Analisi II - terza parte

Successioni e serie di funzioni

Motivazioni

Problemi

Sia una famiglia di funzioni "semplici" $(P_0, P_1, ..., P_n)$ linearmente indipendenti, $\varphi : E \to \mathbb{R}(o\mathbb{C})$.
Si pone il seguente problema

1. Data $f : E \to \mathbb{R}(o\mathbb{C})$ esiste una succesione $(c_n)_n \in \mathbb{R}(o\mathbb{C})$ t.c. la serie $\sum c_n \cdot \varphi_n$ converge in qualche caso a f in E?
2. Data una successioe $(c_n)_n$ in $\mathbb{R}$, la serie $\sum c_n \cdot \varphi_n$ converge a qualche $f : E \to \mathbb{R}(o\mathbb{C})$?

Succesione di funzioni

Sia $(f_n)_n$ una successione di funzioni $f_n : E \to \mathbb{R}(o\mathbb{C})$ e sia $f : E \to \mathbb{R}(o\mathbb{C})$ come si definisce una convergenza di $(f_n)_n$?

Convergenza puntuale

Siano $(f_n)_n$ una successione di funzioni $f_n : E \to \mathbb{R}(o\mathbb{C})$ e $f : E \to \mathbb{R}(o\mathbb{C})$. Si dice che $(f_n)_n$ converge puntualmente a f su E se $\forall x \in E \lim\limits_n f_n(x) = f(x)$ cioè $(\forall x \in E)(\forall \varepsilon > 0)(\exists \bar{n})(n > \bar{n} \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon)$

Osservazione

$\bar{n}$ dipende da ε, ma anche da x, $\bar{n} = \bar{n}(\varepsilon, x)$ nella convergenza puntuale

----//--data 25/9--//----

Teorema

Siano $(f_n)_n$ una successione di funzioni $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ e $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, si ha:

1. se $(f_n)_n$ converge uniformemente a f in $[a, b]$ e f_n continua $\forall n$ su $[a, b]$, allora f è continua, cioè $\forall x_o \in [a, b] \lim\limits_{x \to x_o} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_o} (\lim\limits_n f_n(x)) = \lim\limits_n (\lim\limits_{x \to x_o} f_n(x))$

2. Se $(f_n)_n$ converge uniformemente a f su $[a, b]$ e f_n è integrabile $\forall n$, allora f è integrabile e $\int_a^b f(x)dx = \lim_n \int_a^b f_n(x)dx \Leftrightarrow \int_a^b (\lim_n f_n(x))dx = \lim_n \int_a^b f_n(x)dx$, Teorema del passaggio al limite sotto al segno di integrale
3. Se $(f_n)_n$ converge puntualmente a f in $[a, b]$, f_n è derivabile $\forall n$ e $(f'_n)_n$ converge uniformemente a g su $[a, b]$ allora f è derivaile e $f' = g$ in $[a, b]$$\Leftrightarrow$ $\frac{d}{dx} \lim_n f_n(x) = \lim_n \frac{d}{dx} f_n(x)$, in $[a, b]$

Serie di funzioni

Sia $(f_n)_n$ una successione di funzioni con $f_n : E \to \mathbb{R}(o\mathbb{C})$, $\forall n$ poniamo $s_1(x) = f_1(x)$, $s_n(x) = f_1(x) + ... + f_n(x)$, $\forall x \in E$.
La coppia $((f_n)_n, (s_n)_n)$ si dice serie di funzioni e si indica con $\sum f_n$

- Se $(s_n)_n$ coverge puntualmente o uniformemente a $s : E \to \mathbb{R}(o\mathbb{C})$ si dice che la serie $\sum f_n$ converge puntualmente (risp. uniformemente) con somma s su E

Condizione necessaria per la convergenza uniforme di serie di funzioni

Se $\sum f_n$ converge uniformemente in E allora $(f_n)_n$ deve convergere uniformemente a 0 in E

Criteri di convergenza uniforme per serie di funzioni

Criterio di Cauchy per la convergenza uniforme

$\sum f_n$ converge uniformemente in $E$$\Leftrightarrow$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \bar{n})(\forall x \in E)(\forall n)(\forall p)(n > \bar{n} \Rightarrow |f_{n+1}(x) + ... + f_{n+p}(x)| < \varepsilon)$

M-test di Weierstrass

Sia $\sum f_n$, $f_n : E \to \mathbb{R}(o\mathbb{C})$, una serie di funzioni.
Se esiste $(M_n)_n$ in $\mathbb{R}$ t.c.

