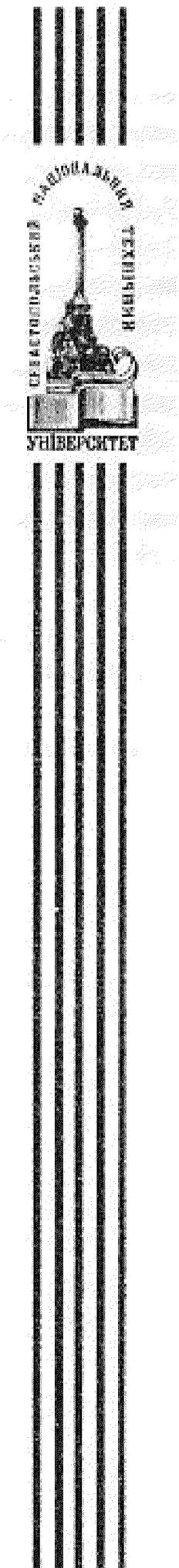


**Министерство образования и науки,  
молодежи и спорта Украины**  
**Севастопольский национальный технический университет**



## **ПРАКТИКУМ ПО ФИЗИКЕ**

### **«Механика. Термодинамика и молекулярная физика»**

Методические указания  
к лабораторным работам по курсу общей физики для  
студентов технических специальностей всех форм  
обучения высших учебных заведений

Севастополь  
2013

УДК 53

Практикум по физике «Механика, Термодинамика и молекулярная физика»: Методические указания к лабораторным работам по курсу общей физики для студентов технических специальностей очной и заочной форм обучения высших учебных заведений / Составили В.В. Баракин, С.Ф. Барановский, Ю.Е. Бушуев, А.П. Васильев, О.С. Завьялова, А.Л. Леонтович, В.А. Лисютин, В.Л. Лучин, В.И. Пахомов, Н.В. Петренко, В.А. Сигаев, В.В. Хомич; под ред. канд. техн. наук, доцента В.Л. Лучина. - Севастополь: Изд-во СевНТУ, 2013. – 192 с.

В лабораторном практикуме по курсу общей физики обобщен опыт работы коллектива кафедры физики Севастопольского национального технического университета. Практикум включает описания 29 лабораторных работ (двух виртуальных лабораторных работ) по курсу общей физики (разделы: «Механика», «Термодинамика и молекулярная физика»), выполняемых студентами первого курса.

Лабораторные работы составлены по единому плану: цель, библиографический список, теоретическое введение, обоснование используемых методик, приборы и принадлежности, описание установок, порядок выполнения работ, обработка экспериментальных исследований, контрольные вопросы.

Практикум составлен в соответствии с программой курса общей физики для вузов и технических университетов. Выполнение каждой лабораторной работы рассчитано на одно двухчасовое занятие.

Предназначено в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений.

Методические указания рассмотрены и утверждены на заседании кафедры физики (протокол № \_\_\_\_\_ от \_\_\_\_\_ 20\_\_\_\_ г.).

Допущено учебно-методическим центром СевНТУ в качестве методических указаний.

Рецензент: доктор техн. наук, профессор Гусев В.А.

---

## СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	
Введение .....	7
Лабораторная работа 1	
Изучение распределения Гаусса и статистических методов обработки экспериментальных данных .....	19
Лабораторная работа 2	
Проверка законов сохранения при столкновении микрочастиц .....	28
Лабораторная работа 3	
Определение средней силы удара двух упругих шаров и оценка модуля упругости их материалов .....	33
Лабораторная работа 4	
Определение ускорения силы тяжести при помощи прибора Атвуда .....	40
Лабораторная работа 5	
Проверка основного уравнения динамики вращательного движения .....	45
Лабораторная работа 6	
Изучение прецессии гироскопа и определение его момента инерции .....	50
Лабораторная работа 7	
Определение момента инерции твердых тел при помощи кривошарнирного маятника .....	55
Лабораторная работа 8	
Определение момента инерции методом трифиллярного подвеса .....	62
Лабораторная работа 9	
Изучение движения маятника Максвелла .....	68
Лабораторная работа 10	
Определение скорости полета снаряда с помощью баллистического кривошарнирного маятника .....	72
Лабораторная работа 11	
Определение величины ускорения свободного падения при помощи универсального маятника .....	77
Лабораторная работа 12	
Исследование затухающих колебаний методом наклонного маятника .....	85
Лабораторная работа 13	
Исследование собственных колебаний струны методом резонанса .....	92
Лабораторная работа 14	
Исследование колебаний связанных осцилляторов .....	97
Лабораторная работа 15	
Экспериментальное определение отношения молярных теплоемкостей (показателя адиабаты) воздуха методом Клемана-Дезорма .....	106
Лабораторная работа 16	
Определение показателя адиабаты воздуха по скорости звука .....	111
Лабораторная работа 17	
Определение средней длины свободного пробега и эффективного диаметра молекул воздуха .....	115

Лабораторная работа 18	
Измерение скорости звука по методу сдвига фаз .....	121
Лабораторная работа 19	
Определение коэффициента теплопроводности воздуха .....	125
Лабораторная работа 20	
Определение коэффициента внутреннего трения жидкости методом Стокса .....	131
Лабораторная работа 21	
Определение коэффициента вязкости жидкости методом капиллярного вискозиметра .....	134
Лабораторная работа 22	
Определение вязкости жидкости методом затухания колебаний .....	140
Лабораторная работа 23	
Методы определения коэффициента поверхностного натяжения жидкостей .....	146
Лабораторная работа 24	
Определение коэффициента поверхностного натяжения жидкостей волновым методом .....	149
Лабораторная работа 25	
Методы измерения относительной влажности воздуха .....	155
Лабораторная работа 26	
Определение удельной теплоты плавления олова и приращения энтропии при плавлении олова .....	159
Лабораторная работа 27	
Определение удельной теплоемкости металлов методом охлаждения .....	166
Лабораторная работа 1В	
Изучение динамики движения тел с переменной массой .....	170
Лабораторная работа 2В	
Изучение законов реального газа .....	175
Приложение А .....	181
Приложение Б .....	182
Приложение В .....	183

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Один из создателей квантовой механики Макс Планк о соотношении знаний и умений, формируемых при обучении писал: «Не так важно чему учат, а важно, как учат. Одно действительно понятое учеником математическое предложение имеет больше ценности, чем 10 формул, которые он заучил наизусть, но не понял их действительного смысла. В настоящее время самой главной задачей воспитания являются ни знания, ни умения, а практическая деятельность». С этих позиций очевидна роль физического практикума и вообще учебного эксперимента при изучении курса общей физики в высших учебных заведениях. Альберт Эйнштейн писал, что «красивый эксперимент сам по себе гораздо ценнее, чем двадцать формул, добытых в репорте отвлеченной мысли» Об этом же говорил и Джеймс Максвелл, который обосновывал необходимость учебного эксперимента с точки зрения психологии. На важность правильного соотношения эксперимента и теории указывал Г.С. Ландсберг «Отчетливое понимание ... экспериментального характера физических законов имеет крайне важное значение: оно делает из физики науку о природе, а не систему умозрительных построений». В этой связи общий курс физики должен давать представление о физике как о науке, имеющей экспериментальную основу.

Экспериментальному обучению студентов в рамках курса общей физики в СевНТУ придается особое значение Развитие физики и техники, изменение целей обучения в новых экономических условиях еще в большей степени повысило значимость физического практикума и задач по освоению современных методов проведения экспериментальных исследований и обработки данных с широким привлечением для этого персональных ЭВМ и соответствующего математического и программного обеспечения.

Настоящее учебное пособие по первой части курса общей физики является итогом многолетнего опыта работы кафедры физики Севастопольского государственного технического университета со студентами широкого спектра инженерных специальностей Пособие содержит описание 29 лабораторных работ по механике, термодинамике и молекулярной физике, в том числе двух виртуальных и написано в соответствии с утвержденной программой курса физики для высших технических учебных заведений и университетов. Большинство работ рассчитано на выполнение в течение двухчасового занятия. Однако в ряде случаев работы могут выполняться в течение 4-х часов.

В описании каждой лабораторной работы содержатся, цель эксперимента, рекомендуемая литература, теоретическое введение, обоснование используемых методик, приборы и принадлежности, порядок выполнения работ, получение и обработка экспериментальных данных. В заключение предложены контрольные вопросы для самоподготовки студентов.

В процессе подготовки к лабораторным занятиям студент должен изучить теорию вопроса в соответствии с рекомендованной литературой, составить в рабочей тетради краткий конспект выполняемой работы с описанием теоретического обоснования, схемы лабораторной установки, методики об-

работки результатов экспериментальных исследований Отдельно составляется отчет к лабораторной работе по установленной форме. В отчете к лабораторной работе студент должен представить для защиты заполненные таблицы экспериментальных данных, результаты вычислений и оценки погрешностей измерений и расчетов Особое внимание должно уделяться графической обработке данных, а также выводам по выполненной работе. Студент должен освоить современные методы оценки погрешностей измеряемых и рассчитываемых величин с использованием элементов теории вероятностей и математической статистики.

Настоящее учебное пособие подготовлено к изданию коллективом кафедры физики:

А.А. Байдренко (лабораторная работа 25), В.В. Баракин (л. р. 1, 3, 7, 8, 9, 12, 14, 17, 19, 22), С.Ф. Барановский (л. р. 10), П.А. Болотин (л. р. 12, 20, 27), Ю.Е. Бушуев (л. р. 2, 3, 8, 9, 15), А.П. Васильев (л. р. 3), А.Н. Веселков (л. р. 1, 7, 12, 14, 17, 19, 22), М.К. Губарев (л. р. 15), Л.Н. Дымант (введение), О.С. Завьялова (л. р. 11, 14, 21), В.Н. Калугин (л. р. 21, 26), В.А. Кодинцев (л. р. 7, 13, 23, 24), В.И. Королев (введение, л. р. 15, 27), О.М. Крошицкая (л. р. 4, 10), А.Л. Леонович (л. р. 20), В.А. Лисютин (л. р. 5, 13, 18, 23, 24), В.Л. Лучин (л. р. 4, 5, 11), И.Т. Овсянников (л. р. 6, 16, 27), Г.Н. Олейников (л. р. 5, 23, 27), В.И. Пахомов (л. р. 6), Н.В. Петренко (л. р. 4, 11), А.Г. Рыбаков (л. р. 16, 18, 19, 24, приложение), В.А. Сигаев (л. р. 15, 26), А.А. Слободянюк (л. р. 5, 20, 21, 26), В.В. Хомич (л. р. 1В, 2В)

Оформление пособия и подготовка его к печати осуществлена А.Г Рыбаковым. Подготовка ко второму изданию – В.В. Хомич.

Работа по совершенствованию физического практикума продолжается и мы надеемся получить от читателей советы и предложения по улучшению данного пособия.

АВТОРЫ

## В В Е Д Е Н И Е

---

### ОШИБКИ ИЗМЕРЕНИЙ ФИЗИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН И ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

#### *1. Задачи измерений. Абсолютная и относительная погрешности*

Основная задача физического эксперимента – измерение физических величин. Измерением называется операция, с помощью которой устанавливается, во сколько раз измеряемая величина больше или меньше соответственной величины, принятой за единицу.

Измерения бывают прямые и косвенные. В прямых измерениях искомое значение измеряемой величины получают либо прямым сравнением ее с мерой (длины, массы, времени, температуры и т. п.), либо с помощью приборов, градуированных в единицах измеряемой величины.

При косвенных измерениях искомая величина, не измеряемая непосредственно, вычисляется по результатам прямых измерений других величин, связанных с искомой определенной математической зависимостью. Например, тепловую мощность, выделяющуюся в электроплитке, можно найти, умножив силу тока в плитке на напряжение на зажимах. Сила же тока и напряжение измеряются непосредственно.

Всякое измерение дает лишь приближенный результат. Поэтому необходимо указать, насколько полученный результат может быть близким к точному значению, иными словами, указать, какова точность измерения. Для этого вместе с полученными результатами указывают приближенную погрешность измерений. Например, запись результата измерений периода колебаний маятника в виде

$$T = (2,5 \pm 0,2) \text{ с}$$

означает, что истинное значение периода колебаний лежит в пределах от 2,3 до 2,7 с.

Абсолютной погрешностью  $\Delta N$  измерения физической величины называется модуль разности истинного значения  $N$  этой величины и значения  $N_i$ , полученного в результате измерения:

$$\Delta N = |N - N_i|.$$

Однако абсолютная погрешность не является достаточной характеристикой точности измерения. Поэтому вводится понятие об относительной погрешности. Относительной погрешностью  $\varepsilon$  измерения величины  $N$  называется отношение абсолютной погрешности к модулю истинного значения

$$\varepsilon = \frac{\Delta N}{N}.$$

Абсолютная погрешность имеет ту же размерность, что и измеряемая величина. Относительная погрешность безразмерна, или выражается процентах.

В приведенном выше примере абсолютная погрешность периода колебаний маятника равна 0,2 с, а относительная – 0,08 или 8%.

В реальном эксперименте на погрешность конечного результата влияет

множество факторов и необходимо уметь оценить, какой из них дает наибольший вклад в погрешность результата.

## 2. Типы ошибок

Ошибки можно разделить на два типа – систематические и случайные. Систематические ошибки – это погрешности, величина которых одинакова во всех измерениях, проводящихся одним и тем же методом, одними и теми же измерительными приборами. Систематические ошибки обычно дают отклонения в одну сторону (либо в сторону увеличения, либо в сторону уменьшения). Они обусловлены несовершенством измерительной аппаратуры или некоторыми внешними постоянными факторами (например, внешней среды, наличием примесей, контактом с другими телами и т.д.). Систематические ошибки могут быть уменьшены изменением метода измерений, сравнением полученных данных с эталонными измерениями, учетом систематическое влияния внешних факторов.

Случайные ошибки всегда присутствуют в эксперименте и вызываются большим числом случайных причин, действие которых на каждое измерение различно и не может быть заранее учтено. Наиболее надежным способом уменьшения этих ошибок является увеличение числа измерений и нахождение среднего арифметического результата, которое оказывается ближе всего к истинному значению измеряемой величины. Если случайная ошибка, полученная по данным измерений, окажется значительно меньше погрешности, определенной точностью прибора, то нет смысла пытаться уменьшить величину случайной погрешности.

Отсюда вытекают следующие правила проведения измерений:

- 1) если систематическая ошибка является определяющей, т.е. ее величина существенно больше величины случайной ошибки, присущей данному методу, то достаточно выполнить измерение один раз;
- 2) если случайная ошибка является определяющей, то измерение следует произвести несколько раз.

Число необходимых измерений либо находится с использованием статистических методов, либо выбирается таким образом, чтобы случайная ошибка среднего арифметического была меньше систематической ошибки.

Разновидность случайных ошибок – грубые ошибки или промахи. Обычно это неправильные отсчеты по прибору, неправильная запись отсчета и т.п. При обработке результатов измерений такие измерения отсчета следует отбрасывать.

Систематические ошибки опаснее случайных, поскольку их значительно труднее обнаружить.

## 3. Доверительный интервал и доверительная вероятность

Пусть проведена серия измерений некоторой физической величины  $N$ . Результаты отдельных измерений обозначим  $N_i$ , общее число измерений  $n$ . Из теории следует, что если систематическая ошибка отсутствует, значения  $N_i$ , располагаются вблизи неизвестного нам истинного значения  $N$  измеряемой величины, причем отклонения в стороны больших и меньших значений

будут равновероятны. Тогда в качестве наилучшего приближения к истинному значению следует взять среднее арифметическое отдельных измерений

$$\langle N \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n N_i. \quad (1)$$

После выполнения измерений принято указывать интервал значений измеряемой величины  $\langle N \rangle \pm \langle \Delta N \rangle$ , в пределах которого с определенной вероятностью может оказаться истинное значение измеряемой величины.

Величина  $\langle \Delta N \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |\Delta N_i|$  есть средняя абсолютная погрешность ре-

зультата, а интервал от  $\langle N \rangle - \langle \Delta N \rangle$  до  $\langle N \rangle + \langle \Delta N \rangle$  называется доверительным интервалом. Доверительный интервал не является исчерпывающей характеристикой точности результата. Для того, чтобы приведенный доверительный интервал имел смысл, нужна количественная характеристика его достоверности. Такая характеристика – вероятность того, что среднее значение  $\langle N \rangle$  отличается от истинного не более, чем на  $\langle \Delta N \rangle$  – называется доверительной вероятностью или надежностью результата серии измерений ( $\alpha$ ). Она равна доле результатов однотипных серий измерений, попадающих в пределы доверительного интервала, т. е. отличающихся от истинного значения не более, чем на  $\langle \Delta N \rangle$ . Чем больше величина доверительного интервала, тем с большей вероятностью истинная величина  $N$  попадет в этот интервал. Величина  $\alpha$  зависит от числа проведенных измерений и от величины погрешности  $\Delta N$ .

#### 4. Оценка случайной погрешности прямых измерений

Пусть  $N_1, N_2, N_3, \dots, N_n$  – результаты отдельных измерений данной величины  $N$ ;  $n$  – число измерений. Поскольку в качестве наилучшего приближения к истинному значению измеряемой величины принимается ее среднее арифметическое значение, то имеем:

$$\langle N \rangle = \frac{N_1 + N_2 + N_3 + \dots + N_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n N_i. \quad (2)$$

Абсолютные погрешности отдельных измерений

$$\begin{aligned} \Delta N_1 &= |\langle N \rangle - N_1| \\ \Delta N_2 &= |\langle N \rangle - N_2| \\ \Delta N_3 &= |\langle N \rangle - N_3| \\ &\dots \\ \Delta N_n &= |\langle N \rangle - N_n|. \end{aligned} \quad (3)$$

Средняя абсолютная погрешность серии измерений равна

$$\langle \Delta N \rangle = \frac{\Delta N_1 + \Delta N_2 + \dots + \Delta N_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Delta N_i. \quad (4)$$

Средняя относительная погрешность определяется соотношением

$$\varepsilon = \frac{\langle \Delta N \rangle}{\langle N \rangle} \cdot 100\%. \quad (5)$$

Доверительная вероятность может быть оценена по формуле

$$\alpha = 1 - \left( \frac{1}{2} \right)^{n-1}. \quad (6)$$

Окончательный результат приводится с указанием абсолютной и относительной погрешностей, доверительной вероятности и записывается в виде

$$N_{\text{ист}} = \langle N \rangle \pm \langle \Delta N \rangle. \quad (7)$$

### 5. Среднеквадратичная погрешность и оценка случайных ошибок прямых измерений вероятностным методом

Среднеквадратичная погрешность  $\Delta S_N$  величины  $N$  является общепризнанной универсальной серой погрешности измерений. Это обусловлено ее замечательными свойствами: уменьшение ошибки среднего значения результатов при увеличении числа измерений и возможности сложения ошибок обусловленных разными причинами. Вычислив среднее значение измеряемой величины  $N$  по формуле

$$\langle N \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n N_i. \quad (8)$$

Найдем отклонения результатов измерений от среднего значения  $\Delta N_i = \langle N \rangle - N_i$ . Тогда под среднеквадратичной погрешностью будем понимать выражение

$$\Delta S_N = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\langle N \rangle - N_i)^2}. \quad (9)$$

Расчет средних значений характеризуется среднеквадратичной погрешностью среднего  $\Delta S_{\langle N \rangle}$ . Между величинами  $\Delta S_{\langle N \rangle}$  и  $\Delta S_N$  существует прямая связь

$$\Delta S_{\langle N \rangle} = \frac{\Delta S_N}{\sqrt{n}}. \quad (10)$$

Последняя формула показывает, как точность результата серии измерений зависит от числа измерений в серии и указывает пути повышения этой точности. Таким образом, основной мерой случайных погрешностей является среднеквадратичная погрешность серии  $\Delta S_{\langle N \rangle}$ , которую можно записать в виде

$$\Delta S_{\langle N \rangle} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\langle N \rangle - N_i)^2}{n(n-1)}}. \quad (11)$$

Если число измерений невелико ( $n \geq 5$ ), величина  $\Delta S_{\langle N \rangle}$  является весьма грубой оценкой точности измерений. В этом случае для обеспечения заданной доверительной вероятности (надежности)  $\alpha$  берутся более широкие доверительные интервалы. Абсолютная погрешность в этом случае определяется по формуле

$$\langle \Delta N \rangle = t_\alpha(n) \cdot \Delta S_{\langle N \rangle}, \quad (12)$$

где  $t_\alpha(n)$  - коэффициент Стьюдента, значения которого приведены в приложении А.

При обработке результатов прямых измерений вероятностным методом, описанным выше, рекомендуется следующий порядок операций:

1. Результаты каждого измерения заносятся в заранее подготовленную таблицу.

2. Вычисляется среднее значение из  $n$  измерений:

$$\langle N \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n N_i. \quad (13)$$

3. Находятся модули абсолютных погрешностей отдельных измерений:

$$\Delta N_i = |\langle N \rangle - N_i|. \quad (14)$$

4. Находятся квадраты погрешностей отдельных измерений:

$$(\Delta N_i)^2 = (\langle N \rangle - N_i)^2. \quad (15)$$

5. Вычисляется средняя квадратичная погрешность результатов серии измерений:

$$\Delta S_{\langle N \rangle} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\langle N \rangle - N_i)^2}{n(n-1)}}. \quad (16)$$

6. Задается значение  $\alpha$  (выбирается или вычисляется самим студентом, или по указанию преподавателя).

7. Определяется по таблице коэффициент Стьюдента  $t_\alpha(n)$  для заданной надежности  $\alpha$  и числа проведенных измерений  $n$ .

8. Находится граница доверительного интервала:

$$\langle \Delta N \rangle = t_\alpha(n) \cdot \Delta S_{\langle N \rangle}. \quad (17)$$

9. Если величина погрешности результата измерений (найденная в пункте 8) окажется сравнимой с величиной погрешности прибора, то в качестве границы доверительного интервала следует взять величину

$$\langle \Delta N \rangle = \sqrt{t_\alpha^2(n) \cdot (\Delta S_{\langle N \rangle})^2 + \frac{K_\alpha^2}{3} \cdot \delta^2}. \quad (18)$$

где:  $K_\alpha = t_\alpha(\infty)$ , а  $\delta$  - величина погрешности прибора.

10. Окончательный результат записать в виде

$$N = \langle N \rangle \pm \langle \Delta N \rangle. \quad (19)$$

и проставить размерность величины  $N$ .

11. Оценить и указать относительную погрешность результата серии измерений:

$$\varepsilon = \frac{\langle \Delta N \rangle}{\langle N \rangle} \cdot 100\%. \quad (20)$$

## 6. Вычисление погрешности при косвенных измерениях

В большинстве экспериментов измеряемая величина непосредственно не определяются. Вместо этого измеряются другие величины:  $a, b, c$  и т. п., а затем вычисляется искомая величина  $N$ , которая является функцией указанных первичных величин

$$N = N(a, b, c). \quad (21)$$

I. В основе вычислений погрешностей косвенных измерений лежат два

предположения:

1) Абсолютные ошибки измерений малы по сравнению с измеряемыми величинами. Поэтому их можно рассматривать как бесконечно малые приращения измеряемых величин.

2) Если физическая величина  $N$  является функцией искомых переменных, т.e.  $N = N(a, b, c)$ , то абсолютная ошибка величины  $N$ , обусловленная погрешностью измерения ее аргументов, может быть найдена по правилам дифференцирования, если знак дифференциала  $d$  заменить знаком ошибки  $\Delta$ .

Порядок выполнения вычислений следующий:

1. Выполнив прямые измерения величин  $a, b, c, \dots$ , находят их средние значения  $\langle a \rangle, \langle b \rangle, \langle c \rangle, \dots$ , затем вычисляют их погрешности, т.е. значения  $\langle \Delta a \rangle, \langle \Delta b \rangle, \langle \Delta c \rangle, \dots$ , способом, описанным в 4. В качестве наилучшего приближения для величины  $N$  выбирают значение, соответствующее среднегарифметическим значениям аргументов:

$$\langle N \rangle = N(\langle \Delta a \rangle, \langle \Delta b \rangle, \langle \Delta c \rangle, \dots). \quad (22)$$

2. Для определения погрешности  $\Delta N$  поступают следующим образом. Изменяют одну из первичных величин, например,  $a$ , на величину ее погрешности и находят, насколько при этом изменяется величина  $N$ . В результате определяют погрешность  $\Delta N_a$ , обусловленную погрешностью только этой величины. Если погрешность  $\langle \Delta a \rangle$  невелика, то величина  $\Delta N_a$  вычисляется по формуле

$$\Delta N_a = \left| \frac{\partial N}{\partial a} \right| \cdot \Delta a. \quad (23)$$

При вычислении производной  $\frac{\partial N}{\partial a}$  все остальные первичные величины ( $b, c, \dots$ ) в формуле для  $N$  считаются постоянными – это частная производная. Значение производной находят, подставляя вместо истинных значений первичных величин их средние арифметические значения.

Аналогичным образом находят погрешности величины  $N$ , обусловленные погрешностями других первичных величин, например,

$$\Delta N_b = \left| \frac{\partial N}{\partial b} \right| \cdot \Delta b. \quad (24)$$

Для определения результирующей величины погрешности величины  $N$  производят сложение погрешностей  $\Delta N_a, \Delta N_b$  и т.д. Однако, следует иметь в виду, что при этом получается завышенный результат, т.к. не учитываются различные знаки отдельных погрешностей:

$$\langle \Delta N \rangle = \left| \frac{\partial N}{\partial a} \right| \langle \Delta a \rangle + \left| \frac{\partial N}{\partial b} \right| \langle \Delta b \rangle + \left| \frac{\partial N}{\partial c} \right| \langle \Delta c \rangle + \dots \quad (25)$$

3. Находят относительную погрешность:

$$\varepsilon = \frac{\langle \Delta N \rangle}{\langle N \rangle} \cdot 100\%. \quad (26)$$

4. Результат записывают в виде:

$$N = \langle N \rangle \pm \langle \Delta N \rangle \quad (27)$$

и проставляют размерность величины  $N$ .

### Пример 1

Пусть  $N = A \pm B$ , тогда  $dN = dA \pm dB$ . Заменяя знак  $d$  на  $\Delta$ , получаем:  $\Delta N = \Delta A \pm \Delta B$ . Чтобы получить максимальную погрешность, берем сумму абсолютных погрешностей  $\Delta N = \Delta A + \Delta B$ . Таким образом, средняя абсолютная погрешность результата, являющегося суммой или разностью двух измеряемых величин, одинакова и равна сумме абсолютных погрешностей измеряемых величин  $\langle \Delta N \rangle = \langle \Delta A \rangle + \langle \Delta B \rangle$ . Средняя относительная погрешность запишется как

$$\varepsilon = \frac{\langle \Delta N \rangle}{\langle N \rangle} \cdot 100\% = \frac{\langle \Delta A \rangle + \langle \Delta B \rangle}{\langle A + B \rangle} \cdot 100\%.$$

### Пример 2

Задана функция  $N = A \cdot B$ , тогда имеем  $dN = A \cdot dB + B \cdot dA$ , откуда  $\langle \Delta N \rangle = \langle A \rangle \cdot \langle \Delta B \rangle + \langle B \rangle \cdot \langle \Delta A \rangle$ . Относительная погрешность запишется как

$$\varepsilon = \frac{\langle \Delta N \rangle}{\langle N \rangle} \cdot 100\% = \frac{\langle A \rangle \cdot \langle \Delta B \rangle + \langle B \rangle \cdot \langle \Delta A \rangle}{\langle A \cdot B \rangle} \cdot 100\%.$$

В приложении Б даны наиболее часто встречающиеся функциональные зависимости и формулы для вычисления абсолютной и относительной погрешностей.

Дополнительные рекомендации: если расчетная формула представляет собой произведение или частное измеряемых величин и постоянных, то рекомендуется:

- а) прологарифмировать расчетную формулу;
- б) определить полный дифференциал логарифма;
- в) заменить знаки дифференциала  $d$  знаками погрешности  $\Delta$ ;
- г) если ошибка отдельных измерений входит в результаты дифференцирования несколько раз, то необходимо сгруппировать все члены, содержащие одинаковый дифференциал, и выражение в скобках, стоящие перед дифференциалом, взять по модулю.

### Пример 3

Пусть задана функция  $\eta = \frac{F}{6\pi r V}$ .

Находим логарифм этой функции  $\ln \eta = \ln F - \ln 6 - \ln \pi - \ln r - \ln V$ .

Отсюда:  $\frac{d\eta}{\eta} = \frac{dF}{F} - \frac{d\pi}{\pi} - \frac{dr}{r} - \frac{dV}{V}$ .

Заменяя  $d$  на  $\Delta$  и выбираем знак  $\Delta$  таким образом, чтобы ошибка была максимальной:

$$\frac{\Delta \eta}{\eta} = \frac{\Delta F}{F} + \frac{\Delta \pi}{\pi} + \frac{\Delta r}{r} + \frac{\Delta V}{V}.$$

II. Вероятностный метод оценки погрешности косвенных измерений  
В основе этого метода лежит нахождение среднеквадратичной ошибки.

При этом считается известным способ сложения среднеквадратичных ошибок. Пусть физическая величина  $N$  является функцией нескольких переменных  $N = N(a, b, c)$ . Тогда для нахождения среднеквадратичной ошибки величины  $N$ , обусловленной погрешностями измеряемых величин  $a, b, c, \dots$ , достаточно в формулах (23) и (24) в качестве  $\Delta a$  и  $\Delta b$  взять среднеквадратичную погрешность каждой из этих величин, т.е.

$$\Delta S_{\langle N \rangle, a} = \left| \frac{\partial N}{\partial a} \right| \cdot \Delta S_{\langle a \rangle}, \quad (28)$$

$$\Delta S_{\langle N \rangle, b} = \left| \frac{\partial N}{\partial b} \right| \cdot \Delta S_{\langle b \rangle}. \quad (29)$$

Результирующая среднеквадратичная погрешность  $\Delta S_{\langle N \rangle}$  вычисляется по формуле

$$\Delta S_{\langle N \rangle} = \sqrt{\Delta S_{\langle N \rangle, a}^2 + \Delta S_{\langle N \rangle, b}^2 + \dots} = \sqrt{\left| \frac{\partial N}{\partial a} \right|^2 \cdot \Delta S_{\langle a \rangle}^2 + \left| \frac{\partial N}{\partial b} \right|^2 \cdot \Delta S_{\langle b \rangle}^2 + \dots}. \quad (30)$$

Среднеквадратичные погрешности прямых измерений величин  $a, b, c, \dots$  находятся по методу, описанному ранее. Значения производных, как и значения  $N$ , находят, подставляя вместо истинных значений величин  $a, b, c, \dots$  их средние экспериментальные значения  $\langle a \rangle, \langle b \rangle, \langle c \rangle, \dots$ . Вычислив среднеквадратичную погрешность величины  $N$ , находят доверительный интервал для произведенных измерений по формуле

$$\langle \Delta N \rangle = t_\alpha(n) \cdot \Delta S_{\langle N \rangle}.$$

Если окажется, что среднеквадратичные погрешности величин  $a, b, c, \dots$  дают сравнимые вклады, то поправки, даваемые коэффициентами Стьюдента, несущественны. В этом случае, который наиболее часто встречается в физическом эксперименте, доверительный интервал оценивается по формуле

$$\langle \Delta N \rangle = \sqrt{\left| \frac{\partial N}{\partial a} \right|^2 \cdot \Delta a^2 + \left| \frac{\partial N}{\partial b} \right|^2 \cdot \Delta b^2 + \dots}, \quad (31)$$

где  $\Delta a^2, \Delta b^2$  – квадраты абсолютных погрешностей прямых измерений первичных величин  $a, b, c, \dots$ .

Окончательный результат записывают в виде:  $N = \langle N \rangle \pm \langle \Delta N \rangle$  – приводят размерность величины  $N$ . Затем определяется относительная погрешность:

$$\varepsilon = \frac{\langle \Delta N \rangle}{\langle N \rangle} \cdot 100\%$$

#### Пример 4

Пусть  $N = a \cdot b$ . Тогда  $\frac{\partial N}{\partial a} = b, \frac{\partial N}{\partial b} = a, \langle N \rangle = \langle a \rangle \cdot \langle b \rangle$ .

$$\langle \Delta N \rangle = \sqrt{\left| \frac{\partial N}{\partial a} \right|^2 \cdot \Delta a^2 + \left| \frac{\partial N}{\partial b} \right|^2 \cdot \Delta b^2} = \sqrt{\langle b \rangle^2 \cdot \Delta a^2 + \langle a \rangle^2 \cdot \Delta b^2}.$$

$$\varepsilon = \frac{<\Delta N>}{<N>} \cdot 100\% = \sqrt{\frac{\Delta a^2}{<a>^2} + \frac{\Delta b^2}{<b>^2}} \cdot 100\%.$$

Существует правило: если величина  $N$  является произведением нескольких функций первичных величин, например  $N = F_1(a) \cdot F_2(b)$ , то вначале удобнее вычислить относительную погрешность по формуле:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{<N>,a} &= \frac{\Delta F_1}{|F_1|} = \left| \frac{1}{F_1} \cdot \frac{\partial F_1}{\partial a} \right| \cdot \Delta a, \\ \varepsilon_{<N>,b} &= \frac{\Delta F_2}{|F_2|} = \left| \frac{1}{F_2} \cdot \frac{\partial F_2}{\partial b} \right| \cdot \Delta b,\end{aligned}\quad (32)$$

тогда относительная погрешность величины  $N$  будет равна

$$\varepsilon_{<N>} = \sqrt{\varepsilon_{<N>,a}^2 + \varepsilon_{<N>,b}^2}. \quad (33)$$

## 7. Погрешности измерительных приборов

Результат любого измерения определяется показаниями приборов. Абсолютно точных приборов не существует, поэтому их показания отличаются от точного значения измеряемой величины, т.е. каждый прибор имеет определенную погрешность. Многократное повторение измерений для исключения случайных ошибок имеет смысл только в том случае, если случайные ошибки отдельных измерений превышают приборную погрешность. В противном случае достаточно ограничиться двумя-тремя измерениями и за ошибку измерений принять приборную погрешность. Обычно различают погрешность показаний прибора и погрешность отсчета по шкале. Погрешность показаний, т.е. несоответствие показания прибора истинному значению измеряемой величины, можно определить при сравнении показаний данного прибора и более точного эталонного прибора. В паспортных данных прибора обычно приводят максимальное значение погрешности прибора, которое называется предельной приборной погрешностью. Может быть указана абсолютная или относительная погрешность. Исправный прибор не должен давать погрешность, превышающую предельную. Это означает, что доверительная вероятность, соответствующая предельной погрешности, близка к единице.

Вместо абсолютной предельной погрешности  $\Delta X_{np}$  может быть указан класс точности прибора  $\gamma$ , определяющий выраженное в процентах отношение предельной погрешности  $\Delta X_{np}$  к некоторому нормирующему значению  $X_N$  измеряемой величины:

$$\gamma = \frac{\Delta X_{np}}{X_N} \cdot 100\%. \quad (34)$$

Значение  $X_N$  для различных приборов принимает разное значение. Для большинства стрелочных приборов с равномерной или степенной шкалой  $X_N$  принимается равным:

1) конечному значению рабочей части шкалы (диапазону измерений прибора), если нулевая отметка находится на краю или вне шкалы;

2) арифметической сумме конечных значений рабочей части шкалы (без учета их знака).

Абсолютная предельная погрешность таких приборов одинакова в любом месте шкалы, а относительная тем меньше, чем больше значение измеряемой величины. Для уменьшения относительной погрешности следует выбирать диапазон измерений прибора так, чтобы стрелка отклонялась не менее чем на половину рабочего участка.

Для средств измерений, предназначенных для измерения величин, для которых установлено номинальное значение,  $X_N$  равно этому номинальному значению. Примерами таких приборов являются: магазины сопротивлений, емкостей и индуктивностей, для которых  $X_N$  равно набранному на магазине значению соответствующей величины.

Класс точности может быть указан на шкале прибора, но это не всегда возможно. Часто используют многопредельные приборы, в которых одна и та же шкала при различных режимах работы или способах включения прибора соответствует различным пределам измерений или даже различным измеряемым величинам. В таких случаях в паспортных данных указывают погрешности для каждого из допускаемых вариантов использования прибора.

Классы точности присваиваются из ряда:  $1 \cdot n; 1,5 \cdot n; 2 \cdot n; 2,5 \cdot n; 4 \cdot n; 5 \cdot n$ , где  $n = 1; 0; -1; -2$  и т.д.

Если класс точности неизвестен, то используют правило: предельная погрешность прибора принимается равной цене деления шкалы прибора. Если оценивают долю деления шкалы, то ее выбирают так, чтобы соответствующее этой доле значение измеряемой величины было меньше предельной погрешности прибора.

## *8 Некоторые дополнительные правила при обработке результатов наблюдении*

### *1. Число значащих цифр при вычислении погрешностей*

“Значащими цифрами числа называют все его цифры, кроме нулей, стоящих левее первой, отличной от нуля, цифры, и нулей, стоящих в конце числа, если они стоят взамен неизвестных или отброшенных цифр” (Определение Брадиса Б.М.).

Можно сформулировать иначе: “Значащими цифрами называют все цифры, кроме левых нулей”.

Заметим, что нуль, стоящий в конце десятичной дроби, - всегда значащая цифра (иначе бы этот нуль просто не писали).

Рассмотрим целое приближенное число с нулями справа. Эти нули могут быть значащими или незначащими. Незначащие нули в конце целого приближенного числа можно отмечать каким-либо знаком, например, чертой или другими обозначениями. Лучше вообще не записывать незначащих нулей. Для этого существует два способа:

1. Переход к кратным единицам.

2. Запись результата вычислений или измерений в нормализованной форме (при этом незначащие нули не пишутся).

Если абсолютная погрешность приближенного числа не превышает половины единицы последнего разряда, то все цифры приближенного числа называют верными. Если в приближенном числе все значащие цифры, кроме последней, являются верными, но абсолютная погрешность числа превышает половину единицы последнего разряда, то цифра этого разряда называется сомнительной.

Правило записи приближенного числа (принцип А.Н. Крылова): “Писать число необходимо так, чтобы в нем все значащие цифры, кроме последней, были верны и лишь последняя цифра была бы сомнительной и при этом не более как на одну единицу”.

По принципу Брадиса-Крылова сомнительную цифру сохраняют и в том случае, когда погрешность числа превосходит единицу последнего разряда, но при этом малые значения погрешности более вероятны, чем большие.

Все цифры приближенного числа, следующие за верными и одной сомнительной цифрой, называют неверными.

По принципу Крылова-Брадиса неверные цифры не пишутся.

Число значащих цифр абсолютной погрешности определяется величиной относительной погрешности средней квадратичной ошибки, соизмеримой с абсолютной погрешностью, по следующей формуле:

$$\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{2(N-1)}} = \frac{100\%}{\sqrt{2(N-1)}}, \quad (35)$$

где  $\varepsilon$  - относительная погрешность определения средней квадратичной ошибки, примерно равной величине абсолютной погрешности;

$N$  - число измерений.

Например: при  $N = 25$ ,  $\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{24}} \approx 15\%$ , т.е. относительная погрешность определения квадратичной ошибки (абсолютной погрешности) вычисляется с точностью примерно равной 15 %. Таким образом, если в абсолютной погрешности первая значащая цифра равна или больше 7, то в окончательном результате следует записывать одну значащую цифру, а если меньше 7 - то две значащие цифры.

Так, если  $\Delta A = 0,7512$ , то в окончательной форме приводим одну значащую цифру, т.е.  $\Delta A = 0,8$  (с учетом округления погрешности с избытком). Если для этого случая ( $\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{24}} \approx 15\%$ ),  $\Delta A = 0,3671$ , то в окончательном виде приводим уже две значащие цифры, т.е.  $\Delta A = 0,37$  (также с учетом округления с избытком).

При  $N = 9$  погрешность определения абсолютной ошибки, вычисляемая по формуле (35)  $\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{24}} \approx 25\%$ . Следовательно, в окончательной форме необходимо привести одну значащую цифру, если первая значащая цифра абсолютной погрешности равна или больше 4 и две значащие цифры, если первая значащая цифра меньше 4.

Практически при числе измерений  $N \leq 15$  погрешность округляют до одной значащей цифры, если она больше или равна двум и сохраняют две

значащие цифры в остальных случаях. Как видно, такие рекомендации не совсем точны и носят рекомендательный характер. В любом случае видно, что абсолютная погрешность записывается с точностью до одной или двух значащих цифр.

## 2. Запись погрешностей и результатов измерений

При окончательной записи результатов и погрешностей измерений мы рекомендуем следующие правила:

1. Абсолютную и относительную погрешность необходимо записывать с точностью до двух значащих цифр.
2. Число значащих цифр при записи среднеарифметического результата измерений определяется разрядом числа абсолютной погрешности его измерения, т.е. при записи среднего значения измеряемой величины  $\langle A \rangle$  необходимо указать все цифры вплоть до последнего десятичного разряда, используемого для записи погрешности.
3. Если абсолютная погрешность составляет единицы последней значащей цифры окончательного результата, то последняя цифра в этом результате является сомнительной, но и её надо записывать. Если же погрешность составляет две значащие цифры, то в этом значении последнюю цифру следует округлить.

Следует, однако, иметь в виду, что правило №3 часто не выполняют.

Ниже, приведены примеры окончательной записи результатов измерений.

Таблица 1

Неправильная запись	Правильная запись
$13,83721 \pm 0,013$	$13,84 \pm 0,013$
$353,12 \pm 38$	$350 \pm 38$
$2742,32 \pm 14,65$	$2740 \pm 15$

Чтобы избежать неопределенностей с нулями в конце числа, рекомендуется окончательный результат записывать в нормализованной форме.

Например,  $12856 = 1,2856 \cdot 10^4$ ;  $0,00865 = 8,65 \cdot 10^{-3}$ .

Поэтому, в третьем столбце, во второй и третьей строках, более корректно результат представить в нормальной форме записи  $(3,5 \pm 0,38) \cdot 10^2$  и  $(2,74 \pm 0,015) \cdot 10^3$  (незначащие нули не пишут).

При вычислении результатов по имеющимся измерениям возникает вопрос, сколько знаков нужно сохранять во всех промежуточных расчетах. Практика показывает, что во всех промежуточных расчетах при небольшом числе наблюдений на каждой стадии вычисления число значащих цифр должно быть больше на одну или на две, чем их количество в окончательном ответе. В этом случае есть уверенность, что самими вычислениями не вносятся заметных ошибок. Если же после вычисления ошибок окажется, что среднее значение измеряемой величины имеет недостаточное число знаков, то все вычисления среднего и его ошибки следует повторить.

---

## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 1

---

### ИЗУЧЕНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ГАУССА И СТАТИСТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ ОБРАБОТКИ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ

#### 1 ЦЕЛЬ РАБОТЫ

1. Изучение основных свойств нормального закона распределения Гаусса.
2. Изучение статистических методов обработки экспериментальных исследований случайных величин.

#### 2 БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

- 1 Савельев И.В. Курс физики. В 3 т. Т.1: Механика. Молекулярная физика / И.В. Савельев. - Лань, 2008. – 352 с.
- 2 Лабораторный практикум по физике: учеб. пособие для вузов / А.С. Ахматов, В.И. Андреевский, А.И. Ахматова.- М.: Высш. шк., 1980.- 360 с.
- 3 Руководство к лабораторным работам по медицинской и биологической физике: учебное пособие для медвузов / И.А. Эссакурова [и др.] / Под ред. А.Н. Ремезова.- М.: Высш. шк., 1987.- 271с.
- 4 Лабораторный практикум по физике: учеб. пособие для студентов втузов / Б.Ф. Алексеев [и др.]; Под ред. К.А. Барсукова и Ю.И. Уханова.- М.: Высш. шк., 1988.- 351 с.
- 5 Теория инженерного эксперимента: [пер. с англ.] / Х. Шенк - М.: Мир, 1972.- 384 с.
- 6 Практическая физика: [пер. с англ.] / Дж. Сквайрс - М.: Мир, 1971.- 248 с.

#### 3 ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ВВЕДЕНИЕ

Относительно свойств и применимости нормального (гауссова) распределения при проведении экспериментальных исследований и в теории ошибок написано большое количество работ. Однако наиболее точно, на наш взгляд, выразился Дж. Сквайрс в своей монографии [6]: «Экспериментаторы верят в применимость гауссова распределения для оценки погрешностей измерений, полагаясь на доказательства математиков, а математики — полагаясь на экспериментальное обоснование». Не останавливаясь на теоретическом обосновании применимости нормального распределения, рассмотрим некоторые свойства и возможности этого распределения для обработки данных экспериментальных исследований.

Будем считать, что при проведении экспериментальных исследований на результат измерения величин любой физической природы оказывают влияние в равной степени большое количество независимых и неизвестных факторов. Поэтому при проведении прямых измерений некоторой физической величины получаются различные количественные значения, которые можно считать случайными. Будем также считать, что наиболее достоверным значением измеряемой величины при большом числе измерений является его среднее значение. Это же значение является и наиболее вероятным. Кроме того положим:

1 Окончательная ошибка любого измерения представляет собой результат большого числа очень малых ошибок, распределенных произвольным образом.

2 Положительные и отрицательные отклонения результатов отдельных измерений относительно истинного значения равновероятны.

3 Большие по абсолютной величине отклонения результата относительно истинного встречаются реже, т.е. вероятность появления погрешности измерений уменьшается с ростом величины погрешности.

На основании сделанных предположений и допущений можно получить выражение для определения вероятности появления возможного значения случайной величины и, таким образом, величины соответствующей погрешности измерений. Такая случайная величина подчиняется так называемому нормальному распределению, которая описывается функцией Гаусса:

$$f(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(X - \langle X \rangle)^2}{2\sigma^2}\right), \quad (1)$$

где  $f(X)$  - плотность распределения результатов наблюдений (т.е. вероятность получения результата  $X$ , приходящегося на единичный интервал  $\Delta X$ ;  $X$  - результат наблюдений некоторой физической величины;  $\langle X \rangle$  - среднее значение измеряемой величины, наблюдающееся с наибольшей вероятностью:

$$\langle X \rangle = \frac{\sum_{i=1}^N X_i}{N}, \quad (2)$$

$\sigma$  - среднеквадратическое отклонение, т.е. параметр, характеризующий степень рассеяния результатов относительно среднего значения  $\langle X \rangle$ .

Приближенно среднеквадратичное отклонение  $\sigma$  для конечного числа произведенных измерений может быть определено по формуле

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (X_i - \langle X \rangle)^2}{N-1}}. \quad (3)$$

При этом отклонение случайной величины от ее среднего значения характеризуется дисперсией  $D$ , которая определяется как квадрат среднеквадратического отклонения  $\sigma$ , т.е.

$$D = \sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (X_i - \langle X \rangle)^2}{N-1}. \quad (4)$$

График нормального закона распределения, построенный в соответствии с соотношением (1), изображен на рисунке 1.

Из выражения (1) и рисунка 1 видно, что графики зависимости плотности распределения симметричны относительно среднего значения  $X$  и при  $X \rightarrow \pm\infty$  кривые асимптотически приближаются к оси абсцисс  $X$ . Форма кривой зависит от величины среднеквадратического отклонения  $\sigma$ . С ростом среднеквадратического отклонения  $\sigma$  уширение кривой плотности распределения возрастает (рисунок 1,  $\sigma_2 > \sigma_1$ ). Максимальное значение функция рас-

пределения вероятности принимает при  $X = \langle X \rangle$  и имеет следующее значение:

$$f_{\max} = f(\langle X \rangle) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}. \quad (5)$$

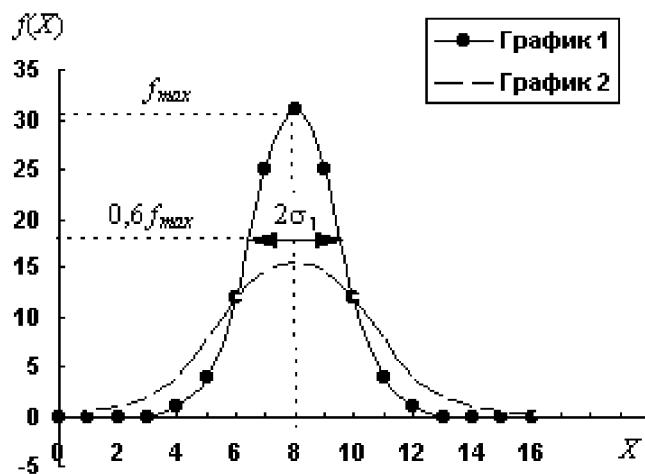


Рисунок 1 – График функции распределения Гаусса

Необходимо отметить, что величина среднеквадратичного отклонения  $\sigma$  определяется как уширение кривой плотности распределения между точками перегиба. Приближенно  $2\sigma$  можно оценить как уширение кривой распределения на ординате, равной  $0,6f_{\max}$  (рисунок 1).

#### 4 ОПИСАНИЕ УСТАНОВОК И МЕТОДИКА ПРОВЕДЕНИЯ ЭКСПЕРИМЕНТА

Выполнение лабораторной работы возможно на нескольких установках.

##### 4.1 Установка для измерения частоты

Экспериментальная установка для измерения частоты (рисунок 2) состоит из генератора низкой частоты (ГЗ-34) и электронно-счетного частотометра.

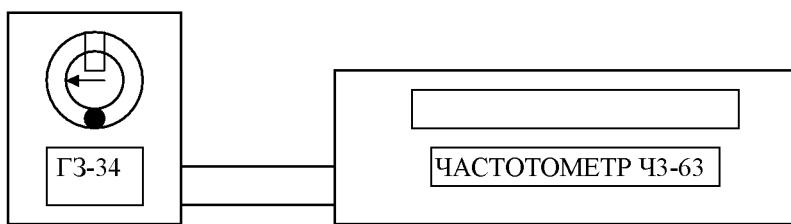


Рисунок 2 - Установка для измерения частоты

В данной работе случайной величиной является частота переменного электрического тока, создаваемого генератором низкой частоты (ГЗ-34). Частота по заданию преподавателя устанавливается на генераторе вращением рукоятки частотного лимба, а точное значение этой частоты определяется с помощью электронно-счетного частотометра (ЧЗ-63, ЧЗ-54 или любого другого с цифровой индикацией).

Порядок работы и включение указанных приборов описан в дополнительной инструкции, составленной в соответствии с техническим описанием используемых приборов.

#### 4.2 Установка для измерения напряжения

Экспериментальная установка для измерения напряжения (рисунок 3) состоит из источника постоянного или переменного напряжения с плавной регулировкой выходного напряжения и цифрового вольтметра для измерения точного значения напряжения источника.

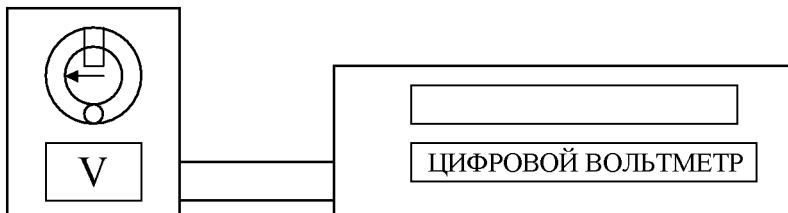


Рисунок 3 - Установка для измерения напряжения

В данной работе случайной величиной является напряжение постоянного или переменного электрического тока, создаваемого источником напряжения. Напряжение по заданию преподавателя устанавливается на источнике вращением рукоятки лимба регулируемого потенциометра, а точное значение этого напряжения определяется с помощью цифрового вольтметра любого типа с требуемыми диапазонами измерений.

Порядок работы и включение указанных приборов описан в дополнительной инструкции, составленной в соответствии с техническим описанием используемых приборов.

#### 4.3 Установка для измерения сопротивления

Экспериментальная установка состоит из набора резисторов одного номинала, цифрового прибора для измерения сопротивления или моста постоянного тока (рисунок 4).

В данной работе случайной величиной являются сопротивления резисторов одного и того же номинала (например 1 кОм). Технология изготовления резисторов такова, что отклонения их сопротивлений в ту или иную сторону от номинала (среднего значения) равновероятны. Поэтому можно предположить, что сопротивления резисторов, взятых из одной партии, распределены по нормальному закону.

Для удобства работы резисторы смонтированы на одной общей панели и одним проводом соединены с измерительным прибором. С помощью переключателя или простым присоединением можно подключать прибор к исследуемым резисторам.

Порядок работы и включение приборов для измерения сопротивления описан в дополнительной инструкции, составленной в соответствии с техническим описанием используемой аппаратуры.

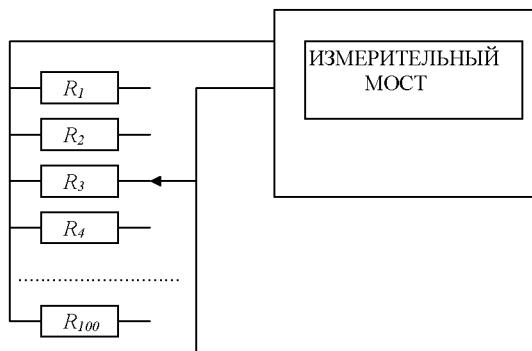


Рисунок 4 - Установка для измерения сопротивления

#### 4.4 Установка для измерения времени

Экспериментальная установка состоит из цифрового секундомера и любой экспериментальной установки, в которой измеряется время движения (падения) исследуемых грузов (маятник Обербека, Максвелла, Атвуда и др.) (рисунок 5).

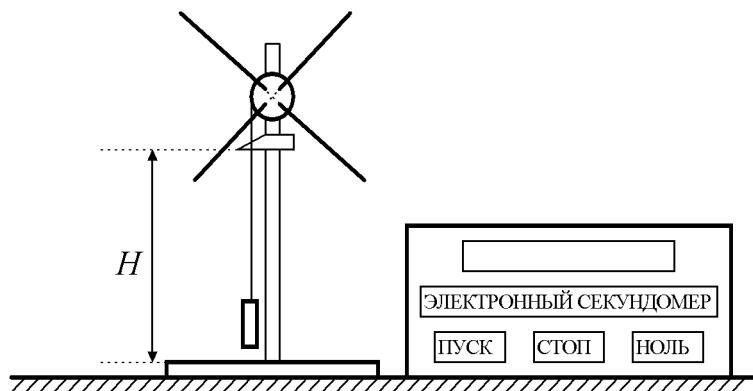


Рисунок 5 - Установка для измерения времени

В данной работе случайной величиной являются время падения груза с определенной высоты  $H$  (высота устанавливается по заданию преподавателя). Время падения груза определяется с помощью электронного секундометра. Как и в предыдущих случаях можно предположить, что измеряемое время падения груза отвечает нормальному закону распределения.

Порядок работы и включение электронного секундомера для измерения времени описан в дополнительной инструкции, составленной в соответствии с техническим описанием прибора.

Выполнять лабораторную работу рекомендуется двум студентам. Один из них устанавливает определенное (по заданию преподавателя) значение параметров экспериментальной установки для измерения исследуемой физической величины (частота — 1...10 кГц, выходное напряжение, высота падения груза — 20...30 см и т.д.), другой студент проводит независимые измерения исследуемых физических величин с помощью чувствительной аппаратуры (частотометр — для измерения частоты, цифровой вольтметр — для измерения напряжения, цифровой секундомер — для измерения времени, мост постоянного тока или универсальный цифровой прибор — для измерения сопротивления).

Число проводимых измерений  $N$  должно быть достаточно велико и составлять примерно  $N \approx 50..100$  измерений. Причем, при увеличении количе-

ства проводимых измерений корректность выводов и точность последующих расчетов возрастает.

В процессе выполнения работы диапазон измерений используемой аппаратуры подбирается таким образом, чтобы заметные изменения (флуктуации) экспериментальных результатов отличались в двух последних разрядах.

Независимо от измеряемой физической величины, рекомендуется следующий порядок выполнения работы.

## 5 ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ И ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

1 Проведите 50...100 измерений исследуемой физической величины. Результаты измерений занесите в таблицу 1.

2 По данным таблицы 1 определите среднее значение измеряемой величины  $\langle X \rangle$  по формуле (2) и оцените среднеквадратическое отклонение  $\sigma$  по формуле (3). Результаты расчета запишите в таблицу 1. Значение  $\langle X \rangle$  и  $\sigma$  потребуются в дальнейшем для расчета функции распределения вероятности и построения соответствующего графика.

