Analisi II - settima parte

Integrazione

Integrazione secondo Riemann in $\mathbb{R}^n$ ($N = 2, 3$)

Integrazione secondo Riemann su rettangoli in $\mathbb{R}^2$

Sia $R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ un rettangolo in $\mathbb{R}^2$

Decomposizione di R

Siano:

- $a_1 < x_0 < x_1 < ... < x_n = b_1 n + 1$ punti di $[a_1, b_1]$
- $a_2 < y_0 < y_1 < ... < y_m = b_2 m + 1$ punti di $[a_2, b_2]$
  Per $i = 1, ..., n$ e $j = 1, ..., m$ si pone $R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$. La collezione di tutti i rettangoli si indica con δ, $\delta = \{R_{ij} : i = 1, ..., n, j = 1, ..., m\}$, si dice decomposizione di R

Insieme delle decomposizioni di R

Sia f una funzione **limitata**, $-\infty < l = \underset{R}{inf} f \leq L = \underset{R}{sup} f < +\infty$.
Si pone $\Delta(R) = \{\delta : \delta \text{ è decomposizione di } R\} \leftarrow$ è l'insieme delle decomposizioni.

Somme inferiori e somme superiori

Sia una $\delta \in \Delta(R)$
$\sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} l_{ij} \cdot m_2(R_{ij}) = s(\delta, f) \rightarrow$**Somma inferiore**,
$l_{ij} = \underset{R-ij}{inf} f \rightarrow$ altezza, misurata fino al minimo della funzione in quell'area
$m_2(R_{ij}) = (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) \rightarrow A_{\text{base}}$, $\forall i = 1, ..., n, j = 1, ..., m$
$l_{ij} \cdot m_2$ è dunque il volume inscritto nella figura solida, delimitata dal valore minimo della funzione e dal piano xy
$\sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} L_{ij} \cdot m_2(R_{ij}) = \mathbb{S}(\delta, f) \rightarrow$**Somma superiore**,
$L_{ij} = \underset{R-ij}{sup} f \rightarrow$ altezza, misurata fino al massimo della funzione in quell'area
$m_2(R_{ij}) = (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) \rightarrow A_{\text{base}}$, $\forall i = 1, ..., n, j = 1, ..., m$

$L_{ij} \cdot m_2$ è dunque il volume del parallelpipedo circoscritto alla figura solida, delimitata dal valore massimo della funzione e dal piano xy

Proposizione

$\forall \delta_1, \delta_2 \in \Delta(R)$, si ha $s(\delta_1, f) \le \mathbb{S}(\delta_2, f)$

Conseguenza

Le classi
$\sigma(f) = \{s(\delta, f) : \delta \in \Delta(R)\}$ e
$\Sigma(f) = \{\mathbb{S}(\delta, f) : \delta \in \Delta(R)\}$ sono classi separate

Integrale secondo Riemann su un rettagolo in $\mathbb{R}^2$

Se $\sigma(f)$ e $\Sigma(f)$ sono classi contigue, cioè $sup\sigma(f) = inf\Sigma(f)$, allora si dice che f è integrabile su R e si pone $\int\int_R f(x, y)dxdy = sup\sigma(f) = inf\Sigma(f)$

Significato geometrico

Sia $f : R(\subseteq \mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}$, integrabile su R e $f(x, y) > 0$ in R.
Si pone $T = \{(x, y, z)^T \in R, 0 < z \le f(x, y)\}$. Si ha $m_3(T) = \int\int_R f(x, y)dxdy$

Integrazione secondo Riemann su un parallelepipedo in $\mathbb{R}^3$

- Sia $R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$

Decomposizione di R

- $a_1 < x_0 < x_1 < ... < x_n = b_1 n + 1$ punti di $[a_1, b_1]$
- $a_2 < y_0 < y_1 < ... < y_m = b_2 m + 1$ punti di $[a_2, b_2]$
- $a_3 < z_0 < z_1 < ... < z_m = b_3 l + 1$ punti di $[a_3, b_3]$
  Per $i = 1, .., .n$, $j = 1, ..., m$, $k = 1, ..., l$.
  La collezione $\delta = \{R_{ijk} : i = 1, .., .n, j = 1, ..., m, k = 1, ..., l\}$ si dice decomposizione di R.
  $\Delta(R)$ è l'insieme di tutte le composizioni di R

Somme inferiori e somme superiori

Sia δ una decomposizione di R, $\delta \in \Delta(R)$, si pone

$$\sum_{k=1}^{l} \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} l_{ijk} m_3(R_{ijk}) = s(\delta, f)$$

$$\sum_{k=1}^{l} \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} L_{ijk} m_3(R_{ijk}) = S(\delta, f)$$

dove $l_{ijk} = \underset{R_{ijk}}{inf} f \leq L_{ijk} = \underset{R_{ijk}}{sup} f$ e $m_3(R_{ijk}) = (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})(z_k - z_{k-1})$, per $i = 1, .., .n$, $j = 1, ..., m$, $k = 1, ..., l$.

