

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Институт прикладной математики и механики
Высшая школа прикладной математики и вычислительно физики

Вычислительные комплексы

Лабораторная работа №3

Работу

выполнил:

Колесник Виктор

Группа:

3630102/70201

Преподаватель:

к.ф.-м.н., доцент

Баженов

Александр

Николаевич

Санкт-Петербург
2020

Содержание

| | |
|--|----------|
| 1. Постановка задачи | 4 |
| 2. Теория | 4 |
| 3. Задача | 4 |
| 3.1. Недоопределённая ИСЛАУ | 4 |
| 3.2. Переопределённая ИСЛАУ | 5 |
| 4. Результаты | 5 |
| 4.1. Недоопределённая ИСЛАУ | 5 |
| 4.1.1. Оценка меры вариабельности ive | 5 |
| 4.1.2. Допусковое множество решений | 6 |
| 4.2. Переопределённая ИСЛАУ | 7 |
| 4.2.1. Оценка меры вариабельности ive | 7 |
| 4.2.2. Допусковое множество решений | 8 |
| 4.2.3. График распознающего функционала | 8 |
| 5. Приложение | 9 |

Список иллюстраций

| | |
|---|---|
| 4.1. Допусковое множество решений недоопределённой ИСЛАУ | 6 |
| 4.2. Допусковое множество решений недоопределённой ИСЛАУ. Проекция на x_1Ox_2 | 7 |
| 4.3. Допусковое множество решений переопределённой ИСЛАУ | 8 |
| 4.4. Распознающий функционал | 9 |

1. Постановка задачи

Требуется решить недоопределённую интервальную систему линейных алгебраических уравнений (ИСЛАУ) с матрицей 3x2 и переопределённую ИСЛАУ с матрицей 2x3. Используемые матрицы должны совпадать с точностью до транспонирования.

Найти допустовое множество решений, оценку варибельности решения *ive*.

Для случая 3x2 построить график $Tol(x_1, x_2)$.

Для случая 2x3 проанализировать решение.

Построить 3-мерный образ допустового множества или его проекции на плоскости $(x_i O x_j)$.

2. Теория

- Распознающий функционал для исследования разрешимости ИСЛАУ:

$$Tol(x) = \min_{1 \leq i \leq n} (radb_i - |midb_i - \sum_{j=1}^m a_{ij}x_j|) \quad (1)$$

- Мера варибельности:

$$ive(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \sqrt{n}(\min_{A \in \mathbf{A}} condA) * ||\arg \max Tol|| * \frac{\max Tol}{||b||} \quad (2)$$

- Расчет бруса:

$$\tilde{x} = [\arg \max Tol - ive, \arg \max Tol + ive] \quad (3)$$

3. Задача

3.1. Недоопределённая ИСЛАУ

Возьмем матрицу A следующего вида:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 1 & 7 & 6 \end{pmatrix} \quad (4)$$

Пусть решение СЛАУ имеет вид:

$$x_0 = (1 \quad 1 \quad -1)^T \quad (5)$$

Тогда вектор b равен:

$$A * x_0 = b = (2 \quad 2)^T \quad (6)$$

Зададим радиусы для матрицы \mathbf{A} и вектора \mathbf{b} :

$$rad\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$rad\mathbf{b} = (1 \quad 2)^T \quad (8)$$

Получим следующую недоопределённую интервальную СЛАУ:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} [3, 5] & [1, 5] & [2, 8] \\ [-1, 3] & [6, 8] & [4, 8] \end{pmatrix} \quad (9)$$

$$\mathbf{b} = ([1, 3] \quad [0, 4])^T \quad (10)$$

3.2. Переопределённая ИСЛАУ

Из предыдущего пункта задана следующая матрица A :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 7 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \quad (11)$$

Пусть вектор-решение x_0 имеет вид:

$$x_0 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}^T \quad (12)$$

Тогда вектор b равен:

$$A * x_0 = b = \begin{pmatrix} 3 & -4 & -1 \end{pmatrix}^T \quad (13)$$

Зададим радиус для вектора \mathbf{b} :

$$rad\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}^T \quad (14)$$

Получим следующую переопределённую интервальную СЛАУ:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} [3, 5] & [-1, 3] \\ [1, 5] & [6, 8] \\ [2, 8] & [4, 8] \end{pmatrix} \quad (15)$$