3 Постройте гистограмму результатов наблюдений для чего:

3.1 Разбейте диапазон  $[X_{min} \text{ и } X_{max}]$  значений  $X_i$  на 7...8 ( $k = 7..8$ ) одинаковых интервалов  $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = \dots = \Delta_m = \dots = \Delta_k$ . Подсчитайте число  $n_m$  значений физических величин  $X_i$ , попавших в каждый интервал. Результаты подсчета занесите в таблицу 2.

Таблица 1

Частота.....Гц; Напряжение.....В;		Сопротивление.....Ом; Высота.....м;	
Параметры устанавливаются по заданию преподавателя			
№	Измеряемая величина $X_i$ , (единица)	Абсолютная погрешность $\Delta X_i =  X_i - \langle X \rangle $	Квадрат абсолютной погрешности $\Delta X_i^2 = (X_i - \langle X \rangle)^2$
1			
2			
3			
4			
5			
...			
50			
...			
100			
	Среднее значение $\langle X \rangle = \frac{\sum_{i=1}^N X_i}{N}$		Среднеквадратичное отклонение $\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (\Delta X_i)^2}{N-1}}$
	$\langle X \rangle =$		$\sigma =$

3.2 Рассчитайте частоту  $P_m$  (а следовательно и вероятность) того, что величина  $X_i$  попадет в интервал  $\Delta_m$  ( $m$  принимает последовательный ряд значений от 1 до  $k = 7..8$ ) по формуле

$$P_m = \frac{n_m}{N}. \quad (6)$$

При этом  $\sum_{m=1}^k P_m = 1$ . Результаты расчета занесите в таблицу 2.

3.3 Рассчитайте частоту  $p_m$  (а, следовательно, приближенно и плотность вероятности) того, что величина  $X_i$  попадет в единичный интервал  $\Delta_m$  ( $m$  принимает последовательный ряд значений от 1 до 7... 8) по формуле

$$p_m = \frac{P_m}{\Delta} = \frac{n_m}{N\Delta}. \quad (7)$$

Результаты расчета занесите в таблицу 2.

Таблица 2

Номер интервала, $m$	Границы интервала	Число значений, $n_m$	Частота $P_m = \frac{n_m}{N}$	Функция распределения $p_m = \frac{P_m}{\Delta}$
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				

3.4 Постройте гистограмму зависимости  $p_m = f(X)$  для  $X$ , находящихся в середине интервалов  $\Delta$ . Пример построения гистограммы приведен на рисунке 6.

4 Для построения графика зависимости плотности распределения результатов наблюдений в функции  $X$  вначале заполните 2...4 столбцы таблицы 3. На одном графике с гистограммой постройте зависимость функции Гаусса (1) (таблица 3, столбец 4) от соответствующих значений  $\langle X \rangle \pm \sigma \cdot u$  (таблица 3, столбцы 2 и 3). Полученные точки соедините плавной линией. На рисунке 6 приведен пример обработки результатов измерений частоты переменного тока.

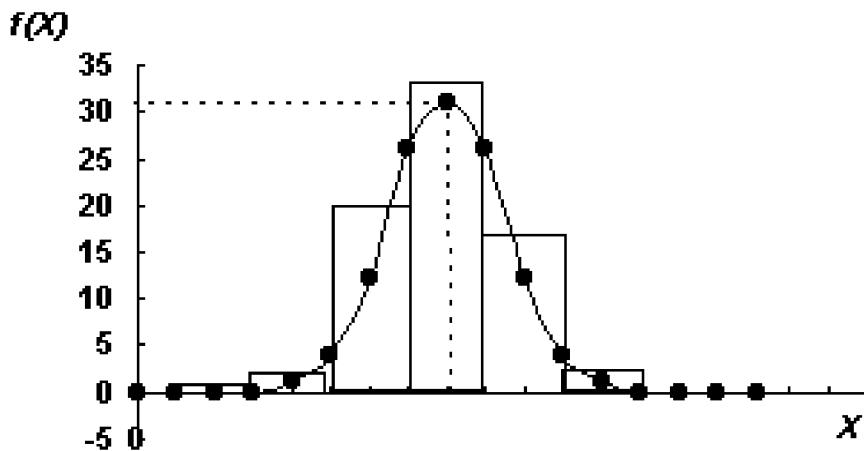


Рисунок 6 – Гистограмма результатов измерений

Таблица 3

$y$	$X = \langle X \rangle + \sigma y$	$X = \langle X \rangle - \sigma y$	Функция Гаусса, $f(X) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(X - \langle X \rangle)^2}{2\sigma^2}\right)$
0,00			
0,20			
0,40			
0,60			
0,80			
1,00			
1,20			
1,40			
1,60			
1,80			
2,00			
2,20			
2,40			

5 Определите среднюю квадратичную погрешность (выборочное среднеквадратичное отклонение, выборочное СКО) по формуле:

$$\Delta S = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}. \quad (8)$$

6 Для значений надежности  $\alpha_1 = 0,95$ ,  $\alpha_2 = 0,98$  и  $\alpha_3 = 0,99$  определите по таблице коэффициенты Стьюдента  $t_{\alpha_1}(N)$ ,  $t_{\alpha_2}(N)$  и  $t_{\alpha_3}(N)$ , и вычислите величину доверительного интервала (величину абсолютной погрешности измерений) по формулам (см. Введение. «Ошибки измерений физических величин и обработка результатов измерений»):

$$\Delta X_1 = \Delta S \cdot t_{\alpha_1}(N); \Delta X_2 = \Delta S \cdot t_{\alpha_2}(N); \Delta X_3 = \Delta S \cdot t_{\alpha_3}(N). \quad (9)$$

7 Окончательный результат измерений запишите в виде:

$$X = \langle X \rangle \pm \Delta X_1;$$

$$X = \langle X \rangle \pm \Delta X_2;$$

$$X = \langle X \rangle \pm \Delta X_3.$$

8 Сделайте краткие выводы по работе.

## 6 КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1 Решите следующую задачу:

При измерении времени падения груза получили следующие значения: 5,2; 4,8; 5,0; 5,1; 5,1 с. Определите при надежности  $\alpha = 0,95$  среднее значение времени падения груза, квадратичную погрешность измерения, величину абсолютной и относительной погрешности.

2 Запишите формулу нормального распределения Гаусса. Объясните смысл величин, входящих в соотношение Гаусса.

3 Изобразите график закона нормального распределения Гаусса. Поясните основные свойства данного графика и связь уширения со среднеквадратичным отклонением.

4 Объясните методику проведения эксперимента и порядок выполнения работы.

**ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 2**

---

**ПРОВЕРКА ЗАКОНОВ СОХРАНЕНИЯ ПРИ СТОЛКНОВЕНИИ МИКРОЧАСТИЦ****1 ЦЕЛЬ РАБОТЫ**

Экспериментально проверить выполнение законов сохранения импульса и энергии.

**2 БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК**

- 1 Савельев И.В. Курс физики. В 3 т. Т.1: Механика. Молекулярная физика / И.В. Савельев. - Лань, 2008. – 352 с.
- 2 Трофимова Т.И. Курс физики: учеб. пособие для вузов / Т.И. Трофимова. - 19-е изд. - Академия, 2012. – 560 с.
- 3 Детлаф А.А., Яворский Б.М. Курс физики.- Академия, 2009. – 720 с.

**3 ПРИБОРЫ И ПРИНАДЛЕЖНОСТИ**

- 1 Фотографии с треками частиц.
- 2 Графики кривых в координатах «пробег - энергия».
- 3 Масштабная линейка, транспортир, калька.

**4 ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ОБОСНОВАНИЕ**

Быстрая заряженная микрочастица, попадая в фотоэмulsionию, нарушает на своем пути структуру кристаллической решетки зерен бромистого серебра и делает их способными к проявлению. Следы частиц в эмульсии (треки) при тщательном осмотре и промере под микроскопом позволяют получить информацию как о природе частиц, оставивших след, так и о характере элементарного процесса (рассеяние, ядерная реакция, распад частиц, рождение пар и т.д.). В данной работе изучается рассеяние  $\alpha$ -частиц на протонах, являющихся ядрами атомов водорода, входящего в состав эмульсии.

Каждому значению энергии данной частицы соответствует определенная длина пробега. Для определения длины пробега частицы на фотографии треков наносят масштаб. Связь между энергиями  $\alpha$ -частиц, протонов и длиной их пробега в данной эмульсии определяется с помощью кривых, приведенных на рисунке 1.

На рисунке 2 приведена схема столкновения  $\alpha$ -частицы с протоном. Импульс  $\alpha$ -частицы до взаимодействия равен  $\vec{p}_\alpha = m_\alpha \vec{V}_\alpha$ , после взаимодействия  $\vec{p}'_\alpha = m_\alpha \vec{V}'_\alpha$ . Импульс протона определяется выражением  $\vec{p}_p = m_p \vec{V}_p$ . Изменение направления движения  $\alpha$ -частицы вследствие столкновения с протоном характеризуется углом рассеяния  $\theta$ . Угол  $\phi$  следа протона относительно начального направления движения  $\alpha$ -частицы называется углом отдачи. Углы  $\phi$  и  $\theta$  называют также углами вылета.

Лабораторная работа состоит из трех этапов.

Первый этап - определение кинетических энергий частиц К после взаимодействия с помощью кривых «пробег - энергия».

Второй этап - определение импульсов частиц и проверка закона сохранения импульса для данного взаимодействия. Вычисление импульсов производится по формуле

$$p = \sqrt{2mK}, \quad (1)$$

где  $K$  - кинетическая энергия;  $m$  - масса частицы ( $m_{\alpha}=6,64 \cdot 10^{-27}$  кг,  $m_p=1,67 \cdot 10^{-27}$  кг). Так как  $m$  - масса нерелятивистской частицы, то вычисленный импульс также является нерелятивистским.

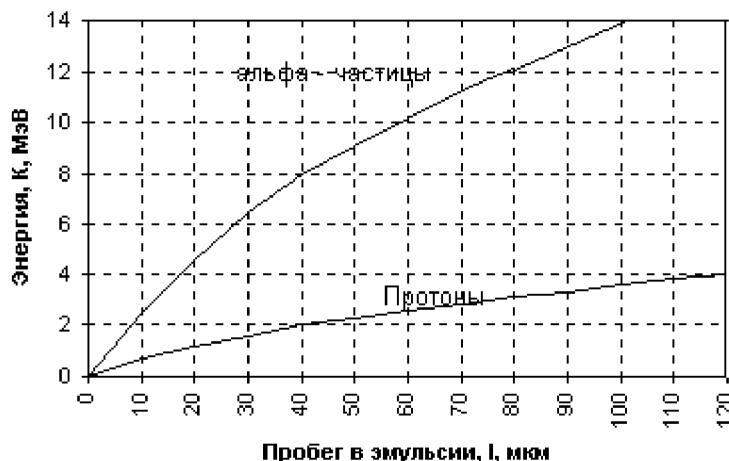


Рисунок 1 - Связь между энергиями  $\alpha$ -частиц, протонов и длиной их пробега

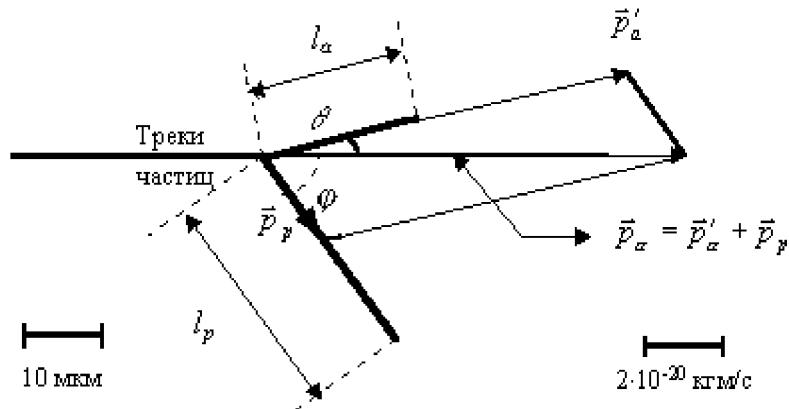


Рисунок 2 - Схема столкновения  $\alpha$ -частицы с протоном

Для проверки закона сохранения импульса следует, пользуясь изготовленным на кальке сколком с фотографии, найти результирующий вектор импульса по правилу параллелограмма. Если его направление совпадает с направлением движения налетающей  $\alpha$ -частицы, то закон сохранения импульса выполняется.

Третий этап - установление характера взаимодействия частиц (упругое или неупругое) исходя из сохранения кинетической энергии. Энергия  $\alpha$ -частицы до столкновения с протоном ( $K_\alpha$ ) может быть определена по формуле

$$K_\alpha = \frac{p_\alpha^2}{2m_\alpha}, \quad (2)$$

где  $p_\alpha$  - импульс  $\alpha$ -частицы до взаимодействия с протоном. Его можно выразить через импульс частицы после взаимодействия, используя теорему синусов:

$$p_\alpha = \frac{p'_\alpha \sin(\varphi + \theta)}{\sin \varphi}. \quad (3)$$

Поэтому

$$K_\alpha = \frac{K'_\alpha \sin^2(\varphi + \theta)}{\sin^2 \varphi}, \quad (4)$$

где  $K'_\alpha$  - найденная ранее энергия  $\alpha$ -частицы после взаимодействия. Если  $K_\alpha = K'_\alpha + K_p$ , то взаимодействие частиц имеет упругий характер.

## 5 ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

### 5.1 Определение энергии частиц после столкновения.

5.1.1 Подготовить таблицу для записи результатов измерений и расчетов.

5.1.2 По фотографии определить длины треков и длину масштабной единицы. Вычислить пробег частиц в эмульсии (1). Учесть погрешность измерений (пункт 6.1).

5.1.3 Пользуясь кривыми «пробег - энергия» (рисунок 1) найти энергию частиц (в МэВ) после взаимодействия. Учесть погрешность измерений (пункт 6.2).

### 5.2 Определение импульса частиц и проверка закона сохранения импульса.

5.2.1 Выразить энергию частиц (в Дж).

Таблица 1

Частица	$l$	$\Delta l$	$K'$	$\Delta K'$	$K'$	$\Delta K'$
	мкм	мкм	МэВ	МэВ	$10^{-13}$ Дж	$10^{-13}$ Дж
$\alpha$						
$p$						
Частица	$p$	$\Delta p$	$\theta, \varphi$	$\Delta\varphi=\Delta\theta$	$K_\alpha$	$\Delta K_\alpha$
	$10^{-20}$ кг·м/с	$10^{-20}$ кг·м/с	град		МэВ	МэВ
$\alpha$						
$p$						

5.2.2 Сделать на кальке сколок с фотографии треков взаимодействующих частиц.

5.2.3 Измерить углы вылета частиц  $\theta$  и  $\varphi$ .

5.2.4 По формуле (1) вычислить значения импульсов частиц.

5.2.5 Вычислить абсолютные ошибки измерения импульсов частиц (пункт 6.3).

5.2.6 Построить на кальке в масштабе (например,  $10^{-20}$  кг·м/с - 5 мм) импульсы частиц. По правилу параллелограмма найти суммарный импульс  $\vec{p}'_\alpha + \vec{p}_p$ .

5.2.7 Продолжить след  $\alpha$ -частицы. Если это продолжение совпадает  $\vec{P}'_\alpha + \vec{p}_p$ , можно утверждать, что закон сохранения импульса выполняется.

### 5.3 Установление характера взаимодействия.

5.3.1 Вычислить кинетическую энергию  $\alpha$ -частицы до взаимодействия по формуле (4).

5.3.2 Вычислить относительную и абсолютную погрешности энергии  $\alpha$ -частицы до столкновения (пункт 6.4). Результаты вычислений занести в таблицу.

5.3.3 Найти сумму энергий частиц после взаимодействия. Сравнить энергию  $\alpha$ -частицы до взаимодействия и сумму энергий протона и  $\alpha$ -частицы после взаимодействия. Сделать вывод о характере взаимодействия.

## 6 ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПОГРЕШНОСТЕЙ

6.1 Выполняя прямые измерения, считают, что абсолютная ошибка измеряемой величины равна половине цены деления измерительного прибора. Так, если измеренные углы вылета и пробег частиц в эмульсии имеют значения  $\theta=14^\circ$ ,  $l_\alpha=20$  мкм для  $\alpha$ -частицы и  $\varphi=55^\circ$ ,  $l_p=30$  мкм для протона, то  $\Delta\theta=\Delta\varphi=0,5^\circ$ , а  $\Delta l_\alpha=\Delta l_p=0,5$  мкм, если масштабная единица (10 мкм) имеет длину 1 см.

6.2 Пользуясь графиками «пробег - энергия», определить абсолютную ошибку измерения энергии, учитывая абсолютную ошибку измерения пробега. Для рассматриваемого случая

$$K'_\alpha = (4,5 \pm 0,1) \text{ МэВ} = (7,20 \pm 0,16) \cdot 10^{-13} \text{ Дж};$$

$$K_p = (1,60 \pm 0,04) \text{ МэВ} = (2,56 \pm 0,06) \cdot 10^{-13} \text{ Дж}.$$

6.3 Вычислить абсолютную ошибку определения импульсов частиц. Поскольку относительную ошибку величины, заданной выражением  $x = \sqrt[n]{A}$ , находят по формуле  $\frac{\Delta x}{x} = \pm \frac{1}{n} \frac{\Delta A}{A}$ , то относительная ошибка определения импульса (формула (1)) имеет вид:  $\frac{\Delta p}{p} = \pm \frac{1}{2} \frac{\Delta K}{K}$ . Границы абсолютной ошибки

$\Delta p = \pm \frac{1}{2} p \frac{\Delta K}{K}$ . Подставив численные значения соответствующих величин для рассматриваемого случая ( $p'_\alpha = 9,78 \cdot 10^{-20}$  кг·м/с,  $p_p = 2,92 \cdot 10^{-20}$  кг·м/с), получаем:

$$\Delta p'_\alpha = \pm 0,1 \cdot 10^{-20} \text{ кг·м/с} \text{ и } \Delta p_p = 0,04 \cdot 10^{-20} \text{ кг·м/с}.$$

6.4 Вычислить относительную и абсолютную ошибки энергии  $\alpha$ -частицы до столкновения ( $K_\alpha$ ). Для этого, воспользовавшись методом определения погрешностей косвенных измерений, прологарифмировать формулу (4), про-дифференцировать полученные выражения и заменить дифференциалы погрешностями соответствующих величин. В результате получим:

$$\frac{\Delta K_\alpha}{K_\alpha} = \pm \left( \frac{\Delta K'_\alpha}{K'_\alpha} + 2ctg(\varphi + \theta)\Delta(\varphi + \theta) + 2ctg\varphi \cdot \Delta\varphi \right).$$

Для рассматриваемого случая, учитывая, что  $\Delta\varphi = \Delta\theta \approx 0,01$  рад, а, следовательно,  $\Delta(\varphi + \theta) = 0,02$  рад, находим  $\frac{\Delta K_\alpha}{K_\alpha} = \pm 0,05 (5\%)$ . Отсюда  $\Delta K_\alpha = \pm 0,3$  МэВ и  $K_\alpha = (5,8 \pm 0,3)$  МэВ.

6.5 Проверить, выполняется ли равенство

$$K_\alpha \pm \Delta K_\alpha = (K'_\alpha + K_p) \pm (\Delta K'_\alpha + \Delta K_p).$$

В рассматриваемом случае это равенство справедливо в пределах погрешностей эксперимента:

$$(5,8 \pm 0,3) \text{МэВ} = (6,10 \pm 0,14) \text{МэВ}.$$

6.6 Сделать выводы по работе.

## 7 КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. В чем суть фотоэмulsionного метода регистрации микрочастиц?
2. Сформулируйте закон сохранения импульса. Как проверить, выполняется ли этот закон при столкновении микрочастиц?
3. Какие законы сохранения выполняются при абсолютно упругом и неупругом столкновениях?
4. Выведите формулу для расчета энергии  $\alpha$ -частицы до столкновения с протоном.
5. Выведите формулу для расчета абсолютной ошибки определения импульса.
6. Выведите формулу для расчета абсолютной ошибки энергии  $\alpha$ -частицы до столкновения.

## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 3

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ СРЕДНЕЙ СИЛЫ УДАРА ДВУХ УПРУГИХ ШАРОВ И ОЦЕНКА МОДУЛЯ УПРУГОСТИ ИХ МАТЕРИАЛОВ

#### **1 ЦЕЛЬ РАБОТЫ**

- 1 Изучение основных законов соударения упругих тел.
- 2 Определение времени соударения упругих тел.
- 3 Определение силы соударения упругих тел.
- 4 Оценка модуля упругости стали.
- 5 Оценка погрешности измерений.

#### **2 БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК**

- 1 Савельев И.В. Курс физики. В 3 т. Т.1: Механика. Молекулярная физика / И.В. Савельев. - Лань, 2008. – 352 с.
- 2 Трофимова Т.И. Курс физики: учеб. пособие для вузов / Т.И. Трофимова. - 19-е изд. - Академия, 2012. – 560 с.
- 3 Детлаф А.А., Яворский Б.М. Курс физики.- Академия, 2009. – 720 с.
- 4 Лабораторный практикум по физике: Учеб. пособие для вузов / А.С. Ахматов, В.И. Андреевский, А.И. Ахматова.- М.: Высш. шк., 1980.- 360 с.

#### **3 ОПИСАНИЕ УСТАНОВКИ И МЕТОДИКА ПРОВЕДЕНИЯ ЭКСПЕРИМЕНТА**

Рассмотрим упругий центральный удар двух стальных шаров одинаковых масс ( $m_1=m_2=m$ ), подвешенных на нерастяжимых нитях длиной  $l$  (рисунок 1).

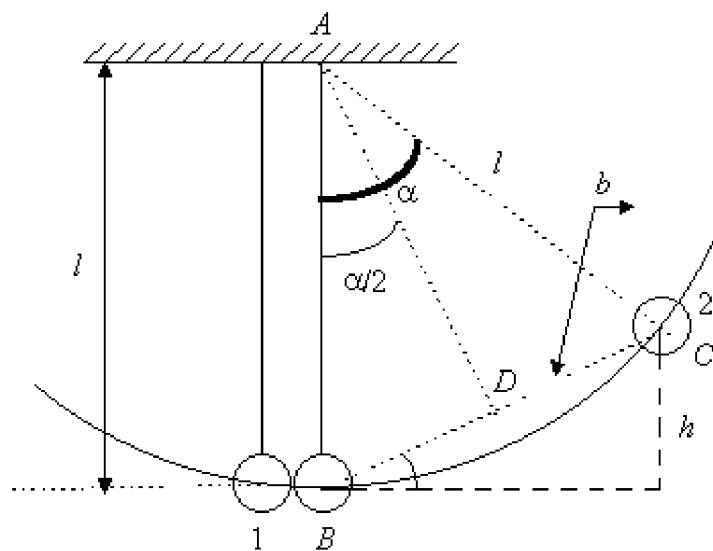


Рисунок 1 – Соударение шаров

При соударении таких шаров выполняются законы сохранения механической энергии и импульса. Если шар 2 отклонить на угол  $\alpha$  от положения равновесия (и на высоту  $h$ ) и отпустить его, то скорость шара в момент соударения может быть определена по закону сохранения энергии

$$mgh = \frac{mV^2}{2}, \quad (1)$$

откуда

$$V = \sqrt{2gh}. \quad (2)$$

Высота подъема шара может быть определена из треугольников ABD и ABC:

$$h = b \sin \frac{\alpha}{2}. \quad (3)$$

При этом

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{b}{2l}. \quad (4)$$

Подставив уравнение (4) в соотношение (3), получим

$$h = \frac{b^2}{2l}. \quad (5)$$

Значение высоты из формулы (5) подставим в уравнение (2) для определения скорости шара 2 в момент соударения:

$$V = \sqrt{2g \frac{b^2}{2l}} = b \sqrt{\frac{g}{l}}. \quad (6)$$

После соударения шар 2 остановится, а шар 1 будет двигаться со скоростью, равной скорости движения шара 2 в момент соударения. Таким образом изменение скорости движения первого шара в момент соударения численно равно скорости первого шара в момент соударения, т.е.

$$\Delta V = V - 0 = V.$$

В этом случае средняя сила соударения может быть определена по второму закону Ньютона

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{(\Delta m \cdot V)}{\Delta t} = m \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{mV}{\tau}, \quad (7)$$

где  $\tau$  - время соударения шаров, зависящее от упругих характеристик материала, геометрии, скорости движения шаров.

В данной работе время соударения шаров определяется экспериментально с помощью конденсаторного хронометра.

В данной лабораторной работе время соударения шаров определяется с помощью метода конденсаторного хронометра. Рассмотрим цепь, состоящую из последовательно соединенных источника постоянного тока с ЭДС  $E$ , резистора  $R$  и конденсатора  $C$  (рисунок 2).

При включении тумблера К по цепи потечет ток, конденсатор будет заряжаться и в момент выключения тумблера напряжение на пластинах конденсатора будет равно  $U$ . При этом  $U = \frac{q}{C}$ , где  $q$  - заряд конденсатора за время прохождения тока (время включения тумблера К). Взяв дифференциал

от левой и правой части последнего соотношения, получим  $dU = \frac{1}{C}dq$ . Так

как  $I = \frac{dq}{dt}$  то  $dq = Idt$ , тогда  $dU = \frac{Idt}{C}$ . Отсюда найдем ток.

$$I = \frac{CdU}{dt}.$$

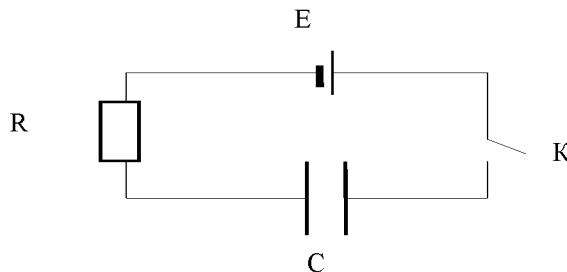


Рисунок 2 – Упрощенная электрическая схема лабораторной установки

С другой стороны, по второму закону Кирхгофа сила тока в цепи равна:

$$I = \frac{E - U}{R}.$$

Приравнивая правые части выражений для силы тока, получим дифференциальное уравнение для определения времени зарядки конденсатора.

$$C \frac{dU}{dt} = \frac{E - U}{R}. \text{ Отсюда } dt = RC \frac{dU}{E - U} = -RC \frac{d(E - U)}{E - U}.$$

Интегрируя последнее выражение, найдем время  $\tau$  зарядки конденсатора.

$$t = \tau = -RC \int_E^{E-U} \frac{d(E-U)}{E-U} = -RC \ln \frac{E-U}{E} = RC \ln \frac{E}{E-U} \quad (8)$$

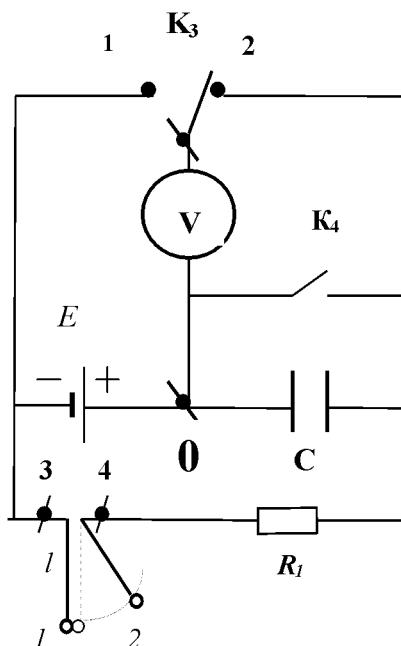


Рисунок 3 – Схема лабораторной установки

На рисунке 3 изображена электрическая схема лабораторной установки. Роль ключа К в лабораторной установке выполняют взаимодействующие шары, подвешенные на опорах 3 и 4. Тумблер K<sub>4</sub> предназначен для нейтрализации накопленного конденсатором заряда перед измерениями. Электродвигущая сила (ЭДС) применяемой батареи и напряжение на конденсаторе после зарядки определяется с помощью высокоомного вольтметра.

В данной лабораторной работе для измерения напряжений применяется цифровой мультиметр (тестер). Перед измерениями тумблер K<sub>3</sub> переводится в положение 1 для определения ЭДС батареи (переключатель пределов измерения постоянного напряжения при этом устанавливается в положение 20 В). Затем вольтметр подключается к конденсатору для измерения напряжения на нем после его зарядки (переключатель пределов измерения постоянного напряжения при этом устанавливается в положение 200 мВ). Время взаимодействия шаров определяется по формуле (8).

### 3.1 ОЦЕНКА МОДУЛЯ УПРУГОСТИ МАТЕРИАЛОВ ШАРОВ

Рассмотрим процесс распространения волн в упругом материале (рисунок 4). Если левой части стержня длиной  $l$  сообщить деформацию (позиция 2), то вдоль оси стержня вправо будет распространяться упругая волна (позиция 3). Отразившись от правого торца (позиция 4), волна изменит направление скорости распространения на противоположное и будет двигаться влево (позиция 5). После прохождения волной пути  $S$ , равного удвоенной длине стержня ( $S = 2l$ ), тело восстановливает свою первоначальную геометрическую форму (позиция 6).

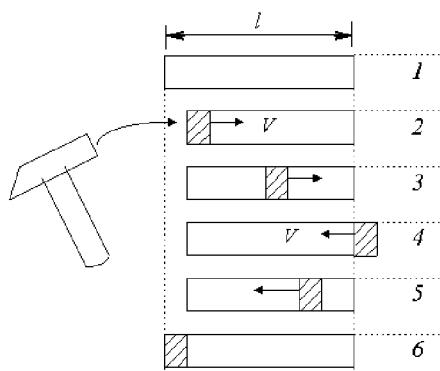


Рисунок 4 – Распространение волн в упругом материале

При взаимодействии упругих шаров происходят аналогичные процессы (рисунок 5).

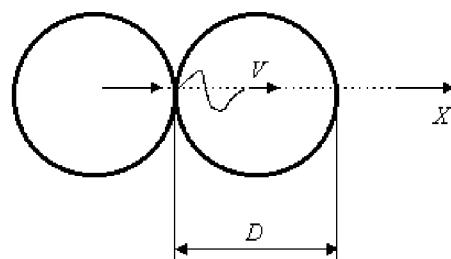


Рисунок 5 – Взаимодействие упругих шаров

Можно показать, что время восстановления формы шаров после их соударения равно времени соударения  $\tau$  и равно времени, в течение которого волна деформации проходит путь, равный удвоенному диаметру шаров ( $2D$ ). Следовательно, зная путь  $2D$  и время соударения  $\tau$ , можно грубо оценить скорость распространения волн в исследуемых телах:

$$V = \frac{2D}{\tau}. \quad (9)$$

Известно [1], что скорость распространения волн в упругих телах оценивается по формуле

$$V = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad (10)$$

где  $\rho$  - плотность материала;  $E$  - модуль упругости (модуль Юнга). Приравнивая соотношения (10) и (9), можно определить модуль упругости

$$E = \frac{4D^2 \rho}{\tau^2}. \quad (11)$$

Соотношение (11) может быть использовано для оценочного расчета модуля упругости исследуемых материалов.

Описанная модель взаимодействия шаров является достаточно грубой. Она не учитывает некоторых особенностей механизма столкновения. Дело в том, что кроме волн сжатия и сдвига в рассматриваемых телах наблюдаются также поверхностные волны, которые существенно усложняют анализируемую модель. Все это дает основание считать, что приведенные расчеты являются оценочными.

Для более точного определения модуля упругости с учетом распространения как продольных, так и поперечных волн в неограниченном материале необходимо использовать следующее соотношение [4]:

$$V = \sqrt{\frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)\rho}}, \quad (12)$$

где  $\mu$  - коэффициент Пуассона (для стали коэффициент Пуассона  $\mu=0,28\dots0,30$ ).

Если в уравнении (12) принять  $\mu = 0,28$ , то получим выражение для определения скорости распространения продольных волн в твердых материалах:

$$V \cong 1,13 \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad (13)$$

Приравнивая соотношения (9) и (13), получим выражение для более точной оценки модуля упругости материалов:

$$E \cong \frac{4D^2 \rho}{1,28\tau^2}. \quad (14)$$

## 4 ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

1 Шар 1 (левый шар) установите в положении равновесия (вертикальное положение нити подвеса). Шар 2 (правый шар) отклоните вправо от положения равновесия и с помощью рукоятки-защелки удерживайте шар в неподвижном отклоненном состоянии.

2 Определите ЭДС источника тока. Для этого установите пределы измерения постоянного напряжения в положение 20 В. Подключите высокоомный вольтметр к клеммам «1» и «0» и измерьте ЭДС применяемой батареи. Результаты измерения запишите в таблицу 1.

3 Подключите вольтметр к клеммам «2» и «0» параллельно конденсатору. При таком подключении вольтметр будет измерять напряжение на конденсаторе после соударения шаров за время их удара. Переключатель пределов измерения при этом установите в положение 200 мВ.

4 С помощью масштабной линейки определите длину нити  $l$  и измерьте расстояние  $b$  (рисунок 1). Результаты измерения запишите в таблицу 1.

5 Поверните рукоятку-защелку против часовой стрелки до тех пор до тех пор, пока не произойдет отрыв шара 2 от отклоненного состояния. После соударения шар 2 остановится, а шар 1 притягивается магнитом или специально изготовленным зажимом. Определите напряжение на конденсаторе после соударения шаров. Результаты измерения запишите в таблицу 2.

6 Разрядите конденсатор при помощи ключа К<sub>4</sub>. Повторите опыт необходимое количество раз.

7 По формулам 6, 7, 8 и 14 рассчитайте скорость, время соударения, модуль упругости и силу соударения шаров. Результаты расчета занесите в таблицы 2 и 3.

8 Рассчитайте среднее значение модуля упругости  $\langle E \rangle$  и среднюю силу  $\langle F \rangle$  соударения шаров по формулам

$$\langle F \rangle = \frac{\sum_i F_i}{n} = \frac{F_1 + F_2 + \dots + F_n}{n},$$

$$\langle E \rangle = \frac{\sum_i E_i}{n} = \frac{E_1 + E_2 + \dots + E_n}{n}.$$

9 Рассчитайте среднюю квадратичную погрешность измерения силы соударения шаров по формуле

$$\Delta S = \sqrt{\frac{\sum_i (\Delta F_i)^2}{n(n-1)}}.$$

10 Вычислите величину абсолютной погрешности (величину доверительного интервала) действующей силы для заданной надежности  $\alpha=0,95$

$$\Delta F = t_{\alpha}(n)\Delta S.$$

11 Рассчитайте относительную погрешность измерения силы соударения

$$\varepsilon = \frac{\Delta F}{\langle F \rangle} \cdot 100\%.$$

12 Сделайте краткие выводы по работе

Таблица 1

Диаметр шара $D$ , м	Длина нити $l$ , м	Масса шара $m$ , кг	$b$ , м	$E$ (ЭДС), В	$V$ , м/с

Таблица 2

№	$U$ , мВ	Время, $\tau$ , с	$E_i$ , ГПа	$\langle E \rangle$ , ГПа
1				
2				
3				
4				
5				

Таблица 3

№	$F_i$ , Н	$\langle F \rangle$ , Н	$\Delta F_i$ , Н	$(\Delta F_i)^2$	$\Delta S$	$\Delta F$ , Н	$\varepsilon$ , %
1							
2							
3							
4							
5							

## 5 КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

- Какие законы сохранения выполняются при упругом и неупругом соударении тел?
- Что называется абсолютно упругим и неупругим ударами?
- Объясните методику определения времени и силы соударения шаров.
- Объясните методику оценки модуля упругости материалов.
- Решите следующую задачу: Скорость первого тела равна  $V_1$ , второго равна нулю. Определите скорости этих тел после упругого и неупругого центральных соударений, если массы тел одинаковы ( $m_1=m_2$ ).

---

## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 4

---

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСКОРЕНИЯ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ ПРИ ПОМОЩИ ПРИБОРА АТВУДА

#### **1 ЦЕЛЬ РАБОТЫ**

Экспериментально определить ускорение свободного падения.

#### **2 БИБЛИОГРАФИЧЕКИЙ СПИСОК**

- 1 Савельев И.В. Курс физики. В 3 т. Т.1: Механика. Молекулярная физика / И.В. Савельев. - Лань, 2008. – 352 с.
- 2 Трофимова Т.И. Курс физики: учеб. пособие для вузов / Т.И. Трофимова. - 19-е изд. - Академия, 2012. – 560 с.
- 3 Детлаф А.А., Яворский Б.М. Курс физики.- Академия, 2009. – 720 с.

#### **3 ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ВВЕДЕНИЕ**

В данной работе ускорение свободного падения определяется с помощью прибора Атвуда (рисунок 1). Через легкий блок перекинута нить, на концах которой подвешены два одинаковых груза массой  $M$  каждый, при этом система находится в равновесии.

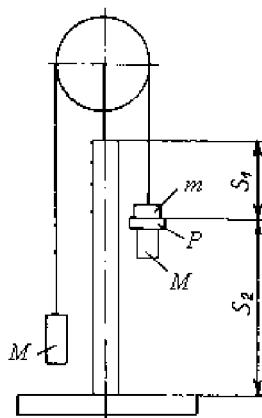


Рисунок 1 – Прибор Атвуда

Если на один из грузов положить добавочный груз (перегрузок) массой  $m$ , то система грузов придет в равноускоренное движение и за промежуток времени  $t_1$  пройдет путь  $S_1$ . На кольце  $P$  перегрузок снимается, и дальше грузы  $M$  движутся равномерно на пути  $S_2$ .

Рассмотрим, что происходит, когда на правый груз помещают добавочный груз. На каждый из грузов, висящих на нити, действуют сила тяжести и сила натяжения нити. Разность этих сил сообщает грузам ускорение. Если считать нить нерастяжимой, то ускорения а правого и левого грузов будут одинаковы по величине и противоположно направлены. Предположим, что блок и нить невесомы, и нить скользит по блоку без трения. В этом случае силы натяжения нити со стороны правого и левого грузов можно считать одинаковыми. На основании второго закона Ньютона можно записать следующие уравнения движения для правого и левого грузов:

$$(M + m)a = (M + m)g - T,$$

$$Ma = T - Mg. \quad (1)$$

Решая эту систему уравнений, получаем:

$$a = \frac{m}{2M + m} \cdot g . \quad (2)$$

Ускорение системы можно изменить, меняя величину перегрузка  $m$ . В конце пути  $S_1$  скорость равнопеременного движения равна

$$V = \sqrt{2aS_1} . \quad (3)$$

После снятия перегрузка  $m$  скорость системы  $V$  сохраняется на пути  $S_2$ , так как движение становится равномерным:

$$V = \frac{S_2}{t_2} . \quad (4)$$

Приравнивая  $V$  из (3) и (4), имеем

$$a = \frac{S_2^2}{2S_1 \cdot t_2^2} . \quad (5)$$

Подставляя значение  $a$  в уравнение (2), получаем расчетную формулу

$$g = \frac{2M + m}{m} \cdot \frac{S_2^2}{2S_1 \cdot t_2^2} . \quad (6)$$

#### 4 ПРИБОРЫ И ПРИНАДЛЕЖНОСТИ

1 Прибор Атвуда ГРМ-2.

#### 5 ОПИСАНИЕ УСТАНОВКИ

Общий вид прибора Атвуда показан на рисунке 2.

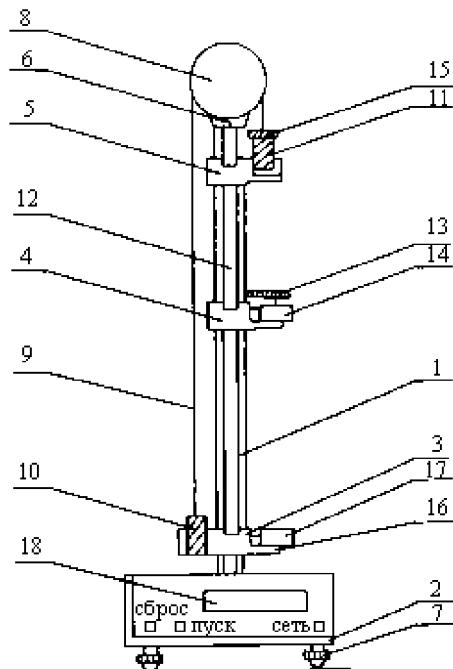


Рисунок 2 – Общий вид прибора Атвуда

На вертикальной колонке 1, закрепленной в основании 2, крепятся три кронштейна: неподвижный нижний 3 и два подвижных - средний 4 и верхний 5, а также верхняя втулка 6. Основание оснащено регулируемыми ножками 7, которые позволяют установить прибор горизонтально. На верхней втулке 6

закреплен блок 8 и электромагнит (он расположен за блоком). Через ролик блока перекинута нить 9 с привязанными к ее концам грузами 10 и 11.

Электромагнит при подаче на него напряжения удерживает систему ролика с грузами в состоянии покоя. Верхний и средний кронштейны можно перемещать вдоль колонки и фиксировать в любом положении, меняя величину путей  $S_1$  и  $S_2$ . Для определения их численного значения на колонке имеется миллиметровая шкала 12. Все кронштейны снабжены указателями положения, а верхний имеет дополнительную черту для определения положения нижней границы большего груза и начала пути движения. На среднем кронштейне 4 закреплено кольцо  $P$  (13) и фотоэлектрический датчик № 1 (14). Кольцо  $P$  снимает с перемещающегося вниз большого груза перегрузок  $t$  (15), а фотоэлектрический датчик ( $\Phi\mathcal{E}$ ) в это время формирует электрический импульс, сигнализирующий начало равномерного движения. Оптическая ось фотоэлектрического датчика находится на уровне указателя положения среднего кронштейна.

На нижнем кронштейне закреплены фотоэлектрический датчик № 2 (17) и резиновые амортизаторы 16, в которые ударяется падающий груз. После пересечения оптической оси фотоэлектрического датчика № 2 (она находится на уровне указателя кронштейна) нижней гранью падающего груза образуется электрический сигнал, фиксирующий прохождение грузиками пути  $S_2$ .

На основании прибора находится миллисекундомер 18, к которому подключены фотоэлектрические датчики № 1 и № 2. На лицевой панели миллисекундомера размещены клавиши:

«сеть» - нажатие этой клавиши включает питающее напряжение и вызывает автоматический сброс показаний прибора (все индикаторы высвечивают нули), включаются лампочки  $\Phi\mathcal{E}$ -датчиков и электромагнит;

«пуск» - нажатие этой клавиши выключает питание электромагнита;

«сброс» - нажатие вызывает сброс показаний миллисекундомера.

## 6 ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

- 1 Установить верхний и средний кронштейны на выбранной высоте.
- 2 Проверить, установлены ли все кронштейны так, чтобы правый груз, падая, проходил через середины окошек фотоэлектрических датчиков.
- 3 Нажать клавишу «сеть». При этом должны загореться лампочки  $\Phi\mathcal{E}$ -датчиков и индикаторы миллисекундомера высвечивать нули.
- 4 Переместить правый грузик в верхнее положение и положить на него один из перегрузков.
- 5 Совместить нижнюю грань правого грузика с чертой, нанесенной на верхнем кронштейне.
- 6 Измерить при помощи шкалы на колонке отрезки пути равноускоренного  $S_1$  и равномерного  $S_2$  движений.
- 7 Нажать клавишу «пуск».
- 8 Измерить время  $t_2$  движения грузов на пути  $S_2$ .
- 9 Повторить измерения 5...9 раз при одних и тех же значениях  $S_1$  и  $S_2$ .

10 По индивидуальному заданию (в этом случае нужно сделать дополнительные таблицы):

- а) провести измерения для других значений  $S_1$  и  $S_2$ .
  - б) провести измерения с другим перегрузком  $t$ .
  - в) снять зависимость ускорения системы  $a$  от величины перегрузка  $t$ .

## **7 ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ**

1 Рассчитать ускорение силы тяжести по формуле (6), где

$$M = (60 \pm 0,01) \cdot 10^{-3} \text{ kG},$$

$$m_1 = (5,3 \pm 0,01) \cdot 10^{-3} \text{ кг}, m_2 = (6,0 \pm 0,01) \cdot 10^{-3} \text{ кг}, m_3 = (10,0 \pm 0,01) \cdot 10^{-3} \text{ кг}.$$

Погрешность определения длины путей  $S_1$  и  $S_2$ :  $\Delta S = \pm 10^{-3}$  м.

Диапазон измеряемого времени 0...99,999 с.

Относительная погрешность измерения времени – 0,02 %.

2 Определить среднее значение ускорения силы тяжести

$$\langle g \rangle = \frac{\sum_{i=1}^n g_i}{n},$$

где  $n$  - число измерений.

### 3 Найти абсолютные погрешности каждого измерения

$$\Delta g_i = | \langle g \rangle - g_i |$$

и их квадраты  $\Delta g_i^2$ .

4 Определить среднюю квадратичную погрешность

$$<\Delta S> = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \Delta g_i^2}{n(n-1)}}.$$

5 Выбрать по таблице коэффициент Стьюдента  $t_{\alpha}(n)$  для надежности  $\alpha=0,95$ .

6 Вычислить доверительный интервал по формуле

$$\Delta g = \Delta S \cdot t_\alpha(n).$$

### 7 Определить относительную погрешность

$$\varepsilon = \frac{\Delta g}{\langle g \rangle} \cdot 100\%.$$

8 Результаты измерений и вычислений занести в таблицу 1.

9 Сделать выводы по работе, в которых результат записать в виде

$$g = \langle g \rangle \pm \Delta g; \varepsilon = \dots \%$$

Таблица 1

## 8 КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

- 1 Какими уравнениями описывается равнопеременное движение?
- 2 Выведите расчетную формулу для определения ускорения свободного падения. Какие допущения делаются при этом выводе, как они влияют на точность измерений?
- 3 В каком случае необходимо учитывать массу блока и как записать для него основной закон динамики вращательного движения?
- 4 Какова связь углового ускорения с линейным?

---

## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 5

---

### ПРОВЕРКА ОСНОВНОГО УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

#### 1 ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Экспериментально проверить основное уравнение динамики вращательного движения.

#### 2 БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

- 1 Савельев И.В. Курс физики. В 3 т. Т.1: Механика. Молекулярная физика / И.В. Савельев. - Лань, 2008. – 352 с.
- 2 Трофимова Т.И. Курс физики: учеб. пособие для вузов / Т.И. Трофимова. - 19-е изд. - Академия, 2012. – 560 с.
- 3 Детлаф А.А., Яворский Б.М. Курс физики.- Академия, 2009. – 720 с.

#### 3 ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ВВЕДЕНИЕ

Основное уравнение динамики вращательного движения может быть представлено в виде:

$$\vec{\beta} = \frac{\vec{M}}{I},$$

где  $\vec{M}$  - момент внешних сил;  $I$  - момент инерции тела;  $\vec{\beta}$  - угловое ускорение.

Проверка основного уравнения динамики вращательного движения производится в два этапа: первый этап – при условии постоянного относительно оси вращения момента инерции ( $I_z = \text{const}$ ), второй этап – при условии постоянного момента силы ( $M_z = \text{const}$ ). Измеряемой величиной в обоих случаях является угловое ускорение  $\beta$ . Таким образом, уравнение динамики следует перезаписать в скалярном виде

$$\beta = \frac{M_z}{I_z}. \quad (1)$$

Первый этап проверки заключается в установлении прямой пропорциональности между угловым ускорением  $\beta$  и моментом внешних сил  $M_z$ . Коэффициент пропорциональности при этом – величина обратная моменту инерции. Второй этап проверки – установление прямой пропорциональности между  $\beta$  и величиной, обратной моменту инерции – т.е.  $\frac{1}{I_z}$ . Коэффициент пропорциональности в этом случае – момент сил  $M_z$ .

Для проверки основного уравнения динамики вращательного движения используется маятник Обербека (рисунок 1). Прибор состоит из шкива радиуса  $r$  закрепленного на оси  $Z$ , четырех стержней, расположенных под углом  $90^\circ$  друг к другу и четырех одинаковых грузов  $m$ , которые можно передвигать вдоль стержней и закреплять на определенном расстоянии  $l$  от оси. Грузы обязательно должны быть расположены симметрично относительно

оси вращения. Прибор приводится в движение силой натяжения нити, которую создает груз  $m_1$ , прикрепленный к концу нити.

По второму закону Ньютона

$$m_1g - T = m_1a,$$

откуда

$$T = m_1(g - a). \quad (2)$$

Масса груза подобрана таким образом, чтобы при движении груза его ускорение  $a$  было много меньше ускорения свободного падения  $g$  т.е.  $a \ll g$ . В этом случае можно принять, что  $T \approx m_1g$ . Тогда момент силы, вращающей крестовину будет равен

$$M_T = T \cdot r \approx m_1g \cdot r. \quad (3)$$

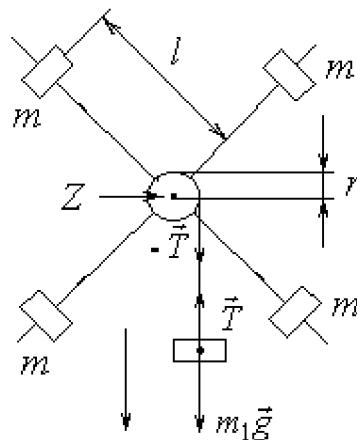


Рисунок 1 – Маятник Обербека

Ускорение груза  $m_1$  можно определить, измеряя время  $t$  за которое груз опускается с высоты  $h$  и используя формулы кинематики равноускоренного движения

$$a = \frac{2h}{t^2}. \quad (4)$$

Тангенциальное ускорение точек, лежащих на поверхности шкива, равно ускорению груза  $a_\tau = a$ , т.к. нить нерастяжима и сматывается со шкива без проскальзывания. Учитывая связь тангенциального и углового ускорения  $a_\tau = \beta \cdot r$ , получаем расчетную формулу для углового ускорения

$$\beta = \frac{2h}{rt^2}. \quad (5)$$

На крестовину кроме момента, создаваемого силой натяжения нити, действует также момент сил сопротивления, возникающих при вращении крестовины в подшипнике качения. Момент силы сопротивления  $M_{TP}$  противодействует моменту силы натяжения нити  $M_T$ . Тогда

$$M_z = M_T - M_{TP}. \quad (6)$$

Таким образом, уточненную формулу зависимости углового ускорения от суммарного момента сил можно представить в виде

$$\beta = \frac{M_T - M_{TP}}{I_Z}. \quad (7)$$

На шкиве крестовины маятника Обербека имеются две канавки радиусами  $r_1$  и  $r_2$ , что соответствует двум моментам сил натяжения нити  $M_1$  и  $M_2$ . Представив зависимость углового ускорения  $\beta$  от момента силы натяжения нити  $M_T$  (рисунок 2), графически, можно по точке пересечения прямой с осью моментов определить величину момента силы трения  $M_{TP}$  в подшипнике крестовины.

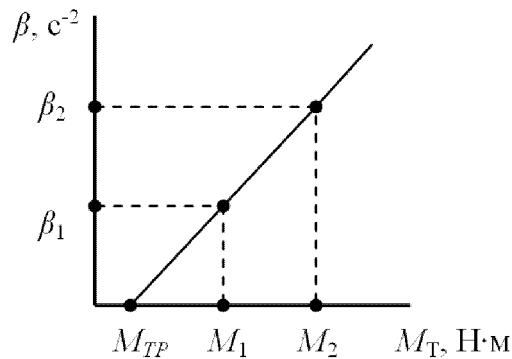


Рисунок 2 – Зависимость углового ускорения от момента силы

Момент инерции маятника равен сумме моментов инерции крестовины со шкивом и грузиков. Так как грузики расположены достаточно далеко от оси вращения, то их можно считать материальными точками. Момент инерции каждого груза равен  $I_{ep} \cong ml^2$ . Момент инерции всей системы равен

$$I \cong I_0 + 4ml^2, \quad (8)$$

где  $I_0$  - момент инерции крестовины со шкивом. Его можно найти по формуле

$$I_0 = \frac{M_z}{\beta} = \frac{M_T - M_{TP}}{\beta} = \frac{(m_1 g \cdot r - M_{TP}) \cdot r \cdot t_0^2}{2h}. \quad (9)$$

Располагая грузики  $m$  на различном расстоянии от оси вращения момент инерции крестовины можно изменять (см. формулу (8)). Представив зависимость углового ускорения  $\beta$  от величины обратной моменту инерции крестовины – т.е. от  $1/I_z$  графически (рисунок 3) можно проверить основное уравнение динамики вращательного движения.

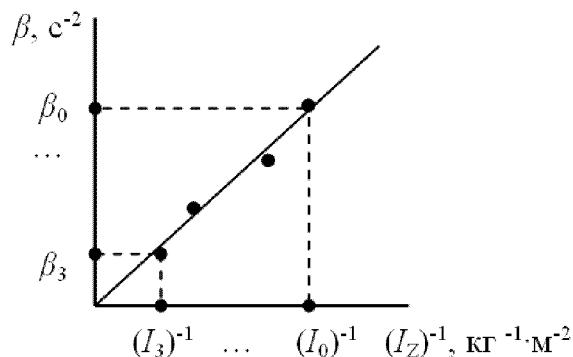


Рисунок 3 – Зависимость углового ускорения от величины обратной моменту инерции крестовины

#### 4 ПРИБОРЫ И ПРИНАДЛЕЖНОСТИ

- 1 Крестовина со шкивом и грузами.
- 2 Штангенциркуль.

3 Линейка.

4 Секундомер.

## 5 ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

5.1 Проверка основного уравнения динамики вращательного движения при постоянном моменте инерции

1 Установите грузики на концах стержней крестовины симметрично оси вращения.

2 Штангенциркулем измерьте радиус первой и второй канавки шкива  $r_1$  и  $r_2$ .

3 Намотайте нить на канавку шкива радиуса  $r_1$ , следя за равномерностью укладки витков нити.

4 С помощью секундомера измерьте время  $t_1$  опускания груза с высоты  $h$ .

5 Намотайте нить на вторую канавку шкива радиуса  $r_2$  и поднимите груз на ту же высоту  $h$ .

6 Измерьте  $t_2$  - время опускания груза. Данные занесите в таблицу 1. Рассчитайте значения углового ускорения  $\beta_1$  и  $\beta_2$  по формуле (5).

7 Действия, указанные в п.п. 3 – 6 повторите три раза, вычислите средние значения  $\langle\beta_1\rangle$  и  $\langle\beta_2\rangle$ , их отношение  $\langle\beta_1\rangle/\langle\beta_2\rangle$  и занесите в таблицу 1.

8 Постройте график зависимости углового ускорения  $\langle\beta\rangle$  от момента силы  $M_T \approx m_1 g \cdot r$ . По графику определите момент силы трения  $M_{\text{тр}}$ .

9 По графику определите момент инерции  $I_Z$  крестовины с грузами  $\left( I_Z = \frac{\Delta M}{\Delta \beta} \right)$ . Здесь символ  $\Delta$  – это приращение!

10 Вычислите относительные  $\varepsilon_M$  и  $\varepsilon_\beta$  и абсолютные погрешности  $\Delta M$  и  $\Delta \beta$ , учитывая, что определяющей в этой работе является приборная погрешность:

$$\varepsilon_M \approx \frac{\Delta r}{r}, \text{ и } \varepsilon_\beta \approx \frac{\Delta r}{r} + \frac{2\Delta t}{t}.$$

Величину  $\Delta r$  определите самостоятельно с учетом толщины нити и характера намотки нити на шкив:  $\Delta t = 0,05$  с

11 Вычислите относительную и абсолютную  $\Delta I = \varepsilon_I \cdot I_Z$  погрешности определения момента инерции, учитывая, что  $\varepsilon_I \approx \varepsilon_M + \varepsilon_\beta$ .

Таблица 1

№	$r_1, \text{ м}$	$t_1, \text{ с}$	$r_2, \text{ м}$	$t_2, \text{ с}$	$\beta_1, \text{ с}^{-2}$	$\beta_2, \text{ с}^{-2}$	$\frac{M_1}{M_2}$	$\frac{\langle\beta_1\rangle}{\langle\beta_2\rangle}$
1								
2								
3								
4								
5								

5.2 Проверка основного закона динамики вращательного движения при постоянном моменте силы

1 Снимите грузики  $m$  с крестовины. Намотайте нить на канавку меньшего радиуса и определите время  $t_0$  опускания груза с высоты  $h$ . Вычислите  $I_0$  по формуле (9).