Proposizione

$\forall \delta_1, \delta_2 \in \Delta(R)$ si ha $s(\delta_1, f) \leq S(\delta_2, f)$

Conseguenza

Le classi
$\sigma(f) = \{s(\delta, f) : \delta \in \Delta(R)\}$ e
$\Sigma(f) = \{\mathbb{S}(\delta, f) : \delta \in \Delta(R)\}$ sono classi separate

Integrale secondo Riemann su un parallelepipedo su R

Se $\sigma(f)$ e $\Sigma(f)$ sono contigue, cioè $sup\sigma(f) = inf\Sigma(f)$, allora si dice che f è integrabile su R e si pone $\iiint_R f(x, y, z) dxdydz = sup\sigma(f) = inf\Sigma(f)$

Rettangoli n-dimensionali ("n-rettangoli") e integrazione su n-rettangoli

Se $n = 1$, allora $R = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ è un rettangolo 1-dimensionale, "1-rettangolo"
Se $n = 2$, allora $R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \subseteq \mathbb{R}^2$ è un rettangolo 2-dimensionale, "2-rettangolo"
...
In generale $R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n] \subseteq \mathbb{R}^n$ è un rettangolo n-dimensionale, "n-rettangolo"
La stessa costruzione fatta in precedenza permette di definire l'integrale di $f : R(\subseteq \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$, con R rettangolo limitato, si indica con $\int_R f$

Condizioni di integrabilità

Se $f : R(\subseteq \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$, Rn-rettangolo, continua, allora f è integrabile su R

Formula di riduzione

Problema

Come calcolare un integrale doppio o un integrale triplo?

- $n = 1$ se $f : R = [a, b](\subseteq \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ è continua allora $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, per il teorema di Torricelli, con $F' = f$ in R
- $n \geq 2$ si cerca di ridurre l'integrale doppio (triplo) a due (tre) successive integrazioni unidimensionali

Formule di riduzione per integrali doppi su rettangoli

Teorema di Fubini

Se $f : R = [a,b] \times [c,d] (\subseteq \mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}$, è integrabile su R e, per ogni $\overline{x} \in [a,b] f(\overline{x}, \cdot) : [c,d] \to \mathbb{R}$ (x fissato, y libero), è integrabile su $[c,d]$, allora, posto $g(x) = \int_c^d f(x,y)dy$, si ha che $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ è integrabile, $\int_a^b g(x)dx = \iint_R f(x,y)dxdy$, cioè $\underbrace{\int_a^b (\int_c^d f(x,y)dy)dx}_{\text{integrale iterato}} = \underbrace{\iint_R f(x,y)dxdy}_{\text{integrale doppio}}$, dove l'integrale doppio si ricava dalle somme inferiori e superiori

NB

Vale il risultato analogo in cui x e y si scambiano i ruoli nel teorema di Fubini:
Se $f : R = [a,b] \times [c,d] (\subseteq \mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}$, integrabile su R e $\forall \overline{y} \in [c,d]$ la funzione $f(\cdot, \overline{y}) : [a,b] \to \mathbb{R}$ è integrabile su $[a,b]$, allora, posto $h(y) = \int_a^b f(x,y)dx$, la funzione $h : [c,d] \to \mathbb{R}$ è integrabile su $[c,d]$ e $\int_c^d h(y)dy = \iint_R f(x,y)dxdy$ cioè $\int_c^d (f(x,y)dx)dy = \iint_R f(x,y)dxdy$

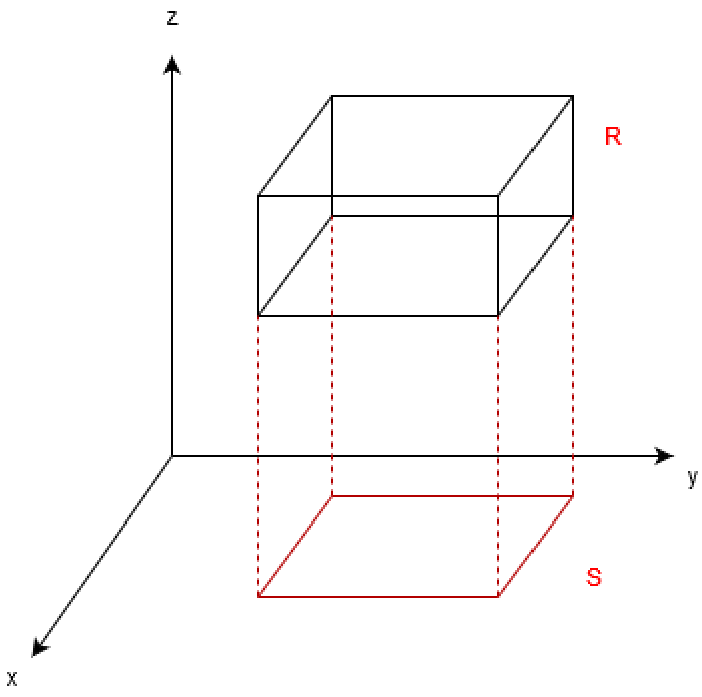
Osservazione

Se $f : R \to \mathbb{R}$, è continua allora valgono entrambe le versioni del teorema di Fubini

