2.4. Решение задач параметрического программирования

В общем случае, к задачам параметрического программирования относятся задачи математического программирования, в которых компоненты математических моделей зависят от некого фактора (параметра).

Указанный фактор, в свою очередь, изменяется в соответствии с некоторым законом, однозначно определяемым математически. Наиболее целесообразно исследовать влияние на оптимальное решение задачи линейного программирования (ЗЛП) параметрических изменений компонентов векторов коэффициентов функции цели или свободных членов системы ограничений. Существуют задачи, в которых от параметра зависит как коэффициенты функции цели, так и свободные члены системы ограничений [3, 7].

Элементы матрицы системы ограничений в задачах экономико-производственной направленности, по сути, являются технологическими коэффициентами (нормами выхода), поэтому в наименьшей степени зависят от параметров.

Общая стратегия при решении задач параметрического программирования такова.

1. Полагают значение параметра равным некоторому неизвестному числу t_0, принадлежащему интервалу изменения параметра t, определяемого в виде границ $[\alpha, \beta]$, как правило, это α.
2. Выполняют решение ЗЛП в общем виде, с неизвестной, входящей в выражение для расчёта симплекс-разностей или (и) в компоненты столбца местоположения координат текущей точки решения A_0. Находят оптимальный план X^* или устанавливают неразрешимость полученной задачи линейного программирования в заданной постановке.
3. По строке симплекс-разностей или (и) элементам вектора A_0, соответствующим оптимальному решению, полученному в п.2 в ходе решения ЗЛП, составляют систему неравенств.
4. В результате решения системы неравенств определяют некое значение параметра t, удовлетворяющее этой системе. Это значение параметра t полагают равным верхней границей текущего интервала.
5. Если значение параметра, рассчитанное в ходе выполнения п. 4 настоящего алгоритма, превышает значение, заданное в условии, то задачу считают решённой.
6. В противном случае, необходимо определить границу очередного интервала, находящуюся правее значения параметра, определённого

в п.4. Производится “дорешивание” ЗЛП с новым значением параметра t в п.2.

7. Итоговое решение представляется совокупностью интервалов, на каждом из которых представлены свои координаты оптимальных точек совокупно с выражением для расчёта функции цели на заданном интервале

2.4.1. Решение задачи линейного программирования при параметрических изменениях вектора ограничений [3]

Пусть элементы вектора ограничений находятся в линейной зависимости от изменения параметра t, то есть

$$b_i^{\nabla} = b_i + tp_i,\ i = \overline{i,m}, \qquad t \in [\alpha, \beta], \tag{2.52}$$

где b_i – значение i-го элемента вектора ограничений в отсутствии параметра; p_i – коэффициент параметрического изменения по i-му ограничению; t – параметр.

В этом случае задача линейного программирования может быть сформулирована в виде

$$\max F = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n,$$
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1 + tp_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2 + tp_2, \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m + tp_m, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,n},\ t \in [\alpha, \beta]. \end{cases} \tag{2.53}$$

Если зафиксировать произвольное значение параметра $t = t_0$, то задача (2.53) сведётся к обычной ЗЛП и может быть решена любым пригодным симплекс-методом. Как известно:

$$X^* = A^{-1} \times B, \tag{2.54}$$

где X^* – оптимальный план; A^{-1} – компоненты симплекс-таблицы для небазисных переменных; B – вектор свободных членов системы ограничений. Причём равенство (2.54) является справедливым и на протяжении всего решения

Выражение (2.54) с учётом (2.52) примет вид

$$X^{\nabla *} = A^{-1} \cdot B^{\nabla} = A^{-1} \cdot B + t_0 A^{-1} \cdot P,$$

где $t_0 \in [\alpha, \beta]$ – фиксированное значение параметра t, $P^T = \{p_1, p_2, \dots, p_m\}$ – вектор коэффициентов изменения параметра. Введя обозначение

$$\widetilde{B} = A^{-1} \cdot B \text{ и } \widetilde{P} = A^{-1} \cdot P, \tag{2.55}$$

запишем

$$X^{\nabla *} = \widetilde{B} + t_0 \cdot \widetilde{P}. \tag{2.56}$$

Таким образом, при фиксированном $t = t_0$, столбец A_0 может быть представлен тремя столбцами $\widetilde{B}$, $\widetilde{P}$ и $X^{\nabla *}(A_0^{\nabla})$, что позволит осуществить “надзор” за преобразованиями величин $\widetilde{b}_i$ и $\widetilde{p}_i$ в ходе итераций.