2 Закрепляя грузики  $m$  поочередно: вблизи шкива, на середине и у края стержней, измерьте время  $t$  опускания груза с высоты  $h$ . Данные занесите в таблицу 2. Опыт повторите 3 – 5 раз (по указанию преподавателя)

3 Рассчитайте по формуле (8) момент инерции системы в случаях пункта 2. Рассчитайте соответствующие угловые ускорения  $\beta$  по формуле (5).

4 Постройте график зависимости углового ускорения  $\beta$  от величины, обратной моменту инерции  $I_Z$  (по 4 точкам).

Сделайте выводы по работе, указав значение момента силы трения  $M_{\text{тр}}$ , момента инерции крестовины (по пункту 5.1):  $I = I_Z \pm \Delta I$ , и, проверив соответствие графика по пункту 5.2 прямо пропорциональной зависимости.

Таблица 2

№	$t_0$ , с	$I_0$ , $\text{кг}\cdot\text{м}^2$	$\beta_0$ , $\text{с}^{-2}$	$l_1$ , м	$I_1$ , $\text{кг}\cdot\text{м}^2$	$t_1$ , с	$\beta_1$ , $\text{с}^{-2}$	$l_2$ , м	$I_2$ , $\text{кг}\cdot\text{м}^2$	$t_2$ , с	$\beta_2$ , $\text{с}^{-2}$	$l_3$ , м	$I_3$ , $\text{кг}\cdot\text{м}^2$	$t_3$ , с	$\beta_3$ , $\text{с}^{-2}$
1															
2															
3															
4															
5															

## 6 КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1 Запишите и сформулируйте основное уравнение вращательного движения. Дайте определения физических величин, входящих в это уравнение.

2 Дайте определение момента инерции и момента силы. Каковы единицы измерения этих величин? Каков физический смысл момента инерции?

3 Выведите формулу для определения углового ускорения, если известно время  $t$  опускания груза с высоты  $h$ .

4 Как можно изменить момент сил, действующих на крестовину?

5 Как можно изменить момент инерции крестовины с грузами?

6 Сформулируйте теорему Штейнера.

## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 6

### ИЗУЧЕНИЕ ПРЕЦЕССИИ ГИРОСКОПА И ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЕГО МОМЕНТА ИНЕРЦИИ

#### **1 ЦЕЛЬ РАБОТЫ**

- 1 Определение угловой скорости прецессии гироскопа.
- 2 Определение момента инерции гироскопа.

#### **2 БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК**

- 1 Савельев И.В. Курс физики. В 3 т. Т.1: Механика. Молекулярная физика / И.В. Савельев. - Лань, 2008. – 352 с.
- 2 Трофимова Т.И. Курс физики: учеб. пособие для вузов / Т.И. Трофимова. - 19-е изд. - Академия, 2012. – 560 с.
- 3 Детлаф А.А., Яворский Б.М. Курс физики.- Академия, 2009. – 720 с.

#### **3 ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ВВЕДЕНИЕ**

Гироскоп - это быстро вращающееся симметричное твёрдое тело, ось вращения которого (ось симметрии) может изменять своё направление в пространстве. Простейшим гироскопом, например, является детский волчок, быстро вращающийся вокруг своей оси, конец которой установлен на горизонтальную опору. Гироскоп, применяемый в технике, обычно представляет собой маховик, установленный в кардановом подвесе (рисунок 1), позволяющем маховику свободно поворачиваться в любом направлении и занимать произвольную ориентацию в пространстве.

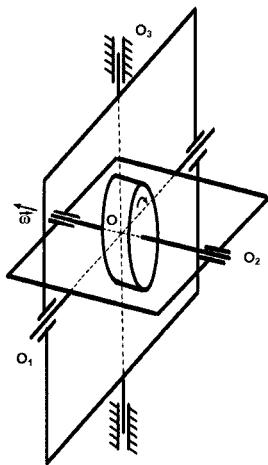


Рисунок 1 – Гироскоп в кардановом подвесе

Такой гироскоп имеет три вращательных степени свободы и ни одной поступательной. Точка О пересечения трёх взаимно перпендикулярных осей ОО<sub>1</sub>, ОО<sub>2</sub>, ОО<sub>3</sub> карданового подвеса является точкой подвеса гироскопа. Если центр масс гироскопа совпадает с точкой подвеса, то такой гироскоп называется уравновешенным, в противном случае – неуравновешенным (тяжёлым).

На рисунке 2 схематично изображена экспериментальная установка – гироскоп, состоящая из массивного маховика (диск D, показанный на рисунке 2 штриховой линией) и противовесов (K<sub>1</sub> и K<sub>2</sub>), установленных на оси

$O_2$ , карданового подвеса, установленного в штативе. Такое устройство обеспечивает маховику возможность вращения по трём взаимноперпендикулярным осям. Ось  $O_2$  является главной устойчивой осью маховика гироскопа. Гироскоп может быть раскручен до большой угловой скорости  $\omega$  по оси  $O_2$  (двигатель, ротором которого является диск D, для простоты не показан на рисунке). Противовес  $K_2$  может быть установлен в любом заданном положении на оси  $O_2$ , что позволяет уравновесить гироскоп, то есть совместить его центр тяжести, с точкой подвеса O, в которой приложена сила реакции  $\vec{N}$  подвеса.

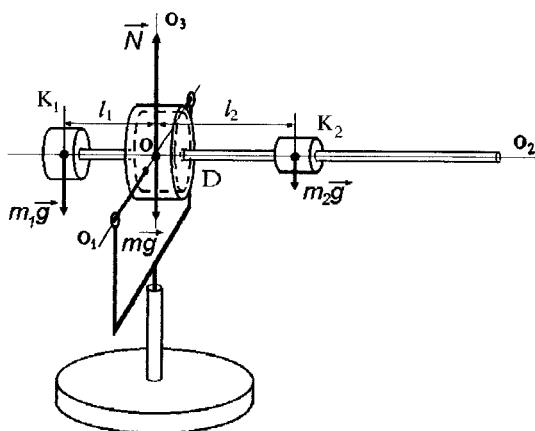


Рисунок 2 – Гироскоп. Экспериментальная установка

Для данной установки при горизонтальном расположении оси  $O_2$  условие уравновешенности имеет вид:  $P_1l_1 = P_2l_2$ , где  $P_1 = m_1g$ ,  $P_2 = m_2g$ , а  $l_1$  и  $l_2$  – расстояния по оси  $O_2$  от точки подвеса O до центров тяжести грузов  $K_1$  и  $K_2$  массами  $m_1$  и  $m_2$  соответственно ( $g$  - ускорение свободного падения). В этом случае результирующий момент внешних сил ( $\vec{P}_1$ ,  $\vec{P}_2$ ,  $m\vec{g}$  и  $\vec{N}$ ), действующих на гироскоп равен нулю, и, следовательно, согласно закону сохранения момента импульса гироскоп сохраняет свою ориентацию в пространстве.

Если сместить противовес  $K_2$  (рисунок 3), то равновесие нарушится, и на гироскоп будет действовать момент внешних сил  $\vec{M}$  (момент сил  $\vec{P}_1$  и  $\vec{P}_2$  относительно точки подвеса O)

$$\vec{M} = [\vec{P}_1, \vec{l}_1] + [\vec{P}_2, \vec{l}_2^*], \quad (1)$$

где  $\vec{l}_1$  и  $\vec{l}_2^*$  - радиус-векторы, проведённые из точки O до центров тяжести грузов  $K_1$  и  $K_2$ , соответственно. Для модуля момента сил можно записать:

$$M = |P_2 l_2^* - P_1 l_1| \sin \varphi = P_2 |l_2^* - l_1| \sin \varphi = P_2 x \sin \varphi, \quad (2)$$

где  $x$  - смещение по оси  $O_2$  противовеса  $K_2$  от положения равновесия ( $x = |l_2^* - l_1|$ ),  $\varphi$  - угол между вертикалью и осью  $O_2$  (рисунок 3). Если записать основной закон динамики вращательного движения в виде:

$$d\vec{L} = \vec{M} dt, \quad (3)$$

где  $t$  - время,  $\vec{L}$  - момент импульса гироскопа, то видно, что в каждый момент времени вектор  $\vec{L}$  изменяется в направлении вектора момента силы  $\vec{M}$ .

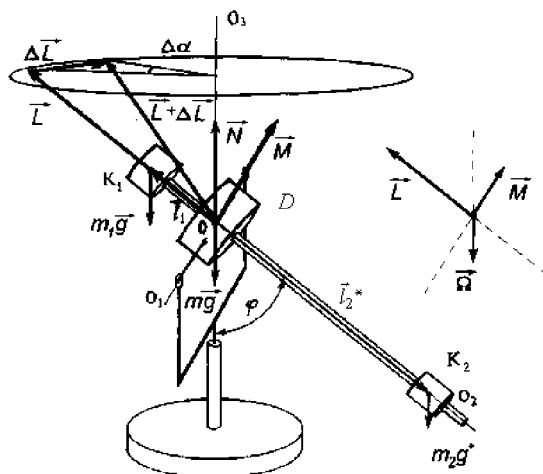


Рисунок 3 – Неуравновешенный гироскоп

В рассматриваемом случае после смещения груза  $K_2$  на гироскоп действует момент силы тяжести направленный горизонтально перпендикулярно осям  $O_2$  и  $O_3$ . Поэтому вектор момента импульса  $\vec{L}$  будет поворачиваться, если пренебречь моментом сил трения, без изменения по модулю. Поскольку угловая скорость вращения  $\omega$  гироскопа по оси  $O_2$  настолько велика, что кинетическая энергия вращения  $\frac{I\omega^2}{2}$  гораздо больше возможных изменений

его потенциальной энергии при поворотах по любой из осей, то вектор момента импульса  $\vec{L}$  приблизительно параллелен оси  $O_2$  (такой гироскоп называют быстрым волчком). Это означает, что ось гироскопа  $O_2$  под действием внешнего момента сил  $\vec{M}$  будет совершать поворот вокруг вертикальной оси  $O_3$ , описывая в пространстве конус.

Такое вращение оси гироскопа под действием внешнего момента сил называется прецессией. На рисунке 3 схематично показано малое приращение момента импульса  $\Delta\vec{L}$ , которому соответствует поворот оси гироскопа на малый угол  $\Delta\alpha$ . По определению угловая скорость прецессии  $\Omega = d\alpha/dt$ .

Из рисунка 3 видно, что  $\Delta L = \Delta\alpha \cdot L \sin\varphi$ . Используя уравнение (3), получаем выражение для угловой скорости прецессии  $\Omega = M/L \sin\varphi$ . (В векторной форме оно имеет вид:  $[\vec{\Omega}, \vec{L}] = \vec{M}$  (рисунок 3)). Таким образом анализ поведения неуравновешенного гироскопа на основе закона динамики вращательного движения (3) показал, что направление прецессии определяется направленностью векторов  $\vec{M}$  и  $\vec{L}$ . Чем больше момент импульса гироскопа  $\vec{L}$ , тем труднее вызвать прецессию и, следовательно, тем стабильнее ориентация в пространстве оси вращения гироскопа. Подставляя выражение для модуля момента импульса  $M = P_2 x \sin\varphi$ , получаем формулу для расчёта угловой скорости прецессии  $\Omega \approx P_2 \cdot x / L$ . Поскольку смещение противовеса невелико, и гироскоп вращается по оси симметрии  $O_2$  очень быстро, то  $\Omega \ll \omega$ , и  $L \approx I\omega$  в результате получаем

$$\Omega \approx \frac{P_2 \cdot x}{I\omega}, \quad (4)$$

где  $I$  - момент инерции гироскопа относительно оси вращения  $O\bar{O}_2$ . Из полученной формулы видно, что чем больше  $I$  и  $\omega$  тем меньше угловая скорость прецессии гироскопа.

## 4 ПРИБОРЫ И ПРИНАДЛЕЖНОСТИ

- 1 Гироскоп в кардановом подвесе.
- 2 Секундомер.
- 3 Линейка масштабная.
- 4 Весы технические.
- 5 Источник тока.

## 5 ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

### 5.1 Наблюдение поведения уравновешенного гироскопа

- 1 Уравновесить гироскоп, то есть добиться состояния безразличного равновесия при горизонтальном положении его оси, передвигая противовес  $K_2$ .
- 2 Проверить уравновешенность гироскопа. Для этого включить электромотор гироскопа и убедиться, что ось его не прецессирует.
- 3 Осторожно повернуть штатив гироскопа, наблюдая за поведением оси гироскопа. Записать результат наблюдений.
- 4 При неподвижном положении штатива лёгким нажимом карандаша на ось гироскопа попробовать вызвать её поворот в горизонтальной и вертикальной плоскостях. По результатам наблюдений поворота оси (прецессии) под действием приложенного момента силы определить направление вектора момента импульса  $\vec{L}$  маховика гироскопа. Результаты наблюдений записать в отчёт.

### 5.2 Определение угловой скорости прецессии гироскопа и его момента инерции

- 1 Уравновесить гироскоп с помощью противовеса  $K_2$  так, чтобы полностью отсутствовала его прецессия. Измерить линейкой расстояние  $h_1$  от конца оси гироскопа до противовеса  $K_2$ .
- 2 Сместить груз  $K_2$  от положения равновесия к концу оси, закрепить его и измерить расстояние  $h_2$  от конца оси гироскопа до противовеса  $K_2$ . Полученные значения  $h_1$  и  $h_2$  занести в таблицу.
- 3 Установив ось прецессирующего гироскопа горизонтально измерить время  $t$  его  $N$  полных оборотов (обосновать выбор  $N$ ). При этом всё время нужно следить, чтобы ось  $O\bar{O}_2$  гироскопа не отклонялась от горизонтальной плоскости.
- 4 При заданном  $h_2$  повторить измерения по пункту 3 несколько раз. Полученные данные занести в таблицу.
- 5 Взвесить противовес  $K_2$  на технических весах с учётом погрешности взвешивания  $\Delta m_2$ . Рассчитать соответствующее значение силы тяжести  $P_2 = m_2 g$

## 6 ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

- 1 По результатам измерений вычислить среднее время  $\langle t \rangle$  для  $N$  оборотов оси гироскопа и затем рассчитать угловую скорость прецессии по формуле

$$\Omega = \frac{2\pi N}{\langle t \rangle}. \quad (5)$$

2 Вычислить случайную погрешность измерения времени  $N$  оборотов  $\langle \Delta t \rangle$  методом средних значений. Относительную  $\varepsilon_\Omega$  и абсолютную погрешность  $\Delta\Omega$  определения угловой скорости прецессии рассчитать по формулам

$$\varepsilon_\Omega = \langle \Delta t \rangle / \langle t \rangle, \quad \Delta\Omega = \varepsilon_\Omega \Omega.$$

3 Рассчитать величину смещения  $x$  противовеса  $K_2$  от положения равновесия ( $x = h_1 - h_2$ ). Исходя из характеристик линейки оценить погрешность определения  $x$ .

Таблица 1

№	$h_1$ , м	$h_2$ , м	$x$ , м	$\Delta x$ , м	$N$	$t_i$ , с	$\langle t \rangle$ , с	$\Delta t_i$ , с	$P_2$ , Н	$\Omega$ , рад/с	$\Delta\Omega$ , рад/с	$I$ , кг·м <sup>2</sup>	$\Delta I$ , кг·м <sup>2</sup>
1													
2													
3													
4													
5													

4 Вычислить момент инерции маховика гироскопа по формуле

$$I = \frac{P_2 \cdot x}{\omega \cdot \Omega}, \quad (6)$$

где  $\omega$  – установившаяся угловая скорость вращения гироскопа.

5 Рассчитать относительную  $\varepsilon_I$  и абсолютную погрешность  $\Delta I$  определения момента инерции гироскопа, по формулам

$$\varepsilon_I = \frac{\Delta m_2}{m_2} + \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta \omega}{\omega} + \frac{\Delta \Omega}{\Omega} + \frac{\Delta g}{g}, \quad \Delta I = \varepsilon_I \cdot I.$$

## 6 КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1 Что называется гироскопом?

2 Сформулируйте основной закон динамики вращательного движения и дайте определения входящих в него физических величин.

3 Приведите примеры применения уравновешенного и неуравновешенного гироскопов в технике (в частности, объясните устройство и принципы действия гирокомпаса и гироскопического измерителя ускорения).

4 Дайте определение явления прецессии и нутации оси гироскопа. Объясните от чего зависит величина и направление прецессии.

5 Как влияют силы трения на прецессию гироскопа?

## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 7

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТА ИНЕРЦИИ ТВЕРДЫХ ТЕЛ ПРИ ПОМОЩИ КРУТИЛЬНОГО МАЯТНИКА

#### 1 ЦЕЛЬ РАБОТЫ

- 1 Определение момента инерции твердых тел при помощи крутильного маятника.
- 2 Изучение основных законов динамики вращательного движения твердого тела и законов гармонического колебательного движения.

#### 2 БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

- 1 Савельев И.В. Курс физики. В 3 т. Т.1: Механика. Молекулярная физика / И.В. Савельев. - Лань, 2008. – 352 с.
- 2 Трофимова Т.И. Курс физики: учеб. пособие для вузов / Т.И. Трофимова. - 19-е изд. - Академия, 2012. – 560 с.
- 3 Детлаф А.А., Яворский Б.М. Курс физики.- Академия, 2009. – 720 с.
- 4 Лабораторный практикум по физике / Под ред. А.С. Ахматова.- М.: Высш. шк., 1980.- 301 с.
- 5 Курс физики: Практикум / И.Л. Бабич, Ю.И. Гриценко, А.В. Мартынюк и др.; Под ред. Д.А. Городецкого -К.: Вища шк., 1992.-399 с.

#### 3 ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ВВЕДЕНИЕ

Если подвесить твердое тело 1 на стальной проволоке 2 и закрутить его вокруг вертикальной оси на угол  $\phi$  (рисунок 1), то, предоставленное самому себе, тело начнет совершать свободные крутильные колебания.

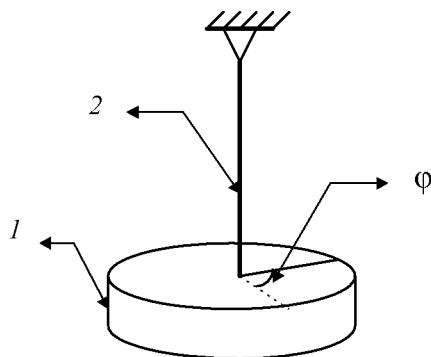


Рисунок 1 – Тело совершающее свободные крутильные колебания

Для анализа возникших колебаний решим основную задачу динамики вращательного движения, т.е. определим уравнение движения рассматриваемого тела по известному силовому воздействию. Для этого вначале определим момент силы, действующий на тело крутильного маятника.

При повороте тела на угол  $\phi$  возникает крутящий момент силы  $M$ , стремящийся повернуть тело в положение равновесия. Опыт показывает, что момент силы  $M$  пропорционален углу  $\phi$ :

$$M = -f\phi, \quad (1)$$

где  $f$  - постоянная для данной проволоки величина, называемая модулем кручения (коэффициентом кручения), а знак минус указывает на то, что

момент силы направлен в сторону противоположную смещению тела от положения равновесия.

Момент действующей силы можно записать используя основное уравнение динамики вращательного движения (второй закон динамики для вращательного движения):  $M = I\varepsilon = I \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$ . С учетом (1), получим следующее дифференциальное уравнение второго порядка, описывающее процесс колебательного движения рассматриваемого тела кривошарнирного маятника:

$$I \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -f\varphi.$$

Для последующего анализа перенесем все величины полученного уравнения в левую часть, одновременно разделив обе части выражения на  $I$ :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{f}{I}\varphi = 0. \quad (2)$$

Введем следующее обозначение:

$$\omega_0^2 = \frac{f}{I}. \quad (3)$$

С учетом введенного обозначения (3) дифференциальное уравнение (2) будет иметь следующий вид:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \omega_0^2\varphi = 0. \quad (4)$$

Решение уравнения (4) можно представить в виде:

$$\varphi = \varphi_m \cos(\omega_0 t + \alpha),$$

где  $\varphi_m$  - амплитуда колебаний;  $\omega_0$  - круговая частота колебаний;  $\alpha$  - начальная фаза колебаний. Маятник будет совершать кривошарнирные колебания с частотой  $\omega_0$ . Так как  $\omega_0 = 2\pi/T$ , то период колебаний  $T$  может быть найден по формуле

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}. \quad (5)$$

С учетом выражения (3) соотношение (5) для определения периода колебаний будет иметь следующий вид:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{f}}. \quad (6)$$

Из уравнения (6) определим момент инерции тела.

$$I = \frac{fT^2}{4\pi^2}. \quad (7)$$

Данное соотношение может быть использовано для определения момента инерции  $I$  тела по известному моменту инерции эталона  $I_0$ . Для удобства преобразуем выражение (7). Так как  $f/4\pi^2$  есть величина постоянная, то

это отношение обозначим через  $a$ . Тогда выражение (7) можно представить в виде:

$$I = aT^2. \quad (8)$$

Из уравнения (8) следует, что момент инерции кривошильного маятника прямо пропорционален квадрату периода колебаний.

#### 4 ОПИСАНИЕ УСТАНОВКИ, ВЫВОД РАБОЧЕЙ ФОРМУЛЫ И МЕТОДИКА ПРОВЕДЕНИЯ ЭКСПЕРИМЕНТА

Схема экспериментальной установки для определения момента инерции тел с помощью кривошильного маятника представлена на рисунке 2.

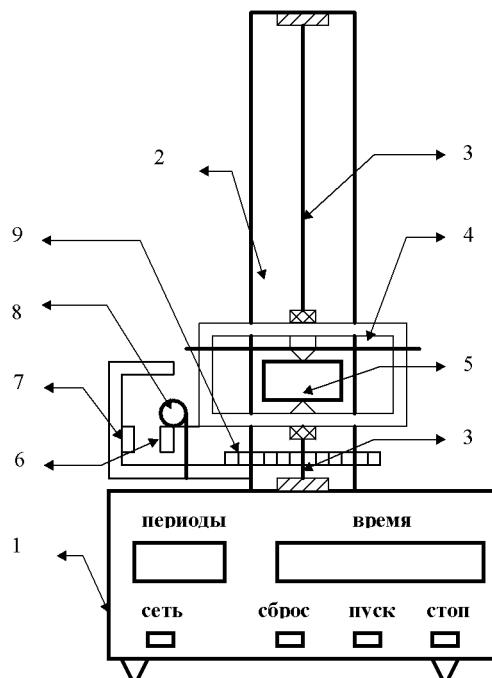


Рисунок 2 – Схема установки

Установка состоит из блока измерения 1 с секундомером, позволяющим определять число и время колебаний маятника. У основания маятника закреплена колонка 2, на которой с помощью кронштейнов растянута проволока 3 с рамкой 4, в которой крепятся исследуемые тела 5, момент инерции которых требуется найти. К рамке прикреплена пластина 6, которая позволяет с помощью фотоэлектрического датчика 7 измерять число полных колебаний тела и время колебаний. Для измерения начального угла закручивания нити колонка 2 снабжена шкалой 9, на которой устанавливается электромагнит 8,держивающий пластину 6 и маятник в исходном состоянии.

Характеристика эталона и тел, момент инерции которых требуется определить, дана в таблице 1.

В качестве эталона берется цилиндр известной массы и геометрии.

Для получения рабочей формулы при определении момента инерции тел по известному моменту инерции эталона проанализируем соотношение (8). Запишем выражение (8) для рамки маятника без рассматриваемых тел, для рамки маятника с эталоном и с телом, момент инерции которого необходимо найти:

$$\begin{cases} I_0 = aT_0^2 \\ I_0 + I_{\vartheta} = aT_{\vartheta}^2, \\ I_0 + I = aT^2 \end{cases} \quad (9)$$

где  $I_0$ ,  $T_0$  – момент инерции и период колебаний рамки крутильного маятника без тела;  $I_{\vartheta}$ ,  $T_{\vartheta}$  – момент инерции и период колебаний рамки крутильного маятника с эталоном;  $I$ ,  $T$  - момент инерции и период колебаний рамки крутильного маятника с исследуемым телом.

Исключив из уравнений (9)  $I_0$  и  $a$ , определим момент инерции исследуемого тела

$$I = I_{\vartheta} \frac{T^2 - T_0^2}{T_{\vartheta}^2 - T_0^2}. \quad (10)$$

В качестве эталона выберем цилиндр (таблица 1), момент инерции которого относительно его оси определяется выражением

$$I_{\vartheta} = \frac{1}{2} Mr^2, \quad (11)$$

где  $M$  - масса эталона (цилиндра) (кг),  $r$  - его радиус (м).

Подставляя значение момента инерции эталона  $I_{\vartheta}$  из уравнения (11) в соотношение (10), получим рабочую формулу для определения момента инерции исследуемых тел:

$$I = \frac{1}{2} Mr^2 \frac{T^2 - T_0^2}{T_{\vartheta}^2 - T_0^2}. \quad (12)$$

Используя соотношение (12), найдем выражение для определения абсолютной погрешности момента инерции исследуемого тела.

$$\Delta I = \sqrt{\left(\frac{\partial I}{\partial M} \Delta M\right)^2 + \left(\frac{\partial I}{\partial r} \Delta r\right)^2 + \left(\frac{\partial I}{\partial T} \Delta T\right)^2 + \left(\frac{\partial I}{\partial T_0} \Delta T_0\right)^2 + \left(\frac{\partial I}{\partial T_{\vartheta}} \Delta T_{\vartheta}\right)^2}.$$

Отсюда получим следующие формулы для расчета абсолютной и относительной погрешности момента инерции:

$$\Delta I = I \cdot \sqrt{\left(\frac{\Delta M}{M}\right)^2 + \left(\frac{2\Delta r}{r}\right)^2 + \left(\frac{2I\Delta T}{(T_0^2 - T^2)}\right)^2 + \left(\frac{2T_0(T^2 - T_{\vartheta}^2)}{(T_0^2 - T_{\vartheta}^2)(T_0^2 - T^2)} \Delta T_0\right)^2 + \left(\frac{2T_{\vartheta}\Delta T_{\vartheta}}{(T_0^2 - T_{\vartheta}^2)}\right)^2}. \quad (13)$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta I}{I} \cdot 100\%. \quad (14)$$

## 5 ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

- 1 Включите прибор нажатием кнопки «СЕТЬ» на блоке измерения 1.
- 2 Установите электромагнит 8 в положение, соответствующее начальному углу отклонения крутильного маятника (примерно  $25^\circ \dots 30^\circ$ ).
- 3 Поверните (закрутите) рамку 4 крутильного маятника до соприкосновения с электромагнитом.
- 4 Нажмите кнопку «ПУСК». После того как на счетчике колебаний появится цифра 9 нажмите кнопку «СТОП». Время полных 10 колебаний запишите в таблицу 2.

5 Установите в рамке маятника эталон. (В качестве эталона берется цилиндр с известной массой и геометрией в соответствии с таблицей 1). Измерьте время 10 колебаний маятника с установленным эталоном. Результаты измерений запишите в таблицу 2.

6 Извлеките эталон из рамки маятника и установите в данной рамке исследуемое тело так, чтобы ось вращения совпадала с одной из главных осей инерции. Измерьте время 10 колебаний маятника. Результаты измерений запишите в таблицу 2.

7 Повторите измерения для других осей вращения (по заданию преподавателя). Результаты измерений запишите в таблицу 2.

8 Выключите установку, отключив ее от сети.

## 6 ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

1 Рассчитайте периоды колебаний крутильного маятника без тела, рамки с эталоном и с исследуемым телом (телами). Результаты расчета запишите в таблицу 2.

2 Рассчитайте средний период колебаний, величину абсолютной и относительной погрешности периода колебаний вероятностным методом при надежности  $\alpha = 0,95$ . Результаты расчета запишите в таблицы 2 и 3.

3 Рассчитайте в соответствии с заданием момент инерции тела по формуле (12). Результаты расчета запишите в таблицу 3.

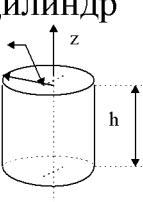
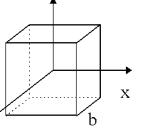
4 Определите абсолютную и относительную погрешности момента инерции исследуемого тела по формулам (13) и (14). Результаты расчета запишите в таблицу 3.

5 Рассчитайте момент инерции исследуемых тел относительно главных осей по формулам, приведенным в таблице 1. Результаты расчета запишите в таблицу 3.

6 Сравните результаты проведенных расчетов, полученных по пунктам 3 и 5.

7 Сделайте краткие выводы по работе.

Таблица 1

Форма тела	Геометрические параметры					Масса тела, кг	Момент инерции
	r, мм	h, мм	a, мм	b, мм	c, мм		
Эталон-цилиндр 	30 ±0,1	120 ±1	—	—	—	1,652 ±0,001	$I_z = \frac{1}{2}Mr^2$
Тело №1, куб 	—	—	50,0 ±0,1	50,0 ±0,1	50,0 ±0,1	0,964 ±0,001	$I_z = I_y = I_x = \frac{Ma^2}{6}$

Тело №2, параллелепипед	—	—	40,0 $\pm 0,1$	60,0 $\pm 0,1$	100 $\pm 0,1$	1,843 $\pm 0,001$	$I_Z = \frac{M(a^2 + b^2)}{12}$ $I_Y = \frac{M(a^2 + c^2)}{12}$ $I_X = \frac{M(c^2 + b^2)}{12}$
Тело №3, параллелепипед	—	—	50,0 $\pm 0,1$	50,0 $\pm 0,1$	100 $\pm 0,1$	1,924 $\pm 0,001$	$I_Z = \frac{M a^2}{6}$ $I_Y = \frac{M(a^2 + c^2)}{12}$ $I_X = \frac{M(c^2 + b^2)}{12}$

Таблица 2

Таблица 3

№	Образец, ось	$T_0$ , с	$T_\Theta$ , с	$T$ , с	$I$ , кг м <sup>2</sup>	$\Delta I$ , кг·м <sup>2</sup>	$\varepsilon, \%$	$I_{\text{расчетное}}$ (по таблице 1)
1								
2								
3								
4								

**7 КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ**

- 1 Получите рабочую формулу для определения момента инерции кривошильного маятника.
- 2 Получите выражения для определения кинетической энергии при вращательном движении.
- 3 Что называется моментом инерции? Каков физический смысл момента инерции?
- 4 Сформулируйте теорему Штейнера. Выполните формулу теоремы Штейнера.
- 5 Как определить приборную погрешность при определении момента инерции? Сравните приборную и случайную погрешности.
- 6 Как определить момент инерции тел правильной и неправильной формы?

---

## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 8

---

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТА ИНЕРЦИИ МЕТОДОМ ТРИФИЛЯРНОГО ПОДВЕСА

#### 1 ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Определение момента инерции тел произвольной формы с помощью трифиллярного подвеса.

#### 2 БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

- 1 Савельев И.В. Курс физики. В 3 т. Т.1: Механика. Молекулярная физика / И.В. Савельев. - Лань, 2008. – 352 с.
- 2 Трофимова Т.И. Курс физики: учеб. пособие для вузов / Т.И. Трофимова. - 19-е изд. - Академия, 2012. – 560 с.
- 3 Детлаф А.А., Яворский Б.М. Курс физики.- Академия, 2009. – 720 с.

#### 3 ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ВВЕДЕНИЕ

Трифиллярный подвес (рисунок 1) представляет собой диск 1 массой  $m$ , подвешенный на трех симметричных упругих нитях (2 – 4), укрепленных на диске 5. Верхняя часть круглого диска 5 закреплена неподвижно, нижний диск может осуществлять крутильные колебания вокруг вертикальной оси, проходящей через центр масс дисков (платформы). При такой конструкции центр масс нижнего диска 1 может перемещаться только вдоль вертикальной оси вращения. При этом период колебаний диска определяется величиной момента инерции диска и исследуемых грузов, находящихся на нем.

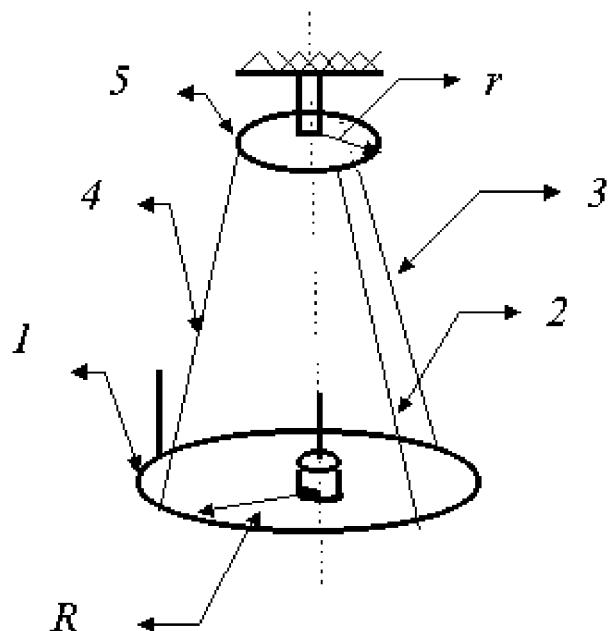


Рисунок 1 – Трифиллярный подвес

При вращении диска вокруг вертикальной оси происходит подъем его на высоту  $h$ . Вследствие этого приращение потенциальной энергии определяется соотношением

$$E_n = mgh, \quad (1)$$

где  $m$  – масса диска;  $h$  – высота подъема диска;  $g$  – ускорение свободного падения.

При вращении нижнего диска вокруг вертикальной оси его потенциальная энергия его превращается в кинетическую. В момент прохождения через положение равновесия потенциальная энергия полностью перейдет в кинетическую  $E_k$ :

$$E_k = \frac{1}{2} I \omega_0^2, \quad (2)$$

где  $I$  - момент инерции диска;  $\omega_0$  - угловая скорость нижнего диска при прохождении положения равновесия.

В отсутствии сил трения и сопротивления выполняется закон сохранения механической энергии

$$\frac{1}{2} I \omega_0^2 = mgh. \quad (3)$$

Можно показать, что при малых отклонениях от положения равновесия нижний диск совершает гармонические колебания. При этом зависимость угла поворота (углового смещения) диска от времени может быть представлена в виде

$$\beta = \alpha \sin \frac{2\pi}{T} t, \quad (4)$$

где  $\beta$  - угол поворота диска (угловое смещение);  $T$  - период колебаний диска;  $t$  - время.

Определим угловую скорость диска и её максимальное значение при прохождении через положение равновесия. Так как угловая скорость равна производной от угла поворота платформы по времени, то

$$\omega = \frac{d\beta}{dt} = \frac{2\pi\alpha}{T} \cos \frac{2\pi}{T} t.$$

В момент прохождения положения равновесия ( $t = 0, \frac{1}{2} T, T$  и т.д.) угловая скорость  $\omega_0$  максимальна и равна

$$\omega_0 = \frac{2\pi\alpha}{T}. \quad (5)$$

Подставляя значение максимальной угловой скорости из уравнения (5) в выражение (3), получим

$$mgh = \frac{1}{2} I \left( \frac{2\pi\alpha}{T} \right)^2. \quad (6)$$

Для определения момента инерции рассмотрим схему подъема нижнего диска трифиллярного подвеса (рисунок 2). Если  $l$  - длина нитей подвеса,  $R$  - радиус нижнего диска,  $r$  - радиус верхнего диска, то высота подъема нижнего диска при его вращении относительно вертикальной оси равна

$$h = OO_1 = BC - BC_1 = \frac{(BC)^2 - (BC_1)^2}{BC + BC_1}.$$

Так как

$$(BC)^2 = (AB)^2 - (AC)^2 = l^2 - (R - r)^2$$

и

$$(BC_1)^2 = (BA_1)^2 - (A_1C_1)^2 = l^2 - (R^2 + r^2 - 2Rr \cos \alpha),$$

то

$$h = \frac{2Rr(1 - \cos \alpha)}{BC + BC_1} = \frac{4Rr \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{BC + BC_1}. \quad (8)$$

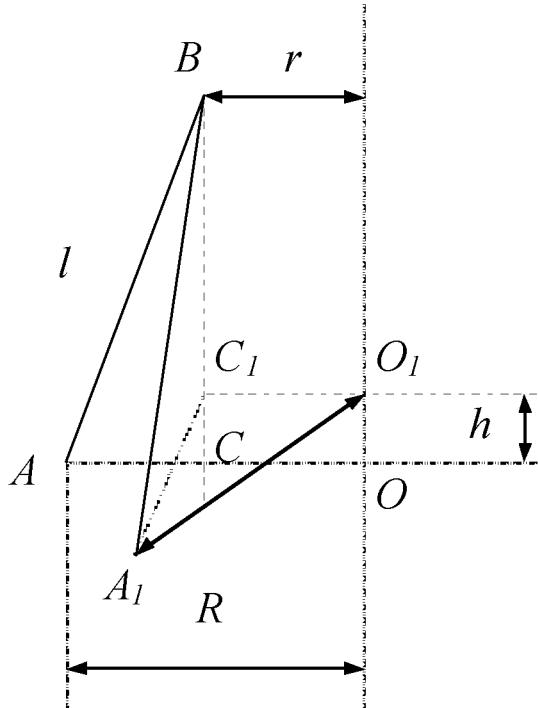


Рисунок 2 – Схема подъема диска

При малых углах отклонения  $\alpha$  значение синуса этого угла можно заменить просто значением  $\alpha$ , а величину знаменателя положить равной  $2l$ . Учитывая это, имеем:

$$h = \frac{Rr\alpha^2}{2l}. \quad (9)$$

Тогда на основании уравнений (6) и (9) получим

$$mg \frac{Rr\alpha^2}{2l} = \frac{1}{2} I \left( \frac{2\pi\alpha}{T} \right)^2,$$

откуда

$$I = \frac{mgRr}{4\pi^2 l} T^2. \quad (10)$$

По формуле (10) может быть определен момент инерции как самой платформы, так и тел, расположенных на этой платформе.

Для удобства отсчета колебаний платформы имеется метка, против которой находится указатель.

## 4 ПРИБОРЫ И ПРИНАДЛЕЖНОСТИ

Трифилярный подвес, штангенциркуль, секундомер, образцы для измерений.

## 5 ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

- 5.1 Измерьте диаметр верхнего и нижнего диска трифилярного подвеса.
- 5.2 Сообщите нижней платформе вращательный импульс. При этом амплитуда колебаний трифилярного подвеса не должна превышать 3...5 градусов
- 5.3 Измерьте время 10 – 20 (по заданию преподавателя) полных колебаний трифилярного подвеса. Рассчитайте период колебаний. Результаты измерений занесите в таблицу 1.
- 5.4 Рассчитайте момент инерции платформы по формуле (10). Результаты расчета занесите в таблицу 2.

## 6 ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОГРЕШНОСТИ ИЗМЕРЕНИЙ ВЕРОЯТНОСТНЫМ МЕТОДОМ

- 6.1 Рассчитайте среднее значение момента инерции по формуле

$$I = \frac{\sum I_i}{n} = \frac{I_1 + I_2 + \dots + I_n}{n}.$$

- 6.2 Рассчитайте абсолютные погрешности отдельных измерений  $\Delta I_i = |<I> - I_i|$  и их квадраты  $|\Delta I_i|^2$ .

- 6.3 Вычислите среднюю квадратичную погрешность

$$\Delta S = \sqrt{\frac{\sum \Delta I_i^2}{n(n-1)}}.$$

- 6.4 Вычислите среднюю абсолютную погрешность (величину доверительного интервала) для заданной надежности  $\alpha$

$$\Delta I = t_\alpha(n) \cdot \Delta S.$$

- 6.5 Рассчитайте относительную погрешность измерения момента инерции

$$\varepsilon = \frac{\Delta I}{<I>} \cdot 100\%.$$

- 6.6. Окончательный результат запишите в виде

$$I = (<I> \pm \Delta I), \text{ кг}\cdot\text{м}^2, \varepsilon = \dots \text{ \%}.$$

## 7 ОЦЕНКА ПРИБОРНОЙ ПОГРЕШНОСТИ (По заданию преподавателя)

- 7.1 Получим формулу приборной относительной погрешности при определении момента инерции диска трифилярного подвеса. Для этого рассмотрим соотношение (10):

$$I = \frac{mgRr}{4\pi^2 l} T^2. \quad (10)$$

Прологарифмируем левую и правую часть соотношения (10):

$$\ln I = \ln m + \ln g + \ln R + \ln r + 2 \ln T - \ln 4 - 2 \ln \pi - \ln l.$$

7.2 Найдем полный дифференциал от правой и левой частей последнего соотношения.

$$\frac{dI}{I} = \frac{dm}{m} + \frac{dg}{g} + \frac{dR}{R} + \frac{dr}{r} + 2\frac{dT}{T} - 2\frac{d\pi}{\pi} - \frac{dl}{l}.$$

7.3 Знаки бесконечно малых приращений (дифференциалов  $d$ ) заменим на конечные приращения  $\Delta$  и знаки - (минус) перед  $\Delta$  заменим на знак + (плюс):

$$\frac{\Delta I}{I} = \frac{\Delta m}{m} + \frac{\Delta g}{g} + \frac{\Delta R}{R} + \frac{\Delta r}{r} + 2\frac{\Delta T}{T} + 2\frac{\Delta \pi}{\pi} + \frac{\Delta l}{l}. \quad (11)$$

В соотношении (11)  $\frac{\Delta I}{I}$  - относительная приборная погрешность при определении момента инерции,  $\Delta m$ ,  $\Delta g$ ,  $\Delta R$ ,  $\Delta r$ ,  $\Delta T$ ,  $\Delta \pi$ ,  $\Delta l$  – абсолютные (приборные) погрешности массы, ускорения свободного падения, радиусов, периода, числа  $\pi$ , длины нитей.

7.4 Сделайте краткие выводы. Окончательные результаты запишите в виде

$$I = (\langle I \rangle \pm \Delta I), \text{ кг}\cdot\text{м}^2, \varepsilon = \dots \%$$

## 8 ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТА ИНЕРЦИИ ТЕЛ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ

8.1 Установите тело произвольной формы (цилиндр) в центр нижнего диска трифилярного подвеса и в соответствии с пунктами 5...7 определите момент инерции системы диск - исследуемое тело.

8.2 Определите момент инерции тела как разность моментов инерции системы (диск и тело) и нижнего диска трифилярного подвеса.

## 9 ПРОВЕРКА ТЕОРЕМЫ ШТЕЙНЕРА

9.1 Установите в специально изготовленные стержни, расположенные по краям диска трифилярного подвеса два одинаковых тела в виде цилиндров. Определите момент инерции системы (диск и цилиндры) в соответствии с пунктами 5...7.

9.2 Определите момент инерции тела (одного цилиндра), относительно оси не проходящей через его центр масс как половину от разности моментов инерции системы (диск и цилиндры) и нижнего диска трифилярного подвеса.

9.3 Измерьте расстояние между центром диска и стержнем на краю диска подвеса.

9.4 Проверьте теорему Штейнера

$$I = I_0 + ma^2,$$

где  $I$  - момент инерции тела относительно оси, не проходящей через центр масс системы;  $I_0$  – момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс системы;  $m$  - масса цилиндра;  $a$  - расстояние между центром масс и стержнем.

Таблица 1

№	Масса, $m$ , кг	Радиус нижнего диска, $R$ , м	Радиус верхнего диска, $r$ , м	Длина ни- тей, $l$ , м	Время ко- лебаний, $t$ , с	Период колеба- ний, $T$ , с
1						
2						
3						
4						
5						

Таблица 2

№	Момент инерции, $I$ , $\text{кг}\cdot\text{м}^2$	$\langle I \rangle$ , $\text{кг}\cdot\text{м}^2$	$\Delta I_i$ , $\text{кг}\cdot\text{м}^2$	$\Delta I_i^2$ , $\text{кг}\cdot\text{м}^2$	$\Delta S$ , $\text{кг}\cdot\text{м}^2$	$\Delta I$ , $\text{кг}\cdot\text{м}^2$	$\varepsilon$ , %
1							
2							
3							
4							
5							

## 10 КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

- Получите рабочую формулу для определения момента инерции с помощью трифиллярного подвеса.
- Получите выражение для определения кинетической энергии при вращательном движении твердого тела.
- Дайте определение момента инерции твердого тела. Каков физический смысл момента инерции?
- Сформулируйте и докажите теорему Штейнера.
- Оцените приборную погрешность при определении момента инерции твердого тел.
- Объясните методику определения момента инерции тел правильной и неправильной формы с помощью трифиллярного подвеса.
- Объясните методику проверки теоремы Штейнера с помощью трифиллярного подвеса.

## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 9

---

### ИЗУЧЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ МАЯТНИКА МАКСВЕЛЛА

#### **1 ЦЕЛЬ РАБОТЫ**

- 1 Изучение характера движения маятника Максвелла.
- 2 Определение момента инерции маятника Максвелла.

#### **2 БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК**

- 1 Савельев И.В. Курс физики. В 3 т. Т.1: Механика. Молекулярная физика / И.В. Савельев. - Лань, 2008. – 352 с.
- 2 Трофимова Т.И. Курс физики: учеб. пособие для вузов / Т.И. Трофимова. - 19-е изд. - Академия, 2012. – 560 с.
- 3 Детлаф А.А., Яворский Б.М. Курс физики.- Академия, 2009. – 720 с.

#### **3 ОПИСАНИЕ УСТАНОВКИ И МЕТОДИКА ПРОВЕДЕНИЯ ЭКСПЕРИМЕНТА**

Маятник Максвелла представляет собой однородный металлический диск С (рисунок 1), в середине которого укреплены металлические стержни D, к которым виток к витку тщательно наматываются две капроновые нити, прикрепленные к неподвижной платформе в точках В и В<sub>1</sub>.

При освобождении маятника он начинает движение: поступательное вниз и вращательное вокруг своей оси симметрии. При полном разматывании нитей маятника кинетическая энергия вращательного движения маятника принимает максимальное значение. Это вращение, продолжаясь по инерции, вновь приводит к наматыванию нитей на стержни D. При этом движение маятника замедляется и после полной остановки маятник начинает двигаться вниз. Процесс повторяется.

На рисунке 1 показаны силы, действующие на маятник. Второй закон динамики для поступательного и вращательного движения маятника имеет следующий вид:

$$\begin{cases} ma = mg - 2T \\ I\epsilon = 2Tr \end{cases}, \quad (1)$$

где  $m$  - масса маятника;  $I$  - момент инерции маятника;  $g$  - ускорение свободного падения;  $r$  - радиус стержня D;  $T$  - сила натяжения нити;  $a$  - ускорение поступательного движения маятника;  $\epsilon$  - угловое ускорение маятника.

Для определения момента инерции маятника запишем связь между угловым и линейным ускорениями:

$$a = r\epsilon, \quad (2)$$

где  $r$  - радиус стержня D;  $\epsilon$  - угловое ускорение маятника. Линейное ускорение  $a$  может быть определено по величине измеренного времени движения  $t$  и проходимому маятником расстоянию  $S$ .

$$S = \frac{at^2}{2}.$$

Отсюда

$$a = \frac{2S}{t^2}. \quad (3)$$

Подставляя значение ускорения из выражения (3) в уравнение (2), получим величину углового ускорения

$$\varepsilon = \frac{2S}{rt^2}. \quad (4)$$

Выражения для линейного и углового ускорений из формул (4) и (3) подставим в (1) и найдем момент инерции  $I$  маятника

$$I = mr^2 \left( \frac{gt^2}{2S} - 1 \right). \quad (5)$$

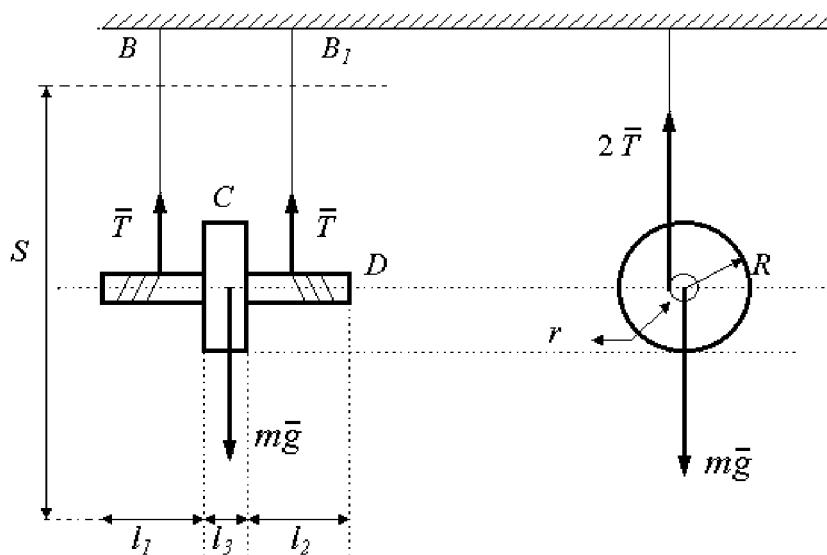


Рисунок 1 – Маятник Максвелла

Соотношение (5) может быть получено и из закона сохранения энергии. Потенциальная энергия ( $mgS$ ) поднятого на высоту  $S$  маятника превращается при опускании в кинетическую энергию поступательного движения центра масс маятника  $\left(\frac{mV^2}{2}\right)$  и кинетическую энергию вращательного движения  $\left(\frac{I\omega^2}{2}\right)$ :

$$mgS = \frac{mV^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}. \quad (6)$$

Так как  $V = \omega r$ ,  $a = \frac{2S}{t^2}$  и  $V = at$ , то из выражения (6) можно получить соотношение (5) для определения момента инерции маятника Максвелла.

#### 4 ПРИБОРЫ И ПРИНАДЛЕЖНОСТИ

Установка для исследования движения маятника Максвелла, секундомер, весы с разновесами, масштабная линейка.

## 5 ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

1 Измерьте геометрические размеры маятника:  $r$  - радиус стержней D, м;  $l_1$  и  $l_2$  - длину стержней D, м;  $R$  - радиус диска маятника C, м;  $l_3$  - толщину диска маятника C, м.

Результаты измерений запишите в таблицу 1 для расчета момента инерции маятника.

2 Рассчитайте момент инерции маятника по формуле

$$I = \frac{m_1 r^2}{2} + \frac{m_2 r^2}{2} + \frac{m_3 R^2}{2} = \frac{\rho \pi r^2 l_1 r^2}{2} + \frac{\rho \pi r^2 l_2 r^2}{2} + \frac{\rho \pi R^2 l_3 R^2}{2} = \frac{\pi \rho}{2} (l_1 r^4 + l_2 r^4 + l_3 R^4), \quad (7)$$

где  $\rho$  - плотность материала маятника (для железа  $\rho = 7800$  кг/м<sup>3</sup>).

3 Оцените (по заданию преподавателя) величину абсолютной и относительной погрешности расчета момента инерции.

Для оценки погрешности необходимо определить полный дифференциал момента инерции  $I$  (выражение (7) и далее вывести формулу абсолютной и относительной погрешности по общепринятой методике (смотри методические указания по определению погрешностей измерений, часть 1)).

4 Измерьте массу маятника  $m$ , намотайте нити на стержни D и определите высоту  $S$  подъема центра масс маятника от положения равновесия.

5 Измерьте время движения  $t$  центра масс маятника при прохождении пути  $S$ . Измерение времени повторите несколько раз. Результаты измерений занесите в таблицу 2.

6 Рассчитайте по формуле (5) момент инерции маятника Максвелла. Результаты расчетов запишите в таблицу 3.

7 Оцените случайную погрешность косвенных измерений момента инерции.

В соответствии с таблицей 3 рассчитайте среднее значение момента инерции по формуле

$$\langle I \rangle = \frac{\sum I_i}{n} = \frac{I_1 + I_2 + \dots + I_n}{n}.$$

8 Рассчитайте абсолютные погрешности отдельных измерений

$$\Delta I_i = |\langle I \rangle - I_i| \text{ и их квадраты } |\Delta I_i|^2.$$

9 Вычислите среднеквадратичную погрешность

$$\Delta S = \sqrt{\frac{\sum \Delta I_i^2}{n(n-1)}}.$$

10 Вычислите среднюю абсолютную погрешность (величину доверительного интервала) для заданной надежности  $\alpha$

$$\langle \Delta I \rangle = t_\alpha(n) \Delta S.$$

11 Рассчитайте относительную погрешность измерения момента инерции:

$$\varepsilon = \frac{\langle \Delta I \rangle}{\langle I \rangle} 100\%$$

12 Окончательный результат запишите в виде:

$$I = (\langle I \rangle \pm \Delta I), \text{ кг}\cdot\text{м}^2, \varepsilon = \dots \%$$

13 Сделайте краткие выводы по работе.

Таблица 1

$l_1$ , м	$l_2$ , м	$l_3$ , м	$r$ , м	$R$ , м	$I$ , $\text{кг}\cdot\text{м}^2$	$\Delta I$ , $\text{кг}\cdot\text{м}^2$	$\varepsilon$ , %

Таблица 2

№	Масса маятника, $m$ , кг	Радиус стержней, $r$ , м	Высота, $S$ , м	Время движения, $t$ , с
1				
2				
3				
4				
5				

Таблица 3

№	$I_i$ , $\text{кг}\cdot\text{м}^2$	$\langle I \rangle$ , $\text{кг}\cdot\text{м}^2$	$\Delta I_i$ , $\text{кг}\cdot\text{м}^2$	$\Delta I_i^2$ ,	$\Delta S$	$\langle \Delta I \rangle$ , $\text{кг}\cdot\text{м}^2$	$\varepsilon$ , %
1							
2							
3							
4							
5							

## 6 КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

- Дайте определение момента инерции. Каков физический смысл момента инерции?
- Получите выражение для определения момента инерции диска, стержня, кольца.
- Получите рабочую формулу для определения момента инерции маятника Максвелла.
- Получите формулу для определения приборной погрешности при измерении момента инерции
- Запишите и обоснуйте выражение для определения кинетической энергии тела при вращательном движении.

---

## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 10

---

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТИ ПОЛЕТА СНАРЯДА С ПОМОЩЬЮ БАЛЛИСТИЧЕСКОГО КРУТИЛЬНОГО МАЯТНИКА

#### **1 ЦЕЛЬ РАБОТЫ**

Определить скорость полета снаряда, используя баллистический крутильный маятник FPM-09.

#### **2 БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК**

- 1 Савельев И.В. Курс физики. В 3 т. Т.1: Механика. Молекулярная физика / И.В. Савельев. - Лань, 2008. – 352 с.
- 2 Трофимова Т.И. Курс физики: учеб. пособие для вузов / Т.И. Трофимова. - 19-е изд. - Академия, 2012. – 560 с.
- 3 Детлаф А.А., Яворский Б.М. Курс физики.- Академия, 2009. – 720 с.

#### **3 ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ВВЕДЕНИЕ**

Непосредственное определение скорости полёта снаряда (пули) ввиду её большой величины является нелёгкой экспериментальной задачей. Поэтому применяют косвенные методы. Один из них основан на использовании абсолютно неупругого соударения пули с телом достаточно большой, по сравнению с пулём, массы, которое может вращаться относительно неподвижной вертикальной оси. Роль массивного тела выполняет баллистический маятник, подвешенный на стальной проволоке. Получив энергию от пули, он совершает крутильные колебания.

Если пренебречь моментом сил трения, то на основании закона сохранения момента импульса для системы маятник-пуля можно записать

$$mVr = (I_1 + mr^2)\omega, \quad (1)$$

где  $m$  - масса пули,  $V$  - её скорость  $r$  - расстояние от оси вращения маятника до точки удара пули,  $I_1$  - момент инерции маятника,  $\omega$  - его угловая скорость.

