

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого  
Институт прикладной математики и механики  
Высшая школа прикладной математики и вычислительно физики

# Вычислительные комплексы

## Лабораторная работа №3

**Работу**

**выполнил:**

Колесник Виктор

Группа:

3630102/70201

**Преподаватель:**

к.ф.-м.н., доцент

Баженов

Александр

Николаевич

Санкт-Петербург  
2020

# Содержание

<b>1. Постановка задачи</b>	<b>4</b>
<b>2. Теория</b>	<b>4</b>
<b>3. Задача</b>	<b>4</b>
3.1. Недоопределённая ИСЛАУ . . . . .	4
3.2. Переопределённая ИСЛАУ . . . . .	5
<b>4. Результаты</b>	<b>5</b>
4.1. Недоопределённая ИСЛАУ . . . . .	5
4.1.1. Оценка меры вариабельности $\text{ive}$ . . . . .	5
4.1.2. Допусковое множество решений . . . . .	6
4.1.3. Анализ решения . . . . .	7
4.2. Переопределённая ИСЛАУ . . . . .	8
4.2.1. Оценка меры вариабельности $\text{ive}$ . . . . .	8
4.2.2. Допусковое множество решений . . . . .	8
4.2.3. График распознающего функционала . . . . .	8
<b>5. Приложение</b>	<b>9</b>

## Список иллюстраций

4.1. Допусковое множество решений недоопределённой ИСЛАУ . . . . .	6
4.2. Допусковое множество решений недоопределённой ИСЛАУ. Проекция на $x_1Ox_2$	7
4.3. Допусковое множество решений переопределённой ИСЛАУ . . . . .	9
4.4. Распознающий функционал . . . . .	10

# 1. Постановка задачи

Требуется решить недоопределённую интервальную систему линейных алгебраических уравнений (ИСЛАУ) с матрицей 3x2 и переопределённую ИСЛАУ с матрицей 2x3. Используемые матрицы должны совпадать с точностью до транспонирования.

Найти допустовое множество решений, оценку вариабельности решения  $\text{ive}$ .

Для случая 3x2 построить график  $\text{Tol}(x_1, x_2)$ .

Для случая 2x3 проанализировать решение.

Построить 3-мерный образ допустового множества или его проекции на плоскости  $(x_i O x_j)$ .

# 2. Теория

- Распознающий функционал для исследования разрешимости ИСЛАУ:

$$\text{Tol}(x) = \min_{1 \leq i \leq n} (\text{rad}b_i - |\text{mid}b_i - \sum_{j=1}^m a_{ij}x_j|) \quad (1)$$

- Мера вариабельности:

$$\text{ive}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \sqrt{n}(\min_{A \in \mathbf{A}} \text{cond}A) * \|\arg \max \text{Tol}\| * \frac{\max \text{Tol}}{\|\mathbf{b}\|} \quad (2)$$

- Расчет бруса:

$$\tilde{x} = [\arg \max \text{Tol} - \text{ive}, \arg \max \text{Tol} + \text{ive}] \quad (3)$$

# 3. Задача

## 3.1. Недоопределённая ИСЛАУ

Возьмем матрицу  $A$  следующего вида:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 1 & 7 & 6 \end{pmatrix} \quad (4)$$

Пусть решение СЛАУ имеет вид:

$$x_0 = (1 \quad 1 \quad -1)^T \quad (5)$$

Тогда вектор  $b$  равен:

$$A * x_0 = b = (2 \quad 2)^T \quad (6)$$

Зададим радиусы для матрицы  $\mathbf{A}$  и вектора  $\mathbf{b}$ :

$$\text{rad}\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$\text{rad}\mathbf{b} = (1 \quad 2)^T \quad (8)$$

Получим следующую недоопределённую интервальную СЛАУ:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} [3, 5] & [1, 5] & [2, 8] \\ [-1, 3] & [6, 8] & [4, 8] \end{pmatrix} \quad (9)$$

$$\mathbf{b} = ([1, 3] \quad [0, 4])^T \quad (10)$$

### 3.2. Переопределённая ИСЛАУ

Из предыдущего пункта задана следующая матрица  $A$ :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 7 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \quad (11)$$

Пусть вектор-решение  $x_0$  имеет вид:

$$x_0 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}^T \quad (12)$$

Тогда вектор  $b$  равен:

$$A * x_0 = b = \begin{pmatrix} 3 & -4 & -1 \end{pmatrix}^T \quad (13)$$

Зададим радиус для вектора  $\mathbf{b}$ :

$$\text{rad}\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}^T \quad (14)$$

