Лекция №1 – Общие вопросы моделирования

Моделирование – замещение одного объекта (исходного) другим объектом, который называется моделью и проведение экспериментов с моделью с целью получения информации о системе путём исследования свойств модели.

Объектами моделирования является системы и протекающие в них процессы.

Моделирование применяется в 3 случаях (целесообразно):

- эксперимент трудноисполним над объектом
- экономически невыгодно
- эксперимент невозможен

Цели моделирования:

1. Оценка – на сколько система соответствует требованиям
2. Сравнения – конкурирующих систем одного назначения
3. Прогноз – оценка поведения существующей системы при новом сочетании рабочих условий
4. Анализ чувствительности – выявить из факторов действующих на систему те, которые наиболее влияет на систему
5. Оптимизация – выявить лучшие по набору критериев (параметров)

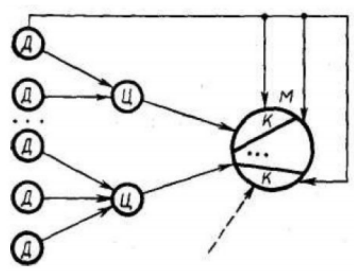
Модель – физический или абстрактный объект, адекватно отображающий исследуемую систему.

Требования к моделям:

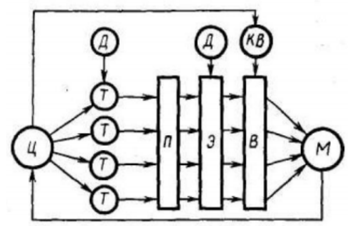
- Простота
- Адекватность

Подходы к моделированию:

- Функциональный – рассматриваются физические системы
- Структурный – модель собирается из структурных блоков
- Классический
  д – данные
  ц – цели
  к – компоненты моделы
  м – модель



- Системнй подход
  ц – цель
  т – требования
  д – данные
  э – элемент
  кв – выборочные критерии
  в – выборка
  п – подсистема
  м – модель



Классификация видов моделирования

Математическое моделирования – сопоставление какому-то объекту или процессу математической модели.

Аналитическое моделирование – процессы функционирования системы записываются в виде функциональных соотношений (алгебраических, интегральных, дифференциальных, конечно-разностные уравнения, формулы).

Имитационное моделирование – по исходным данным (конкретным начальным условиям и факторам) получить можно сведенья по состояниям модели в определённые моменты времени.

Лекция №2

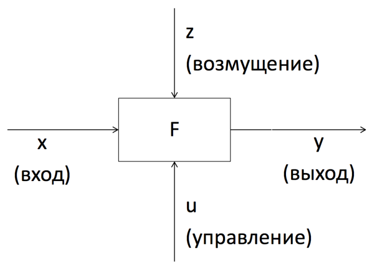
Классификация моделей

Физические модели внешне напоминают изучаемую систему.

Графические – показывают соотношение между различными количественными характеристиками систем в виде графиков и таблиц.

Математические модели – это совокупность математических объектов и отношений между ними, которая адекватно отображает исследуемую систему.

1. В зависимости от характера отображаемых свойств
   1.1. Функциональные – отображают процессы функционирования
   1.2. Структурные – могут иметь форму матриц, графов и отображают взаимное расположение элементов
   1.3. Схематические – отображение в виде схемы
2. По виду уравнений
   2.1. Линейные
   2.2. Нелинейные
3. По множеству значений
   3.1. Непрерывные
   3.2. Дискретные
4. По учёту случайных воздействий
   4.1. Стохастические
   4.2. Детерминированные
5. По форме связи между выходными и входными воздействиями
   5.1. Алгоритмические – модель описывается алгоритмом
   5.2. Аналитические – формулы и уравнения
   5.3. Численные – в виде числовых последовательностей
6. По учёту инерционности
   6.1. Динамические
   6.2. Статические



F – некоторый оператор (чёрный ящик, сама модель).

На вход подаются некоторые данные X, на выход получаем Y.

За вход и выход может приниматься состояние объекта в целом (вход – предыдущее состояние, выход – следующее)

Во внешней среде есть 2 вида воздействий: управляемые (u – управление, их мы можем изменять) и возмущения (z – не можем на них влиять)

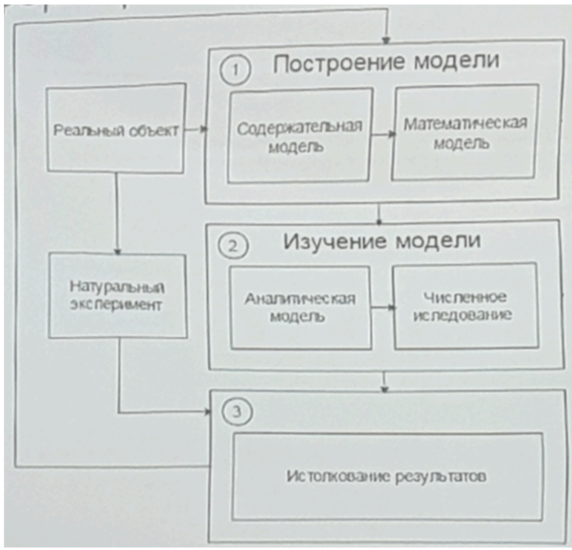
X и Y – вектор состояния объекта, U – управления, Z – возмущение.

Множество всех возможных состояний системы – <u>пространство состояний</u>.

И тогда F – функция (оператор) перехода и это закон, в соответствии с которым система переходит из одного состояния в другое.

Задачи моделирования:
- прямая – есть F и X, надо найти Y
- обратная (задача управления) – есть F и Y, надо найти X (на основании требуемого выхода необходимо найти управление)
- идентификация (параметрическая или структурная) – есть набор X и Y, надо найти F
  - параметрическая идентификация – вид уравнений известен, надо подобрать коэффициенты
  - структурная идентификация – всё неизвестно об объекте, надо определить каким уравнением можно описать

Первый этап формирования математической модели называется построение модели.



1. Построение модели
   - 1.1. Сбор, накопление и обобщение сведений о системе и процессах, происходящих в ней.
   - 1.2. Выделение элементов и подсистем и установление связей между ними из внешней среды
   - 1.3. Установление множества переменных – из всех возможных выделить вектор управления
   - 1.4. Выяснение объективных законов взаимодействия элементов системы друг с другом и внешней средой
2. Изучение модели
   Для контроля адекватности используется ряд критериев
   - 2.1. Аналитическая модель
     - 2.1.1. Контроль размерности (метр+метр)
     - 2.1.2. Контроль порядков (скорость авто не может быть $2*10^{15}$ м/с)
     - 2.1.3. Контроль характера зависимостей
     - 2.1.4. Контроль предельных состояний (что будет если входная переменная будет приближаться к своим экстремальным значениям)
     - 2.1.5. Контроль граничных условий
     - 2.1.6. Король физического смысла
     - 2.1.7. Контроль математической замкнутости – заключается в проверке того, что принятая математическая модель даёт возможность решить поставленную задачу притом однозначно

Математическая модель считается корректной, если она удовлетворяет всем проверкам.

   - 2.2. Численное исследование – подстановка в аналитическую модель конкретных числовых значений и применение некоторых численных алгоритмов.
     Подстановка числовых значений, параметров, внешних воздействий и входного воздействия в уравнение системы и применение численных методов просчёта полученных уравнений.
3. Сравнение результатов
   На этот этап передаются вычисленные данные объекта с этапа 2 и данные натурального эксперимента. Если модель удачная, то процесс завершается, иначе происходит переход к 1 этапу для корректировки модели.

Результатом второго этапа разработки модели может служить вычислительный эксперимент или имитационная модель.

Имитационное моделирование – воспроизведение на компьютере (simulation) процесса функционирования исследуемой системы, позволяющая исследовать состояние системы и отдельных её элементов в определенные моменты модельного времени, при определённых значениях параметров, граничных условий и внешних воздействий.

Модельное время – то время в котором функционирует модель, оно является имитацией реального времени. Может соответствовать реальному или быть виртуальным.

Имитационной моделирование применяется для:
- Исследования поведения различных экономических субъектов (предприятия, организации, отрасли);
- Поиска оптимальных стратегических и оперативных решений в различных организационных структурах;
- Поддержки оптимального управления в сложных производственных системах;
- Поддержки проектирования высокоэффективных динамичных систем;
- Изучения поведения социальных систем при различных сценариях;

- Исследование динамики распространения заболеваний;
- Моделирование процессов биологии и здравоохранения.

Методы имитационного моделирования

1. Системная динамика – это метод, основанный на представлении системы на высоком уровне абстракции, как совокупность потоков накопителей переменных и суб-моделей. С помощью этого метода, как правило, моделируют непрерывные системы;
2. Дискретно-событийный – процессы рассматриваются как последовательность важных моментов времени, называемых событиями;
3. Агентное моделирование – исследует поведение объектов (классов) и как оно влияет на систему;
4. Многоподходовое моделирование – комбинация трёх предыдущих

Методы моделирования

1. Непрерывно-детерминированный (дифференциальные уравнения, системная динамика) – моделирование непрерывной системы с детерминированными состояниями
2. Дискретно-детерминированный (конечные автоматы) – моделирование дискретно, состояния детерминированны
3. Дискретно-стохастический (дискретно-событийное моделирование)
4. Непрерывно-стохастический (СМО, СеМО) – системы массового обслуживания
5. Обобщенно-универсальный (многоподходовое моделирование)

Лекция №3

Подходы к моделированию непрерывных систем:
1. Фундаментальные законы природы (законы сохранения энергии, момента, импульса, заряда, частиц) – методы;
2. Основанные на вариационных принципах;
3. На принципе аналогии (если нет никаких законов сохранения или вариационных принципов, подходящих к системе) – в основе лежит принцип универсальности модели;
   Одной и той же моделью описывается модель колеблющегося маятника и электрического контура.
   Модель радиоактивного распада и модель численности населения:
   альфа – коэффициент рождаемости, бета – коэффициент смертности
   dN(t)/dt = [alpha(t) - beta(t)]*N(t)
   При alpha = beta система в равновесии.
   Если alpha < beta – сокращение населения/радиоактивный распад
   Если alpha > beta – рост населения
4. Идентификация модели

dx(t)/dt = f(x(t), u(t), q(t), z(t), t)
x(t) – вектор состояния (размерность n)
u(t) – вектор управления (размерность m)
q(t) – вектор параметров (может быть зависим от времени, размерность k)
z(t) – вектор возмущений (размерность l)
t – время
f – вектор-функция правых частей
$dx_i/dt = f_i(x, u, \dots)$

Подход, основанный на вариационных принципах.

Из всех возможных поведений системы выбираются только те, которые удовлетворят определённым условиям. При этом некоторая связанная с системой величина, которая определяется как функционал, достигает своего экстремального значения при переходе из одного состояния в другое.

Существуют 2 вариационных принципа:
1. Лагранжа
2. Гамильтона

Общая схема принципа Гамильтона для механических систем
1. Введём понятие обобщенных координат – Q(t). В них могут входить декартовы координаты, радио спектр, угловые координаты, набор координат материальных точек и т.д.
2. Введём понятие обобщенных скоростей dQ(t)/dt. Таким образом Q и dQ/dt определяют состояние системы во все моменты времени.
3. Записываем функцию Лагранжа для механической системы:
   L(Q, dQ/dt) = E_k - E_p, где E_k – кинетическая энергия, а E_p – потенциальная
4. Вводим величину, называемую функционалом действия
   Функционал – функция от функции, которая возвращает число
   S(Q) = INT[t1,t2](L(Q, dQ/dt)dt – функционал действия
5. Принцип Гамильтона
   Если система пишется по законам механики, то Q(t) является стационарной функцией для S(Q). Т.е. существует такой eps, что d/deps(S[Q+eps*phi]) = 0
   phi(t) – пробная функция, которая равна нулю на границах временного интервала
   phi(t1) = phi(t2) = 0
   Из всех допустимых траекторий Q(t) на отрезке t1-t2 выбирается движение, доставляющее минимум функционалу действия.
   S(Q) -> min[eps*phi], где phi – вариация

Пример:
r(t), dr(t)/dt
L = Ek - Ep = (m*(dr/dt)^2)/2 - k*(r^2)/2
S(r) = INT[t1,t2](L(r, dr/dt)dt) = INT[t1,t2]([m/2*(dr/dt)^2 - (k/2)*r^2]dt)

S(r+eps*phi) = INT[t1,t2](L(r, d(r+eps*phi)/dt)dt) = INT[t1,t2]([m/2*(dr/dt)^2 - (k/2)*(r+eps*phi)^2]dt)
dS(r+eps*phi)/deps = 1/2 тут очень длинная формула, спасибо Гамильтону за это = чуть менее длинная формула = а тут мы вспомнили, что eps = 0 и время сокращать
dS/deps = INT[t1,t2]((m*dr/dt*dphi/dt - k*r*phi)dt) = 0
С учётом краевых условий phi(t1) = phi(t2) = 0, получаем функцию модели
$m*d^2r/dt^2 = -kr$

Лекция №4

Модели массового обслуживания

Их всегда две: система массового обслуживания и сеть массового обслуживания

Система массового обслуживания (СМО) – математический или абстрактный объект, содержащий один или несколько приборов (П) (он может называться каналом или устройством), обслуживающих заявки (З) (транзакты или клиенты), поступающие в систему, и накопитель (Н) (буфер), в котором находятся заявки, образующие очередь и ожидающие обслуживание.

Заявка – это объект, поступающий в СМО и обслуживания в приборе.

Прибор – это элемент СМО, функцией которого является обслуживание заявок. В каждый момент времени в приборе может находится только одна заявка. Обслуживание при этом моделируется временной задержкой в приборе. Длительность обслуживания – это время задержки в приборе.

Тут картинка

Накопитель – совокупность мест для ожидания заявок перед обслуживанием. Соответственно он обладает некоторой ёмкостью.

Заявка может находиться в 2х состояниях: ожидание и обслуживание.

В накопители заявки поступают в соответствии с правилами, называемыми дисциплинами буферизации.

Дисциплины обслуживания – правила выбора заявок из очереди и поступления на обслуживание.

Приоритет – преимущественное право на занесение в накопитель или прибор одних заявок, по отношению к другим.

Используем следующие предположения:

- Заявка поступающая в систему мгновенно попадает в прибор, если он свободен;
- В приборе на обслуживании в каждый момент времени может находится одна заявка;
- После завершения обслуживания заявки в приборе очередная заявка выбирается из очереди мгновенно;
- Длительность обслуживания заявки и интенсивность их поступления зависят только от класса заявок и не зависят от того, сколько заявок уже находится в системе и других внешних факторов;
- Длительность обслуживания заявок не зависит от интенсивности поступления их в систему.

Сеть массового обслуживания (СеМО) – совокупность взаимосвязанных СМО, в среде которых циркулируют заявки. Переходы заявок между узлами сети задаются в виде вероятностей передач.

Путь заявок через сеть называется маршрутом.

Совокупность событий, распределённых во времени называется потоком. Для моделей массового обслуживания, событиями являются появления заявок в системе, соответственно поток заявок – это появление заявок в системе, распределённое во времени. Для того что бы задать этот поток аналитически необходимо задать распределение во времени. Для описания потока заявок необходимо задать интервалы времени между соседними заявками. Обратная величина к интервалу – интенсивность. Поток, в котором интервалы времени принимают определённые значения называются детерминированным, если при этом интервалы времени равные то регулярным. Если интервалы – случайные, то поток тоже случайный.

Случайный поток, в котором все интервалы времени между заявками независимы в совокупности и описываются разными функциями распределений, называется потоком с ограниченным последействием.

Случайный поток, в котором все интервалы распределены по одному и тому же закону, называется рекуррентным.

Если интенсивность и закон распределения интервалов не меняется со временем, то поток называется стационарным.

Поток называется ординарным, если в каждый момент времени может появиться только одна заявка.

Если заявки поступают независимо друг от друга, то поток называется без последействия.

Стационарный ординарный поток без последействия называется простейшим. В таком потоке заявки распределены по экспоненциальному закону.

Аналитическое исследование моделей массового обслуживания происходит в предположении простейшего потока входящих заявок.

Стратегии управления потоками заявок

Дисциплины буферизации
1. Бесприоритетные
2. Приоритетные

По способу вынесения заявок из накопителя:
1. Без вытеснения заявок (БВЗ)
2. Вытеснение заявок данного класса (ВЗДК)
3. Вытеснения заявки самого низкого приоритетного класса (ВЗНК)
4. Вытеснение заявки принадлежащей к группе низко-приоритетного класса (ВЗГК)
5. Вытеснение случайной заявки (ВСЗ)
6. Вытеснение последней заявки (ВПЗ)
7. Вытеснение долгой заявки (ВДЗ)

Дисциплины обслуживания
1. Бесприоритетные
2. Приоритетные

По способу назначения заявок на обслуживание:
1. Одиночный режим
2. Групповой режим
3. Комбинированный режим

1. Обслуживание в порядке поступления (ОПП) – FIFO
2. Обслуживание в обратном порядке (ООП) – LIFO
3. Обслуживание в случайном порядке (ОСП)
4. Обслуживание в циклическом порядке (ОЦП)
5. Относительный приоритет (ОП) – без прерывания обслуживания при поступлении
6. Абсолютный приоритет (АП) – вытесняет заявку, находящуюся обслуживании, при этом вытесненная или в очередь или в задницу
7. Смешанный приоритет (СП) – много классов заявок (мужчины по АП, женщины по ОП)
8. Чередующийся приоритет (ЧП)
9. Обслуживание по расписания (ОР)

Классификация моделей массового обслуживания
1. По числу мест в накопителе
    1.1. Без накопителя (СМО с потерями)
    1.2. Ограниченный накопитель (СМО с потерями)
    1.3. Неограниченный накопитель (СМО без потерь)
2. По количеству обслуживающих приборов
    2.1. Одноканальные
    2.2. Многоканальные
3. По количеству классов заявок, поступающих в систему
    3.1. С однородным потоком (один класс или несколько классов с одинаковой интенсивностью и характеристиками)
    3.2. С неоднородным потоком (куча классов)

Заявки относятся к разным классам если они отличаются одним из следующих факторов:
1. Длительность обслуживания;
2. Закон распределения времени обслуживания;
3. Приоритетом.

Сетевые модели
1. По характеру процессов
    1.1. Стохастические
    1.2. Детерминированные

2. По виду зависимости, связывающей интенсивности потоков
   2.1. Линейные
   2.2. Нелинейные
3. По количеству циркулирующих в сети заявок
   3.1. Замкнутые – постоянное количество заявок (физически не обязательно одни и те же заявки, но их количество постоянно – один вышел, один зашёл)
   3.2. Разомкнутые – количество заявок переменно
   3.3. Комбинированные – в разных СМО могут быть замкнуты и разомкнуты
4. По типу заявок
   4.1. Однородные
   4.2. Неоднородные (бесприоритетные и приоритетные)

Лекция №5

Параметры и характеристики моделей систем массового обслуживания
Структурные:
- K – количество приборов/каналов
- k – количество накопителей/очередей
- E_j – ёмкость накопителя/очереди
- способ взаемосвязи накопителей с приборами

Нагрузочные:
- H – количество классов заявок (Если написано, что поток заявок однородный, H=1)
- закон распределения $A_i(\tau)$ (обычно экспоненциальный), интенсивность λ_i и коэффициент вариации v_{ai} интервалов времени между поступающими в систему заявками класса i
- закон распределения $B_i(\tau)$, интенсивность μ_i и коэффициент вариации v_{bi} длительности обслуживания заявок класса i

Функциональные:
- дисциплина буферизации
- дисциплина обслуживания

a = $1/\lambda$ – средний интервал времени поступления заявок
b = $1/\mu$ – среднее время обслуживания заявок

СМО режимы функционирования:
1. Установившийся (стационарный) – характеристики системы не меняются со временем;
2. Неустановившийся:
   2.1. переходный – значения характеристик, меняясь со временем, стремятся к предельным (стационарным) значениям;
   2.2. нестационарный – характеристики меняются во времени;
   2.3. режим перегрузки – интенсивность поступления заявок превышает интенсивность обслуживания и система не справляется с возлагаемой на неё нагрузкой (только в СМО без потерь/неограниченная очередь).

Условие отсутствия перегрузок в СМО с неограниченной очередью: $\lambda<\mu K$ (если по условию СМО с потерями, то проверять не надо)

$y = \lambda/\mu$ – нагрузка, количество работы, которую требуется выполнить системе
$\rho = \min((1 - \pi_n)y/K;1)$ – загрузка системы, количество выполняемой работы системы, вероятность работы системы, доля времени работы системы
$\eta = 1 - \rho$ – простой (простаивать) системы, доля времени простоя системы
$\pi_o = (1-\pi_n)$ – вероятность обслуживания заявки
$\pi_n = \lim[T\to\infty](N_n(T)/N(T))$ – вероятность потери заявки (при неограниченной очереди равен 0)
$\lambda' = \pi_o\lambda$ – производительность системы, интенсивность потока обслуженных заявок
$\lambda'' = \pi_n\lambda$ – интенсивность потока потерянных заявок
w – среднее время ожидания в очереди
$u = w + b$ – среднее время пребывания заявки в системе
$l = \lambda' w$ – средняя длина очереди заявок (при СМО без потерь $\lambda' = \lambda$)
$m = \lambda' u$ – среднее число заявок в системе
ы
СМО с неоднородным потоком заявок
$\Lambda(\lambda) = SUM[H](\lambda_i)$
$Y(y) = SUM[H](y_i)$
$L(l) = SUM[H](l_i)$
$M(\mu) = SUM[H](\mu_i)$
$R(\rho) = SUM[H](\rho_i)$
$W = SUM[H](\xi_i w_i)$
$U = SUM[H](\xi_i u_i)$
$B = SUM[H](\xi_i b_i)$
$\xi_i = \lambda_i/\Lambda$ – коэффициент доли потока i-го класса в суммарном потоке, вероятность того, что заявка принадлежит к класса i

$U = W + B$
$L = \Lambda W$
$M = \Lambda U$

CeMO
n – число узлов в сети
λ_0 – интенсивность источника заявок для РСеМО (разомкнутая)
M – число заявок для ЗСеМО (замкнутая
$P = [p_{ij} \mid i,j = 0…n]$ – матрица вероятностей передач
$SUM[n](p_{ij}) = 1$ $(i=0…n)$ – для линейных систем
$a_j = \lambda_j/\lambda_0$ $(j=1…n)$ – коэффициент передачи узла
$\rho_j = \lambda_j b_j/K_j = \alpha_j \lambda_0 b_j/K_j < 1$ – условие
$\lambda_0 < \min(K_1/\alpha_1 b_1,\ …,\ K_n/\alpha_n b_n)$
$Y(y) = SUM[n](y_i)$
$R(\rho) = SUM[n](\rho_i)$
$L(l) = SUM[n](l_i)$
$W = SUM[n](\alpha_i w_i)$
$U = SUM[n](a_i u_i)$
$M(\mu) = SUM[n](\mu_i)$ - для РСеМО
$\lambda_0 = M/U$ – для ЗСеМО
$U = W + B$
$L = \Lambda W$
$M = \Lambda U$
s
В замкнутой системе не может быть перегрузок, но на входе некоторых систем может скапливаться очередь, но она не будет бесконечной.

Одноканальная экспоненциальная СМО
$w = \rho b/(1-\rho)$
$u = b/(1-\rho)$
$\rho = \lambda b < 1$
Многоканальная экспоненциальная СМО
$w = \rho b/(K(1-\rho))$
$\rho = \lambda b/K < 1$
Со слайдов

Лекция №6

Марковские модели

Случайные процессы с дискретными состояниями

Случайный процесс – это последовательность переходов системы из одного состояния в другое.

Дискретные состояния нумеруются (sic!). Основной параметр – время (дискретное или непрерывное). Время дискретно в моделях, в которых переходы происходят в конкретные известные моменты времени. Если время перехода из состояния в состояние заранее не известно, то этот процесс называется процессом с непрерывным временем. При этом для процессов с дискретным временем условие перехода из состояния в состояние задаётся вероятностью перехода. Условие перехода из состояния в состояние для непрерывного времени задаётся интенсивностью.

Невозвратное состояние – такое состояние, в которое после некоторого числа переходов система уже никогда не возвращается.

Поглащающее состояние – это когда случайный процесс, достигнув это состояние останавливается.

Транзитивный процесс – если достижимо любое состояние в этом процессе (из любого состояния можно попасть в любое).

Случайный процесс называется Марковским, если вероятность любого состояния в будущем зависит только от его состояния в настоящем и не зависит от того, каким образом система попала в это состояние.

Для того что бы случайный процесс был Марковский необходимо, что бы интервалы времени между соседними переходами [из состояния в состояние] были распределены по экспоненциальному закону.

Параметры Марковского случайного процесса

Для дискретного случайного процесса используют следующие парамерты:

- перечень состояний E_1, …, E_n;
- начальные вероятности состояний $p_1(0)$, …, $p_n(0)$;
- матрица вероятностей переходов
  $Q = [q_{ij} \mid i,j = 1..n]$;
  $0 \leqslant q_{ij} \leqslant 1$; $SUM_{[j=1..n]}(q_{ij}) = 1$; $(i,j = 1..n)$;

Процесс однородный, если вероятности переходов не зависят от момента времени. И неоднородным, если вероятности функция времени.

Случайный процесс с непрерывным временем задаются следующими параметрами:

- перечень состояний E_1, …, E_n;
- начальные вероятности состояний $p_1(0)$, …, $p_n(0)$;
- матрица интенсивностей переходов
  $G = [g_{ij} \mid i,j = 1..n]$; $SUM_{[j=1..n]}(g_{ij}) = 0$; $g_{ii} = -SUM_{[j=1..n;j\neq i]}(g_{ij})$;
  $g_{ij} = lim_{[\Delta\tau\to 0]}(P_{ij}(\Delta\tau)/\Delta\tau)$; $(i,j = 1..n;\ i \neq j)$;

Если интенсивности переходов постоянные и не зависят от времени, то такой процесс называется однородным. Если g_{ij} функция времени, то процесс неоднородный.

Характеристики Марковского случайного процесса:

- вероятности состояний $p_1(t)$, …, $p_n(t)$. В любой момент времени система может находиться только в одном состоянии, соответственно их сумма 1 (нормировочное условие).
  $P(t) = \{p_1(t), …, p_n(t)\}$, $0 \leqslant p_i(t) \leqslant 1$; $SUM_{[i=1..n]}(p_i(t)) = 1$;

Эргодическое свойство случайных процессов

Если по истечении достаточно большого времени вероятности состояний стремятся к предельным/стационарным/установившимся значениям, которые не зависят от начальных вероятностей состояния и от текущего момента времени t, то говорят, что случайный процесс обладает эргодическим свойством.

Транзитивный случайный процесс с непрерывным временем и конечным числом состояний, среди которых нет невозвратных и поглащающих, всегда обладает эргодическим свойством.

Для Марковского процесса применимы следующие формулы:

- для Марковского процесса с дискретным временем:

$$p_j(k) = \sum_{i=1}^{n} p_i(k-1)\, q_{ij}$$

$$p_j = \sum_{i=1}^{n} p_i q_{ij} \qquad \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

- для Марковского процесса с непрерывным временем:

$$\frac{dp_j(t)}{dt} = \sum_{i=1}^{n} p_i(t)\, g_{ij}$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i g_{ij} = 0 \quad (j = \overline{1,n}),$$

Эргодические процессы

Лекция №7

Задание на домашнюю контрольную работу – исследование и моделирование Марковской и сетью Петри любого объекта реального мира, словесное описание и аналитические расчёты. В виде отчёта с Марковской моделью, сетью Петри и имитационной моделью.

Сети Петри

Изначально были разработаны для моделирования нелинейных систем и систем с параллельными процессами.

Сеть Петри – математическая модель дискретных динамических систем, ориентированная на системы, содержащие взаимодействия параллельных компонентов (в том числе ИС – ПО, АО, компьютерных систем, ОС). С помощью сетей Петри можно выполнить качественный анализ таких систем, а также нахождение дефектов в проекте.

Структура сети Петри:

$P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ – конечное множество позиций (моделируется состояния системы или условия)

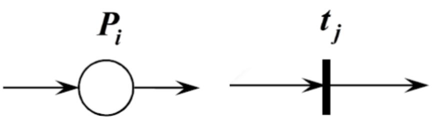
$T = \{t_1, t_2, \dots, t_m\}$ – конечное множество переходов (моделируются действия в системе или события)

Система находясь в каком-то состоянии может порождать определённые действия. Выполнение какого-то действия переводит систему из одного состояния в другое.

При выполнении определённых событий в системе наступает какое-то событие, после его наступления в системе появляются новые условия.

I – множество входных функций (отображение из переходов в комплекты позиций P*)

O – множество выходных функций (отображение из переходов в комплекты позиций P*)



Пример сети Петри

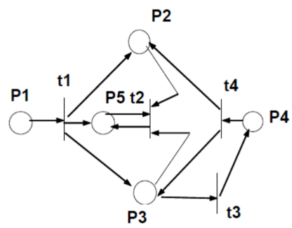
В виде структуры:

$P = \{p1,p2,p3,p4,p5\}$
$T = \{t1,t2,t3,t4\}$

$I(t1)=\{p1\}$
$I(t2)=\{p2,p3,p5\}$
$I(t3)=\{p3\}$
$I(t4)=\{p4\}$

$O(t1)=\{p2,p3,p5\}$
$O(t2)=\{p5\}$
$O(t3)=\{p4\}$
$O(t4)=\{p2,p3\}$

В виде графа:



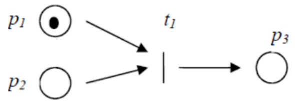
Входным функциям соответствуют входные стрелки, выходным функциям выходные стрелки из позиций и переходов.

Маркировка сети Петри

Маркировка сети Петри – размещение по позициям сети Петри фишек, изображенных на графе тонким или числами.

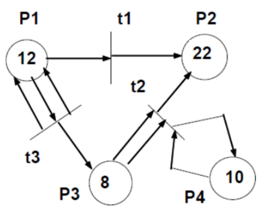
$$C_\mu = \{P, T, I, O, \mu\}$$
$$\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots \mu_n)$$

Маркировка фишками (метками):



$\mu = (1;0;0)$

Маркировка числами:

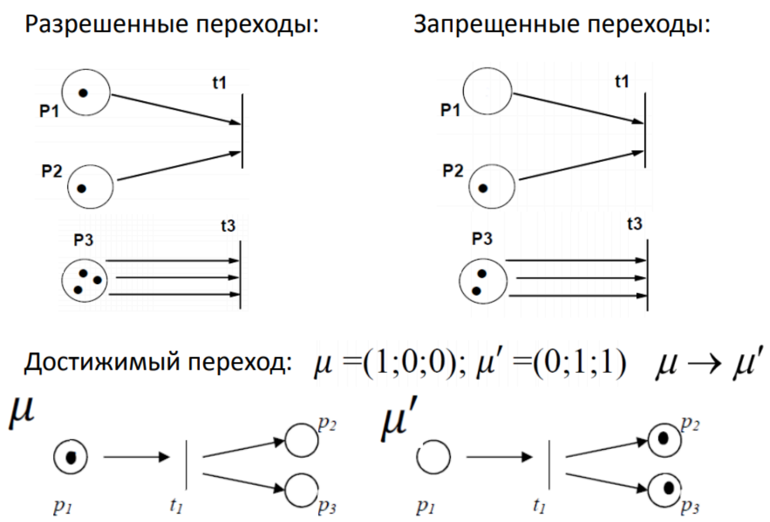


$\mu = (12,22,8,10)$

Количество фишек в позиции может быть от 0 до бесконечности.

Выполнение сети Петри – процесс перемещения фишек из одной позиции в другую. При этом переход запускается удалением фишек и перемещением их.

Правила выполнения сети Петри



Маркировка μ’ называется достижимой из маркировки μ, если существует последовательность срабатывающих переходов, переводящих сеть из μ в μ’

Задача:

t1 – поступление заявки на обработку

t2 – начало обработки

t3 – конце обработки

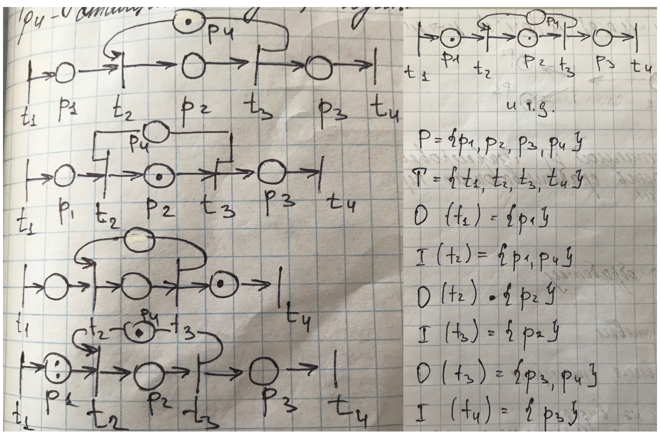
t4 – передача выполненной задачи

p1 – задание ждёт освобождения станции

p2 – обработка задания

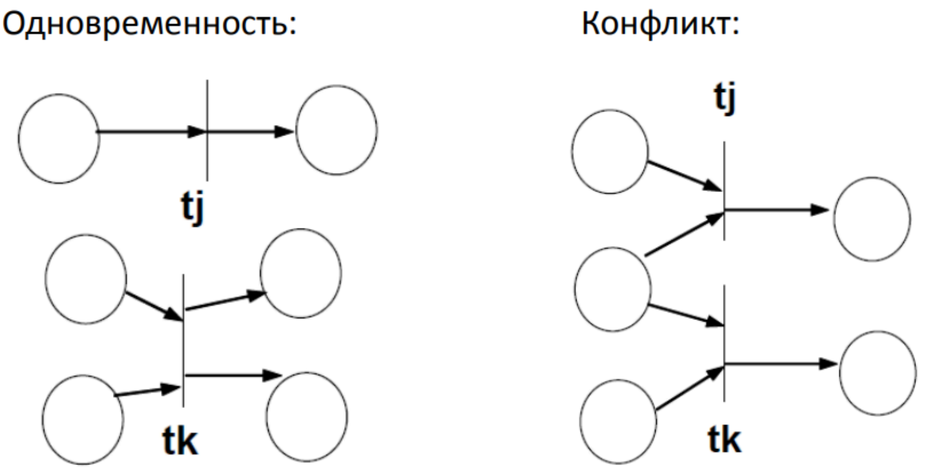
p3 – задание ожидает очереди на выход

p4 – станция свободна, находится в режиме ожидания задания



Леция №8

Правила выполнения сети Петри



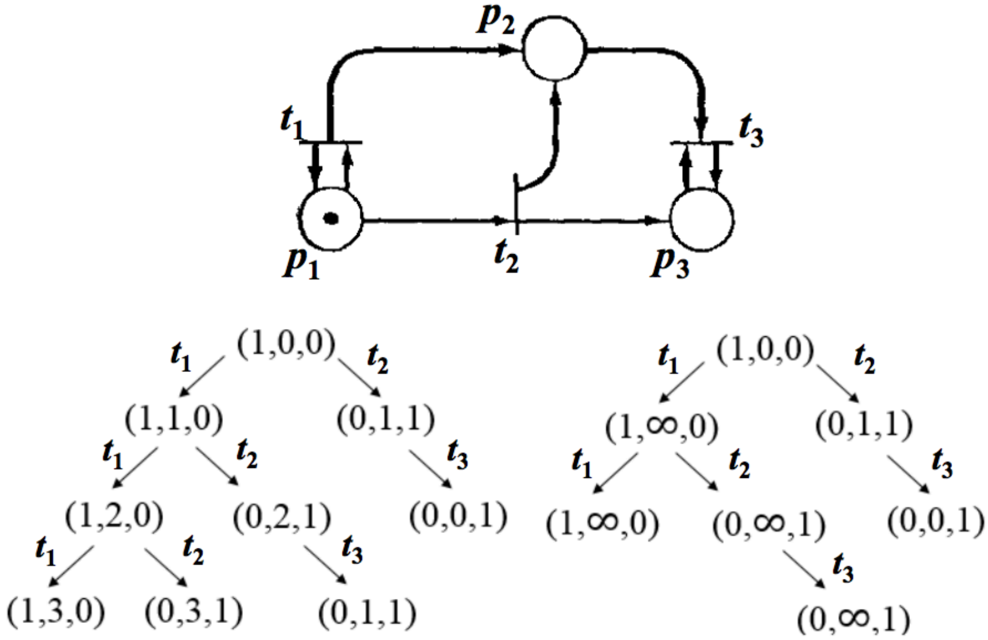
Виды сетей Петри

1) Временная;
2) Стохастическая;
3) Функциональная;
4) Цветная;
5) Автоматная.

Свойства сети Петри

1) безопасная;
2) k-ограниченная;
3) консервативная;
4) достижимая;
5) живая/тупиковая/частично тупиковая.

Анализ: дерево достижимостей



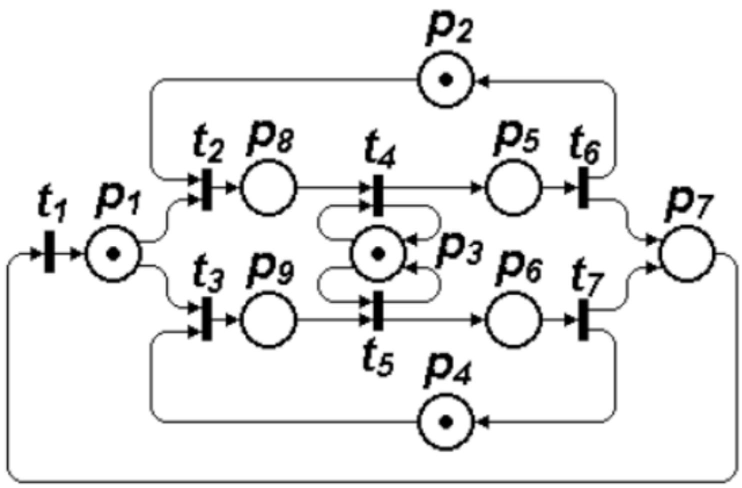
Дерево – множество достижимостей сети Петри. Каждая вершина i соответствует i маркировке. В маркировке число от 9 до бесконечности. Бесконечное число меток обозначается ∞. Каждая вершина может быть терминальной, дублирующей, граничной. Из терминальной нет возможных переходов. Дублирующая – маркировка ранее встречалась в дереве.

Построение дерева начинается с определённой начальной маркировки и продолжается, пока имеются граничные вершины. Когда все вершины – терминальные, дублирующие или внутренние, то построение дерева заканчивается.

Анализ сети Петри производится по дереву:

1. Сеть Петри ограничен только тогда, когда бесконечность отсутствует в дереве;
2. Безопасной сеть будет если число маркировки не больше 1;
3. Живая – отсутствуют зацикливания и тупики.

Построить дерево достижимостей:



Анализ: матричные уравнения

Матрицы:

$F=F(p_i,t_j) \qquad H=H(t_j,\ p_i)$

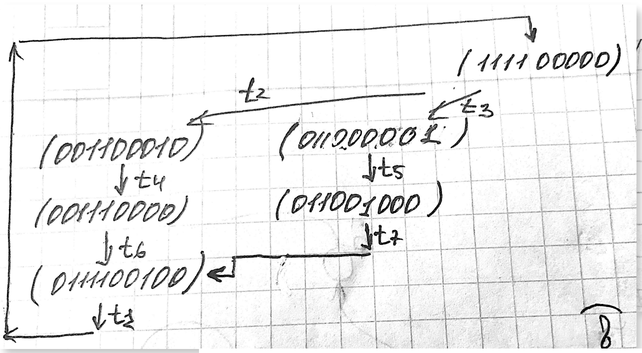
$e(j)$ - вектор перехода t_j

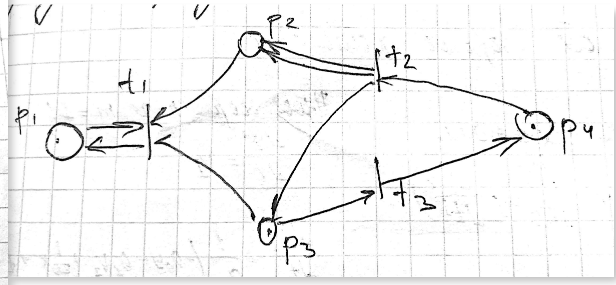
$C=H-F^T$

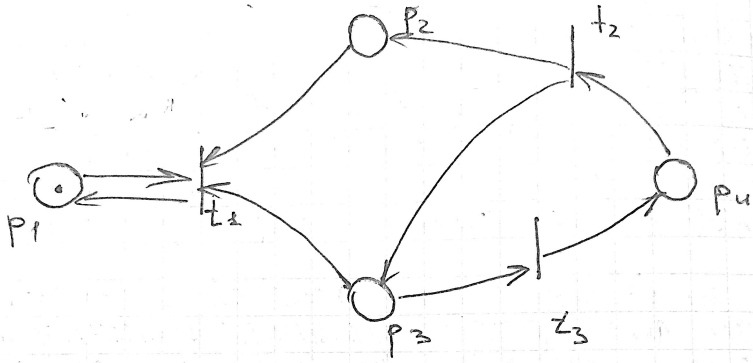
$\sigma = t_{j_1}, t_{j_2}, \ldots, t_{j_k}$ - последовательность запусков переходов

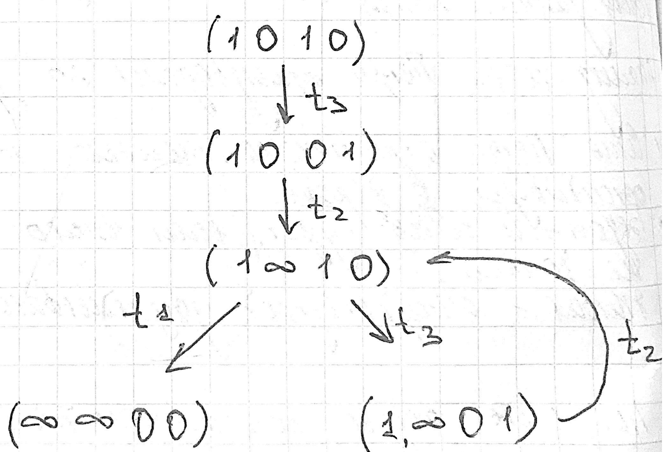
$f(\sigma)=e(j_1)+e(j_2)+\ldots+e(j_k)$ - вектор запусков последовательности

$\mu`=\mu+f(\sigma)\cdot C$ - маркировка сети после запуска последовательности σ









$$F = \begin{array}{c} \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} t_1 & t_2 & t_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{array}{c} \\ t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\sigma = t_3, t_2, t_3, t_2, t_1$$

$$f(\sigma) = (1, 2, 2)$$

$$\mu_0 = (1,0,1,0)$$

$$\mu_1 = (1,0,1,0) + (1,2,2) \cdot C = (1,3,0,0)$$

Чтобы опр. достижима ли заданная маркировка, ее надо подставить в μ' или найти $f(\sigma)$

Лекция №9

Имитационное моделирование

$$a_n\frac{d^n y(t)}{dt^n}+\ldots+a_1\frac{dy(t)}{dt}+a_0y(t)=b_m\frac{d^m x(t)}{dt^m}+\ldots+b_1\frac{dx(t)}{dt}+b_0x(t)$$

$$a_2\frac{d^2y(t)}{dt^2}+a_1\frac{dy(t)}{dt}+a_0y(t)=b_1\frac{dx(t)}{dt}+b_0x(t)$$ - при n=2, m=1

В нормальной форме Коши:

$$\frac{dv_{i-1}}{dt}=v_i,\ i=1,2,\ldots,n-1,\ v_0\equiv y,$$

$$\frac{dv_n}{dt}=\frac{1}{a_n}\left(-\sum_{i=0}^{n-1}a_iv_i+\sum_{j=0}^{m}b_j\frac{d^jx}{dt^j}\right).$$

Пример для n=2, m=1:

$$\frac{dy}{dt}=v_1,$$

$$\frac{dv_1}{dt}=\frac{1}{a_2}\left(-a_0y-a_1v_1+b_0x+b_1\frac{dx}{dt}\right).$$

В канонической форме:

$$\frac{dv_i}{dt}=v_{i-1}+b_{i-1}x-a_{i-1}y,\ \ i=1,2,\ldots,n,$$

$$v_0=0,$$

$$y=\frac{1}{a_n}(v_n+b_nx)$$

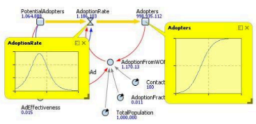
Пример для n=2, m=1:

$$\frac{dv_1}{dt}=b_0x-a_0y,$$

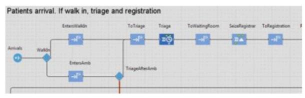
$$\frac{dv_2}{dt}=v_1+b_1x-a_1y,\ \ y=\frac{1}{a_2}v_2.$$

Подходы к имитационному моделированию

1) Системная динамика



2) Дискретно-событийное



3) Агентное (многоагентное)

4) Многоподходовое

Имитационное моделирование применяется в следующих случаях:

1. Если не существует законченной математической постановки задачи;
2. Если аналитические методы существуют, но сложны для реализации, а имитационное моделирование даёт более простое решение;
3. Если имеются аналитические решения, но их реализация не возможна;
4. Если кроме разовой оценки параметров в системе требуется наблюдение в течении времени;
5. Если система сложно наблюдаемая (сложно получить данные по системе) – проще добиться на имитационной модели подбором добиться сходства.

Все преимущества имитационных моделей вытекают из случаев их применения.

Недостатки:

1. Основные пакеты имитационного моделирования для коммерческого использования – платные (и дорогие);
2. На имитационной модели невозможно получить однозначный точный результат т.к. это всегда приближённый результат;
3. Не отражает полную картину вещей в системе, а только её часть.

Схема построения имитационной модели:

1. Определение границ модели – какие элементы входят, а какие нет;
2. Разработка концептуальной модели – описать словами что моделируется;
3. Подготовка требуемых исходных данных;
4. Построение структуры модели;
5. Трансляция модели (выполнение/прогон);
6. Оценка адекватности модели (по критериям в предыдущих лекциях);
7. Планирование эксперимента модели;
8. Проведение экспериментов с моделью;

9. Интерпретация результатов;
10. Реализация/документация системы.