Компоненты вектора $X^{\nabla *}$ должны удовлетворять ограничению неотрицательности, то есть

$$\widetilde{b}_i + t \cdot \widetilde{p}_i \geq 0, \;\; i = \overline{i,m}, \qquad t \in [\alpha, \beta]. \tag{2.57}$$

Безусловно, выполнение (2.57) означало бы, что план $X^{\nabla *}$ является оптимальным решением задачи параметрического программирования вида (2.53) для любых $t \in [\alpha, \beta]$.

Однако, в реальности встаёт задача последовательного деления заданного интервала изменения параметра t $[\alpha, \beta]$ на подынтервалы $[\alpha_r, \beta_r] \subset [\alpha, \beta]$, внутри каждого из которых неукоснительно выполняется условие неотрицательности $X^{\nabla *}$.

При этом, на каждом подынтервале $[\alpha_r, \beta_r] \subset [\alpha, \beta]$ для любого $t_0 \in [\alpha_r, \beta_r]$ оптимум целевой функции будет достигаться в вершинах многогранников областей допустимых стратегий (планов) задачи, и, каждому подынтервалу изменения параметра Δt_r, будет соответствует свой оптимальный план.

Поэтому представляет интерес определение границ изменения параметра t, для которого вектор $X^{\nabla *}$ будет являться оптимальным планом.

В оптимуме параметрической задачи обязательно должен будет присутствовать $\widetilde{p}_i \neq 0$, иначе параметрическая задача вырождается – пропадает зависимость от параметра.

Сформулируем правила для определения границ интервала изменения параметров, которые есть следствие решения системы неравенств (2.57): для нижней границы

$$\alpha_{or} = \begin{cases} \max\limits_{\tilde{p}_i > 0} \left\{ -\dfrac{\tilde{b}_i}{\tilde{p}_i} \right\}, & \exists i : \tilde{p}_i > 0, \\ -\infty, & \forall i : \tilde{p}_i \le 0 \end{cases} \qquad (2.58)$$

для верхней границы

$$\beta_{or} = \begin{cases} \min\limits_{\tilde{p}_i < 0} \left\{ -\dfrac{\tilde{b}_i}{\tilde{p}_i} \right\}, & \exists i : \tilde{p}_i < 0, \\ \infty, & \forall i : \tilde{p}_i \ge 0. \end{cases} \qquad (2.59)$$

Индексы *or* в формулах (2.57) и (2.58) обозначают: о – оптимальное значение, *r* – номер интервала разбиения. В пределах этих границ решение устойчиво, то есть, сохраняется неизменным состав векторов базиса.

Алгоритм решения задачи параметрического программирования при параметрическом изменении элементов вектора свободных членов

1. Зафиксировав значение параметра $t = t_0$, решить ЗЛП симплекс-методом.

Замечание. Если имеется решение непараметрической ЗЛП, то это соответствует случаю, когда $t = 0$. В этом случае, решение ЗЛП для t, отличного от нуля, можно получить, используя матричные операции (2.54) и (2.55), избежав, тем самым, утомительных вычислений. **Важно**: так как обратная матрица A^{-1} зависит от выбранных базисных векторов, а состав базиса, в свою очередь – от значения параметра t, использование такого подхода требует осмысления и вдумчивости!

Задача может быть разрешима, а может быть, и нет [3]. В последнем случае неразрешимость может иметь двоякую природу.

Во-первых, целевая функция задачи не ограничена на области допустимых стратегий. В этой ситуации задача не решаема принципиально ни при каких значениях t.

Во-вторых, не обеспечивается положительность базисного решения (содержимого столбца A_0) при данном значении параметра t, что, как правило, говорит о несовместности системы ограничений. Поэтому надо найти такой диапазон изменения параметра t, в котором система ограничений совместна.

В последнем случае отметим, что нарушения условия неотрицательности и есть причина несовместности ограничений.

2. Определить, используя формулы (2.58) и (2.59), границы изменения параметра t $[\alpha_{or}, \beta_{or}]$, r – номер интервала.

