

# Analisi II - quarta parte bis

## Conseguenza del teorema del valor medio

- Teorema

Se  $f : A(\subseteq \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$  differenziabile in  $A$  aperto e connesso ha  $\nabla f(\underline{x}) = \underline{0}$  allora  $\exists c \in \mathbb{R}$  t.c.  $f(\underline{x}) = c$  in  $A$ .

- Dimostrazione (Idea)

Fissiamo  $\underline{x}_0 \in A$  e consideriamo un generico  $\underline{x} \in A$ . Poichè  $A$  è connesso si può provare che esiste una poligonale di vertici  $\underline{x}^0, \dots, \underline{x}^n = \underline{x}$  interamente contenuta in  $A$ ,  $\forall k = 0, \dots, n-1$  il teorema del valor medio applicato al segmento di estremi  $\underline{x}^k, \underline{x}^{k+1}$  implica che  $f(\underline{x}^{k+1}) - f(\underline{x}^k) = \langle \nabla f(\underline{x}^k), \underline{x}^{k+1} - \underline{x}^k \rangle$ . Quindi si conclude che  $f(\underline{x}^{k+1}) = f(\underline{x}^k)$ ,  $\forall k = 0, \dots, n-1$  e dunque  $f(\underline{x}) = f(\underline{x}_0) = c$ ,  $\forall \underline{x} \in A$

## Derivate direzionali e parziali di ordine superiore

Sia  $f : A(\subseteq \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $A$  aperto e sia  $\underline{u} \in \mathbb{R}^n$  un versore. Supponiamo che esista  $\frac{\partial f}{\partial \underline{u}}(\underline{x})$  in

$A$ . Resta così definita  $\frac{\partial f}{\partial \underline{u}} : A(\subseteq \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ . Siano  $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$  un versore e  $\underline{x}_0 \in A$ . Se esiste

$\frac{\partial}{\partial \underline{v}}(\frac{\partial f}{\partial \underline{u}})(\underline{x}_0)$  questa si dice derivata direzionale seconda di  $f$  in  $\underline{x}_0$  lungo la direzione

orientata  $\underline{u}$  e  $\underline{v}$  nell'ordine e si indica con  $f_{\underline{u}\underline{v}} = \frac{\partial^2 f}{\partial \underline{u} \partial \underline{v}}(\underline{x}_0)$

Iterando il processo si definiscono le derivate direzionali successive.

- Sia  $f : A(\subseteq \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $A$  aperto. Supponiamo che esista  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{x})$  in  $A$ . Resta così

definita  $\frac{\partial f}{\partial x_i} : A(\subseteq \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$

- Sia  $\underline{x}_0 \in A$ . Se esiste  $\frac{\partial}{\partial x_j}(\frac{\partial f}{\partial x_i})(\underline{x}_0)$  questa si dice derivata parziale seconda di  $f$  in  $\underline{x}_0$

rispetto a  $x_i$  e  $x_j$  nell'ordine e si indica con  $f_{x_i x_j}(\underline{x}_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\underline{x}_0)$

Analogamente si definisce la derivata parziale di ordine superiore

## Funzioni di classe $C^k$

Sia  $f : A(\subseteq \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $A$  aperto, si dice che  $f$  è di classe  $C^k$  in  $A$  e si scrive  $f \in C^k(A)$  se  $f$  è dotata di tutte le derivate parziali fino all'ordine  $k$  e queste sono continue in  $A$ .

## Teorema di Schwartz

Se  $f : A(\subseteq \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $A$  aperto, è di classe  $C^k$  in  $A$  allora le derivate miste  $h$ -esime, con  $2 \leq h \leq k$  non dipendono dall'ordine seguito nell'eseguire la derivazione

## Forme lineari e forme quadratiche

- Un'applicazione  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $L(\underline{h}) = \sum a_i h_i = \langle \underline{a}, \underline{h} \rangle$ , con  $\underline{a} = (a_1, \dots, a_n)^T$ , è detta forma lineare in  $\mathbb{R}^n$ . Se  $L \neq 0$  allora  $L$  è un polinomio omogeneo di  $I$  grado nelle variabili  $h_1, \dots, h_n$ .
- Un'applicazione  $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $Q(\underline{h}) = \sum \sum a_{ij} h_j h_i = \langle \mathbb{A} \cdot \underline{h}, \underline{h} \rangle$ , con  $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ , è detta forma quadratica in  $\mathbb{R}^n$ .

