Analisi II - sesta parte

Sistemi di EDO del I ordine (SEDO)

Motivazioni

- SIR
  $$\begin{cases} S'(t) = -\beta I(t)S(t) \\ I'(t) = \beta I(t)S(t) - \gamma I(t) \\ R'(t) = \gamma I(t) \end{cases}$$
  3 equazioni in 3 incognite, I ordine
- LV
  $$\begin{cases} U'(t) = aU(t) - bU(t)V(t) \\ V'(t) = -cV(t) + dU(t)V(t) \end{cases}$$
  $a, b, c, d > 0$, 2 equazioni in 2 incognite, I ordine
- II legge della dinamica
  $$\begin{cases} m\gamma''(t) = F(t, \gamma(t), Y'(t)) \\ \gamma(t) = (x(t), y(t), z(t)^T) \end{cases}$$
  3 equazioni in 3 incognite, II ordine
  $$\begin{cases} \gamma'(t) = v(t) \\ mv'(t) = F(t, \gamma(t), v(t)) \end{cases}$$
  6 equazioni in 6 incognite, I ordine

SEDO I ordine

Si consideri il SEDO del I ordine
$y_1'(x) = f_1(x, y_1(x), ..., y_n(x))$

$$\vdots \Leftrightarrow Y'(x) = F(x, y(x))$$

$y_n'(x) = f_n(x, y_1(x), ..., y_n(x))$

dove $F : E(\subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$ con $F(x, \underline{Y}) = F(x, y_1, ..., y_n) = \begin{pmatrix} f_1(x, y_1, ..., y_n) \\ \vdots \\ f_n(x, y_1, ..., y_n) \end{pmatrix}$

e $Y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix}$

Problema di Cauchy

$$
\text{(PC)}\begin{cases} y_1'(x) = f_1(x, y_1(x), ..., y_n(x)) \\ \dots \\ y_n'(x) = f_n(x, y_1(x), ..., y_n(x)) \\ y_1(x^0) = y_1^0 \\ \dots \\ y_n(x^0) = y_n^0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Y'(x) = F(x, Y(x)) \\ \underline{Y(x^0)} = \underline{Y^0} \end{cases}
$$

dove $(x^0, \underline{Y^0}) = (x^0, y_1^0, ..., y_n^0)^T \in E$

- Una funzione $Y(\cdot) : I(\subseteq \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^n$, I intervallo, si dice soluzione di $\underline{Y}' = F(x, \underline{Y})$ se
    1. $Y(\cdot)$ è derivabile in I
    2. $(x, \underline{Y}(x)) \in E$, $\forall x \in I$
    3. $\underline{Y}'(x) = F(x, \underline{y}(x))$, $\forall x \in I$
- Una funzione $Y(\cdot) : I(\subseteq \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^n$, I intervallo, si dice soluzione di $\begin{cases} \underline{Y}' = F(x, \underline{Y}) \\ \underline{Y}(x^0) = \underline{Y}^0 \end{cases}$

    se $Y(\cdot)$ è soluzione di $\underline{Y}' = F(x, \underline{Y})$
    Valgono, in particolare:

Teorema (esistenza e unicità locali)

Se $F : A \subseteq (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$, A aperto, è continua allora $\forall (x^0, \underline{y}^0) \in A$ esistono un $h > 0$ e una funzione $y(\cdot) :]x_0 - h, x_0 + h[\to \mathbb{R}^n$ di classe C^1 soluzione di $\begin{cases} \underline{Y}' = f(x, \underline{Y}) \\ \underline{Y}(x^0) = \underline{Y}^0 \end{cases}$

Se inoltre le derivate parziali $\dfrac{\partial F}{\partial y_i}$ con $i = 1, ..., n$ sono continue n A allora tale soluione è unica

Teorema di esistenza globale

Se $F : A = I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, I intervallo, A aperto è continua in A, $x^0 \in I$, $\underline{y}^0 \in \mathbb{R}^n$ e, per ogni intervallo compatto $H \subset I$, esistono $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ t.c. $||F(x, \underline{y})|| < \alpha ||\underline{y}|| + \beta$, $\forall x \in H$ e $\underline{y} \in \mathbb{R}^n$ allora il PC $\begin{cases} \underline{Y}' = F(x, \underline{Y}) \\ \underline{Y}(x^0) = \underline{Y}^0 \end{cases}$ ha almeno una soluzione $\underline{y}(\cdot)$ determinata su I

SEDO lineari del I ordine di dimensione n

Sia $\mathbb{A}(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{pmatrix}$ una matrice di $n \times n$ funzioni $a_{ij}(\cdot) : I(\subseteq \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, per $i, j = 1, ..., n$, con I intervallo aperto, continue in I e sia $B(x) = \begin{pmatrix} b_1(x) \\ \vdots \\ b_n(x) \end{pmatrix}$ un vettore di N funzioni $b_i(|cdot) : I \to \mathbb{R}$ per $i = 1, ..., n$.

Il SEDO (c) $\underline{y}'(x) = \mathbb{A}(x)\underline{y}(x) + B(x) \Leftrightarrow \underline{y}' = \underbrace{\mathbb{A}(x)\underline{y} + B}_{F(x,\underline{y})}$, con $\underline{y}(x) = \begin{pmatrix} v_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix}$. Si dice SEDO lineare del I ordine di dimensione n completo
Il SEDO (o) $\underline{y}'(x) = \mathbb{A}(x)\underline{y}(x) \Leftrightarrow \underline{y}' = \mathbb{A}(x)\underline{y}$ si dice SEDO del I ordine di dimensione n omogeneto

Teorema 0

Per ogni $x^0 \in I$ e $y^0 \in \mathbb{R}^n$, il (PC) $\begin{cases} \underline{Y}' = \mathbb{A}(x)\underline{y} + B(x) \\ \underline{Y}(x^0) = \underline{Y}^0 \end{cases}$ ha una ed una sola soluzione $\underline{y} \in C^1$ definita su tutto I (intervallo di definizione dei coefficienti)

Definizione

$L : C^1(I, \mathbb{R}^n) \to C^0(I, \mathbb{R}^n)$, ponendo $L(\underline{y}(\cdot)) = \underline{y}' - \mathbb{A}(\cdot)\underline{y}(\cdot)$

Teorema 1

$L : C^1(I, \mathbb{R}^n) \to C^0(I, \mathbb{R}^n)$ è un'applicazione lineare

- (c) $\underline{y}' = \mathbb{A}(x)\underline{y} + B(x) \Leftrightarrow L(\underline{y}(\cdot) = B(\cdot)) \Leftrightarrow \underline{y}(\cdot) \in L^{-1}(B(\cdot)) = S_B$
- (o) $\underline{y}' = \mathbb{A}(x)\underline{y} \Leftrightarrow L(\underline{y}(\cdot)) = \underline{0} \Leftrightarrow \underline{y}(\cdot) \in L^{-1}(\underline{0}) = S_0 = KerL$

Teorema 2 (Struttura di S_B)

L'insieme S_B di tutte le soluzioni di (c) è costituito da tutte e sole le funzioni $\underline{y}(\cdot) = \underline{\overline{y}}(\cdot) + Z(\cdot)$ con $\underline{\overline{y}}$ una soluzione particolare di (c) e $Z(\cdot)$ soluzione generica di (o)

Teorema 3 (dimensione di $S_0 = KerL$)

$S_0 = KerL$ è uno spazion vettoriale di dimensione n

Dimostrazione

Fissato $x^0 \in I$, siano $z_1(\cdot), ..., z_n(\cdot)$ le soluzioni di $\begin{cases} \underline{y}' = \mathbb{A}(x)\underline{y} \\ \underline{y}(x^0) = \underline{e_1} \end{cases} \cdots \begin{cases} \underline{y}' = \mathbb{A}(x)\underline{y} \\ \underline{y}(x^0) = \underline{e_n} \end{cases}$, dove $\{\underline{e_1}, .., \underline{e_n}\}$ è una base di $\mathbb{R}^n$ (per esempio la base canonica). Si provi che $\{z_1(\cdot), ..., z_n(\cdot)\}$ è una base di S_0.
$z_1(\cdot), ..., z_n(\cdot)$ sono linearmente indipendenti, siano $c_1, ..., c_n \in \mathbb{R}$ t.c. $c_1 z_1(x) + ... +_n z_n(x) = \underline{0}$, $\forall x \in I$.
In particolare: $c_1 z_1(x^0) + ... +_n z_n(x^0) = \underline{0} = c_1 \underline{e_1} + ... + c_n \underline{e_n}$. Siccome $\underline{e_1}, .., \underline{e_n}$ sono

una base allora sono linearmente indipendenti, $\Rightarrow c_1 = ... = c_n = 0$
Si provi che $z_1(\cdot), ..., z_n(\cdot)$ generano S_0. Sia $z(\cdot) \in S_0$, si ponga $\underline{y}^0 = z(x^0) \in \mathbb{R}$. Si consideri il (PC) $\begin{cases} \underline{Y}' = \mathbb{A}(x)\underline{Y} \\ \underline{Y}(x^0) = \underline{Y}^0 \end{cases}$. Se $\underline{y}^0 = c_1\underline{e_1} + ... + c_n\underline{e_n}$ allora il (PC) ha come soluzione $z(\cdot)$ e $\underline{y}(\cdot) = c_1 z_1(\cdot) + ... + c_n z_n(\cdot)$. Per l'unicità si ha $z(\cdot) = \underline{y}(\cdot) = c_1 z_1(\cdot) + ... + c_n z_n(\cdot) \Rightarrow cz_1, ..., z_n$ generano S_0.

basi di $S_0 = KerL$

Si ottengono risolvendo gli n (PC) $\begin{cases} \underline{Y}' = \mathbb{A}(x)\underline{Y} \\ \underline{Y}(x^0) = \underline{Y}^0 \end{cases}, \dots, \begin{cases} \underline{Y}' = \mathbb{A}(x)\underline{Y} \\ \underline{Y}(x^0) = \underline{Y}^0 \end{cases}$, dove $\{\underline{e_1}, .., \underline{e_n}\}$ è base di $\mathbb{R}^n$ e $x^0 \in I$ fissato.
In particolare, se $\{\underline{e_1}, .., \underline{e_n}\}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^n$, $\underline{e_1} = (1, 0, ..., 0)^T$,...,$\underline{e_n} = (0, ..., 0, 1)^T$, allora la matrice $\mathbb{U}(x) = (\underbrace{z_1(\cdot)}_{\text{colonna}}, ..., \underbrace{z_n(\cdot)}_{\text{colonna}})$ si dice matrice risolvente

Osservazione

Se $n = 1 \mathbb{U}(x) = e^{A(x)}$, con $A'(x) = a(x)$.
Risulta
$\mathbb{U}'(\cdot) = (z_1'(\cdot), ..., z_n'(\cdot)) = (\mathbb{A}z_1(\cdot), ..., \mathbb{A}z_n(\cdot)) = \mathbb{A}(\cdot)\mathbb{U}(\cdot)$ e $\mathbb{U}(x^0) = \mathbb{I} = I_n$ matrice identità. Cioè $\mathbb{U}$ risolve il (PC) matriciale $\begin{cases} \mathbb{U}' = \mathbb{A}(x)\mathbb{U} \\ \mathbb{U}(x^0) = \mathbb{I} = I_n \end{cases}$
Si ha $det\mathbb{U}(x) \neq 0, \forall x \in I$. Infatti supponendo per assurdo che esista $\overline{x} \in I$ t.c. $det(mathbbU) = 0$, si avrebbe che $z_1(\overline{x}, ..., z_n(\overline{x})$ sono linearmente dipendenti, cioè $\exists c_1, ..., c_n \in \mathbb{R}$**non tutti nulli** t.c. $c_1 z_1(\overline{x}) + ... + c_n z_n(\overline{x}) = \underline{0}$. Allora la funzione $y(\cdot) = c_1 z_1(\cdot) + ... + c_n z_n(\cdot)$ è soluzione di $\begin{cases} \underline{y}' = \mathbb{A}(x)\underline{y} \\ \underline{y}(\overline{x}) = 0 \end{cases}$ (in quanto combinazione lineare di soluzioni di (o)). Poichè la funzione nulla 0 è anche soluzione, per l'unicità, dev'essere $\underline{y}(x) = \underline{0}$, $\forall x \in I$ e quindi $c_1 = ... = c_n = 0$, assurdo ↯, $\Rightarrow det(\mathbb{U} \neq 0, \forall x$. Ne consegue che $\mathbb{U}$ è sempre invertibile $\forall x \in I$, esiste $\mathbb{U}^{-1}(x)$.

Matrice esponenziale

Sia $\mathbb{A}(\cdot)$ indipendente da x, cioè $\mathbb{A}(\cdot) = \mathbb{A}$. Allora il sistema si dice **autonomo**. $\underline{y} = \mathbb{A}\underline{y}$. In questo caso $\mathbb{U}(x)$ si indica con $e^{\mathbb{A}x}$. In particolare $e^{\mathbb{A}}$ si dice **matrice esponenziale**.

Osservazione

Se $n = 1$, $\mathbb{A} = (a)$, con $a \in \mathbb{R}$, $\mathbb{U}(x) = e^{ax}$.
Si ha che $e^{\mathbb{A}x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}\mathbb{A}^n x^n = \mathbb{I} + \mathbb{A}x + \frac{1}{2}\mathbb{A}^2 x^2 + ... + \frac{1}{n!}\mathbb{A}^n x^n$, con $x \in \mathbb{R}$

Osservazione

Se $n = 1$: $e^{\mathbb{A}x} = \sum \frac{1}{n!} a^n x^n$, con $x \in \mathbb{R}$

Teorema 4 (determinazione delle soluzioni particolari di (c))

Una soluzione particolare di (c) è data da $\underline{y}(x) = \int_{x_0}^{x} \mathbb{U}(x)\mathbb{U}^{-1}(t)B(t)dt$, $\forall x \in I$, $x_0 \in I$.

Osservazione

Se $n = 1$: $\underline{y}(x) = \int_{x_0}^{x} e^{\mathbb{A}x} e^{-\mathbb{A}(t)} b(t)dt$.
La funzione matriciale $G(x,t) = \mathbb{U}(x)\mathbb{U}^{-1}(t)$, con $x, t \in I$ si dice funzione di Green ed è tale che $\underline{\overline{y}}(x) = \int_{x_0}^{x} G(x,t)B(t)dt$

Osservazione

Se $n = 1$, $G(x,t) = e^{\mathbb{A}(x) - \mathbb{A}(t)}$ con $\mathbb{A}'(x) = a(x)$, $\forall x\in I

Dimostrazione

Si ha $\underline{\overline{y}}'(x) = \frac{d}{dt}(\mathbb{U}(x)\int_{x_0}^{x} \mathbb{U}^{-1}(t)B(t)dt) = \underbrace{\mathbb{U}'(x)}_{\mathbb{A}(x)\cdot\mathbb{U}(x)} \cdot \int_{x_0}^{x} \mathbb{U}^{-1}B(t)dt +$
$\underbrace{\mathbb{U}(x) \cdot \mathbb{U}^{-1}(x)}_{=\mathbb{I}=I_n} \cdot B(x) = \mathbb{A}(x) \cdot \mathbb{U}(x) \cdot \int_{x_0}^{x} \mathbb{U}^{-1}(t)B(t)dt + B(x) = \mathbb{A}(x) \cdot \underline{\overline{y}}(x) +$
$B(x) = \underline{\overline{y}}'(x)$, $\forall x \in I$