3. Если верхняя граница β_{or} интервала выйдет за пределы или окажется равной β, то есть, $\beta_{or} \geq \beta$, то задача решена.

4. В противном случае, необходимо отыскать направляющую строку по правилу

$$\min_{\widetilde{p}_i < 0} \left\{ -\frac{\widetilde{b}_i}{\widetilde{p}_i} \right\} \Rightarrow i^* . \tag{2.60}$$

и выполнить несколько итераций двойственного симплекс-метода.

5. Вернуться к п.2 настоящего алгоритма.

В результате расчётов мы будем иметь ряд интервалов $[\alpha, \beta_1]$, $[\beta_1, \beta_2]$, … , $[\beta_{r-1}, \beta]$ на каждом из которых будем иметь свой оптимальный план решения. Поэтому целесообразно полагать в начале расчётов $t = t_0 = \alpha$.

Пример. Пусть модель параметрической ЗЛП имеет вид:

$$F(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \leq 10 + 8t, \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 6 + 4t, \\ 1x_1 + 1x_2 \leq 4 + 2t, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0,\ t \in \left[-\dfrac{1}{2}; 2 \right]. \end{cases}$$

Из условия задачи следует, согласно (2.53), что

$$B = \begin{bmatrix} 10 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix},\ \alpha = -\frac{1}{2},\ \beta = 2.$$

Пункт № 1 алгоритма.

По условиям задачи составим таблицу для значения параметра $t = -1/2$ и выполним её решение.

Таблица 2.1 – Начальное решение в канонической форме

				c_j	2	3	0	0	0
Базис	$C_Б$	$\widetilde{B}$	$\widetilde{P}$	$X^{\nabla *}$	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
$\leftarrow A_3$	0	10	8	6	2	5	1	0	0
A_4	0	6	4	4	3	2	0	1	0
A_5	0	4	2	3	1	1	0	0	1
			δ_j	0	– 2	– 3↑	0	0	0

Таблица 2.2 – После 1-й итерации

				c_j	2	3	0	0	0
Базис	$C_Б$	$\widetilde{B}$	$\widetilde{P}$	$X^{\nabla *}$	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_2	3	2	8/5	6/5	2/5	1	1/5	0	0
$\leftarrow A_4$	0	2	4/5	8/5	11/5	0	– 2/5	1	0
A_5	0	2	2/5	9/5	3/5	0	–1/5	0	1
			δ_j	18/5	– 4/5↑	0	3/5	0	0

Таблица 2.3 – Оптимальное значение при $t = -1/2$

				c_j	2	3	0	0	0
Базис	$C_Б$	$\widetilde{B}$	$\widetilde{P}$	$X^{\nabla *}$	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_2	3	18/11	16/11	10/11	0	1	3/11	– 2/11	0
A_1	2	10/11	4/11	8/11	1	0	– 2/11	5/11	0
A_5	0	16/11	2/11	15/11	0	0	–1/11	–3/11	1
			δ_j	46/11	0	0	5/11	4/11	0

В последней таблице представлено оптимальное решение задачи параметрического программирования $F\left(\frac{10}{11}, \frac{8}{11}\right) = \frac{46}{11}$ для $t = -1/2$.

В соответствии с замечанием к 1-му пункту алгоритма, этот же результат может быть получен по оптимальному решению задачи без параметров, что соответствует значению параметра $t = 0$.

Пункт № 2 алгоритма.

Нижняя граница изменения параметра t, согласно (2.58), есть

$$\alpha_{o1} = \underset{\widetilde{p}_i > 0}{\max}\left\{-\frac{\widetilde{b}_i}{\widetilde{p}_i}\right\} = \underset{\left\{\frac{16}{11},\frac{4}{11},\frac{2}{11}\right\}}{\max}\left\{-\frac{\frac{18}{11}}{\frac{16}{11}},-\frac{\frac{10}{11}}{\frac{4}{11}},-\frac{\frac{16}{11}}{\frac{2}{11}}\right\} = -\frac{9}{8} = -1{,}125\,.$$

Так как $-\frac{9}{8} < -\frac{1}{2}$, то полученная нижняя граница устойчивости решения не хуже, чем задана в условии исходной задачи.

