Analisi II - sesta parte bis

Teorema 5 (Principio di sovrapposizione)

Se $\underline{y}_1(\cdot)$ è soluzione di $\underline{y}' = \mathbb{A}(x)\underline{y} + B_1(x)$ e $\underline{y}_2(\cdot)$ è soluzione di $\underline{y}' = \mathbb{A}(x)\underline{y} + B_2(x)$ allora $\underline{y}(\cdot) = \underline{y}_1(\cdot) + \underline{y}_2(\cdot)$ è soluzione di $\underline{y}' = \mathbb{A}(x)\underline{y} + (B_1(x) + B_2(x))$ (conseguenza della linearità)

Problema

Come determinare la matrice risolvente?

- SEDO del I ordine autonomo
  Sia $\mathbb{A}(\cdot) = \mathbb{A}$ una matrice $n \times n$ costante, cioè $\mathbb{A} \in M(n, n)$. Il SEDO (o) $\underline{y}' = \mathbb{A}\underline{y}$ Si dice SEDO lineare del I ordine autonomo.

Osservazione

$N = 1$, $y' = ay$, $a \in \mathbb{R}$, $y(x) = c \cdot e^{ax}$
Si cercano soluzioni del tipo $\underline{y}(x) = e^{\lambda x} + c$, con $x \in \mathbb{R}$, dove $\lambda \in \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$) e $\underline{c} \in \mathbb{R}^n \neq \underline{0}$.
Si impone che $\underline{y}(\cdot)$ sia soluzione di (o), cioè $\lambda e^{\lambda x} \cdot \underline{c} = \mathbb{A}(e^{\lambda x}\underline{c}) = e^{\lambda x}\mathbb{A}\underline{c}$, $\forall x \in \mathbb{R}$ e quindi $\mathbb{A}\underline{c} = \lambda\underline{c}$, cioè λ è autovalore di $\mathbb{A}$ e $\underline{c}$ è l'autovettore corrispondente.
Esiste una base di $\mathbb{R}^n$ (o $\mathbb{C}^n$) formata da autovettori? Cioè, esistono n autovettori linearmente indipendenti?
Questo è vero se $\mathbb{A}$ è simmetrica o $\mathbb{A}$ ha n autovalori distinti (e quindi..)

Teorema

Se $\mathbb{A}$ ha n autovettori linearmente indipendenti $\{\underline{u}_1, ..., \underline{u}_n\}$ allora le funzioni $z_1(x) = e^{\lambda_1 x}\underline{u}_1, ..., z_n(x) = e^{\lambda_n x}\underline{u}_n$ formano una bse di S_0 e quindi $\mathbb{U}(x) = (\underbrace{e^{\lambda_1 x} \cdot \underline{u}_1}_{colonna}, ..., \underbrace{e^{\lambda_n x} \cdot \underline{u}_n}_{colonna})$

Linea di massima discesa (o ascesa).

Dato un campo $f : A(\subseteq \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$, di classe C^1 si dice linea di massima discesa per $\underline{x}^0 \in A$ la curva $\gamma : I \to A$ t.c. $\begin{cases} \gamma'(t) = \underset{+}{-}\nabla f(\gamma(t)) \\ \gamma(t^0) = \underline{x}^0 \end{cases} t \in I$

SEDO di ordine superiore

EDO scalari del IIordine

Sia $f : E(\subseteq \mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}$, l'EDO $y''(x) = f(x, y(x), y'(x))$ (o, sinteticamente, $y'' = f(x, y, y')$) si dice EDO scalare del II ordine

Osservazione

Riduzione ad un SEDO del I ordine:

Se si pone $y_1(x) = y(x)$ e $y_2(x) = y'(x)$ e $F(x, y_1, y_2) = \begin{pmatrix} y_2 \\ f(x, y_1, y_2) \end{pmatrix}$ allora l'equazione differenziale scalare $y''(x) = f(x, y(x), y'(x))$ è equivalente al SEDO del I ordine di dimensione 2.