## Proprietà delle forme quadratiche

Sia  $\mathbb{A} \in M(n, n)$  e  $\underline{h}, \underline{k} \in \mathbb{R}^n$ . Si ha:

- $\langle \mathbb{A} \cdot \underline{h}, \underline{k} \rangle = \langle \underline{h}, \mathbb{A} \cdot \underline{k} \rangle$ . Infatti  $\langle \mathbb{A} \cdot \underline{h}, \underline{k} \rangle = \sum (\sum a_{ij} \cdot h_j) k_i = \sum (\sum a_{ij} \cdot k_j) h_i$ .
- Se  $Q(\underline{h}) = \langle \mathbb{A} \underline{h}, \underline{h} \rangle$ , allora posto  $\mathbb{A}^s = \frac{1}{2}(\mathbb{A} + \mathbb{A}^T)$ ,  $\mathbb{A}^s$  è simmetrica.  $Q(\underline{h}) = \langle \mathbb{A}^s \cdot \underline{h}, \underline{h} \rangle$ . Infatti  $Q(\underline{h}) = \langle \mathbb{A} \cdot \underline{h}, \underline{h} \rangle = \langle \underline{h}, \mathbb{A}^T \cdot \underline{h} \rangle$  e quindi  $2 \cdot Q(\underline{h}) = \langle \mathbb{A} \cdot \underline{h}, \underline{h} \rangle + \langle \underline{h}, \mathbb{A}^T \cdot \underline{h} \rangle = \langle (\mathbb{A} + \mathbb{A}^T) \cdot \underline{h}, \underline{h} \rangle$ . Dunque  $Q(\underline{h}) = \langle \frac{1}{2}(\mathbb{A} + \mathbb{A}^T) \cdot \underline{h}, \underline{h} \rangle$   
non è restrittivo supporre che  $\mathbb{A} = \mathbb{A}^s$
- Se  $L$  è una forma lineare,  $L(\underline{h}) = \langle \underline{a}, \underline{h} \rangle$ , si ha  $\nabla \langle \underline{a}, \underline{h} \rangle = \left( \frac{\partial}{\partial h_1} a_1 h_1, \dots, \frac{\partial}{\partial h_n} a_n h_n \right) = \underline{a}$  (in quanto  $\frac{\partial}{\partial h_i} a_i h_i = a_i$ )
  - Se  $Q$  è una forma quadratica con  $Q(\underline{h}) = \langle \mathbb{A} \cdot \underline{h}, \underline{h} \rangle$ ,  $\nabla \langle \mathbb{A} \cdot \underline{h}, \underline{h} \rangle = (\mathbb{A} + \mathbb{A}^T) \cdot \underline{h} = 2\mathbb{A}^s \cdot \underline{h}$ . Infatti per  $N = 2$ :  $\nabla \cdot (\langle \mathbb{A} \cdot \underline{h}, \underline{h} \rangle) = \nabla(a_1 h_1^2 + \dots + a_n h_n^2) = \begin{pmatrix} 2a_{11}h_1 + a_{12}h_2 + a_{21}h_2 \\ a_{12}h_1 + a_{21}h_1 + 2a_{22}h_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_{11} + a_{12} + a_{21} \\ a_{12} + a_{21} + 2a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \left[ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = (\mathbb{A} + \mathbb{A}^T) \cdot \underline{h}$

## Differenziale per campi scalari

Sia  $f : A(\subseteq \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $A$  aperto, differenziabile in  $A$  e sia  $\underline{x}^0 \in A$ . Sia  $g = \nabla f$  in  $\underline{x}^0$ . Si chiama matrice **Hessiana** di  $f$  in  $\underline{x}^0$  e risulta  $Hf(\underline{x}^0) = Jg(\underline{x}^0) = J(\nabla f)(\underline{x}^0) =$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(\underline{x}^0) & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n}(\underline{x}^0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial x_1}(\underline{x}^0) & \dots & \frac{\partial g_n}{\partial x_n}(\underline{x}^0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix} \in M(n, n). \text{ La matrice Hessiana è la}$$

matrice di tutte le derivate parziali seconde.

La forma quadratica  $Q(\underline{h}) = \langle Hf(\underline{x}^0) \cdot \underline{h}, \underline{h} \rangle = d^2 f(\underline{x}^0) = \sum (\sum \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\underline{x}^0) h_j) h_i$

## Teorema di Young (sulla simmetria delle matrici Hessiane)

Se  $f$  è due volte differenziabile in  $\underline{x}^0$ , allora  $Hf(\underline{x}^0)$  è simmetrica, cioè  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\underline{x}^0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\underline{x}^0)$ .