Верхняя же граница интервала существования неизменного базиса (A_1, A_2, A_5), определяемая (2.59), равна бесконечности, поскольку все компоненты вектора $\widetilde{P}$ положительны, это свидетельствует о том, что $\beta_{o1} \to \infty$.

Пункт алгоритма № 3.

Значение верхней границы интервала β_{o1} превышает заданную в условии задачи величину $\beta = 2$. Решение задачи параметрического программирования завершено, и нами получено окончательное решение. Ответ представляется одним интервалом изменения параметра t.

$$x_1 = \frac{10+4\cdot t}{11}, x_2 = \frac{18+16\cdot t}{11}; F(x_1,x_2) = \frac{74+56\cdot t}{11}, t \in \left[-\frac{9}{8},\infty\right).$$

Замечание. Используем значение $t = \alpha_{o1} = -\,9/8$, полученное нами ранее, которое меньшее, нежели заданное в условии задачи $\alpha = -\,1/2$.

Согласно (2.56), в этом случае точка оптимального решения будет иметь координаты

$$X^{\nabla *} = \widetilde{B} + t_0 \cdot \widetilde{P} = \begin{bmatrix} 18/11 \\ 10/11 \\ 16/11 \end{bmatrix} - \frac{9}{8} \cdot \begin{bmatrix} 16/11 \\ 4/11 \\ 2/11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 5/4 \end{bmatrix}, \text{откуда}$$

$$X^T_{\text{opt}} = \{1/2 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 5/4\}.$$

Функция цели для этого решения составит $F(1/2,0) = 1$. Мы можем убедиться, что структура решения сохранена, хотя план вырожден, так как компонента нулевая. Однако значение функции цели получилось меньше, нежели на интервале 1. Отсюда следует, что использовать значение параметра, ниже заданного в условии задачи, в нашем случае не целесообразно.

2.4.2. Решение задачи линейного программирования при вариации коэффициентов целевой функции [3, 7]

Пусть коэффициенты целевой функции зависят от параметра t следующим образом

$$c_i^{\nabla} = c_i + tp_i,\ i = \overline{i,n}, \qquad t \in [\alpha, \beta]. \qquad (2.61)$$

В этом случае математическая модель задачи параметрического программирования представима так:

$$\max F = (c_1 + tp_1)x_1 + (c_2 + tp_2)x_2 + \ldots + (c_n + tp_n)x_n,$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2, \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,n},\ t \in [\alpha, \beta]. \end{cases}$$

В ходе решения ЗЛП при фиксированном значении $t = t_0 \in [\alpha, \beta]$, будет получена таблица оптимального решения, значения строки симплекс-разностей для основных переменных, композиционно может быть представлено в виде

$$\delta_j^{\nabla} = \tilde{\delta}_j + t_0 \cdot \tilde{p}_j, \qquad j = \overline{1,n}, \qquad (2.62)$$

где $\tilde{\delta}_j$ – значение j-й симплекс-разности без учёта параметра; $\tilde{p}_j$ – параметрическая составляющая симплекс-разности.

Для того, чтобы компоненты строки симплекс-разностей (2.62) указывали на достижение оптимального решения, необходимо выполнение условия неотрицательности

$$\delta_j^{\nabla} = \tilde{\delta}_j + t_0 \cdot \tilde{p}_j \ge 0, \qquad j = \overline{1,n}, \qquad (2.63)$$

Выполнение системы (2.63) находятся в зависимости от знаков величин $\tilde{\delta}_j$ и $\tilde{p}_j$. Если имеются $\tilde{\delta}_j \ge 0$, то нижняя граница параметра

$$\alpha_{or} \ge -\frac{\tilde{\delta}_j}{\tilde{p}_j} \Rightarrow \alpha_{or} = \max_{\tilde{p}_j > 0}\left\{-\frac{\tilde{\delta}_j}{\tilde{p}_j}\right\}, \tag{2.64}$$

$\alpha_{or} \le \alpha$. Если отсутствуют $\tilde{p}_j > 0$, то есть все $\tilde{p}_j \le 0$, **отсутствует и нижняя граница**: $\alpha_{or} \to -\infty$.