Кинетическая энергия вращательного движения маятника с пулём переходит в потенциальную энергию закрученной проволоки, на которой подвешен маятник, равную работе против сил упругости  $\frac{k\alpha^2}{2}$ , где  $k$  - модуль кручения,  $\alpha$  - угол отклонения маятника:

$$\frac{1}{2}(I_1 + mr^2)\omega^2 = \frac{1}{2}k\alpha^2. \quad (2)$$

Из уравнений (1) и (2) получаем

$$V^2 = \frac{k\alpha^2}{m^2 r^2} (I_1 + mr^2)$$

Так как момент инерции пули значительно меньше момента инерции маятника, то им можно пренебречь. Тогда

$$V^2 = \frac{kI_1\alpha^2}{m^2 r^2}. \quad (3)$$

Момент сил упругости проволоки пропорционален углу поворота маятника

$$M_y = -k\alpha.$$

По основному закону динамики вращательного движения

$$M_y = I\varepsilon = I \frac{d^2\alpha}{dt^2}.$$

Тогда  $I \frac{d^2\alpha}{dt^2} = -k\alpha$ , или  $I \frac{d^2\alpha}{dt^2} + k\alpha = 0$ .

Решением этого уравнения является выражение

$$\alpha = A \cos\left(\sqrt{\frac{k}{I}}t\right),$$

в чем можно убедиться подстановкой. Величина  $\frac{k}{I}$  играет роль циклической

частоты, которая равна  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ , тогда

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{k}}$$

Таким образом, в нашем случае маятник будет совершать гармонические колебания с периодом

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{I_1}{k}}, \quad (4)$$

$I_1 = I_0 + 2MR_1^2$ , где  $I_0$  - момент инерции самого маятника, а  $2MR_1^2$  - момент инерции двух грузов массы  $M$ , центры масс которых находятся на расстоянии  $R_1$  от оси вращения. Если грузы придвигнуть к оси так, чтобы расстояние от их центров масс до оси стало равным  $R_2$ , то период колебаний будет

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{I_2}{k}}, \quad (5)$$

где  $I_2 = I_0 + 2MR_2^2$

Из формул (4) и (5) определим  $kI_1$ :

$$T_1^2 = 4\pi^2 \frac{I_1}{k} = 4\pi^2 \frac{I_0}{k} + 4\pi^2 \frac{2MR_1^2}{k},$$

$$T_2^2 = 4\pi^2 \frac{I_2}{k} = 4\pi^2 \frac{I_0}{k} + 4\pi^2 \frac{2MR_2^2}{k},$$

$$T_1^2 - T_2^2 = \frac{8\pi^2 M}{k} (R_1^2 - R_2^2)$$

откуда

$$k = \frac{8\pi^2 M (R_1^2 - R_2^2)}{T_1^2 - T_2^2} \text{ и}$$

$$I_1 = \frac{kT_1^2}{4\pi^2} = \frac{2T_1^2 M (R_1^2 - R_2^2)}{T_1^2 - T_2^2}.$$

Тогда

$$kI_1 = \frac{16\pi^2 M^2 T_1^2 (R_1^2 - R_2^2)^2}{(T_1^2 - T_2^2)^2}.$$

Подставим это в формулу (3):

$$V^2 = \frac{16\pi^2 M^2 T_1^2 \alpha^2 (R_1^2 - R_2^2)^2}{m^2 r^2 (T_1^2 - T_2^2)^2}$$

и получаем расчетную формулу

$$V = \frac{4\pi M T_1 \alpha (R_1^2 - R_2^2)}{mr (T_1^2 - T_2^2)}. \quad (6)$$

## 4 ПРИБОРЫ И ПРИНАДЛЕЖНОСТИ

- 1 Крутильный баллистический маятник.
- 2 Снаряд.
- 3 Универсальный миллисекундомер FPM-14.
- 4 Фотоэлектрический датчик.

## 5 ОПИСАНИЕ УСТАНОВКИ

Общий вид баллистического маятника FPM-09 показан на рисунке 1.

Основание 1 оснащено регулируемыми ножками 2, которые позволяют выравнивать прибор. В основании закреплена колонка 3, на которой находятся верхний 4, нижний 5 и средний 6 кронштейны. К среднему кронштейну прикреплено стреляющее устройство 7, а также прозрачный экран с нанесенной на него угловой шкалой 8 и фотоэлектрический датчик 9. Кронштейны 4 и 6 имеют зажимы для крепления стальной проволоки 13, на которой подвешен маятник. Он состоит из 2-х чашечек, наполненных пластилином 10, двух перемещаемых грузов 11, двух стержней 12, водилки 14. Фотоэлектрический датчик соединен разъемом с привинченным к основанию универсальным миллисекундомером FPM-14 15. При движении маятника прерываемый водилкой поток света от лампочки падает на фоторезистор, в результате чего в его цепи генерируются электрические импульсы, которые после усиления подаются на вход миллисекундомера. Миллисекундомер имеет счетчик периодов (до 99) и счетчик времени (до 99,999 с). Результаты высвечиваются на лицевой панели. Кроме того на лицевой панели миллисекундомера имеются клавиши: 'сеть' - нажатие ее включает питывающее (При этом высвечиваются нули цифровых индикаторов и загорается лампочка фотоэлектрического датчика); 'Сброс' - нажатие ее вызывает сброс схем миллисекундомера и генерирование сигнала разрешения на измерение; 'Стоп' - окончание измерения.

На задней панели миллисекундомера находятся входное гнездо для подключения фотоэлектрического датчика и заземляющий зажим.

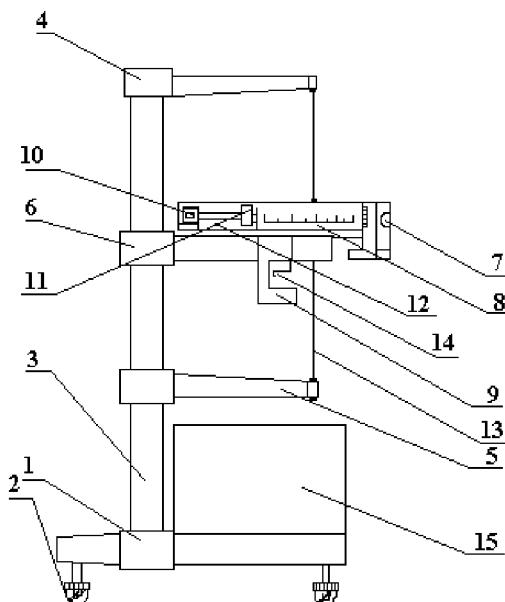


Рисунок 1 – Схема баллистического маятника FPM-09

## 6 ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

- 1 Расположить грузы 11 на расстоянии  $R_1$  от оси вращения. (Расстояние  $R_1$  измеряется от центра масс груза до оси вращения маятника).
  - 2 Установить маятник в таком положении, чтобы черта на чашечке показывала угол отклонения  $\alpha_0 = 0$ .
  - 3 Выдвинуть крючок стреляющего устройства до упора, затем с его помощью сжать пружину до щелчка. Надеть снаряд на верхний стержень стреляющего устройства и выстрелить.
  - 4 Измерить максимальный угол отклонения маятника  $\alpha$  (градусы перевести в радианы).
  - 5 Измерить расстояние  $r$  от оси вращения маятника до центра масс пули.
  - 6 Включить вилку в сеть и нажать клавишу «Сеть» счётчика времени.
  - 7 Отклонить рукой маятник на угол  $\alpha$ . Затем одновременно нажать клавишу «Сброс» и отпустить маятник.
  - 8 Измерить время  $t_1$  10 колебаний и вычислить период одного колебания  $T_1$ . (Кнопку «Стоп» нажимать после того как будет отсчитано 9 периодов, а не 10, т.к. отсчёт прекращается только после прохождения целого числа периодов).
  - 9 Расположить грузы 11 на расстоянии  $R_2$  от оси вращения маятника и повторив действия пунктов 7,8 вычислить новый период колебаний  $T_2$ .
  - 10 Определить скорость снаряда  $V$  по формуле
- $$V = \frac{4\pi M T_1 \alpha (R_1^2 - R_2^2)}{mr(T_1^2 - T_2^2)},$$
- где  $M = 0,19$  кг,  $m = 2 \cdot 10^{-3}$  кг.
- 11 Повторить действия в пунктах 1...10 n раз.
  - 12 Результаты измерений и вычислений занести в таблицу 1.
  - 13 Определить среднее значение скорости снаряда

$$\langle V \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n V_i,$$

где  $n$  - число измерений.

14 Определить абсолютную погрешность каждого измерения

$$\Delta V_i = |\langle V \rangle - V_i|.$$

15 Найти квадраты абсолютных погрешностей  $\Delta V_i^2$ .

16 Вычислить среднюю квадратичную погрешность  $\Delta S$ .

17 Для надёжности  $\alpha = 0,95$  и данного числа измерений определить по таблице коэффициент Стьюдента  $t_\alpha(n)$ .

18 Найти доверительный интервал

$$\Delta V = \Delta S \cdot t_\alpha(n).$$

19 Результат записать в виде

$$V = \langle V \rangle \pm \Delta V; \quad \varepsilon = \frac{\Delta V}{\langle V \rangle} \cdot 100\%.$$

Таблица 1

№	1	2	3	4	5	6	7
$R_1$ , м							
$R_2$ , м							
$\alpha_1$ , рад							
$\alpha_2$ , рад							
$t_1$ , с							
$T_1$ , с							
$t_2$ , с							
$T_2$ , с							
$V_i$ , м/с							
$\langle V \rangle$ , м/с							
$\Delta V_i$ , м/с							
$(\Delta V_i)^2$ , (м/с) <sup>2</sup>							
$\Delta S$ , м/с							
$\Delta V$ , м/с							
$\varepsilon$ , %							

## 7 КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

- Что такое удар? Какие виды ударов вы знаете? Какие законы сохранения выполняются при абсолютно упругих и неупругих ударах?
- Вывести уравнение колебания крутильного баллистического маятника.
- Что такое момент инерции тела и каков его физический смысл?
- В чём состоит метод определения скорости снаряда с помощью крутильного баллистического маятника?
- Вывести расчётную формулу для скорости снаряда. Какие законы сохранения при этом используются

## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 11

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕЛИЧИНЫ УСКОРЕНИЯ СВОБОДНОГО ПАДЕНИЯ ПРИ ПОМОЩИ УНИВЕРСАЛЬНОГО МАЯТНИКА

#### 1 ЦЕЛЬ РАБОТЫ

- 1 Определение ускорения свободного падения при помощи математического маятника.
- 2 Определение ускорения свободного падения при помощи обратного маятника.

#### 2 БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

- 1 Савельев И.В. Курс физики. В 3 т. Т.1: Механика. Молекулярная физика / И.В. Савельев. - Лань, 2008. – 352 с.
- 2 Трофимова Т.И. Курс физики: учеб. пособие для вузов / Т.И. Трофимова. - 19-е изд. - Академия, 2012. – 560 с.
- 3 Детлаф А.А., Яворский Б.М. Курс физики.- Академия, 2009. – 720 с.

#### 3 ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ВВЕДЕНИЕ

Физическим маятником называется твердое тело, которое может совершать колебания вокруг неподвижной горизонтальной оси под действием силы тяжести. Изобразим сечение маятника плоскостью, перпендикулярной оси подвеса и проходящей через центр масс маятника С (рисунок 1).

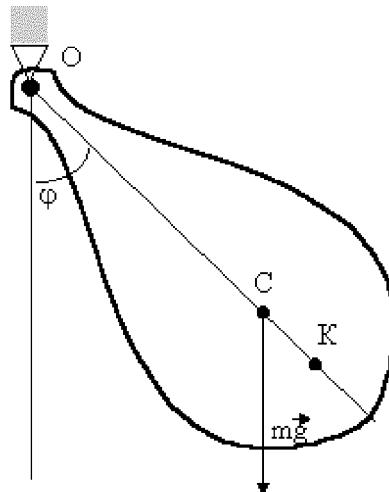


Рисунок 1 – Физический маятник

Введем обозначения:  $m\vec{g}$  - сила тяжести,  $a$  - расстояние ОС от центра масс до оси подвеса,  $I_0$  - момент инерции маятника относительно оси подвеса. Положение маятника будем определять углом  $\varphi$  отклонения линии ОС от вертикали.

Для определения закона колебаний маятника воспользуемся дифференциальным уравнением вращательного движения

$$I_0 \frac{d\omega}{dt} = M_0 \text{ или } I_0 \frac{d^2\varphi}{dt^2} = M_0. \quad (1)$$

В данном случае  $M_0 = -m g a \sin \varphi$  (знак минус взят потому, что при  $\varphi > 0$  момент отрицателен, а при  $\varphi < 0$  - положителен) и уравнение (1) принимает вид

$$I_0 \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mg \sin \varphi \quad (2)$$

Разделив обе части равенства на  $I_0$ , и обозначая  $\frac{mga}{I_0} = k^2$ , получим дифференциальное уравнение колебаний маятника

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + k^2 \sin \varphi = 0 \quad (3)$$

Полученное дифференциальное уравнение в обычных функциях не интегрируется. Ограничимся рассмотрением малых колебаний маятника, считая приближенно  $\sin \varphi \approx \varphi$  (это можно сделать, когда угол  $\varphi$  меньше одного радиана). Тогда

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + k^2 \varphi = 0. \quad (4)$$

Это уравнение аналогично дифференциальному уравнению свободных колебаний точки вдоль прямой и его общее решение имеет вид

$$\varphi = C_1 \sin kt + C_2 \cos kt. \quad (5)$$

Полагая, что в начальный момент  $t = 0$  маятник отклонен на малый угол  $\varphi = \varphi_0$  и отпущен без начальной скорости ( $\omega_0 = 0$ ), найдем для постоянных интегрирования значения  $C_1 = 0$ ,  $C_2 = \varphi_0$ . Тогда закон малых колебаний маятника при данных начальных условиях будет

$$\varphi = \varphi_0 \cos kt. \quad (6)$$

Следовательно, малые колебания физического маятника, являются гармоническими колебаниями с периодом

$$T_\varphi = \frac{2\pi}{k} = 2\pi \sqrt{\frac{I_0}{mga}}. \quad (7)$$

Как видно, период малых колебаний не зависит от величины угла начального отклонения  $\varphi_0$ . Этот результат является приближенным. Если проинтегрировать составленное вначале дифференциальное уравнение колебаний маятника, не считая в нем угол  $\varphi$  малым (т.е. не полагая  $\sin \varphi = \varphi$ ), то можно убедиться, что  $T_\varphi$  зависит от  $\varphi_0$ . Приближенно эта зависимость имеет вид

$$T_\varphi \approx 2\pi \sqrt{\frac{I_0}{mga}} \left( 1 + \frac{\varphi_0^2}{16} \right) \quad (8)$$

Отсюда, например, следует, что при  $\varphi_0 = 0,4$  радиана (около  $23^\circ$ ) формула (8) определяет период с точностью до 1%.

Полученные результаты охватывают и случай так называемого математического маятника. Математический маятник – груз малых размеров (который будем рассматривать как материальную точку), подвешенный на невесомой, нерастяжимой нити длиной  $l$  (рисунок 2).

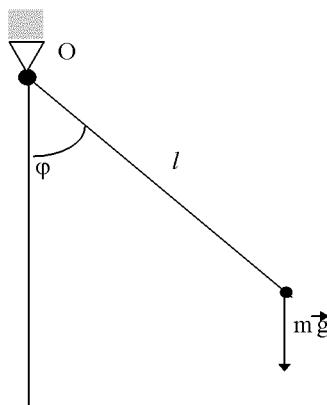


Рисунок 2 – Математический маятник

Поскольку математический маятник представляет собой систему состоящую из одной материальной точки, то

$$I_0 = m \cdot l^2, a = |OC| = l. \quad (9)$$

Подставляя эти величины в равенство (7), находим, что период малых колебаний математического маятника определяется формулой

$$T_m = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (10)$$

Из сравнения формул (7) и (10) видно, что при длине

$$l_1 = \frac{I_0}{ma} \quad (11)$$

период колебаний математического маятника совпадает с периодом колебаний соответствующего физического маятника. Длина  $l_1$  такого математического маятника, период колебаний которого равен периоду колебаний физического маятника, называется приведенной длиной физического маятника. Точка К, отстоящая от оси подвеса на расстоянии  $|OK| = l_1$ , называется центром качаний физического маятника (рисунок 1).

Используя теорему Штейнера  $I_o = I_c + ma^2$ , формулу (11) можно привести к виду

$$l_1 = a + \frac{I_c}{ma}. \quad (12)$$

Отсюда следует, что расстояние  $|OK|$  всегда больше чем  $|OC|$ , т.е. центр качаний физического маятника всегда расположен ниже его центра масс. Из формулы (12) видно, что  $|KC| = \frac{I_c}{ma}$ . Поэтому если поместить ось подвеса в точке К, то приведенная длина  $l_2$  полученного маятника согласно (12) будет равна

$$l_2 = |KC| + \frac{I_c}{m \cdot |KC|} = a + \frac{I_c}{ma} = l_1. \quad (13)$$

Следовательно, точки К и С являются взаимными, т.е. если ось подвеса будет проходить через точку К, то центром качания будет точка О (так как  $l_1 = l_2$ ) и период колебаний маятника не изменится. Это свойство используется в так называемом обратном маятнике, который служит для определения

земного ускорения. Из сказанного, следует, что период малых колебаний физического маятника определяется формулой

$$T_m = 2\pi \sqrt{\frac{l_{np}}{g}}, \quad (14)$$

где  $l_{np}$  – приведенная длина физического маятника.

## 4 ПРИБОРЫ И ПРИНАДЛЕЖНОСТИ

Универсальный маятник.

## 5 ОПИСАНИЕ ПРИБОРА

Универсальный маятник предназначен для определения значения ускорения свободного падения. Принцип работы прибора основан на физических законах, определяющих колебания математического и обратного маятников, распространяющихся на небольшие отклонения маятников от положения равновесия.

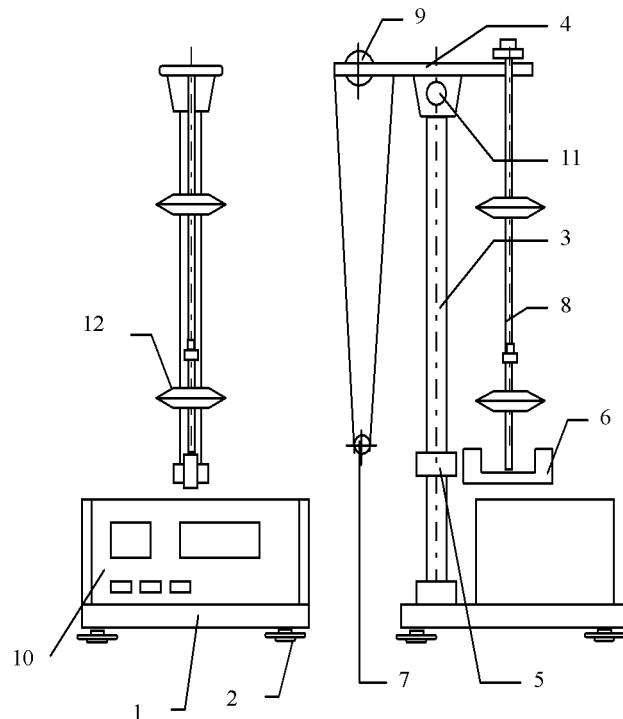


Рисунок 3 – Общий вид установки

Общий вид универсального маятника представлен на рисунке 3. Основание (1) оснащено регулируемыми ножками (2), которые позволяют произвести выравнивание прибора. В основании закреплена колонка (3), на которой зафиксирован верхний кронштейн (4) и нижний кронштейн (5) с фотозелектрическим датчиком (6). После отвинчивания воротка (11) верхний кронштейн можно поворачивать вокруг колонки. Затяжка воротка фиксирует кронштейн в любом произвольно выбранном положении. С одной стороны кронштейна (4) находится математический маятник (7), с другой – обратный маятник (8).

Длину математического маятника можно регулировать при помощи воротка (9) и определить при помощи шкалы на колонке (3).

Оборотный маятник выполнен в виде стального стержня, на котором расположены два повернутые друг к другу лезвиями ножи (12) и два ролика. На стержне через 10 мм выполнены кольцевые нарезы служащие для точного определения длины оборотного маятника (расстояния между ножами). Ножи и ролики можно перемещать вдоль оси стержня и фиксировать в любом положении. Эти элементы выполнены таким образом, что их размер вдоль стержня является кратным 10 мм, а фиксирующие воротки размещены таким образом, чтобы при помощи кольцевых нарезов их можно было наглухо блокировать.

Нижний кронштейн вместе с фотоэлектрическим датчиком можно перемещать вдоль колонки и фиксировать в произвольно выбранном положении. Фотоэлектрический датчик соединен разъемом zt1 с универсальным миллисекундомером (10).

Виды лицевой и задней панелей миллисекундомера показаны на рисунке 4. В этом приборе в качестве эталона времени используется кварцевый генератор. На лицевой панели универсального миллисекундомера находятся следующие управляющие элементы:

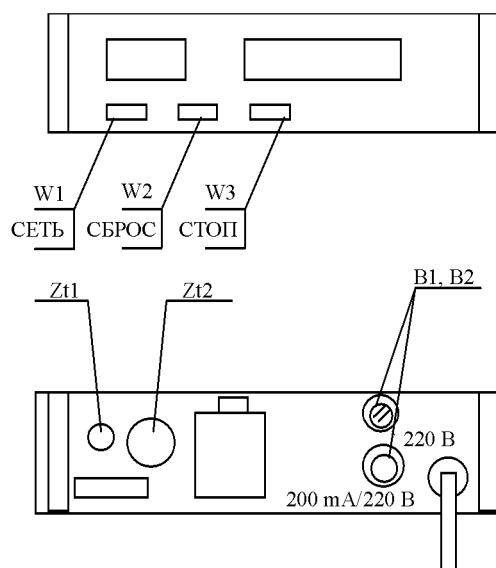


Рисунок 4 – Лицевая и задняя панели установки

W1 (сеть) - выключатель сети. Нажатие этой клавиши включает питание прибора. Визуально определяется это свечением цифровых индикаторов (высвечивающих цифру нуля) и свечением лампочки фотоэлектрического датчика.

W2 (сброс) - установка нуля измерителя. Нажатие этой клавиши вызывает сброс показаний миллисекундомера и генерирование сигнала разрешения на измерение.

W3 (стоп) - окончание измерения. Нажатие клавиши вызывает генерирование сигнала разрешения на окончание процесса счета.

На задней стенке миллисекундомера размещены:

zt1 - входное гнездо, служащее для подключения фотоэлектрического датчика.

zt2 - заземляющий зажим.

Чтобы подготовить приборы к измерениям необходимо:

- 1) проверить горизонтальное положение прибора;
- 2) включить сетевой шнур измерителя в питающую сеть;
- 3) нажать переключатель (сеть), проверяя, все ли индикаторы измерителя показывают цифру «0» и светится ли лампочка фотоэлектрического датчика.

Прибор готов к работе непосредственно после включения сетевого напряжения и не нуждается в прогреве.

## **6 ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ**

### **1 Определение ускорения свободного падения при помощи математического маятника**

1.1 Установить в нижней части колонки нижний кронштейн вместе с фотоэлектрическим датчиком так, чтобы верхняя грань кронштейна показывала на шкале длину не менее 50 см.

1.2 Установить длину математического маятника так, чтобы черта на шарике стала продолжением черты на корпусе фотоэлектрического датчика. Определить длину маятника.

1.3 Отклонить математический маятник от положения равновесия на  $4^\circ \dots 5^\circ$ .

1.4 Определить время 10 полных колебаний (опыт повторить 5 раз). Данные занести в таблицу 1.

### **2 Определение ускорения свободного падения при помощи оборотного маятника**

Для определения ускорения свободного падения с помощью оборотного маятника необходимо найти  $l_{\text{пр}}$  - приведенную длину физического маятника. Приведенная длина ( $l_{\text{пр}}$ ) физического маятника равна расстоянию ОК (рисунок 1), где О - точка подвеса, К - точка качания. Если поменять местами точку подвеса и точку качания, то период физического маятника не изменится. Для нахождения точки качания необходимо:

2.1 Повернуть верхний кронштейн на  $180^\circ$ .

2.2 На стержне физического маятника зафиксировать грузы таким образом, чтобы один из них находился вблизи конца стержня, а другой вблизи его середины. Опорные призмы расположить на стержне таким образом, чтобы одна из них находилась вблизи свободного конца стержня, а вторая на половине расстояния между грузами.

2.3 Проверить – совпадает ли положение граней лезвий опорных призм с нарезами на стержне.

2.4 Закрепить опорные призмы маятника на стержне.

2.5 Установить маятник на вкладыше верхнего кронштейна с помощью опорной призмы 1, находящейся вблизи конца стержня.

2.6 Нижний кронштейн вместе с фотоэлектрическим датчиком переместить таким образом, чтобы стержень маятника пересекал оптическую ось.

2.7 Отклонить маятник на  $4^\circ \dots 5^\circ$  от положения равновесия и отпустить.

2.8 Определить период колебаний обратного маятника  $T_1$ . Опыт повторить 5 раз.

2.9 Снять маятник и закрепить его на второй опорной призме.

2.10 Определить период колебаний обратного маятника  $T_2$  и сравнить с полученным ранее значением  $T_1$ .

2.11 Если  $T_2 > T_1$ , то вторую опорную призму переместить в направлении груза, находящегося в конце стержня, если  $T_2 < T_1$  - то в направлении середины стержня.

2.12 Изменять положение второй опорной призмы до получения равенства  $T_2 = T_1$  с точностью до 0,5 %. Определить  $T_2$  обратного маятника. Опыт повторить 5 раз.

2.13 Определить  $l_{\text{пр}}$  - приведенную длину обратного маятника, подсчитывая количество нарезов на стержне между опорными призмами, которые нанесены через каждые 10 мм. Данные занести в таблицу 2.

## 7 ПРОВЕДЕНИЕ РАСЧЕТОВ

1 По данным таблицы 1 вычислить период колебаний математического маятника по формуле

$$T = \frac{t}{n}.$$

2 Вычислить ускорение земного притяжения по формуле

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}.$$

3 Вычислить относительную и абсолютную погрешности ускорения свободного падения (предварительно определив среднее значение  $T$ ,  $g$  и  $\Delta T$ ) из формулы:

$$\frac{\langle \Delta g \rangle}{\langle g \rangle} = \frac{\Delta l}{l} + \frac{2 \langle \Delta T \rangle}{\langle T \rangle}.$$

4 Результат записать в виде

$$g = (\langle g \rangle \pm \langle \Delta g \rangle), \quad \varepsilon = \frac{\langle \Delta g \rangle}{\langle g \rangle} \cdot 100\%.$$

5 По данным таблицы 2 вычислить период колебаний физического маятника

$$T = \frac{t}{n}.$$

6 Вычислить ускорение земного притяжения по формуле

$$g = \frac{4\pi^2 l_{\text{пр}}}{T^2}.$$

где  $l_{\text{пр}}$  - приведенная длина обратного маятника, м;  $T$  - период колебаний обратного маятника, с.

7 Вычислить относительную и абсолютную погрешности ускорения свободного падения (предварительно определив значение  $T$ ,  $g$  и  $\Delta T$ ) из формулы:

$$\frac{\langle \Delta g \rangle}{\langle g \rangle} = \frac{\Delta l_{np}}{l_{np}} + \frac{2 \langle \Delta T \rangle}{\langle T \rangle}.$$

8 Результаты записать в виде

$$g = (\langle g \rangle \pm \langle \Delta g \rangle), \quad \varepsilon = \frac{\langle \Delta g \rangle}{\langle g \rangle} \cdot 100\%.$$

9 Определить рабочую погрешность определения ускорения свободного падения по формуле

$$\sigma = \frac{g - g_r}{g_r} \cdot 100\%,$$

где  $g$  - ускорение, полученное в результате измерений,  $\text{м/с}^2$ ;  $g_r$  - теоретическое значение ускорения свободного падения,  $\text{м/с}^2$  (принять  $g_r = 9,81 \text{ м/с}^2$ ). Рабочая погрешность определения ускорения свободного падения с помощью математического и обратного маятников не должна превышать 1%.

10 Сделать выводы по работе.

Таблица 1

№	$l, \text{ м}$	$t, \text{ с}$	$T_i, \text{ с}$	$\langle T \rangle, \text{ с}$	$\Delta T_i, \text{ с}$	$\langle \Delta T \rangle, \text{ с}$	$g_i, \text{ м/с}^2$	$\langle g \rangle, \text{ м/с}^2$	$\langle \Delta g \rangle, \text{ м/с}^2$	$\varepsilon, \%$
1										
2										
3										
4										
5										

Таблица 2

№	$l_{\text{пр}}, \text{ м}$	$t, \text{ с}$	$T_i, \text{ с}$	$\langle T \rangle, \text{ с}$	$\Delta T_i, \text{ с}$	$\langle \Delta T \rangle, \text{ с}$	$g_i, \text{ м/с}^2$	$\langle g \rangle, \text{ м/с}^2$	$\langle \Delta g \rangle, \text{ м/с}^2$	$\varepsilon, \%$
1										
2										
3										
4										
5										

## 7 КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

- Что называется физическим и математическим маятником?
- Выполните формулы для периодов колебаний физического и математического маятников.
- Что такое приведенная длина физического маятника?
- Что называется центром качания физического маятника?
- Доказать, что точка подвеса и центр качания физического маятника обладают свойством взаимности.
- Какова методика определения ускорения свободного падения при помощи обратного маятника?

\* \* \*

## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 12

### ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАТУХАЮЩИХ КОЛЕБАНИЙ МЕТОДОМ НАКЛОНОВОГО МАЯТНИКА

#### 1 ЦЕЛЬ РАБОТЫ

- 1 Изучение законов колебательного движения.
- 2 Определение коэффициента трения.

#### 2 БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

- 1 Савельев И.В. Курс физики. В 3 т. Т.1: Механика. Молекулярная физика / И.В. Савельев. - Лань, 2008. – 352 с.
- 2 Трофимова Т.И. Курс физики: учеб. пособие для вузов / Т.И. Трофимова. - 19-е изд. - Академия, 2012. – 560 с.
- 3 Детлаф А.А., Яворский Б.М. Курс физики.- Академия, 2009. – 720 с.

#### 3 ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ВВЕДЕНИЕ

Для исследования затухающих колебаний в данной работе используется метод наклонного маятника. Металлический шарик 1 подвешенный на нити длиной  $l$  опирается на наклонную плоскость 2, образующую с вертикалью угол  $\theta$ , который можно изменять (рисунок 1). Колебательные движения маятника происходят вдоль наклонной плоскости, т.е. перпендикулярно плоскости рисунка.

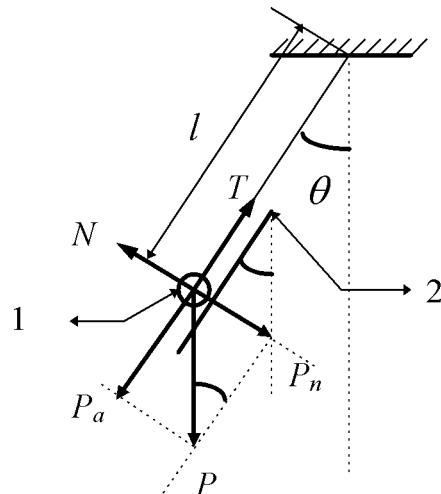


Рисунок 1 – Наклонный маятник

Для анализа характера движения наклонного маятника решим основную задачу динамики, т.е. определим по известным действующим силам уравнение движения маятника.

При угле наклона  $\theta \neq 0$  (рисунки 1,2) на тело массой  $m$  (в отсутствии трения) действуют три силы:

- сила тяжести  $P = mg$ ;
- реакция  $N$ ;
- сила натяжения нити  $T$ .

Разложим силу тяжести  $P$  на две составляющие, одна из которых перпендикулярна наклонной плоскости (рисунок 1)

$$P_n = P \sin \theta = mg \sin \theta, \quad (1)$$

а другая лежит в плоскости колебаний маятника

$$P_a = P \cos \theta = mg \cos \theta. \quad (2)$$

В положении равновесия (рисунок 2) проекция силы  $P_a$  уравновешивается натяжением нити  $T$  и маятник остается в состоянии покоя. Если маятник отклонить от положения равновесия на некоторый угол  $\alpha$  (рисунок 2), то составляющая силы  $P_a$ , направленная вдоль нити, т.е. сила  $f = P_a \cos \alpha$  уравновесится натяжением нити  $T$ , другая же составляющая, перпендикулярная к нити, т.е. сила

$$F_\tau = -P_a \sin \alpha \quad (3)$$

стремится вернуть маятник в положение равновесия. Эта сила является возвращающей силой. Подставив соотношение (2) в уравнение (3) получим следующее выражение для определения возвращающей силы:

$$F_\tau = -mg \cos \theta \sin \alpha. \quad (4)$$

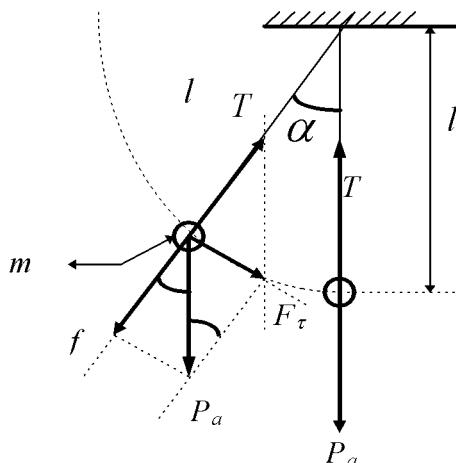


Рисунок 2 – Силы действующие на маятник

При малых углах отклонения маятника от положения равновесия можно принять  $\sin \alpha \approx \alpha$ , и выражение (4) можно представить в виде

$$F_\tau = -(mg \cos \theta)\alpha. \quad (5)$$

Запишем и проанализируем второй закон Ньютона для движения шарика по наклонной плоскости (при  $\theta > 0$ ), учитывая, что  $a_\tau = \varepsilon \cdot r$

$$F_\tau = ma_\tau = ml\ddot{\alpha}. \quad (6)$$

Приравнивая правые части уравнений (5) и (6), получаем дифференциальное уравнение, описывающее движение шарика по наклонной плоскости без трения

$$ml\ddot{\alpha} = -(mg \cos \theta)\alpha. \quad (7)$$

Отсюда

$$\ddot{\alpha} + \left( \frac{g}{l} \cos \theta \right) \alpha = 0. \quad (8)$$

Введем следующее обозначение

$$\omega_0^2 = \frac{g}{l} \cos \theta. \quad (9)$$

Тогда дифференциальное уравнение движения маятника по наклонной плоскости без учета сил трения можно представить в виде:

$$\ddot{\alpha} + \omega_0^2 \alpha = 0. \quad (10)$$

Таким образом, движение шарика осуществляется с циклической частотой, определяемой выражением (9) и периодом

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g \cos \theta}}. \quad (11)$$

Из уравнения (11) следует, что с увеличением угла  $\theta$  период колебаний наклонного маятника возрастает и при  $\theta = 90^\circ$  период становится бесконечно большим, колебания прекратятся.

В реальных механических системах всегда действуют силы сопротивления, которые приводят к уменьшению энергии системы со временем. Если убыль энергии не восполняется, то колебания маятника будут затухающими. Так при движении наклонного маятника в воздухе возникает сила трения качения (шарик катится по поверхности наклонной плоскости) и сила сопротивления воздуха. Причем сила трения качения намного больше силы сопротивления воздуха.

Рассмотрим природу возникновения силы трения качения (рисунок 3).

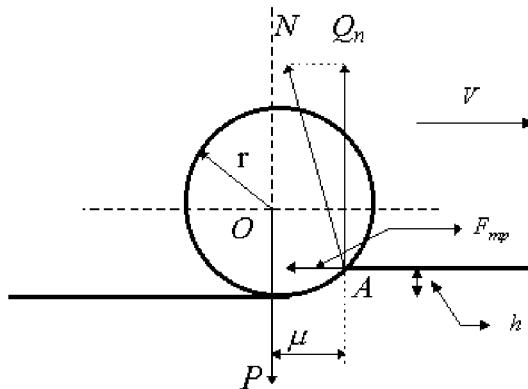


Рисунок 3 – Возникновение силы трения качения

При качении шара по плоской поверхности возникают не только упругие, но и пластические деформации. Степень пластической деформации определяется абсолютной деформацией  $h$ , величина которой много меньше радиуса движущегося шара  $r$ . Таким образом, в точке А на движущийся шар действует сила трения качения  $F_{mp}$ , направленная горизонтально и сила нормального давления  $Q_n$ , направленная перпендикулярно к плоскости качения, т.е. вертикально вверх. Причем величина силы нормального давления  $Q_n$  примерно равна силе тяжести  $P = mg$  рассмотренного шара. При этом равнодействующая сил  $Q_n$  и  $F_{mp}$  дают силу реакции  $N$ .

Если шар движется по плоскости без ускорения, должно выполняться правило равенства моментов действующих сил относительно центра масс шара т. О. Момент силы трения качения относительно точки О равен произведению силы трения  $F_{mp}$  на ее плечо, примерно равное радиусу шара  $r$

( $h \ll r$ ). Момент силы нормального давления  $Q_n = mg$  относительно той же точки О равен произведению силы  $Q_n$  на расстояние смещения  $\mu$  вследствие контактных деформаций. Поэтому

$$F_{\text{тр}}r = mg\mu. \quad (12)$$

Отсюда для силы трения качения получим следующее выражение:

$$F_{\text{тр}} = \mu \frac{mg}{r} = \mu \frac{N}{r}. \quad (13)$$

Величину  $\mu$  называют коэффициентом трения качения. Таким образом коэффициент трения качения представляет собой плечо силы  $Q_n$  и имеет размерность длины.

Рассмотрим движение шарика по наклонной плоскости (рисунки 1, 2) с учетом сил трения скольжения и определим коэффициент трения скольжения. Запишем закон сохранения энергии для перемещения маятника из крайнего правого положения в крайнее левое

$$E_{\text{ном}}^{(n)} - E_{\text{ном}}^{(\kappa)} = A_{\text{тр}}, \quad (14)$$

где  $E_{\text{ном}}^{(n)} = mgl(1 - \cos\alpha_0)(1 - \cos\theta)$  – начальная потенциальные энергии маятника, а  $E_{\text{ном}}^{(\kappa)} = mgl(1 - \cos\alpha_{01})(1 - \cos\theta)$  – конечная потенциальные энергии маятника;  $A_{\text{тр}} = \mu Nl(\alpha_0 + \alpha_{01})$  – работа сил трения за один полупериод колебания;  $\alpha_0, \alpha_{01}$  – углы отклонения маятника в крайнем правом и левом положениях.

Подставив в (14) явный вид потенциальных энергий и работы силы трения, получим

$$mgl(1 - \cos\alpha_0)(1 - \cos\theta) - mgl(1 - \cos\alpha_{01})(1 - \cos\theta) = \mu mgl \sin\theta(\alpha_0 + \alpha_{01}). \quad (15)$$

Перейдя в (15) к половинным углам  $\theta/2, \alpha_0/2$  и  $\alpha_{01}/2$ , получим:

$$mgl \cdot 2 \sin^2 \frac{\alpha_0}{2} 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} - mgl \cdot 2 \sin^2 \frac{\alpha_{01}}{2} 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} = \mu mgl(2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2})(\alpha_0 + \alpha_{01}). \quad (16)$$

Поскольку рассматриваются малые углы ( $\alpha_0 \leq 5^\circ$ ), то  $\sin \alpha_0/2$  и  $\sin \alpha_{01}/2$  можно заменить на сами углы. При этом равенство (16) приобретает более простой вид:

$$\frac{1}{2}(\alpha_0^2 - \alpha_{01}^2) \sin \frac{\theta}{2} = \mu(\alpha_0 + \alpha_{01}) \cos \frac{\theta}{2}. \quad (17)$$

Из уравнения (17) можно определить коэффициент трения скольжения шарика о наклонную плоскость:

$$\mu = \frac{\alpha_0 - \alpha_{01}}{2} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}. \quad (18)$$

Такое же уравнение получается и для второго полупериода скольжения:

$$\mu = \frac{\alpha_{01} - \alpha_1}{2} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}. \quad (19)$$

Сложив почленно (18) и (19), определим коэффициент трения скольжения

$$\mu = \frac{\alpha_0 - \alpha_1}{4} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}. \quad (20)$$

Если маятник совершил  $N$  полных колебаний, то коэффициент трения скольжения дается соотношением

$$\mu = \frac{\alpha_0 - \alpha_N}{4N} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}. \quad (21)$$

Формула (21) является основной для расчета коэффициента трения скольжения, определяемого с помощью наклонного маятника.

В случае, когда шарик катится по наклонной плоскости, затухание такого маятника обусловлено трением качения:

$$\mu' = \mu R = \frac{\alpha_0 - \alpha_N}{4N} R \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}, \quad (22)$$

где  $R$  - радиус шарика.

Формула (22) является основной для расчета коэффициента трения качения.

#### 4 ПРИБОРЫ И ПРИНАДЛЕЖНОСТИ

1 Наклонный маятник.

2 Комплект сменных образцов и шаров.

#### 5 ОПИСАНИЕ УСТАНОВКИ

Наклонный маятник представлен на рисунке 4. К основанию 2, имеющему четыре ножки с регулируемой высотой, прикреплен миллисекундомер 1. В основании закреплена труба 3, на которой смонтирован корпус 4 с червячной передачей.

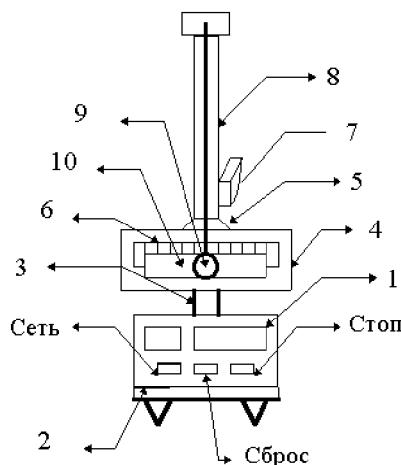


Рисунок 4 – Наклонный маятник

С помощью оси червячная передача соединена с кронштейном 5, на котором прикреплены шкала 6 и шкала 7. В кронштейне закреплена колонка 8, на которой подвешен на нити шар 9. Шар может свободно вращаться вокруг своей оси. В кронштейн 5 по направляющим вставляются сменные металлические образцы 10. Шары маятника можно заменять. Фотоэлектрический датчик соединен с миллисекундомером. Длина подвески шаров маятника равна  $l = (480 \pm 10)$  мм.

Необходимо иметь в виду, что при расчете коэффициента трения качения угловые градусы амплитуды колебаний маятника  $\alpha_0$ , и  $\alpha_N$  следует перевести в радианную меру ( $1^\circ = 1,75 \cdot 10^{-2}$  радиана).

Блок управления включается нажатием клавиши «СЕТЬ». Нажатие клавиши «СБРОС» на панели управления стирает всю информацию с цифровых индикаторов и генерирует в цепи сигнал разрешения на измерение времени колебаний. После окончания цикла следует нажать кнопку «СТОП».

## 6 ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

- 1 Познакомьтесь с установкой и лицевой панелью блока управления.
- 2 С помощью воротка установите угол наклона маятника (в интервале  $0\dots60^\circ$ ) и один из сменных металлических образцов 10 по заданию преподавателя.
- 3 Отведите нить маятника на угол  $4^\circ$ , нажмите кнопку «СБРОС». Отпустите маятник и одновременно отожмите кнопку «СБРОС», предоставив этим самым маятнику совершать свободные колебания.
- 4 Определите число колебаний  $N$ , за которое амплитуда маятника уменьшилась вдвое. Когда угол отклонения маятника достигнет  $2^\circ$ , нажмите кнопку «СТОП» (число колебаний  $N$ , при которых амплитуда уменьшилась вдвое высвечивается на левом цифровом табло, а время колебаний в секундах на правом).
- 5 Занесите в таблицу 1 данные о начальном и конечном углах, число и время колебаний. Для пары значений начального и конечного углов колебаний измерения проводите не менее трех раз ( $t, c$ ).

Замечание. При проведении измерений, указанных в пунктах 3 и 4 в режиме свободного качения маятника (угол наклона маятника  $\theta = 0^\circ$ ) достаточно ограничиться только одной парой начального и конечного углов ( $\alpha_0 = 4^\circ$  и  $\alpha_N = 2^\circ$ ) и измерения проводить не более трех раз.

- 6 После окончания измерений клавишей «СЕТЬ» отключите установку от сети.

Таблица 1

№	$\theta = 0^\circ$		$\theta = 30^\circ$		$\theta = 45^\circ$		$\theta = 60^\circ$	
	N	t, c	N	t, c	N	t, c	N	t, c
1.								
2.								
3.								

## 7 ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

- 1 Рассчитайте период колебаний маятника при различных углах наклона. Для полученных значений рассчитайте погрешности измерений методом средних значений. Результаты расчетов занесите в таблицу 2.
- 2 По формуле (22) рассчитайте коэффициент трения качения. Результаты расчета коэффициента трения и последующих расчетов погрешностей занесите в таблицу 2.
- 3 Найдите среднее значение коэффициента трения качения:

$$\langle \mu' \rangle = \frac{\sum_{i=1}^n \mu'_i}{n}, \text{ где } n - \text{число измерений.}$$

4 Рассчитайте среднеквадратичную погрешность коэффициента трения качения  $\mu'$  по формуле

$$\Delta S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\Delta \mu'_i)^2}{n(n-1)}}.$$

5 Вычислите границы доверительного интервала (абсолютную погрешность при заданной надежности) по формуле  $\Delta \mu' = t_\alpha(n) \cdot \Delta S$ .

6 Определите относительную погрешность коэффициента трения.

Таблица 2

$\theta$	$\#$	$T_i, \text{с}$	$\langle T \rangle$	$\Delta T_i$	$\langle \Delta T \rangle$	$\varepsilon, \%$	$\#$	$\mu'_i$	$\langle \mu' \rangle$	$\Delta \mu'_i$	$(\mu'_i)^2$	$\Delta \mu'$
$\theta = 0^\circ$	1						1					
	2						2					
	3						3					
$\theta = 30^\circ$	1						1					
	2						2					
	3						3					
$\theta = 45^\circ$	1						1					
	2						2					
	3						3					
$\theta = 60^\circ$	1						1					
	2						2					
	3						3					

## 8 КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1 Какова точность измерения углов наклона маятника и амплитуды колебаний в данной работе?

2 Сохраняется ли полная энергия осциллятора при наличии сил трения?

3 Какова методика определения коэффициентов трения скольжения и качения в данной работе? Каковы их характерные порядки величин?

4 Получите дифференциальное уравнение, описывающее затухающие колебания и проанализируйте его решение.

5 Дайте определения логарифмического декремента затухания и добротности колебательного контура.

6 Как экспериментально проверить теоретически полученные соотношения

для расчета периода колебаний наклонного маятника  $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g \cos \theta}}$ ,

коэффициентов трения скольжения  $\mu = \frac{\alpha_0 - \alpha_N}{4N} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}$  и качения

$$\mu' = \mu R = \frac{\alpha_0 - \alpha_N}{4N} R \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}?$$

**ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 13**

---

**ИССЛЕДОВАНИЕ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ СТРУНЫ  
МЕТОДОМ РЕЗОНАНСА****1 ЦЕЛЬ РАБОТЫ**

- 1 Изучение собственных колебаний струны с закрепленными концами.
- 2 Исследование зависимости скорости распространения поперечных колебаний в струне от ее натяжения.

**2 БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК**

- 1 Савельев И.В. Курс физики. В 3 т. Т.1: Механика. Молекулярная физика / И.В. Савельев. - Лань, 2008. – 352 с.
- 2 Трофимова Т.И. Курс физики: учеб. пособие для вузов / Т.И. Трофимова. - 19-е изд. - Академия, 2012. – 560 с.
- 3 Детлаф А.А., Яворский Б.М. Курс физики.- Академия, 2009. – 720 с.

**3 ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ВВЕДЕНИЕ**

Если в каком-либо месте упругой среды возбудить колебание ее частиц, то, вследствие взаимодействия между ними, это колебание начнет распространяться в среде от частицы к частице. Процесс распространения колебаний в среде называется волной.

Если в среде распространяется одновременно несколько волн, частицы участвуют сразу в нескольких колебательных движениях, и их колебания оказываются геометрической суммой колебаний, которые совершили бы частицы при распространении каждой из волн в отдельности.

Колебательный процесс, называемый стоячей волной, возникает в результате сложения двух встречных волн с одинаковой амплитудой и частотой, в которой направления колебания частиц совпадают. Практически стоячие волны возникают при отражении от препятствий: падающая волна и бегущая волна, навстречу отраженная, накладываясь друг на друга, образуют стоячую волну. При этом частицы среды, к которым колебания от падающей и отраженной волн приходят в одинаковой фазе, колеблются с максимальной амплитудой, а те частицы, к которым колебания приходят в противофазе, - покоятся. Первые частицы среды образуют пучности, вторые - узлы стоячей волны.

В закрепленной с обоих концов струне при распространении в ней поперечных колебаний устанавливаются стоячие волны, причем в местах закрепления струны располагаются узлы. Вследствие этого в струне возбуждаются колебания только таких частот, при которых на длине струне  $l$  укладывается целое число полуволн. Отсюда следует условие

$$l = n \frac{\lambda_n}{2} \text{ или } \lambda_n = \frac{2l}{n}, \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (1)$$

Учитывая связь длины волны колебаний с частотой  $\nu$  и скоростью распространения волны  $V$ , можно записать

$$\nu_n = \frac{V}{\lambda_n} = n \frac{V}{2l}. \quad (2)$$

Частоты  $\nu_n$  называются *собственными частотами* колебаний струны. Самая низкая собственная частота  $\nu_1 = V/(2l)$  называется *основной частотой* или *основным тоном*. Более высокие частоты, кратные  $\nu_1$ , называются *обертонами* или *гармониками* ( $n = 2$  - первый обертон;  $n = 3$  - второй и т.д.).

Скорость распространения поперечных колебаний вдоль струны зависит от натяжения струны и определяется по формуле

$$V = \frac{2}{d} \sqrt{\frac{P}{\pi \rho}}, \quad (3)$$

где  $P$  - натяжение струны (Н);  $\rho$  и  $d$  - соответственно плотность материала струны и ее диаметр.

В работе определяются собственные частоты струны, производится наблюдение формы собственных колебаний, а также исследуется зависимость скорости распространения поперечных колебаний в струне от ее натяжения.

Для возбуждения колебаний в струне в данной работе используется метод резонанса. В случае, когда сила, возбуждающая колебания, изменяется по гармоническому закону, установившиеся вынужденные колебания имеют частоту, равную частоте вынуждающей силы. Явление резонанса заключается в следующем: если частота вынуждающей силы, приложенной к малому участку струны, совпадает с одной из собственных частот, а ее место приложения - с пучностью соответствующей стоячей волны, в струне устанавливается стоячая волна с максимальной амплитудой колебаний.

#### 4 ОПИСАНИЕ УСТАНОВКИ

В схеме установки, изображенной на рисунке 1, струна натягивается между стойками подставки, причем один ее конец закреплен неподвижно, а к другому прикреплена чашка с грузами, создающими натяжение в струне.

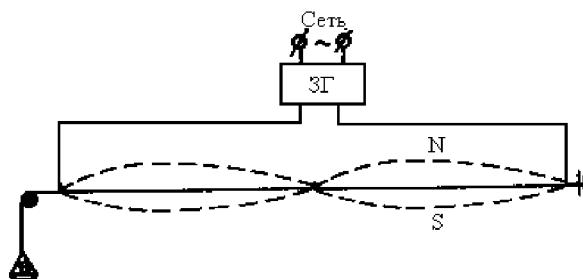


Рисунок 1 – Схема установки

От звукового генератора (ЗГ) сигналов синусоидальные электрические колебания подаются на струну. Вдоль струны по подставке может свободно перемещаться постоянный магнит. Так как по струне течет переменный ток, на участок ее, находящийся между полюсами магнита, действует сила Ампера с частотой ЗГ. Если при этом частота совпадает с одной из собственных частот струны, а положение магнита - с пучностью стоячей волны, то наблюдается явление резонанса.

Методика работы со звуковым генератором заключается в следующем. Ручки управления звуковым генератором выведены на его панель (рисунок 2).

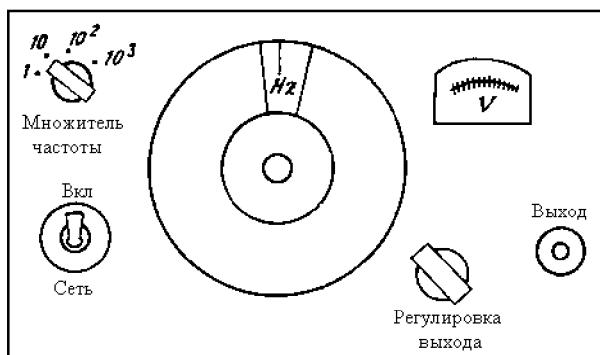


Рисунок 2 – Звуковой генератор

Частота колебаний устанавливается поворотом ручки переключателя «Множитель» (ступенчатая регулировка) и ручкой «Частота, Hz» (плавная регулировка). Для определения частоты ЗГ в герцах нужно отсчет по шкале лимба умножить на показание переключателя «Множитель».

Возбуждаемые в генераторе колебания подаются на клеммы «Выход». Напряжение на выходе регулируется ручкой «Рег. выхода» (плавная регулировка) и ступенями, при помощи переключателя пределов шкалы вольтметра.

## 5 ПРИБОРЫ И ПРИНАДЛЕЖНОСТИ

- 1 Закрепленная на штативе струна.
- 2 Подставка для грузов и набор грузов.
- 3 Генератор сигналов.
- 4 Магнит.
- 5 Микрометр.
- 6 Масштабная линейка.

## 6 ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

- 1 Измерить с помощью микрометра диаметр рабочей части струны в различных участках и в качестве диаметра струны взять среднее из этих измерений. С помощью масштабной линейки определить длину рабочей части струны.
- 2 Создать натяжение в струне, поместив на чашку грузики так, чтобы суммарная масса чашки с грузом была равна примерно 150 г. Натяжение струны при этом  $P = mg$ .
- 3 По формулам (2) и (3) вычислить частоту основного тона для созданного натяжения струны. В работе используется медная проволока с плотностью вещества  $\rho = 8,93 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ .
- 4 Подготовить генератор к работе. Переключатель пределов шкалы поставить в такое положение, при котором предел напряжения шкалы вольтметра равен 15 В. Дальнейшая регулировка выходного напряжения будет производиться с помощью ручки «Рег. выхода».

5 Поместить магнит посередине струны. Установить с помощью переключателя «Множитель» и ручки «Частота, Hz» значение частоты  $\nu_1$ , полученной теоретически для данной нагрузки в пункте 3. С помощью ручки «Рег. выхода» установить выходное напряжение ЗГ, равное 5 В. Плавно изменяя частоту вращением лимба ЗГ вблизи  $\nu_1$ , уточнить значение частоты, при которой возникают устойчивые колебания струны с максимальной амплитудой.

6 Приступить к измерениям. Вывести ручку «Рег. выхода» в крайнее левое положение, при котором выходное напряжение генератора равно нулю. Установить с помощью ручки «Частота, Hz» частоту сигнала, меньшую на несколько герц экспериментально найденного в пункте 5 значения  $\nu_1$ . С помощью ручки «Рег. выхода» установить выходное напряжение ЗГ, равное 5 В. Измерить с помощью линейки, укрепленной на магните, величину полного размаха струны в пучности стоячей воды. Результат измерений записать в таблицу 1. Вывести ручку «Рег. выхода» в крайнее левое положение. Увеличить частоту сигнала на 1 Гц. Убедившись в том, что колебания на струне прекратились, установить ручкой «Рег. выхода» выходное напряжение, равное 5 В. Измерить величину полного размаха струны в пучности. Записать результаты измерений в таблицу 2.

Продолжить измерения описанным выше способом, увеличивая каждый раз частоту сигнала на 1 Гц. Следить за тем, чтобы перед подачей на струну напряжения в ней отсутствовали колебания, а значение подаваемого напряжения равнялось 5 В.

Измерения прекратить по достижении такой частоты, при которой амплитуда колебаний струны в пучности окажется примерно вдвое меньше максимального значения.

В качестве окончательного результата для резонансной частоты  $\nu_1$  взять из таблицы 1 значение  $\nu$ , дающее максимальную амплитуду колебаний струны.

