ARI-HW_09

Matěj Pinkas

20. April 2024

1 Příklad

1.1 Zadání

- Z datumu narození 10.1.2003 si zvolím konstanty: $d = 1$; $m = 1$; $r = 2$
- Konstanty dosadím do zadané rovnice:

$$\begin{aligned}
(dr + (d+r)s + s^2)x(s) + (d+s)y(s) &= (d^2 + mrd) + (m(d+r) + dr)s + (d+m+r-1)s^2 + s^3 \\
(2 + (1+2)s + s^2)x(s) + (1+s)y(s) &= (1^2 + 2) + (1(1+2) + 2)s + (1+1+2-1)s^2 + s^3 \\
(2 + 3s + s^2)x(s) + (1+s)y(s) &= 3 + 5s + 3s^2 + s^3
\end{aligned}$$

- Z upravené rovnice získám polynomy:

$$\begin{aligned}
a(s) &= s^2 + 3s + 2 \\
b(s) &= s + 1 \\
c(s) &= s^3 + 3s^2 + 5s + 3
\end{aligned}$$

- Obecně si za x(s) a y(s) můžu zvolit polynom prvního stupně a dosadit to rovnice:

$$\begin{gathered}
x(s) = x_0 + sx_1 \\
y(s) = y_0 + sy_1 \\
(2 + 3s + s^2)(x_0 + sx_1) + (1+s)(y_0 + sy_1) = 3 + 5s + 3s^2 + s^3
\end{gathered}$$

- Z výsledného polynomu vytvořím Sylvestrovu matici:

$$\begin{bmatrix} x_0 & y_0 & x_1 & y_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

- Vytvořím si soustavu rovnic ze Sylvestrovy matice a vyřeším pro neznáme x_0, y_0, x_1, y_1:

$$\begin{aligned} a_0x_0 + b_0y_0 &= c_0 \\ a_1x_0 + b_1y_0 + a_0x_1 + b_0y_1 &= c_1 \\ a_2x_0 + b_2y_2 + a_1x_1 + b_1y_1 &= c_2 \\ a_2x_1 + b_2y_1 &= c_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x_0 + 1y_0 &= 3 \\ 3x_0 + 1y_0 + 2x_1 + 1y_1 &= 5 \\ 1x_0 + 0y_2 + 3x_1 + 1y_1 &= 3 \\ 1x_1 + 0y_1 &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x_0 + y_0 &= 3 \\ 3x_0 + y_0 + 2x_1 + y_1 &= 5 \\ x_0 + 3x_1 + y_1 &= 3 \\ x_1 &= 1 \end{aligned}$$

$$x_0 = 0 \qquad y_0 = 3 \qquad x_1 = 1 \qquad y_1 = 0$$

- Získané x_0, y_0, x_1, y_1 dosadím do zvolených $x(s)$ a $y(s)$:

$$\begin{aligned} x(s) &= x_0 + sx_1 = 0 + 1s = s \\ y(s) &= y_0 + sy_1 = 3 + 0s = 3 \end{aligned}$$

- Metodou redukce pokračuji:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a(s) & 1 & 0 \\ b(s) & 0 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} s^2+3s+2 & 1 & 0 \\ s+1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (s+2)(s+1) & 1 & 0 \\ s+1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -(s+2) \\ s+1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} s+1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -s-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g(s) & p(s) & q(s) \\ 0 & v(s) & w(s) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\bar{c}(s) = \frac{c(s)}{g(s)} = \frac{s^3+3s^2+5s+3}{s+1} = \frac{(s+1)(s^2+2s+3)}{s+1} = s^2+2s+3$$

$$x(s) = p(s)\overline{c}(s) = 0$$
$$y(s) = q(s)\overline{c}(s) = s^2 + 2s + 3$$

$$x(s) = p(s)\overline{c}(s) + v(s)t(s) = 0 + t(s)$$
$$y(s) = q(s)\overline{c}(s) + w(s)t(s) = s^2 + 2s + 3 - (s+2)t(s)$$

$$\begin{aligned} t(s) &= 0 \Rightarrow \quad & x(s) &= 0 \quad & y(s) &= s^2 + 2s + 3 \\ t(s) &= s \Rightarrow \quad & x(s) &= s \quad & y(s) &= 3 \end{aligned}$$

