Министерство образования и науки Российской Федерации
ФГБО УВО "Севастопольский государственный университет"

Методические указания

к выполнению практических заданий
и контрольных работ по дисциплине
"Методы исследования операций''
для студентов основного профиля
09.03.02 – "Информационные системы и технологии"
всех форм обучения

Часть 1. Задачи линейного программирования

Севастополь
2015

УДК 004.4

Методические указания к выполнению практических заданий и контрольных работ по дисциплине “Методы исследования операций’’ для студентов основного профиля 09.03.02 – “Информационные системы и технологии” всех форм обучения / Разраб. Л.П. Старобинская, В.Ю. Карлусов. - Севастополь: Изд-во СевГУ, 2015. – 71 с.

Цель методических указаний: обеспечение выполнения учащимися как дневной, так и заочной формы обучения полного цикла операционных исследований в задачах линейного программирования – начиная от построения математической модели, нахождения для неё оптимального решения и заканчивая организацией проведения вычислительного эксперимента при решении вариационной задачи нахождения улучшенных параметров допустимой стратегии.

Методические указания рассмотрены и утверждены на заседании кафедры Информационных систем,
протокол № *01* от *03 февраля* 20*15* г.

Допущено учебно-методическим центром СевГУ в качестве методических указаний.

Рецензент Апраксин Ю.К., доктор техн. наук, профессор. каф. Кибернетики и вычислительной техники.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Анализ опыта преподавания дисциплины “Методы исследования операций” позволил обнаружить существенные моменты, на которые следует обратить внимание в ходе выполнения контрольных работ, курсового проектирования и подготовки к экзаменам.

1. Отмечается слабое представление учащимися связей теоретических моделей исследования операций с практическими (прикладными) задачами.

2. Замечены случаи недопонимания отдельными студентами тонкостей тех или иных методов оптимизации.

3. Просматривается отсутствие у большинства обучаемых практики проведения исследований и их теоретического обеспечения.

4. Имеется функциональная недостаточность наличествующих учебных пособий как центрального, так и местного изданий при самостоятельном или дистанционном (заочном) обучении.

Поэтому в настоящих методических указаниях представлена, по возможности полная, типовая последовательность проведения исследования операций: от содержательной постановки задачи к математической модели, на основании которой выполняется оптимизация, с использованием широкого ассортимента методов, завершая исследованиями устойчивости полученного решения на заданном множестве исходных данных. Приводится интерпретация результатов исследований в терминах содержательной постановки задачи.

Авторы считают необходимым выразить благодарность студентам М.Р. Валентюк, М.Г. Нестеровой, Н.А. Погребной 3-го курса 2004/2005 гг., которые оказали ощутимую помощь в сборе, художественной обработке и оформлении материалов настоящих методических указаний.

1. СОДЕРЖАТЕЛЬНАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Задачу линейного программирования (ЛП) можно сформулировать так.

Найти

$$\max_{x_1,\ldots,x_n} \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \tag{1.1}$$

При условиях:

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1; \\ &a_{21}x_2 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m \end{aligned} \tag{1.2}$$

и $$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \ldots\ldots, x_n \ge 0. \tag{1.3}$$

Последние ограничения называются условиями неотрицательности.

В данном случае все условия имеют вид неравенств. Иногда они могут быть смешанными, т.е. неравенства и равенства:

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m \\ &a_{m+1,1}x_1 + a_{m+1,2}x_2 + \ldots + a_{m+1,n} \le b_{m+1}; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n \le b_k \end{aligned} \tag{1.4}$$

Если все ограничения задачи ЛП заданы в виде строгих равенств:

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ &a_{21}x_2 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m\ , \end{aligned} \tag{1.5}$$

то данная форма называется **канонической**.

В матричной форме задачу ЛП записывают следующим образом. Найти

$$\max c^T x, \qquad (1.6)$$

При условиях

$$\begin{aligned} &Ax \le b; \\ &x \ge 0, \end{aligned} \qquad (1.7)$$

где A – матрица ограничений размером $(m*n)$, b - вектор – столбец свободных членов $(m*1)$, x- вектор переменных $(n*1)$, $c^T = [c_1, c_2, ..., c_n]$ – вектор – строка коэффициентов целевой функции (ЦФ).

Решение x_0 будет *оптимальным,* если для него выполняется условие $c^T x_0 \ge c^T x$, для всех $x \in R(x)$.

Множество всех векторов x, удовлетворяющих ограничениям (1.2) и (1.3), представляет собой выпуклый многогранник *R(x).* В этом случае *R(x)* представляет собой выпуклое многогранное множество.

