

Analisi II - settima parte

Integrazione

Integrazione secondo Riemann in \mathbb{R}^n ($N = 2, 3$)

Integrazione secondo Riemann su rettangoli in \mathbb{R}^2

Sia $R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ un rettangolo in \mathbb{R}^2

Decomposizione di R

Siano:

- $a_1 < x_0 < x_1 < \dots < x_n = b_1$ $n+1$ punti di $[a_1, b_1]$
 - $a_2 < y_0 < y_1 < \dots < y_m = b_2$ $m+1$ punti di $[a_2, b_2]$
- Per $i = 1, \dots, n$ e $j = 1, \dots, m$ si pone $R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$. La collezione di tutti i rettangoli si indica con δ , $\delta = \{R_{ij} : i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m\}$, si dice decomposizione di R

Insieme delle decomposizioni di R

Sia f una funzione **limitata**, $-\infty < l = \inf_R f \leq L = \sup_R f < +\infty$.

Si pone $\Delta(R) = \{\delta : \delta \text{ è decomposizione di } R\} \leftarrow \text{è l'insieme delle decomposizioni.}$

Somme inferiori e somme superiori

Sia una $\delta \in \Delta(R)$

$\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n l_{ij} \cdot m_2(R_{ij}) = s(\delta, f) \rightarrow \text{Somma inferiore,}$

$l_{ij} = \inf_{R_{ij}} f \rightarrow \text{altezza, misurata fino al minimo della funzione in quell'area}$

$m_2(R_{ij}) = (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) \rightarrow A_{\text{base}}, \forall i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m$

$l_{ij} \cdot m_2$ è dunque il volume inscritto nella figura solida, delimitata dal valore minimo della funzione e dal piano xy

$\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n L_{ij} \cdot m_2(R_{ij}) = S(\delta, f) \rightarrow \text{Somma superiore,}$

$L_{ij} = \sup_{R_{ij}} f \rightarrow \text{altezza, misurata fino al massimo della funzione in quell'area}$

$m_2(R_{ij}) = (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) \rightarrow A_{\text{base}}, \forall i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m$

$L_{ij} \cdot m_2$ è dunque il volume del parallelepipedo circoscritto alla figura solida, delimitata dal valore massimo della funzione e dal piano xy

Proposizione

$\forall \delta_1, \delta_2 \in \Delta(R)$, si ha $s(\delta_1, f) \leq S(\delta_2, f)$

Conseguenza

Le classi

$$\sigma(f) = \{s(\delta, f) : \delta \in \Delta(R)\} \text{ e}$$

$$\Sigma(f) = \{S(\delta, f) : \delta \in \Delta(R)\} \text{ sono classi separate}$$

Integrale secondo Riemann su un rettangolo in \mathbb{R}^2

Se $\sigma(f)$ e $\Sigma(f)$ sono classi contigue, cioè $\sup \sigma(f) = \inf \Sigma(f)$, allora si dice che f è integrabile su R e si pone $\int \int_R f(x, y) dx dy = \sup \sigma(f) = \inf \Sigma(f)$

Significato geometrico

Sia $f : R(\subseteq \mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R}$, integrabile su R e $f(x, y) > 0$ in R .

Si pone $T = \{(x, y, z)^T \in R, 0 < z \leq f(x, y)\}$. Si ha $m_3(T) = \int \int_R f(x, y) dx dy$

Integrazione secondo Riemann su un parallelepipedo in \mathbb{R}^3

- Sia $R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$

Decomposizione di R

- $a_1 < x_0 < x_1 < \dots < x_n = b_1$ $n + 1$ punti di $[a_1, b_1]$
- $a_2 < y_0 < y_1 < \dots < y_m = b_2$ $m + 1$ punti di $[a_2, b_2]$
- $a_3 < z_0 < z_1 < \dots < z_l = b_3$ $l + 1$ punti di $[a_3, b_3]$

Per $i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m, k = 1, \dots, l$.

La collezione $\delta = \{R_{ijk} : i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m, k = 1, \dots, l\}$ si dice decomposizione di R .

$\Delta(R)$ è l'insieme di tutte le composizioni di R

Somme inferiori e somme superiori

Sia δ una decomposizione di R , $\delta \in \Delta(R)$, si pone

$$\sum_{k=1}^l \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n j = 1^m \sum_{i=1}^n l_{ijk} m_3(R_{ijk}) = s(\delta, f)$$

$$\sum_{k=1}^l \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n j = 1^m \sum_{i=1}^n L_{ijk} m_3(R_{ijk}) = S(\delta, f)$$

dove $l_{ijk} = \inf_{R_{ijk}} f \leq L_{ijk} = \sup_{R_{ijk}} f$ e $m_3(R_{ijk}) = (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})(z_k - z_{k-1})$,

per $i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m, k = 1, \dots, l$.

