Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Институт прикладной математики и механики
Высшая школа прикладной математики и вычислительно физики

Вычислительные комплексы

Курсовой проект

Работу выполнил:
Колесник Виктор
Группа:
3630102/70201
Преподаватель:
к.ф.-м.н., доцент
Баженов
Александр
Николаевич

Санкт-Петербург
2021

Содержание

Список иллюстраций

1. Постановка задачи

Необходимо решить прямоугольную систему уравнений субдифференциальным методом Ньютона путем нахождения решений с различными матрицами из исходной СЛАУ и взятием минимума по включению.

2. Теория

2.1. Получение начального приближения

Пусть задана ИСЛАУ:

$$\mathbf{C}x = \mathbf{d} \tag{1}$$

Для получения начального приближения нужно решить «среднюю» систему:

$$\mathrm{mid}\mathbf{C}^{\sim}x^{(0)} = \mathrm{sti}\mathbf{d} \tag{2}$$

2.2. Субдифференциальный метод Ньютона

Следующее приближение вычисляется по формуле:

$$x^{(k)} = x^{(k-1)} - \tau(D^{(k-1)})^{-1}\mathcal{G}(x^{k-1}) \tag{3}$$

где $\tau \in (0, 1]$ - некоторая константа.

Условием окончания алгоритма является выполнения условия:

$$||x^{(k)} - x^{(k-1)}|| \leq \varepsilon \tag{4}$$

2.3. Решение СЛАУ с прямоугольной матрицей

Для прямоугольный матриц непосредственно применение субдифференциального метода Ньютона невозможно. Нужно сделать его частью более общего процесса, и в более общей постановке.

$$\mathbf{A}\ \mathbf{x} \subseteq \mathbf{b} \tag{5}$$

Разобъем исходную матрицу $\mathbf{A}$ на квадратные подматрицы $\mathbf{A}^1$, $\mathbf{A}^2$, ..., $\mathbf{A}^k$.

Будем решать ИСЛАУ

$$\mathbf{A}^i\mathbf{x} = \mathbf{b}^i \tag{6}$$

Затем решения $\mathbf{x}^i$, $i = 1, 2, ..., k$ пересекаем между собой:

$$\mathbf{x}^\star = \bigcap_{i=1}^{k} \mathrm{pro}\mathbf{x}^i \tag{7}$$

Для персечения используем правильные проекции интервалов. Пересечение берется как минимум по включению в полной интервальной арифметике:

$$\mathbf{a} \bigcap \mathbf{b} := \inf_{\subseteq}\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\} = [\max\{\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}\}, \min\{\underline{\mathbf{a}}, \underline{\mathbf{b}}\}] \tag{8}$$

3. Решение

Дана ИСЛАУ, у которой матрица имеет размерность (126, 18). Правая часть является интервальным вектором со случайными радиусами из интервала $[0.1, 1]$. Элементы вектора-решения - случайные значения из интервала $[2, 8]$

Будем случайно выбирать 18 строк из этой матрицы и решать соответствующую подсистему субдифференциальным метода Ньютона, если определитель матрицы не равен 0.

Затем, найдем пересечение полученных решений и сравним с истинным.

Проверим, как зависит получаемое решение от количества выборов подматриц. Для этого будем искать решение-пересечение при случайном выборе 1, 5, 15, 30, 50 или 100 подсистем и сравнивать с реальным. Кроме того, посмотрим, как получаемая правая часть соотносится с исходной для всей системы.

4. Результаты

Исходная прямоугольная матрица имеет следующий вид:

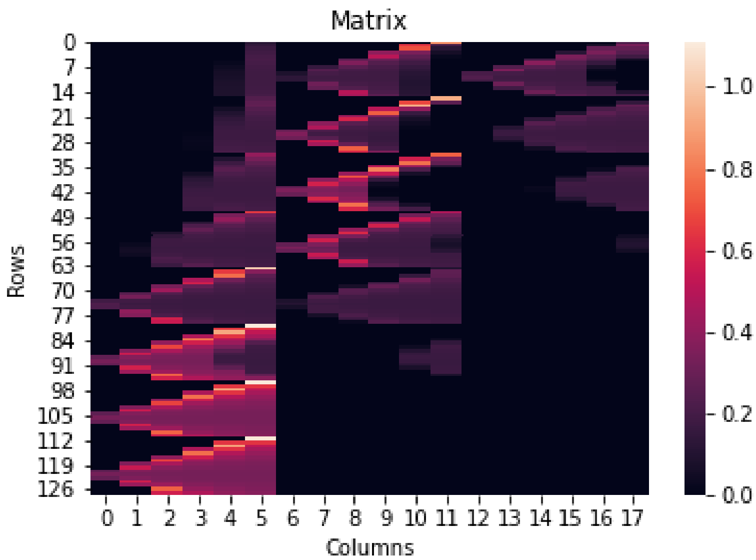

Рисунок 4.1. Исходная матрица

На следующих графиках представлены сравнения полученных правых частей и исходных и сравнения векторов-решений и истинных решений при выборе 1, 5, 15, 30, 50 или 100 подсистем.

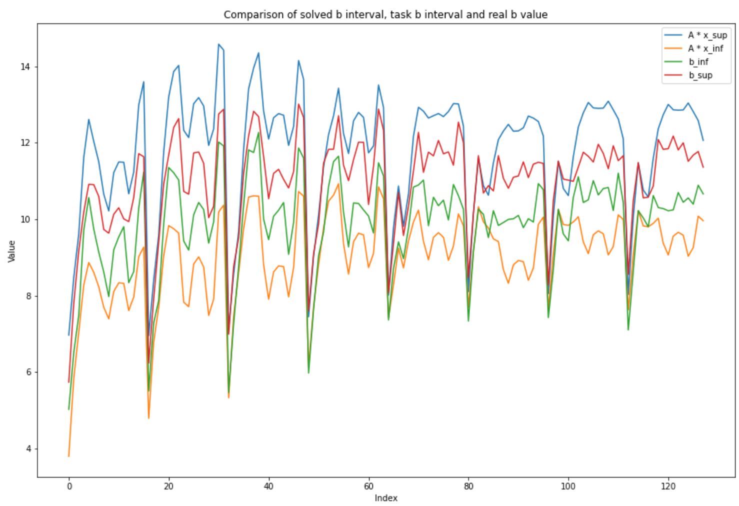

Рисунок 4.2. Сравнение правых частей. 1 подматрица

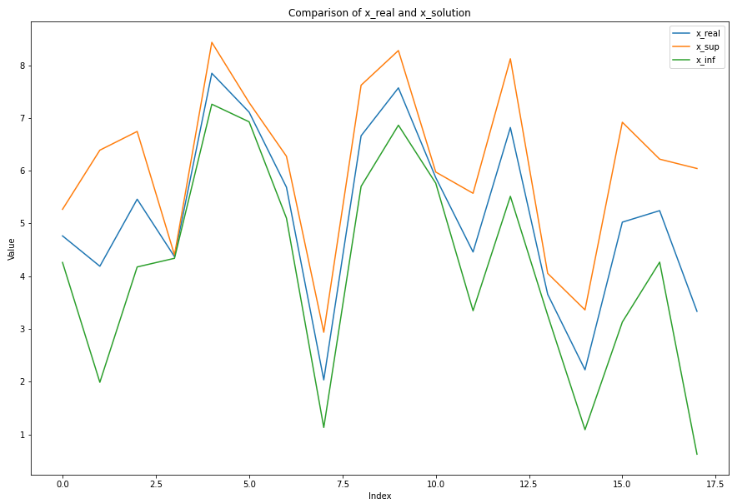

Рисунок 4.3. Сравнение исходного решения и полученного интервального решения. 1 подматрица