Получим следующую переопределённую интервальную СЛАУ:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} [3, 5] & [-1, 3] \\ [1, 5] & [6, 8] \\ [2, 8] & [4, 8] \end{pmatrix} \quad (15)$$

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} [0, 6] & [-9, 1] & [-7, 5] \end{pmatrix}^T \quad (16)$$

## 4. Результаты

### 4.1. Недоопределённая ИСЛАУ

Решим задачу с помощью функции `tolsoivty`. Получим максимум распознающего функционала `Tol` и значение аргумента, в котором максимум достигался:

$$\max \text{Tol} = 0.3437 \quad (17)$$

$$\arg \max \text{Tol} = \begin{pmatrix} 0.406 \\ 0.125 \\ 1.377 * 10^{-7} \end{pmatrix} \quad (18)$$

#### 4.1.1. Оценка меры вариабельности `ive`

Минимальное число обусловленности матрицы  $A$  равно:

$$\min \text{cond}\mathbf{A} = 2.2427 \quad (19)$$

Оценка меры вариабельности равна:

$$\text{ive}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = 0.1638 \quad (20)$$

Брус оценки имеет вид:

$$\tilde{x} = \begin{pmatrix} [0.2424, 0.5701] \\ [-0.0388, 0.2888] \\ [-0.1638, 0.1638] \end{pmatrix} \quad (21)$$

#### 4.1.2. Допусковое множество решений

Построим график допускового множества решений с помощью функции EqnTol3D. Добавим брус оценки и вектор, в котором достигается максимум распознающего функционала. Допусковое множество представлено зеленой областью, вектор - фиолетовой звездой, брус - черными линиями, представляющими его рёбра.

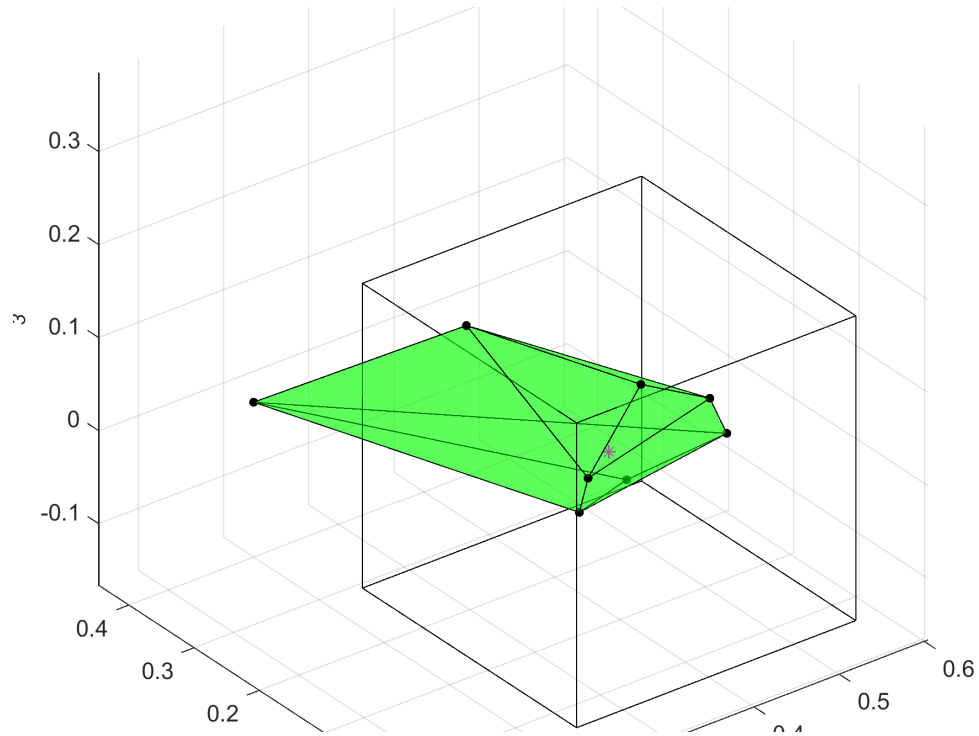


Рисунок 4.1. Допусковое множество решений недоопределённой ИСЛАУ

Так как 3 координата вектора  $\arg \max \text{Tol}$  практически равна 0, можно рассмотреть брус 2D-проекции на плоскость  $x_1 O x_2$ .

