

ECE PARIS - ÉCOLE D'INGÉNIEURS



Modélisations et simulations de problèmes en physique

ING 1 : Mathématiques 1

Année 2020-2021

Chapitre 1. Intégration numérique

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. Nous avons

$$\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a)$$

où F est une primitive de f . Il existe plusieurs techniques afin de déterminer une telle primitive : intégration par parties et les changements de variables. Il s'avère que, dans la majorité des cas, déterminer une telle primitive peut être difficile voire impossible. Les mathématiciens ont donc développé des outils numériques permettant d'approximer une telle intégrale.

Dans ce chapitre, nous examinerons deux méthodes d'approximation d'une intégrale : la méthode des trapèzes et la méthode de Simpson. Afin d'introduire ces deux méthodes, nous avons besoin d'une subdivision régulière de l'intervalle $[a, b]$. Soit

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

où $x_i = x_0 + ih$ pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ avec $h = \frac{b-a}{n}$. On a que $x_{i+1} - x_i = h$ pour tout entier $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ et, en utilisant la règle de Chasles, on peut écrire

$$I = \int_a^b f(x) \, dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) \, dx$$

.

Méthode des trapèzes

Pour introduire la méthode des trapèzes, nous introduisons l'unique polynôme L_i de degré 1 passant par les points $(x_i, f(x_i))$ et $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$ donné par

$$L_i(x) = \left(\frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} \right) f(x_i) + \left(\frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \right) f(x_{i+1}).$$

On vérifie directement que $L_i(x_i) = f(x_i)$ et que $L_i(x_{i+1}) = f(x_{i+1})$. La méthode des trapèzes consiste à approximer l'intégrale I par

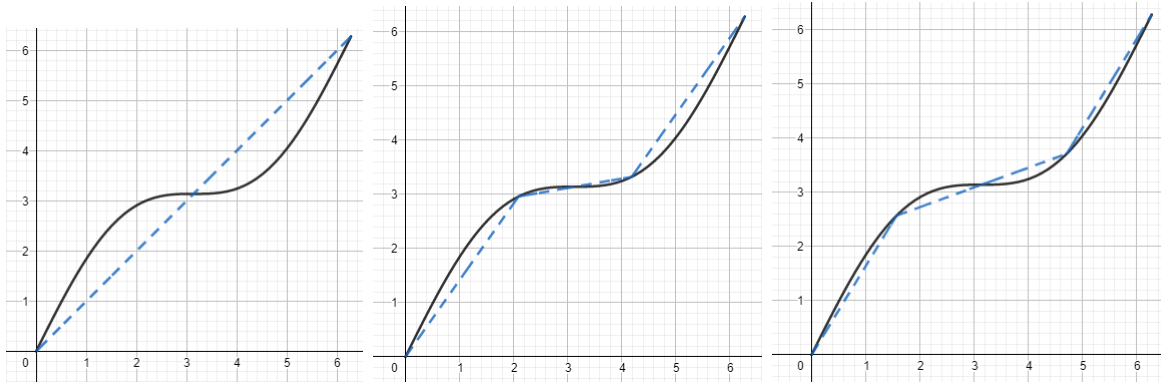
$$I \approx T_n = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} L_k(x) \, dx.$$

Par un calcul direct, on montre que

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} L_i(x) \, dx = \frac{h}{2} (f(x_i) + f(x_{i+1}))$$

pour tout $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. Nous obtenons ainsi une approximation de l'intégrale I par la méthode des trapèzes donnée par

$$I \approx T_n = \frac{h}{2} \sum_{i=0}^{n-1} (f(x_i) + f(x_{i+1}))$$

FIGURE 1 – Méthode des trapèzes pour $n = 1, 3, 4$

Dans le cas particulier où $n = 1$, on a $x_0 = a$ et $x_1 = b$. La méthode des trapèzes nous donne la formule d'approximation suivante :

$$I \approx T_1 = \frac{b-a}{2} (f(a) + f(b)).$$

Pour $n = 2$, on a $x_0 = a$, $x_1 = \frac{a+b}{2}$ et $x_2 = b$. Dans ce cas, la méthode des trapèzes nous donne l'approximation :

$$I \approx T_2 = \frac{b-a}{4} \left(f(a) + 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right).$$

Exemple : Utiliser la méthode des trapèzes avec $n = 1$ et $n = 2$ pour approximer l'intégrale

$$I = \int_1^4 \sqrt{x} \, dx.$$

Comparer vos résultats avec la valeur exacte de l'intégrale.

Pour $n = 1$ et $n = 2$, on obtient respectivement les approximations suivantes :

$$I \approx T_1 = \frac{3}{2}(f(1) + f(4)) = 4.5, \quad I \approx T_2 = \frac{3}{4}(f(1) + 2f(2.5) + f(4)) \approx 4.62171$$

La valeur exacte de l'intégrale est $I = \frac{14}{3}$. Nous observons une erreur d'approximation, mais que celle-ci semble s'affiner lorsque n devient grand. On obtient $|I - T_1| \approx 0.16667$ et $|I - T_2| \approx 0.04496$.

Il est possible de mesurer cette erreur et celle-ci est donnée par l'expression suivante :

$$|I - T_n| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|$$

En reprenant l'exemple précédent, on a $f''(x) = -\frac{1}{4x^{3/2}}$. On en déduit la formule pour l'erreur d'approximation suivante :

$$|I - T_n| \leq \frac{9}{16n^2}$$

Méthode de Simpson

Pour illustrer la méthode de Simpson, nous commençons par le plus simple des cas : $n = 2$. Nous avons $x_0 = a$, $x_1 = \frac{a+b}{2}$ et $x_2 = b$. Nous cherchons l'unique polynôme P du second degré passant par les points $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$ et $(x_2, f(x_2))$. Ce polynôme est donné par

$$P(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}f(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}f(x_1) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}f(x_2)$$

et satisfait $P(x_i) = f(x_i)$ pour $i \in \{0, 1, 2\}$. La méthode de Simpson consiste à approximer l'intégrale I par

$$I \approx \mathcal{S}_1 = \int_a^b P(x) dx = \frac{h}{3} \left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right)$$

Exemple : La méthode de Simpson permet d'approximer l'intégrale suivante :

$$\int_1^4 \sqrt{x} dx \approx \mathcal{S}_1 = \frac{1}{2} (\sqrt{1} + 4\sqrt{2.5} + \sqrt{4}) \approx 4.66228$$

Nous observons une erreur d'approximation de l'intégrale avec la valeur exacte de celle-ci :

$$|I - \mathcal{S}_1| \approx 0.00439$$

Une comparaison rapide entre la méthode des trapèzes et la méthode de Simpson semble suggérer que cette dernière converge plus rapidement vers la valeur exacte de I .