Когда имеются $\tilde{p}_j < 0$, то можно определить верхнюю границу подынтервала

$$\beta_{or} \le -\frac{\tilde{\delta}_j}{\tilde{p}_j} \Rightarrow \beta_{or} = \min_{\tilde{p}_j < 0}\left\{-\frac{\tilde{\delta}_j}{\tilde{p}_j}\right\}, \tag{2.65}$$

которая получается $\beta \le \beta_{or}$. При отсутствии $\tilde{p}_j < 0$, то есть, когда все $\tilde{p}_j \ge 0$, **отсутствует верхняя граница интервала** $\beta_0 \to \infty$.

Алгоритм решения задачи параметрического программирования

1. Зафиксировать $t = t_0 \in [\alpha, \beta]$ и решить задачу параметрического программирования как обычную ЗЛП.

Дополнительные строки симплекс-таблицы (m + 1), (m + 2) и (m + 3), соответствующие $\tilde{\delta}_j$, $\tilde{p}_j$ и δ_j^{∇}, будем рассчитывать в ходе решения, согласуя с (2.62).

Пусть задача при неком значении параметра t не разрешима, то есть, существуют признаки неограниченности линейной формы $\delta_k^{\nabla} < 0,\ a_{i,k} \le 0$. Если

- $\tilde{p}_k = 0$, то задача неразрешима для любого t;
- $\tilde{p}_k < 0$, то задача неразрешима для всех $t \le \beta_{or}$.
- $\tilde{p}_k > 0$, то задача неразрешима для всех $t > \alpha_{or}$.

2. Исследовать полученное решение с помощью системы неравенств допустимости (2.63), в ходе которого будут определены нижняя (2.64) и верхняя (2.65) границы параметра.

3. Если окажется, что $\beta_{or} \to \infty$, то найдено оптимальное решение, и задача параметрического программирования решена.

4. В противном случае, необходимо определить направляющий столбец j^* по минимальному значению отношения

$$\min_{\tilde{p}_j < 0} \left\{ -\frac{\tilde{\delta}_j}{\tilde{p}_j} \right\} \Rightarrow j^*, \qquad (2.66)$$

и осуществить ряд итераций прямого симплекс-метода, после чего перейти к п. 2 настоящего алгоритма.

5. Решение представляется набором интервалов $[\alpha, \beta_1]$, $[\beta_1, \beta_2]$, … , $[\beta_{r-1}, \beta]$, на каждом из которых будет свой оптимальный план и своё выражение для расчёта целевой функции.

Пример.

$$F(x_1, x_2) = (2 + 2 \cdot t)x_1 + (3 - 1 \cdot t)x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \le 10, \\ 3x_1 + 2x_2 \le 6, \\ 1x_1 + 1x_2 \le 4, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \; t \in \left[-\frac{1}{2}; 2 \right]. \end{cases}$$

Пункт № 1 алгоритма.

Положим $t = -1/2$, и решим ЗЛП прямым симплекс-методом.

Таблица 2.9 – Начальная таблица для $t = -½$

		c_j	$2+2t = 1$	$3-1t = \frac{7}{2}$	0	0	0
Базис	$C_Б$	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
$\leftarrow A_3$	0	10	2	5	1	0	0
A_4	0	6	3	2	0	1	0
A_5	0	4	1	1	0	0	1
$m+1$	$\tilde{\delta}_j$	0	-2	-3	0	0	0
$m+2$	$\tilde{p}_j$	0	-2	1	0	0	0
$m+3$	δ_j^{∇}	0	$-2-2t = -1$	$-3+1t = -\frac{7}{2}$ $\uparrow$	0	0	0

Таблица 2.10 – Таблица оптимального решения для $t = -\frac{1}{2}$

		c_j	$2+2t = =1$	$3-1t = =\frac{7}{2}$	0	0	0
Базис	$C_Б$	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_2	$3-1t = =\frac{7}{2}$	2	$2/5$	1	$1/5$	0	0
$\leftarrow A_4$	0	2	$11/5$	0	$-2/5$	1	0
A_5	0	2	$3/5$	0	$-1/5$	0	1
$m+1$	$\tilde{\delta}_j$	6	$-4/5$	0	$3/5$	0	0
$m+2$	$\tilde{p}_j$	–2	$-12/5$	0	$-1/5$		
$m+3$	δ_j^{∇}	$6-2\cdot t = =7$	$-\frac{4}{5}-\frac{12}{5}t = =\frac{2}{5}$ $\uparrow$	0	$\frac{3}{5}-\frac{1}{5}t = =\frac{7}{10}$	0	0

Строка $m + 3$ указывает на достижение оптимального решения, для значения $t = -1/2$ задача разрешима. Координаты оптимума суть $X^*(0, 2)$, а целевая функция имеет бесчисленное множество значений в функции от параметра:

$$F(0, 2, t) = (3 - 1\cdot t) \times 2.$$

Пункт № 2 алгоритма.

