Analisi II - seconda parte

Operazioni con serie (termini generici)

- Combinazione lineare di due serie
  Se $\sum a_n$ e $\sum b_n$ sono due serie date e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ allora $\sum c_n$, dove $c_n = \alpha \cdot a_n + \beta \cdot b_n \forall n \in \mathbb{N}^+$ si dice **combinazione lineare** delle due serie

NB:

- $\alpha = \beta = 1$ Serie somma
- $\alpha \neq 0$, $\beta = 0$ Serie prodotto per una costante

Teorema

Se $\sum a_n = A \in \mathbb{R}$ e $\sum b_n = B \in \mathbb{R}$ allora $\sum(\alpha a_n + \beta b_n)$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ converge a $\alpha A + \beta B$

Dimostrazione

$\forall n$, $c_n = \alpha a_n + \beta b_n$

Serie con termini di segno misto

Si tratta di serie aventi infiniti termini positivi e infiniti termini negativi

Serie assolutamente convergenti e semplicemente convergenti

- Si dice che $\sum a_n$ è **assolutamente convergente** (AC) se $\sum |a_n|$ è convergente
- Si dice che $\sum a_n$ è **semplicemente convergente** (SC) se è convergente MA $\sum |a_n|$ diverge

Teorema

$\sum a_n$ è AC $\Leftrightarrow \sum a_n$ è convergente

Dimostrazione

Utilizzando il criterio generale di Cauchy
Poichè $\sum |a_n|$ è convergente, vale Cauchy, cioè

$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \bar{n})(\forall n)(\forall p)(n > \bar{n} \Rightarrow ||a_{n+1}| + |a_{n+2}| + ... + |a_{n+p}|| < \varepsilon)$
Si ha $|a_{n+1} + ... + a_{n+p}| \leq ||a_{n+1}| + |a_{n+2}| + ... + |a_{n+p}|| < \varepsilon$
Quindi $\sum a_n$ verifica la condizione di Cauchy e quindi converge

Serie a termini di segno alternato

Sia $(a_n)_n$ una successione in $\mathbb{R}$ t.c. $a_n > 0 \forall n \in \mathbb{N}^+$
La serie $\sum a_n \cdot (-1)^n$ si dice serie a termini di segno alternato

Criterio di Leibniz

Sia una successione $(a_n)_n$ t.c.

- $a_n > 0 \forall n \in \mathbb{N}^+$
- $a_{n+1} \leq a_n$, non crescente
  Si ha che $\sum a_n \cdot (-1)^n$ converge se e solo se $\lim\limits_{n} a_n = 0$
  Inoltre vale la stime d'errore $|s - s_n| < a_n + 1$

Idea

n dispari $\Rightarrow$ aggiungo/tolgo sempre meno $\Rightarrow$ convergo

Dimostrazione

- Convergenza
  $\forall k \in \mathbb{N}^+$ si ha
  - $s_{2k+1} = s_{2k} - a_{2k+1} = s_{2k-1} + a_{2k} - a_{2k+1} \geq s_{2k+1} \geq ... \geq s_1$
  - $s_{2k} = s_{2k-1} + a_{2k} = s_{2k-2} + a_{2k-1} + a_{2k} \leq s_{2k-2} \leq ... \leq s_2$
  - $s_1 \leq s_{2k+1} \leq s_{2k+2} \leq s_{2k} \leq ... \leq s_2$

La successione $(s_{2k+1})_k$ è non decrescente, limitata superiormente da s_2
Quindi per il teorema del limite della successione monotona esiste finito $\lim\limits_{n} \underset{2n+1}{s} = s' \in \mathbb{R}$
$s_{2k+1} = s_{2k} - a_{2k+1}$, se $k \to +\infty$ si ha:
$s' = s'' - 0$
$\lim\limits_{n} s_{2k} = \lim\limits_{n} s_{2k+1} = s (= s' = s'')$
due sottosuccessioni pari e dispari tendono allo stesso limite $\Rightarrow$ la serie originale converge in quanto le due sottosuccessioni comprendono tutti gli elementi della serie originale

Stima d'errore

Supponiamo che $s = \sup\limits_{k} s_{2k+1}$, $s = \sup\limits_{k} s_{2k}$ e quindi $s_{2k+1} \leq s \leq s_{2n} \forall n, k \in \mathbb{N}^+$
Risulta $|s - s_n| =$

- $s - s_{2k+1} \leq s_{2k+2} - s_{2k+1} = a_{2k+2}, n = 2k+1$
- $s_{2k} - s \leq s_{2k} - s_{2k+1} = a_{2k+1} = a_{n+1}$
  cioè $|s - s_n| = \leq a_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}^+$

Vale la proprietà

Sia $(a_n)_n$ in $\mathbb{C}$, $a_n = \alpha_n + i\beta_n$, dove $\alpha_n, \beta_N \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N}^+$ e sia $a = \alpha + i\beta$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Teorema

$\lim_n a_n = a \Leftrightarrow \lim_n \alpha_n = \alpha$ e $\lim_n \beta_n = \beta$

Dimostrazione

Basta osservare che $a_n \to a \Leftrightarrow \alpha_n \to \alpha$ e $\beta_n \to \beta$ per $n \to +\infty$

Serie in $\mathbb{C}$

Sia $(a_n)_n$ una successione in $\mathbb{C}$ poniamo $s_n = a_1 + ... + a_n$.
La coppia $((a_n)_n, (s_n)_n)$ si dice serie di numeri complessi e si indica con $\sum a_n$

- si dice che $\sum a_n$ converge con somma $s \in \mathbb{C}$ se esiste $\lim_n s_n = s$
- si dice che $\sum a_n$ è AC se la serie dei moduli $\sum |a_n|$ è convergente
- Sia $a_n = \alpha_n + i\beta_n$ e $s_n = A_n + iB_n$, $s_n = a_1 + ... + a_n$, $A_n = A_1 + ... + A_n$, $B_n = B_1 + ... + B_n \forall n \in \mathbb{N}^+$

Teorema

Si ha che $\sum a_n$ converge con somma $s \Leftrightarrow$ convergono $\sum \alpha_n$ e $\sum \beta_n$. Inoltre, posto $s = \lim_n s_n A = \lim_n A_n$, $B = \lim_n B_n$ si ha che $s = A + iB$

Teorema

Se $\sum a_n$ è AC, allora è convergente

Dimostrazione

Basta osservare che $|a_n| > |\alpha_n|$ e $> |\beta_n|$
$|\alpha_n|$ e $|\beta_n|$ convergono $\Rightarrow$ convergono anche α_n e $\beta_n \Rightarrow$ converge anche a_n