Analisi II - terza parte bis

Teorema - condizione sufficiente per la sviluppabile in serie di Taylor

Se $f\ :]x_0-h,x_0+h[\to\mathbb{R}$, $h>0$, è di classe C^∞ ed esiste $M>0$ t.c.$\forall n\in\mathbb{N}$
$|f^{(n)}(x)|\le M\frac{n!}{h^n}$, in $]x_0-h,x_0+h[$
allora f è sviluppabile in serie di Taylor di punto iniziale x_0 in $]x_0-h,x_0+h[$. Inoltre, la serie converge uniformemente a f su $[x_0-k,x_0+k]$, $\forall k<h$

Dimostrazione

$\forall n\in\mathbb{N}^+$, si ha $|s_{n+1}(x)-f(x)|=|f(x)-P_{n,x_0}(x)|=|\dfrac{f^{(N+1)}(\xi_{N+1})}{(N+1)!}(x-x_0)^{N+1}|=|f^{(N+1)}(\xi_{N+1}|\dfrac{|x-x_0|^{N+1}}{(N+1!)})\le M\dfrac{(N+1)!}{h^{N+1}}\dfrac{|x-x_0|^{N+1}}{(N+1)!}=M(\dfrac{|x-x_0|}{h})^{N+1}$, Essendo $|\xi_{N+1}-x_0|<|x-x_0|<h$
Poichè $0\le\dfrac{|x-x_0|}{h}<1$, Si ha $|f(x)-s_{N+1}(x)|\le M(\frac{|x-x_0|}{h})^{N+1}\to 0$, per $N\to+\infty$
E quando $\sum\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ converge a $f(x)$, $\forall x\in]x_0-h,x_0+h[$
Fissato $0<h<k$ si ottiene, per $x\in[x_0-k,x_0+k]$, $|f(x)-s_{N+1}(x)|\le M(\dfrac{|x-x_0|}{h})^{N+1}\le M(\dfrac{k}{h})^{N+1}$
e quindi $\underset{]x_0-h,x_0+h[}{sup}|f(x)-s_{N+1}(x)|\le M(\frac{|x-x_0|}{h})^{N+1}\to 0$, per $N\to+\infty$
Dunque la successione delle ridotte converge e dunque la serie donverge uniformemente a f in $]x_0-h,x_0+h[$

Oservazione

La condizione $\exists M>0$ è tale che $\forall n$, $|f^{(n)}(x)|\le M\frac{n!}{h^n}$, in $]x_0-h,x_0+h[$ e, in particolare verificata se $\exists K>0$ t.c., $\forall n|f^{(n)}(x_0)|\le K$
Infatti si ha $\frac{n!}{h^n}\to+\infty$, se $n\to+\infty$

Funzioni analitiche

Si dice che f è analitica in $[a,b]$ se f è sviluppabile in serie di Taylor di punto iniziale x_0, $\forall x\in]a,b[$
L'insieme delle funzioni analitiche in $]a,b[$ si indica con $H(]a,b[)$

Osservazione

$C^0(]a,b[)\supset C^1(]a,b[)\supset...\supset C^n(]a,b[)\supset...\supset C^\infty(]a,b[)\supset H(]a,b[)$, in $\mathbb{R}$

Spazi metrici

Sia $(\mathbb{S}, d)$ uno spazio metrico

Sfera aperta e sfera chiusa

Siano $x_0 \in \mathbb{S}$ e $r > 0$. L'insieme $\mathbb{B}(x_0, r) = \{x \in \mathbb{S} : d(x, x_0) < r\}$. Si dice sfera aperta (chiusa) di centro x_0 e raggio r

Intorno di un punto

Sia $x_0 \in \mathbb{S}$. Un'insieme $U \subseteq S$. Si dice intorno di x_0 se esiste $k > 0$ t.c. $\mathbb{B}(x_0, r) \subseteq S$.
L'insieme degli intorni di x_0 si indica con $\mathfrak{I}_{x_0}$