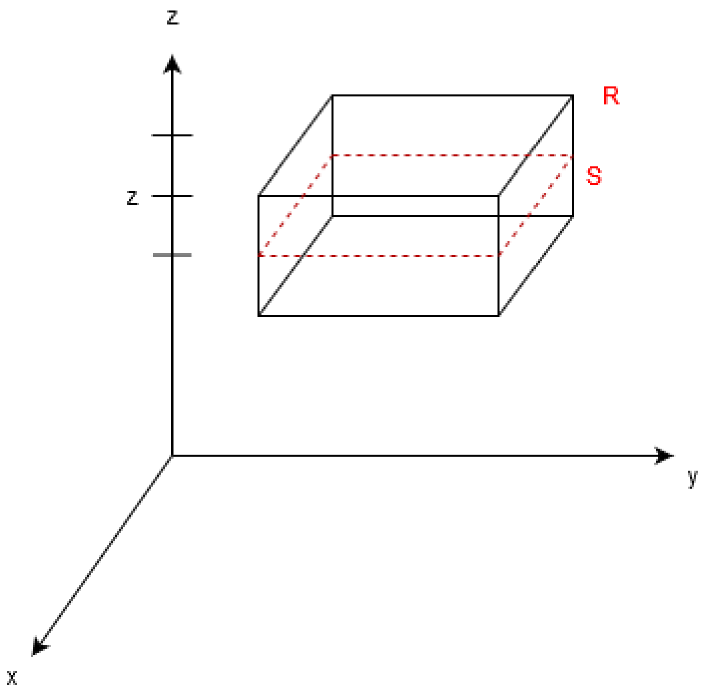
Formule di riduzione per integrazione su parallelepipedi rettangoli in $\mathbb{R}^3$

Due strade percorribili:

1. Integrazione per corda



2. Integrazione per corda



Riduzioni per corde

Teorema di Fubini

Se $f : R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3] \to \mathbb{R}$, integrabile su R e, $\forall(\overline{x}, \overline{y}) \in S = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ la funzione $f((\overline{x}, \overline{y}, \cdot$ è integrabile su $[a_3, b_3]$, allora posto $g(x, y) = \int_{a_3}^{b_3} f(x, y, z)dz$, la funzione $g : S \to \mathbb{R}$ è integrabile su S e $\iint_S g(x, y)dxdy = \iiint_R f(x, y, x)dxdydz$, cioè $\iint_S (\int_{a_3}^{b_3} f(x, y, z)dz)dxdy = \iiint_R f(x, y, z)dxdydz$
Valgono analoghi gli altri risultati in cui le variabili si scambiano i ruoli

Riduzione per sezione

Teorema di Fubini

Sia $f : R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3] \to \mathbb{R}$, integrabile su R. $\forall \overline{z} \in [a_3, b_3]$ la funzione $f(\cdot, \overline{z})$ è integrabile su $S = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$, allora posto $h(z) = int_S f(x, y, z)dxdy$, la funazione $h : [a_3, b_3] \to \mathbb{R}$ è integrabile su $[a_3, b_3]$ e $\int_{a_3}^{b_3} h(z)dz = \iiint_R f(x, y, z)dxdydz$, cioè $\int_{a_3}^{b_3} (\iint_S f(x, y, z)dxdy)dz) = \iiint_R f(x, y, z)dxdydz$.
Valgono analoghi gli altri risultati in cui le variabili si scambiano i ruoli

Proprietà dell'integrale su n-rettangoli

Sia $R(\subseteq \mathbb{R}^n)$ un n-rettangolo e si ponga $\mathscr{R}(R) = \{f_R \to \mathbb{R}$, f integrabile su $R\}$.

- Linearità
  Se $f, g \in \mathscr{R}(R)$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, allora $\alpha f + \beta g \in \mathscr{R}(R)$ e $\int_R (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_R f + \beta \int_R g$

NB

$\mathscr{R}(R)$ è uno spazio vettoriale e l'integrale è un'applicazione lineare

- Monotonia
  Se $f, g \in \mathscr{R}(R)$ e $f(\underline{x}) \leq g(\underline{x}) \forall \underline{x} \in R$, allora $\int_R f \leq \int_R g$

Integrale del prodotto

Se $f, g \in \mathscr{R}(R)$, allora $f \cdot g \in \mathscr{R}(R)$

Integrale del valore assoluto

Se $f \in \mathscr{R}(R)$, allora $|f| \in \mathscr{R}$ e $|\int_R f| \leq \int_R |f|$

Proprietà della media

Se $f \in \mathscr{R}(R)$, allora

$$\underset{R}{inf} f = l < \frac{\int_R f}{m_n(R)} < L = \underset{R}{sup} f$$

Inoltre se f è continua, allora esiste $\underline{x}^0 \in R$ t.c. $\underbrace{f(\underline{x}^0)}_{Valormedio} = \underbrace{\frac{\int_R f}{m_n(R)}}_{mediaintegrale}$

Integrale della restrizione

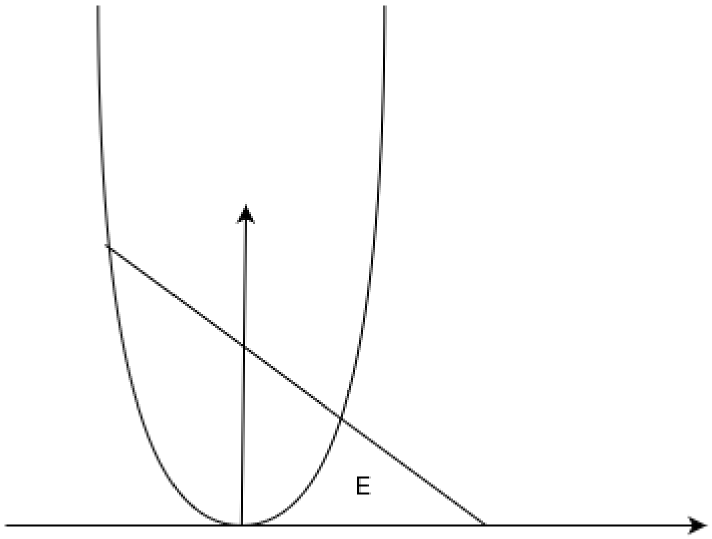
Se $f \in \mathscr{R}(R)$ e $R' \subseteq R$ è un n-rettangolo allora $f_{|_{R'}} \in \mathscr{R}(R')$