Il est possible de mesurer cette erreur et celle-ci est donnée par l'expression suivante :

$$|I - \mathcal{S}_1| \leq \frac{(b-a)^5}{2880} \max_{x \in [a,b]} |f^{(4)}(x)|$$

Dans l'exemple ci-dessus, on montre que l'erreur est donnée par l'expression suivante :

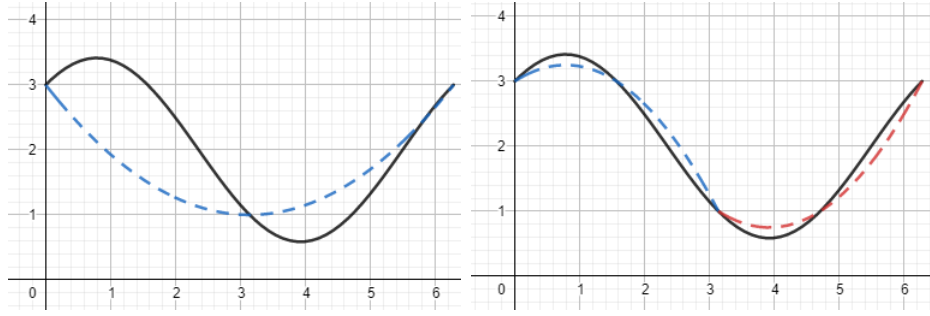
$$|I - \mathcal{S}_1| \leq \frac{3^5 \times 15}{2880 \times 16} \approx 0.07910$$

Nous cherchons maintenant à généraliser la méthode de Simpson au cas $n = 2m$. Pour ce faire, nous cherchons l'unique polynôme du second degré passant par les points $(x_i, f(x_i))$, $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$ et $(x_{i+2}, f(x_{i+2}))$. Ce polynôme est donné par

$$P_i(x) = \frac{(x-x_{i+1})(x-x_{i+2})}{(x_i-x_{i+1})(x_i-x_{i+2})}f(x_i) + \frac{(x-x_i)(x-x_{i+2})}{(x_{i+1}-x_i)(x_{i+1}-x_{i+2})}f(x_{i+1}) + \frac{(x-x_i)(x-x_{i+1})}{(x_{i+2}-x_i)(x_{i+2}-x_{i+1})}f(x_{i+2})$$

La méthode de Simpson consiste à approximer l'intégrale I par

$$I \approx \mathcal{S}_m = \sum_{i=0}^{m-1} \int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} P_i(x) dx = \frac{h}{3} \left(f(a) + 2 \sum_{i=1}^{m-1} f(x_{2i}) + 4 \sum_{i=0}^{m-1} f(x_{2i+1}) + f(b) \right)$$

FIGURE 2 – Méthode de Simpson pour $n = 2$ et $n = 4$

Exemple : Reprenons l'exemple ci-dessus avec $n = 4$. La méthode de Simpson donne l'approximation suivante :

$$I \approx \mathcal{S}_2 = \frac{1}{4} \left(\sqrt{1} + 4\sqrt{\frac{7}{4}} + 2\sqrt{\frac{5}{2}} + 4\sqrt{\frac{13}{4}} + \sqrt{4} \right) \approx 4.66622$$

L'erreur d'approximation est $|I - \mathcal{S}_2| \approx 0.00045$.

Dans le cas général, l'erreur d'approximation est donnée par la formule

$$|I - \mathcal{S}_m| \leq \frac{(b-a)^5}{180n^4} \max_{x \in [a,b]} |f^{(4)}(x)|$$

Les polyômes L et P

Dans cette section, nous nous intéresserons à la construction des polynômes L et P qui interviennent, respectivement, dans les méthodes des trapèzes et de Simpson.

Pour la méthode des trapèzes, nous cherchons l'unique polynôme L de degré 1 passant par les points (x_0, y_0) et (x_1, y_1) avec $x_0 \neq x_1$. Ce problème revient à déterminer les réels a et b tels que $L(x) = ax + b$ satisfait $L(x_0) = y_0$ et $L(x_1) = y_1$. Les conditions mènent au système d'équations

$$\begin{cases} y_0 &= a x_0 + b \\ y_1 &= a x_1 + b \end{cases}$$

Il suffit de résoudre ce système et nous trouvons

$$L(x) = \left(\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \right) x + \frac{x_1 y_0 - x_0 y_1}{x_1 - x_0} = \left(\frac{x_1 - x}{x_1 - x_0} \right) y_0 + \left(\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \right) y_1$$

Pour la méthode de Simpson, nous cherchons l'unique polynôme de degré 2 passant par les points (x_0, y_0) , (x_1, y_1) et (x_2, y_2) avec x_0, x_1 et x_2 deux à deux disjoints. Ce problème revient à déterminer les réels a, b et c tels que $P(x) = ax^2 + bx + c$ satisfait $P(x_i) = y_i \forall i \in \llbracket 0, 2 \rrbracket$. Les conditions mènent au système d'équations

$$\begin{cases} y_0 &= ax_0^2 + bx_0 + c \\ y_1 &= ax_1^2 + bx_1 + c \\ y_2 &= ax_2^2 + bx_2 + c \end{cases}$$