## Condizione sufficiente affinché una $f$ sia due volte differenziabile

Se  $f \in C^2(A)$ ,  $A$  aperto, allora  $f$  è due volte differenziabile in ogni punto di  $A$ . Inoltre  $g = \nabla f \in C^1(A)$ . Se  $g \in C^1(A) \Rightarrow g$  è differenziabile in  $A$  si conclude che  $f$  è due volte differenziabile in  $A$

## Teorema (formula di Taylor di ordine II)

Se  $f$  è due volte differenziabile in  $\underline{x}^0$ , allora  $f(\underline{x}) = f(\underline{x}^0) + \langle \nabla f(\underline{x}^0), \underline{x} - \underline{x}^0 \rangle + \frac{1}{2} \langle Hf(\underline{x}^0)(\underline{x} - \underline{x}^0), \underline{x} - \underline{x}^0 \rangle + o(\|\underline{x} - \underline{x}^0\|)$ , approssimazione quadratica di  $f$  in  $\underline{x}^0$  o polinomio di Taylor di  $f$  in  $\underline{x}^0$  di ordine II

## Dimostrazione

Poniamo  $\varphi(\underline{x}) = f(\underline{x}) - (f(\underline{x}^0) + \langle \nabla f(\underline{x}^0), \underline{x} - \underline{x}^0 \rangle + \frac{1}{2} \langle Hf(\underline{x}^0)(\underline{x} - \underline{x}^0), \underline{x} - \underline{x}^0 \rangle + o(\|\underline{x} - \underline{x}^0\|))$ . Proviamo che  $\varphi(\underline{x}) = o(\|\underline{x} - \underline{x}^0\|)$ .

Poichè  $f$  è differenziabile in  $\underline{x}^0$ , anche  $\varphi$  è differenziabile in  $\underline{x}^0$  e  $\nabla \varphi(\underline{x}) = \nabla f(\underline{x}) - \nabla f(\underline{x}^0) - Hf(\underline{x}^0)(\underline{x} - \underline{x}^0)$ . Poichè  $\nabla f$  è differenziabile in  $\underline{x}^0$ , si ha che  $\nabla \varphi(\underline{x}) = o(\|\underline{x} - \underline{x}^0\|)$ . Appliciamo il teorema del valor medio a  $\varphi$ :  $\varphi(\underline{x}) - \varphi(\underline{x}^0) = \langle \nabla \varphi(\underline{x}^0 + \vartheta(\underline{x} - \underline{x}^0)), \underline{x} - \underline{x}^0 \rangle$ , per qualche  $\vartheta \in ]0, 1[$  e quindi  $|\varphi(\underline{x})| = |\langle \nabla \varphi(\underline{x}^0 + \vartheta(\underline{x} - \underline{x}^0)), \underline{x} - \underline{x}^0 \rangle| \leq \|\nabla \varphi(\underline{x}^0 + \vartheta(\underline{x} - \underline{x}^0))\| \cdot \|\underline{x} - \underline{x}^0\| \stackrel{C-S}{=} o(\|\vartheta(\underline{x} - \underline{x}^0)\|) \cdot \|\underline{x} - \underline{x}^0\| \stackrel{\underline{x} \rightarrow \underline{x}^0}{\leq} o(\|\underline{x} - \underline{x}^0\|^2)$

## Punti di minimo e massimo relativo

Sia  $f : E(\subseteq \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ , un punto  $\underline{x}^0 \in E$ . Si dice minimo (massimo) relativo per  $f$  se esiste un intorno  $U$  di  $\underline{x}^0$  t.c.  $f(\underline{x}) \underset{(<)}{>} f(\underline{x}^0), \forall \underline{x} \in U \cap E$

## Studio degli estremi liberi

---

### Test del quoziente o tesi di Fermat (condizione necessaria per l'esistenza del punto di estremo)

Se  $f : E(\subseteq \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$  è differenziabile in  $\underline{x}^0 \in \text{int}E$  e  $\underline{x}^0$  è punto di estremo relativo per  $f$  allora  $\nabla f(\underline{x}^0) = \underline{0}$ .