1.2 Řešení minimálního stupně x

- Po dosazení t(s)=0 do funce:

$$x(s) = 0 + t(s) \Rightarrow x(s) = 0$$

získám očividně nejnižší stupeň v x, zbytkem partikulárního řešení je:

$$y(s) = s^2 + 2s + 3$$

1.3 Řešení minimálního stupně y

- Nejdříve zjistím jakého stupně bude $\overline{a}$

$$\begin{aligned} deg_y &= deg(y(s)) = deg(3) = 0 \\ \overline{a}(s) &= \frac{a(s)}{g(s)} = \frac{s^2 + 3s + 2}{s+1} = \frac{(s+2)(s+1)}{s+1} = s + 2 \\ deg_{\overline{a}} &= deg(\overline{a}(s)) = deg(s+2) = 1 \end{aligned}$$

- nyní díky podmínce, že $deg(y) < deg(\overline{a})$
- opravdu tedy mohu dosadit t(s)=s a získám řešení:

$$x(s) = s$$

$$y(s) = 3$$

$deg(y) = 0 < deg(\overline{a}) = 1 \Rightarrow$ tato podmínka platí, tak mohu uznat tento polynom za minimální

1.4 Funkce axbyc()

- Pomocí funkce $axbyc()$ z toolboxu PolX získám minimální hodnotu v x a y:

$$axbyc(a(s), b(s), c(s), 'minx') \Rightarrow \quad x(s) = 0 \quad y(s) = s^2 + 2s + 3$$
$$axbyc(a(s), b(s), c(s), 'miny') \Rightarrow \quad x(s) = s \quad y(s) = 3$$

ještě získám celkové minimální polynomy x a y

$$axbyc(a(s), b(s), c(s), 'syl') \Rightarrow \quad x(s) = s + 1 \quad y(s) = 1 - s$$

2 Příklad

Zadaný systém:

$$\frac{b(s)}{a(s)} = \frac{s+2}{s(s-1)}$$

2.1

- Nejdříve zjistím omezení na stupeň polynomu c(s):

$$deg(a(s)) = 2$$
$$deg(c(s)) \geq 2deg(a(s)) - 1 = 3$$
$$\Rightarrow deg(c(s)) \geq 3$$

- Nyní charakteristický polynom napíšu ze zadání a přidám pól pro vykrácení nuly:

$$c(s) = (s + 2 + j)(s + 2 - j)$$
$$c(s) = (s + 2 + j)(s + 2 - j)(s + 2)$$

- c(s) stále splňuje podmínku stupně nižší rovno 3
- Obecné polynomy obecného regulátoru tedy vypadají takto:

$$c(s) = a(s)p(s) + b(s)q(s)$$
$$c(s) = f(s)t(s) + b(s)r(s)$$

- Po nalezení partikulárního řešení pomocí funkce $axbyc()$ získám polynomy:

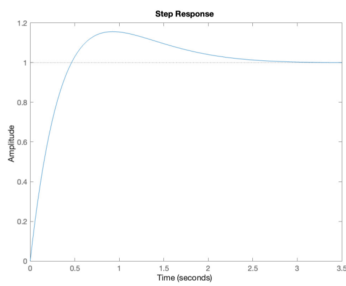
$$p(s) = 2 + s$$
$$q(s) = 5 + 5s$$
$$r(s) = 5 + 4s$$

2.2

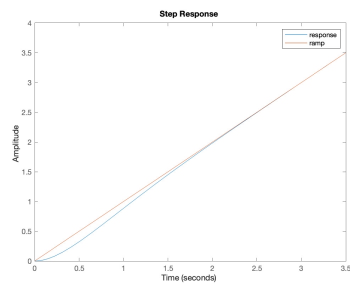
- Přenos celé soustavy T(s) tedy je:

$$T(s) = \frac{b(s)r(s)}{a(s)p(s)+b(s)q(s)} = \frac{(4s+5)(s+2)}{(5s+5)(s+2)+s(s-1)(s+2)} = \frac{4s^2+13s+10}{s^3+6s^2+13s+10}$$

2.3



(a) Odezva T(s) na skok



(b) Odezva T(s) na rampu