0.1 Ausgleichsrechnung

- Datenpunkte mit gewissen Streuung durch einfache Funktion annähern
- Mehr Gleichungen als unbekannte (Mehr Datenpunkte als Parameter)

0.1.1 Polynominterpolation

Gesucht: $P_n(x)$ welche n+1 Stützpunkte interpoliert Jeder Stützpunkt gibt lin.Gleichung für die Bestimmung der Koeffizienten.

Grad n so wählen , dass lin.Gleichungssystem gleich viele Gleichungen wie unbekannte Koeffizienten hat.

$P_n(x_0) = a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + ... + a_nx_0^n = y_0$

$P_n(x_1) = a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + ... + a_nx_1^n = y_1$

.
.
.

$P_n(x_n) = a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + ... + a_nx_n^n = y_n$

$$= \left.\begin{bmatrix} 1 & x_0 & ... & x_0^n \\ . & . & & \\ . & . & & \\ . & . & & \\ 1 & x_n & ... & n_n^n \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} a_0 \\ . \\ . \\ . \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ . \\ . \\ . \\ y_n \end{bmatrix}\right\} Vandermonde-Matrix = Schlechtkonditioniert.Abn \geq 20 numerischinstabil$$

Lagrange Interpolationsformel:
Lagrangeform von $P_n(x)$:

$$P_(x) = \sum_{i=0}^{n} l_i(x)y_i$$

LagrangePolynome $= l_i(x)$:

$$l_i(x) = \prod_{j=0_{j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Stückweise Interpolation:
Interpolationspolynom erster Ordnung: n = 1
Stützpunkte so wählen: $x_{j-1} und x_{j+1}$,somit 2 Werte: n = 1

Grösse des Fehlers an Stelle x wenn:
y_i Funktionswerte (genügend oft stetig differenzierbare Funktion)

$|f(x) - P_n(x)| \leq \frac{|(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_n)|}{(n + 1!)}$

Max der (n+1)-ten Abletung der f(x) Intervall $[x_0, x_n]$ kennen, Fehlerabschätzung nur dann möglich.

0.1.2 Spline-Interpolation

Bedingungen für S_i:

1. $S_i(x_i) = y_i, S_{i+1}(x + 1) = y_{i+1}, ...$ *Interpolation*
2. $S_i(x_{i+1}) = S_{i+1}(x_{i+1}), S_{i+1}(x_{i+2}) = S_{i+2}(x_{i+2}), ...$ Stetiger Übergang

3. $S_i'(x_{i+1}) = S_{i+1}'(x_{i+1}), S_{i+1}'(x_{i+2}) = S_{i+2}', ... Keine Knicke$
4. $S_i''(x_{i+1}) = S_{i+1}''(x_{i+1}), S_{i+1}''(x_{i+2}) = S_{i+2}'', ...$ Gleiche Krümmung
5. Mindestens den Grad 3 ... Kubische Splines

3 Intervalle, 4 Stützpunkte:
$[x_0, x_1], [x_1, x_2], [x_2, x_3]$
Ansatz:
$S_0 = a_0 + b_0(x - x_0) + c_0(x - x_0)^2 + d_0(x - x_0)^3, x \in [x_0, x_1]$
$S_1 = a_1 + b_1(x - x_1) + c_1(x - x_1)^2 + d_1(x - x_1)^3, x \in [x_1, x_2]$
$S_2 = a_2 + b_2(x - x_2) + c_2(x - x_2)^2 + d_2(x - x_2)^3, x \in [x_2, x_3]$

$3 * 4 = 12$ Koeffizienten $\Longrightarrow$ 12 Bedingungen
1.Interpolation der Stützpunkte:
1.$S_0(x_0) = y_0$
2.$S_1(x_1) = y_1$
3.$S_2(x_2) = y_2$
4.$S_3(x_3) = y_3$

2. Stetiger Übergang an Stellen x_1 und x_2:
5.$S_0(x_1) = S_1(x_1)$
6.$S_1(x_2) = S_2(x_2)$

3. Erste Ableitung an Übergangstellen übereinstimmen:
7.$S_0'(x_1) = S_1'(x_1)$
8.$S_1'(x_2) = S_2'(x_2)$

4. Zweite Ableitung an Übergangstellen übereinstimmen:
9.$S_0''(x_1) = S_1''(x_1)$
10.$S_1''(x_2) = S_2''(x_2)$

$= 10 Bedingungen$

Die weiteren 2 Bedingungen können frei gewählt"werden.
Diese beziehen sich häufig auf Randstellen x_0 und x_3.
Beispiele:
Natürliche kubische Splinefunktion:
Mit moeglichen Wendepunkt im Anfangs und Endpunkt.

$$\left.\begin{aligned} S_0'''(x_0) = 0 \\ S_2'''(x_3) = 0 \end{aligned}\right\}$$

Periodische kubische Splinefunktion:
Wenn man Periode $p = x_3 - x - 0$ hat und damit y_0 bzw. $S_0(x_0) = S_2(x_3)$ gilt

$$\left.\begin{aligned} S_0'(x_0) = S_2'(x_3) \\ S_0''(x_0) = S_2''(x_3) \end{aligned}\right\}$$

mit not-a-knot Bedingung kubische Splinefunktion:
s.d Auch dritte Ableitung in $x - 1, x - 2$ noch stetig ist. (x_1, x_2 keine echten Knoten)

$$\left.\begin{aligned} S_0'''(x_1) = S'''x_1(x_1) \\ S_1'''(x_2) = S_2'''(x_2) \end{aligned}\right\}$$

Algorithmus: natürliche kubische Splinefunktion

$S_i = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3$

Koeffizienten a_i, b_i, c_i, d_i berechnen: