Analisi II - prima parte

Serie numeriche

Serie di numeri reali o complessi

Problema:

Dare significato a somma di ∞ numeri reali o complessi assegnati come termini di una successione

Motivazione ed esempi

- Urti non elastici
  $0 < q < 1$
  1. La pallina si ferma? In un tempo finito?
  2. Se si, quanto è questo tempo?
     $s = \frac{1}{2}gt^2$,$t = \sqrt{\frac{2s}{g}}$.
     $t_0 = \sqrt{\frac{2h}{g}}$, $t_1 = 2\sqrt{\frac{2qh}{g}} = 2t_0\sqrt{q}$, $t_2 = 2\sqrt{\frac{2q^2h}{g}} = 2t_0(\sqrt{q})^2$,...
     $t_n = 2t_0(\sqrt{q})^n$
     $T = t_o + t_1 + ... + t_n + ... = t_0 + 2t_0(\sqrt{q} + (\sqrt{q})^2 + .. + (\sqrt{q})^n + ...)$
     T, finito o infinito?
- $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ... + \frac{1}{2^n} + ... = 1$
- $1 + 2 + 3 + ...$
- $1,234 = 1 + 2 \cdot 0,1 + 3 \cdot 0,01 + 4 \cdot 0,001$; $1,5 = 1 + \frac{5}{10} + \frac{5}{100} + ...$
- nastro elastico, formica
  $v = 10cm/min$
  $1^\circ min = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}$ di nastro
  se raddoppio la lunghezza del nastro
  $2^\circ min = \frac{10}{100} + \frac{10}{200} = \frac{1}{10} + \frac{1}{2 \cdot 10}$ di nastro
  $3^\circ min = \frac{10}{100} + \frac{10}{2 \cdot 10} + \frac{10}{3 \cdot 10}$ di nastro
  $n^\circ min = \frac{10}{100} + \frac{10}{2 \cdot 10} + \frac{10}{3 \cdot 10} + ... + \frac{1}{n \cdot 10}$ di nastro
  1. riuscirà la formica ad arrivare all'altro estremo?
  2. se si in quanto tempo?

Idea

$(a_n)_n$ successione di addendi
$a_1 + a_2 + ... + a_n + ... =?$
$s_2 = a_1 + a_2$
$s_5 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$
...
$\lim_n s_n$

Definizione di serie di numeri reali

Sia $(a_n)_n$ una successione in $\mathbb{R}$. $\forall n \in \mathbb{N}^+$ poniamo $s_1 = a_1$, $s_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$ per $n \geq 2$
s_n sarà la ridotta, parziale, n-esima.
La coppia $((a_n)_n, (s_n)_n)$ si dice serie di numeri reali di cui a_n è il termine generale e s_n è la ridotta n-esima e si indica con $\sum_i^n a_i$ oppure $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$

- Se esiste finito $\lim_n s_n = s \in \mathbb{R}$ si dice che la serie è **convergente** con somma s e si scrive $s = \sum_i^{+\infty} a_n$
- Se $\lim_n s_n = +\infty$ (o $-\infty$) si dice che la serie diverge a $+\infty$ (o $-\infty$)
- se **non** esiste il $\lim_n s_n$, la serie si dice indeterminata

Esempi importanti

Serie geometrica

È la serie $a + ak + ak^2 + ak^3 + ... = \sum_{n=0}^{+\infty} a \cdot k^n$
con $a \neq 0$, $k \in \mathbb{R}$
Si ha $s_n = a + ak + ak^2 + ... + ak^n =$

- $a\dfrac{1-k^n}{1-k}$ se $k \neq 1$
- $n \cdot a$ se $k = 1$
  e quindi
- $|k| < 1 \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} s_n = a \cdot \dfrac{1}{1-k}$
- $|k| = 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a \cdot k^n$ diverge
- $k \geq 1$ diverge

- $k \leq -1$ oscilla, la serie è indeterminata

Esempio della pallina che cade

$T = t_0 + t_1 + ... = t_o + 2t_o(1 + \sqrt{q} + (\sqrt{q})^2 + (\sqrt{q})^3) + ... + (\sqrt{q})^n + ...) \to t_0 + 2t_0\sqrt{q}\dfrac{1}{1-\sqrt{q}}$

