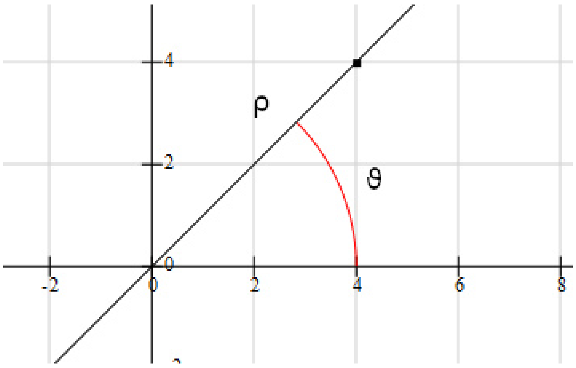
Analisi II - quinta parte

Coordinate polari



$$\begin{cases} x = \rho cos\vartheta \\ y = \rho sin\vartheta \end{cases}$$

- $(x, y)^T$ coordinate cartesiane
- $(\rho, \vartheta)^T$ coordinate polari, $\rho = ||(x, y)^T|| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Curve in $\mathbb{R}^n$ ($n = 2, 3$)

Curve in forma parametrica

Sia $\gamma : I(\subseteq \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^n$, con I intervallo. La coppia $(\gamma, \underbrace{\gamma(I)}_{=\Gamma})$ si dice curva in forma parametrica di cui γ è la rappresentazione parametrica e $\Gamma = \gamma(I)$ è il sostegno

- $N = 2$, $\gamma(t) = (x(t), y(t))^T, t \in \mathbb{R}$
  oppure $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, t \in I$
- $N = 3$, $\gamma(t) = (x(t), y = y(t), z(t))^T, t \in \mathbb{R}$
  oppure $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}, t \in I$

Curva in forma parametrica chiusa

Si dice che γ è una curva in forma parametrica **chiusa** se $I = [a, b]$ e $\gamma(a) = \gamma(b)$

Curva in forma parametrica semplice

Si dice che γ è una curva in forma parametrica **semplice** se $\forall t_1, t_2$, con $t_1 \neq t_2$ e almeno uno fra t_1 e t_2 interno ad I, si ha che $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$

NB

È permesso che $\gamma(a) = \gamma(b)$, se $I = [a, b]$

Curva in forma parametrica regolare

Si dice che γ è una curva in forma parametrica **regolare** se $\gamma \in C^1(I)$ e $\gamma'(t) \neq \underline{0}$, $\forall t \in intI$.
Si dice che $\gamma'(t), t \in intI$ è il vettore tangente e si pone $\tau(t) = \dfrac{\gamma'(t)}{||\gamma'(t)||}$, τ versore tangente

Retta tangente a una curva regolare semplice in forma parametrica

Sia γ una curva in forma parametrica regolare semplice e sia $t_0 \in intI$.
La retta in forma parametrica $r(s) = \gamma(t_o) + \gamma'(t_o)s$, con $s \in \mathbb{R}$, si dice retta tangente nel punto $\gamma(t_o)$

Curve in $\mathbb{R}^2$

Curve regolari in forma cartesiana in $\mathbb{R}^2$

Sia $f : I(\subseteq \mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}, I$ intervallo, di classe C^1, la curva in forma parametrica $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$, con $\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix}$ si dice curva **regolare** in forma cartesiana. Si ha: $\gamma'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ f'(t) \end{pmatrix} \neq \underline{0}$, in I e il $sost(\gamma) = \gamma(I)$.

Curve regolari in forma polare in $\mathbb{R}^2$

Sia $\rho : I(\subseteq \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, con I intervallo, di classe C^1 e t.c. $\rho(\vartheta) \geq 0$ in I e $\rho(\vartheta) + \rho'(\vartheta) > 0$ in $intI$.
La curva $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$, con $\gamma(\vartheta) = \begin{pmatrix} \rho(\vartheta)cos\vartheta \\ \rho(\vartheta)sin\vartheta \end{pmatrix}$, si dice curva **regolare** in forma polare.
Si ha $\gamma'(\vartheta) = (\rho(\vartheta)^2 - \rho(\vartheta)sin\vartheta, \rho'(\vartheta)sin\vartheta - \rho'(\vartheta)cos\vartheta)^T$ e quindi $||\gamma'(\vartheta)||^2 = (\rho(\vartheta)cos^2\vartheta - \rho(\vartheta)^2 sin^2\vartheta - \cancel{2\rho(\vartheta)cos\vartheta sin\vartheta} + \rho(\vartheta)^2 sin^2\vartheta + \rho'(\vartheta)cos^2\vartheta + \cancel{2\rho'(\vartheta)^2 cos\vartheta sin\vartheta}) = \rho(\vartheta)^2 + \rho'(\vartheta) > 0$