### Dimostrazione

Fissato un versore  $\underline{u} \in \mathbb{R}^n$ . Poichè  $\underline{x}^0 \in \text{int}E$  esiste  $\delta > 0$  t.c.  $\underline{x} = \underline{x}^0 + t\underline{u} \in E, \forall |t| < \delta$ . Poniamo  $g(t) = f(\underline{x}^0 + t\underline{u}), \forall |t| < \delta$ . Poichè  $f$  ha un punto di minimo in  $\underline{x}^0$ ,  $g$  ha un punto di minimo in  $t = 0, 0 \in ] - \delta, \delta[$  ed è derivabile in 0, essendo la composta di funzioni differenziabile e derivabile. Per il teorema di Fermat unidimensionale si ha  $0 = g'(0) = \langle \nabla f(\underline{x}^0), \underline{u} \rangle = \frac{\partial f}{\partial \underline{u}}(\underline{x}^0)$ . In particolare risulta  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{x}^0) = 0$ , per  $i = 1, \dots, n$ , cioè  $\nabla f(\underline{x}^0) = \underline{0}$

## Punti critici

---

Sia  $f : E(\subseteq \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$  differenziabile in  $\underline{x}^0 \in \text{int}E$ . Si dice che  $\underline{x}^0$  è punto critico per  $f$  se  $\nabla f(\underline{x}^0) = 0$

## Punto di sella

---

Un punto critico  $\underline{x}^0$  per  $f$  si dice punto di sella per  $f$  se esistono due versori  $\underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^n$  linearmente indipendenti t.c. posto  $g(t) = f(\underline{x}^0 + t\underline{u})$  e  $h(t) = f(\underline{x}^0 + t\underline{v}), \forall |t| < \delta$ ,  $g$  ha un punto di minimo relativo per  $t = 0$  e  $h$  ha un punto di massimo relativo per  $t = 0$

## Studio della natura dei punti critici

---

### Segno di una forma quadratica (o di una matrice simmetrica)

Sia  $Q(\underline{h}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una forma quadratica con  $Q(\underline{h}) = \langle \mathbb{A} \cdot \underline{h}, \underline{h} \rangle$  dove  $\mathbb{A}$  è una matrice simmetrica  $N \times N$ .

Si dice che:

- $Q$  (o  $\mathbb{A}$ ) è definita positiva se  $Q(\underline{h}) > 0, \forall \underline{h} \neq \underline{0}$
- $Q$  (o  $\mathbb{A}$ ) è definita negativa se  $Q(\underline{h}) < 0, \forall \underline{h} \neq \underline{0}$

- $Q$  è indefinita nel segno se esistono  $\underline{u}, \underline{v}$  t.c.  $Q(\underline{u}) > 0 \wedge Q(\underline{v}) < 0$

## Criteri di definitezza

Sia  $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una forma quadratica, esiste  $\mathbb{A}(n, n)$  simmetrica t.c.  $Q(\underline{h}) = \langle \mathbb{A} \cdot \underline{h}, \underline{h} \rangle$ ,  $\forall \underline{h} \in \mathbb{R}^n$ .  $\mathbb{A}$  ha  $n$  autovalori reali:  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  e  $n$  autovettori  $\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_n$  t.c.  $\mathbb{A} \cdot \underline{u}_i = \lambda_i \underline{u}_i$ , per  $i = 1, \dots, n$  e li scelgo in modo da avere:  $\langle \underline{u}_i, \underline{u}_j \rangle = \begin{pmatrix} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{pmatrix} = \delta_{ij}$ , per  $i, j = 1, \dots, n$

Rango di una matrice di autovettori:  $\mathbb{U} = (\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_n)$  e definisco la matrice diagonale  $\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$ . Si ha  $\mathbb{U}^t \cdot \mathbb{U} = I_n$ , ossia  $\mathbb{U}^T = \mathbb{U}^{-1}$  e  $\mathbb{U}^T \mathbb{A} \mathbb{U} = \lambda \Leftrightarrow \mathbb{A} \mathbb{U} = \mathbb{U} \lambda$ , con  $\lambda_i$  radice di  $\det(\mathbb{A} - tI_n)$ .