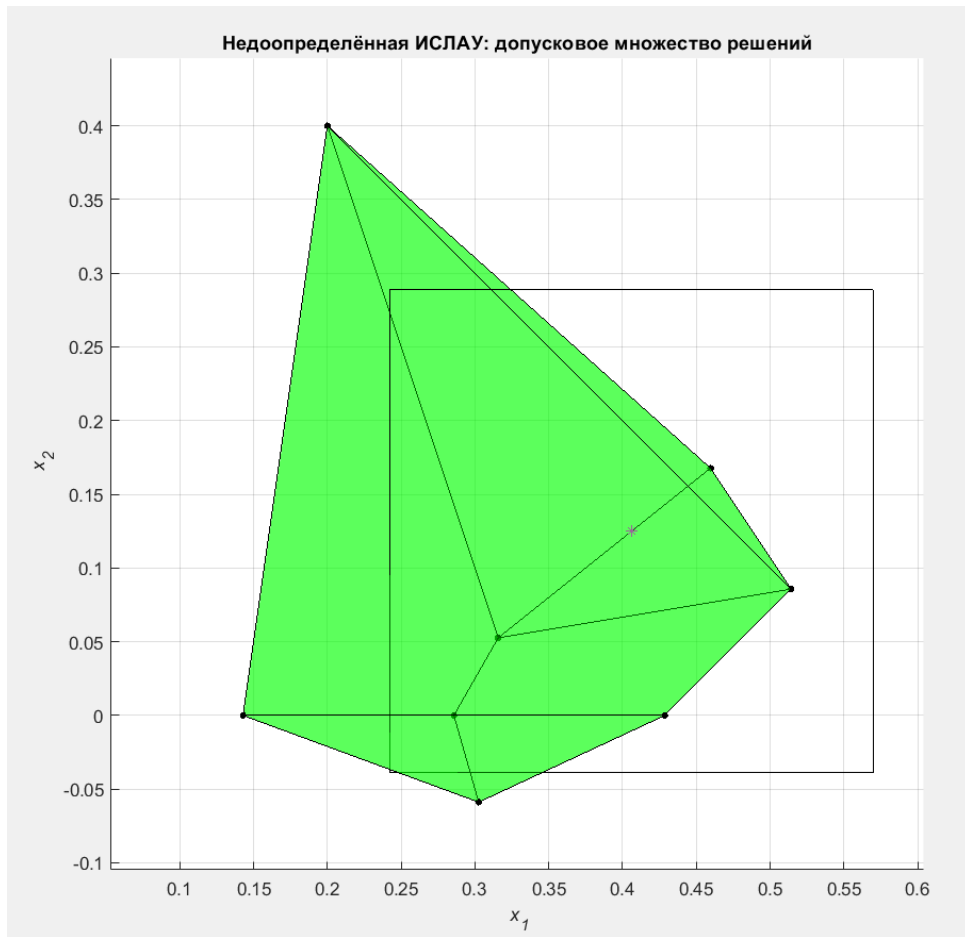


Рисунок 4.2. Допустимое множество решений недоопределённой ИСЛАУ. Проекция на  $x_1Ox_2$

Стоит отметить, что брус не покрывает все допустимое множество решений.

#### 4.1.3. Анализ решения

Можно заметить, что полученное решение ИСЛАУ  $\arg \max \text{Tol}$  сильно отличается от  $x_0$ :

$$\arg \max \text{Tol} = \begin{pmatrix} 0.406 \\ 0.125 \\ 1.377 * 10^{-7} \end{pmatrix} \neq x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (22)$$

Тем не менее,  $\arg \max \text{Tol}$  удовлетворяет границам правой части:

$$\mathbf{A} * \arg \max \text{Tol} = \begin{pmatrix} [1.3429, 2.6551] \\ [0.3439, 2.2181] \end{pmatrix} \subseteq \mathbf{b} \quad (23)$$

Такой результат - проявление неоднозначности решения обратной задачи. Кроме того, для СЛАУ, которая в неинтервальной постановке имела бы бесконечное множество решений, методами интервального анализа было получено конечное множество решений.

## 4.2. Переопределённая ИСЛАУ

Решим задачу с помощью функции `tolsolvty`. Получим максимум распознающего функционала `Tol` и значение аргумента, в котором максимум достигался:

$$\max \text{Tol} = 0.6279 \quad (24)$$

$$\arg \max \text{Tol} = \begin{pmatrix} 0.8837 \\ -0.6744 \end{pmatrix} \quad (25)$$

### 4.2.1. Оценка меры вариабельности `ive`

Минимальное число обусловленности матрицы  $A$  от транспонирования не меняется и равно:

$$\min \text{cond} \mathbf{A} = 2.2427 \quad (26)$$

Оценка меры вариабельности равна:

$$\text{ive}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = 0.4342 \quad (27)$$

Брус оценки имеет вид:

$$\tilde{x} = \begin{pmatrix} [0.4495, 1.3179] \\ [-1.1086, -0.2402] \end{pmatrix} \quad (28)$$

### 4.2.2. Допусковое множество решений

Построим график допускового множества решений с помощью функции `EqnTol2D`. Добавим брус оценки и вектор, в котором достигается максимум распознающего функционала. Допусковое множество представлено зеленой областью, вектор - красной квадратной точкой, брус - черным квадратом.



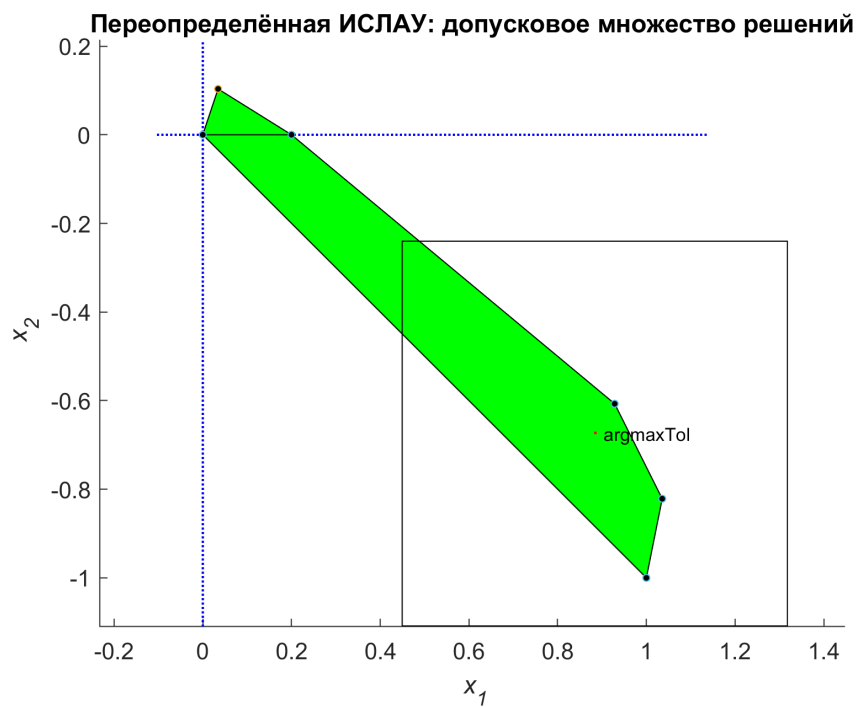


Рисунок 4.3. Допустовое множество решений переопределённой ИСЛАУ

#### 4.2.3. График распознающего функционала

Построим график распознающего функционала  $\text{Tol}(x_1, x_2)$ . Красным кружком обозначена точка, в которой функционал достигает максимальное значение.

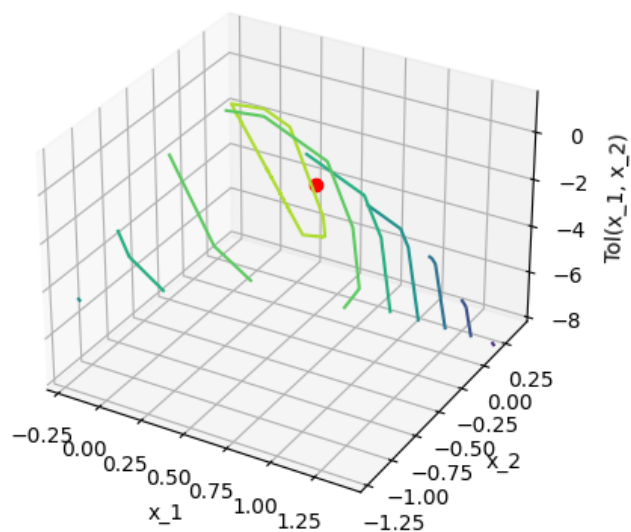


Рисунок 4.4. Распознающий функционал

## 5. Приложение

Код программы на Python и MATLAB лежит в данном репозитории:

[https://github.com/Pink0ink/Interval\\_Analysis/tree/main/lab3](https://github.com/Pink0ink/Interval_Analysis/tree/main/lab3)

Реализация функции tolsolvty на Python:

<https://github.com/MaximSmolskiy/tolsolvty>

Пакет IntLinInc2D:

<http://interval.ict.nsc.ru/Programing/MCodes/IntLinInc2D.zip>

Пакет IntLinInc3D:

<http://interval.ict.nsc.ru/Programing/MCodes/IntLinInc3D.zip>