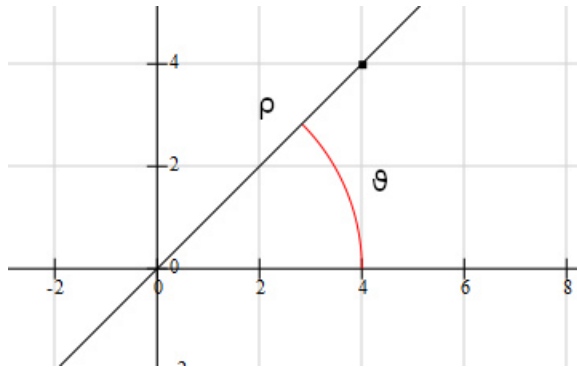


Analisi II - quinta parte

Coordinate polari



$$\begin{cases} x = \rho \cos \vartheta \\ y = \rho \sin \vartheta \end{cases}$$

- $(x, y)^T$ coordinate cartesiane
- $(\rho, \vartheta)^T$ coordinate polari, $\rho = \|(x, y)^T\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Curve in \mathbb{R}^n ($n = 2, 3$)

Curve in forma parametrica

Sia $\gamma : I(\subseteq \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^n$, con I intervallo. La coppia $(\gamma, \underbrace{\gamma(I)}_{=\Gamma})$ si dice curva in forma parametrica di cui γ è la rappresentazione parametrica e $\Gamma = \gamma(I)$ è il sostegno

- $N = 2, \gamma(t) = (x(t), y(t))^T, t \in \mathbb{R}$
oppure $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, t \in I$
- $N = 3, \gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))^T, t \in \mathbb{R}$
oppure $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}, t \in I$

Curva in forma parametrica chiusa

Si dice che γ è una curva in forma parametrica **chiusa** se $I = [a, b]$ e $\gamma(a) = \gamma(b)$

Curva in forma parametrica semplice

Si dice che γ è una curva in forma parametrica **semplice** se $\forall t_1, t_2$, con $t_1 \neq t_2$ e almeno uno fra t_1 e t_2 interno ad I , si ha che $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$

NB

È permesso che $\gamma(a) = \gamma(b)$, se $I = [a, b]$

Curva in forma parametrica regolare

Si dice che γ è una curva in forma parametrica **regolare** se $\gamma \in C^1(I)$ e $\gamma'(t) \neq \underline{0} \forall t \in \text{int}I$.

Si dice che $\gamma'(t), t \in \text{int}I$ è il vettore tangente e si pone $\tau(t) = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}$, τ versore tangente

Retta tangente a una curva regolare semplice in forma parametrica

Sia γ una curva in forma parametrica regolare semplice e sia $t_0 \in \text{int}I$.

La retta in forma parametrica $r(s) = \gamma(t_0) + \gamma'(t_0)s$, con $s \in \mathbb{R}$, si dice retta tangente nel punto $\gamma(t_0)$

Curve in \mathbb{R}^2

Curve regolari in forma cartesiana in \mathbb{R}^2

Sia $f : I(\subseteq \mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R}$, I intervallo, di classe C^1 , la curva in forma parametrica $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, con $\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix}$ si

dice curva **regolare** in forma cartesiana. Si ha: $\gamma'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ f'(t) \end{pmatrix} \neq \underline{0}$ in I e il $\text{sost}(\gamma) = \gamma(I)$.

Curve regolari in forma polare in \mathbb{R}^2

Sia $\rho : I(\subseteq \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, con I intervallo, di classe C^1 e t.c. $\rho(\vartheta) \geq 0$ in I e $\rho(\vartheta) + \rho'(\vartheta) > 0$ in $\text{int}I$.

La curva $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, con $\gamma(\vartheta) = \begin{pmatrix} \rho(\vartheta)\cos\vartheta \\ \rho(\vartheta)\sin\vartheta \end{pmatrix}$, si dice curva **regolare** in forma polare.

