Analisi II - terza parte

Successioni e serie di funzioni

Motivazioni

Problemi

Sia una famiglia di funzioni "semplici" $(P_0, P_1, ..., P_n)$ linearmente indipendenti, $\varphi : E \to \mathbb{R}(o\mathbb{C})$.
Si pone il seguente problema

1. Data $f : E \to \mathbb{R}(o\mathbb{C})$ esiste una succesione $(c_n)_n \in \mathbb{R}(o\mathbb{C})$ t.c. la serie $\sum c_n \cdot \varphi_n$ converge in qualche caso a f in E?
2. Data una successioe $(c_n)_n$ in $\mathbb{R}$, la serie $\sum c_n \cdot \varphi_n$ converge a qualche $f : E \to \mathbb{R}(o\mathbb{C})$?

Succesione di funzioni

Sia $(f_n)_n$ una successione di funzioni $f_n : E \to \mathbb{R}(o\mathbb{C})$ e sia $f : E \to \mathbb{R}(o\mathbb{C})$ come si definisce una convergenza di $(f_n)_n$?

Convergenza puntuale

Siano $(f_n)_n$ una successione di funzioni $f_n : E \to \mathbb{R}(o\mathbb{C})$ e $f : E \to \mathbb{R}(o\mathbb{C})$. Si dice che $(f_n)_n$ converge puntualmente a f su E se $\forall x \in E \lim\limits_n f_n(x) = f(x)$ cioè $(\forall x \in E)(\forall \varepsilon > 0)(\exists \bar{n})(n > \bar{n} \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon)$

Osservazione

$\bar{n}$ dipende da ε, ma anche da x, $\bar{n} = \bar{n}(\varepsilon, x)$ nella convergenza puntuale

----//--data 25/9--//----

Teorema

Siano $(f_n)_n$ una successione di funzioni $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ e $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, si ha:

1. se $(f_n)_n$ converge uniformemente a f in $[a, b]$ e f_n continua $\forall n$ su $[a, b]$, allora f è continua, cioè $\forall x_o \in [a, b] \lim\limits_{x \to x_o} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_o} (\lim\limits_n f_n(x)) = \lim\limits_n (\lim\limits_{x \to x_o} f_n(x))$

2. Se $(f_n)_n$ converge uniformemente a f su $[a,b]$ e f_n è integrabile $\forall n$, allora f è integrabile e $\int_a^b f(x)dx = \lim_n \int_a^b f_n(x)dx \Leftrightarrow \int_a^b (\lim_n f_n(x))dx = \lim_n \int_a^b f_n(x)dx$, Teorema del passaggio al limite sotto al segno di integrale
3. Se $(f_n)_n$ converge puntualmente a f in $[a,b]$, f_n è derivabile $\forall n$ e $(f'_n)_n$ converge uniformemente a g su $[a,b]$ allora f è derivaile e $f' = g$ in $[a,b]$$\Leftrightarrow$ $\frac{d}{dx} \lim_n f_n(x) = \lim_n \frac{d}{dx} f_n(x)$, in $[a,b]$

Serie di funzioni

Sia $(f_n)_n$ una successione di funzioni con $f_n : E \to \mathbb{R}(o\mathbb{C})$, $\forall n$ poniamo $s_1(x) = f_1(x)$, $s_n(x) = f_1(x) + ... + f_n(x)$, $\forall x \in E$.
La coppia $((f_n)_n, (s_n)_n)$ si dice serie di funzioni e si indica con $\sum f_n$

- Se $(s_n)_n$ coverge puntualmente o uniformemente a $s : E \to \mathbb{R}(o\mathbb{C})$ si dice che la serie $\sum f_n$ converge puntualmente (risp. uniformemente) con somma s su E

Condizione necessaria per la convergenza uniforme di serie di funzioni

Se $\sum f_n$ converge uniformemente in E allora $(f_n)_n$ deve convergere uniformemente a 0 in E

Criteri di convergenza uniforme per serie di funzioni

Criterio di Cauchy per la convergenza uniforme

$\sum f_n$ converge uniformemente in $E$$\Leftrightarrow$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \bar{n})(\forall x \in E)(\forall n)(\forall p)(n > \bar{n} \Rightarrow |f_{n+1}(x) + ... + f_{n+p}(x)| < \varepsilon)$

M-test di Weierstrass

Sia $\sum f_n$, $f_n : E \to \mathbb{R}(o\mathbb{C})$, una serie di funzioni.
Se esiste $(M_n)_n$ in $\mathbb{R}$ t.c.

