四元数的含义

考虑空间中两个原点相同的正交参考系$\mathcal{F}_1$和$\mathcal{F}_2$，$\mathcal{F}_2$相对于$\mathcal{F}_1$的关系可以表示为绕着一个旋转轴转动了一个角度，其中旋转轴可以由单位方向向量表示：$\mathbf{a} = [a_1, a_2, a_3]^\top$，旋转角度记作$\phi$。我们可以用四个变量来描述这种相对关系（坐标变换），即：

$$\eta = \cos\frac{\phi}{2}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{a}\sin\frac{\phi}{2} = \begin{bmatrix} a_1 \sin(\phi/2) \\ a_2 \sin(\phi/2) \\ a_3 \sin(\phi/2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{bmatrix}, \qquad (6.14)$$

这四个变量之间并不是相互独立的，因为：

$$\eta^2 + \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 = 1.$$

把着四个量写成一个向量，即为（单位长度）四元数q：

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon} \\ \eta \end{bmatrix}.$$

由四元数的定义不难看出，当$\eta < 0$时，让整个四元数取相反数，是为了将$(\pi/2, 3\pi/2)$区间的$\frac{\phi}{2}$映射到$(-\pi/2, \pi/2)$，对应的旋转角从$(\pi, 3\pi)$区间映射到了$(-\pi, \pi)$，实际上是等价的，并且旋转轴方向（即向量$\mathbf{a}$此时是没有发生变化的。那么我们可以合理推断，这个操作不做也是没有问题的。并且可能是因为减少了人为引入额外操作，在进行EKF时F矩阵对状态转移关系的近似更精确，带来了估计性能的提升：

上：不进行取反操作；下：进行取反操作。

```
EKF:
state MSE of EKFForQuat: [8.49794227e-06 1.41314794e-05 1.68787919e-05 3.50289810e-05], RMSE: 0.004316746301181078
average cpu time of EKFForQuat: 0.1359375 ms
********************
```

```
********************
EKF:
state MSE of EKFForQuat: [8.48946010e-06 8.47038556e-04 9.90040267e-04 6.29095270e-04], RMSE: 0.024872995163918З
average cpu time of EKFForQuat: 0.1171875 ms
********************
```

另外，四元数的单位长度性质是由它本身的定义决定的，也就是只要旋转轴向量$\mathbf{a}$（或四元数q）最开始被确定为单位长度的向量，那么理论上四元数应该一直保持单位长度，因为旋转矩阵理论上不应该改变向量长度。所以在四元数的状态转移矩阵不够精确的时候，其单位长度的性质是需要额外的人为操作来确保的。

四元数和旋转矩阵的关系

旋转矩阵C_{21}（将向量在$\mathcal{F}_1$中的坐标映射到$\mathcal{F}_2$中的矩阵，即$\mathbf{r}_2 = C_{21}\mathbf{r}_1$）用旋转轴向量和旋转角可以表示为：

$$\mathbf{C}_{21} = \cos\phi\mathbf{1} + (1-\cos\phi)\mathbf{a}\mathbf{a}^T - \sin\phi\mathbf{a}^\times. \qquad (6.12)$$

用四元数可以表示为（即文献中常出现的$C_n^b(q)$）：

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{21} &= (\eta^2 - \boldsymbol{\varepsilon}^T\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{1} + 2\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}^T - 2\eta\boldsymbol{\varepsilon}^\times \\ &= \begin{bmatrix} 1-2(\varepsilon_2^2+\varepsilon_3^2) & 2(\varepsilon_1\varepsilon_2+\varepsilon_3\eta) & 2(\varepsilon_1\varepsilon_3-\varepsilon_2\eta) \\ 2(\varepsilon_2\varepsilon_1-\varepsilon_3\eta) & 1-2(\varepsilon_3^2+\varepsilon_1^2) & 2(\varepsilon_2\varepsilon_3+\varepsilon_1\eta) \\ 2(\varepsilon_3\varepsilon_1+\varepsilon_2\eta) & 2(\varepsilon_3\varepsilon_2-\varepsilon_1\eta) & 1-2(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2) \end{bmatrix}. \qquad (6.15) \end{aligned}$$

由旋转矩阵得到四元数（下图中的C即为上图中的C_{21}）：

The inverse problem is to determine q as a function of C:

1. $T = trace(C) = c_{1,1} + c_{2,2} + c_{2,2} = 4q_0^2 - 1$
2. $q = \begin{bmatrix} \sqrt{1+T}/2 \\ c_{2,3} - c_{3,2}/4q_0 \\ c_{3,1} - c_{1,3}/4q_0 \\ c_{1,2} - c_{2,1}/4q_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{2,3} - c_{3,2}/4q_1 \\ \sqrt{1+2c_{1,1}-T}/2 \\ c_{1,2} + c_{2,1}/4q_1 \\ c_{1,3} + c_{3,1}/4q_1 \end{bmatrix}$
$= \begin{bmatrix} c_{3,1} - c_{1,3}/4q_2 \\ c_{1,2} + c_{2,1}/4q_2 \\ \sqrt{1+2c_{2,2}-T}/2 \\ c_{2,3} + c_{3,2}/4q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{1,2} - c_{2,1}/4q_3 \\ c_{1,3} + c_{3,1}/4q_3 \\ c_{2,3} + c_{3,2}/4q_3 \\ \sqrt{1+2c_{3,3}-T}/2 \end{bmatrix}$
3. Each of these four solutions will be singular when the pivotal element is zero (q_0, q_1, q_2, and q_3, respectively), but at least one will not be (since otherwise q could not have unit norm). For maximum numerical accuracy, the form with the largest pivotal element should be used. The maximum of ($|q_0|$, $|q_1|$, $|q_2|$, $|q_3|$) corresponds to the most positive of (T, $c_{1,1}$, $c_{2,2}$, $c_{3,3}$), respectively.

四元数与坐标变换

将$\mathcal{F}_2$中的点转换到$\mathcal{F}_1$中，可以通过四元数表达，此时将点坐标拓展为四维（1对应四元数的标量维度位置）：

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (6.24)$$

旋转后的坐标表示为：

$$\mathbf{u} = \mathbf{q}^+\mathbf{v}^+\mathbf{q}^{-1} = \mathbf{q}^+\mathbf{q}^{-1^\oplus}\mathbf{v} = \mathbf{R}\mathbf{v}, \qquad (6.25)$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{q}^+\mathbf{q}^{-1^\oplus} = \mathbf{q}^{-1^\oplus}\mathbf{q}^+ = \mathbf{q}^{\oplus^T}\mathbf{q}^+ = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}, \qquad (6.26)$$

其中，相关操作符的定义如下：

$$\mathbf{r}_1{}^\times = \begin{bmatrix} 0 & -r_3 & r_2 \\ r_3 & 0 & -r_1 \\ -r_2 & r_1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad (6.2)$$

$$\mathbf{q}^+ = \begin{bmatrix} \eta\mathbf{1} - \boldsymbol{\varepsilon}^\times & \boldsymbol{\varepsilon} \\ -\boldsymbol{\varepsilon}^T & \eta \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}^\oplus = \begin{bmatrix} \eta\mathbf{1} + \boldsymbol{\varepsilon}^\times & \boldsymbol{\varepsilon} \\ -\boldsymbol{\varepsilon}^T & \eta \end{bmatrix}. \qquad (6.17)$$

The inverse operator, -1, will be defined by

$$\mathbf{q}^{-1} = \begin{bmatrix} -\boldsymbol{\varepsilon} \\ \eta \end{bmatrix}. \qquad (6.18)$$

如果$\mathcal{F}_2$又进行一次旋转得到$\mathcal{F}_3$，已知$\mathcal{F}_3$相对于$\mathcal{F}_2$的四元数为$\mathbf{q}^{32} = [\varepsilon_1^{32}, \varepsilon_2^{32}, \varepsilon_3^{32}, \eta^{32}]$，$\mathcal{F}_2$相对于$\mathcal{F}_1$的四元数为$\mathbf{q}^{21} = [\varepsilon_1^{21}, \varepsilon_2^{21}, \varepsilon_3^{21}, \eta^{21}]$，那么由(6.25)式可以得到$\mathcal{F}_3$相对于$\mathcal{F}_1$的四元数$\mathbf{q}^{31}$与$\mathbf{q}^{32}$和$\mathbf{q}^{21}$的关系，将上式中所描述的点在$\mathcal{F}_3$中的坐标点记作$\mathbf{w}$，则有：

$$\mathbf{u} = \mathbf{q}^{21+}\mathbf{q}^{32+}\mathbf{v}^{+}(\mathbf{q}^{32})^{-1\oplus}(\mathbf{q}^{21})^{-1\oplus}$$

因此：

$$\begin{gathered}
\mathbf{q}^{31+} = \mathbf{q}^{21+}\mathbf{q}^{32+} \\
(\mathbf{q}^{31})^{-1\oplus} = (\mathbf{q}^{32})^{-1\oplus}(\mathbf{q}^{21})^{-1\oplus}
\end{gathered}$$

对应到每个元素，有：

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1^{31} &= +\varepsilon_1^{21}\eta^{32} + \varepsilon_2^{21}\varepsilon_3^{32} - \varepsilon_3^{21}\varepsilon_2^{32} + \eta^{21}\varepsilon_1^{32} \\
\varepsilon_2^{31} &= -\varepsilon_1^{21}\varepsilon_3^{32} + \varepsilon_2^{21}\eta^{32} + \varepsilon_3^{21}\varepsilon_1^{32} + \eta^{21}\varepsilon_2^{32} \\
\varepsilon_3^{31} &= +\varepsilon_1^{21}\varepsilon_2^{32} - \varepsilon_2^{21}\varepsilon_1^{32} + \varepsilon_3^{21}\eta^{32} + \eta^{21}\varepsilon_3^{32} \\
\eta^{31} &= -\varepsilon_1^{21}\varepsilon_1^{32} - \varepsilon_2^{21}\varepsilon_2^{32} - \varepsilon_3^{21}\varepsilon_3^{32} + \eta^{21}\eta^{32}
\end{aligned}$$