Nous devons résoudre ce système qui s'écrit sous forme matricielle $AX = B$ avec

$$A = \begin{pmatrix} x_0^2 & x_0 & 1 \\ x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

La matrice A est une matrice de Vandermonde. Elle est connue pour être inversible dans le cas où x_0, x_1 et x_2 sont deux à deux disjoints. En effet, l'inverse de la matrice A est donnée par

$$A^{-1} = \frac{1}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_1 - x_2)} \begin{pmatrix} x_1 - x_2 & x_2 - x_0 & x_0 - x_1 \\ x_2^2 - x_1^2 & x_0^2 - x_2^2 & x_1^2 - x_0^2 \\ x_1x_2(x_1 - x_2) & x_0x_2(x_2 - x_0) & x_0x_1(x_0 - x_1) \end{pmatrix}$$

Nous en déduisons que le système possède une unique solution donnée par $X = A^{-1}B$ qui se traduit en terme de composantes comme :

$$\begin{aligned} a &= \frac{y_0}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + \frac{y_1}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + \frac{y_2}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} \\ b &= -\frac{(x_1 + x_2)y_0}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} - \frac{(x_0 + x_2)y_1}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} - \frac{(x_0 + x_1)y_2}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} \\ c &= \frac{x_1x_2y_0}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + \frac{x_0x_2y_1}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + \frac{x_0x_1y_2}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} \end{aligned}$$

On en déduit que

$$P(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}y_0 + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}y_1 + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}y_2$$

On vérifie facilement que $P(x_i) = y_i$ pour tout $i \in \llbracket 0, 2 \rrbracket$. Voici un exemple d'application :

Exemple : Déterminer l'unique polynôme du second degré passant par les points $(1, 2)$, $(0, -1)$ et $(-1, 3)$. En utilisant la formule ci-dessus, on trouve

$$P(x) = x(x + 1) + (x - 1)(x + 1) + \frac{3}{2}x(x - 1) = \frac{7}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 1$$

Chapitre 2. Equations différentielles

L'objectif de ce chapitre est d'introduire des méthodes numériques afin d'approximer les solutions d'équations différentielles. Considérons le problème de Cauchy suivant :

$$y'(t) = F(t, y(t)), \quad \forall t \in [t_0, t_0 + T]$$

ayant pour condition initiale $y(t_0) = y_0$. Ici, $T > 0$ est fixé. Comme pour le cas de l'intégration numérique, nous introduisons une subdivision régulière de l'intervalle $[t_0, t_0 + T]$ donnée par

$$t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_N = t_0 + T$$

On a $t_i = t_0 + ih$ pour tout $i \in \llbracket 0, N \rrbracket$ avec $h = \frac{T}{N}$. Nous étudierons, dans ce chapitre, des méthodes nous permettant d'approximer au mieux les $y(t_i) = y_i$. Nous verrons les méthodes suivantes : méthode d'Euler, de Taylor et de Runge-Kutta.

Méthode d'Euler

Lorsque N devient grand, la variable $h = \frac{T}{N}$ tend vers 0. En utilisant cette observation, il est propice d'effectuer un développement limité de $y(t_{i+1}) = y(t_i + h)$ à l'ordre 1 au voisinage de $h = 0$. On obtient

$$y_{i+1} = y(t_{i+1}) = y(t_i) + hy'(t_i) + o(h) = y_i + hF(t_i, y_i) + o(h)$$

où nous avons déduit que $y'(t_i) = F(t_i, y(t_i)) = F(t_i, y_i)$ selon l'équation différentielle. La méthode d'Euler consiste à résoudre le système

$$y_{i+1} = y_i + h F(t_i, y_i) \quad \forall i \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$$

avec y_0 donné par le problème de Cauchy.

Exemple : Utiliser la méthode d'Euler pour approximer la solution du problème de Cauchy :

$$y'(t) = -\frac{1}{2} y(t), \quad \forall t \in [0, 5]$$

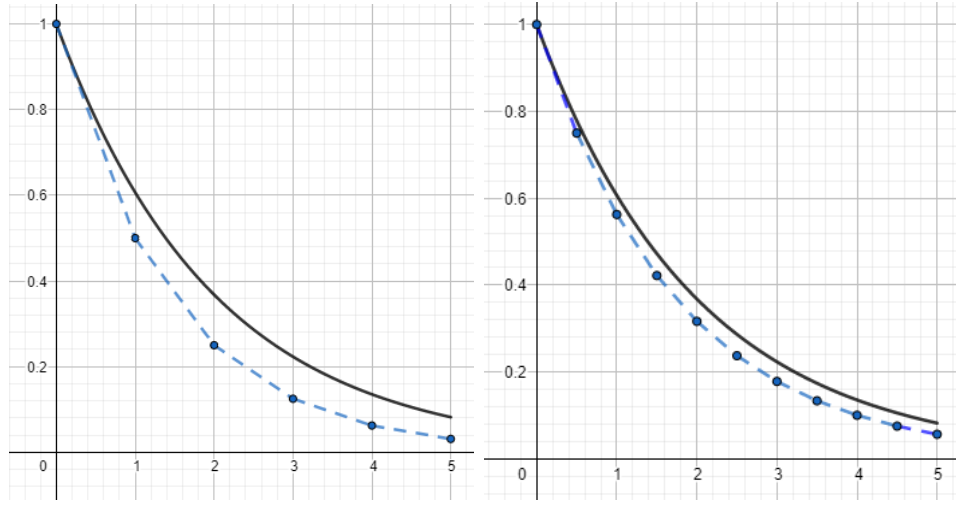
avec $y(0) = 1$.

On a $F(t, y(t)) = -\frac{1}{2} y(t)$ et $y_0 = 1$. Avant d'appliquer la méthode d'Euler, nous utilisons les techniques vues ce semestre pour déterminer la solution exacte de ce problème de Cauchy. On obtient $y(t) = e^{-\frac{t}{2}}$ pour tout $t \in [0, 5]$.