$$\begin{cases} y_1'(x) = y_2(x) \\ y_2'(x) = f(x, y_1(x), y_2(x)) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}' = F(x, y_1(x), y_2(x))$$

- Una funzione $y(\cdot) : I(\subseteq \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, con I intervallo, si dice soluzione di $y'' = f(x, y, y')$ se

1. $y(\cdot)$ è derivabile in I
2. $(x, y(x), y'(x))^T \in E$, $\forall x \in I$
3. $y''(x) = f(x, y(x), y'(x))$, $\forall x\in I

   Siano $f : E(\subseteq \mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}$ e $(x^0, y^0, \overset{=z^0}{v^0})^T \in E$. Il problema

   $$\begin{cases} y'' = f(x, y, y') \\ y(x^0) = y^0 \\ y'(x^0) = v^0 \end{cases} \quad \text{si dice problema di Cauchy}$$

- Una funzione $y(\cdot) : I(\subseteq \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, si dice soluzione del (PC) se

1. $y(\cdot)$ è soluzione dell'equazione $y'' = f(x, y, y')$
2. $x^0 \in I$
3. $y(x^0) = y^0$, $y'(x^0) = v^0$

Teorema di esistenza e unicità locali

Se $f : A(\subseteq \mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}$, A aperto, è continua e $(x^0, y^0, v^0)^T \in A$, allora esistono $h > 0$ e una funzione $y(\cdot) :]x_0 - h, x_0 + h[$ di classe C^1 soluzione del (PC) $\begin{cases} y'' = f(x, y, y') \\ y(x^0) = y^0 \\ y'(x^0) = v^0 \end{cases}$. Se inoltre $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial z}$ sono continue allora tale soluzione è anche unica.

Teorema di esistenza globale

Se $f : I \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, I intervallo aperto, è continua, $x^0 \in I$ e $(y^0, v^0) \in \mathbb{R}^2$ e per ogni intervallo compatt $H \subseteq I$ esistono $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ t.c. $|f(x, y, z)| \leq \alpha|y| + \beta|z| + \gamma$, $\forall x \in$

H e $(y,z)^T \in \mathbb{R}^2$ allora esiste (almeno) una soluzione $y(\cdot)$ definita su I.

Equazione di Newton autonoma e conservativa

Sia $f: J(\subseteq \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, J intervallo aperto, di classe C^1. L'EDO
$y'' = f(y)$ si dice equazione di Newton autonoma (f dipende da y) e conservativa, cioè senza dissipazione (f**non** dipende da y').

Considerando il (PC) $\begin{cases} y'' = f(y) \\ y(x^0) = y^0 \\ y'(x^0) = v^0 \end{cases}$, con $x^0 \in \mathbb{R}$ ($f: \mathbb{R} \times J \times \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$

Metodo risolutivo basato sulla conservazione dell'energia

Sia $y(\cdot): I(\subseteq \mathbb{R}) \to J(\subseteq \mathbb{R})$ la soluzione del (PC). Moltiplicando l'EDO per $y'(\cdot)$ e integrando tra x_0 e x si ottiene
$\int_{x_0}^x \underbrace{y'(t)y''(t)}_{\Leftrightarrow \frac{d}{dt}\frac{1}{2}(y'(t))^2} dt = \int_{x_0}^x \underbrace{f(y(t))y'(t)}_{\frac{d}{dt}F(y(t))} dt$, dove $F' = f$
$\frac{1}{2}(y'(t))^2 - \frac{1}{2}(y'(x_0))^2 = F(y(x)) - F(y(x_0))$ in I, con $F' = f$. Quindi si ha
$\underbrace{\underbrace{\frac{1}{2}y'(x)^2}_{\text{Energia cinetica}} - \underbrace{F(y(x))}_{\text{Energia potenziale}}}_{\text{Energia meccanica}} = \frac{1}{2}v_0^2 - F(y_0)$, in I.
L'energia si conserva nel tempo
Ponendo $E(y,v) = \frac{1}{2}v^2 - F(y)$, per $y \in J$, $v \in \mathbb{R}$, si ha che la coppia $(y(\cdot), y'(\cdot))^T$ parametrizza l'insieme di livello della funzione energia, $E: (y(x), y'(x))^T \in L_{\frac{1}{2}{v_0}^2 - F(y_0)}(E)$
Supponendo che $\forall x \in I$, $y'(x)^2 = 2F(y(x)) + (v_0^2 - 2F(y_0))$
Allora in un intorno di x_0 si ha:
$v_0 > 0$: $\begin{cases} y'(\cdot) = \sqrt{2F(y(\cdot)) + (v_0^2 - 2F(y_0))} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$
$v_0 < 0$: $\begin{cases} y'(\cdot) = -\sqrt{2F(y(\cdot)) + (v_0^2 - 2F(y_0))} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$
Se invece $v_0 = 0$
$$\begin{cases} f(y_0) > 0 : y'(\cdot) = sign(x - x_0) \cdot \sqrt{2F(y(\cdot)) + (v_0^2 - 2F(y_0))} \\ f(y_0) < 0 : y'(\cdot) = -sign(x - x_0) \cdot \sqrt{2F(y(\cdot)) + (v_0^2 - 2F(y_0))} \\ f(y_0) = 0 : y'(\cdot) = y_0 \end{cases}$$