Proposizione

$\forall \delta_1, \delta_2 \in \Delta(R)$ si ha $s(\delta_1, f) \leq S(\delta_2, f)$

Conseguenza

Le classi

$\sigma(f) = \{s(\delta, f) : \delta \in \Delta(R)\}$ e

$\Sigma(f) = \{S(\delta, f) : \delta \in \Delta(R)\}$ sono classi separate

Integrale secondo Riemann su un parallelepipedo su R

Se $\sigma(f)$ e $\Sigma(f)$ sono contigue, cioè $\sup \sigma(f) = \inf \Sigma(f)$, allora si dice che f è integrabile su R e si pone $\iiint_R f(x, y, z) dx dy dz = \sup \sigma(f) = \inf \Sigma(f)$

Rettangoli n -dimensionali ("n-rettangoli") e integrazione su n -rettangoli

Se $n = 1$, allora $R = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ è un rettangolo 1-dimensionale, "1-rettangolo"

Se $n = 2$, allora $R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \subseteq \mathbb{R}^2$ è un rettangolo 2-dimensionale, "2-rettangolo"

...

In generale $R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n] \subseteq \mathbb{R}^n$ è un rettangolo n -dimensionale, " n -rettangolo"

La stessa costruzione fatta in precedenza permette di definire l'integrale di $f : R(\subseteq \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$, con R rettangolo limitato, si indica con $\int_R f$

Condizioni di integrabilità

Se $f : R(\subseteq \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$, R n -rettangolo, continua, allora f è integrabile su R

Formula di riduzione

Problema

Come calcolare un integrale doppio o un integrale triplo?

- $n = 1$ se $f : R = [a, b](\subseteq \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ è continua allora $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$, per il teorema di Torricelli, con $F' = f$ in R
- $n \geq 2$ si cerca di ridurre l'integrale doppio (triplo) a due (tre) successive integrazioni unidimensionali

Formule di riduzione per integrali doppi su rettangoli

Teorema di Fubini

Se $f : R = [a, b] \times [c, d](\subseteq \mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R}$, è integrabile su R e, per ogni $\bar{x} \in [a, b]$ $f(\bar{x}, \cdot) : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ (x fissato, y libero), è integrabile su $[c, d]$, allora, posto $g(x) = \int_c^d f(x, y) dy$, si

ha che $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è integrabile, $\int_a^b g(x)dx = \iint_R f(x, y)dx dy$, cioè

$$\underbrace{\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)dy \right) dx}_{\text{integrale iterato inferiori e superiori}} = \underbrace{\iint_R f(x, y)dx dy}_{\text{integrale doppio}}$$

NB

Vale il risultato analogo in cui x e y si scambiano i ruoli nel teorema di Fubini:

Se $f : R = [a, b] \times [c, d] (\subseteq \mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R}$, integrabile su R e $\forall \bar{y} \in [c, d]$ la funzione $f(\cdot, \bar{y}) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è integrabile su $[a, b]$, allora, posto $h(y) = \int_a^b f(x, y)dx$, la funzione $h : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ è integrabile su $[c, d]$ e $\int_c^d h(y)dy = \iint_R f(x, y)dx dy$ cioè $\int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)dx \right) dy = \iint_R f(x, y)dx dy$

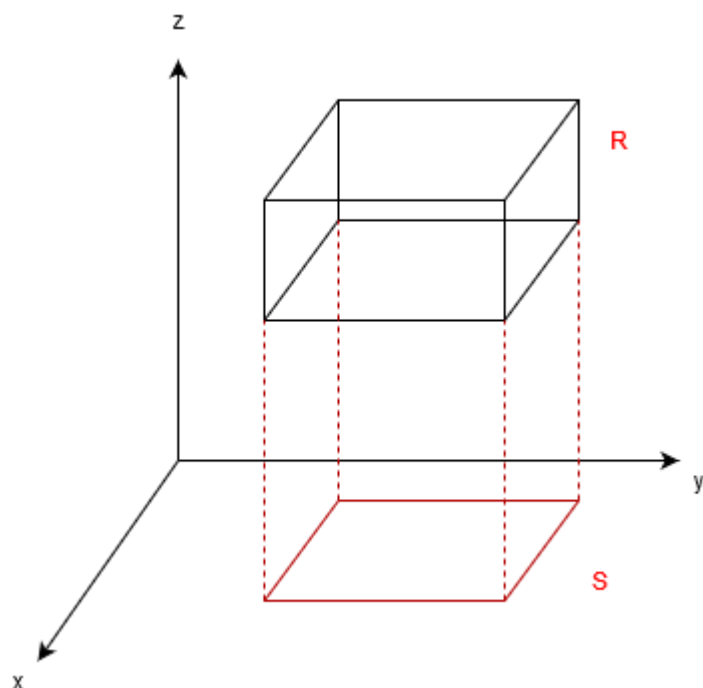
Osservazione

Se $f : R \rightarrow \mathbb{R}$, è continua allora valgono entrambe le versioni del teorema di Fubini

