Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Институт прикладной математики и механики
Высшая школа прикладной математики и вычислительно физики

Вычислительные комплексы

Лабораторная работа №1

Работу выполнил:
Колесник Виктор
Группа:
3630102/70201
Преподаватель:
к.ф.-м.н., доцент
Баженов
Александр
Николаевич

Санкт-Петербург
2020

Содержание

1. Постановка задачи

1.1. Задача 1

Имеем 2×2-матрицу A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1.1 & 1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Пусть все элементы матрицы a_{ij} имеют радиус ε:

$$rad\mathbf{a}_{ij} = \varepsilon \tag{2}$$

Получаем

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} [1-\varepsilon, 1+\varepsilon] & [1-\varepsilon, 1+\varepsilon] \\ [1.1-\varepsilon, 1.1+\varepsilon] & [1-\varepsilon, 1+\varepsilon] \end{pmatrix} \tag{3}$$

Определить, при каком радиусе ε матрица $\mathbf{A}$ содержит особенные матрицы.

1.2. Задача 2

Имеем $n \times n$-матрицу $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & [0,\varepsilon] & \dots & [0,\varepsilon] \\ [0,\varepsilon] & 1 & \dots & [0,\varepsilon] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ [0,\varepsilon] & [0,\varepsilon] & \dots & 1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

Определить, при каком радиусе ε матрица $\mathbf{A}$ содержит особенные матрицы.

2. Решение

2.1. Задача 1

2.1.1. Аналитический вывод

Воспользуемся критерием Баумана

Теорема
Интервальная матрица A неособенна тогда и только тогда, когда определители всех ее крайних матриц имеют одинаковый знак, т.е.

$$(\det A') * (\det A'') > 0 \tag{5}$$

для любых $A', A'' \in vertA$.

Найдем, при каких значениях ε матрица является неособенной. Тогда особенной она будет при всех остальных значениях.
Посчитаем определители всех крайних матриц, т.е. получим 16 функций, зависящих от ε.

Некоторые функции повторяются, поэтому их опустим:

$$-0.1(1-\varepsilon) \tag{6a}$$
$$-0.1(1+\varepsilon) \tag{6b}$$
$$4.1\varepsilon - 0.1 \tag{6c}$$
$$-4.1\varepsilon - 0.1 \tag{6d}$$
$$(1-\varepsilon)(2\varepsilon - 0.1) \tag{6e}$$
$$(1-\varepsilon)(-2\varepsilon - 0.1) \tag{6f}$$
$$(1+\varepsilon)(2\varepsilon - 0.1) \tag{6g}$$
$$(1+\varepsilon)(-2\varepsilon - 0.1) \tag{6h}$$
$$2\varepsilon^2 - 2.1\varepsilon - 0.1 \tag{6i}$$
$$2\varepsilon^2 + 2.1\varepsilon - 0.1 \tag{6j}$$

Так как $\varepsilon \geq 0$, то из (6b) получаем, что определители всех крайних матриц должны быть отрицательными.
Запишем выведенные из выражений (6) ограничения на ε. Неравенства, где ε должен быть больше некоторого отрицательного числа, опустим.

$$\varepsilon < 1 \tag{7a}$$
$$\varepsilon < \frac{1}{20} \tag{7b}$$
$$\varepsilon < 1.09 \tag{7c}$$
$$\varepsilon < \frac{1}{40} \tag{7d}$$
$$\varepsilon < 0.0456 \tag{7e}$$

Минимальная правая граница равна $\frac{1}{41}$. Максимальная левая граница - 0. Значит, матрица $\mathbf{A}$ является неособенной при $\varepsilon \in [0, \frac{1}{41})$.

Соответственно, особенной матрица является при $\varepsilon \geq \frac{1}{41}$.