1. $|f_n(x)| \leq M_n$, $\forall x \in E$, $\forall n$
2. $\sum M_n$ converge $\Rightarrow \sum f_n$ converge uniformemente in E

NB: Spesso sarà $M_n = \sup_{x \in E} f_n(x)$

Criterio di Leibniz per la convergenza uniforme

Sia $\sum (-1)^n f_n(x)$, con $f_n : E \to \mathbb{R}$, una serie di funzioni
Se $\forall n$ si ha

1. $f_n(x) > 0, \forall x \in E$
2. $f_{n+1}(x) < f_n(x), \forall x \in E$
   Allora si ha che $\sum(-1)^n f_n(x)$ conv. uniformemente su $E \Leftrightarrow (f_n) \to 0$ uniformemente su E
   (da condizione necessaria diventa, ora, sufficiente)
   Inoltre, vale la seguente stima d'errore
   $|s(x) - s_n(x)| < f_{n+1}(x), \forall n, \forall x \in E$

Teorema di passaggio al limite per le serie di funzioni

Sia $\sum f_n$ una serie di funzioni, con $f_n : E \to \mathbb{R}$ e sia $f : E \to \mathbb{R}$
Si ha:

1. Se $\sum f_n \to f$ uniformemente in $[a, b]$ e f_n continua in $[a, b]$, cioè $\forall x_0 \in [a, b]$,
   $\lim_{x \to x_o} (\sum f_n(x)) = f(x_0) = \sum f_n(x_0) = \sum (\lim_{x \to x_0} f_n(x))$
2. Se $\sum f_n$ converge uniformemente con somma f e f_n integrabile $\forall n$, allora f è integrabile in $[a, b]$ e $\int_a^b f(x)dx = \sum \int_a^b f_n(x)dx \Leftrightarrow \int_a^b (\sum f_n(x))dx = \sum \int_a^b f_n(x)dx$
3. Se $\sum f_n$ converge puntualmente in $[a, b]$ con somma f, f_n è derivabile $\forall n$ su $[a, b]$ e $\sum f_n'$ converge uniformemente su $[a, b]$ con somma g, allora f è derivabile e $f' = g \Leftrightarrow$ $\frac{d}{dx}(\sum f_n(x)) = \sum \frac{d}{dx} f_n(x)$, su $[a, b]$

Sviluppabilità in serie di potenze

Serie di potenze in $\mathbb{R}$

Siano $(a_n)_n$ una succ. in $\mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathbb{R}$ fissati.
Posto, $\forall n \in \mathbb{N}^+$, $f_n(x) = a_n(x - x_0)^n$, con $x_0 \in \mathbb{R}$.
La serie difunzioni $\sum f_n = \sum a_n(x - x_0)^n$ è la serie di potenze di centro x_0, a coefficienti reali (a_n)

NB: $0^0 = 1$ in questo contesto

Lemma di Abel

Se $\sum a_n(x - x_0)^n$ converge in $\bar{x} \neq x_0$, $\bar{x} \in \mathbb{R} \setminus \{x_0\}$, allora la serie convereg assolutamente $\forall x \in \mathbb{R}$ t.c. $|x - x_0| < |\bar{x} - x_0|$

Dimostrazione

Poichè $\sum a_n(x - x_0)^n$ converge, si ha $\lim_n a_n(\bar{x} - x_0)^n = 0$m quindi esiste $M < 0$ t.c. $|a_n(x - x_0)^n| \leq M, \forall n$

Risulta, per $x \in \mathbb{R}$ t.c. $|x - x_0| < |\bar{x} - x_0|$ che
$|a_n(x - x_0)^n| = |a_n(\dfrac{x - x_0}{\bar{x} - x_0})^n(\bar{x} - x_0)^n| = |a_n(\bar{x} - x_0)^n||\dfrac{x - x_0}{\bar{x} - x_0})^n| = |a_n(\bar{x} - x_0)|q^n \leq M \cdot q^n, \forall n$
dove $q = \dfrac{|x - x_0|}{|\bar{x} - x_0|} \in [0, 1[$
Poichè la serie $\sum M \cdot q^n$ converge (serie geometrica), per il criterio del confronto $\sum |a_n(x - x_0)^n|$ converge e quindi $\sum a_n(x - x_0)^n$ converge

Osservazione

Sotto le ipotesi del Lemma di Abel

- $\sum a_n(x - x_0)^n$ converge puntualmente in $]x_0 - (\bar{x} - x_0), x_0 + (\bar{x} - x_0)[$
- $\sum a_n(x - x_0)^n$ converge uniformemente in $]x_0 - r, x_0 + r[$, con $0 < r < |\bar{x} - x_0|$

Insieme di convergenza

Poniamo $I = \{x \in \mathbb{R}| \sum a_n(x - x_0)^n \text{ converge}\}$

- Raggio di convergenza
  Poniamo $R = sup\{|x - x_0| : x \in I\}$ (*)
  Si ha $R \geq 0$, $R \in [0, +\infty[U\{+\infty\}$

Teorema

Il raggio R definito da (*) soddisfa:

- (a)
  1. se $x \in \mathbb{R}$ è t.c. $|x - x_0| < R$, allora $\sum a_n(x - x_0)^n$
     converge (assolutamente)
  2. se $x \in \mathbb{R}$ è t.c. $|x - x_0| > R$, allora $\sum a_n(x - x_0)^n$
     non converge
- (b)
  - se $R' \in [0, +\infty[U\{+\infty\}$ verifica le condizioni 1. e 2.
    allora $R' = R$, con R definito da (*)
    (a) Sono le proprietà caratteristiche del raggio di convergenza

Dimostrazione

- (a) Sia R il raggo di convergenza definito da (*)
  Poniamo 1. Sia $x \in \mathbb{R}$ t.c. $|x - x_0| < R$. Per la caratterizzazione dell'estremo superiore $\exists \bar{x} \in I$ t.c.
  $|x - x_0| < |\bar{x} - x_0 < R$, per il Lemma di Abel la serie converge assolutamente.

Poniamo 2. Se, per assurdo, esistesse $\bar{x} \in \mathbb{R}$ con $|\bar{x} - x_0| > R$ t.c. $\sum a_n(x - x_0)^n$ sia covergente allora si contraddice la definizione di estremo superiore.

- (b) Sia $R' \in [0, +\infty[U\{+\infty\}$, si verificano 1. e 2.

1. se R' verifica 1., allora $R' \leq R$
2. Se R' verifica 2., allora $R' \geq R$
   Si ha $R' = R$

Teorema di struttura dell'insieme di convergenza

L'insieme di convergenza I è un insieme connesso (intervallo o punto singolo) e verifica:

- $I = \mathbb{R}$ se $R = +\infty$
- $]x_0 - R, x_0 + R[\subset I \subset]x_0 - R, x_0 + R[$, $0 < R < +\infty$
- $I = \{x_0\}$ se $R = 0$

Dimostrazione

Segue dalle proprietà di $\mathbb{R}$

Osservazioneù

Sia R il raggio di convergenza, si ha:

- se $|x - x_0| < R, \sum a_n(x - x_0)^n$ converge puntualmente
- $\forall r | 0 < r < R$, $\sum a_n(x - x_0)^n$ converge uniformemente su $]x_0 - r, x_0 + r[$

Proprietà della funzione somma (di serie di funzioni)

Sia $\sum a_n(x - x_0)^n$ una serie di potenze avente raggio di convergenza $R < 0$. Poniamo $intI = I_R =]x_0 - R, x_0 + R[$ se $0 < R < +\infty$ (=$\mathbb{R}$ se $R = +\infty$) e per ogni $x \in I_R$, $f(x) = \sum a_n(x - x_0)^n$

Teorema integrazione termine a termine

La somma f è continua in I_R e $\displaystyle\int_{x_0}^{x} a_n(t - x_0)^n dt = \sum \frac{a_n}{n+1}(x - x_0)^{n+1}$ $\forall x \in \mathbb{R}$. Inoltre il raggio di convergenza di $\sum \frac{a_n}{n+1}(x - x_0)^{n+1}$ è R

Teorema derivazione termine a termine

La funzione somma è derivabile in I_R e $f'(x) = \displaystyle\sum \frac{d}{dx}(a_n(x - x_0)^n) = \sum n \cdot a_n(x - x_0)^n - 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$
Inoltre il raggio di convergenza di $\sum n \cdot a_n(x - x_0)^n - 1$ è R

Corollario

La funzione somma è derivabile infinte volte in I_R e, $\forall k \in \mathbb{N}^+$,

$$f_n^{(k)}(x) = \sum \frac{d^k}{dx^k}(a_n(x - x_0)^n) = \sum_{n=k}^{+\infty} n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot (n-k+1)a_n(x-x_0)^{n-k}$$

(da $n = k$ perchè tutti gil altri termini vanno a zero)

Sviluppabilità in serie di Taylor

Sia $\sum a_n(x - x_0)^n$ una serie di potenza con raggio di convergenza $R > 0$ e sia $f(x)$ la sua somma, $f(x) = \sum a_n(x - x_0)^n$ in I_R. f appartiene a C^∞ in I_R e, $\forall k \in \mathbb{N}^+$, $f^{(k)}(x_0) = \sum n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot (n-k+1)a_n(x-x_0)^{n-k}$ in I_R

In particolare, $f^{(k)}(x_0) = k!a_k$, $\forall k \in \mathbb{N}$ ($f^(0)(x_0) = f(x_0)$)

pertanto

$f(x) = \sum a_n(x - x_0)^n = \sum \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$

Serie di Taylor

Sia $f :]x_0 - h, x_0 + h[\to \mathbb{R}$ di classe C^∞.

La serie $\displaystyle\sum \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$ si dice serie di Taylor con punto iniziale x_0

Osservazione

La ridotta $(n+1)$-esima di $\displaystyle\sum \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$ è $s_{n+1}(x) = \sum \frac{f^{(N)}}{N!}(x - x_0)^N$ è il polinomio di Taylor di f di punto iniziale x_0 avente ordine n

- Una funzione f si dice sviluppabile in serie di Taylor di punto iniziale x_0 se esiste $h > 0$ t.c.

  $$f(x) = \sum \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n, \forall x \in]x_0 - h, x_0 + h[$$

Osservazione

La somma di una serie di potenze avente $R > 0$ è sviluppabile in serie di Taylor su I_R

Problema

Data $f \in C^\infty$, sotto quali ipotesi f è sviluppabile in serie di Taylor?

Osservazione

Essere di classe C^∞ **non** è condizione sufficiente per la sviluppabile in serie di Taylor

Teorema - condizione sufficiente per la sviluppabile in serie di Taylor

Se $f :]x_0 - h, x_0 + h[\to \mathbb{R}, h > 0$, è di classe C^∞ ed esiste $M > 0$ t.c.$\forall n \in \mathbb{N}$
$|f^{(n)}(x)| \leq M \frac{n!}{h^n}$, in $]x_0 - h, x_0 + h[$
allora f è sviluppabile in serie di Taylor di punto iniziale x_0 in $]x_0 - h, x_0 + h[$. Inoltre, la serie converge uniformemente a f su $[x_0 - k, x_0 + k]$, $\forall k < h$

Dimostrazione

$\forall n \in \mathbb{N}^+$, si ha $|s_{n+1}(x) - f(x)| = |f(x) - P_{n,x_0}(x)| = |\frac{f^{(N+1)}(\xi_{N+1})}{(N+1)!}(x - x_0)^{N+1}| = |f^{(N+1)}(\xi_{N+1}|\frac{|x-x_0|^{N+1}}{(N+1!)}) \leq M\frac{(N+1)!}{h^{N+1}}\frac{|x-x_0|^{N+1}}{(N+1)!} = M(\frac{|x-x_0|}{h})^{N+1}$, Essendo $|\xi_{N+1} - x_0| < |x - x_0| < h$
Poichè $0 \leq \frac{|x-x_0|}{h} < 1$, Si ha $|f(x) - s_{N+1}(x)| \leq M(\frac{|x-x_0|}{h})^{N+1} \to 0$, per $N \to +\infty$
E quando $\sum \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$ converge a $f(x)$, $\forall x \in]x_0 - h, x_0 + h[$
Fissato $0 < h < k$ si ottiene, per $x \in [x_0 - k, x_0 + k]$, $|f(x) - s_{N+1}(x)| \leq M(\frac{|x-x_0|}{h})^{N+1} \leq M(\frac{k}{h})^{N+1}$
e quindi $\underset{]x_0-h,x_0+h[}{sup} |f(x) - s_{N+1}(x)| \leq M(\frac{|x-x_0|}{h})^{N+1} \to 0$, per $N \to +\infty$
Dunque la successione delle ridotte converge e dunque la serie donverge uniformemente a f in $]x_0 - h, x_0 + h[$

Oservazione

La condizione $\exists M > 0$ è tale che $\forall n$, $|f^{(n)}(x)| \leq M\frac{n!}{h^n}$, in $]x_0 - h, x_0 + h[$ e, in particolare verificata se $\exists K > 0$ t.c., $\forall n |f^{(n)}(x_0)| \leq K$
Infatti si ha $\frac{n!}{h^n} \to +\infty$, se $n \to +\infty$