D'après la méthode d'Euler, nous devons résoudre le système

$$y_{i+1} = y_i - \frac{5}{2N} y_i = \left(\frac{2N-5}{2N} \right) y_i$$

pour $i \in \llbracket 0, 4 \rrbracket$ et $y_0 = 1$. Cette équation de récurrence s'apparente à celle d'une suite géométrique de raison $q = \frac{2N-5}{2N}$ et de premier terme $y_0 = 1$. On obtient $y_i = y_0 q^i = \left(\frac{2N-5}{2N} \right)^i$ pour $i \in \llbracket 0, N \rrbracket$. Ci-dessous, vous trouverez deux graphes illustrant la méthode d'Euler pour $N = 5$ et $N = 10$. La courbe en noire est la courbe de la solution exacte, tandis que la courbe en bleue pointillée est la courbe obtenue par les segments de droites allant du point (t_i, y_i) au point (t_{i+1}, y_{i+1}) .

FIGURE 3 – Méthode d'Euler pour $N = 5$ et $N = 10$

Méthode de Taylor du second ordre

Cette méthode est une généralisation de la méthode d'Euler qui permet de réduire l'erreur d'approximation de la solution exacte d'un problème de Cauchy. En conservant les notations de la méthode d'Euler, on effectue un développement limité de $y_{i+1} = y(t_{i+1})$ à l'ordre 2 au voisinage de $h = 0$

$$y_{i+1} = y(t_i + h) = y(t_i) + h y'(t_i) + \frac{h^2}{2} y''(t_i) + o(h^2).$$

En utilisant le problème de Cauchy, on a

$$y'(t_i) = F(t_i, y(t_i)) = F(t_i, y_i)$$

et

$$y'' = \frac{dy}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial y} \times \frac{dy}{dt} \quad \implies \quad y''(t_i) = F_t(t_i, y_i) + F_y(t_i, y_i) \times F(t_i, y_i).$$

On en déduit que

$$y_{i+1} = y_i + h F(t_i, y_i) + \frac{h^2}{2} (F_t(t_i, y_i) + F_y(t_i, y_i) \times F(t_i, y_i)) + o(h^2)$$

Ainsi, la méthode de Taylor de second ordre consiste à résoudre l'équation

$$y_{i+1} = y_i + h F(t_i, y_i) + \frac{h^2}{2} (F_t(t_i, y_i) + F_y(t_i, y_i) \times F(t_i, y_i))$$

pour $i \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$ et y_0 donné par le problème de Cauchy.

Exemple : Appliquons la méthode de Taylor du second ordre au problème de Cauchy

$$y'(t) = -\frac{1}{2} y(t), \quad \forall t \in [0, 5]$$

avec $y(0) = 1$.

D'après la méthode de Taylor du second ordre, on doit résoudre l'équation

$$y_{i+1} = \left(\frac{2N-5}{2N} \right) y_i + \frac{25}{8N^2} y_i = \left(\frac{8N^2 - 20N + 25}{8N^2} \right) y_i$$

avec $y_0 = 1$ et $i \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$. On résout l'équation et on obtient la solution

$$y_i = \left(\frac{8N^2 - 20N + 25}{8N^2} \right)^i$$

pour $i \in \llbracket 0, N \rrbracket$. Ci-dessous est représenté la courbe noire qui correspond à la solution exacte du problème de Cauchy, les points rouges à la méthode d'Euler et les points bleus à la méthode de Taylor du second ordre pour $N = 10$.

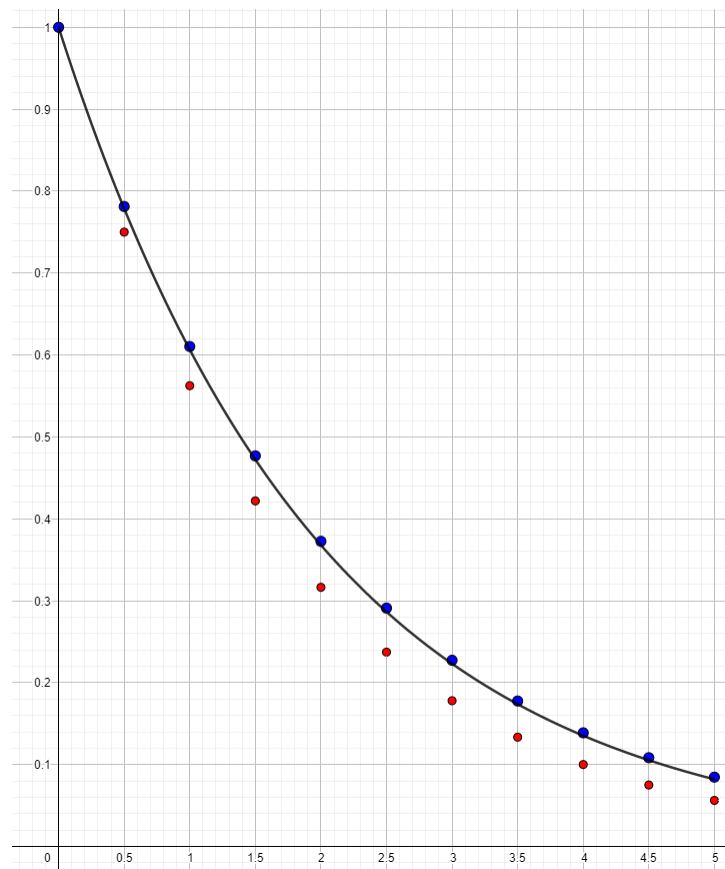


FIGURE 4 – Méthodes d'Euler et de Taylor du second ordre pour $N = 10$

Equations différentielles du second ordre

Pour l'instant, nous avons considéré des équations différentielles du premier ordre. Qu'en est-il des équations différentielles du second ordre ? Comment adapter nos schémas numériques à ce type d'équations ?