Additività rispetto al dominio

Se R, R', R'' sono n-rettangoli tali che $R' \cup R'' = R$ e $int(R') \cap int(R'') = \emptyset$ e $f : R \to \mathbb{R}$ t.c. $f_{|_{R'}} \in \mathscr{R}(R')$ e $f_{|_{R''}} \in \mathscr{R}(R'')$ allora $f \in \mathscr{R}(R)$ e $\int_R f = \int_{R'} f + \int_{R''} f$

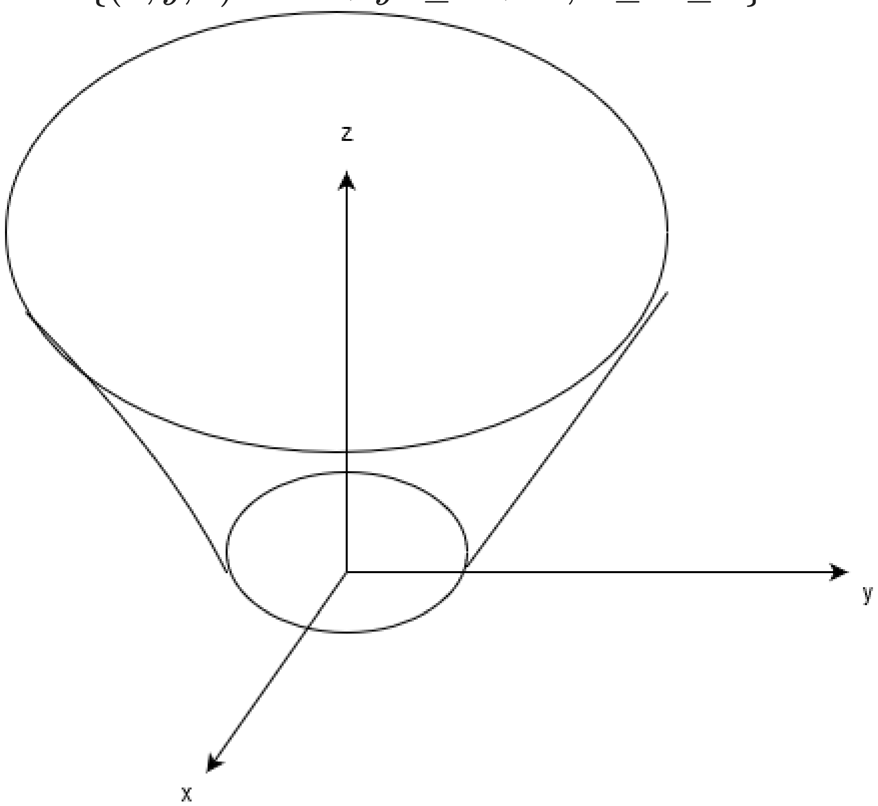
Insufficienza della teoria dell'integrazione su n-rettangoli

Come definire l'area di E?
$E = \{(x, y)^T : 0 < y < x^2 \wedge y \leq 1 - x\}$



Come calcolare il volume di E?

$E = \{(x, y, z)^T : x^2 + y^2 \leq 1 + z^2, 0 \leq z \leq 4\}$



Integrazione di funzione limitate su insiemi limitati

Sia $E(\subseteq \mathbb{R}^n)$, un insieme limitato e sia $f : E \to \mathbb{R}$ una funzione limitata.
Sia R un n-rettangolo t.c. $E \subseteq R$

Si ponga $f : 0 : R \to \mathbb{R}$ con $f_0(\underline{x}) f_0(\underline{x}) = \begin{cases} f(\underline{x}), \underline{x} \in E \\ x, \underline{x} \in R \setminus E \end{cases}$

Si dice che f è integrabile su E se la funzione f_0 è integrabile su R e si pone $\displaystyle\int_E f = \int_R f_0$

Osservazione

La definizione non dipende da particolare n-rettangolo R con $E \subseteq R$

Problema

In generale, anche se f è continua in $E f_0$ può essere discontinua su R.
Come stabilire, allora l'integrabilità di f_0 su R?
Bisogna trarre condizioni più generali della continuità che garantiscano l'integrabilità su n-rettangoli

Teoria della misura secondo Peano-Jordan

Insieme misurabile

Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme limitato, si dice che E è misurabile (secondo P-J) in $\mathbb{R}^n$ se la funzione 1 è integrabile su E e si pone $m_n = \int_E 1$

Osservazione

Funzione caratteristica di un insieme:

Sia $E(\subseteq \mathbb{R}^n)$ la funzione $\mathrm{X}_E : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definita da $\mathrm{X}_E(\underline{x}) = \begin{cases} 1, \underline{x} \in E \\ \underline{x} \notin E \end{cases}$. Si dice funzione caratteristica di E

Osservazione

Un insieme $E(\subseteq \mathbb{R}^n)$ limitato è misurabile se e solo se $\mathrm{X}(E)$ è integrabilie su un n-rettangolo $R \supseteq E$