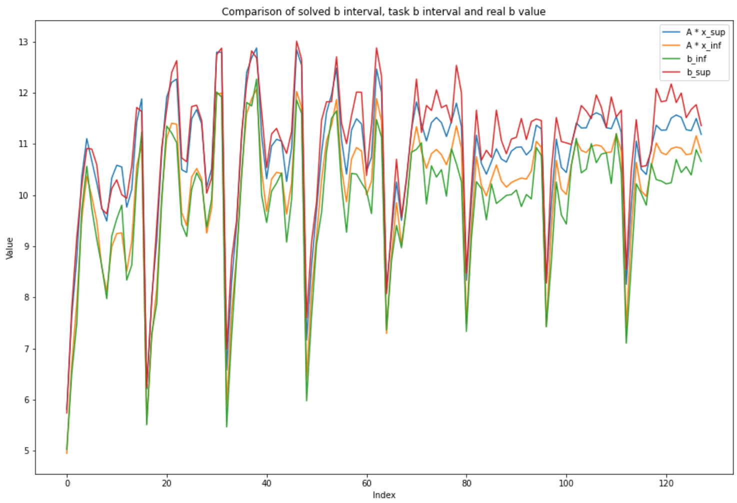

Рисунок 4.4. Сравнение правых частей. 5 подматриц

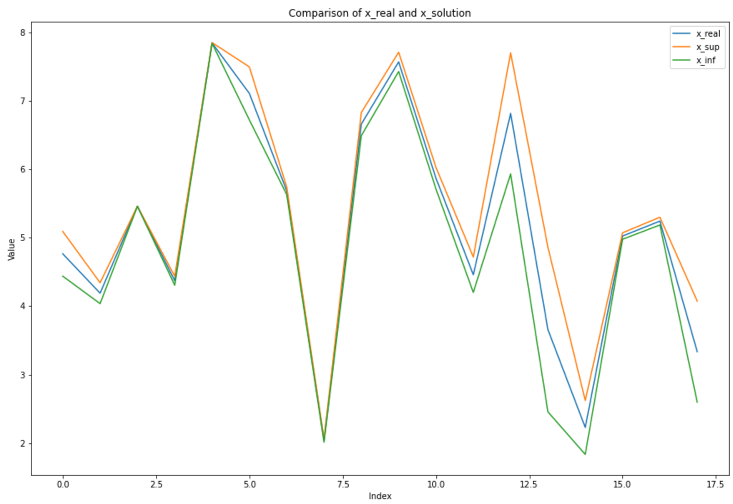

Рисунок 4.5. Сравнение исходного решения и полученного интервального решения. 5 подматрица