EDO scalari del II ordine con coefficienti costanti

Siano $a, b \in \mathbb{R}$ e $c(\cdot): I \to \mathbb{R}$, I intervallo aperto, continua.
L'EDO (c) $y'' + ay' + by = c(x)$ si dice EDO scalare del II ordine con coefficienti costanti completa

L'EDO (c) $y'' + ay' + by = 0$ si dice EDO scalare del II ordine con coefficienti costanti omogenea

Motivazioni

- Vibrazioni meccaniche
- Circuiti

Teorema 0

Per ogni $(x_0, y_0, z_0)^T \in I \times \mathbb{R}^2$, il (PC) $\begin{cases} y'' + ay' + by = c(x) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = v_0 \end{cases}$ ha una ed una sola soluzione $y(\cdot)$ definita su I.

Definizione

$L : C^2(I) \to C^0(I)$, ponendo $L(y(\cdot)) = y''(\cdot) + ay^2(\cdot) + by(\cdot)$

Teorema 1

L è un'applicazione lineare. Si ha

- (c) $\Leftrightarrow L(y(\cdot)) = c(\cdot) \Leftrightarrow y(\cdot) \in L^{-1}(\{c(\cdot)\}) = S_c$
- (o) $\Leftrightarrow L(y(\cdot)) = 0 \Leftrightarrow y(\cdot) \in L^{-1}(\{0\}) = S_0 = KerL$

Teorema 2 (struttura di S_c)

L'insieme S_c è costituito da tutte e sole le funzioni $y(\cdot) = \overline{y}(\cdot) + z(\cdot)$, con $\overline{y}(\cdot)$ soluzione particolare di (c) e $z(\cdot)$ soluzione generica di (o), cioè $S_c = \overline{y}(\cdot) + KerL$

Osservazione

l'EDO $y'' + ay' + by = c(\cdot)$ è equivalente al SEDO $\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = -ay_2 - by_1 + c(x) \end{cases}$, dove si è posto $y_1 = y(\cdot)$ e $y_2(\cdot) = y'(\cdot)$

Teorema 3a

$S_0 = KerL$ è uno spazio vettoriale di dimensione 2.

Dimostrazione

Segue direttamente dall'equivalenza di EDO e SEDO

Teorema 3b - Idea

Si cerca una soluzione di (o) del tipo $z(x) = e^{\lambda x}$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Imponendo che sia soluzione si ottiene
$z''(x) + az'(x) + bz(x) = \lambda^2 e^{\lambda x} + a\lambda e^{\lambda x} + be^{\lambda x} = 0$

Osservazione

$\lambda = \alpha + \beta i \in \mathbb{C}$, $e^{\lambda x} = e^{\alpha x}(cos\beta x + isin\beta x)$($\leftarrow$ formula di Eulero), $\forall x\in \mathbb{R}.
Il che equivale a richiedere che $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$.