2.1.2. Численный эксперимент

Проверим, что полученные значения ε соответствуют особенным и неособенным матрицам. Для этого посчитаем определитель-интервал при следующих значениях радиуса:

$$[0, \frac{1}{70}, \frac{1}{42}, \frac{1}{41}, \frac{1}{40}, 1] \tag{8}$$

Получим следующие результаты:

```
Task 1
eps = 0
det = [-0.10000000000000009 , -0.10000000000000009]

eps = 0.014285714285714285
det = [-0.15857142857142859 , -0.04142857142857159]

eps = 0.023809523809523808
det = [-0.1976190476190477 , -0.0023809523809525945]

eps = 0.024390243902439025
det = [-0.2000000000000004 , 2.220446049250313e-16]

eps = 0.025
det = [-0.2025 , 0.0024999999999999467]

eps = 1
det = [-4.2 , 4.0]
```

Рисунок 2.1. Определители матриц с заданными ε

Результаты численного эксперимента соответствуют полученным аналитически результатам: для значений $[0, \frac{1}{70}, \frac{1}{42}]$ определитель не содержит 0; для значений $[\frac{1}{41}, \frac{1}{40}, 1]$ определитель содержит 0.

2.2. Задача 2

2.2.1. Численный эксперимент

Очевидно, что при $\varepsilon \geq 1$ матрица является особенной, так как содержит особенную точечную матрицу со всеми элементами - единицами.
Попробуем улучшить эту оценку, используя признаки Бекка и Румпа.

Теорема (признак Бекка)
Пусть интервальная матрица $A \in IR^{n\times n}$ такова, что ее середина $midA$ неособенна и

$$\rho(|(midA)^{-1}| * radA) < 1 \tag{9}$$

Тогда A неособенна.

Теорема (признак Румпа)
Если для интервальной матрицы $A \in IR^{n\times n}$ имеет место

$$\sigma_{max}(radA) < \sigma_{min}(midA) \tag{10}$$

Тогда A неособенна.

Возьмем начальное значение $\varepsilon = 0.001$ и будем его увеличивать с шагом 0.001, пока хотя бы один из признаков подтверждает, что матрица является неособенной. Запишем ε для такой последней матрицы.
Размерности матриц возьмем от 2 до 20.
Получим следующие результаты:

```
Task 2
n =  2
1 / (n - 1) =  1.0
Last non-special matrix with eps:  0.6660000000000005
Beck criteria:  (True, 0.9985007496251886)
Rump criteria:  (True, 0.6660000000000006, 0.6669999999999998)

n =  3
1 / (n - 1) =  0.5
Last non-special matrix with eps:  0.3990000000000003
Beck criteria:  (False, 1.1390334579129657)
Rump criteria:  (True, 0.7980000000000005, 0.8004999999999998)

n =  4
1 / (n - 1) =  0.3333333333333333
Last non-special matrix with eps:  0.2850000000000002
Beck criteria:  (False, 1.1961522162029703)
Rump criteria:  (True, 0.8550000000000005, 0.8574999999999994)

n =  5
1 / (n - 1) =  0.25
Last non-special matrix with eps:  0.22200000000000017
Beck criteria:  (False, 1.229225155719802)
Rump criteria:  (True, 0.8880000000000008, 0.8889999999999992)

n =  6
1 / (n - 1) =  0.2
Last non-special matrix with eps:  0.18100000000000013
Beck criteria:  (False, 1.2430445886270298)
Rump criteria:  (True, 0.9050000000000007, (0.9095-4.807406715958909 5e-17j))
```

Рисунок 2.2. Полученные значения ε и величины $\frac{1}{n-1}$

```
n =  7
1 / (n - 1) =  0.16666666666666666
Last non-special matrix with eps:  0.15300000000000001
Beck criteria:  (False, 1.2546489073476705)
Rump criteria:  (True, 0.9180000000000006, 0.9234999999999997)

n =  8
1 / (n - 1) =  0.14285714285714285
Last non-special matrix with eps:  0.13300000000000001
Beck criteria:  (False, 1.2688547903329892)
Rump criteria:  (True, 0.9310000000000007, 0.933499999999999)

n =  9
1 / (n - 1) =  0.125
Last non-special matrix with eps:  0.11700000000000009
Beck criteria:  (False, 1.2714796523027645)
Rump criteria:  (True, 0.9360000000000002, 0.9414999999999994)

n =  10
1 / (n - 1) =  0.1111111111111111
Last non-special matrix with eps:  0.10500000000000008
Beck criteria:  (False, 1.2818380959633755)
Rump criteria:  (True, 0.9450000000000012, 0.9474999999999999)

n =  11
1 / (n - 1) =  0.1
Last non-special matrix with eps:  0.09500000000000007
Beck criteria:  (False, 1.2864451265625703)
Rump criteria:  (True, 0.9500000000000008, 0.9524999999999995)

n =  12
1 / (n - 1) =  0.09090909090909091
Last non-special matrix with eps:  0.08600000000000006
Beck criteria:  (False, 1.2770715796209167)
Rump criteria:  (True, 0.9460000000000002, 0.9569999999999993)
```

Рисунок 2.3. Полученные значения ε и величины $\frac{1}{n-1}$

```
n =  13
1 / (n - 1) =  0.08333333333333333
Last non-special matrix with eps:  0.07900000000000006
Beck criteria:  (False, 1.2779258315398552)
Rump criteria:  (True, 0.9480000000000004, 0.960499999999999)

n =  14
1 / (n - 1) =  0.07692307692307693
Last non-special matrix with eps:  0.07400000000000005
Beck criteria:  (False, 1.2984476964359215)
Rump criteria:  (True, 0.962000000000001, 0.9629999999999992)

n =  15
1 / (n - 1) =  0.07142857142857142
Last non-special matrix with eps:  0.06800000000000005
Beck criteria:  (False, 1.280625270020817)
Rump criteria:  (True, 0.9520000000000004, 0.9659999999999995)

n =  16
1 / (n - 1) =  0.06666666666666667
Last non-special matrix with eps:  0.06400000000000004
Beck criteria:  (False, 1.2919365646638385)
Rump criteria:  (True, (0.9600000000000001+0j), 0.967999999999999)

n =  17
1 / (n - 1) =  0.0625
Last non-special matrix with eps:  0.060000000000000046
Beck criteria:  (False, 1.2906101978266937)
Rump criteria:  (True, 0.9600000000000007, 0.9699999999999994)

n =  18
1 / (n - 1) =  0.058823529411764705
Last non-special matrix with eps:  0.057000000000000044
Beck criteria:  (False, 1.3038103289663128)
Rump criteria:  (True, 0.9690000000000006, 0.9714999999999991)
```

Рисунок 2.4. Полученные значения ε и величины $\frac{1}{n-1}$

```
n =  19
1 / (n - 1) =  0.05555555555555555
Last non-special matrix with eps:  0.05400000000000004
Beck criteria:  (False, 1.3075377037343416)
Rump criteria:  (True, 0.9720000000000006, 0.9729999999999979)

n =  20
1 / (n - 1) =  0.05263157894736842
Last non-special matrix with eps:  0.05100000000000004
Beck criteria:  (False, 1.301806023280415)
Rump criteria:  (True, 0.969000000000001, 0.9744999999999996)
```

Рисунок 2.5. Полученные значения ε и величины $\frac{1}{n-1}$

Из результатов видно, что полученные ε немного меньше величин $\frac{1}{n-1}$, которые можно получить, применив признак Адамара.

Теорема (интервальный признак Адамара)
Интервальная матрица с диагональным преобладанием является неособенной.

Таким образом, можно использовать значения $\varepsilon > \frac{1}{n-1}$ для получения особенных матриц.

3. Приложение

Код программы на Python лежит в данном репозитории:
`https://github.com/PinkOink/Interval_Analysis/tree/main/lab1`