

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого  
Институт прикладной математики и механики  
Высшая школа прикладной математики и вычислительно физики

## Вычислительные комплексы

### Лабораторная работа №5

**Работу**

**выполнил:**

Колесник Виктор

Группа:

3630102/70201

**Преподаватель:**

к.ф.-м.н., доцент

Баженов

Александр

Николаевич

Санкт-Петербург  
2020

# Содержание

|  |           |
|--|-----------|
| <b>1. Постановка задачи</b>                      | <b>4</b>  |
| 1.1. Задача 1 . . . . .                          | 4         |
| 1.2. Задача 2 . . . . .                          | 4         |
| <b>2. Теория</b>                                 | <b>4</b>  |
| 2.1. Получение начального приближения . . . . .  | 4         |
| 2.2. Субдифференциальный метод Ньютона . . . . . | 4         |
| <b>3. Решение</b>                                | <b>4</b>  |
| 3.1. Задача 1 . . . . .                          | 4         |
| 3.2. Задача 2.1 . . . . .                        | 5         |
| 3.3. Задача 2.2 . . . . .                        | 7         |
| <b>4. Приложение</b>                             | <b>10</b> |

## Список иллюстраций

|  |    |
|--|----|
| 3.1. Исходная матрица. Задача 2.1 . . . . .                | 5  |
| 3.2. Ненулевой блок исходной матрицы. Задача 2.1 . . . . . | 5  |
| 3.3. Максимальный неособенный блок. Задача 2.1 . . . . .   | 6  |
| 3.4. Сравнение правых частей. Задача 2.1 . . . . .         | 6  |
| 3.5. Сравнение векторов-решений. Задача 2.1 . . . . .      | 7  |
| 3.6. Сходимость метода. Задача 2.1 . . . . .               | 7  |
| 3.7. Исходная матрица. Задача 2.2 . . . . .                | 8  |
| 3.8. Ненулевой блок исходной матрицы. Задача 2.2 . . . . . | 8  |
| 3.9. Максимальный неособенный блок. Задача 2.2 . . . . .   | 9  |
| 3.10. Сравнение правых частей. Задача 2.2 . . . . .        | 9  |
| 3.11. Сравнение векторов-решений. Задача 2.2 . . . . .     | 10 |
| 3.12. Сходимость метода. Задача 2.2 . . . . .              | 10 |

# 1. Постановка задачи

## 1.1. Задача 1

Необходимо решить заданную ИСЛАУ с неправильными интервалами субдифференциальным методом Ньютона:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & [0.1, 0.2] \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} [4.1, 3.9] \\ [0.1, 0.4] \end{pmatrix} \quad (2)$$

## 1.2. Задача 2

Заданы 2 матрицы для масштабной задачи, относящейся к компьютерной малоракурсной томографии. Матрицы прямоугольные, поэтому необходимо убрать избыточное количество уравнений. Затем сгенерировать пробные  $x$ , получить правые части, обинтервалить их и решить полученные ИСЛАУ субдифференциальным методом Ньютона.

# 2. Теория

## 2.1. Получение начального приближения

Пусть задана ИСЛАУ:

$$\mathbf{C}x = \mathbf{d} \quad (3)$$

Для получения начального приближения нужно решить «среднюю» систему:

$$\text{mid}\mathbf{C} \sim x^{(0)} = \text{std} \quad (4)$$

## 2.2. Субдифференциальный метод Ньютона

Следующее приближение вычисляется по формуле:

$$x^{(k)} = x^{(k-1)} - \tau(D^{(k-1)})^{-1}\mathcal{G}(x^{k-1}) \quad (5)$$

где  $\tau \in (0, 1]$  - некоторая константа.

Условием окончания алгоритма является выполнения условия:

$$\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\| \leq \varepsilon \quad (6)$$

# 3. Решение

## 3.1. Задача 1

Задача решалась с заданной точностью  $\varepsilon = 10^{-9}$ .

Был получен результат:

$$x = \begin{pmatrix} [3.09, 1.9] \\ [1.0, 1.99] \end{pmatrix} \quad (7)$$

за 2 итерации.