Equazione caratteristica

(k) $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$

Teorema 3b

Si ha:

1. Se $\Delta = a^2 - 4b > 0$, allora dette $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ ($\lambda_1 \neq \lambda_2$), le radici di (k), $\{e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}\}$ è una base di S_0
2. Se $\Delta = a^2 - 4b < 0$, dette $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ con $\beta \neq 0$ le radici di (k), allora $\{e^{\alpha x}cos(\beta x), e^{\alpha x}sin(\beta x)\}$ è una base di S_0
3. Se $\Delta = a^2 - 4b = 0$, detta $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ l'unica radice di (k), allora $\{e^{\lambda_0 x}, xe^{\lambda_0 x}\}$ forma una base di S_0

Osservazione

Siano $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ soluzioni di (k), con $\lambda_1 \neq \lambda_2$, allora $e^{\lambda_1 x}$ e $\dfrac{e^{\lambda_1 x} - e^{\lambda_2 x}}{\lambda_1 - \lambda_2}$ sono soluzioni di (o)
Se $\lambda_2 \to \lambda_1$, allora $\dfrac{e^{\lambda_1 x} - e^{\lambda_2 x}}{\lambda_1 - \lambda_2} = e^{\lambda_1 x} \cdot \dfrac{1 - e^{-(\lambda_1 - \lambda_2)x}}{\lambda_1 - \lambda_2} = e^{\lambda_1 x} = \left(\dfrac{e^{-(\lambda_1 - \lambda_2)x}}{-(\lambda_1 - \lambda_2)x}\right) x \to e^{\lambda_1 x}x$, se $t = -(\lambda_1 - \lambda_2) \to 0$, $\frac{e^{t-1}}{t} \to 1$

Dimostrazione teorema 3b

Dal teorema 3a segue che $dimS_0 = 2$. Quindi basta verificare che le funzioni considerate sono linearmente indipendenti.

- Caso (1)
  Siano $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ t.c. $c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Derivando si ottiene $\lambda_1 c_1 e^{\lambda_1 x} + \lambda_2 c_2 e^{\lambda_2 x} = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$
  Valutando in $x = 0$, si ha:

$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 = 0 \end{cases}$, $det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_1 \end{pmatrix} = \lambda_2 - \lambda_1 \neq 0$

Quindi $c_1 = c_2 = 0$.

Analogamente di procede su (2) e (3)

Teorema 4 (determinazione di una soluzione particolare)

Una soluzione particolare di (c) è data da
$\overline{y}(x) = \int_{x_0}^{x} G(x,t)x(t)dt$, $x_0 \in I \leftarrow$ Green

$$G(x,t) = \frac{det \begin{pmatrix} z_1(0) & z_2(0) \\ z_1(x-t) & z_2(x-t) \end{pmatrix}}{det \begin{pmatrix} z_1(0) & z_2(0) \\ z_1'(0) & z_2'(0) \end{pmatrix}}, ((x,t)^T \in \mathbb{R}^2)$$

dove $\{z_1(\cdot), z_2(\cdot)\}$ è base di S_0

NB

$y' = ay$, $a \in \mathbb{R}$, $G(x,t) = e^{ax}x^{-at} = e^{a(x-t)}$

Metodo di somiglianza

Sia $c(x) = P(x)e^{\lambda x}$, $P \in \mathbb{R}[x]$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Si cerca una soluzione particolare di (c) del tipo $\overline{y}(x) = Q(x)e^{\lambda x} \in \mathbb{R}[x]$

1. Se $\lambda \in \mathbb{R}$**non** è radice di (k), allora $degQ = degP$
2. se $\lambda \in \mathbb{R}$ è radice di (k) di molteplicità $\nu \in \{1,2\}$, allora $Q(x) = x^\nu R(x)$, con $R \in \mathbb{R}[x]$ e $degR = degQ$

