Analisi II - quarta parte bis

Conseguenza del teorema del valor medio

- Teorema
  Se $f : A(\subseteq \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ differenziabile in A aperto e connesso ha $\nabla f(\underline{x}) = \underline{0}$ allora $\exists c \in \mathbb{R}$ t.c. $f(\underline{x}) = c$ in A.
  - Dimostrazione (Idea)
    Fissiamo $\underline{x_0} \in A$ e consideriamo un generico $\underline{x} \in A$. Poichè A è connesso si può provare che esiste una poligonale di vertici $\underline{x}^0, ..., \underline{x}^n = \underline{x}$ interamente contenuta in A, $\forall k = 0, ..., n-1$ il teorema del valor medio applicato al segmento di estremi $\underline{x}^k, \underline{x}^{k+1}$ implica che $f(\underline{x}^{k+1}) = f(\underline{x}^k) =< \nabla f(\underline{x}^k) + \vartheta(\underline{x}^{k+1} - \underline{x}^k)), \underline{x}^{k+1} - \underline{x}^k >= 0$. Quindi si conclude che $f(\underline{x}^{k+1}) = f(\underline{x}^k)$, $\forall k = 0, ..., 1$ e dunque $f(\underline{x}) = f(\underline{x}^0) = c$, $\forall \underline{x} \in A$

Derivarte direzionali e parziali di ordine superiore

Sia $f : A(\subseteq \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$, A aperto e sia $\underline{u} \in \mathbb{R}^n$ un versore. Supponiamo che esista $\dfrac{\partial f}{\partial \underline{u}}(\underline{x})$ in A. Resta così definita $\dfrac{\partial f}{\partial \underline{u}} : A(\subseteq \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$. Siano $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$ un versore e $\underline{x_0} \in A$. Se esiste $\dfrac{\partial}{\partial \underline{v}}\left(\dfrac{\partial f}{\partial \underline{u}}\right)(\underline{x_0})$ questa si dice derivata direzionale seconda di f in $\underline{x_0}$ lungo la direzione orientata $\underline{u}$ e $\underline{v}$ nell'ordine e si indica con $f_{\underline{uv}} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial \underline{u} \partial \underline{v}}(\underline{x_0})$
Iterando il processo si definiscono le derivate direzionali successive.

- Sia $f : A(\subseteq \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$, A aperto. Supponiamo che esista $\dfrac{\partial f}{\partial \underline{x_i}}(\underline{x})$ in A. Resta così definita $\dfrac{\partial f}{\partial \underline{x_i}} : A(\subseteq \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$
- Sia $\underline{x_0} \in A$. Se esiste $\dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right)(\underline{x}^0)$ questa si dice derivata parziale seconda di f in $\underline{x_0}$ rispetto a x_i e x_j nell'ordine e si indica con $f_{x_i x_j}(\underline{x}^0) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\underline{x}^0)$
  Analogamente si definisce la derivata parziale di ordine superiore

Funzioni di classe C^k

Sia $f : A(\subseteq \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R} A$ aperto, si dice che f è di classe C^k in A e si scrive $f \in C^k(A)$ se f è dotata di tutte le derivate parziali fino all'ordine k e queste sono continue in A.

Teorema di Schwartz

Se $f : A(\subseteq \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$, A aperto, è di classe C^k in A allora le derivate miste h-esime, con $2 \leq h \leq k$**non** dipendono dall'ordine seguiteo nell'eseguire la derivazione

Forme lineari e forme quadratiche

- Un'applicazione $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $L(\underline{h}) = \sum a_i h_i =< \underline{a}, \underline{h} >$, con $\underline{a} = (a_1, ..., a_n)^T$, è detta forma lineare in $\mathbb{R}^n$. Se $L \neq 0$ allora L è un polinomio omogeneo di I grado nelle variabili $\ell_1, ..., \ell_n$.
- Un'applicazione $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $Q(\underline{h}) = \sum\sum a_{ij} h_j h_i =< \mathbb{A} \cdot \underline{h}, \underline{h} >$, con $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} a_{11} ... a_{1n} \\ \vdots \ddots \vdots \\ a_{n1} ... a_{nn} \end{pmatrix}$, è detta forma quadratica in $\mathbb{R}^n$.