Funzioni analitiche

Si dice che f è analitica in $[a, b]$ se f è sviluppabile in serie di Taylor di punto iniziale x_0, $\forall x \in]a, b[$
L'insieme delle funzioni analitiche in $]a, b[$ si indica con $H(]a, b[)$

Osservazione

$C^0(]a, b[) \supset C^1(]a, b[) \supset ... \supset C^n(]a, b[) \supset ... \supset C^\infty(]a, b[) \supset H(]a, b[)$, in $\mathbb{R}$

Spazi metrici

Sia $(\mathbb{S}, d)$ uno spazio metrico

Sfera aperta e sfera chiusa

Siano $x_0 \in \mathbb{S}$ e $r > 0$. L'insieme $\mathbb{B}(x_0, r) = \{x \in \mathbb{S} : d(x, x_0) < r\}$. Si dice sfera aperta (chiusa) di centro x_0 e raggio r

Intorno di un punto

Sia $x_0 \in \mathbb{S}$. Un'insieme $U \subseteq S$. Si dice intorno di x_0 se esiste $k > 0$ t.c. $\mathbb{B}(x_0, r) \subseteq S$. L'insieme degli intorni di x_0 si indica con $\mathfrak{I}_{x_0}$

(Alcune) proprietà degli intorni

Sia $x_0 \in \mathbb{S}$. Si ha

1. $(\forall u \in \mathfrak{I}_{x_0})(\forall \mathbb{V} \subseteq \mathbb{S})(\mathbb{U}_S \subseteq \mathbb{V} \Rightarrow \mathbb{V} \in \mathfrak{I}_{x_0})$
2. $(\forall U, V \in \mathfrak{I}_{x_0})(U \cap \mathbb{V} \in \mathfrak{I}_{x_0})$
3. $(\forall x, y \in \mathbb{S})[x \neq y \Rightarrow (\exists U \in \mathfrak{I}_x)(\exists \mathbb{V} \in \mathfrak{I}_y)U \cap \mathbb{V} = \emptyset]$

Punto di accumulazione

Siano $E \subseteq \mathbb{S}$ e $x_0 \in \mathbb{S}$. Si dice che x_0 è di accumulazione per E se in ogni intorno di x_0 ci sono infiniti punti di E o, equivalentemente, in ogni intorno di x_0 c'è almeno un punto di E diverso da x_0

Chiusura di un insiemee insieme chiuso

Sia $E \subseteq \mathbb{S}$. L'insieme $\bar{E} = ch(E) = E \cup \{x \in \mathbb{S} : x$ è di accumulazione per $E\}$, si dice **chiusura di E**
Un insieme E si dice chiuso se $E = clE$

Punto interno

$E \subseteq \mathbb{S}$, $x_0 \in E$. Si dice che x_0 è un punto interno a E se esiste almeno un intorno di x_0, U, t.c. $U \subset E$.

Interno di un insieme aperto

Sia $E \subseteq \mathbb{S}$. L'insieme $\overset{\circ}{E} = intE = \{x \in E : x$ è interno a$E\}$, si dice interno di E

Punto di frontiera

Siano $E \subseteq \mathbb{S}$ e $x_0 \in \mathbb{S}$. x_0 è di frontiera per E se in ogni intorno di x_0 ci sono punti di E e punti del complementare di E ($\mathcal{C}E$)

Frontiera di un insieme

$frE = \{x \in \mathbb{S} : x$ è di frontiera per $E\}$ si dice frontiera di E

Insieme limitato.

Sia $E \subseteq \mathbb{S}$. Si dice che E è limitato se esiste $x_0 \in E$ e raggio $r > 0$ t.c. $E \subseteq B(x_0, r)$ e, equivalentemente, $\underset{x,y \in E}{sup}\, d(x,y) < +\infty$. $diam(E) = \underset{x,y \in E}{sup}\, d(x,y)$

Funzioni da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^m$

Una funzione $f : E(\subseteq \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^m$ è del tipo

$$f(x) = f(x_1, ...x_n) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, ...x_n) \\ ... \\ f_m(x_1, ...x_n) \end{pmatrix}$$

con $x = (x_1, ...x_n)^T$ e $f_i : E \to \mathbb{R}$ per $i = 1, ..., n$

Campi scalari

$N = 2$, $M = 1$, $f : E(\subseteq \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$

Insiemi di livello

Sia $f : E(\subseteq \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ un campo scalare
Per ogni $k \in \mathbb{R}$, l'insieme $L_k(f) = \{\underline{x} \in E : f(\underline{x}) = k\}$ si dice insieme di livello