Проверим полученное решение:

$$\mathbf{A}x = \begin{pmatrix} [4.1, 3.9] \\ [0.1, 0.4] \end{pmatrix} = \mathbf{b} \quad (8)$$

### 3.2. Задача 2.1

Исходная матрица является прямоугольной, и к ней неприменим субдифференциальный метод Ньютона. Поэтому понизим размерность матрицы и сделаем ее квадратной.

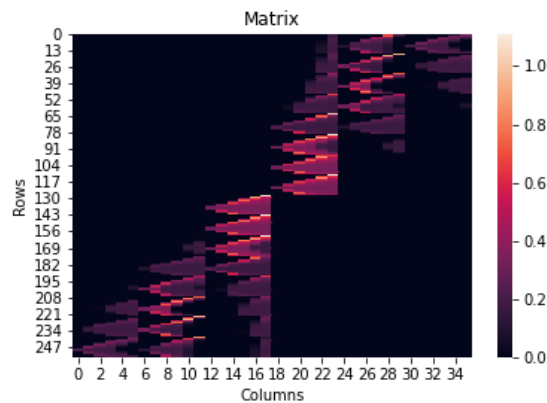


Рисунок 3.1. Исходная матрица. Задача 2.1

Из графика матрицы видно, что она представляет собой комбинацию 4 блоков, 2 из которых являются матрицами, состоящими только из нулей. Возьмем один из ненулевых блоков.

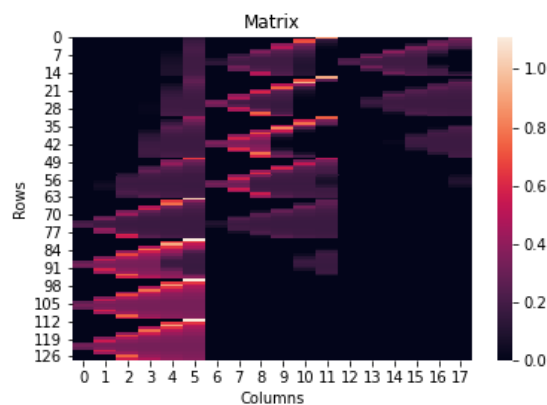


Рисунок 3.2. Ненулевой блок исходной матрицы. Задача 2.1

В полученном блоке возьмем неособенный блок максимальной размерности.

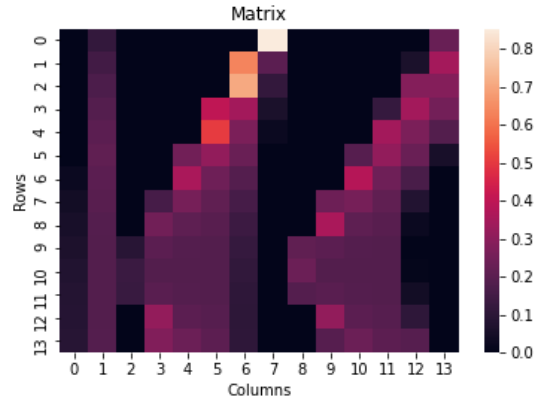


Рисунок 3.3. Максимальный неособенный блок. Задача 2.1

Сгенерируем вектор  $x$  с координатами из промежутка  $[1, 7]$ . Получим вектор правой части  $\mathbf{b} = A_{block}x$ . Сгенерируем вектор радиусов из интервала  $[0.1, 1]$  и получим интервальную правую часть  $\mathbf{b}$ .

Решим задачу с заданной точностью  $\varepsilon = 10^{-9}$  и максимальным количеством итераций 150. Полученный интервальный вектор-решение сравним с истинным решением. Кроме того сравним вектор правой части для полученного решения, истинный вектор правой части и интервальный истинный вектор правой части. Результаты представлены на графиках.

Количество итераций работы метода - 151.