Sia $c(x) = P(x)e^{\alpha x}cos\beta x$ (o $P(x)e^{\alpha x}sin\beta x$) con $P \in \mathbb{R}[x]$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$. Si cerca una soluzione particolare di (c) del tipo $\overline{y}(x) = Q_1(x)e^{\alpha x}cos(\beta x) + Q_2(x)e^{\alpha x}sin(\beta x)$, con $Q_1, Q_2 \in \mathbb{R}[x]$

1. Se $\alpha + i\beta \in \mathbb{C}$**non** è radice di (k) allora $degQ_1 = degP$
2. SE $\alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ è radice di (k) (necessariamente di molteplicità 1), allora $Q_1(x) = xR_1(x)$ e $Q_2(x) = xR_2(x)$, con $R_1, R_2 \in \mathbb{R}[x]$ e $degR_1 = degR_2 = degP$

Teorema 5 (principio di sovrapposizione)

Sia $y_1(\cdot)$ soluzione di $y'' + ay' + by = c_1(x)$ e sia $y_2(\cdot)$ soluzione di $y'' + ay' + by = c_2(x)$, allora $y(\cdot) = y_1(\cdot) + y_2(\cdot)$ è soluzione di $y'' + ay' + by = (c_1(x) + c_(x))$

Dimostrazione

Segue dalla linearità di L

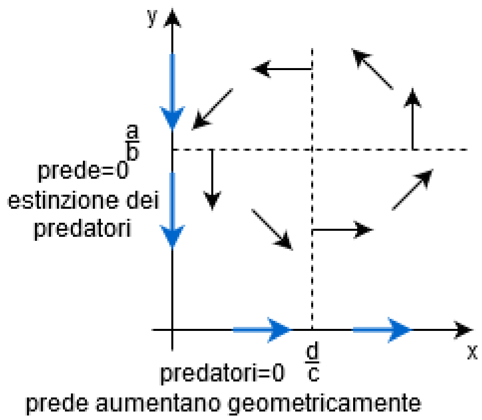
Metodo risolutivo

Sia $(x(\cdot), y(\cdot))$ una soluzione che risulta essere di classe C^2, si hanno due casi:

1. $b \cdot c = 0$
   Sia, per esempio, $b = 0$. Si ha
   $\begin{cases} x'(t) = ax(t) + f(t) \text{ equazione disaccoppiata da } y \\ y'(t) = cy(t) + (cx(t) + g(t)) \end{cases}$
   Risolvo $x(t)$ e la metto nella seconda riga che mi ritorna un'equazione risolvibile
   Si risolve la I equazione e si inserisce la soluzione $x(\cdot)$ nella II equazione. La coppia così costruita è la soluzione generale del sistema.
2. $b \cdot c \neq 0$
   (s) $\begin{cases} x'(t) = ax(t) + by(t) + f(t) \\ y'(t) = cx(t) + dy(t) + g(t) \end{cases}$, equazione accoppiata.
   Si deriva, per esempio, la I equazione, si ottiene: $x''(t) = ax'(t) + by'(t) + f'(t) = ax'(t) + bcx(t) + d(x'(t) - ax(t) - f(t)) + bg(t) + f'(t)$ e quindi
   (E): $x''(t) - \underbrace{(a+d)}_{tr(\mathbb{A}) = \sum_i a_{ii}} x'(t) + (\underbrace{ad - bc}_{det(\mathbb{A})})x(t) = bg(t) - df(t) - f'(t)$.
   Sia $x(\cdot)$ la soluzione generale di (E), si ha
   $y(\cdot) = \frac{1}{b}(x'(\cdot) - ax(\cdot) - f(\cdot))$. La coppia $(x(\cdot), y(\cdot))$ è la soluzione generale di (S)

Sistema di Lotka-Volterra

1. Senza prelievo esterno
   $\begin{cases} x' = ax - bxy \\ y' = cxy - dy \end{cases}$, dove $\begin{matrix} x = x(t) \text{ numero di prede al tempo } t \\ y = y(t) \text{ numero di predatori al tempo } t \end{matrix}$
   con $a, b, c, d \in \mathbb{R}^+$
   Si cerca $\gamma(t) : I \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (x(t), y(t))^T$, t.c. posto $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $g(x, y) = (ax - bxy, cxy - dy)^T$
   $\gamma'(t) = g(\gamma(t))$, γ linea di campo del campo vettoriale g.
   $g(\frac{d}{c}, \frac{a}{b}) = \underline{0}$, il punto $(\frac{d}{c}, \frac{a}{b})$ è un equilbrio, cioè è una soluzione costante del sistema, le traiettorie "circolano" vicino al punto di equilibrio