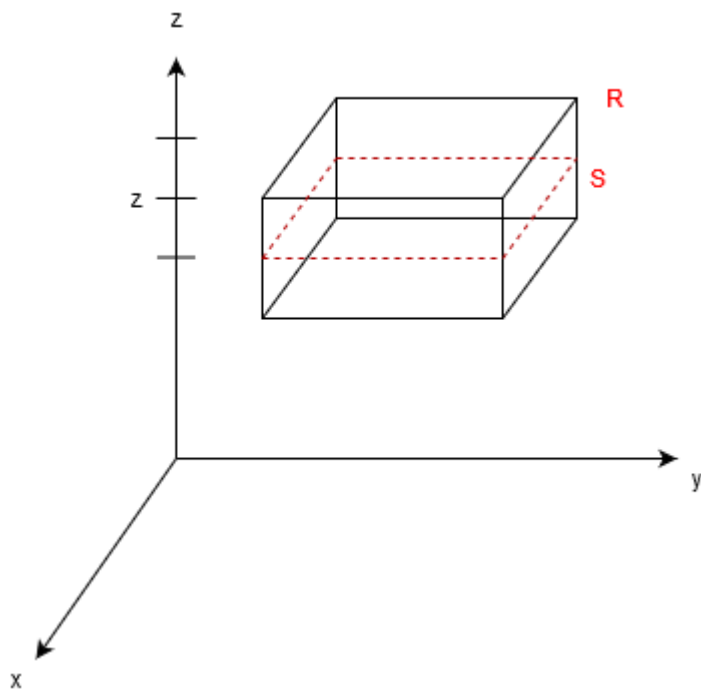
Formule di riduzione per integrazione su parallelepipedi rettangoli in \mathbb{R}^3

Due strade percorribili:

1. Integrazione per corda



2. Integrazione per corda



Riduzioni per corde

Teorema di Fubini

Se $f : R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3] \rightarrow \mathbb{R}$, integrabile su R e, $\forall (\bar{x}, \bar{y}) \in S = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ la funzione $f((\bar{x}, \bar{y}), \cdot)$ è integrabile su $[a_3, b_3]$, allora posto $g(x, y) = \int_{a_3}^{b_3} f(x, y, z) dz$, la funzione $g : S \rightarrow \mathbb{R}$ è integrabile su S e $\iint_S g(x, y) dx dy = \iiint_R f(x, y, z) dx dy dz$, cioè $\iint_S (\int_{a_3}^{b_3} f(x, y, z) dz) dx dy = \iiint_R f(x, y, z) dx dy dz$.
Valgono analoghi gli altri risultati in cui le variabili si scambiano i ruoli

Riduzione per sezione

Teorema di Fubini

Sia $f : R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3] \rightarrow \mathbb{R}$, integrabile su R . $\forall \bar{z} \in [a_3, b_3]$ la funzione $f(\cdot, \bar{z})$ è integrabile su $S = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$, allora posto $h(z) = \iint_S f(x, y, z) dx dy$, la funzione $h : [a_3, b_3] \rightarrow \mathbb{R}$ è integrabile su $[a_3, b_3]$ e $\int_{a_3}^{b_3} h(z) dz = \iiint_R f(x, y, z) dx dy dz$, cioè $\int_{a_3}^{b_3} (\iint_S f(x, y, z) dx dy) dz = \iiint_R f(x, y, z) dx dy dz$.
Valgono analoghi gli altri risultati in cui le variabili si scambiano i ruoli

Proprietà dell'integrale su n -rettangoli

Sia $R(\subseteq \mathbb{R}^n)$ un n -rettangolo e si ponga $\mathcal{R}(R) = \{f_R \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ integrabile su } R\}$.

- Linearità

Se $f, g \in \mathcal{R}(R)$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, allora $\alpha f + \beta g \in \mathcal{R}(R)$ e $\int_R (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_R f + \beta \int_R g$

NB

$\mathcal{R}(R)$ è uno spazio vettoriale e l'integrale è un'applicazione lineare

- Monotonia

Se $f, g \in \mathcal{R}(R)$ e $f(\underline{x}) \leq g(\underline{x}) \forall \underline{x} \in R$, allora $\int_R f \leq \int_R g$

Integrale del prodotto

Se $f, g \in \mathcal{R}(R)$, allora $f \cdot g \in \mathcal{R}(R)$

Integrale del valore assoluto

Se $f \in \mathcal{R}(R)$, allora $|f| \in \mathcal{R}$ e $|\int_R f| \leq \int_R |f|$

Proprietà della media

Se $f \in \mathcal{R}(R)$, allora

$$\inf_R f = l < \frac{\int_R f}{m_n(R)} < L = \sup_R f$$

Inoltre se f è continua, allora esiste $\underline{x}^0 \in R$ t.c. $\underbrace{f(\underline{x}^0)}_{\text{Valormedio}} = \underbrace{\frac{\int_R f}{m_n(R)}}_{\text{mediaintegrale}}$

Integrale della restrizione

Se $f \in \mathcal{R}(R)$ e $R' \subseteq R$ è un n -rettangolo allora $f|_{R'} \in \mathcal{R}(R')$