Si ha $\gamma'(\vartheta) = (\rho(\vartheta)^2 - \rho(\vartheta)\sin\vartheta, \rho'(\vartheta)\sin\vartheta - \rho(\vartheta)\cos\vartheta)^T$ e quindi $\|\gamma'(\vartheta)\|^2 = (\rho(\vartheta)\cos^2\vartheta - \rho(\vartheta)^2\sin^2\vartheta - 2\rho(\vartheta)\cos\vartheta\sin\vartheta + \rho(\vartheta)^2\sin^2\vartheta + \rho'(\vartheta)\cos^2\vartheta + 2\rho'(\vartheta)^2\cos\vartheta\sin\vartheta) = \rho(\vartheta)^2 + \rho'(\vartheta)^2 > 0$

Curve in \mathbb{R}^2 definite da equazioni

Si considera una funzione $\varphi : A(\subseteq \mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R}$ e il suo insieme di livello zero, $L_0(\varphi) = \{(x, y)^T \in A : \varphi(x, y) = 0\}$.

Se $\nabla\varphi = 0$, $L_0(\varphi)$ non è unidimensionale, infatti dove $\nabla\varphi = 0$ può essere che non ci sia tangente o che ci sia $L_0(\varphi)$ bidimensionale.

Se $\nabla\varphi \neq 0$ si può parlare di curve definite da equazioni

Punti regolari e punti singoli

Sia $\varphi : A(\subseteq \mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R}$, A aperto, di classe C^1 in A . Un punto $\underline{x}^0 = (x_0, y_0)^T \in L_0(\varphi)$ si dice **regolare** se $\nabla\varphi(\underline{x}^0) \neq \underline{0}$, **singolare** altrimenti.

Teorema di parametrizzazione locale (o della funzione implicita o di Dimi)

Se $\varphi : A(\subseteq \mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R}$, A aperto, di classe C^1 e $\underline{x}^0 = (x_0, y_0)^T$ è un punto regolare, $\nabla\varphi(\underline{x}^0) \neq \underline{0}$, con $\varphi(\underline{x}^0) = 0$, allora esiste un intorno U di x_0 , un intorno V di y_0 , $g : U \rightarrow V$ e $h : V \rightarrow U$, $g, h \in C^1$ t.c. $L_0(\varphi) \cap (U \times V) =$

$\begin{cases} G(g) \\ G(h) \end{cases} = \emptyset$, a seconda di cosa posso definire. In base a cosa decido? In base a quale derivata parziale è $\neq 0$. Se lo sono

entrambe cerco la funzione inversa di y

$\emptyset = \begin{cases} G(g) & \text{se } \varphi_g(x_0, y_0) \neq 0 \\ G(h) & \text{se } \varphi_h(x_0, y_0) \neq 0 \end{cases}$. Inoltre si ha:

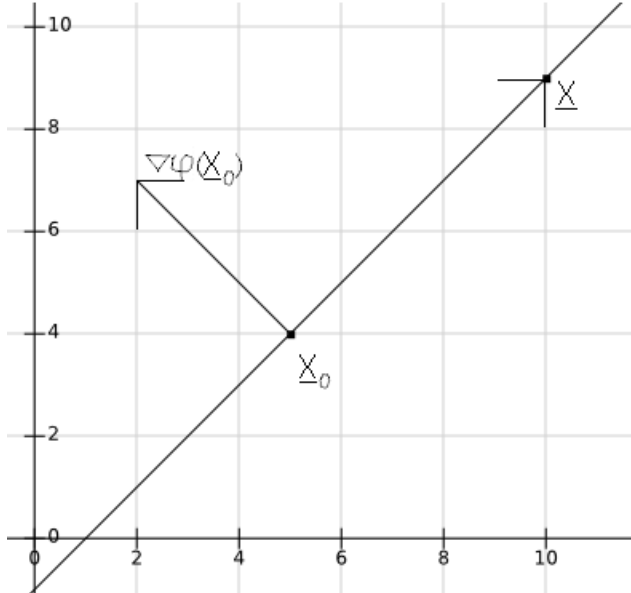
$g'(x) = -\frac{\varphi_x(x, g(x))}{\varphi_y(x, g(x))}$, $\forall x \in U$, $\varphi_y(x^0, y^0) \neq 0$ oppure $h'(y) = -\frac{\varphi_x(h(y), y)}{\varphi_y(h(y), y)}$, $\forall y \in V$, $\varphi_x(x^0, y^0) \neq 0$.