Proprietà delle forme quadratiche

Sia $\mathbb{A} \in M(n,n)$ e $\underline{h}, \underline{k} \in \mathbb{R}^n$. Si ha:

1. $< \mathbb{A} \cdot \underline{h}, \underline{k} >=< \underline{h}, \mathbb{A} \cdot \underline{k} >$. Infatti $< \mathbb{A} \cdot \underline{h}, \underline{k} >= \sum(\sum a_{ij} \cdot h_j) k_i = \sum(\sum a_{ij} \cdot k_j) h_i$.
2. Se $Q(\underline{h}) =< \mathbb{A}\underline{h}, \underline{h} >$, allora posto $\mathbb{A}^s = \frac{1}{2}(\mathbb{A} + \mathbb{A}^T)$, $\mathbb{A}^s$ è simmetrica. $Q(\underline{h}) =< \mathbb{A}^s \cdot \underline{h}, \underline{h}$. Infatti $Q(\underline{h}) =< \mathbb{A} \cdot \underline{h}, \underline{h} =< \underline{h}, \mathbb{A}^T \cdot \underline{h} >$ e quindi $2 \cdot Q(\underline{h}) =< \mathbb{A} \cdot \underline{h}, \underline{h} + < \underline{h}, \mathbb{A}^T \cdot \underline{h} >=< (\mathbb{A} + \mathbb{A}^T) \cdot \underline{h}, \underline{h} >$. Dunque $Q(\underline{h}) =< \frac{1}{2}(\mathbb{A} + \mathbb{A}^T) \cdot \underline{h}, \underline{h} >$
   non è restrittivo supporre che $\mathbb{A} = \mathbb{A}^s$
3. - Se L è una forma lineare, $L(\underline{h}) =< \underline{a}, \underline{h} >$, si ha $\nabla < \underline{a}, \underline{h} >= (\frac{\partial}{\partial h_1} a_1 h_1, ..., \frac{\partial}{\partial h_n} a_n h_n) = \underline{a}$ (in quanto $\frac{\partial}{\partial h_i} a_i h_i = a_i$)
   - Se Q è una forma quadratica con $Q(\underline{h}) =< \mathbb{A} \cdot \underline{h}, \underline{h} >$, $\nabla < \mathbb{A} \cdot \underline{h}, \underline{h} >= (\mathbb{A} + \mathbb{A}^T) \cdot \underline{h} = 2\mathbb{A}^s \cdot \underline{h}$. Infatti per $N = 2$: $\nabla \cdot (< \mathbb{A} \cdot \underline{h}, \underline{h} >) = \nabla(a_1 h_1^2 + ... + a_n h_n^2) = \begin{pmatrix} 2a_{11} h_1 + a_{12} h_2 + a_{21} h_2 \\ a_{12} h_1 + a_{21} h_1 + 2a_{22} h_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_{11} + a_{12} + a_{21} \\ a_{12} + a_{21} + 2a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} a_{11} a_{12} \\ a_{21} a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} a_{21} \\ a_{12} a_{22} \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = (\mathbb{A} + \mathbb{A}^T) \cdot \underline{h}$

Differenziale per campi scalari

Sia $f : A(\subseteq \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$, A aperto, differenziabile in A e sia $\underline{x}^0 \in A$. Sia $g = \nabla f$ in $\underline{x}^0$. Si chiama matrice **Hessiana** di f in $\underline{x}^0$ e risulta $Hf(\underline{x}^0) = Jg(\underline{x}^0 = J(\nabla f)(\underline{x}^0) =$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{x_1}(\underline{x}^0) \dots \frac{\partial g_1}{x_n}(\underline{x}^0) \\ \vdots \ddots \vdots \\ \frac{\partial g_n}{x_1}(\underline{x}^0) \dots \frac{\partial g_n}{x_n}(\underline{x}^0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} \dots \frac{\partial^2 f}{\partial x_i x_n} \\ \vdots \ddots \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n x_1} \dots \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix} \in M(n,n)$$. La matrice Hessiana è la matrice di tutte le derivate parziali seconde.
La forma quadratica $Q(\underline{h}) =< Hf(\underline{x}^0) \cdot \underline{h}, \underline{h} >= d^2 f(\underline{x}^0) = \sum(\sum \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\underline{x}^0)h_j)h_i$

Teorema di Young (sulla simmetrica delle matrici Hessiane)

Se f è due volte differenziabile in $\underline{x}^0$, allora $Hf(\underline{x}^0)$ è simmetrica, cioè $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\underline{x}^0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\underline{x}^0)$.