(Alcune) proprietà degli intorni

Sia $x_0 \in \mathbb{S}$. Si ha

1. $(\forall u \in \mathfrak{I}_{x_0})(\forall \mathbb{V} \subseteq \mathbb{S})(\mathbb{U}_S \subseteq \mathbb{V} \Rightarrow \mathbb{V} \in \mathfrak{I}_{x_0})$
2. $(\forall U, V \in \mathfrak{I}_{x_0})(U \cap \mathbb{V} \in \mathfrak{I}_{x_0})$
3. $(\forall x, y \in \mathbb{S})[x \neq y \Rightarrow (\exists U \in \mathfrak{I}_x)(\exists \mathbb{V} \in \mathfrak{I}_y) U \cap \mathbb{V} = \emptyset]$

Punto di accumulazione

Siano $E \subseteq \mathbb{S}$ e $x_0 \in \mathbb{S}$. Si dice che x_0 è di accumulazione per E se in ogni intorno di x_0 ci sono infiniti punti di E o, equivalentemente, in ogni intorno di x_0 c'è almeno un punto di E diverso da x_0

Chiusura di un insiemee insieme chiuso

Sia $E \subseteq \mathbb{S}$. L'insieme $\bar{E} = ch(E) = E \cup \{x \in \mathbb{S} : x \text{ è di accumulazione per } E\}$, si dice **chiusura di E**
Un insieme E si dice chiuso se $E = clE$

Punto interno

$E \subseteq \mathbb{S}$, $x_0 \in E$. Si dice che x_0 è un punto interno a E se esiste almeno un intorno di x_0, U, t.c. $U \subset E$.

Interno di un insieme aperto

Sia $E \subseteq \mathbb{S}$. L'insieme $\mathring{E} = intE = \{x \in E : x \text{ è interno a} E\}$, si dice interno di E

Punto di frontiera

Siano $E \subseteq \mathbb{S}$ e $x_0 \in \mathbb{S}$. x_0 è di frontiera per E se in ogni intorno di x_0 ci sono punti di E e punti del complementare di E ($\mathcal{C}E$)

Frontiera di un insieme

$frE = \{x \in \mathbb{S} : x \text{ è di frontiera per } E\}$ si dice frontiera di E

Insieme limitato.

Sia $E \subseteq \mathbb{S}$. Si dice che E è limitato se esiste $x_0 \in E$ e raggio $r > 0$ t.c. $E \subseteq B(x_0, r)$ e, equivalentemente, $\underset{x,y \in E}{sup}\, d(x,y) < +\infty$. $diam(E) = \underset{x,y \in E}{sup}\, d(x,y)$

Funzioni da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^m$

Una funzione $f : E(\subseteq \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^m$ è del tipo

$$f(x) = f(x_1, ...x_n) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, ...x_n) \\ ... \\ f_m(x_1, ...x_n) \end{pmatrix}$$

con $x = (x_1, ...x_n)^T$ e $f_i : E \to \mathbb{R}$ per $i = 1, ..., n$

Campi scalari

$N = 2$, $M = 1$, $f : E(\subseteq \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$

Insiemi di livello

Sia $f : E(\subseteq \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ un campo scalare
Per ogni $k \in \mathbb{R}$, l'insieme $L_k(f) = \{\underline{x} \in E : f(\underline{x}) = k\}$ si dice insieme di livello

Curve parametriche

- $N = 1$, $M \geq 2$, Sia $\gamma : I(\subseteq \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^m$ con I intervallo.
  La coppia $(\gamma, \gamma(I))$ si dice curva parametrica di cui γ è la parametrizzazione e $\Gamma = \gamma(I)$ è il sostegno
- $M = 2$, $Y : I \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (x(t), y(t))^T$ è il sostegno

Campi vettoriali

$N = M \geq 2$, $g : E(\subseteq \mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}^N$

Limiti di funzioni da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^m$ (dati dalla distanza euclidea)

Sia $f : E(\subseteq \mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}^N$ e sia $x_0 \in \mathbb{R}^N$ di accumulazione per E.
Si dice $\lim\limits_{\underline{x} - \underline{x_0}} \underline{l} \in \mathbb{R}^N$ se $(\forall \mathbb{V} \in \mathfrak{I}_l)(\exists U \in \mathfrak{I}_{x_0})(\forall \underline{x} \in E)(\underline{x} \in U \setminus \{x_0\}) \Rightarrow f(\underline{x}) \in \mathbb{V}) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall \underline{x} \in E)(0 < d(\underline{x}, \underline{x_0}) < \delta \Rightarrow d(f(\underline{x}), l) < \varepsilon)$
Quindi supporremo che E sia aperto e lo indicheremo con A.