Curve in $\mathbb{R}^2$ definite da equazioni

Si considera una funzione $\varphi : A(\subseteq \mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}$ e il suo insieme di livello zero, $L_0(\varphi) = \{(x,y)^T \in A : \varphi(x,y) = 0\}$.
Se $\nabla\varphi = 0$, $L_0(\varphi)$ non è unidimensionale, infatti dove $\nabla\varphi = 0$ può essere che non ci sia tangente o che ci sia $L_0(\varphi)$ bidimensionale.
Se $\nabla\varphi \neq 0$ si può parlare di curve definite da equazioni

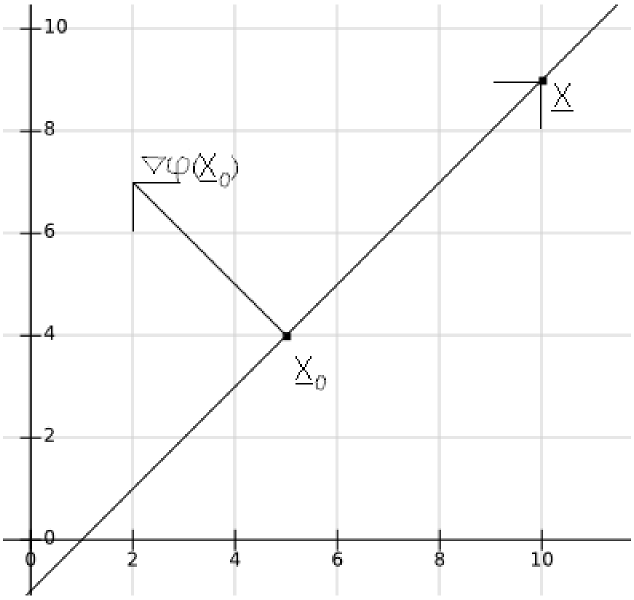
Punti regolari e punti singoli

Sia $\varphi : A(\subseteq \mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}$, A aperto, di classe C^1 in A. Un punto $\underline{x}^0 = (x_0, y_0)^T \in L_0(\varphi)$ si dice **regolare** se $\nabla\varphi(\underline{x}^0) \neq \underline{0}$, **singolare** altrimenti.

Teorema di parametrizzazione locale (o della funzione implicita o di Dimi)

Se $\varphi : A(\subseteq \mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}$, A aperto, di classe C^1 e $\underline{x}^0 = (x_0, y_0)^T$ è un punto regolare, $\nabla\varphi(\underline{x}^0) \neq \underline{0}$, con $\varphi(\underline{x}^0) = 0$, allora esiste un intorno U di x_0, un intorno V di y_0, $g : U \to V$ e $h : V \to U$, $g, h \in C^1$ t.c. $L_0(\varphi) \cap (U \times V) = \begin{cases} G(g) \\ G(h) \end{cases}$ *=(), a seconda di cosa posso definire. In base a cosa decido? In base a quale derivata parziale è $\neq 0$. Se lo sono entrambe cerco la funzione inversa di y*
()= $\begin{cases} G(g) \text{ se } \varphi_g(x_0, y_0) \neq 0 \\ G(h) \text{ se } \varphi_h(x_0, y_0) \neq 0 \end{cases}$. Inoltre si ha:
$g'(x) = -\frac{\varphi_x(x, g(x))}{\varphi_y(x, h(x))}$, $\forall x \in U$, $\varphi_y(x^0, y^0) \neq 0$ oppure $h'(y) = -\frac{\varphi_y(h(y), y)}{\varphi_x(g(y), y)}$, $\forall y \in V$, $\varphi_x(x^0, y^0) \neq 0$.
In particolare, la retta tangente a $L_0(\varphi)$ in $(x^0, y^0)^T$ ha equazione $y = g(x^0) + g'(x^0)(x - x^0) \Leftrightarrow y - y^0 = -\frac{\varphi_x(x^0, y^0)}{\varphi_y(x^0, y^0)}(x - x^0)$ (1), se $\varphi_y(x^0, y^0) \neq 0$ oppure $x = h(y^0) + h'(y^0)(y - y^0) \Leftrightarrow x - x^0 = -\frac{\varphi_y(x^0, y^0)}{\varphi_x(x^0, y^0)}(y - y^0)$ (1), se $\varphi_x(x^0, y^0) \neq 0$.
(1)(2) e quindi $\Leftrightarrow \varphi_x(x^0, y^0)(x - x^0) + \varphi_y(x^0, y^0)(y - y^0) = 0. < \nabla\varphi(\underline{x}^0), \underline{x} - \underline{x}^0 >= 0$, allo stesso modo trovo