$\begin{cases} x\dfrac{x'}{y} = \dfrac{a}{y} - b/\cdot -y' \\ x\frac{y'}{y} = c - \frac{d}{y}/\cdot +x' \end{cases}$; sommando le due equazione si ottiene:

$0 = \dfrac{a}{y}y' - by' - \dfrac{d}{x}x' + cx'$

$0 = \dfrac{d}{dt}(-alogy + by - dlogy + cx)$, quindi $-alog(y(\cdot)) - dlog(x(\cdot)) + cx(\cdot) + dy(\cdot) = K$.

Ponendo $f(x,y) = -dlogx - alogy + cx + by$ si ha che $y(\cdot)$ parametrizza una linea di livello di f:

$L_k(f) = \{(x,y)^T : f(x,y) = K\}$, $\nabla f(x,y) = (-\frac{d}{x} + c, -\frac{a}{y} + b)^T = \underline{0} \Leftrightarrow (x,y)^T = (\frac{d}{c}, \frac{a}{b})^T$

$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{d}{x^2} & 0 \\ 0 & \frac{a}{y^2} \end{pmatrix}$, $Hf(x,y)$ è definita positiva, quindi $(\frac{d}{c}, \frac{a}{b})^T$ è un punto di minimo.

Poichè f è "coerciva", nel I quadrante, $(\frac{d}{c}, \frac{a}{b})^T$ è il punto di minimo assoluto per f.

Le linee di livello di f sono curve chiuse e quindi $x(\cdot)$ e $y(\cdot)$ sono funzioni T-periodiche per qualche $T > 0$ (che dipende dalla funzione $y(\cdot)$).

Si ha $\int_0^T \dfrac{x'(t)}{x(t)}dt = \displaystyle\int_0^T (a - by(t))dt \Leftrightarrow log(x(T)) - log(x(0)) = 0 = \int_0^T adt - b\int_0^T y(t)dt = 0/\cdot \dfrac{b}{T}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T y(t)dt = \dfrac{a}{b}$ e

$\displaystyle\int_0^T \dfrac{y'(t)}{y(t)}dt = \int_0^T (cx(t) - d)dt \Rightarrow \dfrac{1}{T}\int_0^T x(t)dt = \dfrac{d}{c}$

Le due medie integrali sono il numero medio di individui (prede/predatori) su un periodo T

2. Con prelievo esterno (pesca selettiva)

$\begin{cases} x' = ax - bxy - \varepsilon_1 x \\ y' = cxy - dy - \varepsilon_2 y \end{cases}$, con $0 < \varepsilon_1 < a$ e $\varepsilon_2 > 0$

$\begin{cases} x' = (a - \varepsilon_1)x - bxy \\ y' = cxy - (d + \varepsilon_2)y) \end{cases}$

Il nuovo equilibrio si trova in $\left(\dfrac{d+\varepsilon_2}{c}, \dfrac{a-\varepsilon_1}{b}\right)$

Paradosso: si ha $\begin{cases} \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T x(t)dt = \dfrac{d+\varepsilon_2}{c} \rightarrow \text{aumento delle prede} \\ \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T ys(t)dt = \dfrac{a-\varepsilon_1}{b} \rightarrow \text{diminuzione dei predatori} \end{cases}$

$\overline{g}(x,y) = g(\frac{d}{c}, \frac{a}{b}) + Jg(\frac{d}{c}, \frac{a}{b}) \begin{pmatrix} x + \frac{d}{c} \\ y - \frac{a}{b} \end{pmatrix}$ $\rightarrow$ Sistema linearizzato

$\gamma'(t) = \overline{g}(\gamma(t))$