不难看出，这就等价于：

$$\mathbf{q}^{31} = \mathbf{q}^{21} \otimes \mathbf{q}^{32}$$

即⊗符号可以认为是四元数效果的叠加，但是需要考虑顺序（因为先转后转顺序不同的话，得到的一般不是同一个坐标系了）。

其中⊗的定义为（注意，下面定义中的q_0应该与上式中的η对应）：

quaternion multiplication:

$$q \otimes p = (q_0 + q_1\boldsymbol{i} + q_2\boldsymbol{j} + q_3\boldsymbol{k})(p_0 + p_1\boldsymbol{i} + p_2\boldsymbol{j} + p_3\boldsymbol{k}) = \begin{bmatrix} q_0p_0 - q_1p_1 - q_2p_2 - q_3p_3 \\ q_0p_1 + q_1p_0 + q_2p_3 - q_3p_2 \\ q_0p_2 - q_1p_3 + q_2p_0 + q_3p_1 \\ q_0p_3 + q_1p_2 - q_2p_1 + q_3p_0 \end{bmatrix}$$

Heidi 2024/12/13 16:15:11
q⊗p = [Ω(q[1:4])+q[0]*I_4]@p

四元数的变化与角速度

四元数的变化实际上就是转轴和转角的变化，也就是坐标系的旋转。在AUV姿态估计的问题场景中，一般会有一个固定的坐标系，叫地心系或导航系或什么的；另一个随着AUV机体转动的坐标系，机体系。

考察四元数的导数：$\frac{d}{dt}\mathbf{q} = \frac{1}{2}\Omega(\omega)\mathbf{q}$，当$dt$足够小的时候，有：

$$\mathbf{q}_{k+1} = \mathbf{q}_k + \frac{dt}{2}\Omega(\omega_k)\mathbf{q}_k = [\frac{dt}{2}\Omega(\omega_k) + I_4]\mathbf{q}_k$$

构造一个四元数：

$$\mathbf{a}_k = [\frac{dt}{2}p_k, \frac{dt}{2}q_k, \frac{dt}{2}r_k, 1]^\top$$

则：

$$\mathbf{q}_{k+1} = \mathbf{q}_k \otimes \mathbf{a}_k$$

不难发现，四元数$\mathbf{a}_k$对应的向量元素即为转轴变化的角度（坐标系变化的角度除以2），那么对应小角度的旋转，都可以用这种方式近似，即构造形似$\mathbf{a}_k$的四元数，与原四元数进行四元数积。

根据上述理解，参考代码中的A矩阵可能应该修改为：（下图中的0起码也应该是1/2，而不应该直接是1，因为y_g对应为角速度，它的系数至少应该与b_g一致。而这里q_e是用来表征额外的坐标轴旋转，所以我觉得它应该是仅仅对应b_g和n_g的影响，不应该再带上y_g。）

we have the following process equation for the Kalman Filter:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + w = Ax(t) + \begin{bmatrix} -0.5n_g \\ n_{b_g} \\ n_{b_a} \end{bmatrix}$$

where:

0

- $A = \begin{bmatrix} -[y_g\times] & -0.5I_{3\times3} & 0_{3\times3} \\ 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} \\ 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} \end{bmatrix}$

For a vector $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$, $p = [p_1 \quad p_2 \quad p_3]'$, $[p\times]$ is the skew-symmetric matrix operator which is defined as:

$$[p\times] = \begin{bmatrix} 0 & -p_3 & p_2 \\ p_3 & 0 & -p_1 \\ -p_2 & p_1 & 0 \end{bmatrix}$$

修改之后，估计性能进一步提升一点点：

上：修改之后（改为0）；下：修改之前。

```
********************
EKF:
state MSE of EKFForQuat: [8.20806285e-06 1.19314634e-05 1.54675961e-05 3.35446693e-05], RMSE: 0.004157877814580931
average cpu time of EKFForQuat: 0.125 ms
********************
********************
EKF:
state MSE of EKFForQuat: [8.49794227e-06 1.41314794e-05 1.68787919e-05 3.50289810e-05], RMSE: 0.004316746301181078
average cpu time of EKFForQuat: 0.1359375 ms
********************
```

注：以上所有结果均基于参考代码，取$\mathbf{b} = [-0.019, 0.013, -0.006, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$，且不启用任何技巧。