ARI-HW_00 - Opakování SSI

Matěj Pinkas

28. February 2024

Úkol 1

1. Systém je stabilní když všechny jeho póly leží v záporné polorovině, tedy reálné části pólů jsou záporné.

$$K = \lim_{s \to 0} G(s) = \lim_{s \to 0} \frac{(-0,2s+5)}{(s+3)(s+2)(s+1)} = \frac{5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{5}{6}$$

2. Ustálená hodnota odezvy na vstup $u(t) = 5$ Věta o koncové hodnotě

$$W(s) = \frac{1}{s}G(s) \to W(s) = \lim_{s \to 0} 5s\frac{1}{s}G(s) = \lim_{s \to 0} \frac{-s+25}{(s+3)(s+2)(s+1)} = \frac{25}{6}$$

3. ustálená hodnota na dirakův impuls Věta o koncové hodnotě

$$W(s) = \frac{1}{s}G(s) \to W(s) = \lim_{s \to 0} sG(s) = \lim_{s \to 0} \frac{s(-0,2s+5}{(s+3)(s+2)(s+1)} = 0$$

Úkol 2

1. Řešení soustavy rovnic

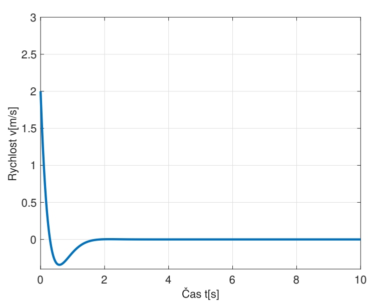
$$sX_1(s) - x_1(s) = -6X_1(s) + 26X_2(s)$$
$$sX_2(s) = -\frac{1}{2}X_1(s)$$

$$sX_1(s) + 6X_1(s) + 26(\frac{X_1}{2s}) = 2$$
$$X_1(s)(s + 6 + \frac{13}{s}) = 2 \rightarrow X_1(s) = \frac{2s}{s^2 + 6s + 13} = 2\frac{s+3}{(s+3)^2+4} - 3\frac{2}{(s+3)^2+4}$$

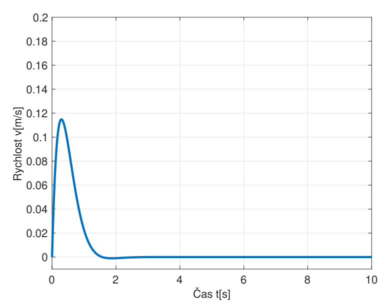
$$x_1(t) = \mathscr{L}^{-1}\{X_1(s)\} = 2e^{-3t}cos(2t)\mathbb{1}(t) - 3e^{-3t}sin(2t)\mathbb{1}(t)$$

$$X_2(s) = -\frac{1}{2s}\frac{2s}{s^2+6s+13} = -\frac{1}{2}\frac{2}{s^2+6s+13}$$

$$x_2(t) = \mathscr{L}^{-1}\{X_2(s)\} = -\frac{1}{2}e^{-3t}sin(2t)\mathbb{1}(t)$$



(a) Časová odezva x_1



(b) Časová odezva x_2

Úkol 3

$$\dot{x_1} = x_2$$
$$\dot{x_2} = -2sin(x_1) - \frac{1}{10}x_2 + u$$
$$y = x_1$$

1. Rovnovážný pracovní bod P systému pro $u_p(t)$=2

$$0 = x_2$$
$$0 = -2sin(x_1) - \frac{1}{10}x_2 + u$$

$$P = \begin{bmatrix} \frac{\pi}{2} + 2k\pi & 0 & \frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{bmatrix}, k \in \mathbb{Z}$$

2. Linearizece modelu v pracovním bodě P

$$\Delta\dot{x}(t) = A \cdot \Delta x(t) + B \cdot \Delta u(t)$$
$$\Delta y(t) = C\dot{\Delta} x(t) + D \cdot \Delta u(t)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2cos(x_1) & -\frac{1}{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{10} \end{bmatrix}$$
$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$
$$D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

