SWS : 08419

But : Résoudre le problème de Cauchy

vitesse position

$$(P) : \begin{cases} y'(t) = F(t, y(t)) & \forall t \in [t_0, t_0+T] \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

temps

où $T > 0$

non-linéaire

Ex : Résoudre $\begin{cases} y'(t) = -t\,y^2(t) & \forall t \in [0,4] \\ y(0) = 2 \end{cases}$

$F(t, y(t)) = -t\,y^2(t)$, $t_0 = 0$, $T = 4$ et $y_0 = 2$

$$y'(t) = -t y^2(t) \Leftrightarrow \frac{-y'(t)}{y^2(t)} = t \Leftrightarrow \left(\frac{1}{y(t)}\right)' = t$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{y(t)} = \frac{t^2}{2} + k \quad \text{où } k \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow y(t) = \frac{1}{\left(\frac{t^2}{2} + k\right)}$$

$$y(0) = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{k} = 2 \Leftrightarrow k = 1/2$$

La solution du problème de Cauchy est

$$y(t) = \frac{1}{\left(\frac{t^2}{2} + \frac{1}{2}\right)} = \frac{2}{t^2+1} \quad \forall t \in [0,4]$$

Question : Si on n'arrive pas à résoudre (P), pouvons-nous approximer sa solution numériquement ?

Technique : On subdivise l'intervalle $[t_0, t_0+T]$ en N intervalles de longueur $h > 0$

$$h = \frac{\text{longueur}[t_0, t_0+T]}{N} = \frac{T}{N}$$

$t_1 = t_0 + h$

$t_2 = t_1 + h = t_0 + 2h$

$\vdots$

$t_i = t_0 + ih$

$\vdots$

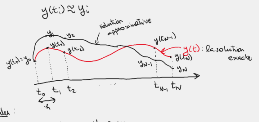
$t_N = t_0 + T = t_0 + Nh \Leftrightarrow T = Nh \Leftrightarrow \boxed{h = \frac{T}{N}}$

$$\boxed{t_i = t_0 + ih \quad \forall i \in [\![0, N]\!]}$$

Objectif : Développer des méthodes numériques pour approximer $y(t_i) \quad \forall i \in [\![0, N]\!]$

L'approximation de $y(t_i)$ sera notée par y_i :

$$y(t_i) \approx y_i$$



Méthode d'Euler :

On a $h = \frac{T}{N} \to 0$ lorsque $N \to +\infty$

$\forall i \in [\![0, N-1]\!]$, on note

$$f_i(h) = y(t_{i+1}) = y(t_i + h)$$

D'après la formule de T-Y, le DL(0,1) de $f_i(h)$ est

$$f_i(h) = f_i(0) + f_i'(0)h + o(h)$$

$f_i(0) = y(t_i + 0) = y(t_i)$

$f_i'(0) = y'(t_i) = F(t_i, y(t_i))$ $\quad (P) : \begin{cases} y'(t) = F(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$

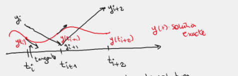
$$\Rightarrow \boxed{y(t_{i+1}) = y(t_i) + h\,F(t_i, y(t_i)) + o(h)}$$

Pour $h \to 0$, on a $o(h) \to 0$, $y(t_{i+1}) \approx y_{i+1}$ et $y(t_i) \approx y_i$

On obtient la méthode d'Euler

Méthode d'Euler

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + h\,F(t_i, y_i) & \forall i \in [\![0, N-1]\!] \\ y_0 \text{ donné} \end{cases}$$



Ex : Utiliser la méthode d'Euler pour approximer la solution

$$(P) \begin{cases} y'(t) = -t y^2(t) & \forall t \in [0,4] \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

$y(t) = \frac{2}{t^2+1}$ solution exacte

$F(t, y(t)) = -t y^2(t)$, $y_0 = 2$, $t_0 = 0$, $T = 4$

$\Rightarrow h = \frac{T}{N} = \frac{4}{N}$ $\quad \begin{cases} y_{i+1} = y_i + h\,F(t_i, y_i) & \forall i \in [\![0, N-1]\!] \\ y_0 \text{ donné} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_{i+1} = y_i + \frac{4}{N} \times (-t_i \times y_i^2) & \forall i \in [\![0, N-1]\!] \\ y_0 = 2 \end{cases}$$