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} [0, 6] & [-9, 1] & [-7, 5] \end{pmatrix}^T \quad (16)$$

4. Результаты

4.1. Недоопределённая ИСЛАУ

Решим задачу с помощью функции *tolscopy*. Получим максимум распознающего функционала Tol и значение аргумента, в котором максимум достигался:

$$\max Tol = 0.3437 \quad (17)$$

$$\arg \max Tol = \begin{pmatrix} 0.406 \\ 0.125 \\ 1.377 * 10^{-7} \end{pmatrix} \quad (18)$$

4.1.1. Оценка меры вариабельности *ive*

Минимальное число обусловленности матрицы A равно:

$$\min cond\mathbf{A} = 2.2427 \quad (19)$$

Оценка меры вариабельности равна:

$$ive(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = 0.1638 \quad (20)$$

Брус оценки имеет вид:

$$\tilde{x} = \begin{pmatrix} [0.2424, 0.5701] \\ [-0.0388, 0.2888] \\ [-0.1638, 0.1638] \end{pmatrix} \quad (21)$$

4.1.2. Допусковое множество решений

Построим график допускового множества решений с помощью функции `EqnTol3D`. Добавим брус оценки и вектор, в котором достигается максимум распознающего функционала. Допусковое множество представлено зеленой областью, вектор - фиолетовой звездой, брус - черными линиями, представляющими его рёбра.

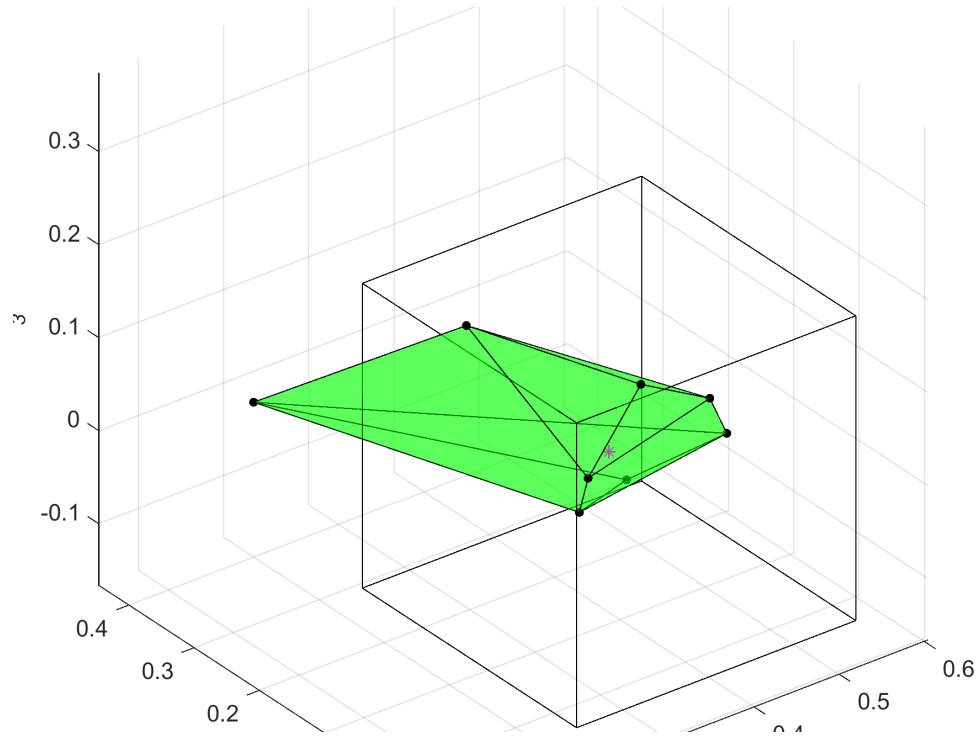


Рисунок 4.1. Допусковое множество решений недоопределённой ИСЛАУ

Так как 3 координата вектора $\arg \max Tol$ практически равна 0, можно рассмотреть брус 2D-проекции на плоскость $x_1 O x_2$.