Derivata parziale

Sia $\{\underline{e_1}, ...\underline{e_n}\}$ una base canonica di $\mathbb{R}^n$ e sia $\underline{v} = \underline{e_i}$ per un certo $i = 1, ..., n$.
Sia $x_0 \in intE$. La derivata direzionale $\frac{\partial f}{\partial \underline{e_i}}(\underline{x_0})$ si dice derivata parziale i-esima di f in x_0 e si indica con $\frac{\partial f}{\partial \underline{x_i}}(\underline{x_0}) = f_{x_i}(\underline{x_0})$
La ragione della notazione è la seguente:
$\frac{\partial f}{\partial \underline{e_i}}(x_0) = \lim\limits_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t\underline{v}) + f(\underline{x_0})}{t} =$
$\lim\limits_{t \to 0} \frac{f(x_1^0, ..., x_i^0 + t, ..., x_n^0) - f(x_1^0, ..., x_n^0)}{t} =$
$\lim\limits_{x_i \to x_i^0} \frac{f(x_{0_1}, ..., x_i, ..., x_{0_n}) - f(x_{0_{1, ..., x_{0_n}}})}{x_i - x_i^0}$

Unicità di a

Siano $\underline{a}, \underline{b} \in \mathbb{R}^n$ t.c. $\forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n$, $L(\underline{x}) =< \underline{x}, \underline{a} >$, $L(\underline{x}) =< \underline{x}, \underline{b}$, cioè $< \underline{x}, \underline{a} - \underline{b} >= 0$. Se $\underline{x} = \underline{a} - \underline{b}$, si ha $< \underline{a} - \underline{b}, \underline{a} - \underline{b} >= 0$, cioè $||\underline{a} - \underline{b}||^2 = 0$
Pertanto, si conclude che $||\underline{a} - \underline{b}|| = 0 \Rightarrow \underline{a} = \underline{b}$

Calcolo differenziale per $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$

Problema

Siano $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ e $x_0 \in E$. Come nel caso $N = M = 1$ si vuol definire la "derivata" di f in x_0. in modo da poter costruire una funzione lineare che approssima efficacemente f in prossimità di x_0

NB: il rapporto incrementale non esiste per $N \geq 2$

Campo scalare, derivata direzionale

Siano $f : E(\subseteq \mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in intE$. Consideriamo la retta $\underline{x} = \underline{x_0} + t\underline{v}$, $t \in \mathbb{R}$, con $\underline{v \in \mathbb{R}^N}$, $||\underline{v}|| = 1$. Poichè $x_0 \in intE$, $\exists \delta > 0$ t.c. $\underline{x} = \underline{x_0} + t\underline{v} \in E$, $\forall |t| < \delta$.
Consideriamo la funzione $f(\underline{x_0} + t\underline{v}) :] - \delta, \delta[\to \mathbb{R}$

Derivata direzionale: se esiste finito $\lim_{t\to 0}\dfrac{f(\underline{x_0}+t\underline{v})-f(\underline{x_0})}{t}$ esso si dice derivata direzionale di f in x_0 lungo la direzione orientata $\underline{v}$

Osservazione

Si ha che $x_0 \in intE$, perchè altrimenti il rapporto incrementale potrebbe **non** essere definito

NB

$f(\underline{x}) = (f_1(\underline{x}), ..., f_M(\underline{x}))^T$ e $\underline{l} = (l_1, ..., l_n)^T$

Teorema

Si ha $\lim\limits_{\underline{x}\to\underline{x_0}} f(\underline{x}) = \underline{l} \Leftrightarrow$ per ogni $i = 1, .., M$, $\lim\limits_{\underline{x}\to\underline{x_0}} f_i(\underline{x}) = l_i$