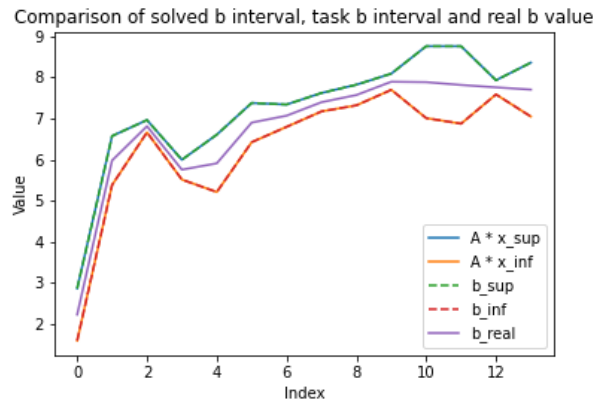


Рисунок 3.4. Сравнение правых частей. Задача 2.1

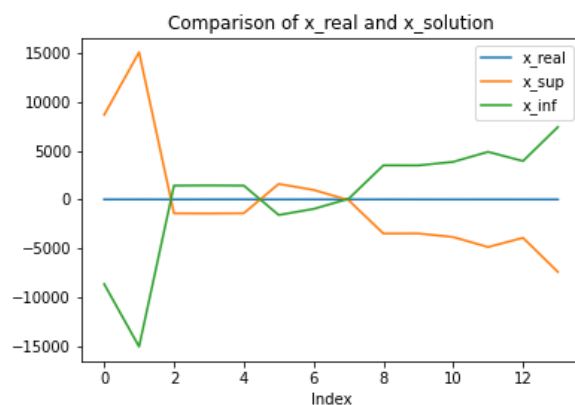


Рисунок 3.5. Сравнение векторов-решений. Задача 2.1

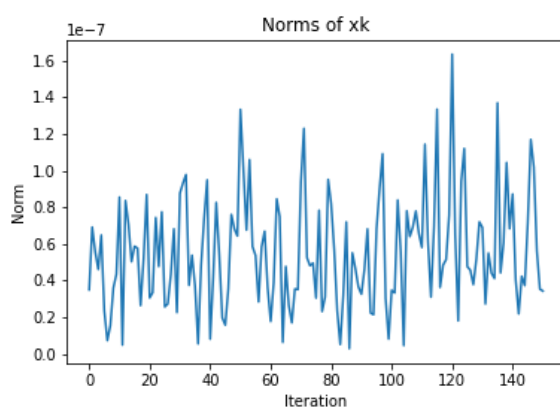


Рисунок 3.6. Сходимость метода. Задача 2.1

### 3.3. Задача 2.2

Повторим шаги из предыдущего пункта. Получим следующие результаты:  
Количество итераций работы метода - 2.