Definizione

$\mathscr{M}(\mathbb{R}^n) = \{E \subseteq \mathbb{R}^n : E$ è misurabile in $\mathbb{R}^n\}$ e $m_n : \mathscr{M}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$, con $m_n(E) = \int_E 1$

Proprietà della misura

1. Se $A, B \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^n)$, allora $A \cap B, A \cup B, A \setminus B \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^n)$

- Dimostrazione. Poichè $A, B \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{X}_A$, $\mathcal{X}_B$ sono integrabili in R. Si ha: $\mathcal{X}_{A\cap B} = \mathcal{X}_A \cdot \mathcal{X}_B$, che è integrabile in R.
  Si ha $\mathcal{X}_{A\cup B} = \mathcal{X}_A + \mathcal{X}_B - \mathcal{X}_{A\cap B}$ che è integrabile su R e inoltre $\displaystyle\int_R \mathcal{X}_{A\cup B} = \int_R \mathcal{X}_A + \int_R \mathcal{X}_B - \int_R \mathcal{X}_{A\cap B}$. quindi $m_n(A \cup B) = m_n(A) + m_n(B) - m_n(A \cap B)$.
  Si ha $\mathcal{X}_{A\setminus B} = \mathcal{X}_A - \mathcal{X}_{A\cap B}$ e $\displaystyle\int_R \mathcal{X}_{A\setminus B} = \int_R \mathcal{X}_A - \int_R \mathcal{X}_{A\cap B}$, $m_n(A \setminus B) = m_n(A) - m_n(A \cap B)$

2. Se $A, B \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^n)$ e $A \subseteq B$. aòòpra $m_n(A) \leq m_n(B)$.

- Dimostrazione. Se $A \subseteq B$, allora $\forall \underline{x} \in R$ si ha $\mathcal{X}_1(\underline{x}) \leq \mathcal{X}_2(\underline{x})$ e quindi $\int_R \mathcal{X}_A \leq \int_R \mathcal{X}_B$

Insieme di misura nulla o insieme trascurabile

Sia $T(\subseteq \mathbb{R}^n)$ limitato. Si dice che T è **trascurabile in**$\mathbb{R}^n$ (o di misura nulla) se $m_N(T) = 0$

Proposizione (caratteristica dell'insieme trascurabile)

Sia $T \subseteq \mathbb{R}^n$. Si ha che T è trascurabile in $\mathbb{R}^n$ se e solo se $\forall \varepsilon > 0 \exists R_1, .., R_k n$-rettangoli tali che $T \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} R_i$ e $\sum_{i=1}^{k} m_n(R_i) < \varepsilon$

Proprietà

1. Se $T = \{\underline{x}^0\} \subseteq \mathbb{R}^n$, allora $m_n(T) = 0$, $\forall n \geq 1$
2. Se $T = \{\underline{x}^1, ..., \underline{x}^n\} \subseteq \mathbb{R}^n$, allora $m_n(T) = 0 \forall n \geq 1$
3. Se $T \subseteq \mathbb{R}^n$ è un 1-rettangolo, allora $m_n(T) = 0 \forall n \geq 2$
4. Se $T \subseteq \mathbb{R}^n$ è un 2-rettangolo, allora $m_n(T) = 0 \forall n \geq 3$
5. Se $\varphi : R(\subseteq \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ è integrabile sul n-rettangolo R, allora $G(\varphi) = \{(\underline{x}, \varphi(\underline{x}) : \underline{x} \in R\} \subseteq \mathbb{R}^n$

- Dimostrazione. Caso $n = 1$. Poichè $\varphi : R = [a, b] \to \mathbb{R}$ è integrabile $sups(\delta, \varphi) = infS(\delta, \varphi)$. Fissato $\varepsilon > 0$, Esiste $\delta \in \Delta(R)$ t.c. $\varepsilon > S(\delta) - s(\delta) = \sum_{i=1}^{k} L_i(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{k} l_i(x_i - x_{i-1})$. $R_i = [x_{i-1}, x_i] \times [l_i, L_i]$, per $i = 1, ..., k$, t.c. $G(\varphi) = R_1 \cup R_2 \cup ...R_k$

Condizione di integrabilità su n-rettangoli

Teorema

Se $f : R(\subseteq \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$, Rn-rettangolo, è limitata e continua su $R \setminus T$, con $m_n(T) = 0$, allora f è integrabile su R.

Teorema (caratterizzazione degli insiemi misurabili in $\mathbb{R}^n$)

Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme limitato. Si ha che E è misurabile in $\mathbb{R}^n$ se e solo se $m_n(frE) = 0$

Dimostrazione

Proviamo solo che se $m_n(frE) = 0$, allora E è misurabile in $\mathbb{R}^n$.
Sia R un n-rettangolo con $E \subseteq R$.
La funzione caratteristica $\mathcal{X}_E$ è limitata su R e continua su $R \setminus frE$. Dunque $\mathcal{X}_E$ è integrabile e pertanto E è misurabile in $\mathbb{R}^n$.

Condizione di integrabilità su insiemi limitati

Se $f : E(\subseteq \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ è continua su E, compatto, misurabile, allora f è integrabile su E.

Dimostrazione

Poichè f è continua su E compatto, f è limitata su E.