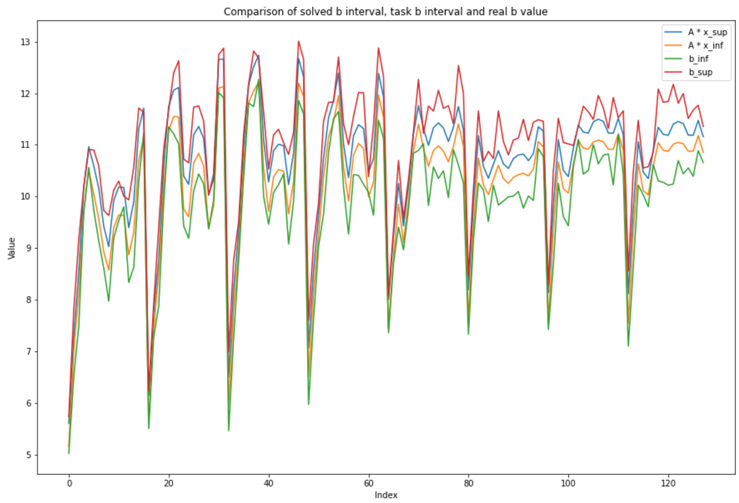

Рисунок 4.6. Сравнение правых частей. 15 подматриц

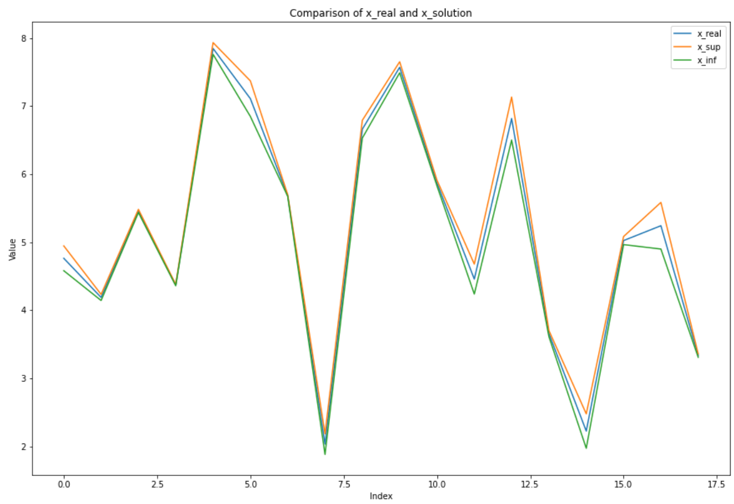

Рисунок 4.7. Сравнение исходного решения и полученного интервального решения. 15 подматриц

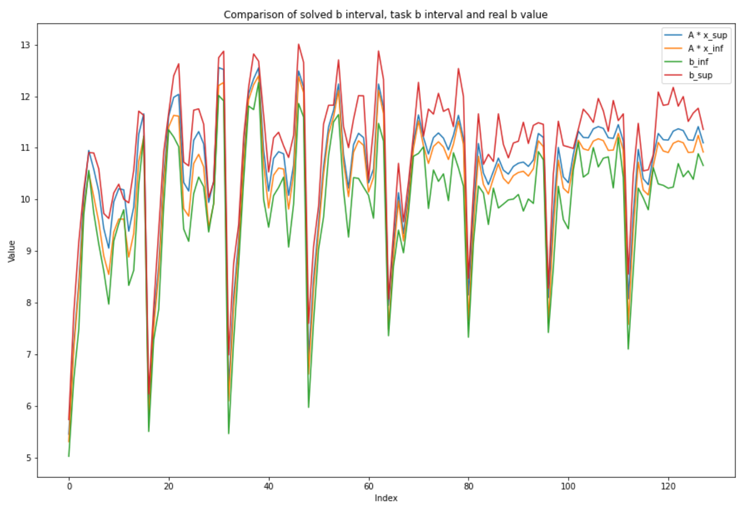

Рисунок 4.8. Сравнение правых частей. 30 подматриц

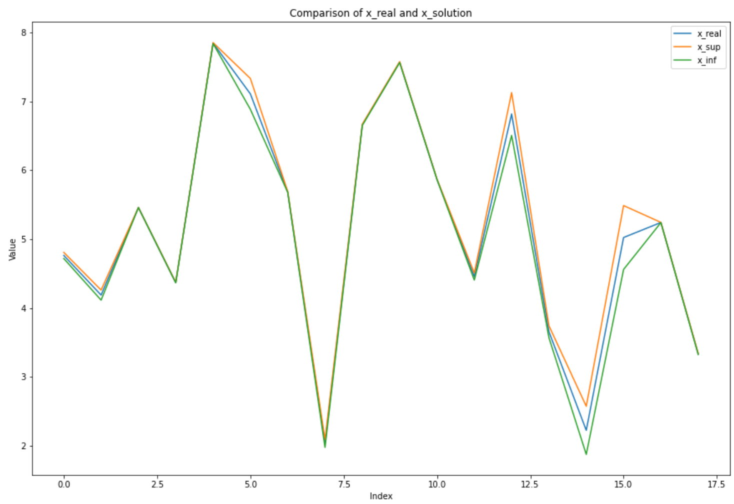

Рисунок 4.9. Сравнение исходного решения и полученного интервального решения. 30 подматриц