In particolare, la retta tangente a $L_0(\varphi)$ in $(x^0, y^0)^T$ ha equazione $y = g(x^0) + g'(x^0)(x - x^0) \Leftrightarrow y - y^0 = -\frac{\varphi_x(x^0, y^0)}{\varphi_y(x^0, y^0)}(x - x^0)$ (1), se $\varphi_y(x^0, y^0) \neq 0$ oppure $x = h(y^0) + h'(y^0)(y - y^0) \Leftrightarrow x - x^0 = -\frac{\varphi_x(x^0, y^0)}{\varphi_y(x^0, y^0)}(y - y^0)$

(1), se $\varphi_x(x^0, y^0) \neq 0$.

(1)(2) e quindi $\Leftrightarrow \varphi_x(x^0, y^0)(x - x^0) + \varphi_y(x^0, y^0)(y - y^0) = 0$. $\langle \nabla\varphi(\underline{x}^0), \underline{x} - \underline{x}^0 \rangle = 0$, allo stesso modo trovo

lo stesso prodotto scalare per $\varphi_x(x^0, y^0) = 0$, cioè $\nabla\varphi(\underline{x}^0)$ è $\perp(\underline{x} - \underline{x}^0)$



Conseguenze

Sotto le ipotesi del sopracitato teorema si ha $\nabla\varphi(\underline{x}^0)$ è ortogonale alla retta tangente a $L_0(\varphi)$ nel punto \underline{x}^0 e quindi a $L_0(\varphi)$ nel punto 0

Osservazione

$\lambda(\varphi) \cap (v \times V) = G(g) \Rightarrow \varphi(x, g(x)) = 0$ in U . Si ha che la funzione $y = g(x)$ è definita in modo implicito dall'equazione $\varphi(x, y) = 0$ e della condizione $g(x^0) = y^0$.

Definizione

Sia $\varphi : A(\subseteq \mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R}$, A aperto, di classe C^1 , tale che $L_0(\varphi) = \{(x, y) \in A | \varphi(x, y) = 0\} \neq \emptyset$ e $\nabla\varphi(x, y) \neq 0$ per ogni $(x, y)^T \in L_0(\varphi)$. La coppia $(\varphi, L_0(\varphi))$ si dice curva regolare in forma **implicita** di $\varphi(x, y) = 0$. $\varphi(x, y) = 0$ è l'equazione e $L_0(\varphi)$ è il sostegno.

Definizione

Siano $A(\subseteq \mathbb{R}^2)$ aperto connesso e $\sigma = K = clA(\subseteq \mathbb{R}^2)$, con $\sigma(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))^T$. Supponiamo allora che:

1. σ è di classe C^1 in $intK$
2. $\forall \underline{u} = (u, v)^T \in intK$, $\sigma_u(x_u(u, v), y_u(u, v), z_u(u, v))^T$ e $\sigma_v(u, v) = (x_v(u, v), y_v(u, v), z_v(u, v))^T$ sono linearmente indipendenti. Ossia $\sigma_u(u, v) \times \sigma_v(u, v) \neq 0$
3. $\forall u_1, u_2 \in K$, con $u_1 \neq u_2$ e $u_1 \in intK$ e $u_2 \in intK$, allora si ha $\sigma(u_1) \neq \sigma(u_2)$. La coppia formata da $(\sigma, \sigma(k))$ si dice **superficie** regolare semplice in forma parametrica, di cui σ è la parametrizzazione e $\Sigma = \sigma(\kappa)$ è il sostegno.

Definizione

Sia $\sigma : K(\subseteq \mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R}^3$ una superficie regolare semplice in forma parametrica. Fisso un $\underline{u}^0 = (u^0, v^0)^T \in intK$ e sia il punto $\underline{x}^0 = \sigma(\underline{u}^0) \in \Sigma$. Le curve $\sigma(\cdot, v^0) :]u^0 - \delta, u^0 + \delta[\rightarrow \mathbb{R}^2$ e $\sigma(u^0, \cdot) :]v^0 - \delta, v^0 + \delta[\rightarrow \mathbb{R}^2$ sono regolari semplici e si dicono **linee coordinate** passanti per \underline{x}^0