Sia R un n-rettangolo con $E \subseteq R$ e sia $f_0 : R \to R$ definita da $f_0(\underline{x}) = \begin{cases} f(\underline{x}), \underline{x} \in E \\ 0, \underline{x} \in R \setminus E \end{cases}$.

f_0 è limitata su R ed è continua su $R \setminus frE$, con $m_n(frE) = 0$, essendo E misurabile in $\mathbb{R}^n$. Quindi f_0 è integrabile su R e perciò f è integrabile su E

Proprietà dell'integrale su insiemi misurabili

- Linearità
- Monotonia
- Integrale del prodotto
- Integrale del valore assoluto
- Proprietà della media
  Se $f : E(\subseteq \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ è integrabile su E misurabile allora $\underset{E}{inf} f \leq \frac{\int_E f}{m_n(E)} \leq \underset{E}{sup} f$
  Se risulta E insieme compatto e connesso, allora $\exists \underline{x}^0 \in E$ t.c. $f(\underline{x}^0) = \frac{\int_E f}{m_n(E)}$
- Integrale rispetto al dominio
  Se $A, B, C(\subseteq \mathbb{R}^n)$ sono insiemi misurabili tali che $C = A \cup B$ e $m_n(A \cap B) = 0$ e $f : C \to \mathbb{R}$ è t.c. $f_{|_A}$ è integrabile su A e $f_{|_B}$ è integrabile su B, allora f è integrabile su C e $\int_C f = \int_A f + \int_B f$
- Integrale della restrizione
  Se $f : A(\subseteq \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ è integrabile su A misurabile e $B \subseteq A$ è misurabile allora $f_{|_B}$ è integrabile su B
- Invarianza dell'integrale rispetto agli insiemi di misura nulla
  Se $f_E(\subseteq \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ integrabile su E misurabile, $g : E \to \mathbb{R}$ è imitata e $f(\underline{x}) = g(\underline{x})$ su $E \setminus T$ con $m_n(T) = 0$, allora g è integrabile su E e $\int_E g = \int_E f$

Metodi per il calcol di integrali su insiemi limitati

Formule di riduzione per integrali doppi

Insiemi normali in $\mathbb{R}^2$.

Siano $\varphi, \psi : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue con $\varphi(x) \leq \psi(x)$ in $[a, b]$ L'insieme $E = \{(x, y)^T : a \leq x \leq b, \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$ si dice insieme normale rispetto all'asse x, Analogamente si hanno insiemi normali rispetto all'asse y

Proposizione

Ogni insieme normale è un compatto misurabile in $\mathbb{R}^2$

Dimostrazione

È ovvio che E è in compatto. Proviamo che è misurabile verificando che frE è trascurabile in $\mathbb{R}^2$. Si ha $frE = G(\varphi) \cup G(\psi) \cup \sigma_a \cup \sigma_b$, con $\sigma_a = \{(a,y)^T : \varphi(a) \leq y \leq \psi(a)\}$ e $\sigma_b = \{(b,y)^T : \varphi(b) \leq y \leq \psi(b)\}$.
Poichè φ e ψ sono integrabili su $[a,b]$, $G(\varphi)$ e $G(\psi)$ sono trascurabili in $\mathbb{R}^2$ e così pure i seguenti σ_a, σ_b. Dunque $m_2(frE) = 0$

Teorema

Se $f : E(\subseteq \mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}$ è continua ed E e $\iint_E f(x,y)dxdy = \int_a^b (\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy)dx$

Dimostrazione

L'integrabilità di f su E segue dal teorema e dalla proposizione precedente
Poniamo $m = \underset{[a,b]}{min}\varphi$ e $M = \underset{[a,b]}{max}\psi$ e $R = [a,b] \times [m,M]$

$f_0 : R \to \mathbb{R}$, dove $f_0(x,y) = \begin{cases} f(x,y), (x,y)^T \in E \\ 0, (x.y)^T \in R1setminusE \end{cases}$
Si ha f_0 integrabile su R e $f_0(\overline{x}, \cdot) : [m,M] \to \mathbb{R}$, è limitata e continua su $[m,M] \setminus [\varphi(\overline{x}), \psi(\overline{x})]$ e quindi integrabile. Il teorema di Fubini si può applicare e

$$\iint_R f_o(x,y)dxdy = \int_a^b (\int_m^M f(x,y)dy)dx = \int_a^b (\underbrace{\cancel{\int_m^{\varphi(x)} f_0(x,y)dy}}_{=0} +$$

$$\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f_0(x,y)dy + \underbrace{\cancel{\int_{\psi(x)}^M f_0(x,y)dy}}_{=0})dx = \int_a^b (\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f_0(x,y)dy)dx$$

Vale un analogo risultato per gli insiemi normali rispetto all'asse y

Formule di riduzione per gli integrali tripli

Riduzione per corde

Insiemi normali in $\mathbb{R}^3$

Siano $\Phi, \Psi : K(\subseteq \mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}$ continue con $\Phi(x,y) \leq \Psi(x,y)$ in K, con K compatto e misurabile.
L'insieme $E = \{(x,y,z)^T : (x,y)^T \in K, \Phi(x) \leq z \leq \Psi(x)\}$ si dice insieme normale rispetto al piano xy.
Analogamente si definiscono insiemi normali rispetto ai piani xz e yx

Proposizione

Ogni insieme normale è un compatto misurabile in $\mathbb{R}^3$.

