}$ si dice versore normale esterno a D nel punto $\underline{x} \in frD$

Teorema della divergenza (di Gauss)

Se $g : A(\subseteq \mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}^2$, di classe C^1 e D è un dominio regolare in $\mathbb{R}^3$ con $clD \subseteq A$, allora $\iiint_D divg(x, y, z) dxdydz = \iint_{frD} < g, \nu > d\sigma$

Osservazione

frD è trascurabile $\Rightarrow D$ è misurabile

Significato del rotore e della divergenza in $\mathbb{R}^2$

Sia $g : A(\subseteq \mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}^2$ un campo vettoriale di classe $C^1 A$ aperto, che interpretiamo come un campo di velocità
Per ogni $\varepsilon > 0$ sono
$D_\varepsilon = \{(x, y)^T : (x - x^0) + (y - y^0) < \varepsilon^2\}$

$C_\varepsilon = frD_\varepsilon$ e $\gamma_\varepsilon = (x^0 + \varepsilon cost, y^0 + \varepsilon sint)^T$, $T \in [0, 2\pi]$

Si ha $\gamma_\varepsilon = +frD_\varepsilon$

Scomponiamo g lungo τ e ν:

$g =< g, \tau > \tau + < g, \nu > \nu$

Rotore, per il teorema di Stokes si ha:

$\iint_{D_\varepsilon} < rotg, \underline{e}_3 > dxdy = \int_{+frD_\varepsilon} < g, \tau > ds$.

Per il teorema della media integrale si ha:

$2\pi\cancel{\varepsilon^2} < rotg, x^\varepsilon, y^\varepsilon, \underline{e}_3 >= \dfrac{1}{\varepsilon^2} \displaystyle\int_{+frD_\varepsilon} < g, \tau > ds$

Se $e \to 0^+$: $2\pi < rotg(x^0, y^0), \underline{e}_3 >= lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{+frD_\varepsilon} < g, \tau > ds$

Identificando D_ε con una rotellina centrata in $(\underline{x}^0, \underline{y}^0)^T$ di raggio $\varepsilon > 0$, si ha per ε sufficientemente piccolo, $< rotg(x^0, y^0), \underline{e}_3 >> 0 \Rightarrow \int_{+frD_\varepsilon} < g, \tau > ds > 0 \Rightarrow$ la rotellina ruota in senso antiorario attorno a $(x^0, y^0)^T$

$< rotg(x^0, y^0), \underline{e}_3 >< 0 \Rightarrow \int_{+frD_\varepsilon} < g, \tau > ds < 0 \Rightarrow$ la rotellina ruota in senso orario attorno a $(x^0, y^0)^T$