Поскольку в $m + 2$ отсутствуют положительные числа, то это говорит о том, что отсутствует нижняя граница параметра α. Верхняя граница интервала, по условию (2.65) составит

$$\beta_{o1} = \min_{\tilde{p}_j < 0}\left\{-\frac{\tilde{\delta}_j}{\tilde{p}_j}\right\} = \min_{\left\{-\frac{12}{5}, -\frac{1}{5}\right\}}\left\{-\frac{-\frac{4}{5}}{-\frac{12}{5}}, -\frac{\frac{3}{5}}{-\frac{1}{5}}\right\} = \left\{-\frac{1}{3}, 3\right\} = -\frac{1}{3}.$$

Пункт № 3 алгоритма.

Поскольку значение β_{o1} не превышает верхнюю границу, заданную в условии, то задача не решена, и вычисления продолжаются.

Пункт № 4 алгоритма.

Направляющий столбец, определяемый по (2.66), соответствует вектору A_1(отмечен стрелкой в последней таблице 2.10) и верхней границе первого подынтервала β_{o1}.

Поясним логику данного пункта алгоритма следующими рассуждениями. Оптимальное решение будет сохранять свою структуру в смысле набора базисных векторов, если выполняются (2.63). То есть, необходима реализация двух условий неотрицательности:

$$\begin{cases} -\dfrac{4}{5}-\dfrac{12}{5}\cdot t \geq 0, \\ \dfrac{3}{5}-\dfrac{1}{5}\cdot t \geq 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t \leq -\dfrac{1}{3}, \\ t \leq 3. \end{cases}$$

Если окажется, что $t > -\dfrac{1}{3}$, то вектор A_1 будет, согласно алгоритму симплексного метода, вводиться в базис. В результате итерации симплекс-метода получим таблицу.

Таблица 1.11 – Таблица оптимального решения для $t = -1/3$

		c_j	$2+2t = \frac{4}{3}$	$3-1t = \frac{10}{3}$	0	0	0
Базис	$C_Б$	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
$\leftarrow A_2$	$3-1t = \frac{10}{3}$	18/11	0	1	3/11	$-2/11$	0
A_1	$2+2t = \frac{4}{3}$	10/11	1	0	$-2/11$	5/11	0
A_5	0	16/11	0	0	$-1/11$	$-3/11$	1
$m+1$	$\tilde{\delta}_j$	74/11	0	0	5/11	4/11	0
$m+2$	$\tilde{p}_j$	2/11	0	0	$-7/11$	12/11	
$m+3$	δ_j^{∇}	$\frac{74}{11}+\frac{2}{11}t = \frac{20}{3}$	0	0	$\frac{5}{11}-\frac{7}{11}t = \frac{2}{3}$ $\uparrow$	$\frac{4}{11}+\frac{12}{11}t = 0$	0

Координаты точки оптимума $X^*\left(\frac{10}{11},\frac{18}{11}\right)$, а выражение для расчёта функции цели выглядит следующим образом $F\left(\frac{10}{11},\frac{18}{11},t\right)=\frac{74}{11}+\frac{2}{11}t$. Для проверки правильности расчетов необходимо убедиться, что значения целевых функций для предыдущей и последующей таблиц оптимального решения в точке со значением параметра $t = -1/3$, совпадают:

$$F\left(0{,}2,-\frac{1}{3}\right)=\left(3+1\cdot\frac{1}{3}\right)\cdot 2=\frac{20}{3},$$

$$F\left(\frac{10}{11},\frac{18}{11},-\frac{1}{3}\right)=\frac{74-2\cdot\frac{1}{3}}{11}=\frac{222-2}{11\cdot 3}=\frac{20}{3}.$$

Пункт № 2 алгоритма.