lo stesso prodotto scalare per $\varphi_x(x^0, y^0) = 0$, cioè $\nabla\varphi(\underline{x}^0)$ è $\perp(\underline{x} - \underline{x}^0)$



Conseguenze

Sotto le ipotesi del sopracitato teorema si ha $\nabla\varphi(\underline{x}^0)$ è ortogonale alla retta tangente a $L_0(\varphi)$ nel punto $\underline{x}^0$ e quindi a $L_0(\varphi)$ nel punto 0

Osservazione

$\lambda(\varphi) \cap (v \times V) = G(g) \Rightarrow \varphi(x, g(x)) = 0$ in U. Si ha che la funzione $y = g(x)$ è definita in modo implicito dall'equazione $\varphi(x, y) = 0$ e della condizione $g(x^0) = y^0$.

Definizione

Sia $\varphi : A(\subseteq \mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}$, A aperto, di classe C^1, tale che $L_0(\varphi) = \{(x, y) \in A | \varphi(x, y) = 0\} \neq \emptyset$ e $\nabla\varphi(x, y) \neq 0$ per ogni $(x, y)^T \in L_0(\varphi)$. La coppia $(\varphi, L_0(\varphi))$ si dice curva regolare in forma **implicita** di $\varphi(x, y) = 0$. $\varphi(x, y) = 0$ è l'equazione e $L_0(\varphi)$ è il sostegno.

Definizione

Siano $A(\subseteq \mathbb{R}^2)$ aperto connesso e $\sigma = K = clA(\subseteq \mathbb{R}^2)$, con $\sigma(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))^T$. Supponiamo allora che:

1. σ è di classe C^1 in $intK$
2. $\forall \underline{u} = (u, v)^T \in intK$, $\sigma_u(x_u(u, v), y_u(u, v), z_u(u, v))^T$ e $\sigma_v(u, v) = (x_v(u, v), y_v(u, v), z_v(u, v))^T$ sono linearmente indipendenti. Ossia $\sigma_u(u, v) \times \sigma_v(u, v) \neq 0$
3. $\forall u_1, u_2 \in K$, con $u_1 \neq u_2$ e $u_1 \in intK$ e $u_2 \in intK$, allora si ha $\sigma(u_1) \neq \sigma(u_2)$. La coppia formata da $(\sigma, \sigma(k))$ si dice **superficie** regolare sempline in forma parametrica, di cui σ è la parametrizzazione e $\Sigma = \sigma(\kappa)$ è il **sostegno**.

Definizione

Sia $\sigma : K(\subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ una superficie regolare semplice in forma parametrica. Fisso un $\underline{u}^0 = (u^0, v^0)^T \in intK$ e sia il punto $\underline{x}^0 = \sigma(\underline{u}) \in \Sigma$. Le curve $\sigma(\cdot, v^0) :]u^0 - \delta, u^0 + \delta[\to \mathbb{R}^2$ e $\sigma(u^0, \cdot) :]v^0 - \delta, v^0 + \delta[\to \mathbb{R}^2$ sono regolari semplici e si dicono **linee coordinate** passanti per $\underline{x}^0$