Limite sui campi scalari

Sia $f : E(\subseteq \mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ e sia $\underline{x} \in \mathbb{R}^N$ di accumulazione per E. Si dice che $\lim_{\underline{x}\to\underline{x_0}} f(\underline{v}) = +\infty$ (o $-\infty$) se
$(\forall k \in \mathbb{R})(\exists U \in \mathfrak{I}_{x_0})(\forall \underline{x} \in E)(\forall \underline{x} \in U \setminus \{\underline{x_0}\} \Rightarrow f(\underline{x}) > k) \Leftrightarrow$
$(\forall k \in \mathbb{R})(\exists \delta > 0)(\forall \underline{x} \in E)(0 < d(\underline{x}, \underline{x_0}) < \delta \Rightarrow f(\underline{x}) > k)$ (o $f(\underline{x}) < k$ per $f(\underline{x}) \to -/\infty$)

Teorema

Sia $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ e $\underline{x_0} \in E$ con $F(\underline{x}) = (F_1(\underline{x}), ..., F_N(\underline{x}))^T$ Si dice che F è continua in $\underline{x_0} \Leftrightarrow \forall i = 1, ..., N$, F_i è continua in $\underline{x_0}$.

Definizione

Sia $C \subseteq \mathbb{R}^N$. Si dice che C è **connesso** se $\forall \underline{x}, \underline{y} \in C$ esiste una curva continua $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^N$ t.c. $\gamma(a) = \underline{x}$, $\gamma(b) = \underline{y}$, $\forall t \in [a, b]$, $\gamma(t) \in C$.

NB

In $\mathbb{R}^N$, $N = 1$, C è connesso $\Leftrightarrow C$ è un punto singolo o un intervallo

Teorema della connessione

Se $f : C(\subseteq \mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}^M$ è continua e C è connesso, allora $f(C)$ è connesso

Dimostrazione

Per provare che $f(C)$ è connesso, scegliamo arbitrariamente $\underline{\xi}, \underline{\eta} \in f(C)$. Esistono $\underline{x}, \underline{y} \in C | f(\underline{x}) = \underline{\xi}$ e $f(\underline{y} = \underline{\eta}$.
Poichè C è connesso esiste una curva continua $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^N | \gamma(a) = \underline{x}$ e $\gamma(a) = \underline{y}$.
Pongo $\delta = f \circ \gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^N$, δ è una curva continua. Inoltre: $\delta(a) = f(\gamma(a)) = \underline{\xi}$, $\delta(b) = f(\gamma(b)) = \underline{\eta}$. Inoltre $\delta(t) = f(\gamma(t)) \in f(C)$, per ogni $t \in [a, b]$, $\Rightarrow \delta$ è la curva continua che collega $\underline{\xi}$ e $\underline{\eta}$, $\Rightarrow C$ è connesso.

Teorema di Bolzano

Se $f : C(\subseteq \mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ è continua, C è connesso ed esistono $\underline{x}, \underline{y} \in C | f(\underline{x}) f(\underline{y}) < 0$.
Allora $\exists \underline{z} \in C$ t.c. $f(\underline{z}) = 0$

Dimostrazone

Sia $f \underline{x}) < 0 < f(\underline{y})$. Poichè C è conneso e f è continua, $f(C)$ è connesso in $\mathbb{R}$. Ma essendo $f(C)$ conneso e $f(\underline{x}) \neq f(\underline{y})$, allora $f(C)$ è un intervallo: contiene numeri positivi e numeri negativi. Quindi $0 \in f(C)$ e pertanto $\exists z \in C | f(\underline{z}) = 0$

Corollario

Se $f : C(\subseteq \mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ è continua e C è conneso e $f(\underline{x}) \neq 0$, $\forall \underline{x} \in C$, allora o $f(\underline{x}) > 0 \forall \underline{x} \in C$ oppure $f(\underline{x}) < 0 \forall \underline{x} \in C$

Definizione

Sia $K \subseteq \mathbb{R}^N$, si dice che K è **compatto** se K è chiuso e limitato.