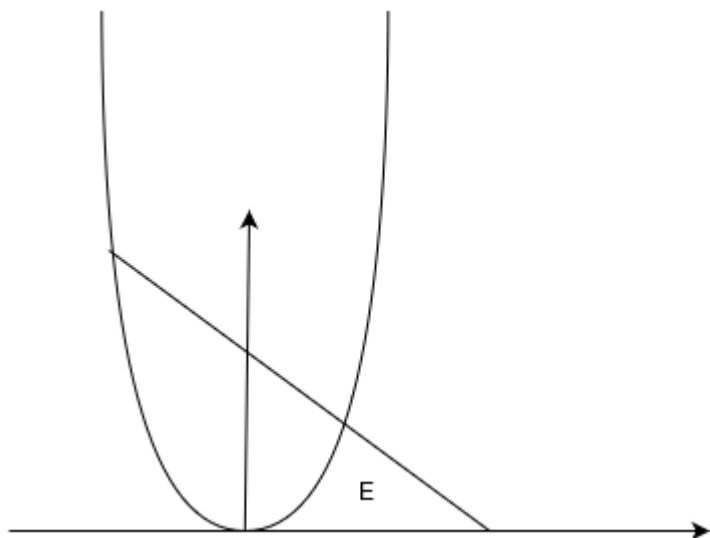
Additività rispetto al dominio

Se R, R', R'' sono n -rettangoli tali che $R' \cup R'' = R$ e $\text{int}(R') \cap \text{int}(R'') = \emptyset$ e $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ t.c. $f|_{R'} \in \mathcal{R}(R')$ e $f|_{R''} \in \mathcal{R}(R'')$ allora $f \in \mathcal{R}(R)$ e $\int_R f = \int_{R'} f + \int_{R''} f$

Insufficienza della teoria dell'integrazione su n -rettangoli

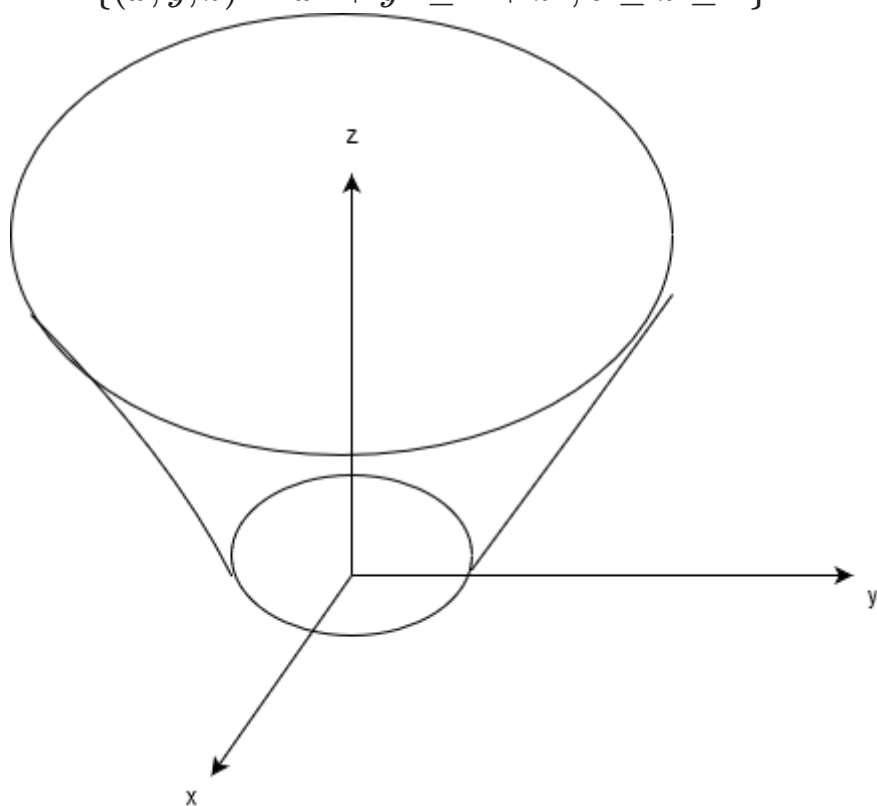
Come definire l'area di E ?

$$E = \{(x, y)^T : 0 < y < x^2 \wedge y \leq 1 - x\}$$



Come calcolare il volume di E ?

$$E = \{(x, y, z)^T : x^2 + y^2 \leq 1 + z^2, 0 \leq z \leq 4\}$$



Integrazione di funzione limitate su insiemi limitati

Sia $E(\subseteq \mathbb{R}^n)$, un insieme limitato e sia $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione limitata.

Sia R un n -rettangolo t.c. $E \subseteq R$

Si ponga $f : 0 : R \rightarrow \mathbb{R}$ con $f_0(\underline{x})f(\underline{x}) = \begin{cases} f(\underline{x}), & \underline{x} \in E \\ 0, & \underline{x} \in R \setminus E \end{cases}$

Si dice che f è integrabile su E se la funzione f_0 è integrabile su R e si pone $\int_E f = \int_R f_0$

Osservazione

La definizione non dipende da particolare n -rettangolo R con $E \subseteq R$

Problema

In generale, anche se f è continua in E f_0 può essere discontinua su R .

Come stabilire, allora l'integrabilità di f_0 su R ?

Bisogna trarre condizioni più generali della continuità che garantiscano l'integrabilità su n -rettangoli

Teoria della misura secondo Peano-Jordan

Insieme misurabile

Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme limitato, si dice che E è misurabile (secondo P-J) in \mathbb{R}^n se la funzione 1 è integrabile su E e si pone $m_n = \int_E 1$

Osservazione

Funzione caratteristica di un insieme:

Sia $E(\subseteq \mathbb{R}^n)$ la funzione $X_E : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $X_E(\underline{x}) = \begin{cases} 1, & \underline{x} \in E \\ \underline{x} \notin E \end{cases}$. Si dice funzione caratteristica di E

Osservazione

Un insieme $E(\subseteq \mathbb{R}^n)$ limitato è misurabile se e solo se $X(E)$ è integrabile su un n -rettangolo $R \supseteq E$

Definizione

$\mathcal{M}(\mathbb{R}^n) = \{E \subseteq \mathbb{R}^n : E \text{ è misurabile in } \mathbb{R}^n\}$ e $m_n : \mathcal{M}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$, con $m_n(E) = \int_E 1$

Proprietà della misura

1. Se $A, B \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$, allora $A \cap B, A \cup B, A \setminus B \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$

- Dimostrazione. Poiché $A, B \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{X}_A, \mathcal{X}_B$ sono integrabili in R . Si ha: $\mathcal{X}_{A \cap B} = \mathcal{X}_A \cdot \mathcal{X}_B$, che è integrabile in R .

