ARI-HW_01

Matěj Pinkas

21. February 2024

Úkol 1

1. Identifikace dat

   - Vstupem systému je síla působící na něj (F). Vnitřní stavové proměnné jsou rychlost a úhlová rychlost (v a ω). Výsupem systému je měřená rychlost (v)

$$x = \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix}$$
$$u = F$$
$$y = v$$

2. Implementace modelu

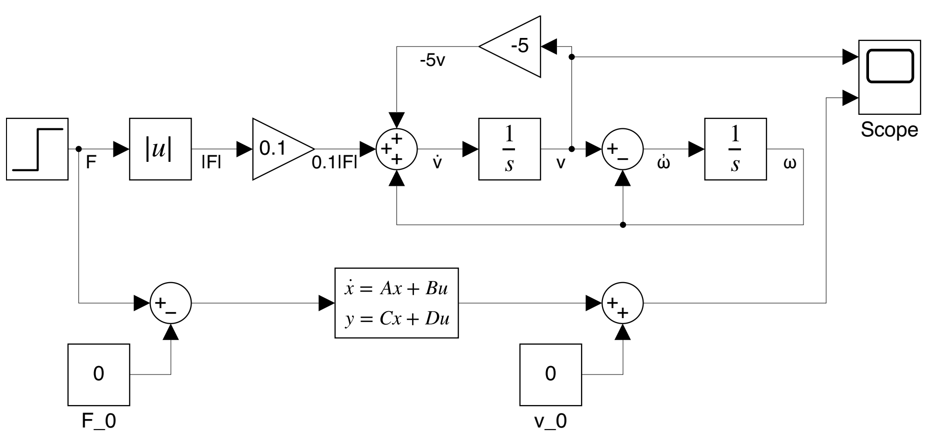


Figure 1: Matematický model 1

3. Linearizace modelu pro $v = 0$ m/s

   (a) Analitická podmínka

$$\dot{v} = -5 \cdot v + \omega + 0.1 \cdot |F|$$
$$\dot{\omega} = v - \omega$$

Řešení:

$$\dot{v} = 0$$
$$\dot{\omega} = 0$$
$$v = 0$$

$$0 = -5 \cdot 0 + \omega + 0.1 \cdot |F|$$
$$0 = 0 - \omega$$

$$\omega = 0$$
$$0 = -5 \cdot 0 + 0 + 0.1 \cdot |F|$$

$$|F| = 0$$

$$(v, \omega, F) = (0, 0, 0)$$

   (b) Linearizace v pracovním bodě

      i. Se statickou nelinearitou

         - Absolutní hodnota $|F|$ není diferencovatelná na okolí 0, z toho plyne že linearizovaný model s uváženou statickou nelinearitou není možný zkonstruovat

ii. Bez statické nelineartiy

- Po dosazení bodu $(v,\ \omega,\ F) = (0{,}0{,}0)$:

$$
\begin{aligned}
y &= v \\
\dot{x_1} &= -5 \cdot v + \omega + 0,1 \cdot |F| \\
\dot{x_2} &= v - \omega
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{x_1}}{\partial v} & \frac{\partial \dot{x_1}}{\partial \omega} \\ \frac{\partial \dot{x_2}}{\partial v} & \frac{\partial \dot{x_2}}{\partial \omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \\
B &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{x_1}}{\partial F} \\ \frac{\partial \dot{x_2}}{\partial F} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,1 \\ 0 \end{bmatrix} \\
C &= \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial \omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \\
D &= \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial F} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Delta \dot{x}(t) &= A \cdot \Delta x(t) + B \cdot \Delta u(t) \\
\Delta y(t) &= C \dot{\Delta} x(t) + D \cdot \Delta u(t)
\end{aligned}
$$