Condizione sufficiente affinchè una f sia due volte differenziabile

Se $f \in C^2(A)$, A aperto, allora f è due volte differenziabile in ogni punto di A. Inoltre $g = \nabla f \in C^1(A)$. Se $g \in C^1(A) \Rightarrow g$ è differenziabile in A si conclude che f è due volte differenziabile in A

Teorema (formula di Taylor di ordine II)

Se f è due volte differenziabile in $\underline{x}^0$, allora $f(\underline{x}) = f(\underline{x}^0) + < \nabla f(\underline{x}^0), \underline{x} - \underline{x}^0 > + \frac{1}{2} < Hf(\underline{x}^0)(\underline{x} - \underline{x_0}), \underline{x} - \underline{x}^0 > + o(||\underline{x} - \underline{x}^0||)$, approssimazione quadratica di f in $\underline{x}^0$ o polinomio di Taylor di f in $\underline{x}^0$ di ordine II

Dimostrazione

Poniamo $\varphi(\underline{x}) = f(\underline{x}) - (f(\underline{x}^0) + < \nabla f(\underline{x}^0), \underline{x} - \underline{x}^0 > + \frac{1}{2} < Hf(\underline{x}^0)(\underline{x} - \underline{x_0}), \underline{x} - \underline{x}^0 > + o(||\underline{x} - \underline{x}^0||))$. Proviamo che $\varphi(\underline{x}) = o(||\underline{x} - \underline{x}^0||)$.
Poichè f è differenziabile in $\underline{x}^0$, anche φ è differenziabile in $\underline{x}^0$ e $\nabla\varphi(\underline{x}) = \nabla f(\underline{x}) - \nabla f(\underline{x}^0) - Hf(\underline{x}^0)(\underline{x} - \underline{x}^0)$. Poichè ∇f è differenziabile in $\underline{x}^0$, si ha che $\nabla\varphi(\underline{x}) = o(||\underline{x} - \underline{x}^0||)$. Applichiamo il teorema del valor medio a φ: $\varphi(\underline{x}) - \cancel{\varphi(\underline{x}^0)} =< \nabla\varphi(\underline{x}^0 + \vartheta(\underline{x} - \underline{x}^0)), \underline{x} - \underline{x}^0 >$, per qualche $\vartheta \in]0,1[$ e quindi $|\varphi(\underline{x})| = | < \nabla\varphi(\underline{x}^0 + \vartheta(\underline{x} - \underline{x}^0)), \underline{x} - \underline{x}^0 > | \leq ||\nabla\varphi(\underline{x}^0 + \vartheta(\underline{x} - \underline{x}^0))|| \cdot ||\underline{x} - \underline{x}^0|| \stackrel{C-S}{=} \frac{||o(||\vartheta(\underline{x} - \underline{x}^0)||)|| \cdot ||\underline{x} - \underline{x}^0||^2}{\vartheta||\underline{x} - \underline{x}^0||} \stackrel{\underline{x} \to \underline{x}^0}{<} o(||\underline{x} - \underline{x}^0||^2)$

Punti di minimo e massimo relativo

Sia $f : E(\subseteq \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$, un punto $\underline{x}^0 \in E$. Si dice minimo (massimo) relativo per f se esiste un intorno U di $\underline{x}^0$ t.c. $f(\underline{x}) \underset{(<)}{>} f(\underline{x}^0), \forall \underline{x} \in U \cap E$

Studio degli estremi liberi

Test del quoziente o tesi di Fermat (condizione necessaria per l'esistenza del punto di estremo)

Se $f : E(\subseteq \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ è differenziabile in $\underline{x}^0 \in intE$ e $\underline{x}^0$ è punto di estremo relativo per f allora $\nabla f(\underline{x}^0) = \underline{0}$.