Considérons le problème de Cauchy suivant :

$$y''(t) = F(y'(t), y(t), t), \quad \forall t \in [t_0, t_0 + T]$$

avec conditions initiales $y(t_0) = u_0$ et $y'(t_0) = v_0$. Afin d'adapter les méthodes numériques à ce problème de Cauchy, nous allons réécrire l'équation différentielle du second d'ordre en un système de deux équations différentielles du premier ordre. Pour ce faire, on considère le vecteur à deux composantes :

$$Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}.$$

La dérivée du vecteur Y mène à une équation différentielle du premier ordre :

$$Y'(t) = \begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y'(t) \\ y''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2(t) \\ F(y_2(t), y_1(t), t) \end{pmatrix} = G(Y(t), t)$$

avec condition initiale $Y(t_0) = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$.

Méthode d'Euler et équations différentielles du second ordre

L'application de la méthode d'Euler aux équations différentielles du second ordre mène à l'équation aux différences suivantes :

$$Y_{i+1} = Y_i + h G(Y_i, t_i), \quad Y_0 = (u_0, v_0).$$

En termes de composantes du vecteurs Y , on obtient un système d'équations aux différences :

$$\begin{cases} y_{1,i+1} &= y_{1,i} + h y_{2,i} \\ y_{2,i+1} &= y_{2,i} + h F(y_{2,i}, y_{1,i}, t_i) \end{cases}$$

pour tout $i \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$ avec $y_{1,0} = u_0$ et $y_{2,0} = v_0$.

Exemple : Considérons le problème de Cauchy :

$$y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = 0, \quad \forall t \in [0, 2\pi]$$

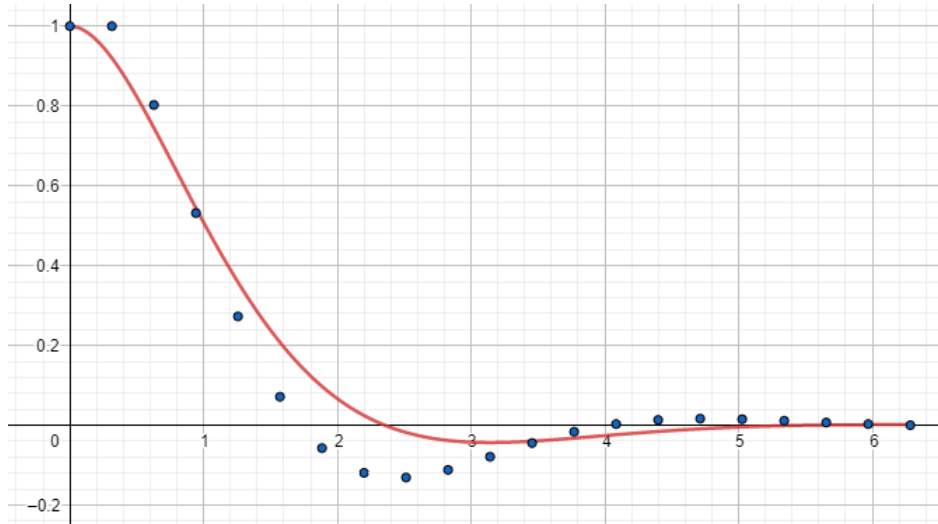
avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$. La méthode d'Euler mène au système d'équations aux différences suivant :

$$\begin{cases} y_{1,i+1} &= y_{1,i} + h y_{2,i} \\ y_{2,i+1} &= -2h y_{1,i} + (1 - 2h) y_{2,i} \end{cases}$$

pour tout $i \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$ avec $y_{1,0} = 1$, $y_{2,0} = 0$ et $h = \frac{2\pi}{N}$. En utilisant les méthodes vues ce semestre, on obtient la solution exacte de ce problème de Cauchy :

$$y(t) = e^{-t} (\cos t + \sin t), \quad \forall t \in [0, 2\pi].$$

Dans le graphe ci-dessous, nous avons illustré la solution exacte du problème de Cauchy (courbe en orange) et les points $(t_i, y_{1,i})$ obtenus par la méthode d'Euler avec $N = 20$. Nous constatons qu'avec $N = 20$ la méthode d'Euler ne donne pas une approximation satisfaisante de la solution exacte. Voyons ainsi si la méthode de Taylor du second ordre généraliser à ce type de problème de Cauchy minimisera l'erreur d'approximation.

FIGURE 5 – Méthode d'Euler $N = 20$

Méthode de Taylor du second ordre et équations différentielles du second ordre

Nous rappelons l'écriture du problème de Cauchy pour une équation différentielle du second ordre :

$$\begin{cases} Y(t) = G(Y(t), t), & \forall t \in [t_0, t_0 + T] \\ Y(t_0) = (u_0, v_0) \end{cases}$$

où le vecteur $Y(t) = (y_1(t), y_2(t)) = (y(t), y'(t))$. Pour obtenir une généralisation de la méthode de Taylor du second ordre, nous calculons le développement limité à l'ordre 2 et au voisinage de $h = 0$ de la fonction $Y(t_{i+1}) = Y(t_i + h)$. On a

$$Y(t_{i+1}) = Y(t_i) + h G(Y(t_i), t_i) + \frac{h^2}{2} G'(Y(t_i), t_i) + o(h^2).$$

Nous devons calculer $G'(Y(t_i), t_i) = G'(y_2(t_i), y_1(t_i), t_i)$. On obtient

$$\begin{aligned} G'(Y(t_i), t_i) &= G_{y_2}(Y(t_i), t_i) y_2'(t_i) + G_{y_1}(Y(t_i), t_i) y_1'(t_i) + G_t(Y(t_i), t_i) \\ &= G_{y_2}(Y(t_i), t_i) F(Y(t_i), t_i) + G(Y(t_i), t_i) y_2(t_i) + G_t(Y(t_i), t_i) \end{aligned}$$

Nous obtenons une généralisation de la méthode de Taylor du second ordre :

$$Y_{i+1} = Y_i + h G(Y_i, t_i) + \frac{h^2}{2} \left(G_{y_2}(Y_i, t_i) F(Y_i, t_i) + G(Y_i, t_i) y_2(t_i) + G_t(Y_i, t_i) \right)$$

pour $i \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$ avec $Y_0 = (u_0, v_0)$.

Exemple : Reprenons l'exemple précédent. On a $G(y_2, y_1, t) = (y_2, -2y_1 - 2y_2)$. En utilisant la méthode de Taylor du second ordre, nous obtenons un système de deux équations aux différences :

$$\begin{cases} y_{1,i+1} &= (1 - h^2)y_{1,i} + h(1 - h) y_{2,i} \\ y_{2,i+1} &= 2h(h - 1) y_{1,i} + (h - 1)^2 y_{2,i} \end{cases}$$

pour tout $i \in \llbracket 0, N - 1 \rrbracket$ avec $y_{1,0} = 1$, $y_{2,0} = 0$ et $h = \frac{2\pi}{N}$. Sur le graphe ci-dessous est illustré la solution exacte (courbe en orange) et les points $(t_i, y_{1,i})$ obtenus par la méthode de Taylor du second ordre avec $N = 20$. On constate que cette méthode pour N fixé permet une meilleure approximation de la solution exacte que la méthode d'Euler. Pour obtenir une meilleure approximation avec cette dernière, il faudrait considérer un pas $N \gg 20$.

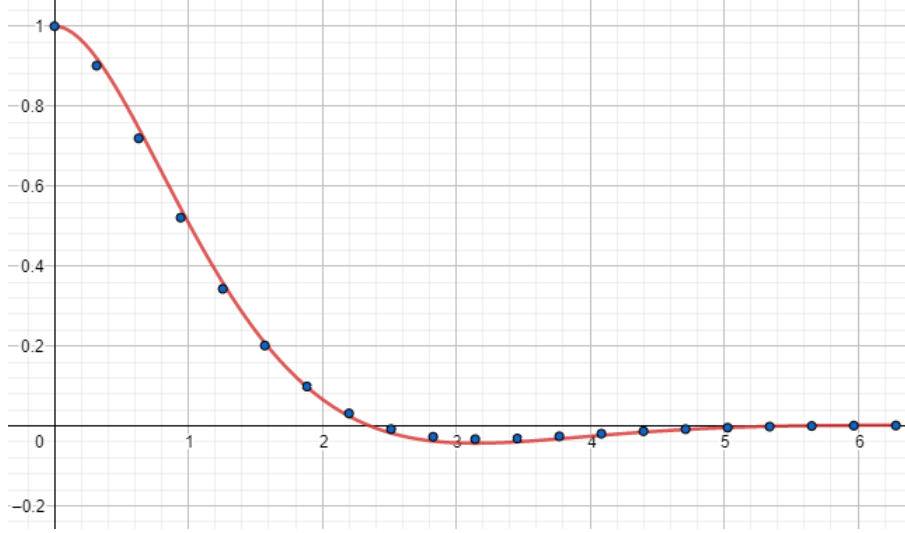


FIGURE 6 – Méthode de Taylor du second ordre $N = 20$

Exemple : Un autre exemple rencontré en physique mécanique est celui du problème de Cauchy relatif à l'équation d'un pendule simple. On considère le problème suivant :

$$\theta''(t) + \sin \theta(t) = 0, \quad \forall t \in [0, 5]$$

avec conditions initiales $\theta(0) = \frac{\pi}{6}$ et $\theta'(0) = 0$. Pour θ petit, nous pouvons approximer $\sin \theta(t)$ par $\theta(t)$. Dans ce cas, le problème de Cauchy a pour solution approximative

$$\theta(t) \approx \frac{\pi}{6} \times \cos t \quad \forall t \in [0, 5].$$

Pour les méthodes numériques :

1. *Méthode d'Euler* : Nous obtenons le système d'équations aux différences :

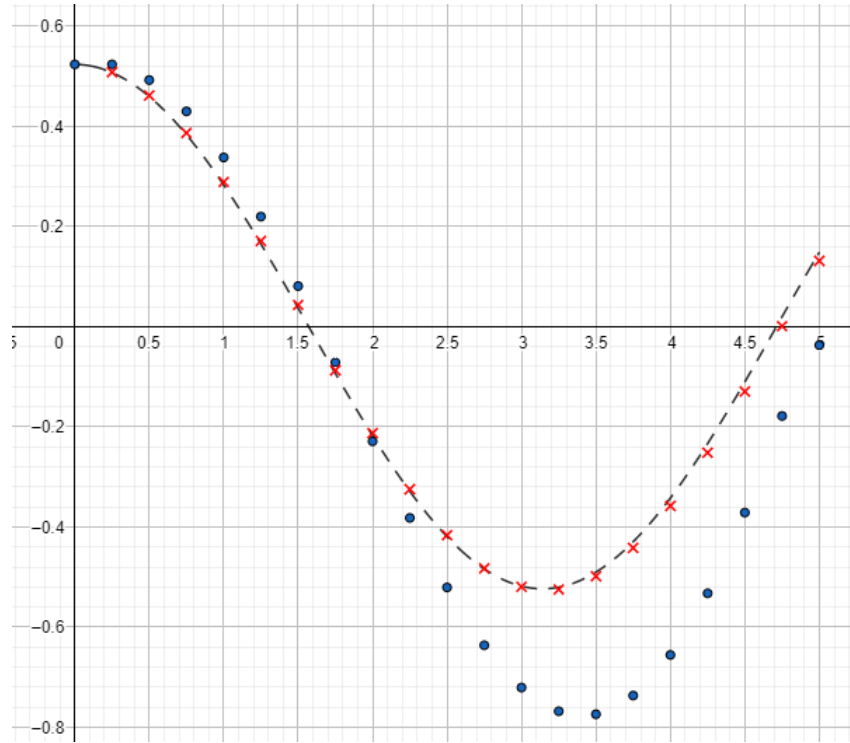
$$\begin{cases} y_{1,i+1} &= y_{1,i} + h y_{2,i} \\ y_{2,i+1} &= y_{2,i} - h \sin(y_{1,i}) \end{cases}$$

pour tout $i \in \llbracket 0, N - 1 \rrbracket$ avec $y_{1,0} = \frac{\pi}{6}$ et $y_{2,0} = 0$.