7 Передвигая магнит и меняя соответствующим образом частоту сигнала с ЗГ, получить устойчивые колебания с максимальной амплитудой последующего обертона. Для нахождения значений резонансных частот обертонов использовать методику, изложенную в пункте 6.

Результаты измерений занести в таблицу 1. Если амплитуды колебаний в этом пункте задания окажутся малыми, следует увеличить выходное напряжение генератора.

8 Провести измерения согласно пунктам 6 и 7 при других натяжениях. Рекомендуется увеличить массу груза на 50 г, проведя измерения для пяти различных натяжений струны.

Окончательные результаты для резонансных частот занести в таблицу 2.

9 По экспериментальным данным рассчитать скорости распространения поперечных колебаний для каждого натяжения струны, используя формулу (2).

10 По полученным результатам построить график зависимости скорости распространения колебаний в струне от  $\sqrt{P}$  ( $P = mg$ , где  $m$  - суммарная масса нагрузки).

На этом же чертеже построить график теоретической зависимости скорости  $V$  от  $\sqrt{P}$ , используя формулу (3). Эту формулу удобно представить в виде  $V = k\sqrt{P}$ , где  $k = \frac{2}{d\sqrt{\pi\rho}}$ . Для построения теоретического графика достаточно найти величину углового коэффициента  $k$  и провести прямую через начало координат.

11 Дать заключение о совпадении экспериментальных и теоретических результатов.

Таблица 1

Масса нагрузки $m$ , г	Номер собственного колебания	Частота $\nu$ , Гц	Величина полного размаха струны, мм		
1	1				
...		...	...	...	...

Таблица 2

Масса нагрузки $m$ , кг	Номер собственного колебания	Форма собственного колебания	Собственная частота $\nu$ , Гц	Скорость распространения колебаний $V$ , м/с	Средняя скорость $\langle V \rangle$ , м/с
1	1				
	2				
2	1				
	2				
...		...	...	...	...

## 7 КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1 Как выглядит профиль стоячей волны на струне, закрепленной с обеих сторон, если на ней установились колебания основного тона, первого обертона, второго тона?

2 Поясните назначение постоянного магнита и звукового генератора в установке данной работы.

3 Как получить колебания струны с частотой первого обертона?

4 Поясните, от чего зависит скорость распространения волны по струне.

---

## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 14

---

### ИССЛЕДОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ СВЯЗАННЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ

#### 1 ЦЕЛЬ РАБОТЫ

- 1 Изучение колебательных процессов связанных маятников (осцилляторов), обладающих двумя степенями свободы.
- 2 Определение частоты синфазных и противофазных колебаний сопряженных маятников.
- 3 Исследование условий возникновения резонанса в связанных маятниках.

#### 2 БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

- 1 Савельев И.В. Курс физики. В 3 т. Т.1: Механика. Молекулярная физика / И.В. Савельев. - Лань, 2008. – 352 с.
- 2 Трофимова Т.И. Курс физики: учеб. пособие для вузов / Т.И. Трофимова. - 19-е изд. - Академия, 2012. – 560 с.
- 3 Детлаф А.А., Яворский Б.М. Курс физики.- Академия, 2009. – 720 с.
- 4 Портис А. Физическая лаборатория.- М.: Наука, 1972.- 320 с.
- 5 Физический практикум / Под. ред. В.И. Ивероновой.- М.: Физматгиз.- 1962.- 956 с.
- 6 Лабораторные занятия по физике / Под ред. Л.Л. Гольдина.- М.: Наука, 1983.- 704 с.
- 7 Фізичний практикум / За загальн. ред. В.П. Дущенка.- К.: Вища шк., 1981.- 248 с.

#### 3 ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ВВЕДЕНИЕ

Связанные между собой периодические структуры используются при проектировании линий передач, задержки, при изготовлении генераторов высокой частоты в акустических преобразователях и др. Изучение колебательных систем с многократно повторяющимися структурами и элементами (например, сопряженные  $LC$  - цепи) позволяет выявить особенности распространения, обмена энергией, условия поглощения, демпфирования и задержки сигналов. Характерной особенностью распространения сигналов в таких периодических структурах является видоизменение распространяющихся сигналов, дисперсия волн, специфические свойства фазовой и групповой скоростей.

Простейшим примером периодической структуры является система, состоящая из двух математических маятников, связанных между собой пружиной (рисунок 1).

Для исследования колебаний такого маятника решим основную задачу динамики вращательного движения, т.е. определим уравнение движения маятников по известному силовому воздействию.

Найдем момент силы, действующий на первый и второй маятники в отклоненном положении, как указано на рисунке 1. Предположим, что углы отклонения маятников от положения равновесия малы, так что  $\sin \varphi \approx \varphi$  и

$\varphi_2 > \varphi_1$ . Кроме того, будем пренебрегать массой стержня, на котором укреплены тела.

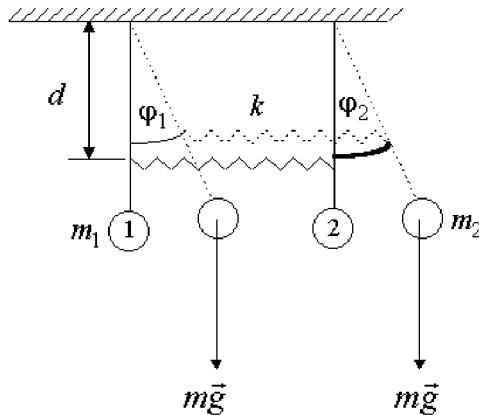


Рисунок 1 – Связанные маятники

На первый маятник будут действовать моменты сил тяжести укрепленного тела и растянутой пружины. Суммарная величина моментов сил может быть найдена по формуле

$$M_1 = -mgL\sin\varphi_1 + kd^2(\sin\varphi_2 - \sin\varphi_1) \equiv -mgL\varphi_1 + kd^2(\varphi_2 - \varphi_1). \quad (1)$$

Соответственно на второй маятник будет действовать момент силы:

$$M_2 = -mgL\sin\varphi_2 - kd^2(\sin\varphi_2 - \sin\varphi_1) \equiv -mgL\varphi_2 - kd^2(\varphi_2 - \varphi_1). \quad (2)$$

Проанализируем основное уравнение динамики вращательного движения (второй закон динамики для вращательного движения) для первого и второго маятников:

$$I \frac{d^2\varphi_1}{dt^2} = -mgL\varphi_1 + kd^2(\varphi_2 - \varphi_1), \quad (3)$$

$$I \frac{d^2\varphi_2}{dt^2} = -mgL\varphi_2 - kd^2(\varphi_2 - \varphi_1). \quad (4)$$

В уравнениях (3) и (4)  $I$  - это момент инерции маятников относительно оси их подвеса

$$I = mL^2, \quad (5)$$

где  $m$  - масса тела;  $L$  - расстояние от тела до оси вращения.

Подставив соотношение (5) в уравнения (3) и (4), получим

$$mL^2 \frac{d^2\varphi_1}{dt^2} = -mgL\varphi_1 + kd^2(\varphi_2 - \varphi_1), \quad (6)$$

$$mL^2 \frac{d^2\varphi_2}{dt^2} = -mgL\varphi_2 - kd^2(\varphi_2 - \varphi_1). \quad (7)$$

Сложив почленно уравнения (6) и (7), получим

$$mL^2 \frac{d^2(\varphi_1 + \varphi_2)}{dt^2} = -mgL(\varphi_1 + \varphi_2). \quad (8)$$

Вычтем из уравнения (6) уравнение (7):

$$mL^2 \frac{d^2(\varphi_1 - \varphi_2)}{dt^2} = -mgL(\varphi_1 - \varphi_2) - 2kd^2(\varphi_1 - \varphi_2). \quad (9)$$

Перенесем в уравнениях (8) и (9) все выражения в левую часть и почленно разделим полученные уравнения на момент инерции маятников  $mL^2$ .

$$\frac{d^2(\varphi_1 + \varphi_2)}{dt^2} + \frac{g}{L}(\varphi_1 + \varphi_2) = 0, \quad (10)$$

$$\frac{d^2(\varphi_1 - \varphi_2)}{dt^2} + \left( \frac{g}{L} + \frac{2kd^2}{mL^2} \right)(\varphi_1 - \varphi_2) = 0. \quad (11)$$

Введем следующие обозначения:

$$\omega_0^2 = \frac{g}{L}. \quad (12)$$

$$\omega_-^2 = \left( \frac{g}{L} + \frac{2kd^2}{mL^2} \right), \quad (13)$$

где  $\omega_0$  и  $\omega_-$  круговые частоты синфазных и противофазных колебаний.

С учетом соотношений (12) и (13) однородные дифференциальные уравнения второго порядка (10) и (11), описывающие связанные колебания, будут иметь следующий вид:

$$\frac{d^2(\varphi_1 + \varphi_2)}{dt^2} + \omega_0^2(\varphi_1 + \varphi_2) = 0, \quad (14)$$

$$\frac{d^2(\varphi_1 - \varphi_2)}{dt^2} + \omega_-^2(\varphi_1 - \varphi_2) = 0. \quad (15)$$

Из уравнений (14) и (15) видно, что величины  $(\varphi_1 + \varphi_2)$  и  $(\varphi_1 - \varphi_2)$  являются переменными, а решения однородных дифференциальных уравнений (14) и (15) можно представить в следующем виде:

$$(\varphi_1 + \varphi_2) = (\varphi_{10} + \varphi_{20}) \cos \omega_0 t, \quad (16)$$

$$(\varphi_1 - \varphi_2) = (\varphi_{10} - \varphi_{20}) \cos \omega_- t, \quad (17)$$

где  $\varphi_{10}$  и  $\varphi_{20}$  - это начальные смещения первого и второго маятников в начальный момент времени при  $t = 0$ .

Анализ соотношений (16) и (17) показывает, что если переменная величина  $(\varphi_1 + \varphi_2)$  является суммой угловых смещений первого и второго маятников, то амплитуда этой величины постоянна, а частота  $\omega_0$  равна частоте колебаний одиночного маятника  $\left( \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{I}} \right)$ . Такие колебания называются синфазными.

Если переменная величина  $(\varphi_1 - \varphi_2)$  является разностью угловых смещений маятников от положения равновесия, то, как и в предыдущем случае, амплитуда этой разностной величины постоянна, а частота  $\omega_-$  больше частоты синфазных колебаний  $\left( \omega_- = \sqrt{\frac{g}{L} + \frac{2kd^2}{mL^2}} \right)$ . Такие колебания называются

противофазными. Рассмотренные два вида движения называются нормальными модами колебаний.

Проанализируем процесс обмена энергии, если  $\varphi_{10} \neq 0$ , а  $\varphi_{20} = 0$ . В этом случае уравнения (16) и (17) будут иметь следующий вид:

$$(\varphi_1 + \varphi_2) = \varphi_{10} \cos \omega_0 t, \quad (18)$$

$$(\varphi_1 - \varphi_2) = \varphi_{10} \cos \omega_- t. \quad (19)$$

Сложим почленно уравнения (18), (19) и определим смещение  $\varphi_1$  первого маятника:

$$\varphi_1 = \frac{1}{2} \varphi_{10} (\cos \omega_0 t + \cos \omega_- t). \quad (20)$$

Вычтем из уравнения (18) соотношение (19) и найдем смещение  $\varphi_2$  второго маятника:

$$\varphi_2 = \frac{1}{2} \varphi_{10} (\cos \omega_0 t - \cos \omega_- t). \quad (21)$$

Используя тригонометрические соотношения для суммы и разности косинусов двух углов, выражения (20) и (21) можно записать в виде:

$$\varphi_1 = \left\{ \varphi_{10} \cos \left[ \frac{1}{2} (\omega_- - \omega_0) t \right] \right\} \cos \left[ \frac{1}{2} (\omega_0 + \omega_-) t \right], \quad (22)$$

$$\varphi_2 = \left\{ \varphi_{10} \sin \left[ \frac{1}{2} (\omega_- - \omega_0) t \right] \right\} \sin \left[ \frac{1}{2} (\omega_0 + \omega_-) t \right]. \quad (23)$$

Из соотношений (22) и (23) следует, что в начальный момент времени при  $t = 0$  амплитуда колебаний второго маятника равна нулю. С течением времени амплитуда колебаний первого маятника будет уменьшаться, а второго увеличиваться. Если  $\frac{1}{2} (\omega_- - \omega_0) t = \frac{\pi}{2}$ , то к моменту времени  $t = \frac{\pi}{\omega_- - \omega_0}$  амплитуда колебаний первого маятника станет равной нулю, а второго маятника достигнет максимального значения. Таким образом, при наличии связи через пружину энергия постепенно передается от первого маятника ко второму и обратно. Время, необходимое для передачи энергии, получило название «период биения»  $T_b$ . Оно определяется следующим выражением

$$t_{обм} = T_b = \frac{2\pi}{\omega_- - \omega_0}. \quad (24)$$

Частоту, с которой происходит обмен энергией, можно рассчитать по формуле

$$\omega_b = \omega_{обм} = \frac{2\pi}{t_{обм}} = \frac{2\pi}{T_b} = \omega_- - \omega_0. \quad (25)$$

Смещения первого и второго маятников в зависимости от времени представлены на рисунке 2.

Если  $T_1$  и  $T_2$  - периоды колебаний первого и второго маятников, то период биения  $T_b$  может быть найден по формуле

$$\frac{1}{T_b} = \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2}. \quad (26)$$

При этом коэффициент связи между маятниками определяется из выражения

$$X = \frac{T_2^2 - T_1^2}{T_2^2 + T_1^2}. \quad (27)$$

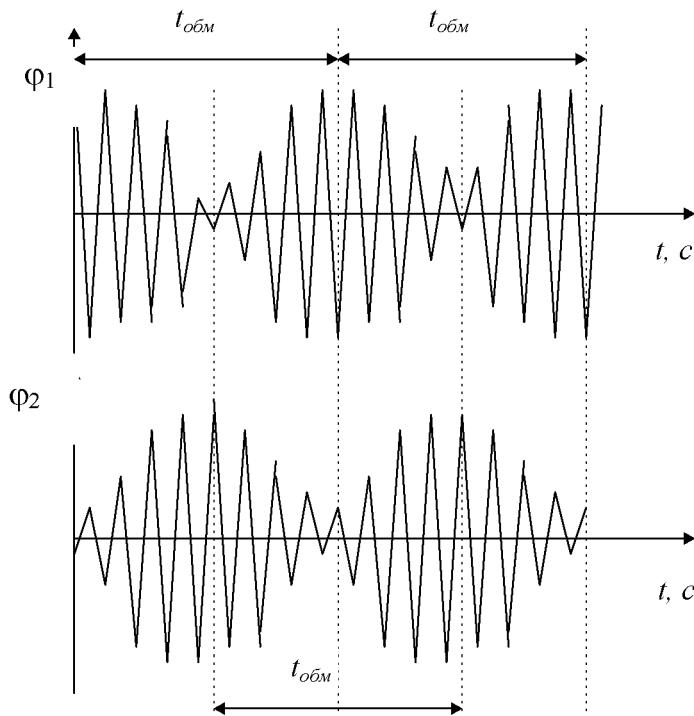


Рисунок 2 – Смещения маятников в зависимости от времени

Рассмотрим процесс возникновения вынужденных колебаний. При возбуждении колебаний связанных (сопряженных) маятников внешней периодической силой, действующей на один из маятников, наблюдаются колебательные движения каждого из них. При установившемся движении частота колебаний маятников будет равна частоте внешней вынуждающей силы. Когда частота внешней силы будет близка к одной из частот собственных колебаний маятников, наступит явление резонанса, т.е. увеличение амплитуды колебаний маятников. Если длины маятников различны, то периоды и частоты колебаний маятников также будут различны. В этом случае при изменении частоты внешней вынуждающей силы наблюдается два резонансных пика (так называемый «двугорбый» резонанс), схематически представленные на рисунке 3, где представлена зависимость амплитуды колебаний  $A$  связанных маятников от частоты  $\omega$  внешней вынуждающей силы:  $\omega_1$  - собственная частота колебаний первого маятника;  $\omega_2$  - собственная частота колебаний второго маятника.

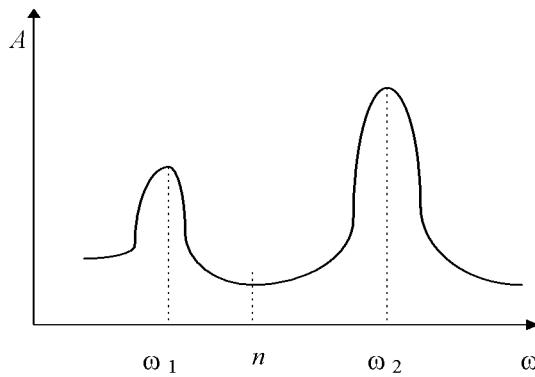


Рисунок 3 – «Двугорбый» резонанс

Заметим, что минимум амплитуды колебаний, наблюдаемый при частоте  $n$  соответствует так называемой частоте демпфирования. Выяснение условий демпфирования и определение его частоты представляет важную техническую задачу при проектировании и изготовлении различных механизмов, устройств и машин.

#### 4 ОПИСАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ УСТАНОВКИ

Общий вид экспериментальной установки представлен на рисунке 4. Основание 1 оснащено регулируемыми ножками, обеспечивающими выравнивание прибора.

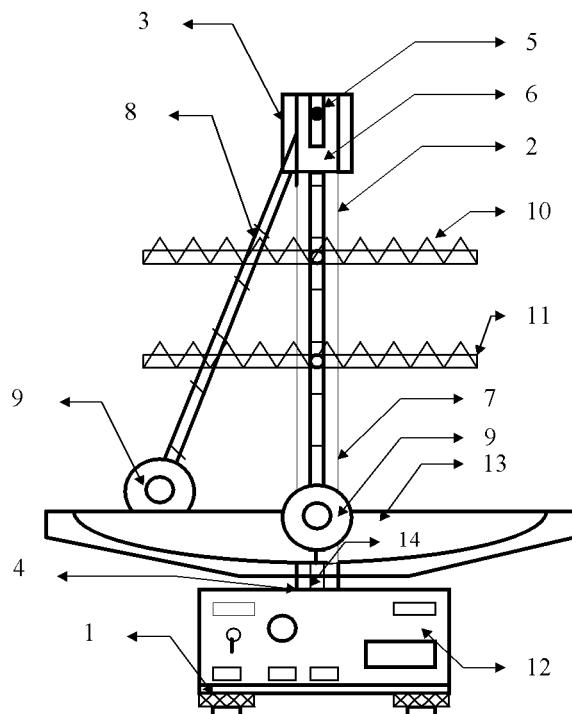


Рисунок 4 – Экспериментальная установка

В основании 1 установлена колонка 2. На колонке закреплена втулка 3 и кронштейн 4. На стержне 5 втулки находятся три подвески 6, на которых посредством шариковых подшипников закреплены два маятника и стержень 7 возбуждающий колебания. Маятник состоит из стержня 8 и перемещаемого груза 9.

Маятники сопряжены друг с другом при помощи двух пружин 10 закрепленных в специальной С - образной обойме 11, которую можно перемещать вдоль стержней маятников. Возбуждение колебаний осуществляется при помощи приводного диска, закрепленного на валу электродвигателя, который, двигая стержень 7, сопряженный при помощи двух пружин 10 со стержнем маятника, возбуждает его колебания. Электродвигатель находится в блоке управления и измерений 12. К нижнему кронштейну прикреплена угловая шкала 13, при помощи которой определяется амплитуда колебаний маятников. К нему также прикреплен фотоэлектрический датчик 14, для измерения периода колебаний одного из сопряженных маятников.

## 5 ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

### 5.1 Определение частоты синфазных и противофазных колебаний связанных маятников. Расчет коэффициента связи сопряженных маятников

1 Установите обоймы, крепящие пружины в верхней части стержней маятников, на расстоянии 15...20 см от оси вращения. Установите грузы ( $m = 100$  г) на расстоянии 15...20 см от нижней части маятника.

2 Отсоедините пружины от обоймы, соединяющей маятники со стержнем, возбуждающим вынужденные колебания.

3 Включите клавишу «СЕТЬ» на лицевой панели блока управления и измерения.

4. Отклоните оба маятника в одну сторону на угол, примерно равный  $6^\circ$  и без толчков отпустите их.

5 Нажмите переключатель «СБРОС». После того как прибор покажет 9 периодов колебаний маятников, нажмите кнопку «СТОП». После 10 полных колебаний (число полных колебаний маятника изменять от 10 до 50 по заданию преподавателя) секундомер отключится и на табло секундомера появится время 10 полных колебаний. Результаты измерения времени запишите в таблицу 1.

6 Рассчитайте частоту синфазных колебаний связанных маятников по формуле

$$\omega_0 = \frac{2\pi \cdot n}{t}, \quad (28)$$

где  $n$  - число колебаний (взято по указанию преподавателя);  $t$  - время  $n$  колебаний.

7 Повторите измерения и расчеты по пунктам 2...6 не менее 5...10 раз. Результаты измерений и расчетов запишите в таблицу 1.

8 Отклоните маятники в противоположные стороны от положения равновесия на угол примерно равный  $6^\circ$  и измерьте период противофазных колебаний в соответствии с пунктами 2...6. Результаты измерений и расчетов запишите в таблицу 2.

9 Рассчитайте коэффициент связи  $X$  по формуле (27). Результаты расчета запишите в отчет.

### 5.2 Определение периода и частоты биений

1 Нажмите клавишу «СЕТЬ» на лицевой панели блока управления и измерения.

2 Отклоните один маятник в одну сторону на угол примерно равный  $6^\circ$ , второй придерживайте в вертикальном положении и без толчков отпустите их.

3 Нажмите переключатель «СБРОС». Амплитуда колебаний первого (отклоненного) маятника будет постепенно уменьшаться, а второго - увеличиваться. Через половину периода биений амплитуда первого маятника станет равной нулю (маятник на мгновенье остановится), а второго примет максимальное значение. С течением времени колебания этого маятника будут затухать, а амплитуда первого маятника снова будет возрастать. Когда второй маятник

вновь остановится (амплитуда станет равной нулю) необходимо нажать кнопку «СТОП». На экране появится число колебаний и время между двумя последовательными остановками в движении второго маятника. Результаты измерения периода биения запишите в таблицу 1.

4 Повторите измерения периода биения не менее 5...10 раз. Результаты измерений запишите в таблицу 3.

5 Рассчитайте среднее значение периода биения, величину абсолютной и относительной погрешности измерения вероятностным методом при заданной надежности (по указанию преподавателя). Результаты расчета запишите в таблицу 3.

6 При проведении эксперимента особое внимание следует обратить на правильную установку начальных отклонений маятников и на то, что при достижении минимально возможной амплитуды колебаний маятник скачкообразно изменяет фазу колебаний.

### 5.3 Изучение резонанса сопряженных маятников

1 Соедините пружины связанных маятников со стержнем, возбуждающим вынужденные колебания. Введите расстройку в колебательную систему. Для этого груз одного из маятников необходимо сдвинуть на 10...15 см к оси вращения.

2 Включите питание электродвигателя и, плавно регулируя обороты двигателя, наблюдайте за процессом возникновения вынужденных колебаний в связанных маятниках. Если частота вынуждающей силы будет примерно совпадать с одной из частот собственных колебаний маятников, то возникнет явление резонанса, т.е. наступит резкое увеличение амплитуды колебаний. Изменяя частоту, установите условия возникновения двух резонансных пиков («двугорбого резонанса»). Результаты наблюдений запишите в отчет к лабораторной работе.

3 По проведенным экспериментальным исследованиям сделайте краткие выводы по работе.

Таблица 1

Синфазные колебания						
№	Угол отклонения, $\varphi_1 =$ ; $\varphi_2 =$ . Надежность $\alpha =$ ; Коэффициент Стьюдента $t_\alpha(n) =$ .					
	$n$	$t, \text{ с}$	$T_i, \text{ с}$	$\langle T \rangle, \text{ с}$	$\langle \omega \rangle, \text{ с}^{-1}$	$\langle \Delta T \rangle$
1						
2						
3						
4						
5						
6						
7						
8						
9						
10						

Таблица 2

№	Противофазные колебания						
	$n$	$t, \text{ с}$	$T_i, \text{ с}$	$\langle T \rangle, \text{ с}$	$\langle \omega \rangle, \text{ с}^{-1}$	$\langle \Delta T \rangle$	$\varepsilon, \%$
1							
2							
3							
4							
5							
6							
7							
8							
9							
10							

Таблица 3

№	Определение периода и частоты биений						
	$n$	$t, \text{ с}$	$T_i, \text{ с}$	$\langle T \rangle, \text{ с}$	$\langle \omega \rangle, \text{ с}^{-1}$	$\langle \Delta T \rangle$	$\varepsilon, \%$
1							
2							
3							
4							
5							
6							
7							
8							
9							
10							

## 6 КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

- Получите выражение для определения периода колебаний математического, физического и пружинного маятников.
- Получите выражение для определения резонансной частоты при вынужденных колебаниях пружинного маятника. Как сила трения влияет на амплитуду и резонансную частоту?
- Запишите и решите дифференциальные уравнения, описывающие колебания сопряженных маятников. Определите период синфазных и противофазных колебаний.
- Объясните условия возникновения двойных резонансных пиков («двугорбый резонанс») при колебаниях связанного маятника.
- Объясните методику исследования синфазных и противофазных колебаний. Как определяется период биений?

---

## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 15

---

### ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОТНОШЕНИЯ МОЛЯРНЫХ ТЕПЛОЁМКОСТЕЙ (ПОКАЗАТЕЛЯ АДИАБАТЫ) ВОЗДУХА МЕТОДОМ КЛЕМАНА-ДЕЗОРМА

#### **1 ЦЕЛЬ РАБОТЫ**

Экспериментально определить показатель адиабаты для воздуха.

#### **2 БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК**

- 1 Савельев И.В. Курс физики. В 3 т. Т.1: Механика. Молекулярная физика / И.В. Савельев. - Лань, 2008. – 352 с.
- 2 Трофимова Т.И. Курс физики: учеб. пособие для вузов / Т.И. Трофимова. - 19-е изд. - Академия, 2012. – 560 с.
- 3 Детлаф А.А., Яворский Б.М. Курс физики.- Академия, 2009. – 720 с.

#### **3 ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ВВЕДЕНИЕ**

Адиабатическим (адиабатным) называется процесс, протекающий без теплообмена с внешней средой ( $\Delta Q = 0$ ). Адиабатические процессы протекают в системах, окружённых теплоизолирующей (адиабатной) оболочкой, но их можно реализовать и при отсутствии такой оболочки. Для этого процесс должен протекать настолько быстро, чтобы за время его осуществления не произошло теплообмена между системой и окружающей средой.

Адиабатный процесс может протекать обратимо и необратимо. В случае обратимого адиабатного процесса энтропия системы  $S$  остаётся постоянной, в необратимых – возрастает. Поэтому обратимый адиабатный процесс иногда называют изоэнтропийным ( $S = \text{const}$ ). Если взять один моль газа, то I-й закон термодинамики для адиабатного процесса будет иметь следующий вид:

$$C_V dT + pdV = 0, \quad (1)$$

где  $C_V$  – молярная теплоёмкость идеального газа при постоянном объёме.

Запишем уравнение Менделеева–Клапейрона для одного моля газа в дифференциальной форме

$$PdV + VdP = RdT \quad (2)$$

Выразим  $dT$  из (2) и подставим в (1):

$$\begin{aligned} \frac{C_V}{R}(PdV + VdP) + PdV &= 0 \Rightarrow PdV + VdP + \frac{R}{C_V}PdV = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left(1 + \frac{R}{C_V}\right)PdV + VdP = 0 \Rightarrow \\ &\frac{C_V + R}{C_V}PdV + VdP = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Из уравнения Майера следует, что  $C_V + R = C_P$ , где  $C_P$  – молярная теплоёмкость газа при постоянном давлении. Отношение  $\frac{C_P}{C_V} = \gamma$  – показатель адиабаты. С учётом последнего равенства уравнение (3) принимает вид

$$\gamma PdV + VdP = 0. \quad (4)$$

Разделим переменные и проинтегрируем уравнение (4):

$$\int_{P_1}^{P_2} \frac{dP}{P} = -\gamma \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} \Rightarrow \ln \frac{P_2}{P_1} = \ln \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^\gamma \Rightarrow \frac{P_2}{P_1} = \frac{V_1^\gamma}{V_2^\gamma} \Rightarrow$$

$$P_1 V_1^\gamma = P_2 V_2^\gamma.$$

Т.к. состояния 1 и 2 выбраны произвольно, то можно записать

$$PV^\gamma = const. \quad (6)$$

Уравнение (6), описывающее адиабатный процесс в переменных  $P, V$ , называется уравнением Пуассона или уравнением адиабаты.

Изохорные и изобарные молярные теплоёмкости можно выразить через число степеней свободы  $i$ :

$$C_V = \frac{i}{2}R; \quad C_P = \frac{i+2}{2}R, \quad (7)$$

где  $R = 8,31 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$  – молярная газовая постоянная. Тогда показатель адиабаты можно представить в виде

$$\gamma = \frac{i+2}{i}. \quad (8)$$

Для молекул одноатомного газа  $i = 3$ , для молекул двухатомного газа при жёсткой связи между атомами  $i = 5$ , для молекул трех- и более атомного газа при жёсткой связи между атомами  $i = 6$ .

#### 4 ПРИБОРЫ И ПРИНАДЛЕЖНОСТИ

- 1 Металлический сосуд.
- 2 Манометр.
- 3 Насос.
- 4 Трёхходовой кран.

#### 5 ТЕОРИЯ МЕТОДА И ОПИСАНИЕ УСТАНОВКИ

Для определения отношения молярных теплоёмкостей (показателя адиабаты)  $\gamma = \frac{C_P}{C_V}$  по способу Клемана и Дезорма используется прибор (рисунок 1), состоящий из металлического сосуда (1), который соединён с манометром (2) и через трёхходовой кран (3) с насосом (4). Кран может соединять сосуд с атмосферой.

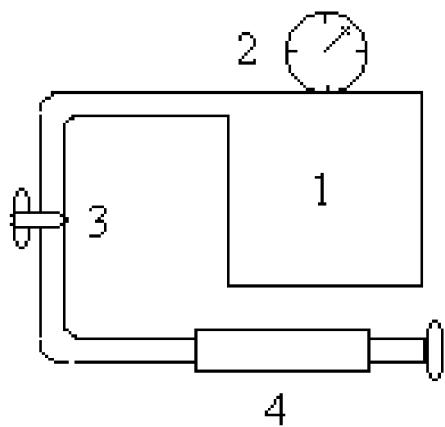


Рисунок 1 – Лабораторная установка

Применяемый в данной работе метод определения отношения  $\frac{C_p}{C_v}$  основан на предположении, что любое быстрое расширение или сжатие газа можно с достаточным приближением рассматривать как адиабатический процесс.

Накачаем в сосуд воздух и подождём (1...2 мин.), пока температура воздуха в сосуде не станет равной температуре окружающей среды. На диаграмме ( $P, V$ ) (рисунок 2) это состояние изобразится точкой 1, причём,  $P_1 = P_0 + h_1$ , где  $P_0$  - атмосферное давление, а  $h_1$  - давление, которое показывает манометр.

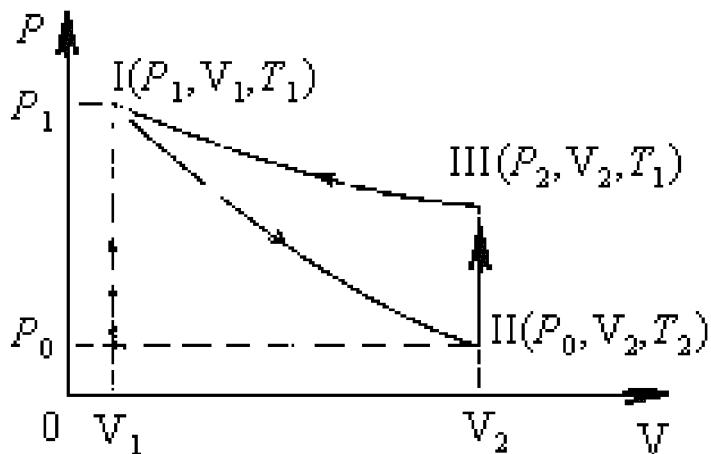


Рисунок 2 – Диаграмма зависимости давления от объема

Если быстро открыть кран, то воздух в сосуде будет расширяться адиабатически, пока давление его не станет равным атмосферному. При расширении газ охлаждается до температуры  $T_2$ . Второе состояние газа 2 будет характеризоваться параметрами  $P_0, V_2, T_2$  (где  $V_2$  - объём газа, часть которого находится вне сосуда).

Переход из состояния 1 в 2 происходит по адиабате (1-2). Если теперь газ предоставить самому себе, то в результате теплопроводности стенок сосуда, газ постепенно нагревается, и его температура станет равной температуре окружающей среды. Однако, объём части газа, оставшейся в сосуде, меняется не будет. Следовательно, этот процесс изохорический, на диаграмме

$(P, V)$  изобразится линией (2-3). В результате этого процесса газ в сосуде перейдёт в состояние 3, характеризуемое параметрами  $P_2, V_2, T_1$ , где  $V_2$  - объём, который занимал бы газ, если бы адиабатическое расширение происходило не за счёт выхода части газа из сосуда, а за счёт расширения сосуда (например, за счёт передвижения поршня):  $P_2 = P_0 + h_2$ , где  $h_2$  - показание манометра.

Точки 1-2 находятся на одной адиабате. Поэтому параметры состояний, отвечающих этим точкам, можно описать уравнением Пуассона:

$$P_1 V_1^\gamma = P_0 V_2^\gamma. \quad (9)$$

Точки 1-3 лежат на одной изотерме. Следовательно, параметры этих состояний можно описать с помощью уравнения Бойля-Мариотта:

$$P_1 V_1 = P_2 V_2 \quad (10)$$

Найдём из уравнения (10) неизвестную величину  $V_2$  и подставим её в уравнение (9). В результате получим выражение

$$P_1 P_2^\gamma = P_0 P_1^\gamma. \quad (11)$$

Прологарифмируем полученное выражение и решим его относительно  $\gamma$ :

$$\ln P_1 + \gamma \ln P_2 = \ln P_0 + \gamma \ln P_1,$$

отсюда

$$\gamma = \frac{\ln P_1 - \ln P_0}{\ln P_1 - \ln P_2}. \quad (12)$$

Так как давления  $P_0, P_1$  и  $P_2$  незначительно отличаются друг от друга, то в формуле (12) можно разности логарифмов заменить разностями самих чисел. Тогда для показателя адиабаты получим выражение:

$$\gamma = \frac{P_1 - P_0}{P_1 - P_2}. \quad (13)$$

Но так как  $P_1 = P_0 + h_1$  и  $P_2 = P_0 + h_2$ , то

$$\gamma = \frac{h_1}{h_1 - h_2}, \quad (14)$$

где  $h_1$  и  $h_2$  - показания манометра.

## 6 ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

1 Повысить насосом давление воздуха в сосуде до некоторого значения  $h'_1$ , по шкале манометра. Отсоединить насос от сосуда с помощью крана. Подождать 1...2 мин. пока температура в сосуде не станет равной комнатной температуре. После этого снять показание манометра  $h_1$ .

2 Быстро соединить (с помощью крана) сосуд с атмосферой и через 5 с. после того, как стрелка манометра окажется в нулевом положении, отсоединить его от атмосферы. Когда давление окончательно установится (теплообмен закончится), произвести второй отсчёт  $h_2$ .

3 Опыты следует повторять (5-10 раз, по указанию преподавателя), меняя всякий раз величину  $h'_1$ .

4 Результаты каждого измерения записать в таблицу 1.

## 7 ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ЭКСПЕРИМЕНТА

- 1 Вычислить  $\gamma_i$  для каждого измерения по формуле (14).
- 2 Найти среднее значение показателя адиабаты по формуле

$$\langle \gamma \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \gamma_i,$$

где  $n$  – число измерений ( $n = 10$ ).

- 3 Вычислить для каждого измерения  $\Delta\gamma_i = |\gamma_i - \langle \gamma \rangle|$  и  $(\Delta\gamma_i)^2$

- 4 Вычислить среднюю квадратичную погрешность  $\Delta S$  по формуле

$$\Delta S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\Delta\gamma_i)^2}{n(n-1)}}.$$

- 5 Задать значение надежности  $\alpha = 0,95$  и определить по таблице коэффициент Стьюдента  $t_\alpha(n)$ .

- 6 Вычислить границы доверительного интервала по формуле

$$\Delta\gamma = t_\alpha(n) \cdot \Delta S.$$

- 7 Вычислить относительную погрешность в %

$$\varepsilon = \frac{\Delta\gamma}{\langle \gamma \rangle} \cdot 100\%.$$

- 8 Окончательный результат записать в виде

$$\gamma = \langle \gamma \rangle \pm \Delta\gamma$$

- 9 Вычислить число степеней свободы молекул воздуха  $i$ , по формуле (8).

- 10 Результаты вычислений занести в таблицу 1.

Таблица 1

№	$h_1$	$h_2$	$\gamma_i$	$\langle \gamma_i \rangle$	$\Delta\gamma_i$	$(\Delta\gamma_i)^2$	$\Delta S$	$\Delta\gamma$	$\varepsilon, \%$
1									
2									
3									
4									
5									

## 8 КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

- 1 Дайте определение адиабатического процесса.
- 2 Запишите первый закон термодинамики для адиабатического процесса.
- 3 Запишите уравнение Пуассона для адиабатического процесса.
- 4 Объясните, почему показатель адиабаты больше единицы.
- 5 Дайте определения молярных теплоёмкостей  $C_V$  и  $C_P$ .
- 6 Запишите уравнение Майера.
- 7 Объясните физический смысл молярной газовой постоянной  $R$ .
- 8 Дайте определение, что такое число степеней свободы и чему оно равно для одно-, двух- и трёхатомных молекул при жёсткой связи между атомами.
- 9 Изобразите в координатах  $P, V$  изотермический и адиабатический процессы.
- 10 Какова связь между молярной и удельной теплоёмкостями?
- 11 Выведите расчётную формулу (14).

---

## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 16

---

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОКАЗАТЕЛЯ АДИАБАТЫ ВОЗДУХА ПО СКОРОСТИ ЗВУКА

#### **1 ЦЕЛЬ РАБОТЫ**

1 Измерение скорости звука в воздухе методом стоячих волн.

2 Определение  $\frac{C_p}{C_v}$  для воздуха по скорости звука.

#### **2 БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК**

- 1 Савельев И.В. Курс физики. В 3 т. Т.1: Механика. Молекулярная физика / И.В. Савельев. - Лань, 2008. – 352 с.
- 2 Трофимова Т.И. Курс физики: учеб. пособие для вузов / Т.И. Трофимова. - 19-е изд. - Академия, 2012. – 560 с.
- 3 Детлаф А.А., Яворский Б.М. Курс физики.- Академия, 2009. – 720 с.

#### **3 ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ОБОСНОВАНИЕ РАБОТЫ**

При распространении упругих волн в газовой среде вследствие сжатий и разряжений происходит изменение температуры различных участков. Для волн высокой частоты температура отдельных участков не успевает выравниваться за время одного колебания, т.е. теплообмен между областями сжатия и расширения практически отсутствуют и процесс распространения звуковых волн можно считать адиабатическим. Поэтому величина скорости звука оказывается зависящей от отношения теплоемкостей  $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$  и измерение

скорости звука является одним из точнейших способов определения величины  $\gamma$ .

Фазовая скорость продольной плоской синусоидальной волны в однородной газовой среде определяется по формуле

$$V = \sqrt{\frac{K}{\rho}},$$

где  $\rho$  - плотность среды;  $K$  - модуль объемной упругости среды.

Модуль объемной упругости  $K$  газа зависит от вида термодинамического процесса, его объемной деформации (сжатия - расширения):  $K_{uz} = P$ ;  $K_{ad} = \gamma P$ . Соответственно скорость упругих волн в идеальном газе зависит от их частоты. При малой частоте процесс деформации газа близок к изотермическому и скорость волн равна

$$V = V_{uz} = \sqrt{\frac{K_{uz}}{\rho}} = \sqrt{\frac{RT}{\mu}}, \quad (1)$$

а при большой частоте процесс близок к адиабатному и скорость волны может быть представлена в виде

$$V = V_{ad} = \sqrt{\frac{K_{ad}}{\rho}} = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}} = \sqrt{\frac{\gamma RT}{\mu}}, \quad (2)$$

где  $\mu$  - молярная масса газа;  $T$  - абсолютная температура;  $R$  - универсальная газовая постоянная. Отсюда

$$\gamma = \frac{V^2 \mu}{RT}. \quad (3)$$

Таким образом, определение  $\gamma$  для воздуха сводится к измерению скорости звука и абсолютной температуры воздуха.

В данной работе скорость звука определяется методом стоячих волн. Стоячая волна образуется в результате наложения двух бегущих синусоидальных волн, которые распространяются навстречу друг другу и имеют одинаковые частоты и амплитуды.

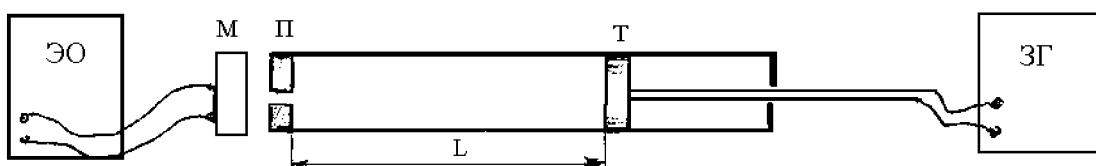


Рисунок 1 – Установка для измерения скорости звука

Установка для измерения скорости звука (рисунок 1) состоит из стеклянной трубы на одном конце которой помещен источник звука - телефон Т, другой конец закрыт плотной пластинкой П с отверстием, против которого помещается микрофон М. Колебания мембранны телефона возбуждаются переменным током звуковой частоты от звукового генератора ЗГ. Возникающий в микрофоне электрический сигнал подается на вертикально отклоняющие пластины осциллографа ЭО. Возбуждаемая мемраной телефона Т звуковая волна, отражается от пластины П и интерферирует с "прямой" волной, идущей от телефона. Интенсивность суммарной звуковой волны зависит от расстояния  $L$  между пластиной П и телефоном Т, а также от частоты  $v$  звуковых колебаний. Если расстояние равно целому числу полуволн звука

$$L = n \frac{\lambda}{2} = n \frac{V}{2v}, \quad (4)$$

где  $n$  - целое число;  $V$  - скорость звука, то в трубе устанавливается интенсивная стоячая волна - наступает звуковой резонанс.

Наблюдая возникновение резонанса, можно определить скорость звука. Изменяя расстояние  $L$ , находят такое положение телефона Т, при котором на экране осциллографа происходит резкое увеличение амплитуды колебаний (звуковой резонанс), фиксируют положение  $L_n$  телефона по шкале, нанесенной на поверхности трубы.

Перемещая телефон Т ближе к торцу трубы (или, наоборот, дальше) находят ряд последовательных резонансов, каждый раз фиксируя положение телефона:

$$L_n, L_{n+1}, L_{n+2}, \dots,$$

причем,

$$L_n = n \frac{\lambda}{2}, L_{n+1} = (n+1) \frac{\lambda}{2}, \dots$$

Используя формулу для скорости звуковой волны

$$V = \lambda \cdot v \quad (5)$$

и соотношение  $\lambda = \frac{2L_n}{n}$ , получаем выражение для скорости звука:

$$V = \frac{2L_n v}{n}.$$

Число  $n$  исключается измерением двух последовательных состояний колеблющейся системы, при которых устанавливаются стоячие волны:

$$V = \frac{2vL_n}{n} = \frac{2vL_{n+1}}{n+1}, \text{ откуда } n = \frac{L_n}{L_{n+1} - L_n}.$$

Окончательное выражение для определения скорости звука

$$V = 2v(L_{n+1} - L_n). \quad (6)$$

## 4 ПРИБОРЫ И ПРИНАДЛЕЖНОСТИ

- 1 Труба с микрофоном на конце и перемещающимся телефоном в ней.
- 2 Генератор звуковых колебаний.
- 3 Осциллограф.
- 4 Линейка.

## 5 ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

- 1 Включить осциллограф и звуковой генератор в сеть переменного тока. Исходя из примерного значения скорости звука 300 м/с рассчитать, в каком диапазоне частот следует вести измерения, чтобы изменения расстояния  $L_n$  на  $\lambda/2$  были удобны для измерений.
- 2 Подобрать амплитуду колебаний на 3Г и усиление на осциллографе так, чтобы на экране наблюдались колебания достаточной амплитуды. Остановить картину на осциллографе, подбирая частоту развертки.
- 3 При неизменной частоте генератора 3Г произвести измерения двух последовательных расстояний  $L_n$  и  $L_{n+1}$  между пластиной П и телефоном Т, соответствующих резкому увеличению амплитуды электрических колебаний, наблюдаемых на экране осциллографа. Измерения произвести не менее 7 раз по всей длине трубы. Измеренные пары значений  $L_n$  и  $L_{n+1}$  занести в таблицу 1.
- 4 Повторить все измерения пункта 3 для трех различных частот звуковой волны в диапазоне 1500...2000 Гц.
- 5 По формулам (6) и (3) вычислить скорость звука и показатель адиабаты для каждого случая. При этом за температуру воздуха принять комнатную температуру в лаборатории. Молекулярную массу воздуха находят из его плотности при температуре 0°C и давлении  $1,013 \cdot 10^5$  Па ( $\rho = 1,2929 \text{ кг}/\text{м}^3$ ;  $R = 8,31 \text{ Дж}/\text{моль}\cdot\text{К}$ ).
- 6 Определить среднюю квадратичную погрешность результата серии измерений показателя адиабаты воздуха

$$\Delta S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\Delta \gamma_i)^2}{n(n-1)}}$$

и вычислить величину доверительного интервала  $\Delta\gamma$  (абсолютную погрешность) при заданной преподавателем надежности  $\alpha$ :

$$\Delta\gamma = t_\alpha(n) \cdot \Delta S.$$

7 Оценить относительную погрешность определения показателя адиабаты воздуха

$$\varepsilon = \frac{\Delta\gamma}{\langle \gamma \rangle} \cdot 100\%.$$

8 Окончательный результат записать в виде

$$\gamma = \langle \gamma \rangle \pm \Delta\gamma$$

9 Результаты измерений и вычислений занести в таблицу 1.

Таблица 1

№	$\nu, \text{Гц}$	$L_n, \text{м}$	$L_{n+1}, \text{м}$	$V, \text{м/с}$	$\gamma$	$\Delta\gamma$	$(\Delta\gamma)^2$	$\Delta\gamma$	$\varepsilon, \%$
1									
2									
3									
4									
5									
6									
7									

## 6 КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

- 1 Что понимается под уравнением волны?
- 2 От чего зависит фазовая скорость волны в упругой среде?
- 3 Чем принципиально отличается бегущая волна от стоячей?
- 4 Объясните возникновение стоячих волн.
- 5 Что называется теплоемкостью газа, удельной теплоемкостью, молярной теплоемкостью?
- 6 Почему теплоемкость газа при постоянном объеме  $C_V$  не равна теплоемкости газа при постоянном давлении  $C_P$ ?
- 7 Какой процесс называется адиабатическим, изотермическим, изохорическим, изобарическим?

\* \* \*

## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 17

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ СРЕДНЕЙ ДЛИНЫ СВОБОДНОГО ПРОБЕГА И ЭФФЕКТИВНОГО ДИАМЕТРА МОЛЕКУЛ ВОЗДУХА

#### 1 ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Изучить методику определения эффективного диаметра и средней длины свободного пробега молекул воздуха.

#### 2 БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

- 1 Савельев И.В. Курс физики. В 3 т. Т.1: Механика. Молекулярная физика / И.В. Савельев. - Лань, 2008. – 352 с.
- 2 Трофимова Т.И. Курс физики: учеб. пособие для вузов / Т.И. Трофимова. - 19-е изд. - Академия, 2012. – 560 с.
- 3 Детлаф А.А., Яворский Б.М. Курс физики.- Академия, 2009. – 720 с.

#### 3 ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ВВЕДЕНИЕ

Для выяснения природы внутреннего трения в газах рассмотрим два слоя газа с площадью  $\Delta S$ , отстоящих друг от друга на расстоянии  $\Delta Z$  и движущихся вдоль оси  $Y$  параллельно друг другу со скоростями  $V_1$  и  $V_2$  ( $V_1 > V_2$ ,  $\Delta V = V_1 - V_2$ ) (рисунок 1).

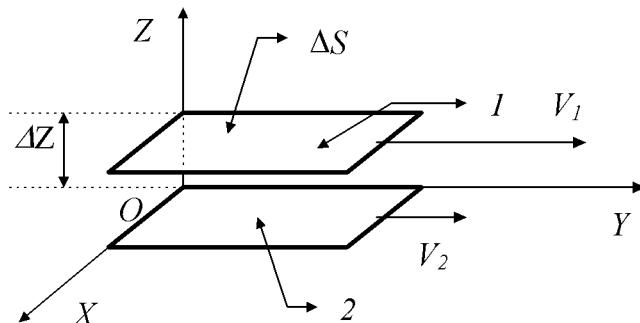


Рисунок 1 – Возникновение внутреннего трения

Благодаря тепловому, хаотичному движению молекулы из слоя 1, движущиеся вдоль оси  $Y$  со скоростью  $V_1$  будут переходить в слой 2 и наоборот - молекулы из слоя 2, движущиеся вдоль оси  $Y$  со скоростью  $V_2 < V_1$  будут переходить в слой 1. В результате таких переходов скорость упорядоченного движения слоя 1 будет уменьшаться, а слоя 2 - увеличиваться. С макроскопической точки зрения это означает, что слой 1 будет тормозиться, а слой 2 будет увеличивать свою скорость.

Таким образом между слоями газа действуют силы трения, которые направлены по касательной к рассматриваемым поверхностям 1 и 2. Можно показать, что силы внутреннего трения (вязкости), определяются следующим выражением:

$$F = -\eta \frac{\Delta V}{\Delta Z} \Delta S, \quad (1)$$

где  $\eta$  - коэффициент внутреннего трения (динамическая вязкость).

Из молекулярно-кинетической теории следует:

$$\eta = \frac{1}{3} \rho \langle V_T \rangle \langle \lambda \rangle, \quad (2)$$

где  $\langle V_T \rangle$  - средняя скорость теплового движения,

$$\langle V_T \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}, \quad (3)$$

$\langle \lambda \rangle$  - средняя длина свободного пробега молекул;  $T$  - абсолютная температура;  $M$  - молярная масса газа;  $R$  - универсальная газовая постоянная;  $\rho$  - плотность рассматриваемого газа.

Соотношение (2) служит основой для экспериментального определения средней длины свободного пробега молекул газа (воздуха):

$$\langle \lambda \rangle = \frac{3\eta}{\rho \langle V_T \rangle}. \quad (4)$$

Плотность газа можно определить с помощью уравнения Менделеева-Клапейрона:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{pM}{RT}, \quad (5)$$

где  $P$  - давление газа;  $V$  - объем газа;  $m$  - масса газа;  $M$  - молярная масса газа;  $R$  - универсальная газовая постоянная;  $T$  - абсолютная температура рассматриваемой термодинамической системы.

Коэффициент вязкости определяется экспериментально на установке, показанной на рисунке 2, с помощью формулы Пуазейля [1]:

$$\eta = \frac{\pi r^4 \Delta p t}{8Vl}, \quad (6)$$

где  $V$  - объем всасывающегося через капилляр воздуха;  $r$  - радиус капилляра;  $l$  - длина капилляра;  $\Delta p$  - разность давлений на концах капилляра;  $t$  - время прохождения воздуха через капилляр, равное времени вытекания воды из сосуда.

Разность давлений в концах капилляра можно определить по формуле:

$$\Delta p \cong \rho_e g \frac{h_1 + h_2}{2}, \quad (7)$$

где  $\rho_e$  - плотность воды;  $g$  - ускорение свободного падения;  $h_1, h_2$  - первоначальный и конечный уровни воды в сосуде.

Объем воздуха вошедшего в сосуд, равен объему воды, вытекающей из сосуда:

$$V = \frac{m}{\rho_e}, \quad (8)$$

где  $m$  - масса воды, вытекающей из сосуда;  $\rho_e$  - плотность воды.

Подставив соотношения (3, 5, 7) в уравнение (4), получим рабочую формулу для определения средней длины свободного пробега молекул воздуха

$$\langle \lambda \rangle = \frac{3\pi g \rho_e^2}{32} \sqrt{\frac{\pi RT}{2M}} \frac{r^4 t (h_1 + h_2)}{lpm}. \quad (9)$$

Определение эффективного диаметра молекул воздуха основано на использовании соотношения

$$\langle \lambda \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi d^2 n}},$$

где  $n$  - концентрация молекул газа;  $d$  - эффективный диаметр молекул.

Отсюда:

$$d = \sqrt{\frac{1}{\sqrt{2\pi n} \langle \lambda \rangle}}, \quad (10)$$

Так как  $P = nkT$  то  $n = P/kT$  и, подставляя это значение в уравнение (10), получим

$$d = \sqrt{\frac{kT}{\sqrt{2\pi P} \langle \lambda \rangle}}. \quad (11)$$

#### 4 ОПИСАНИЕ УСТАНОВКИ И МЕТОДИКА ПРОВЕДЕНИЯ ЭКСПЕРИМЕНТА

Установка для определения средней длины свободного пробега молекул воздуха изображена на рисунке 2.

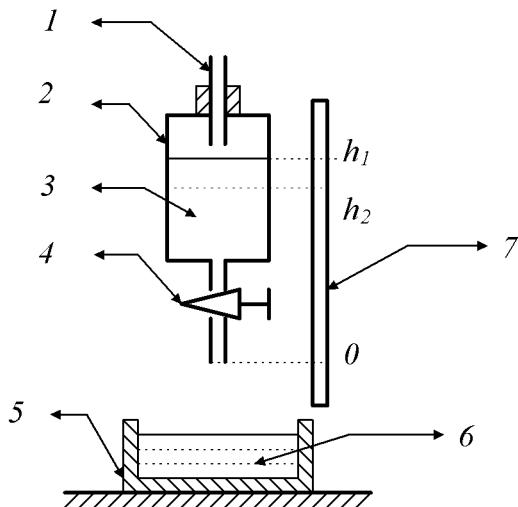


Рисунок 2 – Установка для проведения эксперимента

Она состоит из капилляра 1, который вставлен в сосуд 2. В нижней части этого сосуда находится кран 4. Сосуд 2 заполняется на две трети его объема водой, уровень которой можно определять с помощью масштабной линейки 7. Методика определения длины свободного пробега и эффективного диаметра молекул воздуха основана на экспериментальном измерении времени прохождения воздуха через капилляр (времени вытекания воды из сосуда) с последующими расчетами коэффициента вязкости, длины свободного пробега и эффективного диаметра.

#### 5 ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ И ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

1 Измерьте радиус  $r$  и длину  $l$  капилляра.

2 Определите массу стакана 5, температуру воздуха  $T$  (К), атмосферное давление  $p$  (Па) (1 мм. рт. ст. = 133 Па).

3 Наполните сосуд 2 водой и по масштабной линейке отметьте первоначальный уровень  $h_1$  воды в сосуде.

4 Установите капилляр, откройте кран и, дождавшись, когда вода начнет вытекать из сосуда, включите секундомер. Когда уровень воды в сосуде понизится на 30...40 мм, перекройте кран и выключите секундомер.

5 Определите новый уровень  $h_2$  воды в сосуде.

6 Взвесьте стакан с водой и определите массу  $m$  воды в стакане.

7 Результаты измерений занесите в таблицы 1 и 2.

После окончания проведенных экспериментов следует закрыть капилляр колпаком, чтобы избежать засорения капилляра пылью. Необходимо бережно обращаться с установкой. Капилляр вставлять в сосуд осторожно, кран поворачивать плавно, без усилий.

## 6 ПРОВЕДЕНИЕ РАСЧЕТОВ

1 Определите по формулам (9) и (11) величину средней длины свободного пробега и эффективного диаметра молекул воздуха. Результаты вычислений занесите в таблицы 3 и 4.