Dimostrazione

Fissato un versore $\underline{u} \in \mathbb{R}^n$. Poichè $\underline{x}^0 \in intE$ esiste $\delta > 0$ t.c. $\underline{x} = \underline{x}^0 + t\underline{u} \in E, \forall |t| < \delta$. Poniamo $g(t) = f(\underline{x}^0 + t\underline{u}), \forall |t| < \delta$. Poichè f ha un punto di minimo in $\underline{x}^0$, g ha un punto di minimo in $t = 0$, $0 \in]-\delta, \delta[$ ed è derivabile in 0, essendo la composta di funzioni differenziabile e derivabile. Per il teorema di Fermat unidimensionale si ha $0 = g'(0) =< \nabla f(\underline{x}^0), \underline{u} >= \dfrac{\partial f}{\partial \underline{u}}(\underline{x}^0)$. In particolare risulta $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{x}^0) = 0$, per $i = 1, ..., n$, cioè $\nabla f(\underline{x}^0) = \underline{0}$

Punti critici

Sia $f : E(\subseteq \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ differenziabile in $\underline{x}^0 \in intE$. Si dice che $\underline{x}^0$ è punto critico per f se $\nabla f(\underline{x}^0) = 0$

Punto di sella

Un punto critico $\underline{x}^0$ per f si dice punto di sella per f se esistono due versori $\underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^n$ linearmente indipendenti t.c. posto $g(t) = f(\underline{x}^0 + t\underline{u})$ e $h(t) = f(\underline{x}^0 + t\underline{v}), \forall |t| < \delta$, g ha un punto di minimo relativo per $t = 0$ e h ha un punto di massimo relativo per $t = 0$

Studio della natura dei punti critici

Segno di una forma quadratica (o di una matrice simmetrica)

Sia $Q(\underline{h}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una forma quadratica con $Q(\underline{h}) =< \mathbb{A} \cdot \underline{h}, \underline{h} >$ dove $\mathbb{A}$ è una matrice simmetrica $N \times N$.
Si dice che:

- Q (o $\mathbb{A}$) è definita positiva se $Q(\underline{h}) > 0, \forall \underline{h} \neq \underline{0}$
- Q (o $\mathbb{A}$) è definita negativa se $Q(\underline{h}) < 0, \forall \underline{h} \neq \underline{0}$

- Q è indefinita nel segno se esistono $\underline{u}, \underline{v}$ t.c. $Q(\underline{u}) > 0 \wedge Q(\underline{v}) < 0$

Criteri di definitezza

Sia $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una forma quadratica, esiste $\mathbb{A}(n, n)$ simmetrica t.c. $Q(\underline{h}) =< \mathbb{A} \cdot \underline{h}, \underline{h} >$, $\forall \underline{h} \in \mathbb{R}^n$. $\mathbb{A}$ ha n autovalori reali: $\lambda_1, ..., \lambda_n$ e n autovettori $\underline{u}_1, ..., \underline{u}_n$ t.c. $\mathbb{A} \cdot \underline{u}_i = \lambda_i \underline{u}_i$, per $i = 1, ..., n$ e li scelgo in modo da avere: $< \underline{u}_i, \underline{u}_j >= \begin{pmatrix} 1 \text{ se } i = j \\ 0 \text{ se } i \neq j \end{pmatrix} = \delta_{ij}$, per $i, j = 1, ..., n$
Rango di una matrice di autovettori: $\mathbb{U} = (u_1, ..., u_n)$ e definisco la matrice diagonale $\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$. Si ha $\mathbb{U}^t \cdot \mathbb{U} = I_n$, ossia $\mathbb{U}^T = \mathbb{U}^{-1}$ e $\mathbb{U}^T \mathbb{A} \mathbb{U} = \lambda \Leftrightarrow \mathbb{A}\mathbb{U} = \mathbb{U}\lambda$, con λ_i radice di $det(\mathbb{A} - t\mathbb{I}_n)$.