CAS #1 : $N = 10 \Rightarrow h = \frac{4}{N} = 0.4$

CAS #2 $N = 40 \Rightarrow h = \frac{4}{40} = 0.1$

Méthode d'Euler pour les équa. diff. du 2^{nd} ordre

But : Approximer numériquement la solution du problème de Cauchy

accélération position vitesse

$$(P) : \begin{cases} y''(t) = F(t, y(t), y'(t)) & \forall t \in [t_0, t_0+T] \\ y(t_0) = u_0 \text{ et } y'(t_0) = v_0 \end{cases}$$

position initiale vitesse initiale

Considérons $Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$ $\quad y_1 = y$, $y_2 = y'$

$$Y'(t) = \begin{pmatrix} y'(t) \\ y''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ F(t, y_1, y_2) \end{pmatrix} = G(t, Y(t)) \quad \{ \underbrace{y''}_{} = F(t, y, y') = F(t, y_1, y_2)$$

$$Y(t_0) = \begin{pmatrix} y(t_0) \\ y'(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = Y_0$$

Le problème (P) s'écrit $\quad \begin{cases} Y'(t) = G(t, Y(t)) & \forall t \in [t_0, t_0+T] \\ Y_0 = Y(t_0) \end{cases}$

La méthode d'Euler s'écrit

$$\begin{cases} Y_{i+1} = Y_i + h\,G(t_i, Y_i) & \forall i \in [\![0, N-1]\!] \\ Y_0 \text{ donné} \end{cases} \quad h = \frac{T}{N}$$

$$Y_{i+1} = \begin{pmatrix} y_{1,i+1} \\ y_{2,i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{1,i} \\ y_{2,i} \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} y_{2,i} \\ F(t_i, y_{1,i}, y_{2,i}) \end{pmatrix} \quad \left.\begin{matrix} y_1 = y \\ y_2 = y' \end{matrix}\right\} \Rightarrow y_1' = y_2$$

La méthode d'Euler pour le $(P) = \begin{cases} y'' = F(t, y, y') & \forall t \in [t_0, t_0+T] \\ y(t_0) = u_0,\ y'(t_0) = v_0 \end{cases}$

est

$$\begin{cases} y_{1,i+1} = y_{1,i} + h\,y_{2,i} \\ y_{2,i+1} = y_{2,i} + h\,F(t_i, y_{1,i}, y_{2,i}) & \forall i \in [\![0, N-1]\!] \\ y_{1,0} = u_0 \text{ et } y_{2,0} = v_0 \end{cases}$$

Ex :

$$(P) = \begin{cases} y''(t) = -2y'(t) - 2y(t) & \forall t \in [0, 2\pi] \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

$F(t, y, y') = -2y' - 2y = -2y_2 - 2y_1$, $t_0 = 0$, $T = 2\pi$, $u_0 = 1$, $v_0 = 0$

méthode d'Euler

$$\begin{cases} y_{1,i+1} = y_{1,i} + h\,y_{2,i} & \forall i \in [\![0, N-1]\!] \\ y_{2,i+1} = y_{2,i} + h(-2y_{2,i} - 2y_{1,i}) & h = \frac{2\pi}{N} \\ y_{1,0} = 1 \text{ et } y_{2,0} = 0 \end{cases}$$

La solution exacte de (P) est $y(t) = e^{-t}(\cos t + \sin t) \quad \forall t \in [0, 2\pi]$

Approximer pour $N = 20$ et $N = 80$

$N = 40$ $\quad h = \frac{2\pi}{40} = \frac{\pi}{20}$

$$\begin{cases} y_{1,i+1} = y_{1,i} + \frac{\pi}{20} y_{2,i} & \forall i \in [\![0, 39]\!] \\ y_{2,i+1} = y_{2,i} + \frac{\pi}{20}(-2y_{1,i} - 2y_{2,i}) \\ y_{1,0} = 1 \quad y_{2,0} = 0 \end{cases}$$

t_0, $t_1 = t_0 + h$, $t_2 = t_0 + 2h$, ...