Teorema della compattezza

Se $f : K(\subseteq \mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}^M$ è continua e K è compatto, allora $f(K)$ è un compatto

Teorema di Weierstrass

Se $f : K(\subseteq \mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}^M$ è continua e K è compatto, allora esistono $\underset{K}{max} f$ e $\underset{K}{min} f$

Dimostrazione

Il teorema di compattezza implica che $f(K)$ è compatto in $\mathbb{R}$, cioè $f(K)$ è chiuso e limitato.
Poichè $f(K) \subseteq \mathbb{R}$ ho $inf f(K) > -\infty$ e $sup f(K) < +\infty$. Ma $min f(K) = \underset{k}{min} f$ e

$maxf(K) = \underset{k}{max} f$. Se proviamo che $supf(K) \in f(K)$, allora $supf(K) = maxf(K) = \underset{k}{max} f$ (analogamente per il minimo).
Se per assurdo $supf(K) \notin f(K)$, allora $supf(K)$ è un punto di accumulazione per $f(K)$, contro l'ipotesi in quanto contraddice il fatto che f(K) è chiuso (e quindi contiente tutti i suoi punti di accumulazione). Ma allora $supf(K) \in f(K) \Rightarrow supf(K) = \underset{k}{max} f$

Struttura lineare di $\mathbb{R}^N$

In $\mathbb{R}^n$ si definiscono le operaazioni di

1. somma, $\underline{x} + \underline{y} = (x_1 + y_1, ..., x_N + y_N)^T$, con $\underline{x} = (x_1, ..., x_n)$ e $\underline{y} = (y_1, ..., y_n)^T$
2. prodotto per scalari, $\lambda \underline{x} = ((\lambda x_1, ..., \lambda x_N)^T$, con $\underline{x} = (x_1, ..., x_n)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$
   Rispetto a queste operazioni, $\mathbb{R}^n$ è uno spazio vettoriale di dimensione n
   La base canonica di $\mathbb{R}^N$ è: $\underline{e_1} = (1, 0, ..., 0)^T$,...,$\underline{e_n} = (0, ..., 0, 1)^T$

Definizione

Si introduce in $\mathbb{R}$ il prodotto scalare euclideo: $< \underline{x}, \underline{y} >= x_1 y_1 + ... + x_n y_n$. Questo $\forall \underline{x} = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ e $\forall \underline{y} = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$.
Si ha che: $< \cdot, \cdot >$: $\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ verifica, $\forall \underline{x}, \underline{y}, \underline{z} \in \mathbb{R}^n$ e $\forall \lambda \in \mathbb{R}$,:

- (S1) $< \underline{x} + \underline{y}, \underline{z} =< \underline{x}, \underline{z} > + < \underline{y}, \underline{z} >$;
- (S2) $< \lambda \underline{x}, \underline{y} = \lambda < \underline{x}, \underline{y} >$;
- (S3) $< \underline{x}, \underline{y} >=< \underline{y}, \underline{x} >$
- (S4) $< \underline{x}, \underline{x} >\geq 0$ e $< \underline{x}, \underline{x} >= \underline{0} \Leftrightarrow \underline{x} = \underline{0}$ $\to$ è definito positivo

Cauchy-Schwartz

$\forall \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$, $|\underline{x}, \underline{y}| \leq \sqrt{< \underline{x}, \underline{x} >} \cdot \sqrt{< \underline{y}, \underline{y}}$ e inoltre vale $| < \underline{x}, \underline{y} > | = \sqrt{< \underline{x}, \underline{x} >} \cdot \sqrt{< \underline{y}, \underline{y}} \Leftrightarrow \underline{x}$ e $\underline{y}$ sono linearmente indipendenti

Dimostrazione

Se $\underline{y} = \underline{0}$ vale l'uguaglianza
Se $\underline{y} \neq \underline{0}$, $\forall t \in \mathbb{R}$ calcolo: $< \underline{x} - t\underline{y}, \underline{x} - t\underline{y} >=< \underline{x}, \underline{x} > -2 < \underline{x}, \underline{y} > t + < \underline{y}, \underline{y} > t^2$.
Polinomio di secondo grado in t, con coefficiente di t positivo.
Studio il delta di questa disuguaglianza: $\frac{\Delta}{4} =< \underline{x}, \underline{y} >^2 - < \underline{x}, \underline{x} > \cdot < \underline{y}, \underline{y} >\leq 0 \Leftrightarrow \sqrt{< \underline{x}, \underline{y} >^2} = | < \underline{x}, \underline{y} > | \leq \sqrt{< \underline{x}, \underline{x} >} \cdot \sqrt{< \underline{y}, \underline{y} >}$.