Отметим, что поскольку *min f(x)* эквивалентен *max [-f(x)],* то задачу минимизации в ЛП всегда можно свести к эквивалентной задаче максимизации.

2. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Геометрически задача ЛП представляет собой отыскание такой точки многоугольника решений, координаты которой обеспечивают линейной функции цели максимальное (минимальное) значение, причем допустимыми решениями являются все точки многоугольника решений.

Рассмотрим следующий пример.

Найти $max\ (2x_1 + 5x_2)=z$ при условиях $x_1 \le 400,\ x_2 \le 300,\ x_1 + x_2 \le 500,\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

Каждое из этих неравенств – ограничений определяет полуплоскости, пересечение которых дает многоугольник, который заштрихован на рисунке 1.1.

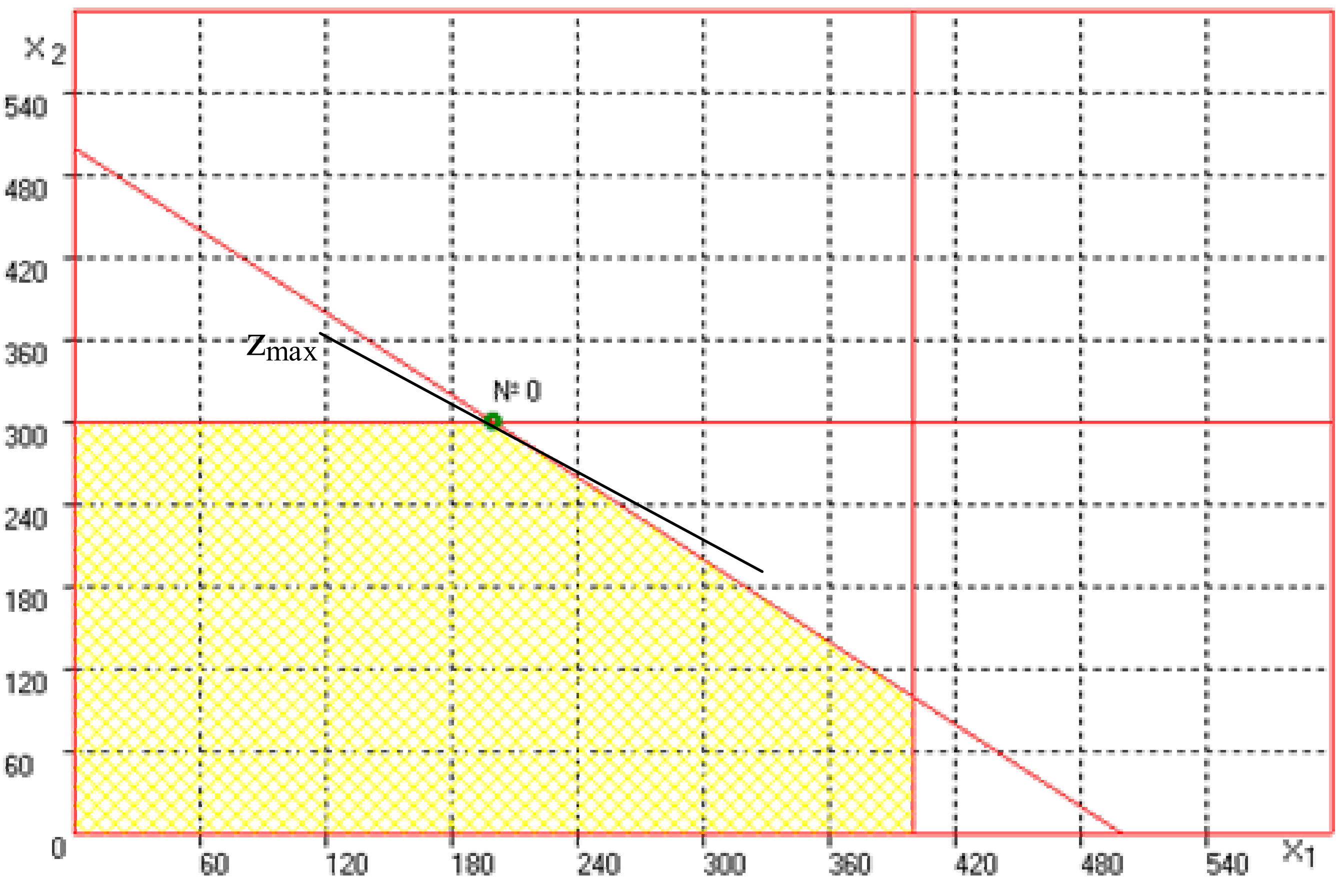


Рисунок 1.1 – Вид области допустимых решений

Этот многоугольник и представляет собой допустимое множество решений R задачи ЛП.