Si ha $\mathcal{X}_{A \cup B} = \mathcal{X}_A + \mathcal{X}_B - \mathcal{X}_{A \cap B}$ che è integrabile su R e inoltre $\int_R \mathcal{X}_{A \cup B} =$

$\int_R \mathcal{X}_A + \int_R \mathcal{X}_B - \int_R \mathcal{X}_{A \cap B}$. quindi $m_n(A \cup B) = m_n(A) + m_n(B) - m_n(A \cap B)$.

Si ha $\mathcal{X}_{A \setminus B} = \mathcal{X}_A - \mathcal{X}_{A \cap B}$ e $\int_R \mathcal{X}_{A \setminus B} = \int_R \mathcal{X}_A - \int_R \mathcal{X}_{A \cap B}$, $m_n(A \setminus B) = m_n(A) - m_n(A \cap B)$

2. Se $A, B \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ e $A \subseteq B$. allora $m_n(A) \leq m_n(B)$.

- Dimostrazione. Se $A \subseteq B$, allora $\forall \underline{x} \in R$ si ha $\mathcal{X}_1(\underline{x}) \leq \mathcal{X}_2(\underline{x})$ e quindi $\int_R \mathcal{X}_A \leq \int_R \mathcal{X}_B$

Insieme di misura nulla o insieme trascurabile

Sia $T(\subseteq \mathbb{R}^n)$ limitato. Si dice che T è **trascurabile in \mathbb{R}^n** (o di misura nulla) se $m_N(T) = 0$

Proposizione (caratteristica dell'insieme trascurabile)

Sia $T \subseteq \mathbb{R}^n$. Si ha che T è trascurabile in \mathbb{R}^n se e solo se $\forall \varepsilon > 0 \exists R_1, \dots, R_k$ n -rettangoli tali

che $T \subseteq \bigcup_{i=1}^k R_i$ e $\sum_{i=1}^k m_n(R_i) < \varepsilon$

Proprietà

1. Se $T = \{\underline{x}^0\} \subseteq \mathbb{R}^n$, allora $m_n(T) = 0, \forall n \geq 1$
 2. Se $T = \{\underline{x}^1, \dots, \underline{x}^n\} \subseteq \mathbb{R}^n$, allora $m_n(T) = 0 \forall n \geq 1$
 3. Se $T \subseteq \mathbb{R}^n$ è un 1-rettangolo, allora $m_n(T) = 0 \forall n \geq 2$
 4. Se $T \subseteq \mathbb{R}^n$ è un 2-rettangolo, allora $m_n(T) = 0 \forall n \geq 3$
 5. Se $\varphi : R(\subseteq \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ è integrabile sul n -rettangolo R , allora $G(\varphi) = \{(\underline{x}, \varphi(\underline{x})) : \underline{x} \in R\} \subseteq \mathbb{R}^n$
- Dimostrazione. Caso $n = 1$. Poiché $\varphi : R = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è integrabile $\sup S(\delta, \varphi) = \inf S(\delta, \varphi)$. Fissato $\varepsilon > 0$, Esiste $\delta \in \Delta(R)$ t.c. $\varepsilon > S(\delta) - s(\delta) = \sum_{i=1}^k L_i(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^k l_i(x_i - x_{i-1})$. $R_i = [x_{i-1}, x_i] \times [l_i, L_i]$, per $i = 1, \dots, k$, t.c. $G(\varphi) = R_1 \cup R_2 \cup \dots R_k$

Condizione di integrabilità su n -rettangoli

Teorema

Se $f : R(\subseteq \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$, R n -rettangolo, è limitata e continua su $R \setminus T$, con $m_n(T) = 0$, allora f è integrabile su R .

Teorema (caratterizzazione degli insiemi misurabili in \mathbb{R}^n)

Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme limitato. Si ha che E è misurabile in \mathbb{R}^n se e solo se $m_n(frE) = 0$

Dimostrazione

Proviamo solo che se $m_n(frE) = 0$, allora E è misurabile in \mathbb{R}^n .

Sia R un n -rettangolo con $E \subseteq R$.

La funzione caratteristica \mathcal{X}_E è limitata su R e continua su $R \setminus frE$. Dunque \mathcal{X}_E è integrabile e pertanto E è misurabile in \mathbb{R}^n .

Condizione di integrabilità su insiemi limitati

Se $f : E(\subseteq \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ è continua su E , compatto, misurabile, allora f è integrabile su E .

Dimostrazione

Poichè f è continua su E compatto, f è limitata su E .