Система неравенств, определяющая неизменность состава базиса, полученная по (2.63) выглядит так:

$$\begin{cases}\frac{5}{11}-\frac{7}{11}\cdot t\ge 0,\\ \frac{4}{11}+\frac{12}{11}\cdot t\ge 0.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}t\le\frac{5}{7},\\ t\ge-\frac{1}{3}.\end{cases}$$

Эта система показывает верхнюю и нижнюю границу интервала изменения t, что полностью согласуется с условиями (2.64)

$$\alpha_{o2}=\max_{\tilde{p}_j>0}\left\{-\frac{\tilde{\delta}_j}{\tilde{p}_j}\right\}=\max_{\left\{\frac{12}{11}\right\}}\left\{-\frac{\frac{4}{11}}{\frac{12}{11}}\right\}=-\frac{1}{3}.$$

и (2.65)

$$\beta_{o2}=\min_{\tilde{p}_j<0}\left\{-\frac{\tilde{\delta}_j}{\tilde{p}_j}\right\}=\min_{\left\{-\frac{7}{11}\right\}}\left\{-\frac{\frac{5}{11}}{-\frac{7}{11}}\right\}=\frac{5}{7}.$$

Пункт № 3 алгоритма.

Поскольку значение β_{o2}, не превышает верхнюю границу равную двум, заданную в условии, то задача не решена, и вычисления продолжаются.

Пункт № 4 алгоритма.

Полагаем значение t = 5/7, направляющий столбец A_3, этот вектор будет в базис вводиться, а A_3 – выводиться из базиса. После расчётов получим таблицу.

Таблица 1.12 – Таблица оптимального решения для t = 5/7

		c_j	$2+2t = \dfrac{24}{7}$	$3-1t = \dfrac{16}{7}$	0	0	0
Базис	$C_Б$	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_3	0	6	0	$11/3$	1	$-2/3$	0
A_1	$2+2t = \dfrac{24}{7}$	2	1	$2/3$	0	$1/3$	0
A_5	0	2	0	$1/3$	0	$-1/3$	1
$m+1$	$\tilde{\delta}_j$	4	0	$-5/3$	0	$2/3$	0
$m+2$	$\tilde{p}_j$	4	0	$7/3$	0	$2/3$	
$m+3$	δ_j^{∇}	$4+4t = \dfrac{48}{7}$	0	$-\dfrac{5}{3}+\dfrac{7}{3}t = 0$	0	$\dfrac{2}{3}+\dfrac{2}{3}t = \dfrac{16}{21}$	0

Оптимум $X^*(2, 0)$, при этом функция цели рассчитывается по формуле $F(2, 0, t) = 4 + 4 \cdot t$.

Выполним проверку совпадения значений целевых функций на границе интервала $\beta_{o2} = \alpha_{o3} = 5/7$.

$$F\left(\frac{10}{11},\frac{18}{11},\frac{5}{7}\right) = \frac{74+2\cdot\frac{5}{7}}{11} = \frac{518+10}{11\cdot 7} = \frac{528}{11\cdot 7} = \frac{48\cdot 11}{11\cdot 7} = \frac{48}{7},$$

$$F\left(2{,}0,\frac{5}{7}\right) = \left(4+4\cdot\frac{5}{7}\right) = \frac{48}{7}.$$

Значения функций целей одинаковы, как и ожидалось.

Пункт № 2 алгоритма.

Проанализируем границы интервалов

$$\alpha_{o3} = \underset{\tilde{p}_j > 0}{\max}\left\{-\frac{\tilde{\delta}_j}{\tilde{p}_j}\right\} = \underset{\left\{\frac{2}{3},\frac{7}{3}\right\}}{\max}\left\{-\frac{\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}} = -1, -\frac{-\frac{5}{3}}{\frac{7}{3}} = \frac{5}{7}\right\} = \frac{5}{7}$$

Отмечаем совпадение границ интервалов $\beta_{o2} = \alpha_{o3}$. Так как в строке $\tilde{p}_j$ отсутствуют отрицательные числа, это говорит о том, что $\beta_{o3} \to \infty$.

Пункт № 4 алгоритма.