## Proposizione

$Q$  è definita positiva  $\Leftrightarrow \lambda_1 > 0, \dots, \lambda_n > 0$ .  $Q$  è definita negativa  $\Leftrightarrow \lambda_1 < 0, \dots, \lambda_n < 0$ .  $Q$  è invece indefinita nel segno  $\Leftrightarrow$  esistono  $i, j$  t.c.  $\lambda_i < 0 < \lambda_j$

## Dimostrazione

Prendo  $\underline{h} \in \mathbb{R}^n$ . Esiste uno ed un solo  $\underline{k} \in \mathbb{R}^n$  t.c.  $\underline{h} = \mathbb{U} \cdot \underline{k}$ . Si ha  $Q(\underline{h}) = \langle \mathbb{A} \cdot \underline{h}, \underline{h} \rangle = \langle \mathbb{A} \mathbb{U} \underline{k}, \mathbb{U} \underline{k} \rangle$ , per le proprietà delle forme quadratiche:  $\langle \mathbb{A} \mathbb{U} \underline{k}, \mathbb{U} \underline{k} \rangle = \langle \mathbb{U}^T \mathbb{A} \mathbb{U} \underline{k}, \underline{k} \rangle = \langle \lambda \underline{k}, \underline{k} \rangle = \langle \begin{pmatrix} \lambda_1 k_1 \\ \vdots \\ \lambda_n k_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} \rangle = \lambda_1 k_1^2 + \dots + \lambda_n k_n^2$ . Si deduce quindi immediatamente il criterio enunciato.

## Criterio di Sylvester

$Q$  è definita positiva  $\Leftrightarrow$  dato  $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ , simmetrica,  $A_1 = a_{11} > 0$ ,  $A_2 =$

$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} > 0, \dots, A_n = \det \mathbb{A} > 0$ .  $Q$  è invece definita negativa  $\Leftrightarrow A_1 < 0$ ,  $A_2 > 0, \dots, (-1)^n A_n > 0$

## Lemma

$Q$  è definita positiva  $\Leftrightarrow \exists m > 0$  t.c.  $Q(\underline{h}) \geq m||\underline{h}||^2$  per ogni  $\underline{h} \in \mathbb{R}^n$ .  $Q$  è definita negativa  $\Leftrightarrow \exists M < 0$  t.c.  $Q(\underline{h}) \leq M||\underline{h}||^2$ , per ogni  $\underline{h} \in \mathbb{R}^n$

## Dimostrazione

$Q$  è definita positiva  $\Leftrightarrow \lambda_1 > 0, \dots, \lambda_n > 0$ . Pongo  $m = \min\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} > 0$ . Allora  $\forall \underline{h} \in \mathbb{R}^n$  esiste  $\underline{k} \in \mathbb{R}^n$  t.c.  $\underline{h} = \mathbb{U}\underline{k}$ . Si ha  $Q(\underline{h}) = \lambda_1 k_1^2 + \dots + \lambda_n k_n^2 \geq m k_1^2 + \dots + m k_n^2 = m||\underline{k}||^2 = m||\mathbb{U}^T \underline{h}||^2 = m||\underline{h}||^2$ , essendo  $\mathbb{U}$  ortogonale

## Test Hessiana (condizione sufficiente per l'esistenza di un punto di estremo)

### Teorema

Sia  $f : E(\subseteq \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$  due volte differenziabile in  $\underline{x}^0 \in \text{int}E$  e sia  $\underline{x}^0$  un punto critico di  $f$ , ossia  $\nabla f(\underline{x}^0) = \underline{0}$ . Si ha:

1. Se  $Hf(\underline{x}^0)$  è definita positiva, allora  $\underline{x}^0$  è punto di minimo per  $f$
2. Se  $Hf(\underline{x}^0)$  è definita negativa, allora  $\underline{x}^0$  è punto di massimo per  $f$
3. Se  $Hf(\underline{x}^0)$  è indefinita nel segno, allora  $\underline{x}^0$  è punto di sella per  $f$

### Dimostrazione

$f(\underline{x}) = f(\underline{x}^0) + \langle \nabla f(\underline{x}^0), \underline{x} - \underline{x}^0 \rangle + \frac{1}{2} \langle Hf(\underline{x}^0)(\underline{x} - \underline{x}^0), \underline{x} - \underline{x}^0 \rangle + o(||\underline{x} - \underline{x}^0||^2)$ . Il punto è critico  $\Rightarrow \nabla f(\underline{x}^0) = \underline{0} \Rightarrow \langle \nabla f(\underline{x}^0), \underline{x} - \underline{x}^0 \rangle = 0$ . Allora:  $f(\underline{x}) - f(\underline{x}^0) = \frac{1}{2} \langle Hf(\underline{x}^0)(\underline{x} - \underline{x}^0), \underline{x} - \underline{x}^0 \rangle + o(||\underline{x} - \underline{x}^0||^2)$ . Nel primo caso  $Hf(\underline{x}^0)$  è definita positiva e quindi  $\exists m > 0$  t.c.  $\langle Hf(\underline{x}^0)\underline{h}, \underline{h} \rangle \geq m||\underline{h}||^2, \forall \underline{h} \in \mathbb{R}^n$ . Allora risulta che la funzione  $f(\underline{x}) - f(\underline{x}^0) = \frac{1}{2} \langle Hf(\underline{x}^0)(\underline{x} - \underline{x}^0), \underline{x} - \underline{x}^0 \rangle + o(||\underline{x} - \underline{x}^0||^2) \geq$