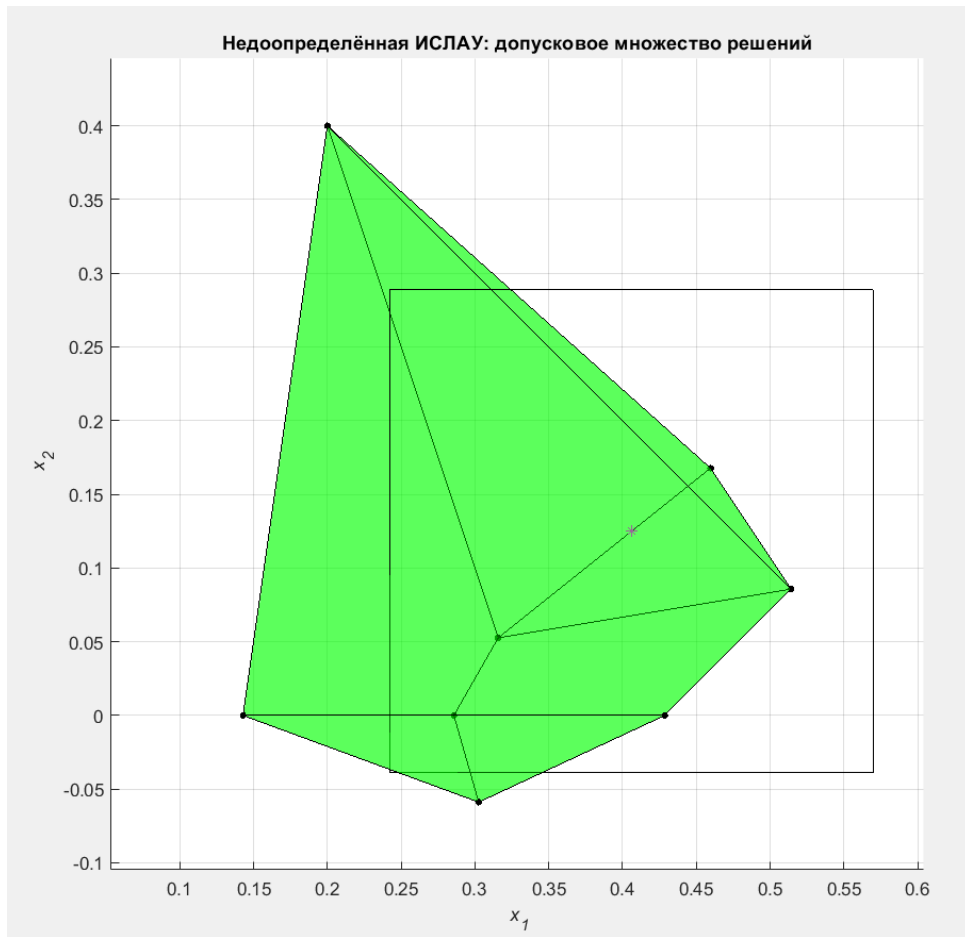


Рисунок 4.2. Допустовое множество решений недоопределённой ИСЛАУ. Проекция на x_1Ox_2

Стоит отметить, что брус не покрывает все допустовое множество решений.

4.2. Переопределённая ИСЛАУ

Решим задачу с помощью функции *tolsoivy*. Получим максимум распознающего функционала Tol и значение аргумента, в котором максимум достигался:

$$\max Tol = 0.6279 \quad (22)$$

$$\arg \max Tol = \begin{pmatrix} 0.8837 \\ -0.6744 \end{pmatrix} \quad (23)$$

4.2.1. Оценка меры вариабельности *ive*

Минимальное число обусловленности матрицы A от транспонирования не меняется и равно:

$$\min cond \mathbf{A} = 2.2427 \quad (24)$$

Оценка меры вариабельности равна:

$$ive(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = 0.4342 \quad (25)$$

Брус оценки имеет вид:

$$\tilde{x} = \begin{pmatrix} [0.4495, 1.3179] \\ [-1.1086, -0.2402] \end{pmatrix} \quad (26)$$

4.2.2. Допусковое множество решений

Построим график допускового множества решений с помощью функции `EqnTol2D`. Добавим брус оценки и вектор, в котором достигается максимум распознающего функционала. Допусковое множество представлено зеленой областью, вектор - красной квадратной точкой, брус - черным квадратом.