Definizione

Il vettore $\sigma_u(u^0, v^0)$ è il vettore tangente alla linea coordinata da u in $\underline{x}^0$ e il vettore $\sigma_v(u^0, v^0)$ è il vettore tangente alla linea coordinata v in $\underline{x}^0$. Il vettore $\sigma_v(u^0, v^0) \times \sigma_u(u^0, v^0)$ si dice vettore **normale** a Σ in $\underline{x}^0$ e invece il versore dato da $\nu(u^0,v^0) = \dfrac{\sigma_v(u^0,v^0)\times\sigma_u(u^0,v^0)}{||\sigma_v(u^0,v^0)\times\sigma_u(u^0,v^0)||}$ è il **vettore normale** a Σ in $\underline{x}^0$

Definizione

Il piano generato da $\sigma_u(u^0,v^0)$ e $\sigma_v(u^0,v^0)$ passante per $\underline{x}^0$ si dice piano tangente a Σ in $\underline{x}^0$, ed è rappresentato da:

1. $\underline{x} = \lambda\sigma_u(u^0,v^0) + \mu\sigma_v(u^0,v^0) + \underline{x}^0$, $\forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$ $\rightarrow$rappresentazione **parametrica**
2. $< \sigma_u(u^0,v^0)\times\sigma_v(u^0,v^0), \underline{x}-\underline{x}^0 >= 0 \rightarrow$ rappresentazione implicita.

Definizione

Sia $f: K = clA(\subseteq\mathbb{R}^2)\rightarrow\mathbb{R}$, con A aperto e connesso, di classe C^1 in $intK$. La superficie in forma parametrica $\sigma(u,v)$, dato che $\sigma(u,v) = (u,v,f(u,v))^T$, con $(u,v)\in K$, è una superfice regolare semplice, dove $\Sigma = \sigma(K) = G(f)$ e inoltre vale: $\sigma_u\times\sigma_v = \begin{pmatrix}1\\0\\f_u\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\1\\f_v\end{pmatrix} = det\begin{pmatrix}e_1\ e_2\ e_3\\ 1\ 0\ f_u\\ 0\ 1\ f_v\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-f_u\\-f_v\\1\end{pmatrix}$

Definizione

Sia $\varphi: A(\subseteq\mathbb{R}^2)\rightarrow\mathbb{R}$, A aperto, di classe C^1. supponiamo che $\Sigma = L_0(\varphi) = \{(x,y,z)^T = 0\}\neq\emptyset$ e per ogni $(x,y,z)^T\in L_0(\varphi)$ sia $\nabla\varphi(x,y,z)\neq 0$. La coppia $(\varphi, L_0(\varphi))$ si dice superficie regolare in forma **implicita** di cui $\varphi(x,y,z)=0$ è l'equazione e $\Sigma = L_0(\varphi)$ è il sostegno. Il piano tangente a Σ in $\underline{x}^0$ è rappresentato dall'equazione $< \nabla\varphi(\underline{x}^0), \underline{x}-\underline{x}^0 >= 0$.

Definizione, Curve regolari in forma implicita in $\mathbb{R}^3$

Siano $\varphi,\psi: A(\subseteq\mathbb{R}^3)\rightarrow\mathbb{R}$, con A aperto e di classe C^1, tali che $\Gamma = L_0(\varphi)\cap L_0(\psi) = \{(x,y,z)^T\ |\varphi(x,y,z)=0, \psi(x,y,z)=0\}\neq\emptyset$ e $\nabla\varphi(x,y,z)\times\nabla\psi(x,y,z)\neq 0$, per ogni $(x,y,z)^T\in L_0(\varphi)\cap L_0(\psi)=\Gamma$. La coppia $((\varphi,\psi), L_0(\varphi)\cap L_0(\psi))$ si dice curva regolare in forma implicita in $\mathbb{R}^3$ di cui $\begin{cases}\varphi(x,y,z)=0\\ \psi(x,y,z)=0\end{cases}$ sono le equazioni e $\Gamma = L_0(\varphi)\cap L_0(\psi)$ è il sostegno. Il vettore $\nabla\varphi(\underline{x}^0)\times\psi(\underline{x}^0)$ è il vettore tangente a Γ in $\underline{x}^0$, e la retta $\underline{x} = \underline{x}^0 + t(\nabla\varphi(\underline{x}^0)\times\psi(\underline{x}^0))$, $t\in\mathbb{R}$ è la retta tangente a Γ in $\underline{x}^0$, questa è la forma parametrica.