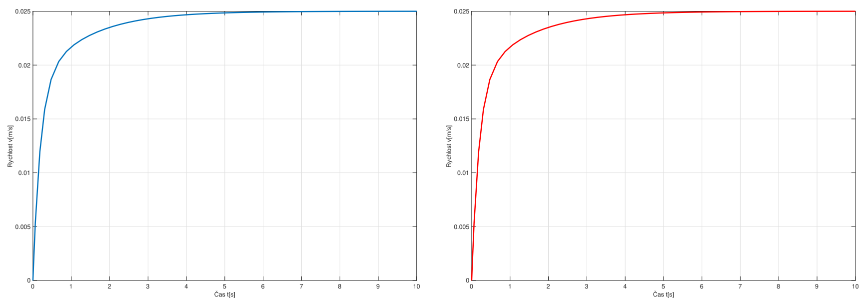
$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \dot{\Delta v} \\ \dot{\Delta \omega} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta v \\ \Delta \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta F \end{bmatrix} \\
\Delta y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta v \\ \Delta \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta F \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

(c) Srovnání linearizovaného a původního modelu

i. Se statickou nelinearitou

- Model nelze linearizovat na okolí pracovního bodu viz cv. 3(b)i, z toho důvodu není možné porovnávat lineární a nelineární model

ii. Bez statické nelineartiy



(a) Odezva lineárního modelu (b) Odezva nelineárního modelu

Figure 2: Srovnání odezvy matematického modelu s nulovou počáteční podmínkou

4. Linearizace modelu pro $v = 10$ m/s

   (a) Analitická podmínka

   - Postup výpočtu je stejný jako v 3a, ale s $v = 10$ m/s

$$|F| = 400 \Rightarrow F = \pm 400$$
$$(v, \omega, F) = (10, 10, -400) \qquad (v, \omega, F) = (10, 10, 400)$$

   (b) Linearizace v pracovním bodě

   i. Se statickou nelinearitou

   - Zde je možné systém linearizovat, protože pracovní bod je velmi vzdálen nedefinovanému bodu derivace v 0
   - Postup výpočtu je stejný jako v 3(b)ii, zde je dosazen bod (10,10,±400)

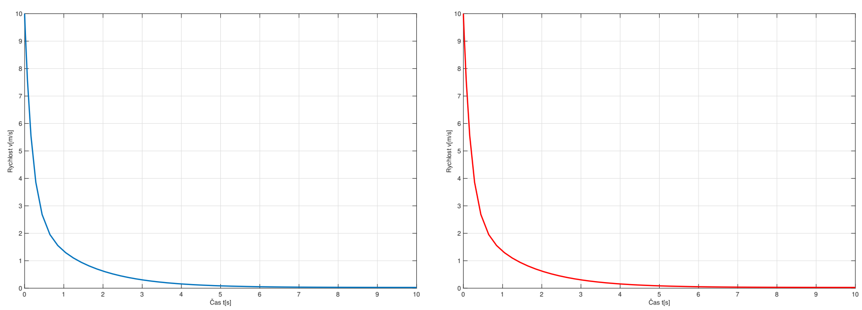
$$\begin{bmatrix} \dot{\Delta v} \\ \dot{\Delta \omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta v \\ \Delta \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot [\Delta F]$$
$$\Delta y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta v \\ \Delta \omega \end{bmatrix} + [0] \cdot [\Delta F]$$

ii. Bez statické nelineartiy
  - Postup výpočtu je stejný jako v 3(b)ii, zde je dosazen bod (10,10,±400)

$$\begin{bmatrix}\dot{\Delta v}\\ \dot{\Delta\omega}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-5 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\Delta v\\ \Delta\omega\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0,1\\ 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\Delta F\end{bmatrix}$$

$$\Delta y = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\Delta v\\ \Delta\omega\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\Delta F\end{bmatrix}$$

(c) Srovnání linearizovaného a původního modelu
  - Výstupní charakteristika linearizovaného modelu je téměř stejná jako původního modelu a je tedy vhodný pro použití



(a) Odezva lineárního modelu (b) Odezva nelineárního modelu

Figure 3: Srovnání odezvy matematického modelu pro počáteční bod (10,10,±400)

Úkol 2

1. Identifikace dat

   - Vstupem systému je síla působící na něj (F). Vnitřní stavové proměnné jsou rychlost a úhlová rychlost (v a ω). Výsupem systému je měřená rychlost (v)

$$x = \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix}$$
$$u = F$$
$$y = v$$