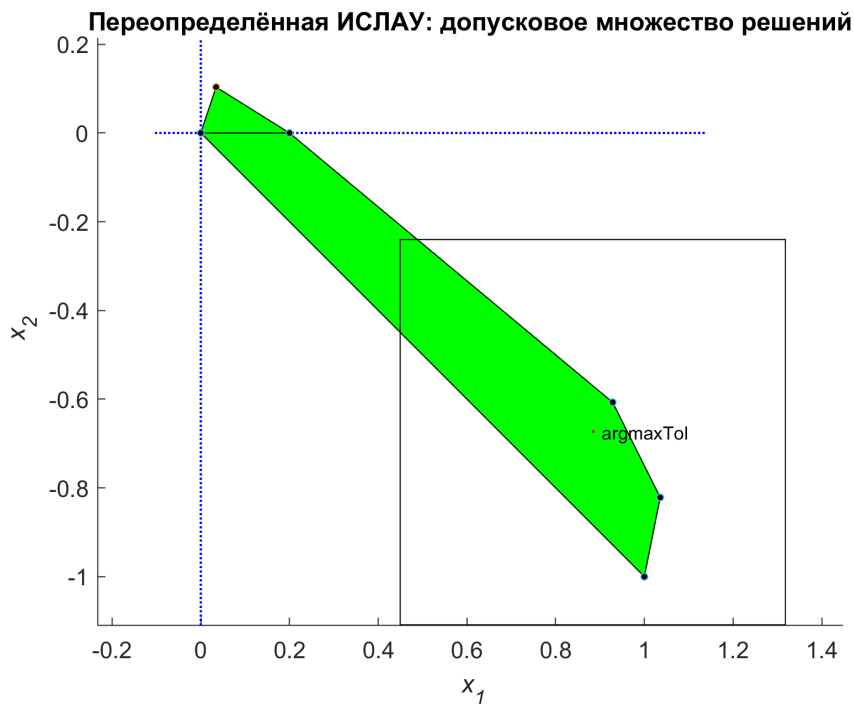


Рисунок 4.3. Допусковое множество решений переопределённой ИСЛАУ

4.2.3. График распознающего функционала

Построим график распознающего функционала $Tol(x_1, x_2)$. Красным кружком обозначена точка, в которой функционал достигает максимальное значение.

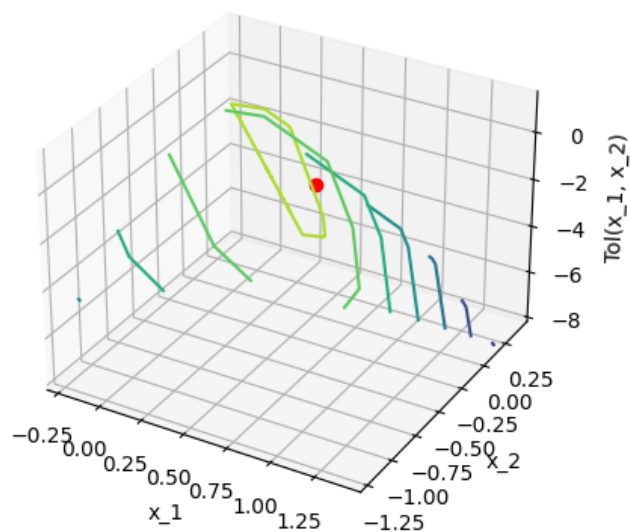


Рисунок 4.4. Распознающий функционал

5. Приложение

Код программы на Python и MATLAB лежит в данном репозитории:

https://github.com/Pink0ink/Interval_Analysis/tree/main/lab3

Реализация функции tolsolvty на Python:

<https://github.com/MaximSmolskiy/tolsolvty>

Пакет IntLinInc2D:

<http://interval.ict.nsc.ru/Programing/MCodes/IntLinInc2D.zip>

Пакет IntLinInc3D:

<http://interval.ict.nsc.ru/Programing/MCodes/IntLinInc3D.zip>