2 Рассчитайте средние значения средней длины свободного пробега молекул воздуха и эффективного диаметра по формулам

$$\langle \bar{\lambda} \rangle = \frac{\sum_{i=1}^N \langle \lambda_i \rangle_i}{N}; \quad \langle d \rangle = \frac{\sum_{i=1}^N d_i}{N}.$$

3 Результаты этого и последующих расчетов занесите в таблицы 3 и 4.

4 Вычислите абсолютные погрешности средней длины свободного пробега  $\Delta \lambda_i$  и эффективного диаметра молекул  $\Delta d_i$  и их квадраты.

5 Рассчитайте среднюю квадратичную погрешность средней длины свободного пробега и эффективного диаметра молекул воздуха

$$\Delta S_\lambda = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (\Delta \lambda_i)^2}{N(N-1)}}; \quad \Delta S_d = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (\Delta d_i)^2}{N(N-1)}}.$$

6 Определите коэффициент Стьюдента  $t_\alpha(N)$  по таблице при заданной надежности и проведенном количестве измерений  $N$ .

7 Рассчитайте величину средней абсолютной погрешности (величину доверительного интервала)

$$\langle \Delta \lambda \rangle = t_\alpha(N) \Delta S_\lambda \quad \langle \Delta d \rangle = t_\alpha(N) \Delta S_d.$$

8 Найдите относительные погрешности проведенных измерений

$$\varepsilon_\lambda = \frac{\langle \Delta \lambda \rangle}{\langle \bar{\lambda} \rangle} \cdot 100\% \quad \text{и} \quad \varepsilon_d = \frac{\langle \Delta d \rangle}{\langle d \rangle} \cdot 100\%.$$

9 Занесите результаты расчетов в таблицы 3 и 4.

Таблица 1

Радиус капилляра $r$ , м	Длина капилляра, $l$ , м	Темпера- тура, $T$ , К	Молярная масса, $M$ , кг/моль	Давление, $p$ , Па	Плотность воды, $\rho$ , кг/м <sup>3</sup>

Таблица 2

№ опыта	Масса стакана, $m_1$ , кг	Масса стакана с водой, $m_2$ , кг	Масса воды, $m$ , кг	$h_1$ , м	$h_2$ , м	t, с
1						
2						
3						
4						
5						

Таблица 3

№	$\langle \lambda \rangle_i$	$\langle \bar{\lambda} \rangle$	$\Delta \langle \lambda \rangle_i$	$(\Delta \langle \lambda \rangle_i)^2$	$\Delta S_\lambda$	$t_\alpha(n)$	$\langle \Delta \lambda \rangle$	$\varepsilon, \%$
1								
2								
3								
4								
5								

Таблица 4

№	$d_i$	$\langle d \rangle$	$\Delta d_i$	$(\Delta d_i)^2$	$\Delta S_d$	$t_\alpha(n)$	$\Delta d$	$\varepsilon, \%$
1								
2								
3								
4								
5								

## 7 КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

- 1 В чем состоит физическая сущность внутреннего трения в газах?
- 2 Как зависит коэффициент внутреннего трения и сила трения в газах от температуры?
- 3 Как зависит коэффициент внутреннего трения в газах от давления?
- 4 Какова размерность коэффициента внутреннего трения? Каков физический смысл коэффициента внутреннего трения?
- 5 Какова методика определения коэффициента внутреннего трения и эффективного диаметра молекул воздуха?
- 6 Какова методика определения погрешности измерений эффективного диаметра и средней длины свободного пробега молекул воздуха?
- 7 Выведите формулу Пуазейля  $V = \frac{\pi r^4 \Delta p t}{8 \eta l}$ .

Примечание 1

### Вывод формулы Пуазейля методом размерности

Рассмотрим истечение газа с вязкостью  $\eta$  из капилляра радиуса  $r$  и длиной  $l$ . Пусть этот процесс обусловлен наличием в капилляре разности давления  $\Delta p$ . Тогда объем всасывающего газа из капилляра является функцией радиуса капилляра  $r$ , разности давлений на концах капилляра  $\Delta p$ , времени прохождения газа через капилляр  $t$ , вязкости газа  $\eta$ , и длины капилляра  $l$ , т.е.

$$V = f(r, \Delta p, \eta, t, l) \quad (1.1)$$

Определим размерность физических величин, входящих в соотношение (1.1):

$$[V] = M^3; [r] = M; [\Delta p] = \frac{\kappa \varepsilon}{M \cdot C^2}; [\eta] = \frac{\kappa \varepsilon}{M \cdot C}; [t] = C; [l] = M. \quad (1.2)$$

Можно предположить, что объем  $V$  вытекающего из капилляра газа прямо пропорционален времени  $t$  прохождения газа через капилляр и обратно пропорционален длине капилляра  $l$ . С учетом сказанного функциональное соотношение (1) можно представить в виде следующего алгебраического уравнения:

$$V = r^x \Delta p^y \eta^z t^1 l^{-1}, \quad (1.3)$$

где  $x, y, z$  – показатели степеней переменных, которые необходимо определить. Запишем уравнение (3) для размерностей физических величин:

$$[V] = [r]^x [\Delta p]^y [\eta]^z [t]^1 [l]^{-1}, \quad (1.4)$$

Подставив размерности из уравнений (1.2) в соотношение (1.4), получим

$$M^3 = M^x \frac{\kappa \varepsilon^y}{M^y C^{2y}} \frac{\kappa \varepsilon^z}{M^z C^z} C^1 M^{-1}. \quad (1.5)$$

Соотношение (1.5) можно записать также в виде:

$$M^3 = M^{x-y-z-1} \kappa \varepsilon^{y+z} C^{-2y-z+1} \quad (1.6)$$

Приравнивая показатели степеней однородных единиц левой и правой части уравнения (6), получим:

$$\begin{cases} 3 = x - y - z - 1 \\ 0 = y + z \\ 0 = -2y - z + 1 \end{cases} \quad (1.7)$$

Решая систему уравнений (1.7), найдем где  $x, y, z$ :

$$x = 4; y = 1; z = -1. \quad (1.8)$$

Подставляя найденные значения показателей степеней из уравнения (1.7) в выражение (1.3), получим с точностью до постоянного множителя уравнение Пуазейля:

$$V = \frac{r^4 \Delta p t}{\eta l}, \quad (1.9)$$

где  $V$  - объем всасывающегося через капилляр воздуха;  $r$  - радиус капилляра;  $l$  - длина капилляра;  $\Delta p$  - разность давлений на концах капилляра;  $t$  - время прохождения воздуха через капилляр, равное времени вытекания воды из сосуда. Соотношение (1.9) отличается от формулы Пуазейля только постоянным коэффициентом  $\frac{\pi}{8}$ .

\* \* \*

## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 18

### ИЗМЕРЕНИЕ СКОРОСТИ ЗВУКА ПО МЕТОДУ СДВИГА ФАЗ

#### 1 ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Измерение скорости звука в воздухе с помощью электронного осциллографа и звукового генератора.

#### 2 БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

- 1 Савельев И.В. Курс физики. В 3 т. Т.1: Механика. Молекулярная физика / И.В. Савельев. - Лань, 2008. – 352 с.
- 2 Трофимова Т.И. Курс физики: учеб. пособие для вузов / Т.И. Трофимова. - 19-е изд. - Академия, 2012. – 560 с.
- 3 Детлаф А.А., Яворский Б.М. Курс физики.- Академия, 2009. – 720 с.

#### 3 ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ВВЕДЕНИЕ

Знание скоростей звука в различных средах имеет большое научное и практическое значение в ряде случаев: при определении расстояний с помощью эхолота, для расчетов звукометрической аппаратуры, определении сопротивления воздуха для тел, движущихся со звуковой или сверхзвуковой скоростью и т.д.

Скорость синусоидальной звуковой волны  $V$  связана с длиной волны  $\lambda$  и частотой  $v$  соотношением:

$$V = \lambda \cdot v \quad (1)$$

Используемый в настоящей работе метод определения скорости звука сводится к измерению разности фаз колебаний звуковой частоты, подаваемых к двум взаимно-перпендикулярным парам отклоняющих пластин Электронно-лучевой трубки осциллографа (ЭО).

Электрическое синусоидальное напряжение, подводимое к телефону Т (источник звука) от звукового генератора ЗГ подается на горизонтальные отклоняющие пластины осциллографа («Вход X»), а на вертикальные отклоняющие пластины ЭО («Вход Y») подается синусоидальное напряжение, индуцируемое в микрофоне М (приемник звука), находящемся на расстоянии L от телефона (рисунок 1).

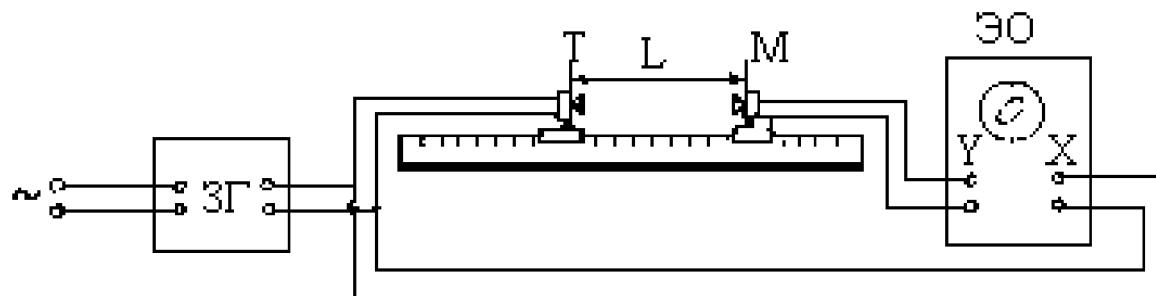


Рисунок 1 – Схема установки

Так как на обе пары пластин подаются гармонические электрические колебания одинаковой частоты, отличающиеся только по фазе, то электрон-

ный луч под действием синусоидально меняющихся электрических полей в области отклоняющих пластин осциллографа будет участвовать в двух взаимно-перпендикулярных колебательных движениях. В результате этого луч будет описывать, в зависимости от разности фаз и соотношения амплитуд, простейшие фигуры Лиссажу (эллипс, окружность, отрезок прямой).

Пусть колебания луча в направлениях осей X и Y описываются уравнениями

$$x = a \sin(\omega t + \varphi_1) \quad (1)$$

$$y = b \sin(\omega t + \varphi_2) \quad (2)$$

где  $a$  и  $b$  – амплитуда колебаний вдоль соответствующих осей;

$\omega$  – круговая частота;

$\varphi_1$  и  $\varphi_2$  – начальные фазы колебаний.

Исключая из уравнений (1) и (2) время  $t$ , получаем уравнение траектории луча на экране осциллографа в виде

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2xy}{ab} \cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1) \quad (3)$$

Уравнение (3) представляет собой уравнение эллипса в декартовых координатах.

Если разность фаз складываемых колебаний

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = 2\pi n,$$

где  $n = 0, 1, 2, \dots$ , то эллипс превращается в отрезок прямой

$$y = \frac{b}{a} x, \quad (4)$$

проходящей через 1-й и 3-й координатные углы.

Если

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = 2(n + 1)\pi,$$

где  $n = 0, 1, 2, \dots$ , то уравнение (3) принимает вид прямой

$$y = -\frac{b}{a} x, \quad (5)$$

проходящей через 2-й и 4-й квадранты.

Подбором соответствующих значений  $v$  и  $L$  можно добиться, чтобы разность фаз была равна целому числу  $\pi$ . Это означает, что расстояние  $L$  должно равняться целому числу звуковых полуволн.

Если в начале наблюдений добиться (подбором  $v$  и  $L$ ), чтобы луч на экране осциллографа совершал колебания по прямой (4), а затем, удаляя микрофон от телефона, – по прямой (5), то расстояние между этими двумя положениями микрофона будут равняться половине длины звуковой волны. Если и дальше удалять микрофон от телефона, можно добиться, чтобы луч опять совершал колебания вдоль прямой (4). Очевидно, расстояние между первоначальным положением микрофона и конечным его положением будет равняться длине звуковой волны  $\lambda$ . Измерив это расстояние. Легко вычислить скорость звука.

Следует иметь в виду, что скорость звука существенно зависит от температуры среды. Эта зависимость выражается формулой

$$V_t = V_0 \sqrt{1 + 0,004t^0},$$

где  $V_0$  – скорость звука при температуре 0 °C и давлении  $1,013 \cdot 10^5$  Па

## 4 ПРИБОРЫ И ПРИНАДЛЕЖНОСТИ

- 1 Электронный осциллограф
- 2 Звуковой генератор
- 3 Микрофон
- 4 Динамическая головка
- 5 Оптическая скамья

## 5 ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

- 1 Установите телефон и микрофон на оптической скамье.
- 2 Соберите электрическую схему установки в соответствии с рисунком 1. Ручки горизонтального и вертикального усилителей осциллографа установите на нуль.
- 3 Включите осциллограф. Сфокусируйте электронный луч в точку и установите его в центре экрана.
- 4 Включите звуковой генератор. Отрегулируйте горизонтальное усиление осциллографа так, чтобы электронный луч описывал горизонтальную прямую линию длиной в третью часть диаметра экрана.
- 5 Поставьте ручку вертикального усиления осциллографа на максимальное усиление. Получите на экране осциллографа эллипс.
- 6 Меняя частоту генератора и медленно отодвигая микрофон от телефона, получите на экране прямую линию.
- 7 Добейтесь, чтобы угол наклона прямой линии к осям координат составил примерно  $45^\circ$ . Для этого необходимо подобрать соответствующее ослабление сигнала (с помощью переключателей аттенюатора) и горизонтальное усиление осциллографа.
- 8 Зафиксируйте положение микрофона и, перемещая его по оптической скамье, добейтесь, чтобы электронный луч опять начал описывать прямую линию, расположенную в тех же координатных углах, что и при первоначальном положении микрофона. Расстояние между первоначальным и конечным положениями микрофона в этом случае равно длине волны.
- 9 Запишите в таблицу 1 значения  $v$ ,  $L_1$  и  $L_2$ ,  $t$  °C. Опыт повторите 5 раз. Измерения проведите и при расположении прямой в других квадрантах.

Таблица 1

Номер опыта	$v$ , Гц	$L_1$ , м	$L_2$ , м	$\Delta L$ , м	$\lambda$ , м	$V$ , м/с	$\Delta V$ , м/с
1							
2							
3							
4							
5							

10 Повторите опыт и составьте таблицы для двух других частот.

11 Выключите приборы и разберите схему.

12 Произведите необходимые вычисления и определите погрешности измерений.

## **6 КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ**

1 Какова траектория точки, участвующей в двух взаимно перпендикулярных колебаниях?

2 Изобразите вид траектории движения луча осциллографа при разности фаз перпендикулярных колебаний  $\Delta\varphi = 0$ ?

3 Поясните, как зависят форма и размеры эллипса от амплитуды колебаний, создаваемых звуковым генератором?

4 От каких факторов зависит скорость звука?

## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 19

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ВОЗДУХА

#### 1 ЦЕЛЬ РАБОТЫ

- 1 Изучение основных законов теплопроводности газов.
- 2 Определение коэффициента теплопроводности воздуха.

#### 2 БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

- 1 Савельев И.В. Курс физики. В 3 т. Т.1: Механика. Молекулярная физика / И.В. Савельев. - Лань, 2008. – 352 с.
- 2 Трофимова Т.И. Курс физики: учеб. пособие для вузов / Т.И. Трофимова. - 19-е изд. - Академия, 2012. – 560 с.
- 3 Детлаф А.А., Яворский Б.М. Курс физики.- Академия, 2009. – 720 с.
- 4 Матвеев А.Н. Молекулярная физика: учеб. пособие для вузов / А.Н. Матвеев. Бином, 2010.- 368 с.

#### 3 ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим процесс теплопроводности в газах (рисунок 1).

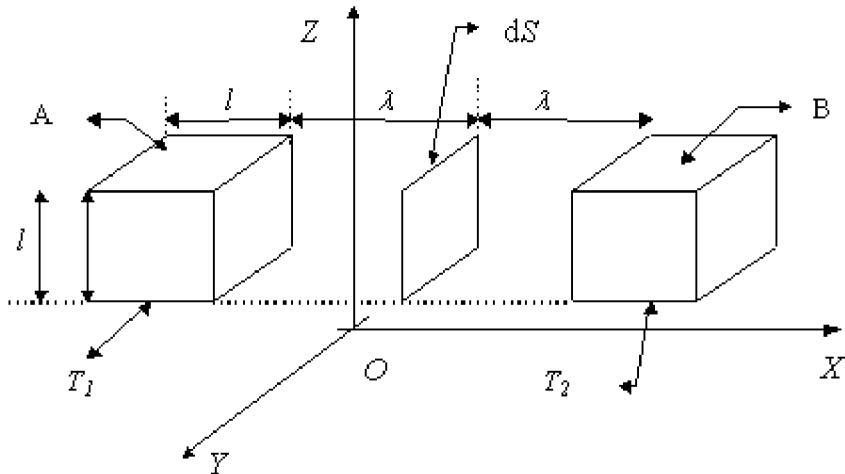


Рисунок 1 – Процесс теплопроводности в газах

Пусть изменение температуры происходит в направлении оси ОХ перпендикулярно площадке  $dS$  и  $T_1 > T_2$ . Тогда количества тепла  $dq$ , переносимое через перпендикулярную площадку  $dS$ , пропорционально величине площадки  $dS$ , промежутку времени  $dt$ , за который наблюдается рассмотренный перенос тепла и градиенту температуры  $\left(\frac{dT}{dX}\right)$ , т.е

$$dq = -\chi \left( \frac{dT}{dX} \right) dS dt, \quad (1)$$

где  $\chi$ - коэффициент теплопроводности, который зависит от газа и условий, при которых он находится. Знак минус в соотношении (1) указывает на то, что перенос тепла происходит в направлении уменьшения температуры, т.е. в сторону оси ОY.

Рассмотрим металлический цилиндр радиуса  $R$ , в котором находится исследуемый газ и вдоль оси которого натянута металлическая проволока АВ (рисунок 2).

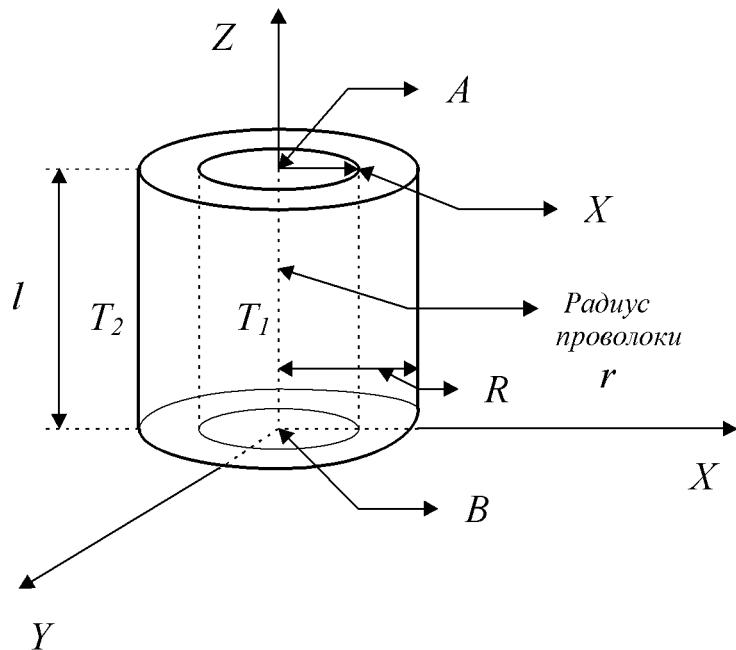


Рисунок 2 – Металлический цилиндр с проволокой

Если проволоку АВ нагревать током, то при стационарных условиях в направлении радиуса трубки возникает определенный градиент температуры и в этом же направлении наблюдается перенос тепловой энергии. При этом количество тепла, переносимое через боковую поверхность коаксиального цилиндра радиуса  $X$  можно определить по формуле

$$dq = -\chi \left( \frac{dT}{dX} \right) 2\pi X l dt, \quad (2)$$

где  $l$  - длина проволоки (цилиндра).

При установившемся процессе количество теплоты, переносимой через рассматриваемую поверхность в единицу времени будет величиной постоянной. Таким образом,

$$\frac{dq}{dt} = Q = \text{const}.$$

Следовательно, соотношение (2) будет иметь следующий вид:

$$Q = -\chi \left( \frac{dT}{dX} \right) 2\pi X l. \quad (3)$$

Решим дифференциальное уравнение (3) методом разделения переменных. Для этого соотношение (3) перепишем в следующем виде:

$$Q \frac{dX}{X} = -\chi 2\pi l dT.$$

Проинтегрировав последнее уравнение,

$$\int_r^R Q \frac{dX}{X} = \int_{T_1}^{T_2} -\chi 2\pi l dT,$$

получим:

$$Q \ln \frac{R}{r} = 2\pi l \chi (T_1 - T_2). \quad (4)$$

Из уравнения (4) можно определить коэффициент теплопроводности  $\chi$  исследуемого газа:

$$\chi = \frac{Q \ln \frac{R}{r}}{2\pi l (T_1 - T_2)}, \quad (5)$$

где:  $R$  - радиус цилиндра;  $r$  - радиус проволоки;  $l$  - длина цилиндра (проводоки);  $T_1$  - температура проволоки;  $T_2$  - температура цилиндра.

Таким образом для определения коэффициента теплопроводности исследуемого газа необходимо найти количество тепловой энергии, передаваемой от проволоки к стенки цилиндра путем теплопроводности.

Это количество теплоты передаваемое за единицу времени можно определить по закону Джоуля - Ленца

$$Q = IU, \quad (6)$$

где  $I$  - ток, протекающий по проволоке;  $U$  - падение напряжения на проволоке.

Следует однако учитывать, что рассчитанное при этом значение теплопроводности будет иметь несколько завышенное значение, так как помимо теплопроводности передача тепла может осуществляться излучением, за счет конвекции и в результате передачи тепла от проволоки через электрические контакты к подводящим проводам.

При выполнении настоящей работы и при соответствующих расчетах коэффициента теплопроводности процессами конвекции и теплопроводности через подводящие провода мы будем пренебречь. Что касается теплового излучения, то в данной лабораторной работе количество тепла, передаваемое разогретой проволокой можно оценить с использованием закона Стефана - Больцмана. В соответствии с этим законом энергетическая светимость абсолютно черного тела прямо пропорциональна четвертой степени абсолютной температуры:

$$R_s^0 = \sigma T^4,$$

где  $T$  - температура абсолютно черного тела;  $\sigma$  - постоянная Стефана - Больцмана,  $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8}$  Дж/(м<sup>2</sup>·К<sup>4</sup>·с).

В настоящей работе проволока не является абсолютно черным телом, поэтому закон Стефана - Больцмана будет иметь следующий вид:

$$R_s^0 = A \sigma T^4,$$

где  $A$  - поглощательная способность тела (проводки). Для никромовой проволоки, используемой в работе,  $A = 0,4$ .

Если  $S_{np}$  - площадь нагретой проволоки,  $T_1$  - её температура,  $S_{цил}$  - площадь боковой поверхности цилиндра,  $T_2$  - температура стенки цилиндра, то тепловая энергия  $Q_u$ , передаваемая от проволоки к цилиндру через излучение в единицу времени, равна:

$$Q_u = AS_{np}\sigma T_1^4 - AS_{qul}\sigma T_2^4. \quad (7)$$

Расчеты по формуле (7) показывают, что количество теплоты  $Q_u$ , передаваемое проволокой через излучение в единицу времени составляет несколько процентов от энергии, выделяемой текущим по проволоке током согласно соотношению (6), и в данной работе не учитываются.

Подставляя соотношение (6) в уравнение (5), получим рабочую формулу для определения коэффициента теплопроводности воздуха:

$$\chi = \frac{IU \ln \frac{R}{r}}{2\pi d(T_1 - T_2)}. \quad (8)$$

### 3 ОПИСАНИЕ УСТАНОВКИ

Экспериментальная установка для определения коэффициента теплопроводности воздуха изображена на рисунке 3.

Установка состоит из медного цилиндра (1) диаметром 16 мм, по оси которой укреплена никромовая проволока (2). К проволоке (2) через подводящие контакты (3) подключается источник регулируемого напряжения (4). Последовательно к проволоке соединяется амперметр, параллельно - вольтметр.

Для измерения разности температур между проволокой и цилиндром применяется дифференциальная термопара (5), которая подсоединяется к усилителю постоянного тока и милливольтметру (6).

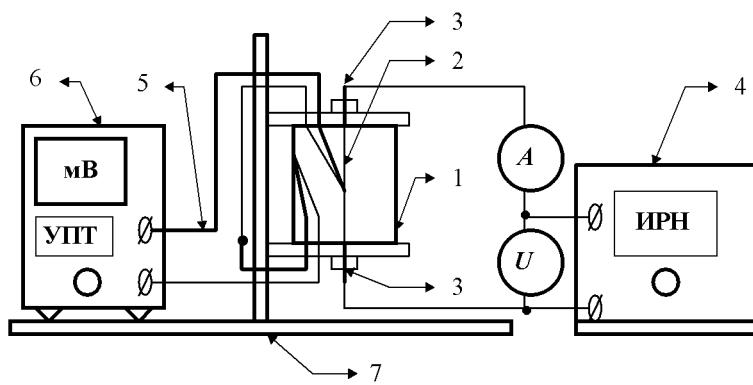


Рисунок 3 – Лабораторная установка для измерения коэффициента теплопроводности

### 4 ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ И ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

1 Включите источник регулируемого напряжения (ИРН) в цепь переменного тока 220 В. Установите напряжение 2 В.

2 Через 15 мин снимите показания амперметра и для измерения разности температур между проволокой и медным цилиндром определите ЭДС дифференциальной термопары. Результаты измерений запишите в таблицу 1.

3 Определите по градуировочному графику для применяемой термопары разность температур между разогретой током проволокой и внутренней поверхностью медного цилиндра. Результаты измерений запишите в таблицу 1.

4 Рассчитайте по формуле (8) коэффициент теплопроводности воздуха. Результаты расчета запишите в таблицу 1.

5 Оцените методом средних значений среднюю абсолютную и относительную погрешности коэффициента теплопроводности.

6 Сделайте краткие выводы по работе.

Таблица 1

№	$I, \text{ А}$	$U, \text{ В}$	$E, \text{ В}$	$\Delta T = T_1 - T_2, \text{ К}$	$\chi, \text{ Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$
1					
2					
3					
4					
5					

Некоторые постоянные экспериментальной установки.

Радиус проволоки, $r, \text{ м}$	$r =$	$\Delta r =$
Длина проволоки, $l, \text{ м}$	$l =$	$\Delta l =$
Радиус цилиндра, $R, \text{ м}$	$R =$	$\Delta R =$

## 5 КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1 Объясните природу теплопроводности в газах.

2 Получите размерность коэффициента теплопроводности.

3 Поясните температурную зависимость коэффициента теплопроводности для газов.

4 Получите формулу для определения коэффициента теплопроводности для газов.

5 Получите рабочую формулу для определения коэффициента теплопроводности воздуха, используемой в данной лабораторной работе.

*Примечание*

**Вывод формулы для расчета относительной погрешности коэффициента теплопроводности**

Прологарифмируем выражение (8):

$$\ln \chi = \ln I + \ln U + \ln \left( \ln \frac{R}{r} \right) - \ln 2 - \ln \pi - \ln l - \ln(T_1 - T_2). \quad (9)$$

Возьмем полный дифференциал от соотношения (9):

$$\begin{aligned} \frac{d\chi}{\chi} &= \frac{dI}{I} + \frac{dU}{U} + \frac{d\left(\ln \frac{R}{r}\right)}{\ln \frac{R}{r}} - \frac{dl}{l} - \frac{dT_1 - T_2}{T_1 - T_2} = \\ &= \frac{dI}{I} + \frac{dU}{U} + \frac{1}{\ln \left( \frac{R}{r} \right)} \left( \frac{dR}{R} - \frac{dr}{r} \right) - \frac{dl}{l} - \frac{dT_1 - dT_2}{T_1 - T_2} \end{aligned} \quad (10)$$

В уравнении (10) знак полного дифференциала  $d$  заменим на знак конечного приращения  $\Delta$  и знак – (минус) перед приращением  $\Delta$  заменим на знак + (плюс). Тогда получим:

$$\frac{\Delta\chi}{\chi} = \frac{\Delta I}{I} + \frac{\Delta U}{U} + \frac{1}{\ln\left(\frac{R}{r}\right)} \left( \frac{\Delta R}{R} + \frac{\Delta r}{r} \right) + \frac{\Delta l}{l} + \frac{\Delta T_1 + \Delta T_2}{T_1 - T_2}. \quad (11)$$

Уравнение (11) может быть использовано для расчета величины относительной  $\varepsilon$  и абсолютной погрешности  $\Delta\chi$  коэффициента теплопроводности.

Заметим, что величина абсолютной погрешности тока и напряжения рассчитываются по классу точности применяемых в работе амперметра и вольтметра.

Абсолютная погрешность при измерении температур проволоки и цилиндра в данной работе принимается равной  $\pm 2$  град, т.е.  $\Delta T_1 = \Delta T_2 = \pm 2$ .

\* \* \*

---

## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 20

---

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ВНУТРЕННЕГО ТРЕНИЯ ЖИДКОСТИ МЕТОДОМ СТОКСА

#### **1 ЦЕЛЬ РАБОТЫ**

Изучение движения твердого тела в жидкости. Определение коэффициента вязкости жидкости методом Стокса.

#### **2 БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК**

- 1 Савельев И.В. Курс физики. В 3 т. Т.1: Механика. Молекулярная физика / И.В. Савельев. - Лань, 2008. – 352 с.
- 2 Трофимова Т.И. Курс физики: учеб. пособие для вузов / Т.И. Трофимова. - 19-е изд. - Академия, 2012. – 560 с.
- 3 Детлаф А.А., Яворский Б.М. Курс физики.- Академия, 2009. – 720 с.
- 4 Джанколи Д. Физика. Т. 1: М. : Мир, 1989.- 656 с.
- 5 Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика: [В 8-ми т.].- Т.VI: Гидродинамика.- М.: Наука, 1988.- 736 с.

#### **3 ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ВВЕДЕНИЕ**

В связи с огромной технической важностью для авиации, надводного и подводного флотов вопрос о движении тел в жидкостях и газах изучен чрезвычайно подробно и составляет главный предмет самостоятельной науки – гидроаэrodинамики.

Рассмотрим природу и закономерности сил, действующих на тело, движущееся в сплошной среде - в воздухе или в воде. Этим телом может быть препятствие в потоке жидкости (например, утес посреди реки) или какой-либо предмет, движущийся в газовой или жидкой среде: автомобиль или планер, подводная лодка или, возможно, молекула, осаждаемая на центрифуге.

Когда тело движется относительно жидкости (газа), на него действует сила со стороны среды. Эту силу называют силой лобового сопротивления; она возникает благодаря вязкости среды, а также (при больших скоростях) вследствие возникновения турбулентности позади тела. Силу сопротивления среды, действующую на данное тело, можно записать в виде

$$F = -k \frac{S\rho V^2}{2}, \quad (1)$$

где  $S$  - сечение тела;  $\rho$  - плотность жидкости;  $V$  - скорость тела;  $k$  - безразмерная величина, которая, в общем случае, есть функция двух безразмерных величин: числа Рейнольдса  $Re$  и числа Маха  $Ma$ :

$$Re = \frac{VL\rho}{\eta}, \quad Ma = \frac{V}{c}, \quad (2)$$

где  $\eta$  - коэффициент вязкости жидкости;  $L$  - характерная длина тела;  $c$  - скорость звука в среде.

В частном случае движения тела со скоростью, малой по сравнению со скоростью звука ( $Ma \ll 1$ ), коэффициент сопротивления зависит только от числа Рейнольдса. Вид функции  $k(Re)$  зависит от формы тела, от его ориентации относительно направления скорости и, наконец, от того, какая именно величина выбрана в качестве характерного размера в определении числа Рейнольдса. Только в самом простом случае - в случае шара радиуса  $r$  при малых числах Рейнольдса  $Re < 1$  все эти вопросы отпадают:

$$k = \frac{\text{const}}{\text{Re}} = \text{const} \frac{\eta}{V r \rho}. \quad (3)$$

Подставляя (3) в (1), можно получить формулу Стокса, выведенную им в 1851 г.:

$$F = -6\pi\eta r V. \quad (4)$$

Характерно, что в этом приближении, когда число  $Re < 1$  и обтекающий тело поток является ламинарным, плотность жидкости не влияет на силу сопротивления. Однако надо помнить, что формула (3), а следовательно и (4), является лишь приближенной: она содержит поправки, исчезающие малые по сравнению с выписанным членом лишь при очень малых  $Re$ .

В случае падения шарика в жидкости (рисунок 1) уравнение движения имеет вид

$$m \frac{dV}{dt} = mg - F_A - F. \quad (5)$$

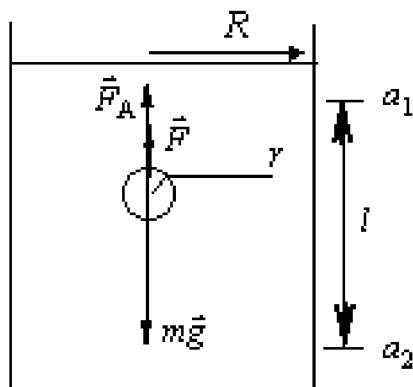


Рисунок 1 – Шарик падающий в жидкости

Все три силы направлены вдоль вертикали: сила тяжести  $m\vec{g}$  - вниз, сила Архимеда  $\vec{F}_A$  и сила трения  $\vec{F}$  - вверх. Сила сопротивления с ростом скорости увеличивается и, наконец, шарик достигает такой скорости, при которой ускорение равно нулю  $\left(\frac{dV}{dt}\right)$ . Откуда

$$\frac{4}{3}\pi r^3 \rho' g - \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_{\infty} g - 6\pi\eta r V = 0. \quad (6)$$

Решение уравнения (6) относительно  $\eta$  дает:

$$\eta = \frac{2gr^2}{9l} \cdot (\rho' - \rho_{\infty}) t \quad (7)$$

Если шарик падает вдоль оси цилиндра радиуса  $R$  между метками  $a_1$  и  $a_2$ , проходя расстояние  $l$  за время  $t$ , то, учитывая влияние стенок, коэффициент вязкости можно определить по формуле

$$\eta = \frac{2}{9} g \frac{(\rho' - \rho_{\text{ж}}) \cdot r^2 t}{l \left( 1 + 2,4 \frac{r}{R} \right)}. \quad (8)$$

#### 4 ПРИБОРЫ И ПРИНАДЛЕЖНОСТИ

- 1 Стеклянный цилиндр с жидкостью.
- 2 Микрометр или микроскоп с телевизионной измерительной установкой.
- 3 Секундомер.
- 4 Ареометр.
- 5 Шарики разного диаметра.
- 6 Масштабная линейка.

#### 5 ВЫПОЛНЕНИЕ РАБОТЫ

- 1 Измерить диаметр шариков (3...5 раз) и занести в таблицу 1 его средние значения.
- 2 Верхнюю метку установить на 5...8 см ниже уровня жидкости, а вторую - вблизи дна цилиндра. Расстояние между метками измерить линейкой.
- 3 Плотность жидкости измерить ареометром. Плотность шарика и ускорение свободного падения взять из таблиц.
- 4 Опустить шарик в жидкость по оси цилиндра и секундомером измерить время падения шарика между двумя метками. Данные измерений занести в таблицу 1.
- 5 Вычислить абсолютную и относительную погрешности эксперимента.

Таблица 1

№	$l$ , м	$r$ , м	$R$ , м	$\rho'$ , кг/м <sup>3</sup>	$t$ , с	$\eta_i$ , Па·с	$\langle \eta \rangle$ , Па·с	$\Delta \eta_i$ , Па·с	$(\Delta \eta_i)^2$ (Па·с) <sup>2</sup>	$\Delta S$	$\Delta \eta$ , Па·с
1											
2											
3											
4											
5											

#### 6 КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

- 1 Какова физическая природа вязкости в газах и жидкостях?
- 2 Дайте определение динамического и кинематического коэффициентов вязкости. В каких единицах они измеряются?
- 3 Какое движение жидкости называют турбулентным и какое ламинарным, их критерии.
- 4 При каких условиях выполняется формула Стокса?
- 5 Выведите расчетную формулу (7).

## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 21

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ВЯЗКОСТИ ЖИДКОСТИ МЕТОДОМ КАПИЛЛЯРНОГО ВИСКОЗИМЕТРА

#### 1 ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Экспериментально определить коэффициент вязкости жидкости.

#### 2 БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

- 1 Савельев И.В. Курс физики. В 3 т. Т.1: Механика. Молекулярная физика / И.В. Савельев. - Лань, 2008. – 352 с.
- 2 Трофимова Т.И. Курс физики: учеб. пособие для вузов / Т.И. Трофимова. - 19-е изд. - Академия, 2012. – 560 с.
- 3 Детлаф А.А., Яворский Б.М. Курс физики.- Академия, 2009. – 720 с.

#### 3 ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим течение вязкой жидкости по капиллярной трубке, расположенной вертикально (рисунок 1). Скорость течения жидкости на различных расстояниях от оси капилляра различна. По оси капилляра жидкость течет с максимальной скоростью, а у стенок скорость течения равна нулю.

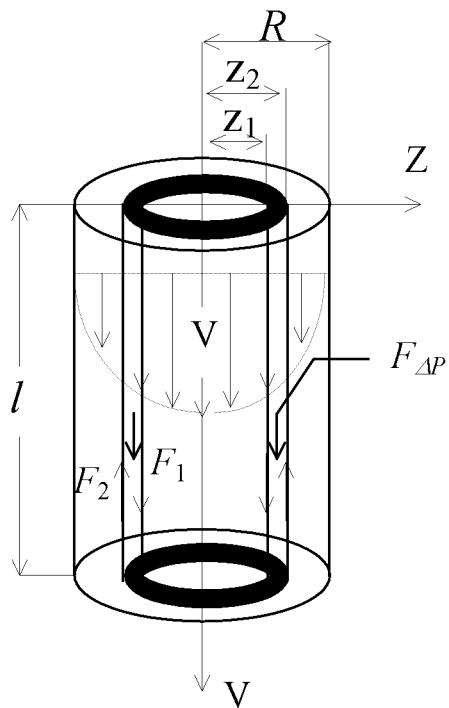


Рисунок 1 – Течение жидкости в капилляре

Найдем закон изменения скорости течения жидкости в капилляре с увеличением расстояния от его оси. Рассмотрим бесконечно тонкий движущийся цилиндрический слой жидкости, соосный с капилляром. Этот слой вытесняет под действием сил  $F_{\Delta p}$ ,  $F_1$ ,  $F_2$ . Силы  $F_1$  и  $F_2$  удовлетворяют уравнению:

$$F = \eta \frac{\Delta V}{\Delta z} S * . \quad (1)$$

\* см. методические рекомендации к лабораторной работе 17

Сила  $F_{\Delta p}$  возникает из-за разности давлений, действующих на верхнее и нижнее сечения цилиндрического слоя. Эта сила содействует течению. Так как площадь сечения цилиндрического слоя  $\Delta S = 2\pi z \Delta z$ , то

$$F_{\Delta p} = \Delta p 2\pi z \Delta z, \quad (2)$$

где  $z$  - расстояние от оси цилиндра (капилляра),  $\Delta p$  - разность давлений на уровнях нижнего и верхнего сечений цилиндрического слоя. Сила  $F_1$  - это сила вязкости, действующая на внутреннюю поверхность слоя. Эта сила направлена вниз, т.е. содействует вытеканию слоя, потому что жидкость внутри исследуемого цилиндрического слоя движется с большей скоростью, чем рассматриваемый цилиндрический слой.

Для силы вязкости, действующей на внутренней поверхности слоя, на основании формулы (1) можно записать выражение

$$F_1 = \eta 2\pi z_1 l \left( \frac{dV}{dz} \right)_1,$$

где  $\eta$  - коэффициент вязкости,  $l$  - длина капилляра,  $(dV/dz)_1$  - градиент скорости на расстоянии  $z_1$  от оси цилиндра.

С внешней стороны слоя жидкость движется с меньшей скоростью, чем внутренний слой, следовательно сила вязкости, действующая на внешней поверхности слоя  $z_2$ , направлена вверх, т.е. противодействует вытеканию слоя жидкости. Величина силы  $F_2$  определяется по формуле

$$F_2 = \eta 2\pi z_2 l \left( \frac{dV}{dz} \right)_2,$$

где  $(dV/dz)_2$  - градиент скорости на расстоянии  $z_2$  от оси цилиндра.

При установившемся течении сумма всех сил, содействующих вытеканию жидкости, равна сумме всех сил, противодействующих вытеканию:  $F_{\Delta p} + F_1 = F_2$ , тогда

$$\begin{aligned} 2\pi \Delta p z \Delta z + \eta 2\pi z_1 l \left( \frac{dV}{dz} \right)_1 &= \eta 2\pi z_2 l \left( \frac{dV}{dz} \right)_2; \\ z \Delta z \Delta p &= -\eta l \Delta \left[ z \frac{dV}{dz} \right]. \end{aligned}$$

Заменяя приращения дифференциалами, получим следующее дифференциальное уравнение:

$$d \left[ z \frac{dV}{dz} \right] = -\frac{\Delta p}{\eta l} \cdot zdz.$$

Проинтегрировав это уравнение, получим:

$$z \frac{dV}{dz} = -\frac{\Delta p}{\eta l} \cdot \frac{z^2}{2} + C \quad (\text{при } z = 0, C = 0).$$

Разделим обе части последнего равенства на  $\frac{z}{dz}$ :

$$dV = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta p}{\eta l} \cdot zdz,$$

после интегрирования получим:

$$V = -\frac{\Delta p}{\eta l} \cdot \frac{z^2}{4} + C \quad (3)$$

Для того, чтобы определить числовое значение постоянной интегрирования  $C$ , учтем что при  $z = R$  ( $R$  - радиус капилляра) скорость истечения жидкости равна нулю. Следовательно, подставляя в выражение (3) граничные условия  $V = 0, z = R$ , получим:

$$C = \frac{\Delta p}{\eta l} \cdot \frac{R^2}{4}.$$

Таким образом, закон изменения скорости истечения жидкости в зависимости от расстояния от центра капилляра будет иметь вид:

$$V = \frac{\Delta p}{\eta l} \cdot \frac{R^2 - z^2}{4}.$$

Пользуясь этим законом зависимости скорости течения жидкости от расстояния до оси, вычислим объем жидкости, вытекающей из капилляра за единицу времени.

Бесконечно тонкий цилиндрический слой жидкости, соосный с капилляром и вытекающий из него за единицу времени, имеет объем:

$$dq = 2\pi V dz.$$

Чтобы определить объем жидкости вытекающий за единицу времени из всего капилляра, нужно найти сумму объемов всех вытекающих за единицу времени слоев:

$$q = \int_0^R dq = \int_0^R 2\pi V dz = \int_0^R 2\pi \frac{\Delta p}{\eta l} \cdot \frac{R^2 - z^2}{4} dz = \frac{\Delta p \pi R^4}{8\eta l}.$$

Полученное выражение носит название закона Пуазейля.

Объем жидкости, вытекающий из капилляра за время  $t$ , можно определить по формуле

$$Q = q t. \quad (4)$$

Это соотношение можно использовать для определения коэффициента вязкости.

Пусть две жидкости одинакового объема вытекают через капилляр, причем одна из жидкостей с известным коэффициентом вязкости  $\eta$ , а другая с неизвестным  $\eta_x$ . Тогда объем вытекающей жидкости с известным коэффициентом вязкости можно подсчитать по формуле

$$Q = qt = \frac{\Delta p \pi R^4}{8\eta l} t,$$

а объем вытекающей через этот капилляр жидкости с неизвестным коэффициентом вязкости:

$$Q = q_x t_x = \frac{\Delta p_x \pi R^4}{8\eta_x l} t_x.$$

Разделив первое равенство на второе, получим:

$$\eta_x = \eta \frac{t_x}{t} \cdot \frac{\Delta p_x}{\Delta p}. \quad (5)$$

Если жидкость вытекает под действием собственного веса, то разность давлений  $\Delta p$  равна гидростатическому давлению, т.е.  $\Delta p = \rho g l$ , где  $\rho$  - плотность жидкости,  $g$  - ускорение свободного падения,  $l$  - высота столба жидкости. Тогда запишем

$$\Delta p = \rho g l, \quad \Delta p_x = \rho_x g l,$$

$$\frac{\Delta p_x}{\Delta p} = \frac{\rho_x}{\rho}$$

и соотношение (5) можно записать в виде

$$\eta_x = \eta \frac{t_x}{t} \cdot \frac{\rho_x}{\rho}. \quad (6).$$

Таким образом, измерив время истечения двух жидкостей и зная их плотности, можно определить отношение их коэффициентов вязкости. Если же коэффициент вязкости одной из жидкостей известен, то можно определить коэффициент вязкости другой.

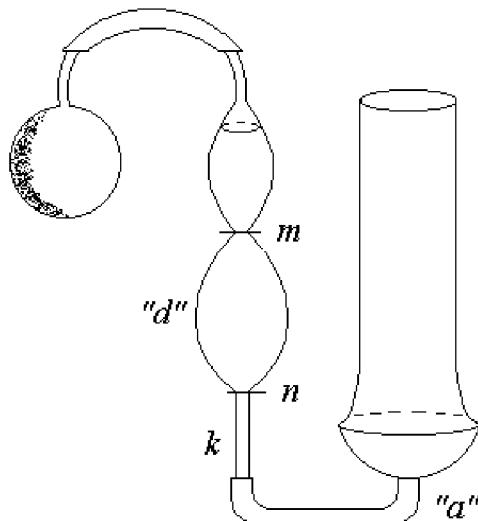


Рисунок 2 – Капиллярный вискозиметр

Капиллярный вискозиметр представляет собой U - образную стеклянную трубку (рисунок 2). Широкое колено трубки внизу имеет расширение "a", а узкое - расширение "d" с надетой на его конце резиновой трубкой. Над расширением "d" и под ним нанесены две метки "m" и "n", ограничивающие вполне определенный объем жидкости, время истечения которой через капилляр измеряется в ходе опыта.

#### 4 ПРИБОРЫ И ПРИНАДЛЕЖНОСТИ

- 1 Вискозиметр.
- 2 Секундомер.

#### 5 ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

Для выполнения лабораторной работы применяют два одинаковых вискозиметра. Один служит для определения времени вытекания дистилли-

рованной воды, другой - для определения времени вытекания исследуемой жидкости.

1 Устанавливаем вискозиметр с водой в вертикальное положение так, чтобы верхняя метка "m" узкого сосуда находилась в воде.

2 Осторожно, при помощи груши или насоса втягиваем воду в узкое колено вискозиметра немного выше метки "m".

3 Отсоединяем грушу или насос от вискозиметра.

4 В момент прохождения мениска мимо метки "m" запускаем секундомер, а в момент прохождения мениска мимо метки "n" останавливаем его.

5 Эти измерения повторяем 5 раз. Определяем среднее время вытекания воды. Данные заносим в таблицу 1.

6 Повторяем пункты 1...6 для вискозиметра с исследуемой жидкостью. Данные также заносим в таблицу 1.

## 6 ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

1 Вычислить коэффициент вязкости исследуемой жидкости по формуле (6), подставляя средние значения времени истечения.

2 Окончательный результат записать в виде

$$\eta_x = \langle \eta_x \rangle \pm \Delta \eta_x; \varepsilon = \dots \%$$

3 Для расчета погрешностей необходимо прологарифмировать рабочую формулу (6):

$$\ln \eta_x = \ln \eta + \ln t_x + \ln \rho_x - \ln t - \ln \rho.$$

Полученное выражение продифференцируем, заменяя дифференциалы приращениями:

$$\frac{\Delta \eta_x}{\langle \eta_x \rangle} = \frac{\Delta \eta}{\eta} + \frac{\Delta t_x}{t_x} + \frac{\Delta \rho_x}{\rho} + \frac{\Delta t}{t} + \frac{\Delta \rho}{\rho}.$$

(В формуле погрешности знаки "минус" нужно заменить на "плюс", т.к. для каждой абсолютной ошибки оба знака равновероятны, а нам необходимо определить максимальную возможную ошибку  $\Delta \eta_x$ ) Погрешности величин, определяемых по таблицам, малы по сравнению с погрешностью измерения величины  $t$ , следовательно, ими можно пренебречь и рассчитывать погрешность по формуле

$$\varepsilon = \frac{\Delta \eta_x}{\langle \eta_x \rangle} \cdot 100\% = \left( \frac{\Delta t}{t} + \frac{\Delta t_x}{t_x} \right) \cdot 100\%.$$

Абсолютную ошибку находят по формуле

$$\Delta \eta_x = \langle \eta_x \rangle \cdot \varepsilon.$$

Таблица 1

№	$t, \text{ с}$	$\Delta t, \text{ с}$	$t_x, \text{ с}$	$\Delta t_x, \text{ с}$	$\varepsilon, \%$	$\eta_x = \langle \eta_x \rangle \pm \Delta \eta_x$
1.						
2						
3						
4						
5						

$\langle t \rangle =$	$\langle \Delta t \rangle =$	$\langle t_x \rangle =$	$\langle \Delta t_x \rangle =$	
-----------------------	------------------------------	-------------------------	--------------------------------	--

## 7 КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

- 1 Каков молекулярно-кинетический механизм вязкости?
- 2 Как влияет температура на величину вязкости жидкости?
- 3 Как влияет температура на величину вязкости газа?
- 4 Каково соотношение между силами, содействующими и противодействующими истечению бесконечно тонкого слоя жидкости, при установившемся течении в капилляре?
- 5 Почему скорость слоя жидкости прилегающего к капилляру равна нулю? Какие силы удерживают молекулы жидкости у стенок капилляра?
- 6 Какие силы содействуют истечению жидкости, а какие противодействуют?
- 7 Почему в вискозиметрах используют капилляры?
- 8 Зависит ли отношение  $\frac{\rho_x}{\rho}$  от температуры?

\* \* \*

## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 22

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЯЗКОСТИ ЖИДКОСТИ МЕТОДОМ ЗАТУХАНИЯ КОЛЕБАНИЙ

#### 1 ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Определение вязкости жидкостей при помощи исследований затухающих колебаний крутильного маятника.

#### 2 БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

- 1 Савельев И.В. Курс физики. В 3 т. Т.1: Механика. Молекулярная физика / И.В. Савельев. - Лань, 2008. – 352 с.
- 2 Трофимова Т.И. Курс физики: учеб. пособие для вузов / Т.И. Трофимова. - 19-е изд. - Академия, 2012. – 560 с.
- 3 Детлаф А.А., Яворский Б.М. Курс физики.- Академия, 2009. – 720 с.
- 4 Матвеев А.Н. Молекулярная физика: учеб. пособие для вузов / А.Н. Матвеев. Бином, 2010.- 368 с.
- 5 Сивухин Д.В. Общий курс физики: Учеб. пособие для вузов.- [В 3-х т.].- Т.2: Термодинамика и молекулярная физика.- М.: Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990.- 592 с.

#### 3 ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ВВЕДЕНИЕ

Для выяснения природы внутреннего трения в газах рассмотрим два слоя газа с площадью  $\Delta S$ , отстоящих друг от друга на расстоянии  $\Delta Z$  и движущихся вдоль оси  $Y$  параллельно друг другу со скоростями  $V_1$  и  $V_2$  ( $V_1 > V_2$ ,  $\Delta V = V_1 - V_2$ ) (рисунок 1).

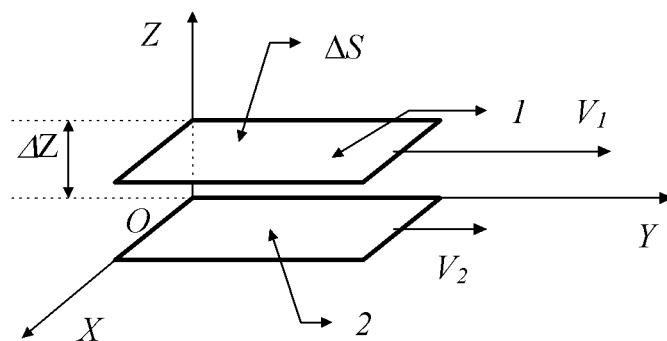


Рисунок 1 – Возникновение внутреннего трения

Благодаря тепловому, хаотичному движению молекулы из слоя 1, движущиеся вдоль оси  $Y$  со скоростью  $V_1$  будут переходить в слой 2 и наоборот - молекулы из слоя 2, движущиеся вдоль оси  $Y$  со скоростью  $V_2 < V_1$  будут переходить в слой 1. В результате таких переходов скорость упорядоченного движения слоя 1 будет уменьшаться, а слоя 2 - увеличиваться. С макроскопической точки зрения это означает, что слой 1 будет тормозиться, а слой 2 будет увеличивать свою скорость.

Таким образом между слоями газа действуют силы трения, которые направлены по касательной к рассматриваемым поверхностям 1 и 2. Можно

показать, что силы внутреннего трения (вязкости), определяются следующим выражением:

$$F = -\eta \frac{\Delta V}{\Delta Z} \Delta S, \quad (1)$$

где  $\eta$  - коэффициент внутреннего трения (динамическая вязкость).

Из молекулярно-кинетической теории следует:

$$\eta = \frac{1}{3} \rho \langle V_T \rangle \langle \lambda \rangle, \quad (2)$$

где  $\langle V_T \rangle$  - средняя скорость теплового движения,

$$\langle V_T \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}, \quad (3)$$

$\langle \lambda \rangle$  - средняя длина свободного пробега молекул;  $T$  - абсолютная температура;  $M$  - молярная масса газа;  $R$  - универсальная газовая постоянная;  $\rho$  - плотность рассматриваемого газа.

Для характеристики вязкости кроме коэффициента динамической вязкости вводят кинематическую вязкость. Кинематическая вязкость жидкости равна отношению динамической вязкости к ее плотности.

$$\nu = \frac{\eta}{\rho} \quad (4)$$

Существуют различные методики для определения коэффициента вязкости жидкостей. Одна из них основана на изучении процессов затухания крутильного маятника.

Известно, что при малых скоростях и при небольшом затухании уравнение движения крутильного маятника имеет следующий вид:

$$\alpha = \alpha_0 e^{-\beta \cdot t} \cos\left(\frac{2\pi \cdot t}{T} + \alpha_N\right),$$

где:  $\alpha$  - угол отклонения крутильного маятника от положения равновесия в момент времени, равный  $t$ ;  $\alpha_0$  - амплитуда колебаний;  $\alpha_N$  - начальная фаза колебаний;  $T$  - период колебаний;  $\beta$  - коэффициент затухания.

Для характеристики быстроты затухания колебаний вводится величина, называемая логарифмическим декрементом затухания. Логарифмическим декрементом затухания называется натуральный логарифм отношения значений двух последующих амплитуд, соответствующих моментам времени, отличающимся на период. В соответствии с определением:

$$\lambda = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \ln \frac{A_0}{A_1} = \ln \frac{A_1}{A_2} = \dots = \ln \frac{A_{N-1}}{A_N}. \quad (5)$$

Соотношение (5) методически сложно использовать для расчета логарифмического декремента затухания, ввиду затруднения экспериментального определения величин соседних амплитуд. Более просто экспериментально определить начальную и  $N$ -ю амплитуду затухающих колебаний. Поэтому преобразуем соотношение (5). Составим следующее равенство:

$$\underbrace{\frac{A_0}{A_1} * \frac{A_1}{A_2} * \frac{A_2}{A_3} * \dots * \frac{A_{N-1}}{A_N}}_N = \frac{A_0}{A_N}. \quad (6)$$

Учитывая, что  $\frac{A_0}{A_1} = \frac{A_1}{A_2} = \frac{A_2}{A_3} = \dots = \frac{A_{N-1}}{A_N}$  соотношение (6) можно представить в виде

$$\left( \frac{A_0}{A_1} \right)^N = \frac{A_0}{A_N}. \quad (7)$$

После логарифмирования уравнения (7), получим:

$$N \ln \frac{A_0}{A_1} = \ln \frac{A_0}{A_N}. \quad (8)$$

Так как  $\lambda = \ln \frac{A_0}{A_1}$ , то равенство (8) можно записать в виде

$$N\lambda = \ln \frac{A_0}{A_N}. \quad (9)$$

Отсюда нетрудно определить логарифмический декремент затухания  $\lambda$ :

$$\lambda = \frac{\ln \left( \frac{A_0}{A_N} \right)}{N}. \quad (10)$$

#### 4 ОПИСАНИЕ УСТАНОВКИ И МЕТОДИКА ПРОВЕДЕНИЯ ЭКСПЕРИМЕНТА

Экспериментальная установка для определения вязкости изображена на рисунке 2. Металлический диск 1 подвешен на стальной упругой проволоке 4, укрепленной на кронштейне 6. Кронштейн 6 установлен с помощью стойки 7 на основании 8. В нижней части стальной проволоки 4 прикреплено зеркало 3. Сфокусированный луч света от осветителя 12 отражается от зеркала 3 и попадает на шкалу 11, укрепленной на стойке 10. Диск 1 помещен в сосуд 9 с исследуемой жидкостью. С помощью регулировочной головки 5 диск 1 можно поворачивать, а также поднимать или опускать в исследуемую жидкость. Колебания диска данного крутильного маятника возбуждаются поворотом крутильной головки 2.