Teorema (integrazione per corde)

Se $f : E(\subseteq \mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}$ è continua e E èun insieme normale rispetto al piano xy, allora f è integrabile su E e $\iiint_E f(x,y,z)dxdydz = \iint_K (\int_{\Phi(x)}^{\Psi(x)} f(x,y,z)dz)dxdy$.
Valgono analoghe le formule per insiemi normali rispetto agli altri due piani

Riduzione per sezioni

Insiemi sezionabili in $\mathbb{R}^3$

Sia E un compatto misurabile in $\mathbb{R}^3$. Si dice che E è un insieme sezionabile in $\mathbb{R}^3$ rispetto all'asse z se posto $m = min\{z : (x,y,z)^T \in E\}$ e $M = max\{z : (x,y,z)^T \in E\}$.
$\forall \overline{z} \in [m, M]$, la sezione $S_{\overline{z}} = \{(x,y)^T | (x,y,\overline{z})^T \in E\}$ sia misurabile in $\mathbb{R}^2$.
Analogamente si definiscono gli insiemi sezionabili rispetto agli assi x e y

Teorema (integrazione per sezioni)

Sia $f : E(\subseteq \mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}$ è continua, con E insieme sezionabile.
Si ha $\iiint_E f(x,y,z)dxdydz = \int_m^M (\iint_{S_z} f(x,y,z)dxdy)dz$
Valgono risultati analoghi per gli insiemi sezionabili rispetto agli assi x e y.

Solidi di rotazione

Siano $\varphi, \psi : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue, con $0 \leq \varphi(z) \leq \psi(z)$ e sia $D = \{(x,z)^T, a \leq z \leq b, \varphi(z) \leq x \leq \psi(z)\}$.
Il solido $E = \{(x,y,z)^T : a \leq z \leq b, \varphi(z) \leq \sqrt{x^2+y^2}\} \leq \psi(z)$ ottenuto facendo ruotare di $2\pi D$ intorno all'asse z si dice solido di rotazione rispetto all'asse z.

I Teorema di Pappo-Guldino

Ogni solido di rotazione è un compatto misurabile (anzi, sezionabile rispeto all'asse z) e $m_3(E) = 2\pi x_B m_2(D)$, dove x_b è l'ascissa del baricentro di D. ($S_z = \{(x,y)^T : \varphi(z) \leq \sqrt{x^2+y^2} \leq \psi(z)\}$)

Dimostrazione

E è misurabile rispetto all'asse z.
$m_3(E) = \iiint_E 1dxdydz = \int_a^b (\iint_{S_z} 1dxdy)dz = \int_a^b m_2(S_z)dz = \int_a^b (\pi\psi^2(z) - \pi\varphi^2(z))dz = 2\pi \int_a^b (\frac{1}{2}\psi^2(z) - \frac{1}{2}\varphi^2(z))dz =$

$= 2\pi \int_a^b \left[\frac{x^2}{2}\right]_{\varphi(z)}^{\psi(z)} dx = 2\pi \int_a^b (\int_{\varphi(z)}^{\psi(z)} xdx)dz = 2\pi \iint_D xdxdz = 2\pi m_2(D) \cdot$
$\dfrac{\iint_D xdxdz}{m_2(D)} = 2\pi x_b m_2(D)$.
$2\pi x_b$ è la distanza sulla circonferenza che il baricentro percorre

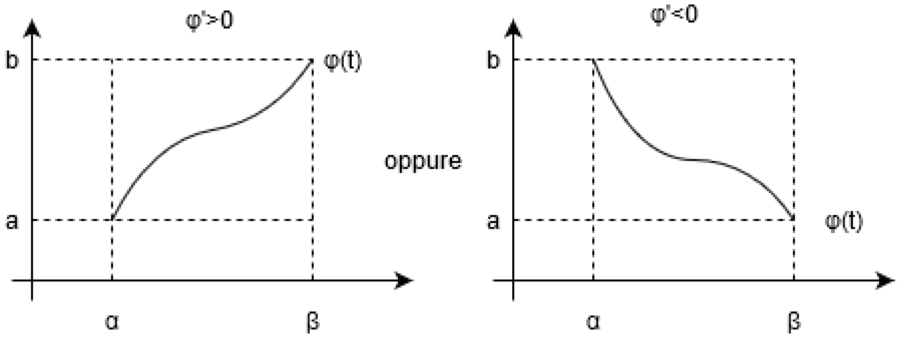
Cambio di bariabili negli integrali multipli

- Caso $N = 1$

Teorema

Se $f : I = [a, b] \to \mathbb{R}$ è continua è $\varphi : K = [\alpha, \beta] \to I$ è t.c.

1. $\varphi \in C^1$
2. φ è biiettiva
3. $\varphi'(t) \neq 0 \forall t \in K$, cioè $\varphi'(t) > 0 \forall t \in K$ o $\varphi'(t) < 0 \forall t \in K$



allora
$\int_a^b f(x)dx = \begin{cases} \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \\ \int_\beta^\alpha f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \end{cases}$, cioè
$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = -\int_\beta^\alpha f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$
cioè
$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$

Integrali generalizzati in $\mathbb{R}^n$

Premessa

Come definire:
$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dxdy$

Insieme localmente misurabile

Sia $J \subseteq \mathbb{R}^n$. Si dice che J è localmente misurabile uin $\mathbb{R}^n$ se $\forall E$, insieme misurabile in $\mathbb{R}^n$ si ha che $J \cap E$ è misurabile in $\mathbb{R}^n$

Funzione localmente integrabile

Sia $f : J(\subseteq \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ una funziona, J localmente misurabile in $\mathbb{R}^n$. Si dice che f è localmente integrabile se essite una successione $(A_n)_n$ di insiemi **misurabili** in $\mathbb{R}^n$ t.c.