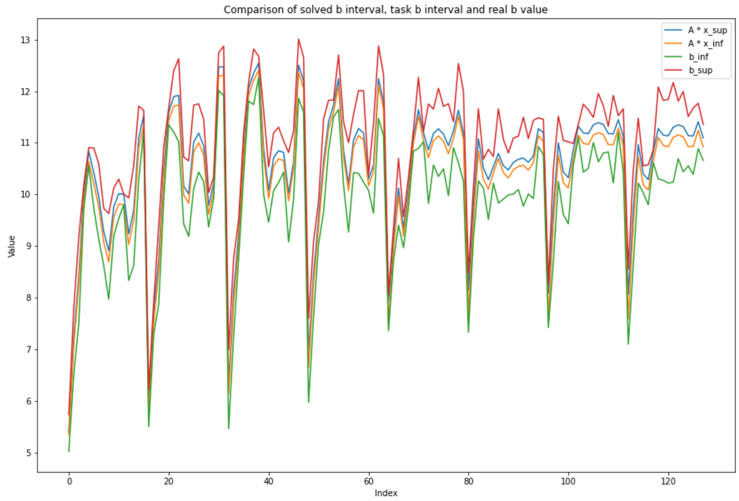

Рисунок 4.10. Сравнение правых частей. 50 подматриц

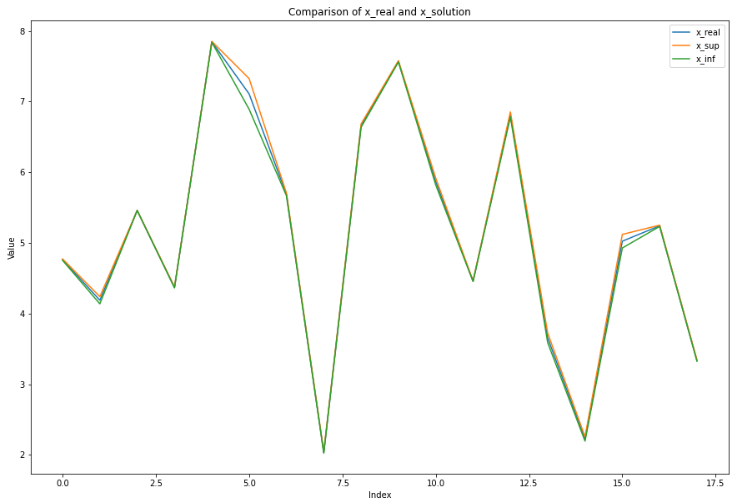

Рисунок 4.11. Сравнение исходного решения и полученного интервального решения. 50 подматриц

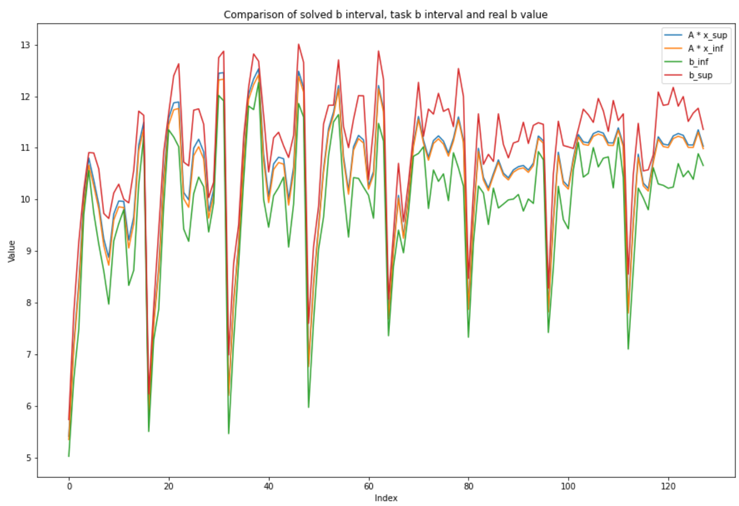

Рисунок 4.12. Сравнение правых частей. 100 подматриц

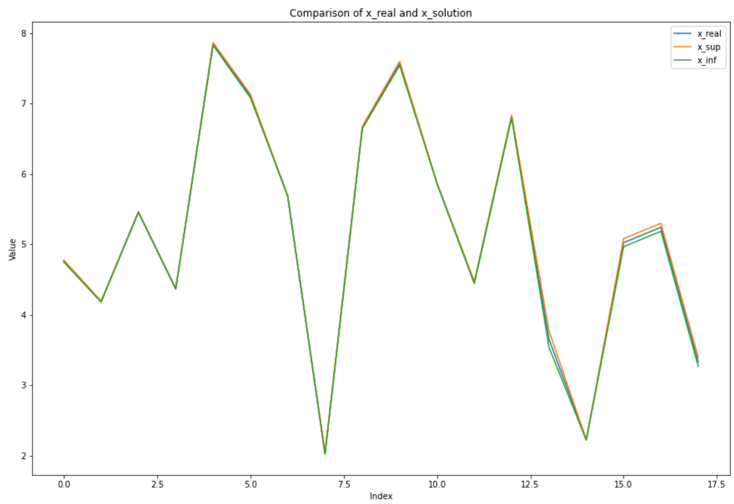

Рисунок 4.13. Сравнение исходного решения и полученного интервального решения. 100 подматриц