Definizione

Il vettore $\sigma_u(u^0, v^0)$ è il vettore tangente alla linea coordinata da u in \underline{x}^0 e il vettore $\sigma_v(u^0, v^0)$ è il vettore tangente alla linea coordinata v in \underline{x}^0 . Il vettore $\sigma_v(u^0, v^0) \times \sigma_u(u^0, v^0)$ si dice vettore **normale** a Σ in \underline{x}^0 e invece il versore

dato da $\nu(u^0, v^0) = \frac{\sigma_v(u^0, v^0) \times \sigma_u(u^0, v^0)}{\|\sigma_v(u^0, v^0) \times \sigma_u(u^0, v^0)\|}$ è il **vettore normale** a Σ in \underline{x}^0

Definizione

Il piano generato da $\sigma_u(u^0, v^0)$ e $\sigma_v(u^0, v^0)$ passante per \underline{x}^0 si dice piano tangente a Σ in \underline{x}^0 , ed è rappresentato da:

1. $\underline{x} = \lambda \sigma_u(u^0, v^0) + \mu \sigma_v(u^0, v^0) + \underline{x}^0, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow$ rappresentazione **parametrica**
2. $\langle \sigma_u(u^0, v^0) \times \sigma_v(u^0, v^0), \underline{x} - \underline{x}^0 \rangle = 0 \rightarrow$ rappresentazione implicita.

Definizione

Sia $f : K = clA(\subseteq \mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R}$, con A aperto e connesso, di classe C^1 in $intK$. La superficie in forma parametrica $\sigma(u, v)$, dato che $\sigma(u, v) = (u, v, f(u, v))^T$, con $(u, v) \in K$, è una superficie regolare semplice, dove $\Sigma =$

$$\sigma(K) = G(f) \text{ e inoltre vale: } \sigma_u \times \sigma_v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f_u \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f_v \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & f_u \\ 0 & 1 & f_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f_u \\ -f_v \\ 1 \end{pmatrix}$$

Definizione

Sia $\varphi : A(\subseteq \mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R}$, A aperto, di classe C^1 . supponiamo che $\Sigma = L_0(\varphi) = \{(x, y, z)^T = 0\} \neq \emptyset$ e per ogni $(x, y, z)^T \in L_0(\varphi)$ sia $\nabla \varphi(x, y, z) \neq 0$. La coppia $(\varphi, L_0(\varphi))$ si dice superficie regolare in forma **implicita** di cui $\varphi(x, y, z) = 0$ è l'equazione e $\Sigma = L_0(\varphi)$ è il sostegno. Il piano tangente a Σ in \underline{x}^0 è rappresentato dall'equazione $\langle \nabla \varphi(\underline{x}^0), \underline{x} - \underline{x}^0 \rangle = 0$.

Definizione, Curve regolari in forma implicita in \mathbb{R}^3

Siano $\varphi, \psi : A(\subseteq \mathbb{R}^3) \rightarrow \mathbb{R}$, con A aperto e di classe C^1 , tali che $\Gamma = L_0(\varphi) \cap L_0(\psi) = \{(x, y, z)^T \mid \varphi(x, y, z) = 0, \psi(x, y, z) = 0\} \neq \emptyset$ e $\nabla \varphi(x, y, z) \times \nabla \psi(x, y, z) \neq 0$, per ogni $(x, y, z)^T \in L_0(\varphi) \cap L_0(\psi) = \Gamma$. La coppia $((\varphi, \psi), L_0(\varphi) \cap L_0(\psi))$ si dice curva regolare in forma implicita in \mathbb{R}^3 di cui $\begin{cases} \varphi(x, y, z) = 0 \\ \psi(x, y, z) = 0 \end{cases}$ sono le equazioni e $\Gamma = L_0(\varphi) \cap L_0(\psi)$ è il sostegno. Il vettore $\nabla \varphi(\underline{x}^0) \times \nabla \psi(\underline{x}^0)$ è il vettore tangente a Γ in \underline{x}^0 , e la retta $\underline{x} = \underline{x}^0 + t(\nabla \varphi(\underline{x}^0) \times \nabla \psi(\underline{x}^0)), t \in \mathbb{R}$ è la retta tangente a Γ in \underline{x}^0 , questa è la forma parametrica.