3. Model systému

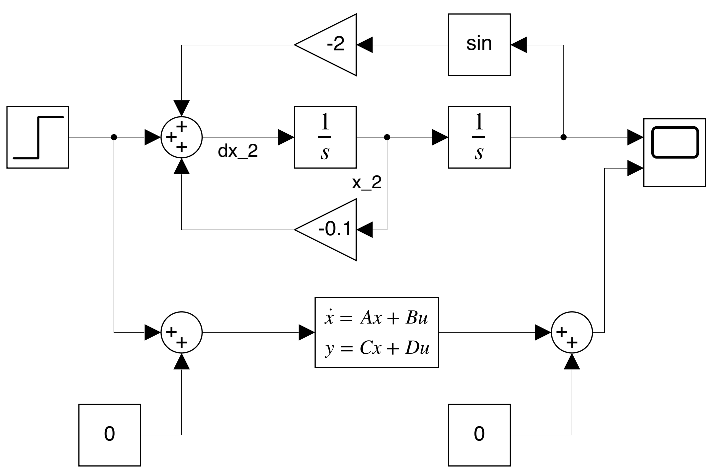
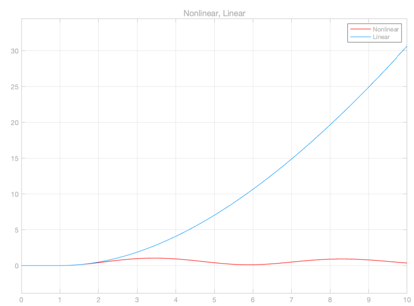
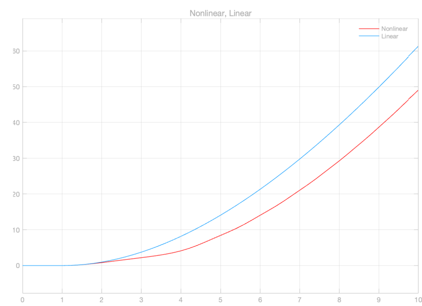


Figure 2: Model 1



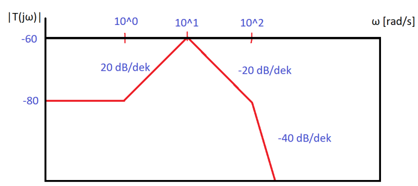
(a) Odezva na skok $u = 1$



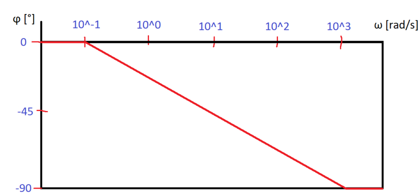
(b) Odezva na skok $u = 2.001$

Úkol 4

1. Asymptotická frekvenční charakteristika



(a) Amplitudová frekvenční charakteristika



(b) Fázová frekvenční charakteristika

2. Sestavení rovnice

$$G(s) = -\frac{(1 - j\frac{\omega}{10^{-1}})(1 + j\frac{\omega}{10^{1}})}{(1 + j\frac{\omega}{10^{-3}})(1 + j\frac{\omega}{10^{3}})} = \frac{(s - 10^{-1})(s + 10)}{(s + 10^{-3})(s + 10^{3})}$$

Úkol 5

$$H(s) = C(sI - A)^{-1}B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -4 & 2 & 0 & 0 \\ -6 & 4 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 2 & -2 \\ -9 & 9 & 2 & -3 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0,5 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{4(s+2)(s-2)(s-3)}{(s+2)^2(s-2)^2}$$

Úkol 6

Systém je stabilní pokud jeho póly přenosu mají zápornou reálnou část

$$det(sI - A) = \begin{vmatrix} s-1 & 0 & 0 \\ -2 & s+2 & 2 \\ -1 & -2 & s \end{vmatrix} = (s-1)(s+2)s + 2(s-1)2 =$$
$$= s^3 + s^2 + 2s - 4 = (s-1)(s+1 \pm i\sqrt{3})$$