Проверим зависимость нормы разности исходного решения и модельного от количества используемых подматриц. Будем искать нормы разности вектора-решения и вектора правых границ модельных решений, вектора-решения и вектора левых границ модельных решений, вектора-решения и вектора середины интервалов модельных решений. Результаты представлены на графиках:

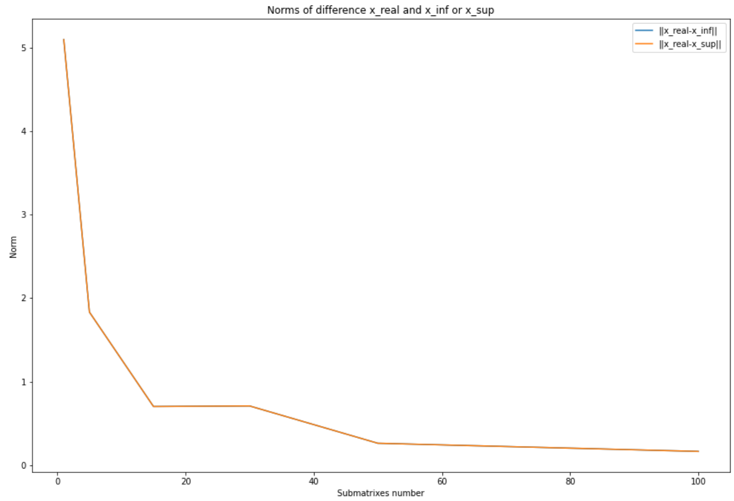

Рисунок 4.14. Сравнение норм разности исходного вектора-решения и границ интервалов полученных решений

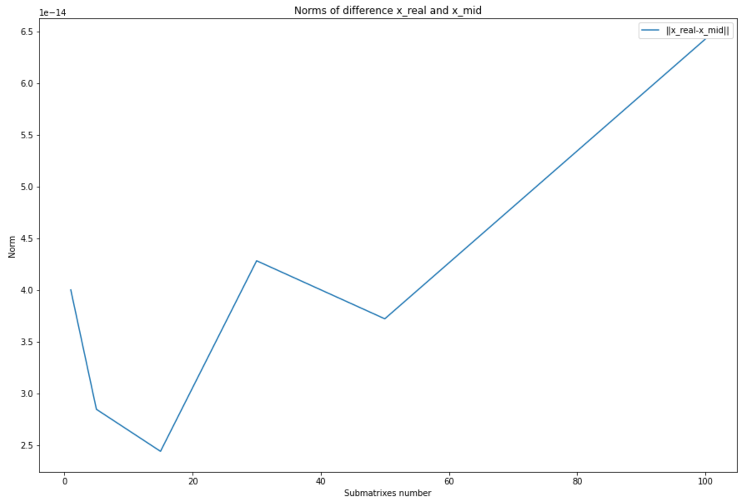

Рисунок 4.15. Сравнение норм разности исходного вектора-решения и вектора-середины интервалов полученных решений

5. Анализ

Из графиков видно, что для всех вариантов получаемая правая часть находилась в границах исходной правой части. Более того, при увеличении количества выбираемых подматриц интервалы правой части сужались.

Для всех вариантов истинный вектор-решение всегда находился в интервале полученного решения. А при увеличении количества подматриц полученный вектор сужался к истинному.

Середина полученного интервального вектора-решения почти сразу совпала с исходным решением. Норма разности имела порядок 10^{-14} для любого количества используемых подматриц.

Из этого можно сделать вывод, что при увеличении количества выбираемых матриц решение-пересечение стремится к истинному.

6. Приложение

Код программы на Python лежит в данном репозитории:
`https://github.com/PinkOink/Interval_Analysis/tree/main/course_project`