Proposizione

Q è definita positiva $\Leftrightarrow \lambda_1 > 0, ..., \lambda_n > 0$. Q è definita negativa $\Leftrightarrow \lambda_1 < 0, ..., \lambda_n < 0$. Q è invece indefinita nel segno $\Leftrightarrow$ esistono i, j t.c. $\lambda_i < 0 < \lambda_j$

Dimostrazione

Prendo $\underline{h} \in \mathbb{R}^n$. Esiste uno ed un solo $\underline{k} \in \mathbb{R}^n$ t.c. $\underline{h} = \mathbb{U} \cdot \underline{k}$. Si ha $Q(\underline{h}) =< \mathbb{A} \cdot \underline{h}, \underline{h} >= < \mathbb{A}\mathbb{U}\underline{k}, \mathbb{U}\underline{k} >$, per le proprietà delle forme quadratiche: $< \mathbb{A}\mathbb{U}\underline{k}, \mathbb{U}\underline{k} >=< \mathbb{U}^T \mathbb{A}\mathbb{U}\underline{k}, \underline{k} > =< \lambda\underline{k}, \underline{k} >=< \begin{pmatrix} \lambda_1 k_1 \\ \vdots \\ \lambda_n k_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} >= \lambda_1 k_1^2 + ... + \lambda_n k_n^2$. Si deduce quindi immediatamente il criterio enunciato.

Criterio di Sylvester

Q è definita positiva $\Leftrightarrow$ dato $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$, simmetrica, $A_1 = a_{11} > 0$, $A_2 = det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} > 0, ..., A_n = det\mathbb{A} > 0$. Q è invece definita negativa $\Leftrightarrow A_1 < 0, A_2 > 0, ..., (-1)^n A_n > 0$

Lemma

Q è definita positiva $\Leftrightarrow \exists m > 0$ t.c. $Q(\underline{h}) \geq m||\underline{h}||^2$ per ogni $\underline{h} \in \mathbb{R}^n$. Q è definita negativa $\Leftrightarrow \exists M < 0$ t.c. $Q(\underline{h}) \leq M||\underline{h}||^2$, per ogni $\underline{h} \in \mathbb{R}^n$

Dimostrazione

Q è definita positiva $\Leftrightarrow \lambda_1 > 0, ..., \lambda_n > 0$. Pongo $m = min\{\lambda_1, ..., \lambda_n\} > 0$. Allora $\forall \underline{h} \in \mathbb{R}^n$ esiste $\underline{k} \in \mathbb{R}^n$ t.c. $\underline{h} = \mathbb{U}\underline{k}$. Si ha $Q(\underline{h}) = \lambda_1 k_1^2 + ... + \lambda_n k_n^2 \geq m k_1^2 + ... + m k_n^2 = m||\underline{k}||^2 = m||\mathbb{U}^T \underline{h}||^2 = m||\underline{h}||^2$, essendo $\mathbb{U}$ ortogonale

Test Hessiana (condizione sufficiente per l'esistenza di un punto di estremo)

Teorema

Sia $f : E(\subseteq \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ due volte differenziabile in $\underline{x}^0 \in intE$ e sia $\underline{x}^0$ un punto criticodi f, ossia $\nabla f(\underline{x}^0) = \underline{0}$. Si ha:

1. Se $Hf(\underline{x}^0)$ è definita positiva, allora $\underline{x}^0$ è punto di minimo per f
2. Se $Hf(\underline{x}^0)$ è definita negativa, allora $\underline{x}^0$ è punto di massimo per f
3. Se $Hf(\underline{x}^0)$ è indefinita nel segno, allora $\underline{x}^0$ è punto di sella per f

