- Summierte Rechteckregel ist genauer als die summierte Trapezregel
- Summierte Simpsonregel ist am genaustren(verglichen mit sum.Recht.und Trap.)
- Faktor Fehlerabschätzung summ.Rechteckregel < summ.Trap.Regel = 2

0.1 Rechteck- und Trapezregel

Annäherung bestimmtes Integral.
Rechtecksregel / Mittelpunktsregel:

$Rf = f(\frac{a+b}{2}) * (b-a)$

$Tf = \frac{f(a)+f(b)}{2} * (b-a)$

0.1.1 Summierte Rechkteckregle / summierte Trapezregel

h= $\frac{b-a}{n}$; $x_i = a + i*$ h ; $x_n = b$; (i=0,...,n-1)

$Rf(h) = h * \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i + \frac{h}{2})$

$Tf(h) = h * (\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i))$

n = Anzahl Subintervalle $[x_i, x_{i+1}]$

0.2 Simpsonregel

$Sf = \frac{(b-a)}{6}(f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b))$

0.2.1 Summierte Simpsonregel

$Sf(h) = \frac{h}{3}(\frac{1}{2}f(a) + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + 2\sum_{i=1}^{n} f(\frac{x_{i-1+x_i}}{2}) + \frac{1}{2}f(b))$

0.3 Fehler der summierten Quadraturformeln

$|\int_a^b f(x)dx - Rf(h)| \leq \frac{h^2}{24}(b-a) * max|f''(x)|$

$|\int_a^b f(x)dx - Tf(h)| \leq \frac{h^2}{12}(b-a) * max|f''(x)|$

$|\int_a^b f(x)dx - Sf(h)| \leq \frac{h^4}{2880}(b-a) * max|f^{(4)}(x)|$

Schritte berechnen bis Tol. erreicht:

$\frac{h^2}{24}(b-a) \leq Tol \mid * \frac{24}{(b-a)}$etc...(Analog für andere Formel)

0.4 Gauss-Formeln

x_i Stützstellen müssen nicht äquidistant sein $\implies$ so wählen, dass $\int_a^b f(x)dx$ optimal approximiert.
a_i, x_i so wählen, dass Fehlerordnung möglichst hoch bzw. Fehler möglichst klein.

Gauss-Formeln für n=1,2,3: $\int_a^b f(x)dx \sim \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^{n} a_i f(x_i)$

n=1: $G_1 f = (b-a) * f(\frac{b+a}{2})$

n=2: $G_2 f = \frac{b-a}{2}[f(-\frac{1}{\sqrt{3}} * \frac{b-a}{2} + \frac{b+a}{2})]$

n=3: $G32f = \frac{b-a}{2}[\frac{5}{9} * f(-\sqrt{0.6} * \frac{b-a}{2} + \frac{b+a}{2}) + \frac{3}{9} * f(\frac{b+a}{2})] + \frac{b-a}{2}[\frac{5}{9} * f(-\sqrt{0.6} * \frac{b-a}{2} + \frac{b+a}{2})]$

0.5 Romberg-Extrapolation

$$\left.\begin{array}{l} T_{j0} == Tf(\underbrace{\frac{b-a}{2^j}}_{\text{(=h)}} \\ \\ \mathrm{T}_{jk} = \frac{4^k * T_{j+1,k-1} - T_{j,k-1}}{4^k - 1} \end{array}\right\}$$

$T_{j0} = Tf(\underbrace{\frac{b-a}{2^j}}_{\text{(=h)}})$, Für j=0,1,...,m-k

$T_{jk} = \frac{4^k * T_{j+1,k-1} - T_{j,k-1}}{4^k - 1}$, Für k=1,2,...,m und j=0,1,...,m-k