Analisi II - quarta parte

Teorema di Riesz

Per ogni aplicazione lineare $L \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ esiste uno ed un solo $\underline{a} \in \mathbb{R}^n$ t.c. $L(\underline{x}) =< \underline{x}, \underline{a} >$

Dimostrazione

Sia $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, lineare

- (esistenza di a). Fissiamo $\{\underline{e_1}, ..., \underline{e_n}\}$ base di $\mathbb{R}^n$ e poniamo $L(\underline{e_1}) = a_1, ..., L(\underline{e_n}) = a_n$.
  Definiamo $\underline{a} = (a_1, ..., a_n)^T \in \mathbb{R}$. Si ha, $\forall \underline{x} = (x_1, ..., x_n)^T = x_1 e_1 + x_2 e_2 + ... + x_n a_n =< \underline{x}, \underline{a} >$

Funzioni vettoriali

Derivate direzionali e parziali per funzioni da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^m$

Siano $f : A(\subseteq \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^m$, A aperto e $x_0 \in A$ e $\underline{v} \in \mathbb{R}^m$, $||v|| = 1$, si dice che f è dotata di derivata direzionale lungo $\underline{v}$ sul punto x_0 se ogni compontente $f_j : A(\subseteq \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ è dotata di derivata direzionale lungo $\underline{v}$ su x_0
$\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(\underline{x_0}) = (\frac{\partial f_1}{\partial \underline{v}}(\underline{x_0}, ..., \frac{\partial f_m}{\partial \underline{v}}(\underline{x_0}))^T$. Si dice che f è dotata di derivata parziale i-esima in $\underline{x_0}$ se ogni componente $f_i : A(\subseteq \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$, per $i = 1, .., M$ è dotata di derivata parziale i-esima in $\underline{x_0}$
$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{x_0}) = (\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(\underline{x_0}), ..., \frac{\partial f_m}{\partial x_i}(\underline{x_0}))^T$, per $i = 1, .., n$

Matrice Jacobiana

Siano $f : A(\subseteq \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^m$ con A aperto e $\underline{x_0} \in A$.
Se $\forall i = 1, .., n$ esiste $\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(\underline{x_0})$, la matrice

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} \dots \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots \ \ddots \ \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1} \dots \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} = Jf(\underline{x_0})$$

Si dice matrice Jacobiana di f in $\underline{x_0}$

Esempi

- $M = 1$, campo scalare - $Jf(\underline{x_0}) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}(\underline{x_0}), ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(\underline{x_0})) \in \mathbb{M}(1, n)$, ovvero tutte le n derivate parziali
- $N = 1$, curva parametrica ($f = \gamma$, $x = t$) - $Jf(t_0) = \begin{pmatrix} \gamma_1'(t_0) \\ ... \\ \gamma_m'(t_0) \end{pmatrix} \in \mathbb{M}(m, 1)$

Il concetto di derivabilità per funzioni a più variabili lungo una direzione non è una buona generalizzazione della misura di derivabilità per le funzioni ad una variabile

Riesame del caso unidimensionale

Siano $f : A(\subseteq \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, con A aperto, $x_0 \in A$. Si ha che f è derivabile in $x_0 \Leftrightarrow$ esiste $a \in \mathbb{R}$ t.c.
$\underline{f}(x) = f(x_0) + af(x - x_0) + o(|x - x_0|)$. Inoltre risulta $a = f'(x_0)$ e la funzione $\overline{f}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ si dice approssimazione lineare di f in x_0 (polinomio di Taylor di ordine 1)

Osservazione

L'applicazione lineare $L : \mathbb{R} \in \mathbb{R}$ t.c. $L(h) = a \cdot h$ è lineare, cioè $L \in \mathscr{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Dunque si ha f derivabile in $x_0 \Leftrightarrow$ esiste $L \in \mathscr{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ t.c. $f(x) = f(x_0) + L(x - x_0) + o(|x - x_0|)$. Questo è il punto di partenza per introdurre la corretta definizione di derivabilità per le funzioni di più variabili.

Differenziale di Frechèt ($N \geq 1$,$M = 1$, campi scalari)

Siano $f : A(\subseteq \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$, A aperto e $\underline{x_0} \in A$. Si dice che f è differenziabile secondo Frechèt in $\underline{x_0}$ se esiste $L \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ t.c. $f(\underline{x}) = f(\underline{x_0}) + L(\underline{x} - \underline{x_0}) + o(||\underline{x} - \underline{x_0}||)$.
Inoltre l'applicazione lineare L si dice **differenziale** (o derivata) di Frechèt di f in $\underline{x_0}$ e si scrive $L=df(\underline{x_0}).

Rappresentazione di L

Fissata una base $\{\underline{e_1}, .., \underline{e_n}\}$ in $\mathbb{R}^n$ L si rappresena per mezzo di una matrice $\mathbb{A} \in \mathbb{M}(1, n)$, con $\mathbb{A} = (a_1, .., a_n)$, mel senso che $L(h) = \mathbb{A} \cdot h = a_1 h_1 + ... + a_n h_n$, $\forall \underline{h} = (h_1, ..., h_n)^T \in \mathbb{R}^n$. Posto $\underline{a} = \mathbb{A}^T = (a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$, risulta equivalentemente $L(h) = < \underline{h}, \underline{a} >$

Approssimazione lineare

Se f è differenziabile in $\underline{x_0}$, allora la funzione $f(\underline{x}) = f(\underline{x_0}) + L(\underline{x} - \underline{x_0}) = f(\underline{x_0}) + df(\underline{x_0})(\underline{x} - \underline{x_0})$ si dice approssimazione lineare di f in $\underline{x_0}$ e si ha
$f(\underline{x}) = \overline{f}(\underline{x}) + o(||\underline{x} - \underline{x_0}||) = f(\underline{x_0}) + df(\underline{x_0})(\underline{x} - \underline{x_0}) + o(||\underline{x} - \underline{x_0}||)$

$N = 2$: piano tangente

Se f è differenziabile in $(\underline{x_0}, \underline{y_0})^T$, allora il piano di equazione $z = \overline{f}(x, y)$ si dice piano tangente a $G(f)$ nel punto $(x^0, y^0, \overline{f}(x, y))^T$

NB

$z = \overline{f}(x, y) \Leftrightarrow z = f(x_0, y_0) + a_1(x - x_0) + a_2(y - y_0)$, con (a_1, a_2) matrice rappresentativa di $df(x_0, y_0)$

Proprietà delle funzioni differenziabili

Siano $f : A(\subseteq \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$, A aperto e $\underline{x} \in A$.

Teorema

Se f è differenziabile in $\underline{x_0}$ allora f è continua in $\underline{x_0}$

Dimostrazione

Si ha $f(\underline{x}) = f(\underline{x_0}) + < \underline{a}, \underline{x} - \underline{x_0} > + o(||\underline{x} - \underline{x_0}||) \xrightarrow{\underline{x} \to \underline{x_0}} f(\underline{x_0}) + L(\underline{0}) + 0 = f(\underline{x_0}) \Rightarrow$ è continua

Teorema

Se f è differenziabile in $\underline{x_0}$ allora $\forall \underline{v} \in \mathbb{R}$, $||v|| = 1$, esiste L t.c.
$\dfrac{\partial f}{\partial \underline{v}}(\underline{x_0}) = L(\underline{v})$, con $L = df(\underline{x_0})$

Dimostrazione

Fissiamo $\underline{v} \in \mathbb{R}$, $||v|| = 1$ e calcoliamo $\dfrac{f(\underline{x_0} + t\underline{v}) - f(\underline{x_0})}{t} = \dfrac{L(t\underline{v}) + o(||t\underline{v}||)}{t} = \dfrac{t}{t} L(\underline{v}) + \dfrac{o(t)}{t} \xrightarrow{t \to 0} L(\underline{v}) + 0$ e quindi $\frac{\partial f}{\partial \underline{v}} = L(\underline{v})$