Considero un altro modo per scriverlo: $\begin{cases}< \varphi(\underline{x}^0), \underline{x}-\underline{x}^0 >= 0 \text{ (piano tangente a } L_0(\varphi))\\ < \psi(\underline{x}^0), \underline{x}-\underline{x}^0 >= 0 \text{ (piano tangente a } L_0(\varphi))\end{cases}$

Lo studio deli estremi di $f: E(\subseteq\mathbb{R}^n)\rightarrow\mathbb{R}$, A aperto, di classe C^1

Si articola

- nello studio degli estremi in $intE$, studio degli estremi liberi
- nello studio degli estremi in frE, studio degli estremi vincolati

Estremi vincolati

Vincolo

Se $f: E(\subseteq\mathbb{R}^n)\rightarrow\mathbb{R}$. Un insieme $\emptyset\neq \underline{0}V \underset{\neq}{\subset} E$ si dice vincolo per f

Punti di estremo vincolato

Siano $f: E(\subseteq\mathbb{R}^n)\rightarrow\mathbb{R}$ e V un vincolo per f. Si dice che $\underline{x}^0\in V$ è un punto di estremo vincolato per f se V se $\underline{x}^0$ è t.c. $f(\underline{x}) > f(\underline{x}^0)$, $\forall x\in U\cap$

V, $\underline{x} \neq \underline{x}^0$ (minimo vincolato) oppure $f(\underline{x}) < f(\underline{x}^0)$, $\forall x \in U \cap V$, $\underline{x} \neq \underline{x}^0$ (massimo vincolato)

Consideriamo

$N = 2$, $V = \Gamma$, curva $\begin{cases} \text{Curva regolare in forma parametrica in } \mathbb{R}^2 (\text{T5}) \\ \text{curva regolare in forma implicita in } \mathbb{R}^2 (\text{T5}) \end{cases}$, V può anche essere solo un punto,
$N = 3$, $V =$

$$\begin{cases} \text{curva,}\Gamma \begin{cases} \text{curva regolare in forma parametrica (T1)} \\ \text{curva regolare in forma implicita (T5)} \end{cases}, V \text{ può anche essere intervalli o altri tipi di insieme} \\ \text{superficie,}\Sigma \begin{cases} \text{superficie regolare in forma parametrica (T2)} \\ \text{superficie regolare in forma implicita (T4)} \end{cases} \text{ in } \mathbb{R}^3 \end{cases}$$

Teorema (T3) ($N = 2$ o $N = 3$, $V = \Gamma$, curva in forma parametrica)

Sia $f : A(\subseteq \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$, A aperto, di classe C^1. Sia $\gamma : \iota \to A$ una curva regolare, I intervallo. e $\underline{x}^0 = \gamma(t^0)$, con $t^0 \in intI$ è un punto di estremo vincolato per f su $\Gamma = \gamma(I)$, allora $< \nabla f(\underline{x}^0), \gamma'(t^0) >= 0$

Osservazione

Se $\nabla f(\underline{x}^0) \neq \underline{0}$, allora $\nabla f(\underline{x}^0)$ è $\perp$ a $L_f(\underline{x}^0)(f)$ e a Γ in $\underline{x}^0$ e quindi $L_f(\underline{x}^0)(f)$ e Γ sono tangenti in $\underline{x}^0$

Dimostrazione

Studiare $f_{|\Gamma}$ equivale a studiare la funzione $\psi : I \to \mathbb{R}$, con $\psi(t) = f(\gamma(t))$. Poichè $f_{|\gamma}$ ha un punto di estremo in $\underline{x}^0$, ψ ha un punto di estremo in t^0 con $\gamma(t^0) = \underline{x}^0$, $t^0 \in intI$. Essendo f e γ di classe C^1, ψ è di classe C^1. Quindi per il teorema di Fermat $0 = \psi'(t^0) =< \nabla f(\gamma(t^0)), \gamma'(t^0) >=< \nabla f(\underline{x}^0), \gamma'(t^0) >$.