Serie armonica

$1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} + ... = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n}$

si ha $s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{n} = \int a(x)dx$, dove $a(\cdot) = \frac{1}{n}$
Considero la funzione $\frac{1}{x+1}$ e ho che $a(x) \geq \dfrac{1}{x+1}$ $\Rightarrow$ area di a(x)≥area di $\dfrac{1}{x+1}$
Risulta $s_n = \displaystyle\int a(x)dx \geq \int \dfrac{1}{x+1}dx = [log(x+1)]_0^n$
se $n \to +\infty$, $(log(n+1) - log(0)) \to +\infty \Rightarrow s_n$ diverge

Serie a termini non-negativi

Criterio del confronto

Serie armonica generalizzata

$\sum \dfrac{1}{n^p}$ converge se $p > 1$, diverge altrimenti

Notazione di Landau

Siano $(a_n)_n$ e $(b_n)_n$ due successioni in $\mathbb{R}$, con $b_n \neq 0 \forall n$ e $\lim\limits_n a_n = \lim\limits_n b_n = 0 \Rightarrow$

- $a_n = O(b_n)$ se esistono $k > 0$
  e $\bar{n} \in \mathbb{N}^+$ t.c. $|a_n| \leq k|b_n|$, $\forall n \geq \bar{n}$ (oppure $\frac{|a_n|}{|b_n|} \leq k$, cioè a_n tende più velocemente a zero più velocemente di b_n)
- $a_n = o(b_n)$ se $\lim\limits_n \dfrac{a_n}{b_n} = 0$

Criterio dell'ordine di infinitesimo

Sia $\sum a_n$, $a_n \geq 0$, $\forall n$,

1. se esiste $p > 1$ t.c. $a_n = O(\dfrac{1}{n^p})$, allora a_n converge
2. se $\lim\limits_n n \cdot a_n > 0$ (o $+\infty$), allora $\sum a_n$ diverge

Dimostrazione

1. Poichè $a_n = O(\frac{1}{n^p})$ esistono $k > 0$ e $\bar{n} \in \mathbb{N}^+$ t.c. $a_n = |a_n| < k\dfrac{1}{n^p}$, $\forall n \geq \bar{n}$
   Quini $\sum a_n$ è maggiorata dalla serie $\sum \dfrac{k}{n^p}$ convergente, dunque per il criterio del confronto $\displaystyle\sum_{n=\bar{n}+1}^{+\infty} a_n$ converge e pertanto converge anche $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$
2. Poichè $\lim_n n \cdot a_n > 0$, per il teorema di permanenza del segno esiste $L > 0$ e $\bar{n} \in \mathbb{N}^+$ t.c. $\forall n \geq \bar{n}$, $n \cdot a_n > L \Leftrightarrow a_n \geq L \cdot \frac{1}{n}$
   Essendo la serie $\sum \frac{1}{n}$ divergente anche $\sum \frac{L}{n}$ diverge e per il criterio del confronto $\displaystyle\sum_{n=\bar{n}+1}^{+\infty} a_n$ diverge, quindi diverge anche $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$

Criterio del rapporto

Sia $\sum a_n$, $a_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^+$
Se esite $k \in]0, 1[$ t.c. $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leq k$
allora la serie $\sum a_n$ converge

Dimostrazione

Si ha $a_2 \leq a_1 \cdot k$, $a_3 \leq a_2 \cdot k \leq a_1 \cdot k^2$, ...
dunque $a_{n+1} < k^n a_1$, $\forall n \in \mathbb{N}^+$
La serie è maggiorata dalla serie geometrica con ragione $k < 1$, la quale converge, ciò implica che $\sum a_n$ converge

Osservazione

sotto l'ipotesi del rapporto u ha che $a_n = o(\frac{1}{n^p})$, $\forall p > 1$, perchè va a zero esponenzialmente

Osservazione$_2$

Non basta richiedere $a_{n+1} < a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^+$
esempio: $\sum \frac{1}{n}$, divergente