Úkol 7

1. Vhodně zvolená vzorkovací perioda $T_s = 0.1$s

   $G(z) = \frac{0.05642z - 0:07695}{z^2 - 1.401z + 0.4493}$

2. Nevhodně zvolená vzorkovací perioda $T_s = 3$s

   $G(z) = \frac{-0.3954z - 0.01185}{z^2 - 0.04979z + 3.775e - 11}$

Úkol 8

1. Stabilní (-$\frac{2}{5}$, -1, -3), statický, nekmitavý
2. Nestabilní ($\frac{-1 \pm \sqrt{17}}{4}$, statický, nekmitavý
3. Nestabilní (0), astatický, nekmitavý
4. Nestabilní ($\pm\sqrt{2}$), statický, nekmitavý

Úkol 9

1. $H = G_1 + G_2 = \frac{s^2+01}{s^2+s}$
2. $H = G_1 \cdot G_2 = \frac{s-1}{s^2+s}$
3. $H = \frac{y(s)}{r(s)}; G = G_1 \cdot G_2$
   $y(s) = G(r(s) - y(s)) \rightarrow G(y(s)) + y(s) = G(r(s)) \rightarrow$
   $y(s)(1+G) = Gr(s) \rightarrow H = \frac{y(s)}{r(s)} = \frac{G}{1+G} = \frac{\frac{s-1}{s^2+s}}{1+\frac{s-1}{s^2+s}} = \frac{s-1}{s^2+2s-1}$
4. $H = \frac{y(s)}{r(s)}$
   $y(s) = G_1(r(s) - y(s)G_2) \rightarrow G_1G_2y(s) + y(s) = G_1r(s) \rightarrow$
   $y(s)(1 + G_1G_2) = G_1r(s) \rightarrow H = \frac{y(s)}{r(s)} = \frac{G_1}{1+G_1G_2} = \frac{\frac{s-1}{s+1}}{1+\frac{s-1}{s+1}\frac{1}{s}} = \frac{s^2-s}{s^2+2s-1}$

Úkol 10

1. Přenos systému

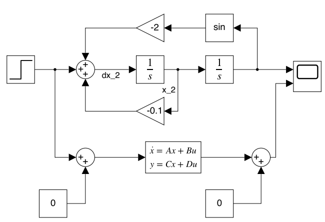
$$3Y(z) - Y(z)z^{-1} + \frac{1}{2}Y(z)z^{-2} = U(z)z^{-1} - U(z)z^{-2}$$
$$Y(z)(3 - z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2} = U(z)(z^{-1} - z^{-2})$$
$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z^{-1} - z^{-2}}{3 - z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}}$$

2. Stabilita systému

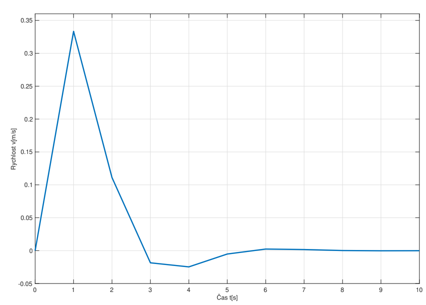
$$3z^2 - z + \frac{1}{2} = 0 \rightarrow$$
$$\frac{1 \pm \sqrt{-5}}{6} = \frac{1}{6} \pm \frac{\sqrt{-5}}{6}i$$

Póly systému jsou v jednotokové kružnici stability, takže systém je stabilní

3. Model a odezva systému



(a) Model systému



(b) Odezva systému

Úkol 11

1. a-f; b-d; c-e

2. Impulz $h(t)$; Skok $w(t)$
$w(t) = \int_{-\inf}^{t} h(t)dt$
$h(t) = \frac{dw(t)}{dt}$

Úkol 12

1. a-f; b-d; c-e

2. Pro fázi -45°má systém zesílení -3 dB