Teorema (T2) ($N = 3$, $V = \Sigma$, superficie regolare in forma parametrica)

Sia $f : A(\subseteq \mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}$, A aperto, di classe C^1 e sia $\sigma : k \to A$ una superficie regolare semplice. Se $\underline{x}^0 = \sigma(\mu^0)$, con $u^0 \in intK$, è un punto di etremo per f su $\Sigma = \sigma(K)$, allora
(-- MANCA TESI --)

Osservazione

Se $\nabla f(\underline{x}^0) \neq 0$, allora $\nabla f(\underline{x}^0) \perp \sigma_u(\underline{u}^0)$ o $\nabla f(\underline{x}^0) \perp \sigma_v(\underline{u}^0)$ e quindi $\nabla f(\underline{x}^0)$ è $\perp$ al piano tangente Σ in $\underline{x}^0$, cioè $\nabla f(\underline{x}^0) \perp \Sigma$.
Poichè $\nabla f(\underline{x}^0) \perp L_{f(\underline{x}^0)}(f)$, si conclude che Σ e $L_{f(\underline{x}^0)}(f)$ sono tangenti in $\underline{x}^0$

Problema

Es. estremi di $f(x, y) = x + y$, su $x^4 + y^4 - 4xy = 1 \to$ curva regolare in forma implicita

Teorema (T3), ($N = 2$, $V = \Gamma$, curva regolare in forma implicita o dei moltiplicatori di Lagrange)

Siano $\underset{\varphi}{f} : E(\subseteq \mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}$, aperto, di classe C^1. Se $\underline{x}^0 \in \Gamma = L_0(\varphi) = \{(x, y)^T = \varphi(x, y) = 0\}$ è un punto di estremo vincolato di f su Γ e $\nabla\varphi(\underline{x}^0) \neq \underline{0}$, allora esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ t.c. $\nabla f(\underline{x}^0) = \lambda \nabla \varphi(\underline{x}^0)$

Dimostrazione

Poichè $\nabla\varphi(\underline{x}^0) \neq \underline{0}$ il teorema di parametrizzazione locale (Dini) garantisce che $\exists$ un intorno W di $\underline{x}^0$ e $\exists$ una curva regolare in forma parametrica $\gamma : I \in \mathbb{R}^2$ t.c. $\gamma(I) = \Gamma = L_0(\varphi) \cap W$. ($\Rightarrow$ localmente il vincolo è una curva parametrica $\Rightarrow$ applico (T1)).
Per (T1) si ha $< f(\underline{x}^0), \gamma'(t^0) >= 0$, dove $\underline{x}^0 = \gamma(t^0)$ e $t^o \in intI$. D'altra parte $\nabla\varphi(\underline{x}^0) \perp \gamma'(t^0)$, $<$

$\nabla\varphi(\underline{x}^0), \gamma'(t^0) >= 0$ e quindi $\nabla f(\underline{x}^0)$ e $\nabla\varphi(\underline{x}^0)$ sono paralleli, cioè esistono $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ t.c. $\alpha\nabla f(\underline{x}^0) + \beta\nabla\varphi(\underline{x}^0) = \underline{0}$, con α, β non entrambi nulli. Poichè $\alpha = 0$ implicherebbe $\nabla\varphi(\underline{x}^0) = 0$ dev'essere $\alpha \neq 0$. Posto $\lambda = -\frac{\beta}{\alpha}$, si conclude che $\nabla f(\underline{x}^0) = \lambda \cdot \nabla\varphi(\underline{x}^0)$

Teorema dei moltiplicatori di Lagrange ($N = 2$, $V = \Gamma$, curve in forma implicita)

Siano $f, \varphi : a(\subseteq \mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}$, A aperto, di classe C^1 e sia $\Gamma = L_0(\gamma) = \{(x, y)^T \in A : \varphi(x, y) = 0\}$.
Se $\underline{x}^0 = (x^0, y^0) \in \Gamma$ è un punto di estremo vincolato per f su Γ e $\nabla\varphi(\underline{x}^0) \neq \underline{0}$ allora esiste $x \in \mathbb{R}$ t.c. $\nabla f(\underline{x}^0) = \lambda \cdot \nabla\varphi(\underline{x}^0)$