Dimostrazione

$f(\underline{x}^0) = f(\underline{x}^0) + < \nabla f(\underline{x}^0), \underline{x} - \underline{x}^0 > + \frac{1}{2} < Hf(\underline{x}^0)(\underline{x} - \underline{x}^0), \underline{x} - \underline{x}^0 > + o(||\underline{x} - \underline{x}_0||^2)$. Il punto è critico $\Rightarrow \nabla f(\underline{x}^0) = \underline{0} \Rightarrow < \nabla f(\underline{x}^0), \underline{x} - \underline{x}^0 >= 0$. Allora: $f(\underline{x}) - f(\underline{x}^0) = \frac{1}{2} < Hf(\underline{x}^0)(\underline{x} - \underline{x}^0), \underline{x} - \underline{x}^0 > + o(||\underline{x} - \underline{x}_0||^2)$. Nel primo caso $Hf(\underline{x}^0)$ è definita positiva e quindi $\exists m > 0$ t.c. $< Hf(\underline{x}^0)\underline{h}, \underline{h} >\geq m||\underline{h}||^2$, $\forall \underline{h} \in \mathbb{R}^n$. Allora risulta che la funzione $f(\underline{x}) - f(\underline{x}^0) = \dfrac{1}{2} < Hf(\underline{x}^0)(\underline{x} - \underline{x}^0), \underline{x} - \underline{x}^0 > + o(||\underline{x} - \underline{x}_0||^2) \geq \dfrac{m}{2}||\underline{x} - \underline{x}^0||^2 + o(||\underline{x} - \underline{x}^0||^2) = \left(\dfrac{m}{2} + \dfrac{o(||\underline{x} - \underline{x}^0||^2)}{||\underline{x} - \underline{x}^0||^2}\right)||\underline{x} - \underline{x}^0||^2$. Poichè $\lim\limits_{\underline{x} \to \underline{x}^0} \left(\dfrac{m}{2} + \dfrac{o(||\underline{x} - \underline{x}^0||^2)}{||\underline{x} - \underline{x}^0||^2}\right) = \dfrac{m}{2} > 0$ e, per il teorema di permanenza del segno esiste un intorno U di $\underline{x}^0$ tale per cui $\frac{m}{2} + \frac{o(||\underline{x} - \underline{x}^0||^2)}{||\underline{x} - \underline{x}^0||^2} > 0, \forall \underline{x} \in U \cap E$, con $\underline{x} \neq \underline{x}^0$. Ne segue che $f(\underline{x}) - f\underline{x}^0) > 0, \forall \underline{x} \in U \cap E$, con $\underline{x} \neq \underline{x}^0$, ossia $\underline{x}^0$ è punto di minimo relativo, la situazione è analoga per il secondo caso.
Nel terzo caso: $Hf(\underline{x}^0)$ è indefinita nel segno, quindi $\exists \underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^n$, versori, t.c. $< Hf(\underline{x}^0)\underline{u}, \underline{u} >< 0 << Hf(\underline{x}^0)\underline{v}, \underline{v} >)$. Pongo $g(t) = f(\underline{x}^0 + t\underline{u})$ e $h(t) = f(\underline{x}^0 + t\underline{v})$. Ho che $g(t) - g(0) = f(\underline{x}^0 + t\underline{u}) - f(\underline{x}^0) = \dfrac{1}{2} < Hf(\underline{x}^0)t\underline{u}, t\underline{u} > + o(||t\underline{x}^0||^2)$.
Ossia: $\frac{1}{2} < Hf(\underline{x}^0)t\underline{u}, t\underline{u} > + o(||t\underline{x}^0||^2) = \frac{t^2}{2} < Hf(\underline{x}^0)\underline{u}, \underline{u} + o(t^2) = \left(\frac{1}{2} < Hf(\underline{x}^0)\underline{u}, \underline{u} > + \frac{o(t^2)}{t^2}\right) t^2$.

Ma allora: $\lim_{t \to 0} \left(\frac{1}{2} < Hf(\underline{x}^0)\underline{u}, \underline{u} > + \frac{o(t^2)}{t^2} \right) t^2 = \frac{1}{2} < Hf(\underline{x}^0)\underline{u}, \underline{u}) >< 0$. Allora per il teorema di permanenza del segno esiste $\delta > 0$ t.c. $\frac{1}{2} < Hf(\underline{x}^0)\underline{u}, \underline{u}) > + \frac{o(t^2)}{t^2} > 0$, per $0 < |t| < \delta$ e quindi $g(t) - g(0) < 0, \forall 0 < |t| < \delta$, ossia g ha un massimo in $t = 0$. Ugualmente si verificache h ha un minimo in $t = 0$, ossia $\underline{x}^0$ è un punto di sella.

Teorema

Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continua e $\lim_{||\underline{x}^0 \to +\infty||} f(\underline{x}^0) = +\infty$ allora esiste $\underset{\mathbb{R}^n}{min} f$, concetto simile alla coercività di $\mathbb{R}$. Analogmente se $\lim_{||\underline{x}^0 \to +\infty||} f(\underline{x}^0) = +\infty$ allora esiste $\underset{\mathbb{R}^n}{max} f$, concetto simile all'anticoercività di $\mathbb{R}$.