2. Implementace modelu

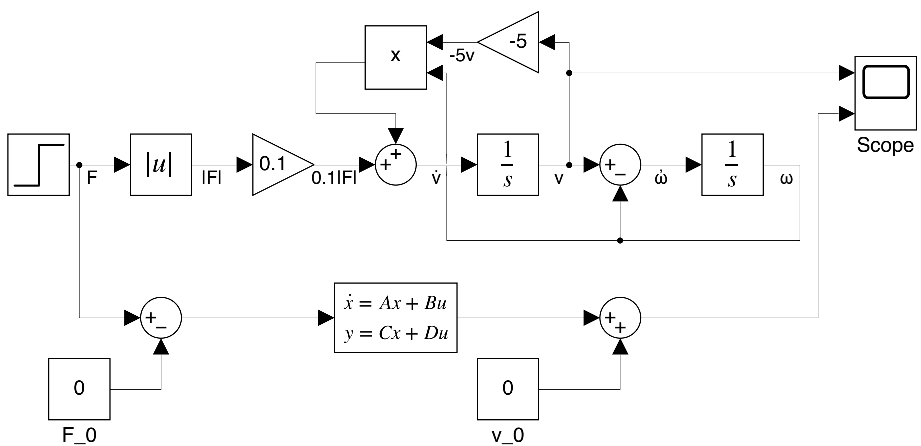


Figure 4: Matematický model 2

3. Linearizace modelu pro $v = 0$ m/s
   (a) Analitická podmínka

$$\dot{v} = -5 \cdot v \cdot \omega + 0.1 \cdot |F|$$
$$\dot{\omega} = v - \omega$$

Řešení:

$$\dot{v} = 0$$
$$\dot{\omega} = 0$$
$$v = 0$$

$$0 = -5 \cdot 0 \cdot \omega + 0.1 \cdot |F|$$
$$0 = 0 - \omega$$

$$\omega = 0$$
$$0 = -5 \cdot 0 \cdot 0 + 0.1 \cdot |F|$$

$$|F| = 0$$

$$(v, \omega, F) = (0, 0, 0)$$

   (b) Linearizace v pracovním bodě
      i. Se statickou nelinearitou
         - Absolutní hodnota $|F|$ není diferencovatelná na okolí 0, z toho plyne že linearizovaný model s uváženou statickou nelinearitou není možný zkonstruovat

ii. Bez statické nelineartiy

- Po dosazení bodu $(v,\ \omega,\ F) = (0{,}0{,}0)$:

$$
\begin{aligned}
y &= v \\
\dot{x_1} &= -5 \cdot v \cdot \omega + 0,1 \cdot |F| \\
\dot{x_2} &= v - \omega
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{x_1}}{\partial v} & \frac{\partial \dot{x_1}}{\partial \omega} \\ \frac{\partial \dot{x_2}}{\partial v} & \frac{\partial \dot{x_2}}{\partial \omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5\omega & -5v \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \\
B &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{x_1}}{\partial F} \\ \frac{\partial \dot{x_2}}{\partial F} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,1 \\ 0 \end{bmatrix} \\
C &= \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial \omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \\
D &= \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial F} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Delta\dot{x}(t) &= A \cdot \Delta x(t) + B \cdot \Delta u(t) \\
\Delta y(t) &= C\dot{\Delta} x(t) + D \cdot \Delta u(t)
\end{aligned}
$$

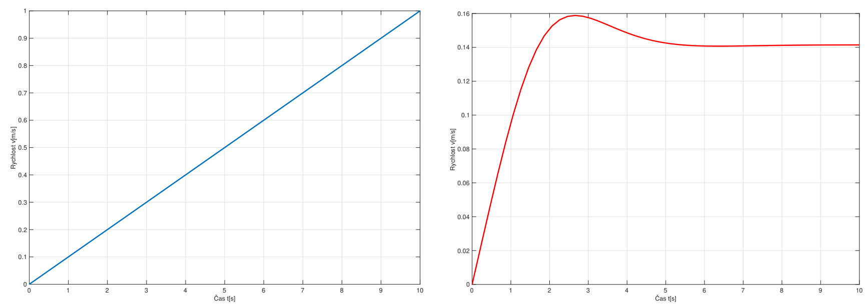
$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \dot{\Delta v} \\ \dot{\Delta \omega} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta v \\ \Delta\omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta F \end{bmatrix} \\
\Delta y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta v \\ \Delta\omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta F \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