Sia R un n -rettangolo con $E \subseteq R$ e sia $f_0 : R \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

[katex error: KaTeX parse error: Undefined control sequence: \setminus at position 92: ...
$$f_0(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in E \\ 0 & \text{se } x \in R \setminus E \end{cases}$$

f_0 è limitata su R ed è continua su $R \setminus \text{fr} E$, con $m_n(\text{fr} E) = 0$, essendo E misurabile in \mathbb{R}^n . Quindi f_0 è integrabile su R e perciò f è integrabile su E .

Proprietà dell'integrale su insiemi misurabili

- Linearità
- Monotonia
- Integrale del prodotto
- Integrale del valore assoluto
- Proprietà della media

Se $f : E(\subseteq \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ è integrabile su E misurabile allora $\inf_E f \leq \frac{\int_E f}{m_n(E)} \leq \sup_E f$

Se risulta E insieme compatto e connesso, allora $\exists \underline{x}^0 \in E$ t.c. $f(\underline{x}^0) = \frac{\int_E f}{m_n(E)}$

- Integrale rispetto al dominio

Se $A, B, C(\subseteq \mathbb{R}^n)$ sono insiemi misurabili tali che $C = A \cup B$ e $m_n(A \cap B) = 0$ e $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ è t.c. $f|_A$ è integrabile su A e $f|_B$ è integrabile su B , allora f è integrabile su C e $\int_C f = \int_A f + \int_B f$

- Integrale della restrizione

Se $f : A(\subseteq \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ è integrabile su A misurabile e $B \subseteq A$ è misurabile allora $f|_B$ è integrabile su B

- Invarianza dell'integrale rispetto agli insiemi di misura nulla

Se $f : E(\subseteq \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ integrabile su E misurabile, $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ è imitata e $f(\underline{x}) = g(\underline{x})$ su $E \setminus T$ con $m_n(T) = 0$, allora g è integrabile su E e $\int_E g = \int_E f$

Metodi per il calcolo di integrali su insiemi limitati

Formule di riduzione per integrali doppi

Insiemi normali in \mathbb{R}^2 .

Siano $\varphi, \psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue con $\varphi(x) \leq \psi(x)$ in $[a, b]$. L'insieme $E = \{(x, y)^T : a \leq x \leq b, \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$ si dice insieme normale rispetto all'asse x . Analogamente si hanno insiemi normali rispetto all'asse y .

Proposizione

Ogni insieme normale è un compatto misurabile in \mathbb{R}^2 .

Dimostrazione

È ovvio che E è in compatto. Proviamo che è misurabile verificando che frE è trascurabile in \mathbb{R}^2 . Si ha $frE = G(\varphi) \cup G(\psi) \cup \sigma_a \cup \sigma_b$, con $\sigma_a = \{(a, y)^T : \varphi(a) \leq y \leq \psi(a)\}$ e $\sigma_b = \{(b, y)^T : \varphi(b) \leq y \leq \psi(b)\}$.

Poichè φ e ψ sono integrabili su $[a, b]$, $G(\varphi)$ e $G(\psi)$ sono trascurabili in \mathbb{R}^2 e così pure i seguenti σ_a, σ_b . Dunque $m_2(frE) = 0$.

Teorema

Se $f : E(\subseteq \mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R}$ è continua ed E è normale, allora $\iint_E f(x, y) dx dy = \int_a^b (\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy) dx$.

Dimostrazione

L'integrabilità di f su E segue dal teorema e dalla proposizione precedente.

Poniamo $m = \min_{[a, b]} \varphi$ e $M = \max_{[a, b]} \psi$ e $R = [a, b] \times [m, M]$.

$f_0 : R \rightarrow \mathbb{R}$, dove $f_0(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & (x, y)^T \in E \\ 0, & (x, y)^T \in R \setminus E \end{cases}$

Si ha f_0 integrabile su R e $f_0(\bar{x}, \cdot) : [m, M] \rightarrow \mathbb{R}$, è limitata e continua su $[m, M] \setminus [\varphi(\bar{x}), \psi(\bar{x})]$ e quindi integrabile. Il teorema di Fubini si può applicare e

$$\begin{aligned} \iint_R f_0(x, y) dx dy &= \int_a^b \left(\int_m^M f_0(x, y) dy \right) dx = \int_a^b \left(\underbrace{\int_m^{\varphi(x)} f_0(x, y) dy}_{=0} + \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f_0(x, y) dy + \underbrace{\int_{\psi(x)}^M f_0(x, y) dy}_{=0} \right) dx \\ &= \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f_0(x, y) dy \right) dx \end{aligned}$$

Vale un analogo risultato per gli insiemi normali rispetto all'asse y .

Formule di riduzione per gli integrali tripli

Riduzione per corde

Insiemi normali in \mathbb{R}^3

Siano $\Phi, \Psi : K(\subseteq \mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R}$ continue con $\Phi(x, y) \leq \Psi(x, y)$ in K , con K compatto e misurabile.

L'insieme $E = \{(x, y, z)^T : (x, y)^T \in K, \Phi(x) \leq z \leq \Psi(x)\}$ si dice insieme normale rispetto al piano xy .

Analogamente si definiscono insiemi normali rispetto ai piani xz e yx

Proposizione

Ogni insieme normale è un compatto misurabile in \mathbb{R}^3 .

Teorema (integrazione per corde)

Se $f : E(\subseteq \mathbb{R}^3) \rightarrow \mathbb{R}$ è continua e E è un insieme normale rispetto al piano xy , allora f è integrabile su E e $\iiint_E f(x, y, z) dx dy dz = \iint_K (\int_{\Phi(x)}^{\Psi(x)} f(x, y, z) dz) dx dy$.