Considero un altro modo per scriverlo: $\begin{cases} \langle \nabla \varphi(\underline{x}^0), \underline{x} - \underline{x}^0 \rangle = 0 \text{ (piano tangente a } L_0(\varphi)) \\ \langle \nabla \psi(\underline{x}^0), \underline{x} - \underline{x}^0 \rangle = 0 \text{ (piano tangente a } L_0(\psi)) \end{cases}$

Lo studio dei estremi di $f : E(\subseteq \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$, A aperto, di classe C^1

Si articola

- nello studio degli estremi in $intE$, studio degli estremi liberi
- nello studio degli estremi in frE , studio degli estremi vincolati

Estremi vincolati

Vincolo

Se $f : E(\subseteq \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$. Un insieme $\emptyset \neq V \subseteq E$ si dice vincolo per f

Punti di estremo vincolato

Siano $f : E(\subseteq \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ e V un vincolo per f . Si dice che $\underline{x}^0 \in V$ è un **punto di estremo vincolato** per f se V se \underline{x}^0 è t.c. $f(\underline{x}) > f(\underline{x}^0), \forall \underline{x} \in U \cap V$

$V, \underline{x} \neq \underline{x}^0$ (minimo vincolato) oppure $f(\underline{x}) < f(\underline{x}^0), \forall \underline{x} \in U \cap V, \underline{x} \neq \underline{x}^0$ (massimo vincolato)

Consideriamo

$N = 2, V = \Gamma$, curva $\begin{cases} \text{Curva regolare in forma parametrica in } \mathbb{R}^2 \text{ (T5)} \\ \text{curva regolare in forma implicita in } \mathbb{R}^2 \text{ (T5)} \end{cases}$, V può anche essere solo un punto,
 $N = 3, V =$
 $\begin{cases} \text{curva}, \Gamma \begin{cases} \text{curva regolare in forma parametrica (T1)} \\ \text{curva regolare in forma implicita (T5)} \end{cases}, V \text{ può anche essere intervalli o altri tipi di insieme} \\ \text{superficie}, \Sigma \begin{cases} \text{superficie regolare in forma parametrica (T2)} \\ \text{superficie regolare in forma implicita (T4)} \end{cases} \text{ in } \mathbb{R}^3 \end{cases}$

Teorema (T3) ($N = 2$ o $N = 3, V = \Gamma$, curva in forma parametrica)

Sia $f : A(\subseteq \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$, A aperto, di classe C^1 . Sia $\gamma : I \rightarrow A$ una curva regolare, I intervallo, e $\underline{x}^0 = \gamma(t^0)$, con $t^0 \in \text{int}I$ è un punto di estremo vincolato per f su $\Gamma = \gamma(I)$, allora $\langle \nabla f(\underline{x}^0), \gamma'(t^0) \rangle = 0$

Osservazione

Se $\nabla f(\underline{x}^0) \neq \underline{0}$, allora $\nabla f(\underline{x}^0)$ è \perp a $L_f(\underline{x}^0)(f)$ e a Γ in \underline{x}^0 e quindi $L_f(\underline{x}^0)(f)$ e Γ sono tangenti in \underline{x}^0

Dimostrazione

Studiare $f|_{\Gamma}$ equivale a studiare la funzione $\psi : I \rightarrow \mathbb{R}$, con $\psi(t) = f(\gamma(t))$. Poichè $f|_{\Gamma}$ ha un punto di estremo in \underline{x}^0 , ψ ha un punto di estremo in t^0 con $\gamma(t^0) = \underline{x}^0, t^0 \in \text{int}I$. Essendo f e γ di classe C^1 , ψ è di classe C^1 . Quindi per il teorema di Fermat $0 = \psi'(t^0) = \langle \nabla f(\gamma(t^0)), \gamma'(t^0) \rangle = \langle \nabla f(\underline{x}^0), \gamma'(t^0) \rangle$.

Teorema (T2) ($N = 3, V = \Sigma$, superficie regolare in forma parametrica)

Sia $f : A(\subseteq \mathbb{R}^3) \rightarrow \mathbb{R}$, A aperto, di classe C^1 e sia $\sigma : K \rightarrow A$ una superficie regolare semplice. Se $\underline{x}^0 = \sigma(\mu^0)$, con $\mu^0 \in \text{int}K$, è un punto di etremo per f su $\Sigma = \sigma(K)$, allora
 (-- MANCA TESI --)

Osservazione

Se $\nabla f(\underline{x}^0) \neq \underline{0}$, allora $\nabla f(\underline{x}^0) \perp \sigma_u(\underline{u}^0)$ o $\nabla f(\underline{x}^0) \perp \sigma_v(\underline{u}^0)$ e quindi $\nabla f(\underline{x}^0)$ è \perp al piano tangente Σ in \underline{x}^0 , cioè $\nabla f(\underline{x}^0) \perp \Sigma$.

Poichè $\nabla f(\underline{x}^0) \perp L_{f(\underline{x}^0)}(f)$, si conclude che Σ e $L_{f(\underline{x}^0)}(f)$ sono tangenti in \underline{x}^0

Problema

Es. estremi di $f(x, y) = x + y$, su $x^4 + y^4 - 4xy = 1 \rightarrow$ curva regolare in forma implicita

Teorema (T3), ($N = 2, V = \Gamma$, curva regolare in forma implicita o dei moltiplicatori di Lagrange)

Siano $f : E(\subseteq \mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R}$, aperto, di classe C^1 . Se $\underline{x}^0 \in \Gamma = L_0(\varphi) = \{(x, y)^T = \varphi(x, y) = 0\}$ è un punto di estremo vincolato di f su Γ e $\nabla \varphi(\underline{x}^0) \neq \underline{0}$, allora esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ t.c. $\nabla f(\underline{x}^0) = \lambda \nabla \varphi(\underline{x}^0)$

Dimostrazione

Poichè $\nabla \varphi(\underline{x}^0) \neq \underline{0}$ il teorema di parametrizzazione locale (Dini) garantisce che \exists un intorno W di \underline{x}^0 e \exists una curva regolare in forma parametrica $\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ t.c. $\gamma(I) = \Gamma \cap W = L_0(\varphi) \cap W$. (\Rightarrow localmente il vincolo è una curva parametrica \Rightarrow applico (T1)).

Per (T1) si ha $\langle f(\underline{x}^0), \gamma'(t^0) \rangle = 0$, dove $\underline{x}^0 = \gamma(t^0)$ e $t^0 \in \text{int}I$. D'altra parte $\nabla \varphi(\underline{x}^0) \perp \gamma'(t^0)$, <

$\nabla\varphi(\underline{x}^0), \gamma'(t^0) \geq 0$ e quindi $\nabla f(\underline{x}^0)$ e $\nabla\varphi(\underline{x}^0)$ sono paralleli, cioè esistono $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ t.c. $\alpha\nabla f(\underline{x}^0) + \beta\nabla\varphi(\underline{x}^0) = \underline{0}$, con α, β non entrambi nulli. Poichè $\alpha = 0$ implicherebbe $\nabla\varphi(\underline{x}^0) = \underline{0}$ dev'essere $\alpha \neq 0$. Posto $\lambda = -\frac{\beta}{\alpha}$, si conclude che $\nabla f(\underline{x}^0) = \lambda \cdot \nabla\varphi(\underline{x}^0)$

Teorema dei moltiplicatori di Lagrange ($N = 2, V = \Gamma$, curve in forma implicita)

Siano $f, \varphi : A(\subseteq \mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R}$, A aperto, di classe C^1 e sia $\Gamma = L_0(\gamma) = \{(x, y)^T \in A : \varphi(x, y) = 0\}$.