2. *Méthode de Taylor du second ordre* : Nous obtenons le système d'équations :

$$\begin{cases} y_{1,i+1} &= y_{1,i} + h y_{2,i} - \frac{h^2}{2} \sin(y_{1,i}) \\ y_{2,i+1} &= y_{2,i} - h \sin(y_{1,i}) - \frac{h^2}{2} y_{2,i} \cos(y_{1,i}) \end{cases}$$

pour tout $i \in \llbracket 0, N - 1 \rrbracket$ avec $y_{1,0} = \frac{\pi}{6}$ et $y_{2,0} = 0$.

FIGURE 7 – Méthodes d'Euler et de Taylor du second ordre $N = 20$

A la figure 7, nous avons tracé la solution approximative $\theta(t) \approx \frac{\pi}{6} \times \cos t$ (courbe noire et pointillée), les points bleus représentent la solution numérique correspondant à la méthode d'Euler et les croix rouges à la méthode de Taylor du second ordre. Nous avons choisi $N = 20$.

Nous ne connaissons pas à ce jour la solution exacte du problème de Cauchy associé au pendule simple. Cependant, la méthode d'Euler diverge des deux autres solutions ce qui semble suggérer des problèmes de convergence pour cette méthode. Dans ce qui suit, nous chercherons à minimiser au maximum l'erreur entre la solution numérique et la solution exacte. Pour accomplir cela, nous introduirons de nouvelles méthodes : les méthodes de Runge-Kutta.

Méthodes de Runge-Kutta d'ordre 2

Les méthodes de Runge-Kutta d'ordre 2 et de Taylor du second ordre sont liées. Cette dernière nécessite cependant d'évaluer les dérivées partielles d'une fonction $F(y, t)$ ce qui devient coûteux en termes de calculs. Les méthodes de Runge-Kutta d'ordre 2 souhaitent conserver la précision de la méthode de Taylor du second ordre tout en évitant de calculer les dérivées partielles de F . On suppose

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + a_1 h F(y(t_i), t_i) + a_2 h F(y(t_i) + a_4 h, t_i + a_3 h)$$

où les a_i seront choisis de sorte que la méthode de Taylor du second ordre et celle-ci correspondent jusqu'à l'ordre h^2 . Pour ce faire, effectuons un développement limité à l'ordre 1 au voisinage de $h = 0$ de la fonction $F(y(t_i) + a_4 h, t_i + a_3 h)$. On a

$$F(y(t_i) + a_4 h, t_i + a_3 h) = F(y(t_i), t_i) + a_4 h F_y(y(t_i), t_i) + a_3 h F_t(y(t_i), t_i) + o(h).$$

On obtient alors

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + h(a_1 + a_2)F(y(t_i), t_i) + a_2a_4 h^2 F_y(y(t_i), t_i) + a_2a_3 h^2 F_t(y(t_i), t_i) + o(h^2).$$

En comparant cette expression avec la formule de Taylor-Young, nous obtenons par identification le système d'équations

$$\begin{cases} a_1 + a_2 &= 1 \\ a_2a_3 &= \frac{1}{2} \\ a_2a_4 &= \frac{1}{2} F(y(t_i), t_i) \end{cases}$$

Ce système d'équations possède une infinité de solutions. Nous en distinguerons 2 qui mèneront à deux méthodes de Runge-Kutta d'ordre 2 différentes :

1. *Méthode d'Euler modifiée* : Cette méthode correspond à la solution :

$$a_1 = a_2 = \frac{1}{2}, \quad a_3 = 1 \quad \text{et} \quad a_4 = F(y(t_i), t_i)$$

Nous obtenons la méthode d'Euler modifiée donnée par

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} \times F(y_i, t_i) + \frac{h}{2} F(y_i + h F(y_i, t_i), t_{i+1})$$

pour tout $i \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$ avec $y(t_0) = y_0$.

2. *Méthode du point milieu* : Cette méthode correspond à la solution :

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 1, \quad a_3 = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad a_4 = \frac{1}{2} F(y(t_i), t_i)$$

Nous obtenons la méthode du point milieu donnée par

$$y_{i+1} = y_i + h F\left(y_i + \frac{h}{2} F(y_i, t_i), t_i + \frac{h}{2}\right)$$

pour tout $i \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$ avec $y(t_0) = y_0$.

Méthode de Runge-Kutta d'ordre 4

La méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 est importante dans le sens où elle réduit l'erreur entre la solution exacte d'un problème de Cauchy et la solution numérique. L'erreur est d'ordre h^5 . Afin de réaliser cette méthode, il suffit de suivre l'algorithme suivant :

Pour tout $0 \leq i \leq N-1$, on calcule

$$\begin{aligned} k_1 &= h F(y_i, t_i) \\ k_2 &= h F\left(y_i + \frac{k_1}{2}, t_i + \frac{h}{2}\right) \\ k_3 &= h F\left(y_i + \frac{k_2}{2}, t_i + \frac{h}{2}\right) \\ k_4 &= h F(y_i + k_3, t_i + h) \\ y_{i+1} &= y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \end{aligned}$$

avec y_0 donné par le problème de Cauchy.

Exemple : Dans cet exemple, on considère un problème de Cauchy faisant intervenir une équation différentielle du premier ordre nonlinéaire. Soit

$$y'(t) = -t y^2(t), \quad \forall t \in [0, 4]$$

avec condition initiale $y(0) = 2$. La solution exacte de ce problème de Cauchy se détermine par intégration, on obtient

$$y(t) = \frac{2}{1+t^2}, \quad \forall t \in [0, 4]$$

Pour les méthodes numériques qui suivront, nous utilisons $N = 10$. Ce choix entraîne que $h = \frac{2}{5}$ et $t_i = \frac{2i}{5}$ pour tout $i \in \llbracket 0, 10 \rrbracket$.