Vale la disuguaglianza in quanto $CS \Leftrightarrow \Delta = 0$ e quindi $\Leftrightarrow$ esiste un solo $\bar{t} | < \underline{x} -$

$\bar{t}\underline{y}, \underline{x} - \bar{t}\underline{y} >=< \underline{x}, \underline{x} > -2 < \underline{x}, \underline{y} > \bar{t} + < \underline{y}, \underline{y} > \bar{t}^2 = 0$, ossia $\underline{x} - \bar{t}\underline{y} = 0$, cioè $\underline{x}$ e $\underline{y}$ sono linearmente indipendenti.

Definizione

Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$. Si dice prodotto scalare un'applicazione $< \cdot, \cdot >: V \times V \to \mathbb{R}$ verificante (S1), (S2), (S3) e (S4)

Definizione

$\forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n$ si definisce la **norma**, con $||x|| = \sqrt{< \underline{x}, \underline{x} >} = \sqrt{x_1^2, ..., x_n^2}$, norma euclidea

Proposizione

Si ha che $|| \cdot || : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ verifica, $\forall \underline{,y} \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda \in \mathbb{R}$:

- (n1) $||\underline{x}|| = 0 \Leftrightarrow \underline{x} = \underline{0}$, non degeneratezza
- (n2) $||\lambda \underline{x}|| = |\lambda| \cdot ||\underline{x}||$, omogeneità
- (n3) $||\underline{x} + \underline{y}|| \leq ||\underline{x}|| + ||\underline{y}||$, sub-additività

Dimostrazione

- (n1),(n2) banali
- (n3) $||\underline{x} + \underline{y}||^2 =< \underline{x} + \underline{y} >, \underline{x} + \underline{y} >=< \underline{x}, \underline{x} > +2 < \underline{x}, \underline{y} > + < \underline{y}, \underline{y} > \leq ||\underline{x}||^2 + 2||\underline{x}|| \cdot ||\underline{y}|| + ||\underline{y}||^2 = (||\underline{x}|| + ||\underline{y}||)^2$, quindi $||\underline{x} + \underline{y}|| \leq ||\underline{x}|| + ||\underline{y}||$

Osservazione

$\forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n$, $||\underline{x}|| = d(\underline{x}, 0)$, dato che $\underline{y} \in \mathbb{R}^n$: $d(\underline{x}, \underline{y}) = ||\underline{x} - \underline{y}||$

Dimostrazione

$\forall \underline{x}, \underline{y}, \underline{z} \in \mathbb{R}^n$, si ha $d(\underline{x}, \underline{y}) = ||\underline{x} - \underline{y}|| = ||\underline{x} - \underline{z} + \underline{z} - \underline{y}|| \leq ||\underline{x} - \underline{z} + ||\underline{y} - \underline{z}|| = d(\underline{x}, \underline{z}) + d(\underline{y}, \underline{z})$

Definizione

Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$. Un'applicazione lineare $|| \cdot || : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ verificante (n1), (n2), (n3) si dice **norma** in V

Definizione

Si pone $d(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) = \{d : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, d lineare $\}$ e si definisce $\mathbb{M}(m.n) = \{\mathbb{A}$, matrice di n righe, m colonne$\}$. Ogni volta che si fissa una base $\{\underline{e_1}, ..., \underline{e_n}\}$ in $\mathbb{R}^n$ e una base $\{\underline{e'_1}, ..., \underline{e'_m}\}$ in $\mathbb{R}^m$, esiste un **isomorfismo**α tra ($\mathbb{R}^n$,$\mathbb{R}^m$). A ogni $\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ associo una matrice $\mathbb{A}(m \times n) | \alpha(\underline{x}) = \mathbb{A}\underline{x}$, $\forall \underline{x}$. Risulta $\alpha(\underline{e_1}) = (a_{11}...a_{m1})^T, .., \alpha(\underline{e_n}) = (a_{1n}...a_{mn})^T$, in coordinate rispetto a $\{\underline{e'_1}, ..., \underline{e'_m}\}$