Поскольку значение β выходит за границу изменения параметра, заданного в условии задачи, то задачу параметрического программирования можно считать решённой.

Ответ.

В результате решения имеем несколько интервалов изменения параметра t, на каждом из которых имеются своя точка оптимума и своё выражение для вычисления функции цели:

$$\left[-\frac{1}{2},-\frac{1}{3}\right]; X^*_{opt} = \begin{bmatrix}0 & 2\end{bmatrix}; F\left(X^*_{opt},t\right) = (3-1\cdot t)\cdot 2 = 6-2t,$$

$$\left[-\frac{1}{3},\frac{5}{7}\right]; X^*_{opt} = \begin{bmatrix}\frac{10}{11} & \frac{18}{11}\end{bmatrix}; F\left(X^*_{opt},t\right) = (2+2\cdot t)\cdot\frac{10}{11} + (3-1\cdot t)\cdot\frac{18}{11} = \frac{74+2\cdot t}{11},$$

$$\left[\frac{5}{7},\infty\right); X^*_{opt} = \begin{bmatrix}2 & 0\end{bmatrix}; F\left(X^*_{opt},t\right) = (2+2\cdot t)\cdot 2 = 4+4\cdot t.$$

На рисунке 2.11 показаны местоположения нормалей при различных значениях параметра t.

$$f(x_1,x_2) = 1\cdot x_1 + \frac{7}{2}\cdot x_2,\quad t = -\frac{1}{2};$$
$$f(x_1,x_2) = 2\cdot x_1 + 3\cdot x_2,\quad t = 0;$$
$$f(x_1,x_2) = 6\cdot x_1 + 1\cdot x_2,\quad t = 2.$$

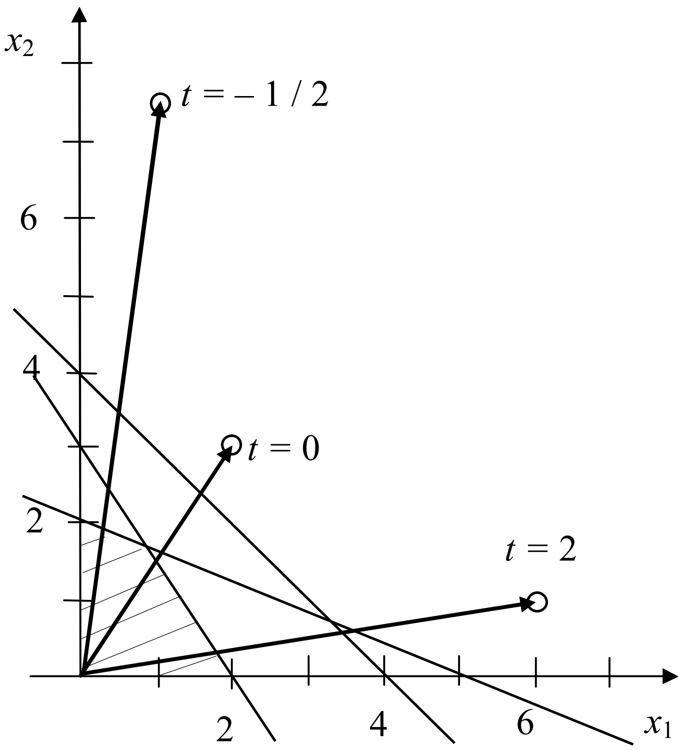

Рисунок 2.11 – Различные положения нормали

2.4.3 Вопросы для самоконтроля

1. Когда возникают задачи параметрического программирования?

2. Почему границей изменения параметра t при вариации вектора свободных членов служит отношение $\frac{\tilde{b}_i}{\tilde{p}_i}$?

3. Почему границей изменения параметра t при вариации коэффициентов функции цели служит отношение $\frac{\tilde{\delta}_j}{\tilde{p}_j}$?

4. Что означает физически или геометрически параметрические изменения элементов вектора свободных членов системы ограничений?

5. Что означает физически или геометрически параметрические изменения коэффициента целевой функции?

6. Всегда ли разрешима задача параметрического программирования?

7. Почему задача параметрического изменения элементов матрицы системы ограничений рассматривается и решается весьма редко?

8. В чем сущность и особенности методов решения задачи параметрического программирования по отношению к классической ЗЛП?