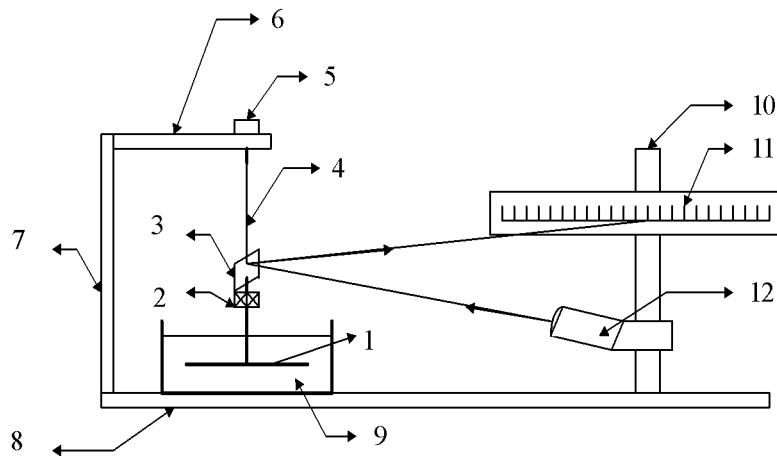


Рисунок 2 – Экспериментальная установка для определения вязкости жидкости

Методика определения вязкости жидкости основана на расчете логарифмического декремента затухания крутильного маятника на воздухе и в исследуемой жидкости. Как показывают расчеты, между логарифмическим декрементом затухания колебаний в исследуемой жидкости  $\lambda$  и динамической вязкостью  $\eta$  существует следующая зависимость:

$$\lambda = \lambda_0 + A \sqrt{\frac{\pi}{2} \rho T \eta}, \quad (11)$$

где  $\lambda$  - логарифмический декремент затухания колебаний в жидкости;  $\rho$  - плотность жидкости;  $T$  - период колебаний крутильного маятника в жидкости;  $\eta$  - вязкость жидкости;  $\lambda_0$  - логарифмический декремент затухания в воздухе;  $A$  - некоторая постоянная прибора, зависящая от геометрии маятника и его момента инерции.

Для исключения постоянной прибора  $A$ , запишем соотношение (11) для исследуемой жидкости, вязкость которой необходимо определить, и, например, для воды, вязкость которой  $\eta_{\text{в}}$  известна. После преобразований получим

$$\eta = \frac{\rho_{\text{в}} T_{\text{в}} \eta_{\text{в}} (\lambda_{\text{ж}} - \lambda_0)^2}{\rho_{\text{ж}} T_{\text{ж}} (\lambda_{\text{в}} - \lambda_0)^2}. \quad (12)$$

Видно, что для определения динамической вязкости необходимо найти логарифмический декремент затухания крутильного маятника в воздухе  $\lambda_0$ , воде  $\lambda_{\text{в}}$  и исследуемой жидкости  $\lambda_{\text{ж}}$ .

## 5 ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ И ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

1 Включите осветитель (12) (рисунок 2) и с помощью регулировочной головки (5) установите шкалу осветителя (11) таким образом, чтобы зайчик находился на нуле шкалы.

2 Определите логарифмический декремент затухания маятника в воздухе  $\lambda_0$ . Для этого с помощью крутильной головки (2) закрутите проволоку крутильного маятника так, чтобы отклонение зайчика от нулевого положения составило 10...15 см. Определите начальную амплитуду колебаний  $A_0$  и амплитуду

последнего колебания  $A_N$ , а также продолжительность  $N$  колебаний. Число колебаний  $N$  принять равным 10...20 (20 - в воздухе, 10 - в исследуемых жидкостях). Повторите измерения не менее 5 раз. Результаты измерений запишите в таблицу 1.

3 Поместите диск маятника (1) в сосуд с водой (9), определите период колебаний маятника в воде  $T_e$  и логарифмический декремент затухания маятника в воде  $\lambda_e$  в соответствии с пунктом 2. Результаты измерений занесите в таблицу 1.

Таблица 1

Среда	№	$N$	$t, \text{с}$	$A_0, \text{мм}$	$A_N, \text{мм}$	$\lambda$	$T, \text{с}$
Воздух	1						
	2						
	3						
	4						
	5						
Вода	1						
	2						
	3						
	4						
	5						
Глицерин	1						
	2						
	3						
	4						
	5						

Таблица 2

№	$\eta_i$	$\langle \eta \rangle$	$\Delta \eta_i$	$(\Delta \eta_i)^2$	$\Delta S$	$\Delta \eta$	$\varepsilon, \%$
1							
2							
3							
4							
5							

Таблица 3

Вязкость воды при различных температурах			
Температура, °C	Вязкость, $\eta$ , мПа·с	Температура, °C	Вязкость, $\eta$ , мПа·с
5	1,5138	50	0,5477
10	1,3037	60	0,4674
15	1,1369	70	0,4048
20	1,0019	80	0,3554
25	0,8909	90	0,3155
30	0,7982	100	0,2829

4 Поместите диск маятника (1) в сосуд с исследуемой жидкостью (9), определите период колебаний маятника в жидкости  $T_{ж}$  и логарифмический декремент затухания маятника в исследуемой жидкости  $\lambda_{ж}$  в соответствии с пунктом 2. Результаты измерений занесите в таблицу 1.

5 Рассчитайте по формуле (12) и (4) динамическую вязкость неизвестной жидкости.

Динамическая вязкость воды при различных температурах представлена в таблице 3. Результаты расчета запишите в таблицу 2.

6 Рассчитайте среднее значение вязкости исследуемой жидкости по формуле

$$\langle \eta \rangle = \frac{\sum \eta_i}{N}.$$

7 Рассчитайте среднюю квадратичную погрешность измерения вязкости исследуемой жидкости по формуле

$$\Delta S = \sqrt{\frac{\sum_i (\Delta \eta_i)^2}{N(N-1)}}.$$

8 Вычислите величину абсолютной погрешности (величину доверительного интервала) вязкости для заданной надежности  $\alpha$

$$\Delta \eta = t_\alpha(n) \Delta S.$$

9 Рассчитайте относительную погрешность измерения вязкости

$$\varepsilon = \frac{\Delta \eta}{\langle \eta \rangle} \cdot 100\%.$$

10 Окончательный результат запишите в виде

$$\eta = \langle \eta \rangle \pm \Delta \eta \text{ (размерность); } \varepsilon = \dots \text{ \%}.$$

11 Постройте график зависимости периода колебаний крутильного маятника от коэффициента вязкости

Коэффициент динамической вязкости воздуха при комнатной температуре принять равным  $\eta_0$ , мПа·с.

12 Сделайте краткие выводы по работе.

## 6 КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1 Объясните природу внутреннего трения в газах и жидкостях.

2 Поясните температурную зависимость коэффициента вязкости для газов.

3 Поясните температурную зависимость коэффициента вязкости для жидкостей.

4 Дайте определение логарифмического декремента затухания.

5 Получите формулу для определения логарифмического декремента затухания.

6 Получите рабочую формулу для определения вязкости методом затухания колебаний крутильного маятника.

7 Дайте определение кинематической вязкости.

8 Получите размерность кинематической и динамической вязкости.

## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 23

### МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА ПОВЕРХНОСТНОГО НАТЯЖЕНИЯ ЖИДКОСТЕЙ

#### 1 ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Определение коэффициента поверхностного натяжения жидкости методом отрыва капли. Определение зависимости коэффициента поверхностного натяжения раствора от его концентрации.

#### 2 БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

- 1 Савельев И.В. Курс физики. В 3 т. Т.1: Механика. Молекулярная физика / И.В. Савельев. - Лань, 2008. – 352 с.
- 2 Трофимова Т.И. Курс физики: учеб. пособие для вузов / Т.И. Трофимова. - 19-е изд. - Академия, 2012. – 560 с.
- 3 Детлаф А.А., Яворский Б.М. Курс физики.- Академия, 2009. – 720 с.

#### 3 ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим процесс вытекания жидкости из узкой трубки (пипетки). Жидкость из такой трубки вытекает по каплям (рисунок 1).

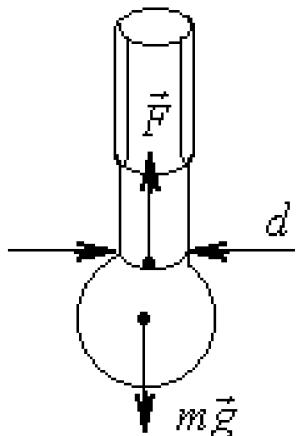


Рисунок 1 – Вытекание жидкости из узкой трубки

Непосредственно перед отрывом капля висит на шейке, форму которой можно приблизительно считать цилиндрической, а диаметр - равным внутреннему диаметру трубки. В момент отрыва вес капли равен силе поверхностного натяжения, т.е.

$$F = P,$$

но так как

$$P = m \cdot g, \text{ а } F = \pi \cdot d \cdot \alpha,$$

где  $m$  - масса капли;

$d$  - диаметр трубки;

$\alpha$  - коэффициент поверхностного натяжения, то в этом случае получим:

$$m \cdot g = \pi \cdot d \cdot \alpha. \quad (1)$$

Отсюда

$$\alpha = \frac{mg}{\pi d}. \quad (2)$$

На практике измерить массу капли трудно, т.к. она имеет очень малую величину. Поэтому взвешивают не одну каплю, а 50...100 капель и массу одной капли определяют как

$$m = \frac{M}{N}, \quad (3)$$

где  $M$  - общая масса всех капель;  $N$  - число капель.

С учетом (3) выражение (2) примет вид:

$$\alpha = \frac{Mg}{\pi dN}. \quad (4)$$

Кроме веса капли в эту формулу входят также диаметр трубки, точное определение которого затруднительно. Поэтому на практике определяют коэффициент поверхностного натяжения исследуемой жидкости методом сравнения его с известным коэффициентом для дистиллированной воды. Запишем выражение (4) для воды и для исследуемой жидкости:

$$\alpha = \frac{Mg}{\pi dN}, \quad \alpha_x = \frac{M_x g}{\pi dN_x}.$$

Отсюда

$$\alpha_x = \frac{\alpha \cdot M_x g}{M \cdot N_x}. \quad (5)$$

Если количество капель для обеих жидкостей взять одинаковым, т.е.  $N = N_x$ , то в этом случае выражение (5) упростится:

$$\alpha_x = \frac{\alpha \cdot M_x}{M}. \quad (6)$$

Значение коэффициента поверхностного натяжения для воды при различных температурах приведено в таблице 1.

Таблица 1

$t, ^\circ C$	10	15	20	25
$\alpha, \text{Н/м}$	0,0740	0,0733	0,0725	0,0718

#### 4 ПРИБОРЫ И ПРИНАДЛЕЖНОСТИ

- 1 Пипетка, укрепленная на штативе.
- 2 Сосуды с исследуемыми растворами.
- 3 Стеклянный стаканчик.
- 4 Весы с разновесами.

#### 5 ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

- 1 Взвесить пустой стеклянный стаканчик на весах с точностью до 0,1 г.
- 2 Заполнить пипетку дистиллированной водой и отрегулировать кран таким образом, чтобы частота падения капель составляла примерно 1 каплю в секунду.

3 Подставить под пипетку стаканчик и подсчитать количество упавших в него капель (50...100 шт). Взвесить стаканчик с водой на весах. Определить массу капель.

4 Освободить пипетку и стаканчик от дистиллированной воды и повторить измерения для различных растворов, каждый раз беря одинаковое количество капель (такое же, как и для воды).

5 Полученные результаты занести в таблицу 2.

6 Определить величину коэффициента поверхностного натяжения для исследуемых растворов по формуле (6).

7 Найти величину ошибки измерений по формуле

$$\Delta\alpha_x = \varepsilon \cdot \alpha_x, \text{ где } \varepsilon = \frac{\Delta\alpha}{\alpha} + \frac{\Delta M_x}{M_x} + \frac{\Delta M}{M}$$

Здесь величины  $\Delta M_x$  и  $M$  определяются точностью взвешивания, а ошибка  $\Delta\alpha$  зависит от того, с какой точностью известно значение  $\alpha$  (например, для  $\alpha = 0,0733$ ,  $\Delta\alpha = 0,00005$ ).

Таблица 2

№ опыта	Концентрация раствора, %	$N$ , шт.	$M$ , кг	$\alpha_x$ , Н/м	$\Delta\alpha_x$ , Н/м

8 Записать для каждого раствора значение коэффициента поверхностного натяжения в виде

$$\alpha_x = \alpha_x \pm \Delta\alpha_x \text{ (единицы измерения), } \varepsilon = \dots \%$$

9 Построить график зависимости коэффициента поверхностного натяжения раствора от его концентрации.

## 6 КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1 Объясните механизм возникновения сил поверхностного натяжения в жидкости.

2 Как зависит коэффициент поверхностного натяжения от температуры?

3 Как зависит коэффициент поверхностного натяжения раствора от его концентрации? Почему?

4 В каких единицах измеряется коэффициент поверхностного натяжения жидкости?

\* \* \*

---

## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 24

---

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ПОВЕРХНОСТНОГО НАТЯЖЕНИЯ ЖИДКОСТЕЙ ВОЛНОВЫМ МЕТОДОМ

#### 1 ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Определение коэффициента поверхностного натяжения жидкостей методом измерения длины капиллярно-гравитационных волн.

#### 2 БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

- 1 Савельев И.В. Курс физики. В 3 т. Т.1: Механика. Молекулярная физика / И.В. Савельев. - Лань, 2008. – 352 с.
- 2 Трофимова Т.И. Курс физики: учеб. пособие для вузов / Т.И. Трофимова. - 19-е изд. - Академия, 2012. – 560 с.
- 3 Детлаф А.А., Яворский Б.М. Курс физики.- Академия, 2009. – 720 с.

#### 3 ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ВВЕДЕНИЕ

Коэффициентом поверхностного натяжения  $\alpha$  называется свободная энергия, приходящаяся на единицу поверхности жидкости.

Если жидкость вывести из состояния равновесия, то силы тяжести и силы поверхностного натяжения будут стремиться возвратить ее в исходное состояние. Силы тяжести стремятся совместить поверхность жидкости с горизонтальной плоскостью (точнее, расположить по сфере, центр которой находится в центре Земли). Силы поверхностного натяжения стремятся сократить площадь поверхности жидкости. Выведенная из состояния равновесия жидкость приобретает в полях силы тяжести и сил поверхностного натяжения потенциальную энергию. На поверхности жидкости возникают капиллярно-гравитационные волны.

Если пренебречь некоторыми свойствами реальной жидкости и рассматривать волны длиной  $\lambda$  и малой амплитуды в глубокой жидкости ( $h \gg \lambda$ ), то можно найти простое выражение для скорости распространения капиллярно-гравитационных волн, воспользовавшись результатами гидродинамики для несжимаемой жидкости. В плоской бегущей синусоидальной волне малой амплитуды каждая частица жидкости движется по окружности, расположенной в вертикальной плоскости, проходящей через направление распространения волны. Радиус окружности  $r$  мал по сравнению с длиной волны  $\lambda$ . Амплитуда колебаний частиц жидкости на глубине длины волны примерно в 500 раз меньше, чем на поверхности (сравниваются частицы с одинаковой координатой  $x$  положения равновесия).

Допустим, что частицы, расположенные вдоль некоторой прямой на поверхности жидкости, совершают гармонические колебания. Тогда по поверхности жидкости перпендикулярно к этой прямой со скоростью  $c$  будет распространяться капиллярно-гравитационная волна.

Рассмотрим явление в системе отсчета, равномерно движущейся со скоростью  $c$  в направлении распространения волн. В этой системе волны будут неподвижны, движение частиц будет складываться из равномерно-

поступательного со скоростью  $c$  и равномерного вращения частиц по окружности радиуса  $r$ . Так как радиус мал по сравнению с длиной волны  $\lambda$ , то можно пренебречь горизонтальными колебаниями частицы. Направим ось  $x$  введенной подвижной системы отсчета по невозмущенной поверхности в сторону распространения волны, а ось  $z$  - вертикально вниз (в глубину жидкости).

Тогда движение частиц будет представлено уравнениями

$$x = ct; z = r \sin \frac{2\pi ct}{\lambda}.$$

Форма траектории частиц - синусоида:

$$z = r \sin \left( \frac{2\pi x}{\lambda} \right). \quad (1)$$

Частицы, расположенные в глубине жидкости, движутся в выбранной системе отсчета также по синусоидам, но для них  $r$  экспоненциально убывает с глубиной.

На рисунке 1 синусоида ABD представляет траекторию частицы на поверхности жидкости, синусоида A'B'D' - траекторию бесконечно близкой к ней частицы в глубине жидкости. Течение жидкости в выбранной системе отсчета стационарно, поэтому можем применить уравнение Бернулли к трубке тока, ограниченной поверхностями синусоид.

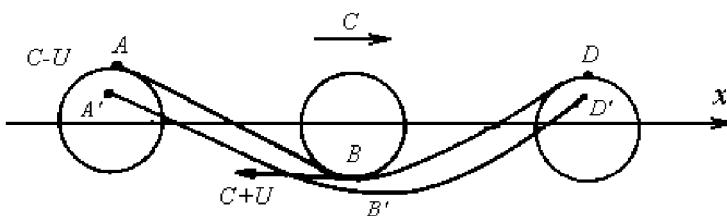


Рисунок 1 – Траектория частицы на поверхности жидкости

В выбранной системе отсчета скорость частиц на гребне равна  $c - u$ , где  $u$  - линейная скорость вращения по окружности, а скорость частиц во впадине  $c + u$ . Разность высот частиц на гребне и во впадине составляет  $2r$ . Линейную скорость вращения можно вычислить из соотношения

$$u = \frac{2\pi rc}{\lambda}.$$

Уравнение Бернулли для выбранной трубки тока имеет вид

$$P_A + \frac{\rho}{2}(c - u)^2 + 2\rho rg = P_B + \frac{\rho}{2}(c + u)^2, \quad (2)$$

откуда

$$2\rho cu = 2\rho rg + (P_A - P_B), \quad (3)$$

где  $\rho$  - плотность жидкости;  $g$  - гравитационное ускорение. Давление жидкости в точках А и В можно вычислить по формуле Лапласа:

$$P_A = P_0 + \alpha \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right); P_B = P_0 - \alpha \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right), \quad (4)$$

где  $\alpha$  -коэффициент поверхностного натяжения;  $R_1$  и  $R_2$  - радиусы кривизны двух взаимно перпендикулярных нормальных сечений.  $R_1 = \infty$ ; радиус  $R_2$  второго сечения найдем, дважды проинтегрировав (1) по  $x$ :

$$R_2 = \frac{1}{\left| \frac{d^2x}{dx^2} \right|} = \frac{\lambda^2}{4\pi^2 r}.$$

Подставив (4) в выражение (3) с учетом выражений для  $R_2$  и  $u$ , получим формулу фазовой скорости распространения капиллярно-гравитационных волн:

$$c = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi\alpha}{\rho\lambda}}. \quad (5)$$

Из (5) видно, что фазовая скорость зависит от длины волны, т.е. капиллярно-гравитационные волны обладают дисперсией.

Можно рассматривать два предельных случая. Для длинных волн

$$\frac{g\lambda}{2\pi} \gg \frac{2\pi\alpha}{\rho\lambda}, \text{ т.е. } \lambda \gg 2\pi \sqrt{\frac{\lambda}{\rho g}}.$$

В этом случае вклад сил поверхностного натяжения в образование волн на поверхности жидкости много меньше вклада силы тяжести. Такие волны называются гравитационными. Их фазовая скорость

$$c = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}.$$

В случае коротких волн  $\lambda \ll 2\pi \sqrt{\frac{\lambda}{\rho g}}$  преобладает действие сил поверхности натяжения. Эти волны называются капиллярными. Их фазовая скорость  $c = \sqrt{\frac{2\pi\alpha}{\rho\lambda}}$ .

Выражение коэффициента поверхностного натяжения  $\alpha$  можно получить исходя из формулы (5) и выражения  $v = \frac{c}{\lambda}$ :

$$\alpha = \frac{\rho\lambda^3 v^2}{2\pi} - \frac{\rho\lambda^2 g}{4\pi^2}. \quad (6)$$

В данном эксперименте удобно измерить  $\frac{\lambda}{2}$ , поэтому окончательная расчетная формула для коэффициента поверхностного натяжения будет иметь вид

$$\alpha = \frac{4\rho v^2}{\pi} \left( \frac{\lambda}{2} \right)^3 - \frac{\rho g}{\pi^2} \left( \frac{\lambda}{2} \right)^2. \quad (7)$$

#### 4 ОПИСАНИЕ УСТАНОВКИ

На рисунке 2 дана зондовая цепь, состоящая из зонда 3, противозонда П, источника напряжения на 10 В, соединенных последовательно. Зонд укреплен на держателе, который может перемещаться в вертикальном и горизонтальном направлениях с помощью микрометрических винтов.

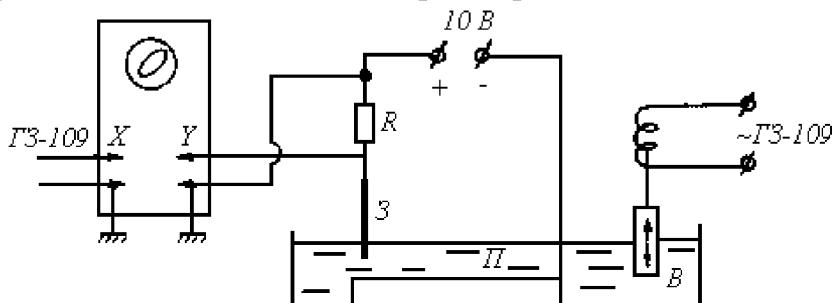


Рисунок 2 – Схема установки

Противозонд - достаточно большая медная пластина, погруженная на дно кюветы с жидкостью. Наибольшим сопротивлением в цепи зонда обладает острие зонда, погруженного в жидкость. Небольшое изменение глубины погружения зонда ведет к заметному изменению тока в цепи. Бегущая по поверхности жидкости волна периодически меняет погружение зонда и, как следствие, - ток в цепи зонда. Изменение тока в цепи зонда будет синхронно с глубиной погружения зонда.

Периодическое изменение силы тока можно регистрировать, снимая напряжение с сопротивления  $R$  в цепи зонда и подавая его на Y-вход осциллографа (рисунок 2).

Колебания в жидкости создает вибратор (В), питаемый от звукового генератора, задающего частоту колебаний. От того же звукового генератора подается напряжение на X-вход осциллографа.

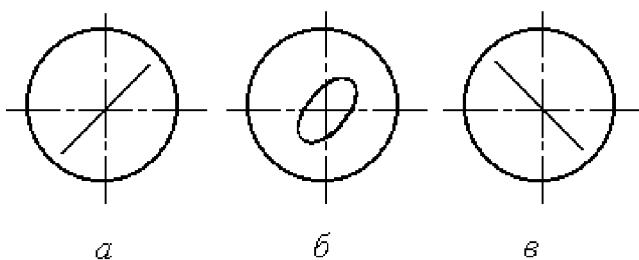


Рисунок 3 – Фигуры на экране осциллографа

Сложение взаимно перпендикулярных колебаний одной и той же частоты даст на экране осциллографа эллипс. Пользуясь горизонтально расположенным микрометрическим винтом, поместим зонд так, чтобы на экране осциллографа эллипс выродился в прямую (рисунок 3, а), что соответствует некоторой разности фаз  $\varphi_0$  у периодически изменяющихся напряжений на X- и Y-входах осциллографа.

Сместим зонд по горизонтали до тех пор, пока на экране опять не появится прямая с отрицательным углом наклона (рисунок 3, в), что соответст-

вует изменению разности фаз взаимно перпендикулярных колебаний на  $\pi$  или смещению зонда по горизонтали на  $\lambda/2$ .

## 5 ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

1 Заполните чистую кювету дистиллированной водой.

2 Погрузите вибратор в воду (рисунок 4)

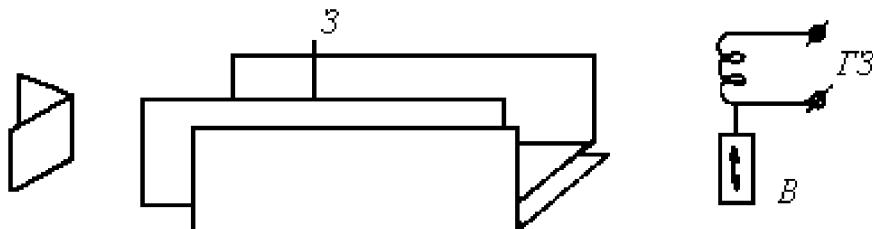


Рисунок 4 – Лабораторная установка

3 Включите звуковой генератор и прогрейте в течение пяти минут. Установите по шкале частоту 20 Гц. Выходное напряжение 0,5 В.

4 Включите осциллограф, блок питания.

5 Произведите измерения  $\lambda/2$  бегущих волн по горизонтальному микрометрическому винту для  $n = 5 \dots 6$  частот в интервале 20...50 Гц.

Данные занесите в таблицу 1.

Для дистиллированной воды  $\rho = 1000 \text{ кг}/\text{м}^3$ .

Таблица 1

Частота вибратора $\nu$ , Гц	20	25	30	35	40	45	50
Показания винта, мм	$x_1$						
	$x_2$						
$\frac{\lambda}{2} =  x_1 - x_2 $ , мм							
$\alpha$ , Н/м							

Вычислите среднее значение коэффициента поверхностного натяжения

$$\langle \alpha \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \alpha_i$$

Так как при данном методе измерений  $\lambda/2$  случайный разброс всегда больше приборной ошибки, даваемой микрометрическим винтом, то вычислить среднеквадратичную ошибку для  $\langle \alpha \rangle$ , для этого найти абсолютную погрешность в каждом опыте

$$\Delta \alpha_i = |\langle \alpha \rangle \pm \alpha_i|$$

а затем среднеквадратичную ошибку по формуле:

$$\Delta S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\Delta \alpha_i)^2}{n(n-1)}},$$

где  $n$  - число выбранных частот. Вычислив  $\Delta S$ , найти доверительный интервал  $\Delta \alpha$  по произвольно выбранной доверительной вероятности:

$$\varepsilon = t_a(n) \cdot \Delta S.$$

где  $t_\alpha(n)$  - коэффициент Стьюдента, значение которого следует взять из таблицы.

Относительную погрешность измерений найдем по формуле

$$\varepsilon = \frac{\Delta\alpha}{\langle \alpha \rangle} \cdot 100\%$$

Сделать выводы по работе и представить окончательный результат в виде:

$$\alpha = (\langle \alpha \rangle \pm \Delta\alpha) \text{ (единицы измерения)}, \varepsilon = \dots \%$$

## 6 КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1 Объясните механизм возникновения сил поверхностного натяжения в жидкости.

2 Зависит ли коэффициент поверхностного натяжения жидкости от частоты возбуждаемых в ней колебаний?

3 В каких случаях силы поверхностного натяжения не влияют существенно на скорость распространения волн по поверхности жидкости?

4 В каких единицах измеряется коэффициент поверхностного натяжения?

\* \* \*

---

## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 25

---

### МЕТОДЫ ИЗМЕРЕНИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОЙ ВЛАЖНОСТИ ВОЗДУХА

#### 1 ЦЕЛЬ РАБОТЫ

- 1 Ознакомление с методами определения влажности воздуха в лабораторных условиях.
- 2 Определение влажности воздуха с помощью вентиляционного психрометра.
- 3 Определение влажности воздуха с помощью гигрометра, использующего элемент Пельтье.

#### 2 БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

- 1 Чолпан П.П. Основи фізики: Навч. посібник.- К.: Вища шк., 1995.- 486 с.
- 2 Савельев И.В. Курс физики. В 3 т. Т.1: Механика. Молекулярная физика / И.В. Савельев. - Лань, 2008. – 352 с.
- 3 Элементарный учебник физики / Под ред. акад. Г.С.Ландсберга.- [В 3-х т.].- Т.1.: Механика. Теплота. Молекулярная физика.- М.: 1985.- 656 с.
- 4 Физический практикум. Механика и молекулярная физика / Под ред. В.И.Ивероновой.- М.: 1977.- 442 с.
- 5 Лабораторный практикум по физике: Учебн. пособие для вузов / С.С. Ахматов, В.И.Андреевский, А.И.Ахматова.- М.: 1980.- 360 с.

#### 3 ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ВВЕДЕНИЕ

Влажность воздуха влияет на самочувствие человека, его психофизические функции, работоспособность. Определенный уровень влажности поддерживается в производственных помещениях электронной промышленности, вычислительных комплексах, при лакокрасочных работах.

Абсолютная влажность воздуха измеряется массой водяных паров, содержащихся в 1 м<sup>3</sup> воздуха, или упругостью (давлением) водяного пара, выраженной в миллибарах. Упругость и плотность водяного пара достигают максимальных (насыщающих) значений для каждой конкретной температуры воздуха. Это давление водяного пара называют упругостью насыщения  $E$ . Температура, при которой водяной пар, имеющийся в воздухе, переходит в состояние насыщения, называется *точкой росы*.

Степень насыщенности воздуха водяным паром, то есть отношение упругости водяного пара  $e$ , имеющегося при данной температуре в воздухе, к упругости насыщения  $E$  при той же температуре, называется относительной влажностью воздуха, которая часто выражается в процентах:

$$r = \frac{e}{E} \cdot 100\%. \quad (1)$$

Ощущение сухости или сырости воздуха связано с относительной влажностью, то есть с тем, насколько водяной пар близок к состоянию насыщения.

Влажность воздуха измеряется психрометрами и гигрометрами. В психрометрах (от греческого «психрос» - холод) имеется два обычных термометра, укрепленных на общем штативе. Резервуар одного из термометров, называемого «смоченным», обмотан батистом, конец которого опущен в стаканчик с дистиллированной водой. Другой термометр «сухой». По сухому термометру отсчитывается температура воздуха. Показания смоченного термометра вследствие испарения воды с батиста ниже показаний сухого термометра, если влажность воздуха меньше 100%. Чем суще воздух, тем испарение протекает быстрее и тем больше разность показаний сухого и смоченного термометра, называемая психрометрической разностью. Психрометром можно пользоваться при температуре не ниже  $-5^{\circ}\text{C}$ .

Выше описаны конструкция стационарного психрометра (психрометр Августа), если же шарики термометров помещены в металлические трубы для защиты от теплового излучения окружающих предметов и через трубы пропускается с постоянной скоростью поток воздуха, создаваемый небольшим механическим вентилятором, то это вентиляционный психрометр (психрометр Асмана).

Для быстрого определения относительной влажности воздуха с помощью психрометра используются психрометрические таблицы (см. приложение).

В гигрометрах, основанных на определении точки росы, охлаждается металлическая поверхность, на которой при достижении некоторой температуры конденсируется водяной пар, появляется роса. Зная температуру точки росы, можно по специальным таблицам найти количество водяного пара или его упругость  $E$  в состоянии насыщения. Делением упругости насыщения при температуре точки росы, которая, очевидно, является упругостью водяного пара при данной температуре воздуха, на упругость насыщающих паров при этой температуре, находят относительную влажность воздуха. В данной работе используется гигрометр оригинальной конструкции, содержащий элемент Пельтье – полупроводниковый прибор, охлаждающийся при пропускании через него электрического тока определенной величины.

## 4 ПРИБОРЫ И ПРИНАДЛЕЖНОСТИ

- 1 Психрометр Асмана.
- 2 Гигрометрическое устройство, использующее элемент Пельтье.
- 3 Психрометрические таблицы.

## 5 СХЕМА ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ УСТАНОВКИ

На рисунке 1 представлена упрощенная схема гигрометрического устройства, включающая в себя: блок питания 1, преобразующий напряжение 220 В в напряжения, подаваемые в цепь регулируемого стабилизатора тока 2, обеспечивающего необходимый режим работы элемента Пельтье 3.

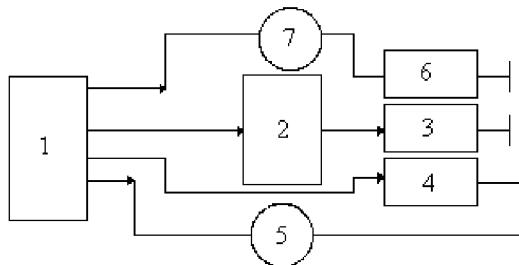


Рисунок 1 – Схема гигрометрического устройства

Блок 1 обеспечивает также питание гигристора 4, то есть элемента, проводимость которого изменяется под действием влаги, осаждающейся на нем при достижении температуры точки росы. Увеличение проводимости гигристора 4 сопровождается зажиганием неоновой лампочки 5, а температура гигристора в момент достижения точки росы измеряется терморезистором 6, находящемся в тепловом контакте с гигристором и её значение считывается с микроамперметра 7, проградуированного в градусах Цельсия.

## 6 ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

### *Упражнение 1*

- 1 Определить температуру воздуха в помещении по сухому термометру психрометра Асмана.
- 2 Запустить вентилятор психрометра и по окончании его работы определить температуру по смоченному термометру.
- 3 Повторить операцию пункта 2 несколько раз, до тех пор, пока температура смоченного термометра не стабилизируется.
- 4 Результаты измерений занести в таблицу 1.

Таблица 1

№ измерения	1	2	3	4	5	Среднее значение
Температура сухого термометра, $T_c$						
Температура влажного термометра, $T_m$						
Разность показаний сухого и влажного термометров, $\Delta T$						
Относительная влажность воздуха, %						

### *Упражнение 2*

- 1 Включить тумблер «Пуск» гигрометрического устройства 1 и с помощью потенциометра 2 установить рабочий режим элемента Пельтье по указанию преподавателя, контролируя исходную температуру гигристора по шкале измерителя температуры 3 (рисунок 2).

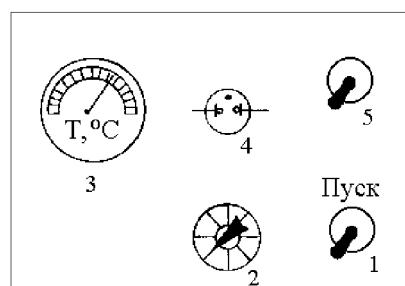


Рисунок 2 – Панель управления гигрометра

Таблица 2

№ измерения	1	2	3	4	5	Среднее значение
Температура гигристора исходная						
Температура точки росы						
Плотность насыщающего пара при исходной температуре						
Плотность насыщающего пара при точке росы						
Относительная влажность воздуха, %						

## 7 ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

- Используя экспериментальные данные таблицы 1, рассчитать разность показаний сухого и влажного термометров и внести её в таблицу 1 для каждого измерения, а также записать полученные средние значения измеряемых величин температуры.
- По психрометрической таблице (см. приложение) определить относительную влажность воздуха в лаборатории и записать результаты в таблицу 1.
- По экспериментальным данным таблицы 2, используя значения давления или плотности насыщающего водяного пара при разных температурах (см. приложение), найти относительную влажность воздуха, используя формулу (1), для каждого измерения и определить среднее значение. Результаты расчетов внести в таблицу 2.
- Рассчитать относительную погрешность измерений для средних значений влажности, определенной по психрометрическому или гигроскопическому методу.
- Сравнить средние значения влажности, определенные по каждому методу; оценить расхождение этих значений с учетом погрешностей измерений и сделать вывод об эффективности и точности проведенного эксперимента.

## 8 КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

- Что такое абсолютная влажность воздуха?
- Что такое относительная влажность воздуха?
- Что называется температурой «точки росы»?
- Чем отличается психрометр от гигрометра?
- Что такое элемент Пельтье?
- Как влияет влажность воздуха на физиологическое состояние человека?
- В каких видах производственных помещений поддерживается постоянная влажность воздуха?

\* \* \*

---

## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 26

---

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ УДЕЛЬНОЙ ТЕПЛОТЫ ПЛАВЛЕНИЯ ОЛОВА И ПРИРАЩЕНИЯ ЭНТРОПИИ ПРИ ПЛАВЛЕНИИ ОЛОВА

#### 1 ЦЕЛЬ РАБОТЫ

- 1 Экспериментально определить удельную теплоту плавления олова.
- 2 Экспериментально определить приращение энтропии при плавлении олова.

#### 2 БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

- 1 Савельев И.В. Курс физики. В 3 т. Т.1: Механика. Молекулярная физика / И.В. Савельев. - Лань, 2008. – 352 с.
- 2 Трофимова Т.И. Курс физики: учеб. пособие для вузов / Т.И. Трофимова. - 19-е изд. - Академия, 2012. – 560 с.
- 3 Детлаф А.А., Яворский Б.М. Курс физики.- Академия, 2009. – 720 с.
- 4 Сивухин Д.В. Общий курс физики: Учеб. пособие для вузов.- [В 3-х т.].- Т.2: Термодинамика и молекулярная физика.- М.: Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990.- 592 с.

#### 3 ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ВВЕДЕНИЕ

В механике твердым телом, с макроскопической точки зрения, называют такое тело, которое сохраняет свою форму, а с точки зрения внутреннего строения (микроскопической) под твердым телом понимают тело кристаллической структуры. Особенностью кристаллической структуры является анизотропность, т.е. физические свойства кристаллов не одинаковы в разных направлениях.

Если кристаллу сообщить некоторое количество теплоты, его внутренняя энергия, состоящая из энергии колебательного движения ионов (около положения равновесия в узлах кристаллической решетки) и потенциальной энергии их взаимодействия возрастает (температура кристалла увеличивается).

При дальнейшем нагревании и достижении определенной температуры кристалл начинает разрушаться, т.е. начинается процесс плавления. При этом амплитуда колебаний ионов около положения равновесия становится настолько большой, что начинают «рваться» межионные связи. С этого момента вся сообщаемая извне энергия полностью идет на разрушение кристаллической решетки (разрушается т.н. дальний порядок). Процесс перехода вещества из кристаллического состояния в жидкое при неизменной температуре (температуре плавления –  $T_{пп}$ ) называется плавлением. При температуре плавления вещество одновременно может находиться в двухфазном состоянии – кристаллическом и жидком. После того как кристалл полностью расплавится начинается повышение температуры вещества в жидком состоянии.

Если веществу, первоначально находившемуся в кристаллическом состоянии, сообщать каждую секунду одно и тоже количество энергии (тепла), то изменение температуры тела со временем будет таким, как показано на рисунке 1, где Кр. т. - кристаллическое тело, Ж - жидкость.

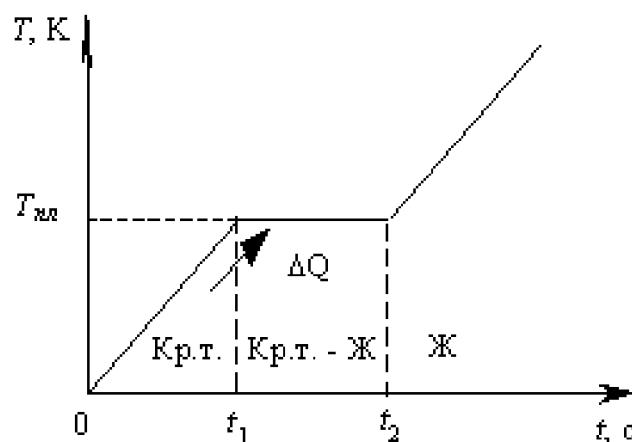


Рисунок 1 – График плавления кристаллического тела

Количество теплоты, необходимое для перевода единичной массы вещества из кристаллического состояния в жидкое при температуре плавления называется удельной теплотой плавления.

$$\lambda = \frac{\Delta Q}{\Delta m}. \quad (1)$$

Если жидкость охлаждать, то процесс протекает в обратном направлении. Сначала температура жидкости понижается, затем при постоянной температуре, равной  $T_{пл}$ , начинается кристаллизация — процесс перехода вещества из жидкого состояния в кристаллическое. После ее завершения температура кристалла начинает понижаться. График этого процесса представлен на рисунке 2.

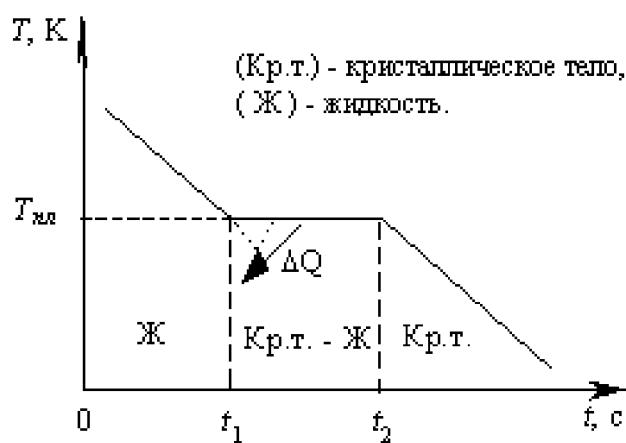


Рисунок 2 – График охлаждение (кристиллизации)

Для кристаллизации вещества необходимо наличие так называемых центров кристаллизации — кристаллических зародышей, которыми могут быть не только кристаллики образующегося вещества, но и примеси, а также пыль, сажа и т.д. Отсутствие центров кристаллизации в чистой жидкости затрудняет образование микроскопических кристалликов и вещество, оставаясь в жидкостном состоянии, охлаждается до температуры ниже температуры кристаллизации, при этом образуется переохлажденная жидкость (на рисунке 2 ей соответствует штриховая кривая). При дальнейшем переохлаждении начинается спонтанное образование центров кристаллизации, температура са-

мопроизвольно повышается до  $T_{\text{пл}}$  и вещество кристаллизуется довольно быстро.

Обычно переохлаждение расплава происходит от долей до десятков К, но для ряда веществ может достигать сотен кельвин. Из-за большой вязкости сильно переохлажденные жидкости теряют текучесть, сохраняя как и кристаллические тела свою форму. Эти тела получили название аморфных твердых тел; к ним относятся смолы, воск, сургуч, стекло. Аморфные тела изотропны, для них как и для жидкостей характерен ближний порядок расположения атомов, ионов или молекул. У аморфных тел отсутствует определенная точка плавления. Кривая нагревания аморфного тела представлена на рисунке 3. Точка перегиба характеризует нарушение ближнего порядка.

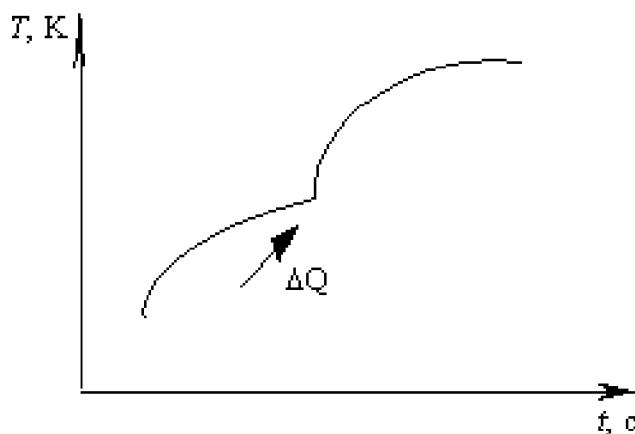


Рисунок 3 – Кривая нагревания аморфного тела

Энтропия (от греческого *entropia* - поворот, превращение), понятие, впервые введенное в термодинамике (Р. Клаузиус – 1865 г.) для определения меры необратимого рассеяния энергии. Являясь однозначной функцией состояния системы, энтропия  $S$  характеризует меру беспорядочности теплового движения.

В случае обратимых процессов в неизолированной системе изменение энтропии,

$$\Delta S = \int_1^2 \frac{d'Q}{T}, \quad (2)$$

где  $d'Q$  - количество тепла сообщенное системе извне или отданное системой во внешнюю среду;

$T$  - абсолютная температура системы;

$\Delta S = S_2 - S_1$ - разность энтропий в состояниях 2 и 1.

Знак  $\Delta S$  указывает направленность необратимого процесса в замкнутой термодинамической системе.

Закон возрастания энтропии: любой необратимый процесс в замкнутой системе происходит так, что энтропия системы при этом возрастает ( $\Delta S > 0$ ). В незамкнутых системах энтропия может как возрастать, так и убывать.

Если внешнее давление не изменяется, то плавление происходит при постоянной температуре  $T_{пл}$ . С поглощением энергии ( $\Delta Q > 0$ ) соответственно приращение энтропии равно

$$\Delta S = \int_{Kp.m.}^{\mathcal{K}} \frac{d'Q}{T_{пл}} = \frac{\Delta Q}{T_{пл}}. \quad (3)$$

Подставив в (3) значение  $\Delta Q = \lambda \cdot \Delta m$  получим

$$\Delta S = \frac{\lambda \cdot \Delta m}{T_{пл}}, \quad (4)$$

где  $\Delta m$  - масса расплавившегося кристаллического вещества.

При кристаллизации вещества энтропия уменьшается на такую же величину.

#### 4 ПРИБОРЫ И ПРИНАДЛЕЖНОСТИ

- 1 Тигель с исследуемым металлом (олово).
- 2 Электрическая печь.
- 3 Термометр.
- 4 Секундомер.

#### 5 МЕТОД И ОПИСАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТА

Принципиальная схема установки для определения удельной теплоты плавления олова представлена на рисунке 4.

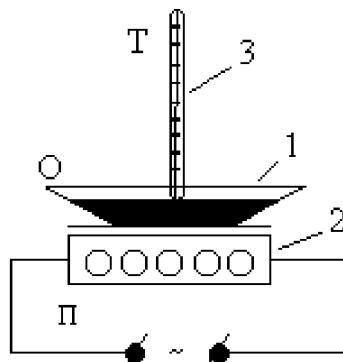


Рисунок 4 – Принципиальная схема установки

Тигель с оловом  $O$  помещается в нагревательную печь  $P$ . Температура олова измеряется термометром  $T$ , закрепленным в держателе штатива. График зависимости температуры оставшегося олова от времени имеет вид  $T = f(t)$  (рисунок 5).

Количество теплоты  $q_1$ , отдаваемое в среднем в единицу времени жидким оловом вместе с тиглем при остывании равно

$$q_1 = \frac{Q_1}{t_2 - t_1} = (m_1 \cdot c_1 + m_2 \cdot c_2) \cdot \frac{T_1 - T_2}{t_2 - t_1}, \quad (5)$$

где  $c_1 = 2,66 \cdot 10^2$  Дж/кг·К - удельная теплоемкость жидкого олова;

$m_1$  - масса олова;

$c_2 = 7,5 \cdot 10^2$  Дж/кг·К - удельная теплоемкость тигля;

$m_2$  - масса тигля.

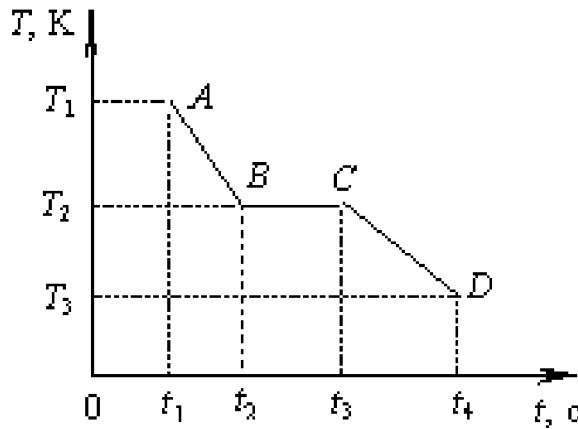


Рисунок 5 – График зависимости температуры охлаждающего олово от времени

При охлаждении твердого олова вместе с тиглем в единицу времени отдается количество теплоты  $q_2$

$$q_2 = \frac{Q_2}{t_4 - t_3} = (m_1 \cdot c'_1 + m_2 \cdot c_2) \cdot \frac{T_2 - T_3}{t_4 - t_3}. \quad (6)$$

где  $c'_1 = 2,46 \cdot 10^2$  Дж/кг·К - удельная теплоемкость твердого олова.

Количество теплоты, израсходованное в единицу времени на кристаллизацию  $q_3$  равно

$$q_3 = \frac{Q_3}{t_3 - t_2} = \frac{\lambda \cdot m_1}{t_3 - t_2}, \quad (7)$$

где  $\lambda$  - удельная теплота плавления (кристаллизации).

Скорость теплоотдачи при прочих равных условиях зависит только от температур между нагретым телом и окружающей средой. Поэтому среднее значение скорости охлаждения до наступления процесса кристаллизации и после него будет приблизительно равно скорости теплоотдачи в период затвердевания. Величина  $q_3$  может быть определена как среднее арифметическое между  $q_1$  и  $q_2$

$$q_3 = \frac{q_1 + q_2}{2}. \quad (8)$$

Подставляя  $q_1$ ,  $q_2$  и  $q_3$  из уравнений (5), (6), (7) в выражение (8), после преобразований получим

$$\lambda = (m_1 \cdot c_1 + m_2 \cdot c_2) \cdot \frac{T_1 - T_2}{t_2 - t_1} \cdot \frac{t_3 - t_2}{2m_1} + (m_1 \cdot c'_1 + m_2 \cdot c_2) \cdot \frac{T_2 - T_3}{t_4 - t_3} \cdot \frac{t_3 - t_2}{2m_1}. \quad (9)$$

Рассчитав удельную теплоту плавления олова по формуле (9) можно найти изменение энтропии при кристаллизации (плавлении). По определению

$$\Delta S = \int_1^2 \frac{dQ}{T}. \quad (10)$$

Считая, что интенсивность теплоотдачи при кристаллизации олова пропорциональна времени, можно записать:

$$\Delta S = \frac{\Delta Q_{обр}}{T_2}, \quad (11)$$

где  $\Delta Q_{обр}$  - количество теплоты, сообщенное телу при обратимом процессе;  $T_2$  - температура, при которой происходит плавление.

При плавлении олова

$$\Delta Q_{обр} = \lambda \cdot m_1 \quad (12)$$

Учитывая (11) и (12) получим:

$$\Delta S = \frac{\lambda \cdot m_1}{T_2}. \quad (13)$$

## 6 ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

1 Определить массу олова  $m_1$  и тигля  $m_2$  взвешиванием на аналитических весах.

2 Установить тигель с оловом в нагревательную печь и включить ее. Когда олово расплавится в него погрузить термометр. После достижения температуры 300...350 °C извлечь термометр из олова, а тигель специальными щипцами установить на асбестовую подкладку стола. Выключить печь.

3 Погрузить в олово термометр, включить секундомер и через каждые 5 или 10 секунд (по указанию преподавателя) записывать показания термометра в таблицу. Измерения прекратить при охлаждении олова до 100 °C.

4 Тигель с термометром поместить в печь и из вновь расплавленного олова извлечь термометр.

5 Построить график  $T = f(t)$ .

6 Определить по графику температуры  $T_1$ ,  $T_2$  и  $T_3$ , соответствующие точкам А, В, С и D и значения величин  $t_1$ ,  $t_2$ ,  $t_3$  и  $t_4$  (см. рисунок 5).

7 Вычислить  $\lambda$  по формуле (9).

8 Определить погрешность измерений, исходя из расчетной формулы (9). Обозначив первое слагаемое через A, а второе - через B:  $\lambda = A + B$  продифференцировав и заменив дифференциалы абсолютными ошибками измерений получим:  $d\lambda = dA + dB$ ,  $\Delta\lambda = \Delta A + \Delta B$ . Определим погрешность первого слагаемого A. Для этого выражение A прологарифмируем:  $\ln A = \ln(m_1 \cdot c_1 + m_2 \cdot c_2) + \ln(T_1 - T_2) - \ln(t_2 - t_1) - \ln(t_3 - t_2) - \ln 2 - \ln m_1$ , полученное равенство про-дифференцируем. При дифференцировании величины  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $m_1$  и  $m_2$  считаем постоянными, т.к. они определяются с высокой степенью точности. Например масса тигля  $m_2 = (34,57 \pm 0,01)$  г,  $\varepsilon = 0,03\%$ . Заменяя дифференциалы приращениями и знаки «-» знаками «+», получим формулу для относительной ошибки величины A:

$$\frac{\Delta A}{A} = \frac{\Delta T_1}{T_1 - T_2} + \frac{\Delta T_2}{T_1 - T_2} + \frac{\Delta t_2}{t_2 - t_1} + \frac{\Delta t_1}{t_2 - t_1} + \frac{\Delta t_3}{t_3 - t_2} + \frac{\Delta t_2}{t_3 - t_2}.$$

Считая, что  $\Delta T_1 = \Delta T_2 = \Delta T = 1$  °C;  $\Delta t_1 = \Delta t_2 = \Delta t_3 = \Delta t = 0,1$  с, получим:

$$\frac{\Delta A}{A} = \frac{2\Delta T}{T_1 - T_2} + \frac{2\Delta t}{t_2 - t_1} + \frac{2\Delta t}{t_3 - t_2}$$

Тогда

$$\Delta A = \left( \frac{2\Delta T}{T_1 - T_2} + \frac{2\Delta t}{t_2 - t_1} + \frac{2\Delta t}{t_3 - t_2} \right) \cdot A .$$

Аналогично определяем погрешность второго слагаемого В:

$$\Delta B = \left( \frac{2\Delta T}{T_2 - T_3} + \frac{2\Delta t}{t_4 - t_3} + \frac{2\Delta t}{t_3 - t_2} \right) \cdot B ,$$

а затем находим погрешность удельной теплоты плавления

$$\Delta \lambda = \Delta A + \Delta B .$$

Определяем относительную погрешность удельной теплоты плавления

$$\varepsilon = \frac{\Delta \lambda}{\lambda} \cdot 100\% .$$

9 Вычислить приращение энтропии по формуле (13).

10 Определить абсолютную погрешность изменения энтропии

$$\Delta(\Delta S) = \left( \frac{\Delta \lambda}{\lambda} + \frac{\Delta T}{T} \right) \cdot \Delta S .$$

11 Сделать выводы по работе и представить окончательный результат в виде:

$$\lambda = \lambda \pm \Delta \lambda \text{ (единицы измерения), } \varepsilon = \dots \%$$

$$\Delta S = \Delta S \pm \Delta(\Delta S) \text{ (единицы измерения), } \varepsilon = \dots \%$$

## 7 КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1 Дайте определение удельной теплоты плавления.

2 Какой вид имеет кривая охлаждения аморфного тела?

3 Как изменится период времени  $t_3 - t_2$  с уменьшением температуры среды, окружающей тигель с оловом?

4 Из чего состоит внутренняя энергия кристаллической решетки?

5 Почему при плавлении кристаллического тела температура остается неизменной?

6 Изобразите графически и объясните механизм плавления и кристаллизации кристаллического тела.

7 Дайте определение переохлажденной жидкости, аморфного тела.

8 Какое количество теплоты выделилось при остывании олова?

9 Что называется энтропией? Каков физический смысл энтропии?

10 Как изменяется энтропия в зависимости от агрегатного состояния веществ: твердое, жидкое, газообразное?

11 Дайте определение обратимых и необратимых процессов.

\* \* \*

---

## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 27

---

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ УДЕЛЬНОЙ ТЕПЛОЕМКОСТИ МЕТАЛЛОВ МЕТОДОМ ОХЛАЖДЕНИЯ

#### **1 ЦЕЛЬ РАБОТЫ**

Экспериментальное определение теплоемкости металлов (Fe и Al), путем сравнения с теплоемкостью эталонного образца (Cu).