(c) Srovnání linearizovaného a původního modelu

i. Se statickou nelinearitou

- Model nelze linearizovat na okolí pracovního bodu viz cv. 3(b)i, z toho důvodu není možné porovnávat lineární a nelineární model

ii. Bez statické nelineartiy



(a) Odezva lineárního modelu (b) Odezva nelineárního modelu

Figure 5: Srovnání odezvy matematického modelu s nulovou počáteční podmínkou

4. Linearizace modelu pro $v = 10$ m/s

   (a) Analitická podmínka

   - Postup výpočtu je stejný jako v 3a, ale s $v = 10$ m/s

$$|F| = 5000 \Rightarrow F = \pm 5000$$
$$(v, \omega, F) = (10, 10, -5000) \qquad (v, \omega, F) = (10, 10, 5000)$$

   (b) Linearizace v pracovním bodě

      i. Se statickou nelinearitou

      - Zde je možné systém linearizovat, protože pracovní bod je velmi vzdálen nedefinovanému bodu derivace v 0
      - Protože jsou zde dva pracovní body budou zde dvě možné linearizace modelu dle každého z pracovních bodů
      - Postup výpočtu je stejný jako v 3(b)ii, zde je dosazen bod (10,10,5000)

$$\begin{bmatrix} \dot{\Delta v} \\ \dot{\Delta \omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -50 & -50 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta v \\ \Delta \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta F \end{bmatrix}$$
$$\Delta y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta v \\ \Delta \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta F \end{bmatrix}$$

- Postup výpočtu je stejný jako v 3(b)ii, zde je dosazen bod (10,10,-5000)

$$\begin{bmatrix}\dot{\Delta v}\\ \dot{\Delta \omega}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-50 & -50\\ 1 & -1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}\Delta v\\ \Delta \omega\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-0,1\\ 0\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}\Delta F\end{bmatrix}$$
$$\Delta y = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}\Delta v\\ \Delta \omega\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}\Delta F\end{bmatrix}$$

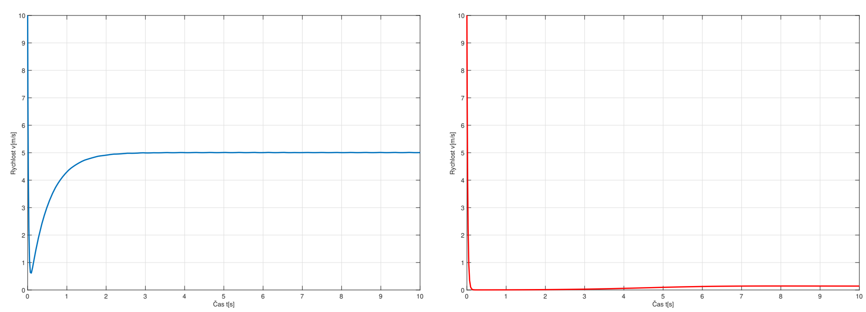
ii. Bez statické nelineartiy

- Postup výpočtu je stejný jako v 3(b)ii, zde je dosazen bod (10,10,±5000)

$$\begin{bmatrix}\dot{\Delta v}\\ \dot{\Delta \omega}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-50 & -50\\ 1 & -1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}\Delta v\\ \Delta \omega\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0,1\\ 0\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}\Delta F\end{bmatrix}$$
$$\Delta y = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}\Delta v\\ \Delta \omega\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}\Delta F\end{bmatrix}$$

(c) Srovnání linearizovaného a původního modelu

- Výstupní charakteristika linearizovaného modelu je rozdílná oproti původnímu modelu a není tedy příliš vhodná pro použití



(a) Odezva lineárního modelu (b) Odezva nelineárního modelu

Figure 6: Srovnání odezvy matematického modelu pro počáteční bod (10,10,±5000)