Se $\underline{x}^0 = (x^0, y^0)^T \in \Gamma$ è un punto di estremo vincolato per f su Γ e $\nabla\varphi(\underline{x}^0) \neq \underline{0}$ allora esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ t.c. $\nabla f(\underline{x}^0) = \lambda \cdot \nabla\varphi(\underline{x}^0)$

Osservazione: uso del teorema dei moltiplicatori di Lagrange

1. Se Γ è una curva regolare in forma implicita, cioè $\nabla\varphi \neq 0, \forall \underline{x} \in \Gamma$ allora i punti di estremo vincolato di f su Γ si ricercano tra le soluzioni $\underline{x} = (x, y)^T$ di

$$(L) \begin{cases} f_x(x, y) = \lambda \varphi_x(x, y) \\ f_y(x, y) = \lambda \varphi_y(x, y) \end{cases}$$

$\varphi(x, y) = 0$. (tre incognite x, y, λ anche se λ è di relativa impotanza)

2. Se Γ non è una curva regolare in forma implicita, cioè esistono punti singolari, allora i punti di estremo vincolato di f su Γ vanno ricercati tra le soluzioni di (L), ma anche tra le soluzioni di

$$\begin{cases} \varphi_x(x, y) = 0 \\ \varphi_y(x, y) = 0 \\ \varphi(x, y) = 0 \end{cases}$$

Teorema dei moltiplicatori di Lagrange ($N = 3, V = \Sigma$ superficie in forma implicita)

Siano $f, \varphi : A(\subseteq \mathbb{R}^3) \rightarrow \mathbb{R}$, A aperto, di classe C^1 e sia $\Sigma = \{(x, y, z)^T \in A : \varphi(x, y, z) = 0\} = L_0(\varphi)$.

Se $\underline{x}^0 = (x^0, y^0, z^0)^T \in \Sigma$ è punto di estremo vincolato per f su Σ e $\nabla\varphi(\underline{x}^0) \neq \underline{0}$, allora esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ t.c. $\nabla f(\underline{x}^0) = \lambda \nabla\varphi(\underline{x}^0)$

Osservazione: uso del teorema dei moltiplicatori di Lagrange

I punti di estremo vincolato per f su Σ vanno ricercati tra le soluzioni di:

- punti regolari $\begin{cases} \nabla f(\underline{x}) = \lambda \cdot \nabla\varphi(\underline{x}) \\ \varphi(\underline{x}) = 0 \end{cases}$
- punti singolari $\begin{cases} \nabla\varphi(\underline{x}) = \underline{0} \\ \varphi(\underline{x}) = 0 \end{cases}$

Teorema ($N = 3, V = \Sigma$ curva in forma implicita)

Siano $f, F, \psi : A(\subseteq \mathbb{R}^3) \rightarrow \mathbb{R}$, A aperto, di classe C^1 . Sia $\Gamma = L_0(\varphi) \cap L_0(\psi)$, ossia in forma esplicita $\Gamma = L_0(\varphi) \cap L_0(\psi) = \{(x, y, z)^T : \varphi(x, y, z) = \psi(x, y, z) = 0\}$. Se $\underline{x}^0 = (x^0, y^0, z^0)^T \in \Gamma$ è un estremo vincolato per f su Γ e $\nabla\varphi(\underline{x}^0) \times \nabla\psi(\underline{x}^0) \neq \underline{0}$, allora esistono $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, detti **moltiplicatori di Lagrange**, tali che $\nabla f(\underline{x}^0) = \lambda \nabla\varphi(\underline{x}^0) + \mu \nabla\psi(\underline{x}^0)$.

Osservazione

Se Γ :

1. è una curva regolare in forma implicita, cioè $\nabla\varphi \times \nabla\psi \neq \underline{0}$ in Γ , allora i punti di estremo vincolato per f su Γ vanno cercati tra:

$$(S_1) \begin{cases} f_x(x, y, z) = \lambda \nabla \varphi_x(x, y, z) + \mu \nabla \psi_x(x, y, z) \\ f_y(x, y, z) = \lambda \nabla \varphi_y(x, y, z) + \mu \nabla \psi_y(x, y, z) \\ f_z(x, y, z) = \lambda \nabla \varphi_z(x, y, z) + \mu \nabla \psi_z(x, y, z) \\ \varphi(x, y, z) = 0 \\ \psi(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

2. Se Γ non è una curva regolare in forma implicita, cioè ci sono punti singolari, i punti di estremo vincolato vanno cercati tra le soluzioni di (S_1) e di

$$\begin{cases} \nabla \varphi(x, y, z) \times \nabla \psi(x, y, z) = \underline{0} \\ \varphi(x, y, z) = 0 \\ \psi(x, y, z) = 0 \end{cases} \quad \text{si hanno cinque equazioni in tre incognite}$$