1. $|f_n(x)| \leq M_n$, $\forall x \in E$, $\forall n$
2. $\sum M_n$ converge $\Rightarrow \sum f_n$ converge uniformemente in E

NB: Spesso sarà $M_n = \underset{x \in E}{sup} f_n(x)$

Criterio di Leibniz per la convergenza uniforme

Sia $\sum (-1)^n f_n(x)$, con $f_n : E \to \mathbb{R}$, una serie di funzioni
Se $\forall n$ si ha

1. $f_n(x) > 0, \forall x \in E$
2. $f_{n+1}(x) < f_n(x), \forall x \in E$
   Allora si ha che $\sum(-1)^n f_n(x)$ conv. uniformemente su $E \Leftrightarrow (f_n) \to 0$ uniformemente su E
   (da condizione necessaria diventa, ora, sufficiente)
   Inoltre, vale la seguente stima d'errore
   $|s(x) - s_n(x)| < f_{n+1}(x), \forall n, \forall x \in E$

Teorema di passaggio al limite per le serie di funzioni

Sia $\sum f_n$ una serie di funzioni, con $f_n : E \to \mathbb{R}$ e sia $f : E \to \mathbb{R}$
Si ha:

1. Se $\sum f_n \to f$ uniformemente in $[a, b]$ e f_n continua in $[a, b]$, cioè $\forall x_0 \in [a, b]$, $\lim\limits_{x \to x_o}(\sum f_n(x)) = f(x_0) = \sum f_n(x_0) = \sum(\lim\limits_{x \to x_0} f_n(x))$
2. Se $\sum f_n$ converge uniformemente con somma f e f_n integrabile $\forall n$, allora f è integrabile in $[a, b]$ e $\int_a^b f(x)dx = \sum \int_a^b f_n(x)dx \Leftrightarrow \int_a^b (\sum f_n(x))dx = \sum \int_a^b f_n(x)dx$
3. Se $\sum f_n$ converge puntualmente in $[a, b]$ con somma f, f_n è derivabile $\forall n$ su $[a, b]$ e $\sum f_n'$ converge uniformemente su $[a, b]$ con somma g, allora f è derivabile e $f' = g \Leftrightarrow \frac{d}{dx}(\sum f_n(x)) = \sum \frac{d}{dx} f_n(x)$, su $[a, b]$

Sviluppabilità in serie di potenze

Serie di potenze in $\mathbb{R}$

Siano $(a_n)_n$ una succ. in $\mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathbb{R}$ fissati.
Posto, $\forall n \in \mathbb{N}^+$, $f_n(x) = a_n(x - x_0)^n$, con $x_0 \in \mathbb{R}$.
La serie difunzioni $\sum f_n = \sum a_n(x - x_0)^n$ è la serie di potenze di centro x_0, a coefficienti reali (a_n)

NB: $0^0 = 1$ in questo contesto

Lemma di Abel

Se $\sum a_n(x - x_0)^n$ converge in $\bar{x} \neq x_0$, $\bar{x} \in \mathbb{R} \setminus \{x_0\}$, allora la serie convereg assolutamente $\forall x \in \mathbb{R}$ t.c. $|x - x_0| < |\bar{x} - x_0|$

Dimostrazione

Poichè $\sum a_n(x - x_0)^n$ converge, si ha $\lim\limits_n a_n(\bar{x} - x_0)^n = 0$m quindi esiste $M < 0$ t.c. $|a_n(x - x_0)^n| \leq M, \forall n$

Risulta, per $x \in \mathbb{R}$ t.c. $|x - x_0| < |\bar{x} - x_0|$ che
$|a_n(x - x_0)^n| = |a_n(\frac{x - x_0}{\bar{x} - x_0})^n(\bar{x} - x_0)^n| = |a_n(\bar{x} - x_0)^n||\frac{x - x_0}{\bar{x} - x_0})^n| = |a_n(\bar{x} - x_0)|q^n \leq M \cdot q^n, \forall n$
dove $q = \frac{|x - x_0|}{|\bar{x} - x_0|} \in [0, 1[$
Poichè la serie $\sum M \cdot q^n$ converge (serie geometrica), per il criterio del confronto $\sum |a_n(x - x_0)^n|$ converge e quindi $\sum a_n(x - x_0)^n$ converge

Osservazione

Sotto le ipotesi del Lemma di Abel

- $\sum a_n(x - x_0)^n$ converge puntualmente in $]x_0 - (\bar{x} - x_0), x_0 + (\bar{x} - x_0)[$
- $\sum a_n(x - x_0)^n$ converge uniformemente in $]x_0 - r, x_0 + r[$, con $0 < r < |\bar{x} - x_0|$

Insieme di convergenza

Poniamo $I = \{x \in \mathbb{R} | \sum a_n(x - x_0)^n$ converge$\}$

- Raggio di convergenza
  Poniamo $R = sup\{|x - x_0| : x \in I\}$ (*)
  Si ha $R \geq 0$, $R \in [0, +\infty[U\{+\infty\}$

Teorema

Il raggio R definito da (*) soddisfa:

- (a)
  1. se $x \in \mathbb{R}$ è t.c. $|x - x_0| < R$, allora $\sum a_n(x - x_0)^n$
     converge (assolutamente)
  2. se $x \in \mathbb{R}$ è t.c. $|x - x_0| > R$, allora $\sum a_n(x - x_0)^n$
     non converge
- (b)
  - se $R' \in [0, +\infty[U\{+\infty\}$ verifica le condizioni 1. e 2.
    allora $R' = R$, con R definito da (*)
    (a) Sono le proprietà caratteristiche del raggio di convergenza

Dimostrazione

- (a) Sia R il raggo di convergenza definito da (*)
  Poniamo 1. Sia $x \in \mathbb{R}$ t.c. $|x - x_0| < R$. Per la caratterizzazione dell'estremo superiore $\exists \bar{x} \in I$ t.c.
  $|x - x_0| < |\bar{x} - x_0 < R$, per il Lemma di Abel la serie converge assolutamente.