Valgono analoghe le formule per insiemi normali rispetto agli altri due piani

Riduzione per sezioni

Insiemi sezionabili in \mathbb{R}^3

Sia E un compatto misurabile in \mathbb{R}^3 . Si dice che E è un insieme sezionabile in \mathbb{R}^3 rispetto all'asse z se posto $m = \min\{z : (x, y, z)^T \in E\}$ e $M = \max\{z : (x, y, z)^T \in E\}$. $\forall z \in [m, M]$, la sezione $S_z = \{(x, y)^T | (x, y, z)^T \in E\}$ sia misurabile in \mathbb{R}^2 .

Analogamente si definiscono gli insiemi sezionabili rispetto agli assi x e y

Teorema (integrazione per sezioni)

Sia $f : E(\subseteq \mathbb{R}^3) \rightarrow \mathbb{R}$ è continua, con E insieme sezionabile.

Si ha $\iiint_E f(x, y, z) dx dy dz = \int_m^M (\iint_{S_z} f(x, y, z) dx dy) dz$

Valgono risultati analoghi per gli insiemi sezionabili rispetto agli assi x e y .

Solidi di rotazione

Siano $\varphi, \psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue, con $0 \leq \varphi(z) \leq \psi(z)$ e sia $D = \{(x, z)^T, a \leq z \leq b, \varphi(z) \leq x \leq \psi(z)\}$.

Il solido $E = \{(x, y, z)^T : a \leq z \leq b, \varphi(z) \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq \psi(z)\}$ ottenuto facendo ruotare di $2\pi D$ intorno all'asse z si dice solido di rotazione rispetto all'asse z .

I Teorema di Pappo-Guldino

Ogni solido di rotazione è un compatto misurabile (anzi, sezionabile rispetto all'asse z) e

$m_3(E) = 2\pi x_B m_2(D)$, dove x_B è l'ascissa del baricentro di D . ($S_z = \{(x, y)^T : \varphi(z) \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq \psi(z)\}$)

Dimostrazione

E è misurabile rispetto all'asse z .

$$\begin{aligned}
 m_3(E) &= \iiint_E 1 dx dy dz = \int_a^b \left(\iint_{S_z} 1 dx dy \right) dz = \int_a^b m_2(S_z) dz = \int_a^b (\pi \psi^2(z) - \\
 &\pi \varphi^2(z)) dz = 2\pi \int_a^b \left(\frac{1}{2} \psi^2(z) - \frac{1}{2} \varphi^2(z) \right) dz = \\
 &= 2\pi \int_a^b \left[\frac{x^2}{2} \right]_{\varphi(z)}^{\psi(z)} dx = 2\pi \int_a^b \left(\int_{\varphi(z)}^{\psi(z)} x dx \right) dz = 2\pi \iint_D x dx dz = 2\pi m_2(D) \cdot \\
 &\frac{\iint_D x dx dz}{m_2(D)} = 2\pi x_b m_2(D).
 \end{aligned}$$

$2\pi x_b$ è la distanza sulla circonferenza che il baricentro percorre

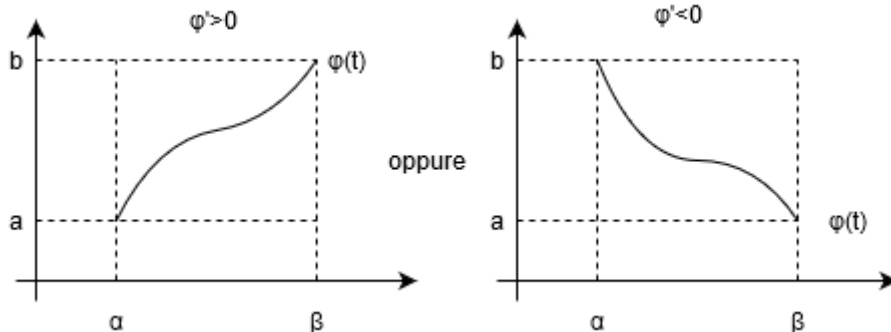
Cambio di variabili negli integrali multipli

- Caso $N = 1$

Teorema

Se $f : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è continua e $\varphi : K = [\alpha, \beta] \rightarrow I$ è t.c.

1. $\varphi \in C^1$
2. φ è biiettiva
3. $\varphi'(t) \neq 0 \forall t \in K$, cioè $\varphi'(t) > 0 \forall t \in K$ o $\varphi'(t) < 0 \forall t \in K$



allora

$$\begin{aligned}
 \int_a^b f(x) dx &= \begin{cases} \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt \\ \int_{\beta}^{\alpha} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt \end{cases}, \text{ cioè} \\
 \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt &= - \int_{\beta}^{\alpha} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt \\
 \text{cioè} \\
 \int_a^b f(x) dx &= \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt
 \end{aligned}$$

Integrali generalizzati in \mathbb{R}^n

Premessa

Come definire:

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dx dy$$

Insieme localmente misurabile

Sia $J \subseteq \mathbb{R}^n$. Si dice che J è localmente misurabile in \mathbb{R}^n se $\forall E$, insieme misurabile in \mathbb{R}^n si ha che $J \cap E$ è misurabile in \mathbb{R}^n

Funzione localmente integrabile

Sia $f : J(\subseteq \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione, J localmente misurabile in \mathbb{R}^n . Si dice che f è localmente integrabile se esiste una successione $(A_n)_n$ di insiemi **misurabili** in \mathbb{R}^n t.c.