Corollario

Se f è differenziabile allora la matrice $Jf(\underline{x_0})$ cioè $L(\underline{h}) = df(\underline{x_0}) = Jf(\underline{x_0}) \cdot h$, $\forall h \in \mathbb{R}^n$

(---CHECK 2019/10/14 dove "???"---)

Dimostrazione

Sia {\underline{e_1},..,\underline{e_n}} la base canonica di $\mathbb{R}^n$, allora $\frac{\partial f}{\partial \underline{e_i}}(\underline{x_0}) = \frac{\partial f}{\partial \underline{x_i}}(\underline{x_0}) = L(\underline{e_i}) = a_i$, $\forall i = 1, ..., n$
Pertanto si ha $\mathbb{A} = (a: 1, ..., a_n) = (\frac{\partial f}{\partial \underline{x_1}}(\underline{x_0}), ..., \frac{\partial f}{\partial \underline{x_n}}(\underline{x_0})) = Jf(\underline{x_0})$

Conseguenza

Se la f è differenziabile in $\underline{x_0}$, allora, $\forall \underline{v} \in \mathbb{R}^n$, con $||\underline{v}|| = 1$, si ha $\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(\underline{x_0}) = L(\underline{v}) = Jf(\underline{x_0}) \cdot \underline{v} = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\underline{x_0})v_1 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\underline{x_0})v_n$, con $\underline{v} = (v_1, ..., v_n)^T$

Gradienti di un campo scalare

Se f è differenziabile in $\underline{x_0}$, si definisce **gradiente** di f in $\underline{x_0}$ il vettore colonna associato a $df(\underline{x_0}) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ del teorema di Riesz e si indica con $\nabla f(\underline{x_0}) = (\dfrac{\partial f}{\partial x_n}(\underline{x_0}), ..., \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(\underline{x_0}))^T = (Jf(\underline{x_0}))^T$

Proprietà del gradiente

1. Se f è differenziabile in $\underline{x_0}$, allora $f(\underline{x}) = f(\underline{x_0}) + < \nabla f(\underline{x_0}), \underline{x} - \underline{x_0} > + o(||\underline{x} - \underline{x_0}||)$. Inoltre, $\forall \underline{v} \in \mathbb{R}^n$ con $||v|| = 1$, si ha $\dfrac{\partial f}{\partial \underline{v}}(\underline{x_0}) =< \nabla f(\underline{x_0}), \underline{x} - \underline{x_0} >$
2. Se f è differenziabile in $\underline{x_0}$ e $\nabla f(\underline{x_0}) \neq \underline{0}$, allora $\dfrac{\partial f}{\partial \underline{v}}(\underline{x_0})$ è massimo se $\underline{v} = \dfrac{\nabla f(\underline{x_0})}{||\nabla f(\underline{x_0})||}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial \underline{v}}(\underline{x_0})$ è minimo se $\underline{v} = -\dfrac{\nabla f(\underline{x_0})}{||\nabla f(\underline{x_0})||}$

Dimostrazione

1. Sia $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$, con $||\underline{v}|| = 1$. Si ha $\dfrac{\partial f}{\partial \underline{v}}(\underline{x_0}) =< \nabla f(\underline{x_0}), \underline{v} > \leq ||\nabla f(\underline{x_0})|| \cdot ||\underline{v}|| = ||\nabla f(\underline{x_0})||$ ed è $0 \Leftrightarrow \underline{v} = \dfrac{\nabla f(\underline{x_0})}{||\nabla f(\underline{x_0})||}$
2. Similmente da $\dfrac{\partial f}{\partial \underline{v}}(\underline{x_0}) =< \nabla f(\underline{x_0}), \underline{v} > \geq -||\nabla f(\underline{x_0})||$, segue la seconda conclusione
   (---RECUPERA DATA 2019/10/16---)