Poniamo 2. Se, per assurdo, esistesse $\bar{x} \in \mathbb{R}$ con $|\bar{x} - x_0| > R$ t.c. $\sum a_n(x - x_0)^n$ sia covergente allora si contraddice la definizione di estremo superiore.

- (b) Sia $R' \in [0, +\infty[U\{+\infty\}$, si verificano 1. e 2.

1. se R' verifica 1., allora $R' \leq R$
2. Se R' verifica 2., allora $R' \geq R$
   Si ha $R' = R$

Teorema di struttura dell'insieme di convergenza

L'insieme di convergenza I è un insieme connesso (intervallo o punto singolo) e verifica:

- $I = \mathbb{R}$ se $R = +\infty$
- $]x_0 - R, x_0 + R[\subset I \subset]x_0 - R, x_0 + R[$, $0 < R < +\infty$
- $I = \{x_0\}$ se $R = 0$

Dimostrazione

Segue dalle proprietà di $\mathbb{R}$

Osservazioneù

Sia R il raggio di convergenza, si ha:

- se $|x - x_0| < R, \sum a_n(x - x_0)^n$ converge puntualmente
- $\forall r | 0 < r < R$, $\sum a_n(x - x_0)^n$ converge uniformemente su $]x_0 - r, x_0 + r[$

Proprietà della funzione somma (di serie di funzioni)

Sia $\sum a_n(x - x_0)^n$ una serie di potenze avente raggio di convergenza $R < 0$. Poniamo $intI = I_R =]x_0 - R, x_0 + R[$ se $0 < R < +\infty$ (=$\mathbb{R}$ se $R = +\infty$) e per ogni $x \in I_R$, $f(x) = \sum a_n(x - x_0)^n$

Teorema integrazione termine a termine

La somma f è continua in I_R e $\displaystyle\int_{x_0}^{x} a_n(t - x_0)^n dt = \sum \frac{a_n}{n+1}(x - x_0)^{n+1}$ $\forall x \in \mathbb{R}$. Inoltre il raggio di convergenza di $\sum \frac{a_n}{n+1}(x - x_0)^{n+1}$ è R

Teorema derivazione termine a termine

La funzione somma è derivabile in I_R e $f'(x) = \displaystyle\sum \frac{d}{dx}(a_n(x - x_0)^n) = \sum n \cdot a_n(x - x_0)^n - 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$
Inoltre il raggio di convergenza di $\sum n \cdot a_n(x - x_0)^n - 1$ è R

Corollario

La funzione somma è derivabile infinte volte in I_R e, $\forall k \in \mathbb{N}^+$,

$$f_n^{(k)}(x) = \sum \frac{d^k}{dx^k}(a_n(x-x_0)^n) = \sum_{n=k}^{+\infty} n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) a_n (x-x_0)^{n-k}$$

(da $n = k$ perchè tutti gil altri termini vanno a zero)

Sviluppabilità in serie di Taylor

Sia $\sum a_n(x-x_0)^n$ una serie di potenza con raggio di convergenza $R > 0$ e sia $f(x)$ la sua somma, $f(x) = \sum a_n(x-x_0)^n$ in I_R. f appartiene a C^∞ in I_R e, $\forall k \in \mathbb{N}^+$, $f^{(k)}(x_0) = \sum n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) a_n (x-x_0)^{n-k}$ in I_R
In particolare, $f^{(k)}(x_0) = k! a_k$, $\forall k \in \mathbb{N}$ ($f^(0)(x_0) = f(x_0)$)
pertanto
$f(x) = \sum a_n(x-x_0)^n = \sum \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$

Serie di Taylor

Sia $f :]x_0 - h, x_0 + h[\rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^∞.
La serie $\displaystyle\sum \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ si dice serie di Taylor con punto iniziale x_0

Osservazione

La ridotta $(n+1)$-esima di $\displaystyle\sum \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ è $s_{n+1}(x) = \sum \frac{f^{(N)}}{N!}(x-x_0)^N$ è il polinomio di Taylor di f di punto iniziale x_0 avente ordine n

- Una funzione f si dice sviluppabile in serie di Taylor di punto iniziale x_0 se esiste $h > 0$ t.c.
  $$f(x) = \sum \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n, \forall x \in]x_0 - h, x_0 + h[$$

Osservazione

La somma di una serie di potenze avente $R > 0$ è sviluppabile in serie di Taylor su I_R

Problema

Data $f \in C^\infty$, sotto quali ipotesi f è sviluppabile in serie di Taylor?

Osservazione

Essere di classe C^∞ **non** è condizione sufficiente per la sviluppabile in serie di Taylor