1. *Modèle d'Euler* : Le modèle d'Euler se traduit par l'équation aux différences :

$$y_{i+1} = y_i - \frac{4}{25} i y_i^2 \quad \text{avec} \quad y_0 = 2$$

pour $0 \leq i \leq 9$. Ce modèle est représenté à la Figure 8 par des croix rouges. Voici un tableau du calcul d'erreur entre la solution exacte $y(t_i)$ et la solution approximative y_i .

i	$y(t_i)$	y_i	$ y(t_i) - y_i $
1	1.7241379310345	2	0.2758620689655
2	1.219512195122	1.36	0.140487804878
3	0.8196721311475	0.768128	0.0515441311475
4	0.561797752809	0.4849181002957	0.0768796525133
5	0.4	0.3344249393393	0.0655750606607
6	0.2958579881657	0.2449529072976	0.0509050808681
7	0.2262443438914	0.1873510575758	0.0388932863156
8	0.1779359430605	0.1480385885481	0.0298973545124
9	0.1432664756447	0.119986846213	0.0232796294317
10	0.1176470588235	0.0992553919126	0.0183916669109

2. *Modèle de Taylor du second degré* : Le modèle de Taylor du second degré mène à l'équation aux différences :

$$y_{i+1} = y_i - \frac{4}{25} i y_i^2 + \frac{1}{50} \left(-y_i^2 + \frac{8}{25} i^2 y_i^3 \right) \quad \text{avec} \quad y_0 = 2$$

pour $0 \leq i \leq 9$. Ce modèle est représenté à la Figure 8 par des cercles bleus. Voici un tableau du calcul d'erreur entre la solution exacte $y(t_i)$ et la solution approximative y_i .

i	$y(t_i)$	y_i	$ y(t_i) - y_i $
1	1.7241379310345	1.92	0.1958620689655
2	1.219512195122	1.3017464832	0.082234288078
3	0.8196721311475	0.7820717391982	0.0376003919494
4	0.561797752809	0.5038062158819	0.0579915369271
5	0.4	0.3493791000678	0.0506208999322
6	0.2958579881657	0.2561087363177	0.039749251848
7	0.2262443438914	0.1956992834449	0.0305450604465
8	0.1779359430605	0.1543897352951	0.0235462077654
9	0.1432664756447	0.1249100416755	0.0183564339692
10	0.1176470588235	0.1031406802344	0.0145063785891

3. *Modèle de Runge-Kutta d'ordre 4* : Ce modèle est représenté par des points noirs à la Figure 8. Nous obtenons le tableau du calcul d'erreur suivant :

i	$y(t_i)$	y_i	$ y(t_i) - y_i $
1	1.7241379310345	1.7233182229572	0.0008197080773
2	1.219512195122	1.2189178673898	0.0005943277321
3	0.8196721311475	0.8199672687761	0.0002951376285
4	0.561797752809	0.5622480418243	0.0004502890153
5	0.4	0.4003547189499	0.0003547189499
6	0.2958579881657	0.296102311821	0.0002443236554
7	0.2262443438914	0.2264081929271	0.0001638490357
8	0.1779359430605	0.1780466295874	0.0001106865269
9	0.1432664756447	0.143342667406	0.0000761917613
10	0.1176470588235	0.1177006739716	0.0000536151481

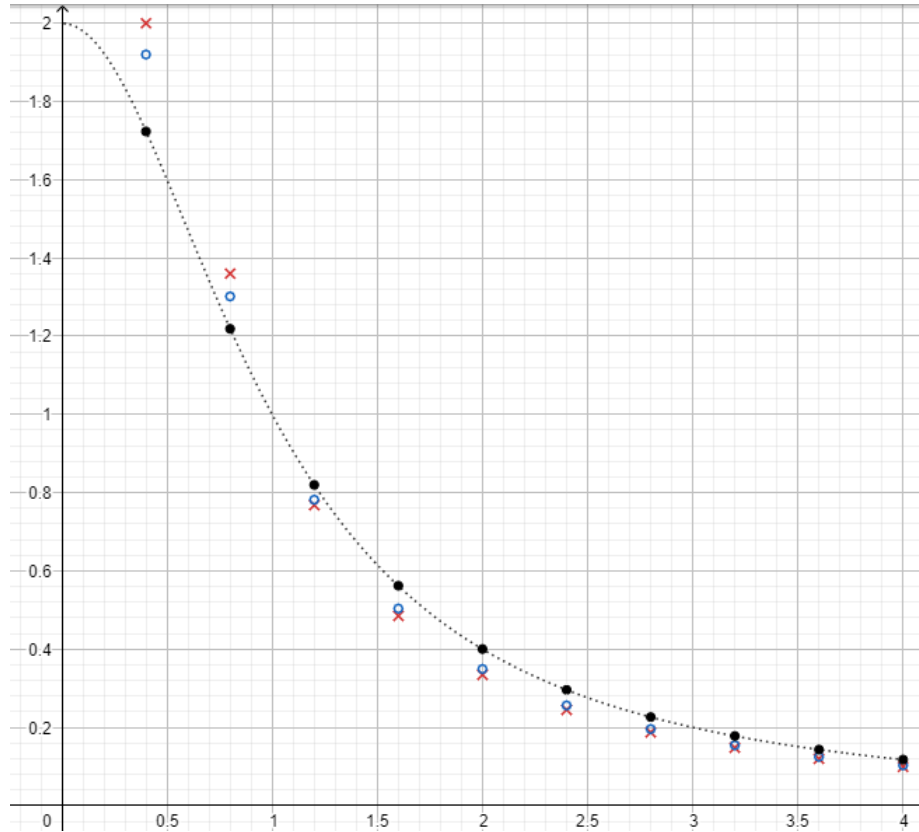


FIGURE 8 – Méthodes d'Euler, de Taylor du second ordre et Runge-Kutta d'ordre 4 avec $N = 10$