#### **2 БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК**

- 1 Савельев И.В. Курс физики. В 3 т. Т.1: Механика. Молекулярная физика / И.В. Савельев. - Лань, 2008. – 352 с.
- 2 Трофимова Т.И. Курс физики: учеб. пособие для вузов / Т.И. Трофимова. - 19-е изд. - Академия, 2012. – 560 с.
- 3 Детлаф А.А., Яворский Б.М. Курс физики.- Академия, 2009. – 720 с.

#### **3 ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ВВЕДЕНИЕ**

Количество тепла, теряемое образцом в единицу времени, равно

$$q = cm \frac{dT}{dt}, \quad (1)$$

где  $c$  - удельная теплоемкость образца;

$m$  - масса образца;

$\frac{dT}{dt}$  - скорость изменения температуры образца.

Это же количество тепла можно подсчитать и по закону Ньютона

$$q = \alpha(T - T_0)S, \quad (2)$$

где  $T$  - температура образца;

$T_0$  - температура окружающей среды;

$S$  - площадь поверхности образца;

$\alpha$  - коэффициент теплоотдачи.

Сравнивая (1) и (2), получим:

$$cm \frac{dT}{dt} = \alpha(T - T_0)S \text{ - для эталонного образца (Cu);}$$

$$c_x m_x \left( \frac{dT}{dt} \right)_x = \alpha(T - T_0)S \text{ - для исследуемых образцов (Fe, Al).}$$

Если поверхности образцов одинаковы, коэффициенты теплоотдачи их равны и они нагреты до одной температуры, то разделив одно выражение на другое, получим

$$c_x = c \cdot \frac{m}{m_x} \cdot \frac{\frac{dT}{dt}}{\left( \frac{dT}{dt} \right)_x}. \quad (3)$$

## 4 ПРИБОРЫ И ПРИНАДЛЕЖНОСТИ

- 1 Электропечь.
- 2 Образец.
- 3 Термопара.
- 4 Гальванометр.
- 5 Секундомер.

## 5 ОПИСАНИЕ УСТАНОВКИ

Работа выполняется на установке (рисунок 1), состоящей из электропечи – ЭП, термопары – Т, гальванометра – Г, устройства для введения образца в печь – У. Образец (О) представляет собой цилиндр длиной 30 мм и диаметром 5 мм с вы сверленным каналом с одного конца, в который вводится термопара (Т), соединенная с гальванометром (Г), для определения температуры образца.

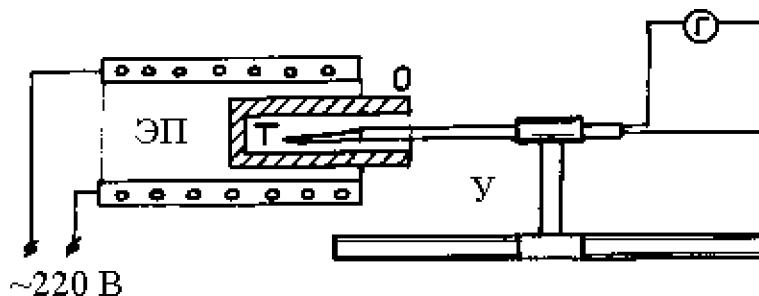


Рисунок 1 – Лабораторная установка

## 6 ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

- 6.1 Определить (взвешиванием) массу образцов.
- 6.2 Укрепив образец на фарфоровой трубке, через которую пропущены проводники термопары, ввести его в печь.
- 6.3 Нагрев образец до температуры 500 °C, быстро выдвинуть его из печи с помощью устройства (У). Нагретый образец охладить вне печи на воздухе до температуры 100 °C.
- 6.4 Через каждые 10 сек произвести запись температуры (Т) образца по показаниям гальванометра (Г). Время отсчитать по секундомеру.
- 6.5 Измерения произвести для 3-х образцов: медного (эталон), железного и алюминиевого и занести в таблицу 1.
- 6.6 Построить кривые зависимости температуры образцов от времени на одном графике.
- 6.7 Считая, что в интервале  $\Delta T = 100$  К изменение температуры происходит по линейному закону, найти скорость охлаждения образцов  $dT/dt \approx \Delta T/\Delta t$  (рисунок 2) для температур 200 °C, 300 °C, 400 °C и занести ее в таблицу 2.

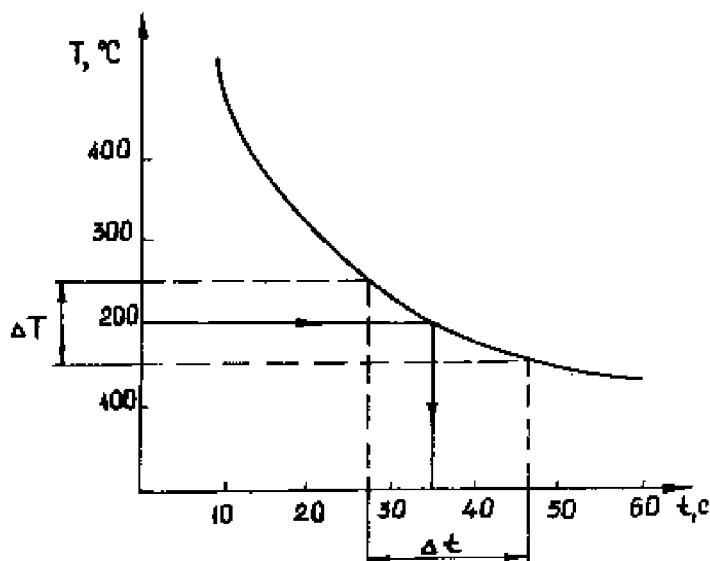


Рисунок 2 – Зависимость температуры образцов от времени

6.8 Определить теплоемкость железа и алюминия для температур 200 °C, 300 °C и 400 °C по формуле (3). Полученные числовые значения занести в таблицу 2.

Таблица 1

$t$ , сек.	$T$ °C <sub>Al</sub>	$T$ °C <sub>Cu</sub>	$T$ °C <sub>Fe</sub>
0	500	500	500
10			
20			
30			
...			
...	до 100	до 100	до 100

Таблица 2

$T$ °C	200	300	400
$\Delta T_i$ °C	100	100	100
$\Delta t_{iCu}$ (с)			
$\left( \frac{\Delta T}{\Delta t} \right)_{Cu}, \left( \frac{^{\circ}C}{c} \right)$			
$C_{Cu}$ , (Дж/кг·К)	0,4085	0,4224	0,4349
$\Delta t_{iFe}$ (с)			
$\left( \frac{\Delta T}{\Delta t} \right)_{Fe}, \left( \frac{^{\circ}C}{c} \right)$			
$C_{Fe}$ , (Дж/кг·К)			
$\Delta t_{iAl}$ (с)			
$\left( \frac{\Delta T}{\Delta t} \right)_{Al}, \left( \frac{^{\circ}C}{c} \right)$			
$C_{Al}$ ,			

6.9 Представить окончательный результат в виде графиков зависимости удельной теплоемкости исследуемых тел от температуры.

6.10 В выводе дать анализ полученных результатов с учетом закона Дюлонга и Пти.

## 7 КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1 Что называется теплоемкостью тела, удельной и молярной теплоемкостью? Какова размерность этих величин в системе СИ? Как они взаимосвязаны между собой?

2 В чем заключается метод определения теплоемкости при охлаждении металлов?

3 Выведите расчетную формулу (3).

4 Сформулируйте закон Дюлонга и Пти.

\* \* \*

---

**ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 1 В**


---

## ИЗУЧЕНИЕ ДИНАМИКИ ДВИЖЕНИЯ ТЕЛ С ПЕРЕМЕННОЙ МАССОЙ

### 1. ЦЕЛЬ РАБОТЫ

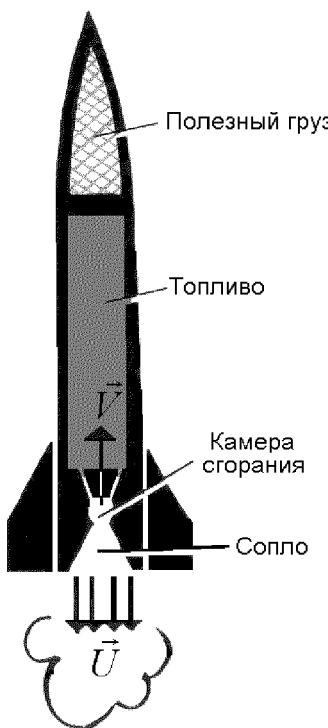
1. Изучить динамику движения тел с переменной массой.
2. Определить запас топлива в ракете для достижения первой и второй космических скоростей.
3. Изучить некоторые кинематические характеристики движения ракет.

### 2. БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Трофимова Т.И. Курс физики: учеб. пособие для вузов / Т.И. Трофимова. - 2-е изд. - М. : Высш. шк., 1990. - 478 с.
2. Савельев И.В. Курс общей физики: учеб. пособие для студентов втузов. В 3 т. Т.1: Механика. Молекулярная физика / И.В. Савельев. - М.: Наука, 1989. – 350 с.
3. Детлаф А.А. Курс физики: учеб. пособие для втузов / А.А. Детлаф, Б.М. Яворский. - М.: Высш. шк., 1989. - 608 с.

### 3. ОПИСАНИЕ УСТАНОВКИ И МЕТОДИКА ПРОВЕДЕНИЯ ЭКСПЕРИМЕНТА

#### 3.1 ДВИЖЕНИЕ РАКЕТЫ С ПЕРЕМЕННОЙ МАССОЙ



Рассмотрим движение ракеты, рисунок 1.

Пусть к некоторому моменту времени  $t$  масса ракеты с топливом равна  $m$ , скорость её движения относительно Земли  $V$ , скорость вылета продуктов сгорания топлива относительно ракеты  $U$ . Тогда импульс ракеты в данный момент времени равен  $\bar{P} = m\vec{V}$ . К моменту времени  $t + dt$  в процессе сгорания топлива массой  $dm$  скорость ракеты увеличилась и стала равной  $V + dV$ , а масса ракеты уменьшилась на  $dm$  и стала равной  $m - dm$ .

Импульс ракеты и топлива к данному моменту времени может быть определен по формулам  $\bar{P}_1 = (m - dm)(\vec{V} + d\vec{V})$ ,  $\bar{P}_2 = dm(\vec{V} + \vec{U})$ . При этом абсолютная скорость движения топлива, т.е. скорость вылета продуктов сгорания топлива из ракеты относительно Земли  $(\vec{V} + \vec{U})$ .

Рисунок 1 - Схема ракеты

Изменение импульса за промежуток времени  $dt$  равно

$$d\bar{P} = (m - dm)(\vec{V} + d\vec{V}) + dm(\vec{V} + \vec{U}) - m\vec{V} = md\vec{V} + \vec{U}dm. \quad (1)$$

(величиной второго порядка малости  $dmdV$  пренебрегаем).

По второму закону динамики действующая сила равна скорости изменения импульса

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt}. \quad (2)$$

Подставляя (2) в (1), получим

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} = m \frac{d\vec{V}}{dt} + \vec{U} \frac{dm}{dt}. \quad (3)$$

Для изолированной системы внешняя сила равна нулю, поэтому уравнение (3) будет иметь следующий вид:

$$m d\vec{V} + \vec{U} dm = 0. \quad (4)$$

Решим полученное дифференциальное уравнение методом разделения переменных.

$$d\vec{V} = -\vec{U} \frac{dm}{m}. \quad (5)$$

Проинтегрируем соотношение (5).

$$\int_0^V d\vec{V} = \int_{M_0}^M -\vec{U} \frac{dm}{m}, \quad (6)$$

где  $M_0$  - начальная масса полностью снаряженной топливом ракеты (масса ракеты вместе с топливом);  $M_0 = M_T + M_{\text{п.}}$  (где  $M_{\text{п.}}$  - полезная масса ракеты, масса ракеты без топлива),  $M$  - текущая (в данный момент времени) масса ракеты с оставшейся массой топлива.

Учитывая, что  $dM$  - величина отрицательная, численное значение скорости движения ракеты определится после интегрирования (6).

$$V = U \ln \frac{M_0}{M}. \quad (7)$$

Полученное уравнение (6) называется уравнением Циолковского.

Масса топлива сгоревшего при движении ракеты может быть определена по формуле

$$M_T = M_0 - M. \quad (8)$$

Из данных компьютерного эксперимента, можно построить зависимость  $M = m(t)$  (рисунок 2).

Скорость расхода (сгорания) топлива  $U_{\text{топ.}}$ :

$$U_{\text{топ.}} = \frac{\Delta m}{\Delta t}. \quad (9)$$

Следовательно, по тангенсу угла наклона зависимости  $M = m(t)$ , (участок графика до  $t_C$ , где  $t_C$  – время сгорания топлива) можно определить скорость сгорания топлива.

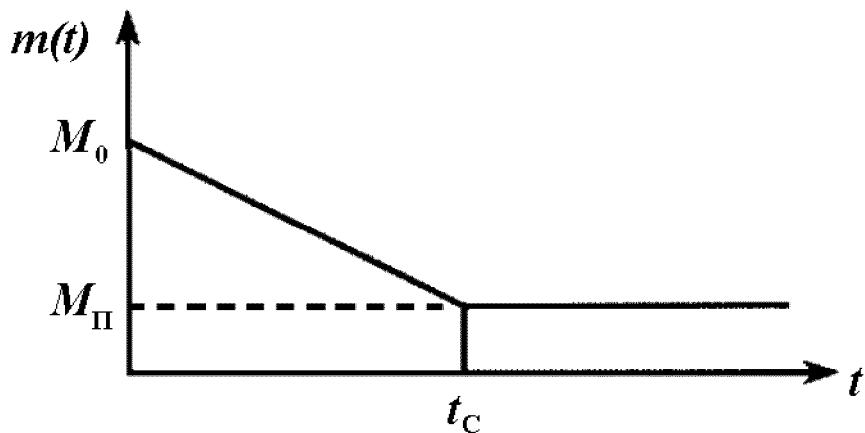


Рисунок 2 - Зависимость массы ракеты от времени

Если скорость движения ракеты относительно Земли достигнет значения примерно 7,9 км/с, то ракета будет двигаться по круговой орбите. Эта скорость называется первой космической. Если скорость ракеты будет равна или больше 11,2 км/с, то ракета может преодолеть гравитационное притяжение Земли и стать спутником Солнца (вторая космическая скорость). В том случае, когда скорость ракеты достигнет 16,7 км/с (третья космическая скорость), ракета, преодолевая притяжение Солнца, покинет Солнечную систему.

Путь \$S\$, который проходит ракета можно определить по формуле

$$S = \int_0^t V(t) dt. \quad (10)$$

### 3.2 КОМПЬЮТЕРНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Компьютерный эксперимент позволяет изменять количество топлива, помещенного в ракету, определять максимальную скорость ракеты. Компьютерная программа предусматривает графический вывод на монитор зависимости скорости движения ракеты от времени \$V=f(t)\$, а также значение максимальной скорости ракеты. Кроме этого в пошаговом режиме на экран выводится информация о массе ракеты в данный момент времени.

### 4. ПРИБОРЫ И ПРИНАДЛЕЖНОСТИ

1. Компьютер.
2. Программа «Открытая физика 1.1» ООО «Физикон».

### 5. ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ. ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

1. Установите программу «Открытая физика 1.1» на компьютер.
2. Запустите установленную программу, в разделе – «Содержание», откройте вкладку «Механика», выберите компьютерную модель – «Реактивное движение», рисунок 3.
3. Включите непрерывный режим компьютерного эксперимента. Нажмите «Старт» и «Выбор». Установите начальную массу (\$M\_0 = 10\$ т) ракеты вместе с топливом в соответствии с таблицей 1 для первого эксперимента.

4. Проведите первый эксперимент. Нажмите «Старт» и на экране монитора наблюдайте движение ракеты в пространстве. Проанализируйте построенный график зависимости скорости движения ракеты от времени. Определите из графика максимальную скорость ракеты при полном сгорании топлива, когда ракета движется равномерно, без ускорения. Результаты измерения запишите в таблицу 1.

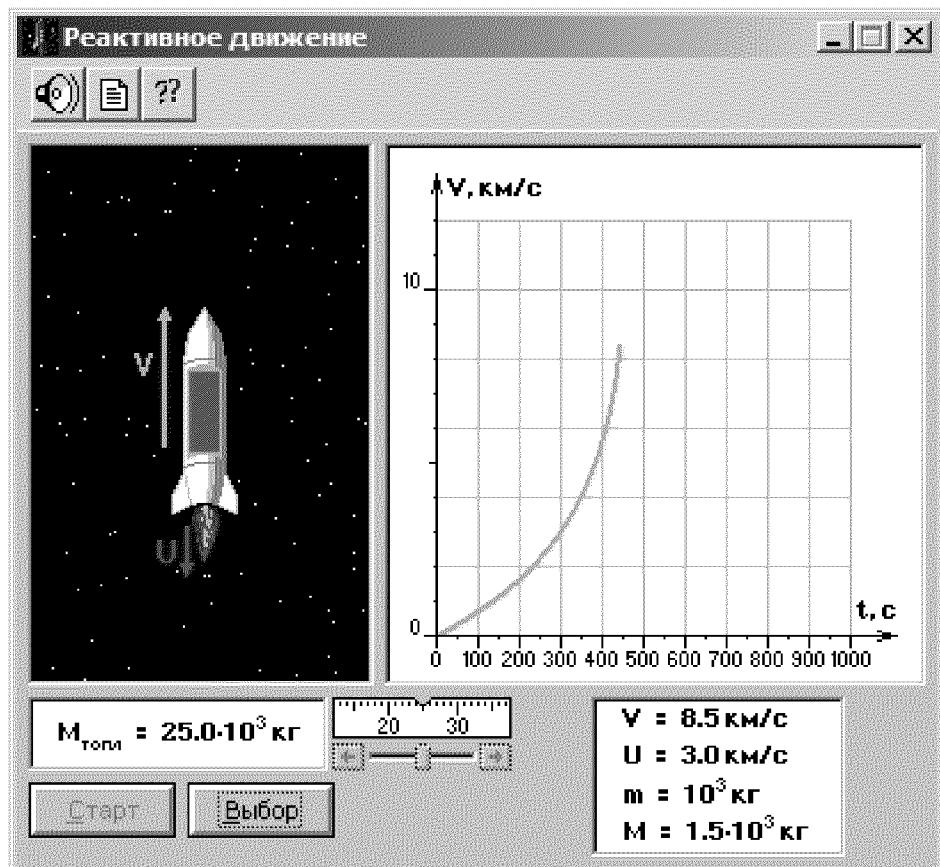


Рисунок 3 - Модель «Реактивное движение»

Таблица 1 - Результаты измерений

Номер эксперимента	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Первоначальная масса ракеты и топлива, $M_0$ , т	10	15	20	25	30	35	40	45	50
Максимальная скорость движения ракеты, $V_{\max}$ , м/с									

5. Повторите модельный эксперимент по пунктам 3 и 4 для всех девяти опытов. Результаты измерений запишите в таблицу 1.

6. Для начальной массы ракеты с топливом (по указанию преподавателя) через каждые 100 секунд зафиксируйте скорость ракеты и ее массу вместе с топливом. Для этого, после установления заданной массы топлива, нужно воспользоваться пошаговым режимом работы программы.

На панели инструментов нажмите кнопку – «Остановить все» – , далее нажмите – «Старт» – , после чего, нажимая необходимое число

раз, на кнопку – «Выполнять по шагам» – проведите эксперимент. Результаты измерения запишите в таблицу 2.

7. По данным таблицы 1, постройте график зависимости  $V_{\max}$  от  $M_0$ . По графику определите необходимый запас топлива для достижения первой и второй космических скоростей.

8. По данным таблицы 2 постройте графики зависимости скорости  $V(t)$  и массы ракеты  $M = m(t)$  от времени.

9. По графику  $M = m(t)$  определите скорость расхода топлива  $U_{\text{топ}}$ .

10. По данным таблицы 2 рассчитайте значения  $\ln M_0/M$ , и постройте график зависимости  $V(t)$  от  $\ln M_0/M$ . По графику определите скорость истечения газов  $U$ .

Тангенс угла наклона зависимости характеризует скорость истечения газов:

$$U = \Delta V(t) / \Delta \ln \frac{m_0}{m(t)}.$$

Таблица 2 - Результаты измерений

Номер опыта	$M_{\Pi}$ , кг	$M_T$ , кг	$M_0$ , кг	$t$ , с	$V(t)$ , м/с	$M$ , кг	$\ln M_0/M$
1	1000			0			
2				100			
3				200			
4				300			
5				400			
6				500			
7				600			
8				700			
9				800			
10				900			
11				1000			

## 6. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

- Получите формулу Циолковского.
- Сформулируйте закон сохранения импульса.
- Рассчитайте первую и вторую космические скорости.
- Объясните предназначение и особенности движения многоступенчатых ракет.

**ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 2 В****ИЗУЧЕНИЕ ЗАКОНОВ РЕАЛЬНОГО ГАЗА****1. ЦЕЛЬ РАБОТЫ**

1. Изучить поведение реального газа. Исследовать уравнение состояния реального газа.
2. Изучить изотермы Ван-дер-Ваальса и проанализировать условия получения критического состояния.
3. По экспериментальным данным определить критические параметры исследуемого газа и рассчитать постоянные  $a$  и  $b$  уравнения Ван-дер-Ваальса.
4. Определить, какой газ применялся в эксперименте, и найти его массу.

**2. БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК**

1. Трофимова Т.И. Курс физики: учеб. пособие для вузов / Т.И. Трофимова. - 2-е изд. - М. : Высш. шк., 1990. - 478 с.
2. Савельев И.В. Курс общей физики: учеб. пособие для студентов втузов. В 3 т. Т.1: Механика. Молекулярная физика / И.В. Савельев. - М.: Наука, 1989. – 350 с.
3. Детлаф А.А. Курс физики: учеб. пособие для втузов / А.А. Детлаф, Б.М. Яворский. - М.: Высш. шк., 1989. - 608 с.

**3. ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ВВЕДЕНИЕ****3.1 Изотермы Ван-дер-Ваальса. Связь критических параметров с постоянными в уравнении Ван-дер-Ваальса**

Законы идеального газа являются приближенными, а отступления от этих законов обусловлены существенным отличием свойств идеального и реального газов. В отличие от идеального газа между молекулами реального газа существуют силы взаимодействия, которые на малых расстояниях между молекулами носят характер отталкивания, а на достаточно больших расстояниях между молекулами действуют силы притяжения. Кроме этого, молекулы реального газа не могут быть представлены как материальные точки. Молекулы реального газа имеют отличный от нуля собственный объем. Учет собственного объема и сил взаимодействия позволил получить уравнение состояния для реального газа.

$$\left( p + \nu^2 \frac{a}{V^2} \right) (V - \nu \cdot b) = \nu R T, \quad (1)$$

где  $a$  и  $b$  - поправки на внутреннее давление и собственный объем молекул реального газа,  $\nu$  - число молей.

Теоретически полученное уравнение (1) называется уравнением Ван-дер-Ваальса.

Рассмотрим экспериментальные изотермы жидкости, пара и перехода жидкость – пар. На рисунке 1 показан теоретический график зависимости давления от объема для реального газа, который строится на основе анализа уравнения Ван-дер-Ваальса при помощи компьютерной модели.

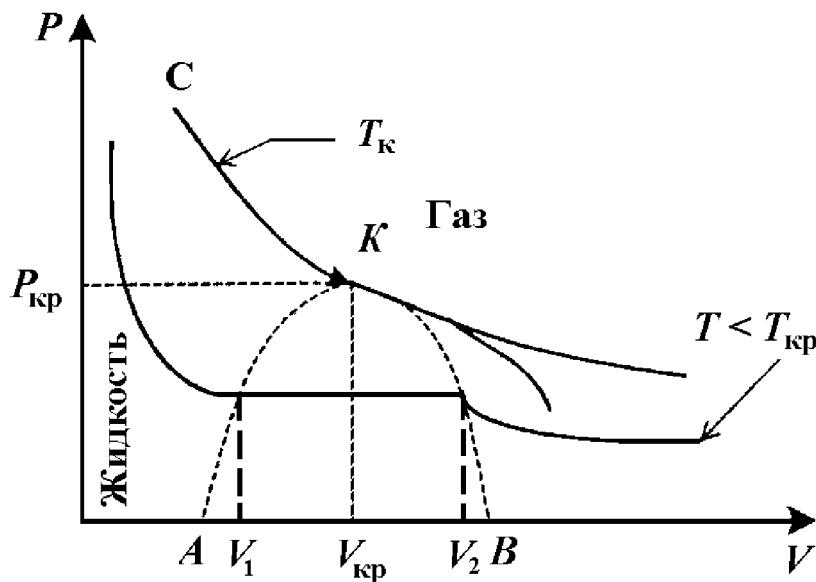


Рисунок 1 - Изотермы реального газа

Кривая АК соответствует точкам начала кипения, кривая КВ – точкам конца кипения. Линия АКВ, которая отделяет зоны сосуществования пара и жидкости, называется бинодалью. Точки под бинодалью соответствуют равновесию жидкости и пара. В области АКВА пар является насыщенным. Равновесные участки изотерм в этой области являются изобарами. Видно также, что с ростом температуры точки начала и конца кипения сближаются и в точке К они совпадают. В этой точке исчезает различие между жидкостью и паром. В точке К резко возрастает коэффициент поглощения света. Этот процесс получил название критической опалесценции. Состояние термодинамической системы в точке К называется критическим. Критическому состоянию соответствует критическое давление  $p_{kp}$ , критическая температура  $T_{kp}$  и критический объем  $V_{kp}$ . При этом критическая изотерма в точке К имеет перегиб.

Между поправками уравнения Ван-дер-Ваальса  $a$  и  $b$ , критическим давлением  $p_{kp}$ , критической температурой  $T_{kp}$  и критическим молярным объемом  $V_{kp0}$  в критическом состоянии существует следующая связь:

$$V_{kp0} = 3b, \quad p_{kp} = \frac{a}{27b^2}, \quad T_{kp} = \frac{8a}{27bR}. \quad (2)$$

Действительно, в точке перегиба К критической изотермы первая и вторая производные от давления по объему равны нулю, т.е.

$$\left( \frac{dp}{dV} \right)_{kp} = 0 \text{ и } \left( \frac{d^2p}{dV^2} \right)_{kp} = 0. \quad (3)$$

Для доказательства соотношений 2 проанализируем уравнение Ван-дер-Ваальса для одного моля газа.

$$\left( p + \frac{a}{V^2} \right) (V - b) = RT. \quad (4)$$

Из уравнения (4) определим давление.

$$p = \frac{RT}{V - b} - \frac{a}{V^2}. \quad (5)$$

Далее найдем первую и вторую производные от давления по объему и приравняем полученные значения для критического состояния к нулю.

$$\left( \frac{dp}{dV} \right)_{KP} = -\frac{RT_{KP}}{(V_{KP0} - b)^2} + \frac{2a}{V_{KP0}^3} = 0. \quad (6)$$

$$\left( \frac{d^2 p}{dV^2} \right)_{KP} = \frac{2RT_{KP}}{(V_{KP0} - b)^3} - \frac{6a}{V_{KP0}^4} = 0. \quad (7)$$

Из уравнений (6) и (7) получим:

$$\frac{RT_{KP}}{(V_{KP} - b)^2} = \frac{2a}{V_{KP0}^3}. \quad (8)$$

$$\frac{RT_{KP}}{(V_{KP} - b)^3} = \frac{3a}{V_{KP0}^4}. \quad (9)$$

Разделив почленно соотношения (8) на (9), найдем критический объем:

$$V_{KP0} - b = \frac{2}{3}V_{KP0}.$$

Отсюда

$$V_{KP0} = 3b. \quad (10)$$

Подставляя уравнение (10) в соотношение (8), определим критическую температуру:

$$T_{kp} = \frac{8a}{27bR}. \quad (11)$$

И, наконец, подставляя соотношения (10) и (11) в уравнение (5) для критического состояния, найдем критическое давление:

$$p_{kp} = \frac{a}{27b^2}. \quad (12)$$

### 3.2 Свойства критических параметров реального газа

Почленно перемножим уравнения (10) и (12). Тогда получим:

$$p_{kp}V_{KP0} = \frac{a}{27b^2}3b = \frac{3a}{27b}. \quad (13)$$

Разделив соотношение (13) на (11), установим связь между критическими параметрами реального газа.

$$\frac{p_{kp}V_{KP0}}{T_{kp}} = \frac{3a}{27b} \cdot \frac{27}{8} \cdot \frac{bR}{a} = \frac{3}{8}R.$$

Отсюда,

$$p_{kp}V_{KP0} = \frac{3}{8}RT_{kp}, \quad (14)$$

где  $V_{KP0}$  - критический объем одного моля исследуемого газа.

Определим из уравнения (14) критический объем одного моля газа.

$$V_{kp0} = \frac{3RT_{kp}}{8p_{kp}}. \quad (15)$$

#### 4. ПРИБОРЫ И ПРИНАДЛЕЖНОСТИ

1. ЭВМ типа Pentium, Windows 95/98/2000/XP.
2. CD-ROM «Открытая физика», версия 1.1 или 2.5, под редакцией профессора МФТИ С.М. Козела.

#### 5. ОПИСАНИЕ ЛАБОРАТОРНОЙ УСТАНОВКИ И ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

1. Установите на компьютер CD «Открытая физика» и в разделе «Термодинамика и молекулярная физика» рассмотрите модель «Изотермы реального газа». На экране монитора ЭВМ появится панель «Изотермы реального газа», изображенная на рисунке 2.

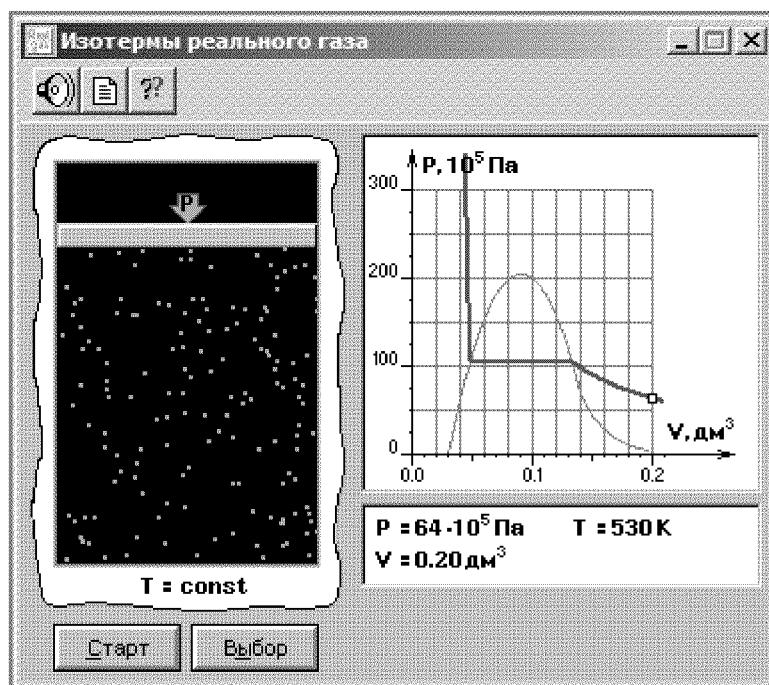


Рисунок 2 - Модель «Изотермы реального газа»

2. Визуально ознакомьтесь с особенностями изотерм реального газа. Для этого включите клавишу «Выбор», установите температуру термодинамической системы меньшую критической  $T_2 < T_{kp}$  и включите клавишу «Старт». При этом наблюдается вначале уменьшение, а затем увеличение объема термодинамической системы, указательная точка будет двигаться по изотерме. В нижней части панели указывается объем, давление и температура изотермического процесса указанного компьютерного эксперимента. Снимите 7-10 точек этой изотермы и результаты эксперимента занесите в таблицу 1.
3. Повторите пункт 2 для температуры большей и равной критической  $T_1 > T_{kp}$ ,  $T_1 = T_{kp}$ . Результаты эксперимента занесите в таблицу 1.
4. Определите параметры критического состояния  $p_{kp}$ ,  $T_{kp}$ ,  $V_{kp}$ . Критические параметры запишите в таблицу 3.

Таблица 1

T=T <sub>кр</sub>									
<i>p</i>									
<i>V</i>									
<i>T</i> <sub>1</sub> > <i>T</i> <sub>кр</sub>									
<i>p</i>									
<i>V</i>									
<i>T</i> <sub>2</sub> < <i>T</i> <sub>кр</sub>									
<i>p</i>									
<i>V</i>									

## 6. ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

- Постройте в координатах  $p(V)$  по данным таблицы 1 изотермы газа.
- Рассчитайте по формуле (15) критический объем одного моля газа.
- Рассчитайте по формуле (10) параметр  $b$  уравнения Ван-дер-Ваальса.
- Рассчитайте по формулам (11) или (12) параметр  $a$  уравнения Ван-дер-Ваальса.
- Определите вид газа по таблице 2 и найдите его молярную массу.

Таблица 2

Вещество	H <sub>2</sub>	N <sub>2</sub>	Ar	O <sub>2</sub>	CO <sub>2</sub>	Пары H <sub>2</sub> 0
<i>a</i> , Па·м <sup>3</sup> /моль	0,024	0,136	0,136	0,136	0,364	0,556
<i>b</i> , 10 <sup>-5</sup> м <sup>3</sup> /моль	2,63	3,85	3,22	3,16	4,26	3,06

- Рассчитайте число молей газа по формуле

$$\nu = \frac{V_{KP}}{V_{KP0}}. \quad (16)$$

- Рассчитайте массу газа по формуле.

$$m = \nu M. \quad (17)$$

- Результаты расчетов запишите в таблицу 3.

Таблица 3

Параметры	Значения	Параметры	Значения	Параметры	Значения
1	2	3	4	5	6
<i>p<sub>KP</sub></i>		<i>V<sub>KP0</sub></i>		<i>M</i> , кг/моль	
<i>T<sub>KP</sub></i>		<i>b</i> , 10 <sup>-5</sup> м <sup>3</sup> /моль		<i>v</i> , моль <sup>-1</sup>	
<i>V<sub>KP</sub></i>		<i>a</i> , Па·м <sup>3</sup> /моль		<i>m</i> , кг	
Вещество					

## 7. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ.

- Поясните уравнения Ван-дер-Ваальса.
- Поясните, какие физические процессы определяют поправки на внутреннее давление и собственный объем молекул реального газа  $a$  и  $b$ .
- Установите связь между критическими параметрами и постоянными урав-

нения Ван-дер-Ваальса.

4. Объясните свойства газа в критическом состоянии. Поясните сущность явления критической опалесценции.

5. Решите задачу (№ 2.212. Иродов И.Е. Задачи по общей физике, 1988 г.). Вычислить постоянные Ван-дер-Ваальса для углекислого газа, если его критическая температура  $T_{KP} = 304$  К и критическое давление  $p_{KP} = 73$  атм.

6. Решите задачу (№ 2.213. Иродов И.Е. Задачи по общей физике, 1988 г.). Найти удельный объем бензола ( $C_6H_6$ ) в критическом состоянии, если его критическая температура  $T_{KP} = 562$  К и критическое давление  $p_{KP} = 73$  атм.

**ПРИЛОЖЕНИЕ А**  
**КОЭФФИЦИЕНТЫ СТЪЮДЕНТА**

<b><i>n</i></b>	<b>0,90</b>	<b>0,95</b>	<b>0,98</b>	<b>0,99</b>	<b>0,999</b>
<b>2</b>	6,31	12,7	31,8	63,7	636,6
<b>3</b>	2,92	4,30	6,96	9,92	31,6
<b>4</b>	2,35	3,18	4,54	5,84	12,9
<b>5</b>	2,13	2,78	3,75	4,60	8,61
<b>6</b>	2,02	2,57	3,36	4,03	6,87
<b>7</b>	1,94	2,45	3,14	3,71	5,96
<b>8</b>	1,89	2,36	3,00	3,50	5,41
<b>9</b>	1,86	2,31	2,90	3,36	5,04
<b>10</b>	1,83	2,26	2,82	3,25	4,78
<b>11</b>	1,81	2,23	2,76	3,17	4,59
<b>12</b>	1,80	2,20	2,72	3,11	4,44
<b>13</b>	1,78	2,18	2,68	3,05	4,32
<b>14</b>	1,77	2,16	2,65	3,01	4,22
<b>15</b>	1,76	2,14	2,62	2,98	4,14
<b>16</b>	1,75	2,13	2,60	2,95	4,07
<b>17</b>	1,75	2,12	2,58	2,92	4,02
<b>18</b>	1,74	2,11	2,57	2,90	3,97
<b>19</b>	1,73	2,10	2,55	2,88	3,92
<b>20</b>	1,73	2,09	2,54	2,86	3,88
<b>21</b>	1,72	2,09	2,53	2,85	3,85
<b>22</b>	1,72	2,08	2,52	2,83	3,82
<b>23</b>	1,72	2,07	2,51	2,82	3,79
<b>24</b>	1,71	2,07	2,50	2,81	3,77
<b>25</b>	1,71	2,06	2,49	2,80	3,75
<b>26</b>	1,71	2,06	2,49	2,79	3,73
<b>27</b>	1,71	2,06	2,48	2,78	3,71
<b>28</b>	1,70	2,05	2,47	2,77	3,69
<b>29</b>	1,70	2,05	2,47	2,76	3,67
<b>31</b>	1,70	2,05	2,46	2,76	3,66
<b>33</b>	1,70	2,04	2,46	2,75	3,65
<b>35</b>	1,69	2,04	2,45	2,74	3,62
<b>37</b>	1,69	2,03	2,44	2,73	3,60
<b>39</b>	1,69	2,03	2,43	2,72	3,58
<b>41</b>	1,69	2,02	2,43	2,71	3,57
<b>43</b>	1,68	2,02	2,42	2,70	3,55
<b>45</b>	1,68	2,02	2,42	2,70	3,54
<b>50</b>	1,68	2,01	2,40	2,68	3,50
<b>100</b>	1,66	1,98	2,36	2,63	3,39
<b><math>\infty</math></b>	1,60	1,96	2,30	2,60	3,30

---

## ПРИЛОЖЕНИЕ Б

---

### Вычисление погрешностей некоторых функций

№	Вид функции	Погрешность	
		Абсолютная	Относительная
		1	2
1	$N = A + B + C$	$\pm (\Delta A + \Delta B + \Delta C)$	$\pm \frac{\Delta A + \Delta B + \Delta C}{A + B + C}$
2	$N = A \cdot B$	$\pm (A \cdot \Delta B + B \cdot \Delta A)$	$\pm \left( \frac{\Delta A}{A} + \frac{\Delta B}{B} \right)$
3	$N = A^n$	$\pm n A^{n-1} \cdot \Delta A$	$\pm n \cdot \frac{\Delta A}{A}$
4	$N = \sqrt{A}$	$\pm \frac{1}{2\sqrt{A}} \cdot \Delta A$	$\pm \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta A}{A}$
5	$N = \frac{A}{B}$	$\pm \frac{B \cdot \Delta A + A \cdot \Delta B}{B^2}$	$\pm \left( \frac{\Delta A}{A} + \frac{\Delta B}{B} \right)$
6	$N = \sin A$	$\pm \cos A \cdot \Delta A$	$\pm \operatorname{ctg} A \cdot \Delta A$
7	$N = \cos A$	$\pm \sin A \cdot \Delta A$	$\pm \operatorname{tg} A \cdot \Delta A$
8	$N = \operatorname{tg} A$	$\pm \frac{\Delta A}{\cos^2 A}$	$\pm \frac{2\Delta A}{\sin 2A}$
9	$N = \operatorname{ctg} A$	$\pm \frac{\Delta A}{\sin^2 A}$	$\pm \frac{2\Delta A}{\sin 2A}$

## ПРИЛОЖЕНИЕ В

### ФИЗИЧЕСКИЕ ПОСТОЯННЫЕ

Постоянная Авогадро  $N_A = 6,022045 \cdot 10^{23}$  моль<sup>-1</sup>.

Постоянная Больцмана  $k = 1,3807 \cdot 10^{-23}$  Дж/К.

Универсальная газовая постоянная  $R = 8,31441$  Дж/(моль·К).

Элементарный электрический заряд  $e = 1,6021892 \cdot 10^{-19}$  Кл.

Электрическая постоянная  $\epsilon_0 = 8,85418782 \cdot 10^{-12}$  Ф/м.

Скорость света в вакууме  $c = 299\ 792\ 458$  м/с.

Постоянная Планка  $h = 6,626176 \cdot 10^{-34}$  Дж·с =  $4,136 \cdot 10^{-15}$  эВ·с.

Магнитная постоянная  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Гн/м.

Постоянная Стефана-Больцмана  $\sigma = 5,67032 \cdot 10^{-8}$  Вт/(м<sup>2</sup>·К<sup>4</sup>).

Нормальное ускорение свободного падения  $g = 9,81$  м/с<sup>2</sup>.

Гравитационная постоянная  $\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11}$  м<sup>3</sup>/(кг·с<sup>2</sup>).

Скорость звука в воздухе при нормальных условиях  $V = 331,6$  м/с.

### Тепловые свойства веществ

#### Твердые тела

Вещество	Удельная теплоемкость, кДж/(кг·К)	Температура плавления, °C	Удельная теплота плавления, кДж/кг
Алюминий	0,88	660	380
Вольфрам	0,13	3387	185
Железо	0,46	1535	270
Лед	2,1	0	330
Медь	0,38	1083	180
Свинец	0,13	327	25
Сталь	0,46	1400	82

#### Жидкости

Вещество	Удельная теплоемкость, кДж/(кг·К)	Температура кипения, °C	Удельная теплота парообразования, МДж/кг
Вода	4,2	100	2,3
Спирт	2,4	78	0,85

#### Газы (при постоянном давлении)

Вещество	Удельная теплоемкость, кДж/(кг·К)
Водород	14,3
Воздух	1,01
Кислород	0,91

Плотность ρ металлов (при  $t = 20^{\circ}\text{C}$ )

Металл	$\rho, \text{ кг}/\text{м}^3$	Металл	$\rho, \text{ кг}/\text{м}^3$	Металл	$\rho, \text{ кг}/\text{м}^3$
Алюминий	2698,9	Кобальт	8900	Плутоний	19860
Бериллий	1847,7	Литий	534	Ртуть	13546,2
Бор	2340	Магний	1738	Свинец	11350
Ванадий	6110	Марганец	7440	Серебро	10500
Висмут	9800	Медь	8900	Тантал	16600
Вольфрам	19350	Молибден	10200	Титан	4500
Германий	5323	Натрий	968,4	Торий	11720
Железо	7874	Никель	8900	Уран	18950
Золото	19320	Ниобий	8570	Хром	7190
Индий	7310	Олово	7298	Цезий	1870
Иридий	22400	Осмий	22570	Цинк	7140
Калий	862	Платина	21450	Цирконий	6510

Давление и плотность насыщающего водяного пара при различных температурах (давление в мм. рт. ст., плотность в  $\text{г}/\text{см}^3$ )

$T, ^\circ\text{C}$	P	$\rho$	$T, ^\circ\text{C}$	P	$\rho$	$T, ^\circ\text{C}$	P	$\rho$
- 18	0,94	1,05	+ 9	8,61	8,8	+ 36	44,56	41,8
- 17	1,03	1,15	+ 10	9,21	9,4	+ 37	47,07	44,0
- 16	1,13	1,27	+ 11	9,84	10,0	+ 38	49,69	46,3
- 15	1,24	1,38	+ 12	10,52	10,7	+ 39	52,44	48,7
- 14	1,36	1,51	+ 13	11,23	11,4	+ 40	55,32	51,2
- 13	1,49	1,65	+ 14	11,99	12,1	+ 45	71,88	65,4
- 12	1,63	1,80	+ 15	12,79	12,8	+ 50	92,50	83,
- 11	1,78	1,96	+ 16	13,63	13,6	+ 55	118,0	104,3
- 10	1,95	2,14	+ 17	14,53	14,5	+ 60	149,4	130
- 9	2,13	2,33	+ 18	15,48	15,4	+ 65	187,5	161
- 8	2,32	2,54	+ 19	16,48	16,3	+ 70	233,7	198
- 7	2,53	2,76	+ 20	17,54	17,3	+ 75	289,1	242
- 6	2,76	2,99	+ 21	18,64	18,3	+ 80	355,1	293
- 5	3,01	3,24	+ 22	19,83	19,4	+ 85	433,6	354
- 4	3,28	3,51	+ 23	21,07	20,6	+ 90	525,8	424
- 3	3,57	3,81	+ 23	22,38	21,8	+ 95	633,9	505
- 2	3,88	4,13	+ 25	23,76	23,0	+ 100	760,0	598

**Психрометрическая таблица относительной влажности воздуха**

Показ. влажн. термом., °C	Разность показаний сухого и влажного термометров										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	100	81	64	50	36	26	16	7			
1	100	82	66	52	39	29	19	11			
2	100	83	67	54	42	31	23	14			
3	100	83	69	56	44	34	26	17	10		
4	100	84	70	57	46	36	28	20	14		
5	100	85	71	59	48	39	30	23	17	10	
6	100	85	72	61	50	41	33	26	19	13	
7	100	86	73	62	52	43	35	28	22	15	11
8	100	86	74	63	54	45	37	30	25	18	14
9	100	86	75	65	55	47	39	32	27	21	17
10	100	87	76	66	57	48	41	34	28	23	19
11	100	88	77	67	58	50	43	36	30	25	20
12	100	88	78	68	59	52	44	38	32	27	22
13	100	89	78	69	61	53	46	40	34	29	24
14	100	89	79	70	62	54	47	41	36	31	26
15	100	89	80	71	63	55	49	43	37	33	28
16	100	90	80	72	64	57	50	44	39	34	30
17	100	90	81	73	65	58	52	46	40	36	31
18	100	90	81	74	66	59	53	47	42	37	33
19	100	91	82	74	66	60	54	48	43	39	34
20	100	91	82	75	67	61	55	49	44	40	36
21	100	91	83	75	69	62	56	51	46	41	37
22	100	91	83	76	68	63	57	52	47	42	38
23	100	91	83	76	69	63	58	53	48	43	39
24	100	92	84	77	70	64	59	53	49	44	40
25	100	92	84	77	70	65	59	54	50	45	42

Постоянные газов

Газ (относительная молекулярная масса)	$\gamma = \frac{C_p}{C_V}$	Теплопроводность, $\chi, \frac{mBm}{m \cdot K}$	Вязкость, $\eta, \mu\text{Pa}\cdot\text{s}$	Диаметр молекулы $d, \text{нм}$	Постоянные Ван-дер-Ваальса	
					$a, \frac{\text{Па} \cdot m^6}{\text{моль}^2}$	$b, \times 10^{-6}, \frac{m^3}{\text{моль}}$
He (4)	1,67	141,5	18,9	0,20	-	-
Ar (40)	1,67	16,2	22,1	0,35	0,132	32
H <sub>2</sub> (2)	1,41	168,4	8,4	0,27	0,024	27
N <sub>2</sub> (28)	1,40	24,3	16,7	0,37	0,137	39
O <sub>2</sub> (32)	1,40	24,4	19,2	0,35	0,137	32
CO <sub>2</sub> (44)	1,30	23,2	14,0	0,40	0,367	43
H <sub>2</sub> O (18)	1,32	15,8	9,0	0,30	0,554	30
Воздух (29)	1,40	24,1	17,2	0,35	-	-

*Примечание:* Значения  $\gamma$ ,  $\chi$  и  $\eta$  – при нормальных условиях

Поверхностное натяжение  $\sigma$  воды на границе с воздухом при различной температуре  $t$

$t, ^\circ\text{C}$	$\sigma, \text{мН/м}$	$t, ^\circ\text{C}$	$\sigma, \text{мН/м}$	$t, ^\circ\text{C}$	$\sigma, \text{мН/м}$
0	75,62	15	73,48	24	72,12
5	74,90	16	73,34	25	71,96
6	74,76	17	73,20	30	71,15
8	74,48	18	73,05	40	69,55
10	74,20	19	72,89	50	67,90
11	74,07	20	72,75	60	66,17
12	73,92	21	72,60	70	64,41
13	73,78	22	72,44	80	62,60
14	73,64	23	72,28	90	60,74
				100	58,84

Динамическая вязкость  $\mu$  и текучесть  $\sigma$  воды при различной температуре  $t$ 

$t, ^\circ\text{C}$	$\mu, \text{мкПа}\cdot\text{с}$	$\sigma, \text{Па}^{-1}\cdot\text{с}^{-1}$	$t, ^\circ\text{C}$	$\mu, \text{мкПа}\cdot\text{с}$	$\sigma, \text{Па}^{-1}\cdot\text{с}^{-1}$
0	1788,0	559,2	50	549,4	1820,0
5	1518,8	658,4	60	468,8	3133,3
10	1307,7	764,4	70	406,1	2462,6
15	1140,4	876,9	80	356,5	2805,3
18	1055,9	947,1	90	316,5	3159,2
19	1029,9	971,0	100	283,8	3523,0
20	1004,0	996,0	150	186,3	5367,7
21	981,0	1019,4	200	136,3	7336,7
22	957,9	1044,0	250	109,8	9107,5
23	935,8	1068,6	300	91,2	10964,9
24	914,2	1093,8	350	72,6	13774,1
25	893,7	1119,1	370	57	17544
30	800,7	1248,9	374,15	4	$2,50\cdot 10^5$
40	656,0	1524,5			

Скорость звука в воздухе при различной температуре  $t$ 

$t, ^\circ\text{C}$	с		$t, ^\circ\text{C}$	с	
	м/с	км/ч		м/с	км/ч
-100	263,7	949,2	60	365,8	1316,9
-90	271,2	976,2	70	371,2	1336,5
-80	278,5	1002,5	80	376,6	1355,8
-70	285,6	1028,2	90	381,9	1374,9
-60	292,6	1053,2	100	387,1	1393,7
-50	299,3	1077,6	150	412,3	1484,2
-40	306,0	1101,5	200	436,0	1569,5
-30	312,5	1124,9	250	458,4	1650,3
-20	318,8	1147,8	300	479,8	1727,4
-10	325,1	1170,3	400	520,0	1872,1
0	331,5	1193,4	500	557,3	2006,4
10	337,3	1214,1	600	592,3	2132,2
20	343,1	1235,2	700	625,3	2251,0
30	348,9	1256,2	800	656,6	2363,9
40	354,6	1276,7	900	686,5	2471,6
50	360,3	1296,9	1000	715,2	2574,8

### Скорости движения молекул газов

В таблице приведены значения наиболее вероятной  $V_e$ , средней арифметической  $V_{cp}$  и средней квадратичной  $V_{\kappa e}$  скоростей движения молекул различных газов при нормальных условиях. Приведены также значения  $V_{cp}$  при нормальном давлении, но для различных температур

Газ	$V_e$ , м/с	$V_{cp}$ , м/с, при температуре				$V_{\kappa e}$ , м/с
		0 °C	15 °C	20 °C	25 °C	
Азот	398	454	467	471	474	492
Аммиак	517	583	597	604	609	632
Аргон	338	381	391	395	398	414
Водород	1487	1693	1740	1755	1770	1838
Водяной пар	502	566	582	587	592	613
Воздух	394	447	459	463	477	485
Гелий	1064	1201	1230	1252	1256	1310
Кислород	377	425	437	440	444	461
Криптон	233	263	271	272	275	285
Ксенон	195	210	216	218	219	228
Метан	536	601	613	619	627	651
Неон	474	535	550	557	559	580
Оксид углерода (II)	402	454	463	471	475	492
Оксид углерода (IV)	318	362	372	376	379	392
Пары ртути	151	170	174	176	177	184

### Средняя длина свободного пробега молекул воздуха

$h$ , м	$l$ , м	$h$ , м	$l$ , м
0	$6,633 \cdot 10^{-8}$	4000	$9,917 \cdot 10^{-8}$
50	$6,665 \cdot 10^{-8}$	5000	$1,103 \cdot 10^{-7}$
100	$6,697 \cdot 10^{-8}$	10000	$1,965 \cdot 10^{-7}$
200	$6,762 \cdot 10^{-8}$	20000	$9,139 \cdot 10^{-7}$
300	$6,827 \cdot 10^{-8}$	30000	$4,413 \cdot 10^{-6}$
400	$6,894 \cdot 10^{-8}$	40000	$2,034 \cdot 10^{-5}$
500	$6,961 \cdot 10^{-8}$	50000	$7,913 \cdot 10^{-5}$
1000	$7,309 \cdot 10^{-8}$	70000	$9,801 \cdot 10^{-4}$
2000	$8,072 \cdot 10^{-8}$	90000	$2,377 \cdot 10^{-2}$
3000	$8,936 \cdot 10^{-8}$	100000	$1,439 \cdot 10^{-1}$

Скорость звука в газах и парах

Газ или пар	Темпера- тура, °C	Скорость звука, м/с	Температурный коэф- фициент скорости зву- ка*, м/(с·°C)
Азот	0	333,6	0,6
Аргон	0	319	0,56
Ацетилен	0	327	...
Бензин	90	200	...
Водород	0	1284	2,2
Воздух	0	331,5	0,59
Водяной пар	0	401	...
Водяной пар насыщенный	110	413	...
Гелий	0	965	0,8
Кислород	0	316	0,56
Неон	0	435	0,8
Окись азота (IV)	0	324	0,6
Окись углерода (II)	0	338	0,6
Окись углерода (IV)	0	259	0,4
Хлор	0	206	...

\* Скорость звука в газах и парах увеличивается с повышением температуры. Изменение скорости звука при изменении температуры газа или пара на 1 °C определяется температурным коэффициентом скорости звука.

Скорость звука в жидкостях

Жидкость	Температура, °C	Скорость звука, м/с	Температурный коэффициент скорости звука*, м/(с·°C)
Азот	-203	929	-10,0
Аргон	-186	837	-8,7
Ацетон	20	1192	-5,5
Бензин	17	1166	...
Вода	25	1497	2,5
Вода морская	20	1490	...
Вода тяжелая	25	1399	2,8
Водород	-253	1127	...
Гелий	-269	180	-21,5

\* Скорость звука в жидкостях изменяется с изменением температуры. Для подавляющего большинства жидкостей она уменьшается с увеличением температуры. Изменение скорости звука при изменении температуры жидкости на 1 °C определяется температурным коэффициентом скорости звука. В пресной воде скорость звука имеет максимальное значение при температуре 74 °C.

Модуль упругости (модуль Юнга)  $E$  различных материалов (при  $t = 20^{\circ}\text{C}$ )

Материал	$E$	
	ГПа	кгс/мм <sup>2</sup>
Алюминий	70 – 71	70000 – 71000
Бетон	14,6 – 23,2	14600 – 23200
Бор	450	450000
Бронза оловянная	75 – 124	75000 – 124000
Винипласт	4	4000
Вольфрам	415	415000
Гетинакс	10 – 18	10000 – 18000
Гранит	49	49000
Дюралюминий	71	71000
Железо	190 – 210	190000 – 210000
Золото	79	79000
Инвар	140	140000
Иридий	528	528000
Капрон	1,4 – 2,0	1400 – 2000
Кварцевая нить плавленая	73	73000
Кирпичная кладка	2,7 – 3,0	2700 – 3000
Кобальт	208	208000
Константан	163	163000
Латунь алюминиевая	100 – 105	100000 – 105000
Лед (при $t = -4^{\circ}\text{C}$ )	10	10000
Магний	44,3	44300
Медь	458	458000
Молибден	56 – 73	56000 – 73000
Мрамор	458	458000
Никель	205	205000
Органическое стекло	2,9 – 4,1	2900 – 4100
Платина	170	170000
Полихлорвинил	0,4 – 1,0	400 – 1000
Резина	0,9	900
Свинец	16 – 17	16000 – 17000
Серебро	70 – 82	70000 – 82000
Сталь легированная	210 – 220	210000 – 220000
Сталь углеродистая	200 – 210	200000 – 210000
Стекло	50 – 60	50000 – 60000
Текстолит	6,0 – 10,0	6000 – 10000
Титан	112	112000
Уран	208	208000
Фторопласт – 4	0,46 – 0,83	460 – 830
Хром	240 - 250	240000 – 250000



Заказ №\_\_\_\_\_ от «\_\_\_» \_\_\_\_ 20\_\_\_. Тираж \_\_\_\_\_ экз.  
Изд-во СевНТУ