ARI-HW_08

Matěj Pinkas

14. April 2024

1 Příklad: Model HIV - AIDS

- Zadání:

$$\begin{bmatrix} \dot{T} \\ \dot{T}^* \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,04167 & 0 & -0,0058 \\ 0,0217 & -0,24 & 0,0058 \\ 0 & 100 & -2,4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T \\ T^* \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5,2 \\ -5,2 \\ 0 \end{bmatrix} u_1$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ T^* \\ v \end{bmatrix}$$

T je počet zdravých buněk, T^* je počet infikovaných buňek a v je počet volných částic viru v krvi pacienta

Vstupem systému je dávkování $u_1 \in [0, 1]$ a výstupem je počet částic viru

- Ze zadání vytvořím z modelu stavové matice A, B, C, D:

$$A = \begin{bmatrix} -0,04167 & 0 & -0,0058 \\ 0,0217 & -0,24 & 0,0058 \\ 0 & 100 & -2,4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 5,2 \\ -5,2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

- Spočítám si přenos tohoto systému:

$$G(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} = \frac{-520s - 10,38}{s^3 + 2,682s^2 + 0,106s + 0,01242}$$

$$zero(G(s)) = -0,02$$

- Z dalších zadaných hodnot $OS_{\%}$ a T_s spočítám relativní tlumení a přirozenou frekvenci:

$$OS_{\%} = 10\% \qquad OS = 0,1 \qquad T_s = 100 \text{ [dní]}$$

$$\zeta = -\frac{\ln(OS)}{\sqrt{\pi^2 + \ln(OS)^2}} \approx 0,591155$$

$$\omega_n = \frac{-\ln\left(0,02\sqrt{1-\zeta^2}\right)}{T_s\zeta} = 0,0698$$

- Získám přenos z vypočtených hodnot:

$$H(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{0,0048737}{s^2 + 0,082540s + 0,0048737}$$

- Z přenosu získám charakteristický polynom:

$$c_H(s) = s^2 + 2\omega_n\zeta s + \omega_n^2 = s^2 + 0,082540s + 0,0048737$$

- Zavedení zpětné stavové vazby $\mathbf{K}$ a další integrační parametr K_I

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 & K_3 \end{bmatrix}$$

- Pro tyto konstanty vytvořím nové stavové matice z už stávajících A, B, C, D

$$\mathbf{A}_N = \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{BK} & \mathbf{B}K_I \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B}_N = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_N = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{D}_N = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

- Vypočtu si charakteristický polynom těchto nových stavových matic s parametry K_1, K_2, K_3 a K_I:

$$c_N(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_N) =$$
$$s^4 + s^3(5,2K_1 - 5,2K_2 + 2,68167) + s^2(13,728K_1 - 12,583844K_2 - 520K_3 + 0,1060088) +$$
$$s(2,9952K_1 + 0,01241932 - 520K_I - 10,3844K_3 - 0,2492256K_2) - 10,3844K_I$$

- Charakteristický polynom $c_H(s)$ rozšířím o další 2 póly, abych vyrovnal řád polynomu c_N

- Polynom rozšířím o pól v nule původního sytému, tedy v $-0,02$ a o druhý pól ve stabilní levé části co nejdále aby systém příliš neovlivnil, například -100

$$c_{HN}(s) = (s^2 + 0,082540s + 0,0048737)(s + 0,02)(s + 100) =$$
$$s^4 + 100,1s^3 + 10,26s^2 + 0,6525s + 0,009747$$

- Nyní stanovým polynomy c_N a c_{HN} sobě rovny, tím získám soustavu rovnic pro proměnné K_1, K_2. K_3, a K_I:

$$\begin{aligned}
100,1 &= 5,2K_1 - 5,2K_2 + 2,68167\\
10,26 &= 13,728K_1 - 12,583844K_2 - 520K_3 + 0,1060088\\
0,6525 &= 2,9952K_1 + 0,01241932 - 520K_I - 10,3844K_3 - 0,2492256K_2\\
0,009747 &= -10,3844K_I
\end{aligned}$$

- Po vyřešení soustavy rovnic získám:

$K_1 = -0,0043795 \quad K_2 = -18,738673 \quad K_3 = 0,43382775 \quad K_I = -0,0009386$

- Tyto získané konstatny dosadím do stavových matic A_N, B_N, C_N a D_N
- Z těchto matic spočítám přenos:

$$H_N(s) = \frac{0,4881s + 0,009747}{s^4 + 100,1s^3 + 10,26s^2 + 0,6525s + 0,009747}$$

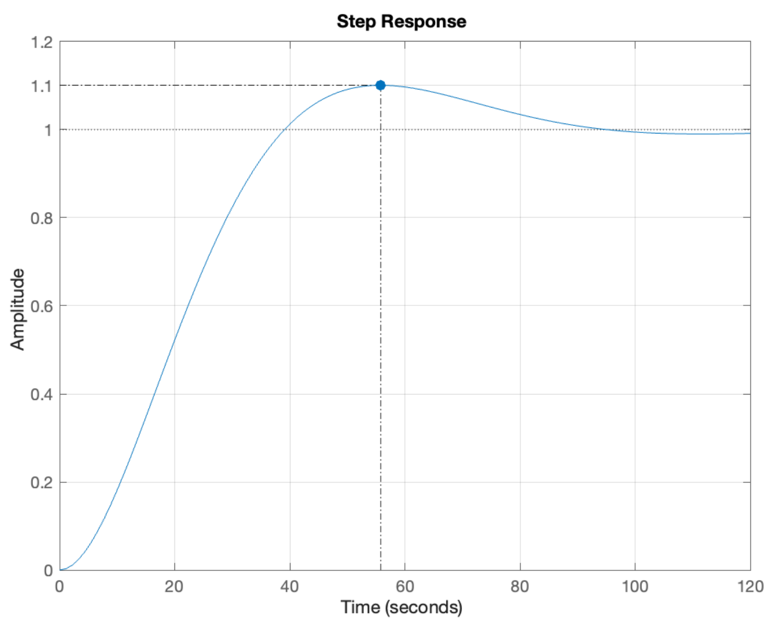

Figure 1: Odezva na jednotkový skok systému se stavovou zpětnou vazbou

- Z grafu je vidět, že systém dodržuje zadané parametry, maximální překmit 10% a dobu ustálení do 100 dní