1. $A_n \supset A_{n+1} \forall n$
2. $\forall E$ insieme misurabile in \mathbb{R}^n , con $E \subseteq J$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (m_n(E \setminus A_n)) = 0$
3. $f|_{A_n}$ è integrabile su A_n , $\forall n$

Funzione integrabile in senso generalizzato

Sia $f : J(\subseteq \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ localmente integrabile su J localmente misurabile, con $f(\underline{x}) \geq 0$ $\forall \underline{x} \in J$.

Si dice che f è integrabile in senso generalizzato su J se esiste **finito** $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{A_n} f$ e si pone

$$\int_J f = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{A_n} f$$

NB

esiste sempre **finito o infinito** $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{A_n} f$ poichè $\int_{A_n} f \leq \int_{A_{n+1}} f \forall n$ (per monotonia)

Teorema

Sia $f : J(\subseteq \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ localmente integrabile su J localmente misurabile.

Se $(A_n)_n$ e $(B_n)_n$ sono successioni di insiemi misurabili in \mathbb{R}^n verificanti (1), (2) e (3), allora

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{A_n} f = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{B_n} f$$

Integrale in senso generalizzato (caso generale)

$f : J(\subseteq \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ localmente integrabile su J localmente misurabile.

Si dice che f è integrabile in senso generalizzato su J se e solo se $f^+(\underline{x})$ e $f^-(\underline{x})$ sono integrabili in senso generalizzato su J e si pone $\int_J f = \int_J f^+ - \int_J f^-$

Teorema

Sia $f : J(\subseteq \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ localmente integrabile su J localmente misurabile. Si ha che f è integrabile in senso generalizzato su J se e solo se $|f|$ è integrabile in senso generalizzato su J .

Inoltre risulta $\int_J f = \lim_n \int_{A_n} f$, dove $(A_n)_n$ è una successione di insiemi misurabili verificante (1), (2) e (3).

Misure in senso generalizzato in \mathbb{R}^n

Sia J localmente misurabile in \mathbb{R}^n . Si dice che J è misurabile in senso generalizzato in \mathbb{R}^n se χ_J è integrabile in senso generalizzato su J e si pone $m_n(J) = \int_J 1$

Misurazione e integrazione su curve e superfici

Lunghezza di una curva in \mathbb{R}^n ($n = 2$ o $n = 3$)

Idea - Rettificabilità e lunghezza di una curva

Sia $\gamma : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ continua. Sia $\delta \in \Delta(I)$ individuata dai nodi $a = t_0, t_1, \dots, t_n = b$. Si consideri la poligonale $\pi(\delta)$ formata dagli n segmenti $\sigma_i(t) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ con $\sigma_i(s) = \gamma(t_{i-1}) + s(\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1}))$, per $i = 1, \dots, n$.

Si ha $l(\pi(\delta)) = \sum_{i=1}^n \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\|$ se $\sup_{\delta \in \Delta(I)} l(\pi(\delta)) < +\infty$, si dice che γ è rettificabile e si pone $l(\gamma) = \sup_{\delta \in \Delta(I)} l(\pi(\delta))$

Osservazione

Non tutte le curve continue sono rettificabili

Lemma

Se $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ è continua, allora si pone $\int_a^b g(t) dt = (\int_a^b g_1(t) dt, \dots, \int_a^b g_n(t) dt)^T$ e si ha $\|\underbrace{\int_a^b g(t) dt}_{\in \mathbb{R}^n}\| \leq \int_a^b \|g(t)\| dt$

Teorema di rettificabilità

Se $\gamma : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ è di classe C^1 , allora γ è rettificabile e $l(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$

Dimostrazione

Sia $\delta \in \Delta(I)$. Si ha $l(\pi(\delta)) = \sum_{i=1}^n \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| = \sum_{i=1}^n \left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \gamma'(t) dt \right\| \leq$

$$\sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\gamma'(t)\| dt = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt < +\infty$$

Quindi risulta $\sup_{\delta \in \Delta(I)} l(\pi(\delta)) \leq \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt < +\infty$

Poichè γ è rettificabile e $l(\gamma) \leq \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt < +\infty$ si pone la validità della disuguaglianza posta

Lunghezza di una curva in forma cartesiana

Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1 una curva in forma cartesiana

$\gamma(t) = (t, f(t))^T, t \in [a, b]$, rettificabile

$$l(G(f)) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2} dt$$

Lunghezza di una curva in forma polare

Sia $\rho : (\cdot) : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R} \in C^1$ con $\rho(\vartheta) \geq 0$ in $[\alpha, \beta]$ una curva in forma polare

$$\gamma(\vartheta) = (\rho(\vartheta)\cos\vartheta, \rho(\vartheta)\sin\vartheta)^T, l(\gamma) = \int_{\alpha}^{\beta} \|\gamma'(\vartheta)\| d\vartheta = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\rho(\vartheta))^2 + (\rho'(\vartheta))^2} d\vartheta$$