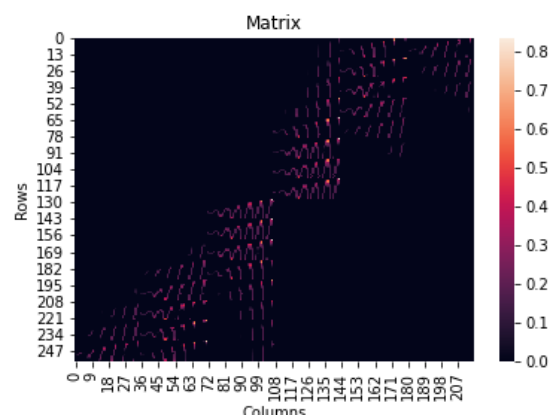


Рисунок 3.7. Исходная матрица. Задача 2.2

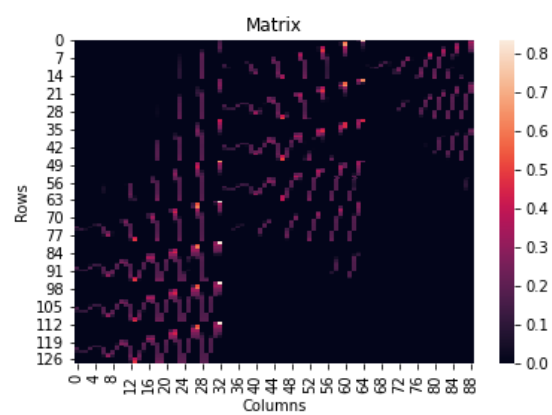


Рисунок 3.8. Ненулевой блок исходной матрицы. Задача 2.2



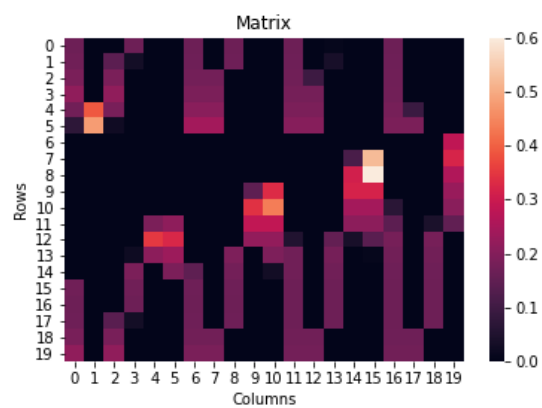


Рисунок 3.9. Максимальный неособенный блок. Задача 2.2

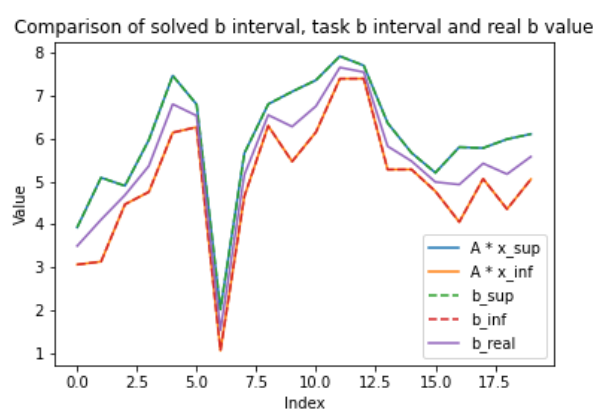


Рисунок 3.10. Сравнение правых частей. Задача 2.2

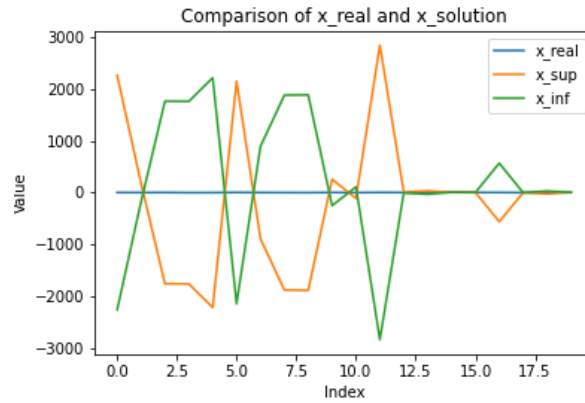


Рисунок 3.11. Сравнение векторов-решений. Задача 2.2

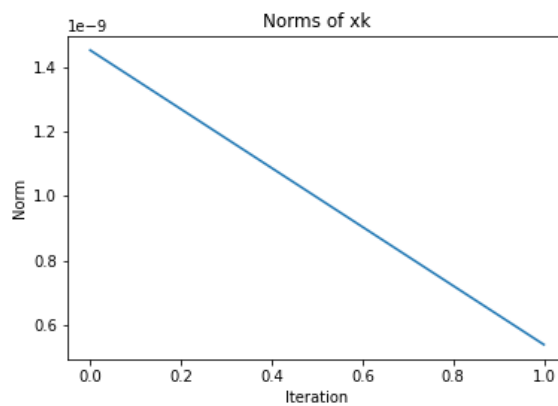


Рисунок 3.12. Сходимость метода. Задача 2.2

## 4. Анализ

### 4.1. Задача 1

Из результатов видно, что метод находит правильное решение: правые части совпали. Кроме того, поиск начального приближения дал практически сразу верное решение.

### 4.2. Задача 2

Полученные векторы-решения содержат в себе неправильные интервалы, что видно на графике со сравнением векторов-решений. Кроме того, границы полученных интервалов оказались во много раз больше значений координат истинного вектора решений. Тем не менее, как видно из графика со сравнением правых частей, полученные решения являются абсолютно верными.

Что касается сходимости, как и для задачи 1, поиск начального приближения дает практически сразу верное решение. Из графика со сходимостью для задачи 2.1 видно, что метод пытается удовлетворить условию окончания, но не справляется. Получаемые  $x^{(k)}$  слабо отличаются друг от друга, но недостаточно, чтобы алгоритм завершился. Поэтому видны скачки, а окончание работы происходит лишь из-за достижения максимального количества итераций. Для задачи 2.2 условие окончания достигается на первой же итерации.

## 5. Приложение

Код программы на Python лежит в данном репозитории:  
[https://github.com/Pink0ink/Interval\\_Analysis/tree/main/lab5](https://github.com/Pink0ink/Interval_Analysis/tree/main/lab5)