1. $A_n \supset An + 1 \forall n$
2. $\forall E$ insieme misurabile in $\mathbb{R}^n$, con $E \subseteq J$, $\lim\limits_{n\to+\infty} (m_n(E \setminus A_n)) = 0$
3. $f_{|A_n}$ è integrabile su A_n, $\forall n$

Funzione integrabile in seno generalizzato

Sia $f : J(\subseteq \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ localmente integrabile su J localmente misurabile, con $f(\underline{x}) \geq 0$ $\forall \underline{x} \in J$.

Si dice che f è integrabile in senso generalizzato su J se esiste **finito** $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_{A_n} f$ e si poine

$\int_J f = \lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_{A_n} f$

NB

esiste sempre **finito** o **infinito** $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_{A_n} f$ poichè $\int_{A_n} f \leq \int_{A_n} f \forall n$ (per monotonia)

Teorema

Sia $f : J(\subseteq \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ localmente integrabile su J localmente misurabile.
Se $(A_n)_n$ e $(B_n)_n$ sono successioni di insiemi misurabili in $\mathbb{R}^n$ verificanti (1), (2) e (3), allora

$\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_{A_n} f = \lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_{B_n} f$

Integrale in senso generalizzato (caso generale)

$f : J(\subseteq \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ localmente integrabile su J localmente misurabile.
Si dice che f è integrabile in senso generalizzato su J se e solo se $f^+(\underline{x})$ e $f^-(\underline{x})$ sono integrabili in senso generalizzato su J e si pone $\int_J f = \int_J f^+ - \int_J f^-$

Teorema

Sia $f : J(\subseteq \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ localmente integrabile su J localmente misurabile. Si ha che f è integrabile in senso generalizzato su J se e solo se $|f|$ è integrabile in senso generalizzato su J
.

Inoltre risulta $\int_J f = lim_n \int_{A_n} f$, dove $(A_n)_n$ è una successone di insiemi misurabili verificante (1), (2) e (3).

Misure in senso generalizzato in $\mathbb{R}^n$

Sia J localmente misurabile in $\mathbb{R}^n$. Si dice che J è misurabile in senso generalizzato in $\mathbb{R}^n$ se $\mathcal{X}_J$ è integrabile in senso generalizzato su J e si pone $m_n(J) = \int_J 1$

Misurazione e integrazione su curve e superfici

Lunghezza di una curva in $\mathbb{R}^n$ ($n = 2$ o $n = 3$)

Idea - Rettificabilità e lunghezza di una curva

Sia $Y : I = [a, b] \to \mathbb{R}$ continua. Sia $\delta \in \Delta(I)$ individuata dai nodi $a = t_0, t_1, ..., t_n = b$
Si consideri la poligonale $\pi(\delta)$ formata dagli n segmenti $\sigma_i(t) : [0, 1] \to \mathbb{R}^n$ con $\sigma_i(s) = \gamma(t_{i-1}) + s(\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1}))$, per $i = 1, ..., n$
Si ha $l(\pi(\delta)) = \sum_{i=1}^{n} ||\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})||$ se $\sup_{\delta\in\Delta(I)} l(\pi(\delta)) < +\infty$, si dice che γ è rettificabile e si pone $l(\gamma) = \sup_{\delta\in\Delta(I)} l(\pi(\delta))$

Osservazione

Non tutte le curve continue sono rettificabili

Lemma

Se $g : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ è continua, allora si pone $\int_a^b g(t)dt = (\int_a^b g_1(t)dt, ..., \int_a^b g_n(t)dt)^T$ e si ha $||\underbrace{\int_a^b g(t)dt}_{\in\mathbb{R}^n}|| \leq \int_a^b ||g(t)||dt$

Teorema di rettificabilità

Se $\gamma : I = [a, b] \to \mathbb{R}$ è di classe C^1, allora γ è rettificabile e $l(\gamma) = \int_a^b ||\gamma'(t)||dt$

Dimostrazione

Sia $\delta \in \Delta(I)$. Si ha $l(\pi(\delta)) = \sum_{i=1}^{n} ||\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})|| = \sum_{i=1}^{n} ||\int_{t_{i-1}}^{t_i} \gamma'(t)dt|| \leq$
$\sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} ||\gamma'(t)||dt = \int_a^b ||\gamma'(t)||dt < +\infty$
Quindi risulta $\sup_{\delta\in\Delta(I)} l(\pi(\delta)) \leq \int_a^b ||\gamma'(t)||dt < +\infty$

Poichè γ è rettificabile e $l(\gamma) \leq \int_a^b ||\gamma'(t)||dt < +\infty$ si pone la validità della disuguaglianza posta

Lunghezza di una curva in forma cartesiana

Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1 una curva in forma cartesiana
$\gamma(t) = (t, f(t))^T$, $t \in [a, b]$, rettificabile
$l(G(f)) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2} dt$

Lunghezza di una curva in forma polare

Sia $\rho : (\cdot) : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R} \in C^1$ con $\rho(\vartheta) \geq 0$ in $[\alpha, \beta]$ una curva in forma polare
$\gamma(\vartheta) = (\rho(\vartheta) cos\vartheta, \rho(\vartheta) sin\vartheta)^T$, $l(\gamma) = \int_\alpha^\beta ||\gamma'(t)||d\vartheta = \int_\alpha^\beta \sqrt{(\rho(\vartheta))^2 + (\rho'(\vartheta))^2} d\vartheta$