Curve parametriche

- $N = 1$, $M \geq 2$, Sia $\gamma : I(\subseteq \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^m$ con I intervallo.
  La coppia $(\gamma, \gamma(I))$ si dice curva parametrica di cui γ è la parametrizzazione e $\Gamma = \gamma(I)$ è il sostegno
- $M = 2$, $Y : I \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (x(t), y(t))^T$ è il sostegno

Campi vettoriali

$N = M \geq 2$, $g : E(\subseteq \mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}^N$

Limiti di funzioni da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^m$ (dati dalla distanza euclidea)

Sia $f : E(\subseteq \mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}^N$ e sia $x_0 \in \mathbb{R}^N$ di accumulazione per E.
Si dice $\lim\limits_{\underline{x} - \underline{x_0}} \underline{l} \in \mathbb{R}^N$ se $(\forall \mathbb{V} \in \mathfrak{J}_l)(\exists U \in \mathfrak{J}_{x_0})(\forall \underline{x} \in E)(\underline{x} \in U \setminus \{x_0\}) \Rightarrow f(\underline{x}) \in$

$\mathbb{V}) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall \underline{x} \in E)(0 < d(\underline{x}, \underline{x_0}) < \delta \Rightarrow d(f(\underline{x}), l) < \varepsilon)$

Quindi supporremo che E sia aperto e lo indicheremo con A.

Derivata parziale

Sia $\{\underline{e_1}, ...\underline{e_n}\}$ una base canonica di $\mathbb{R}^n$ e sia $\underline{v} = \underline{e_i}$ per un certo $i = 1, ..., n$.

Sia $x_0 \in intE$. La derivata direzionale $\frac{\partial f}{\partial \underline{e_i}}(\underline{x_0})$ si dice derivata parziale i-esima di f in x_0 e si indica con $\frac{\partial f}{\partial \underline{x_i}}(\underline{x_0}) = f_{x_i}(\underline{x_0})$

La ragione della notazione è la seguente:

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{e_i}}(x_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t\underline{v}) + f(\underline{x_0})}{t} =$$

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x_1^0, ..., x_i^0 + t, ..., x_n^0) - f(x_1^0, ..., x_n^0)}{t} =$$

$$\lim_{x_i \to x_i^0} \frac{f(x_{0_1}, ..., x_i, ..., x_{0_n}) - f(x_{0_{1,...,x_{0_n}}})}{x_i - x_i^0}$$

Unicità di a

Siano $\underline{a}, \underline{b} \in \mathbb{R}^n$ t.c. $\forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n$, $L(\underline{x}) =< \underline{x}, \underline{a} >$, $L(\underline{x}) =< \underline{x}, \underline{b}$, cioè $< \underline{x}, \underline{a} - \underline{b} >= 0$. Se $\underline{x} = \underline{a} - \underline{b}$, si ha $< \underline{a} - \underline{b}, \underline{a} - \underline{b} >= 0$, cioè $||\underline{a} - \underline{b}||^2 = 0$

Pertanto, si conclude che $||\underline{a} - \underline{b}|| = 0 \Rightarrow \underline{a} = \underline{b}$

Calcolo differenziale per $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$

Problema

Siano $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ e $x_0 \in E$. Come nel caso $N = M = 1$ si vuol definire la "derivata" di f in x_0. in modo da poter costruire una funzione lineare che approssima efficacemente f in prossimità di x_0

NB: il rapporto incrementale non esiste per $N \geq 2$

Campo scalare, derivata direzionale

Siano $f: E(\subseteq \mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in intE$. Consideriamo la retta $\underline{x} = \underline{x_0} + t\underline{v}, t \in \mathbb{R}$, con $\underline{v} \in \mathbb{R}^N$, $||\underline{v}|| = 1$. Poichè $x_0 \in intE$, $\exists \delta > 0$ t.c. $\underline{x} = \underline{x_0} + t\underline{v} \in E, \forall |t| < \delta$.

Consideriamo la funzione $f(\underline{x_0} + t\underline{v}) :]-\delta, \delta[\to \mathbb{R}$

Derivata direzionale: se esiste finito $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(\underline{x_0} + t\underline{v}) - f(\underline{x_0})}{t}$ esso si dice derivata direzionale di f in x_0 lungo la direzione orientata $\underline{v}$

Osservazione

Si ha che $x_0 \in intE$, perchè altrimenti il rapporto incrementale potrebbe **non** essere definito