Osservazione: uso del teorema dei moltiplicatori di Lagrange

1. Se Γ è una curva regolare in forma implicita, cioè $\nabla\varphi \neq 0, \forall \underline{x} \in \Gamma$ allora i punti di estremo vincolato di f su Γ si ricercano tra le soluzioni $\underline{x} = (x, y)^T$ di
   (L) $\begin{cases} f_x(x, y) = \lambda\varphi_x(x, y) \\ f_y(x, y) = \lambda\varphi_y(x, y) \end{cases}$
   $\varphi(x, y) = 0$. (tre incognite x, y, λ anche se λ è di relativa impotanza)
2. Se Γ non è una curva regolare in forma implicita, cioè esistono punti singolari, allora i punti di estremo vincolato di f su Γ vanno ricercati tra le soluzioni di (L), ma anche tra le soluzioni di
   $\begin{cases} \varphi_x(x, y) = 0 \\ \varphi_y(x, y) = 0 \\ \varphi(x, y) = 0 \end{cases}$

Teorema dei moltiplicatori di Lagrange ($N = 3$, $V = \Sigma$ superficie in forma implicita)

Siano $f, \varphi : A(\subseteq \mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}$, A aperto, di classe C^1 e sia $\Sigma = \{(x, y, z)^T \in A : \varphi(x, y, z) = 0\} = L_0(\varphi)$.
Se $\underline{x}^0 = (x^0, y^0, z^0)^T \in \Sigma$ è punto di estremo vincolato per f su Σ e $\nabla\varphi(\underline{x}^0) \neq \underline{0}$, allora esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ t.c. $\nabla f(\underline{x}^0) = \lambda\nabla\varphi(\underline{x}^0)$

Osservazione: uso del teorema dei moltiplicatori di Lagrange

I punti di estremo vincolato per f su Σ vanno ricercati tra le soluzioni di:

- punti regolari $\begin{cases} \nabla f(\underline{x}) = \lambda \cdot \nabla\varphi(\underline{x}) \\ \varphi(\underline{x}) = 0 \end{cases}$
- punti singolari $\begin{cases} \nabla\varphi(\underline{x}) = \underline{0} \\ \varphi(\underline{x}) = 0 \end{cases}$

Teorema ($N = 3$, $V = \Sigma$ curva in forma implicita)

Siano $f, F, \psi : A(\subseteq \mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}$, A aperto, di classe C^1. Sia $\Gamma = L_0(\varphi) \cap L_0(\psi)$, ossia in forma esplicita $\Gamma = L_0(\varphi) \cap L_0(\psi) = \{(x, y, z)^T : \varphi(x, y, z) = \psi(x, y, z) = 0\}$. Se $\underline{x}^0 = (x^0, y^0, z^0)^T \in \Gamma$ è un estremo vincolato per f su Γ e $\nabla\varphi(\underline{x}^0) \times \nabla\psi(\underline{x}^0) \neq \underline{0}$, allora esistono $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, detti **moltiplicatori di Lagrange**, tali che $\nabla f(\underline{x}^0) = \lambda\nabla\varphi(\underline{x}^0) + \mu\nabla\psi(\underline{x}^0)$.

Osservazione

Se Γ:

1. è una curva regolare in forma implicita, cioè $\nabla\varphi \times \nabla\psi \neq \underline{0}$ in Γ, allora i punti di estremo vincolato per f su Γ vanno cercati tra:

$$(\mathrm{S}_1)\begin{cases} f_x(x,y,z)=\lambda\nabla\varphi_x(x,y,z)+\mu\nabla\psi_x(x,y,z) \\ f_y(x,y,z)=\lambda\nabla\varphi_y(x,y,z)+\mu\nabla\psi_y(x,y,z) \\ f_z(x,y,z)=\lambda\nabla\varphi_z(x,y,z)+\mu\nabla\psi_z(x,y,z) \\ \varphi(x,y,z)=0 \\ \psi(x,y,z)=0 \end{cases}$$

2. Se Γ non è una curva regolare in forma implicita, cioè ci sono punti singolari, i punti di estremo vincolato vanno cercati tra le soluzioni di (S_1) e di

$$\begin{cases} \nabla\varphi(x,y,z)\times\nabla\psi(x,y,z)=\underline{0} \\ \varphi(x,y,z)=0 \\ \psi(x,y,z)=0 \end{cases}$$ si hanno cinque equazioni in tre incognite