Corollario del criterio del rapport (con il limite)

Sia $\sum a_n$ con $a_n > 0 \forall n \in \mathbb{N}^+$, si ha

1. se esiste $\lim_n \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = L$, con $L < 1$, allora $\sum a_n$ converge
2. se esiste $\lim_n \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = L$, con $L > 1$, allora $\sum a_n$ diverge

Osservazione

se $L = 1$**nulla** si può dire

Dimostrazione

1. $\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$ equivale a
   $(\forall\varepsilon < 0)(\exists\bar{n})(\forall n)(n > \bar{n} \Rightarrow |\frac{a_{n+1}}{a_n} - L| < \varepsilon)$
   $-\varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < \varepsilon$, con ε preso t.c. $L + \varepsilon < 1$
   e quindi $\frac{a_{n+1}}{a_n} < L + \varepsilon = K < 1$
   Dunque per il criterio del rapporto $\sum_{n=\bar{n}+1}^{+\infty} a_n$ converge, pertanto $\sum a_n$ converge
2. procedendo come nel caso 1. esiste $\bar{n}$ t.c. $\forall n > \bar{n}$
   $\frac{a_{n+1}}{a_n} > L - \varepsilon$, risulta $\frac{a_{n+1}}{a_n} > L - \varepsilon > 1$, $\forall n > \bar{n}$
   cioè $a_{n+1} > a_n > ... > a_1 > 0$
   Quindi $a_n \not\to 0 \Rightarrow \sum_{n=\bar{n}+1}^{+\infty} a_n$ diverge, pertanto anche $\sum a_n$ diverge

Criterio della radice

Sia $\sum a_n$ con $a_n > 0 \forall n \in \mathbb{N}^+$
se esiste $k \in]0, 1[$ t.c. $\sqrt[n]{a_n}$ ($\Leftrightarrow a_n \leq k^n$) $\forall n \in \mathbb{N}^+$ allora $\sum a_n$ converge

Corollario del criterio della radice (con il limite)

Se $\sum a_n$, con $a_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^+$
Si ha:

1. se esiste $\lim_n \sqrt[n]{a_n} = L$, con $L < 1$, $\sum a_n$ converge
2. se esiste $\lim_n \sqrt[n]{a_n} = L$,con $L > 1$, $\sum a_n$ diverge a $+\infty$

Criterio generale di Cauchy

Successioni

Sia $(a_n)_n$ una successione in $\mathbb{R}$
$\lim_n a_n = l \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \exists\bar{n}$t.c. $\forall n \geq \bar{n}$, $|a_n - L| < \varepsilon$

Condizione di Cauchy

$(a_n)_n$ verifica la condizione di Cauchy se
$(\forall\varepsilon > 0)(\exists\bar{n})(\forall n)(\forall p)(n > \bar{n} \Rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon)$, dove $m = p + n$

Teorema

$(a_n)_n$ è convergente $\Leftrightarrow a_n$ verifica la condizione di Cauchy

- Per le serie: Sia $\sum a_n$ in $\mathbb{R}$. Si ha $\sum a_n$ convergente $\Leftrightarrow$ esiste finito $\lim\limits_n s_n = s$

  cioè $\lim\limits_n a_n = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \bar{n}$t.c. $\forall n \geq \bar{n}$, $|s_n - s| < \varepsilon$

  $\sum a_n$ è convergente (cioè s_n è convergente) $\Leftrightarrow s_n$ verifica la condizione di Cauchy

  $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \bar{n})(\forall n)(\forall p)(n > \bar{n} \Rightarrow |s_n - s_{n+p}| < \varepsilon)$

  Essendo $s_{n+p} - s_n = (a_{n+p} + a_{n+p-1} + ... + a_1) - (a_n + ... + a_1) = a_{n+1} + ... + a_{n+p}$

  Allora la condizione di Cauchy diventa

  $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \bar{n})(\forall n)(\forall p)(n > \bar{n} \Rightarrow |a_{n+1} + ... + a_{n+p}| < \varepsilon)$