$\frac{m}{2} ||\underline{x} - \underline{x}^0||^2 + o(||\underline{x} - \underline{x}^0||^2) = \left( \frac{m}{2} + \frac{o(||\underline{x} - \underline{x}^0||^2)}{||\underline{x} - \underline{x}^0||^2} \right) ||\underline{x} - \underline{x}^0||^2$ . Poichè

$\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}^0} \left( \frac{m}{2} + \frac{o(||\underline{x} - \underline{x}^0||^2)}{||\underline{x} - \underline{x}^0||^2} \right) = \frac{m}{2} > 0$  e, per il teorema di permanenza del segno esiste

un intorno  $U$  di  $\underline{x}^0$  tale per cui  $\frac{m}{2} + \frac{o(||\underline{x} - \underline{x}^0||^2)}{||\underline{x} - \underline{x}^0||^2} > 0, \forall \underline{x} \in U \cap E$ , con  $\underline{x} \neq \underline{x}^0$ . Ne segue che  $f(\underline{x}) - f(\underline{x}^0) > 0, \forall \underline{x} \in U \cap E$ , con  $\underline{x} \neq \underline{x}^0$ , ossia  $\underline{x}^0$  è punto di minimo relativo, la situazione è analoga per il secondo caso.

Nel terzo caso:  $Hf(\underline{x}^0)$  è indefinita nel segno, quindi  $\exists \underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^n$ , versori, t.c.  $\langle$

$Hf(\underline{x}^0)\underline{u}, \underline{u} \rangle < 0 < \langle Hf(\underline{x}^0)\underline{v}, \underline{v} \rangle$ . Pongo  $g(t) = f(\underline{x}^0 + t\underline{u})$  e  $h(t) = f(\underline{x}^0 + t\underline{v})$ . Ho che  $g(t) - g(0) = f(\underline{x}^0 + t\underline{u}) - f(\underline{x}^0) = \frac{1}{2} \langle Hf(\underline{x}^0)t\underline{u}, t\underline{u} \rangle + o(||t\underline{x}^0||^2)$ .

Ossia:  $\frac{1}{2} \langle Hf(\underline{x}^0)t\underline{u}, t\underline{u} \rangle + o(||t\underline{x}^0||^2) = \frac{t^2}{2} \langle Hf(\underline{x}^0)\underline{u}, \underline{u} \rangle + o(t^2) = \left( \frac{1}{2} \langle Hf(\underline{x}^0)\underline{u}, \underline{u} \rangle + \frac{o(t^2)}{t^2} \right) t^2$ .

Ma allora:  $\lim_{t \rightarrow 0} \left( \frac{1}{2} \langle Hf(\underline{x}^0) \underline{u}, \underline{u} \rangle + \frac{o(t^2)}{t^2} \right) t^2 = \frac{1}{2} \langle Hf(\underline{x}^0) \underline{u}, \underline{u} \rangle < 0$ . Allora per il teorema di permanenza del segno esiste  $\delta > 0$  t.c.  $\frac{1}{2} \langle Hf(\underline{x}^0) \underline{u}, \underline{u} \rangle + \frac{o(t^2)}{t^2} > 0$ , per  $0 < |t| < \delta$  e quindi  $g(t) - g(0) < 0, \forall 0 < |t| < \delta$ , ossia  $g$  ha un massimo in  $t = 0$ . Ugualmente si verificache  $h$  ha un minimo in  $t = 0$ , ossia  $\underline{x}^0$  è un punto di sella.

## Teorema

---

Sia  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  continua e  $\lim_{\|\underline{x}^0 \rightarrow +\infty\|} f(\underline{x}^0) = +\infty$  allora esiste  $\min_{\mathbb{R}^n} f$ , concetto simile alla coercività di  $\mathbb{R}$ . Analogmente se  $\lim_{\|\underline{x}^0 \rightarrow +\infty\|} f(\underline{x}^0) = -\infty$  allora esiste  $\max_{\mathbb{R}^n} f$ , concetto simile all'anticoercività di  $\mathbb{R}$ .