Теперь рассмотрим целевую функцию $f(x_1, x_2) = 2x_1 + 5x_2$.

Пусть $f(x_1, x_2) = 1000 = z_1$. График уравнения $2x_1 + 5x_2 = 1000$ представляет собой прямую с отрезками на осях x_1 = 500 единиц, а x_2 =200 единиц.

При $f(x_1, x_2) = 1500$ получим прямую z_2, имеющую уравнение

$$\frac{2x_1}{1500} + \frac{5x_2}{1500} = \frac{x_1}{750} + \frac{x_2}{300} = 1.$$

Прямая z_2 параллельна прямой z_1, но расположена выше ее. Перемещая прямую, параллельную Z1 и Z2 вверх, приходим к такому положению z_{max}, когда прямая и множество R будут иметь только одну общую точку *A*. Очевидно, что точка *A* (x_1 = 200; x_2 =300) – оптимальное решение, так как оно лежит на прямой с максимально возможным значением $z_{max.}$ Заметим, что эта точка оказалась крайней точкой множества R.

В векторной форме записи ограничения задачи ЛП записывают так:

$$A_1x_1 + A_2x_2 + \ldots + A_nx_n \le b, \qquad (2.1)$$

где $$A_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \ldots \\ a_{m1} \end{bmatrix}; \quad A_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \ldots \\ a_{m2} \end{bmatrix}; \ \ldots\ ; A_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \ldots \\ a_{mn} \end{bmatrix}; \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Векторы A_1, A_2, A_n называются требованиями задачи. Рассмотрим допустимое множество R в пространстве данных векторов. Так как в формуле (2.1) $x_i \ge 0 (i = 1,2,\ldots,n)$, то все положительные комбинации векторов A_1, A_2, A_n образуют конус. Поэтому вопрос о существовании допустимого решения равнозначен вопросу о принадлежности вектора b к этому конусу.

Поэтому справедливо следующее утверждение. Если задача ЛП содержит n переменных и m ограничений (n>m), записанных в форме неравенств, не считая неотрицательности $x_j>=0$, то в оптимальное решение входит не более чем m ненулевых компонент вектора x**.**

3. ТЕОРЕМЫ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

1) Если ЦФ достигает минимального или максимального значения на множестве допустимых решений R, то она достигает этого значения в крайней точке множества R. Если она достигает минимального или максимального значения более чем в одной точке, то она достигает этого же значения в любой их выпуклой комбинации.

2) Пусть существуют системы векторов $A_1, A_2, \ldots, A_k$, размерностью m, причем m, таких, что выполняется: $A_1x_1 + A_2x_2 + \ldots + A_kx_k = A_0$, то вектор с координатами $x^T = \{x_1, x_2, \ldots, x_k, 0, 0, \ldots, 0\}$, [где количество нулей определяется как *(m-k)*], есть крайняя точка.

3) Если X_0 – крайняя точка множества R, то координаты вектора являются допустимым базисным решением.

Следствия:

- Оптимальное решение может находиться только в крайней точке множества допустимых значений.
- Для того чтобы найти оптимальное решение, необходимо перебрать все крайние точки.

4. ЭКОНОМИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Целью работы коммерческой фирмы является получение прибыли. Любое управленческое решение (будь то решение о количестве приобретаемого товара, или решение о назначении цены на реализуемый товар, или решение о подаче рекламы в газету и т.д.) будет влиять на прибыль в большую или меньшую сторону. Эти решения являются *оптимизационными*, то есть всегда существует возможность выбрать лучшее решение из нескольких возможных. Представим себе, что все управленческие решения принимаются наилучшим образом.

То есть, все параметры, на которые может влиять фирма, являются оптимальными. Тогда фирма будет получать максимальную прибыль (больше получить при данных условиях невозможно). Для того чтобы определить, насколько управленческие решения, принимаемые работниками фирмы оптимальны, можно использовать методы *математического программирования*.

В экономике оптимизационные задачи возникают в связи с многочисленностью возможных вариантов функционирования конкретного экономического объекта, когда возникает ситуация выбора варианта, наилучшего по некоторому правилу, критерию, характеризуемому соответствующей целевой функцией (например, иметь минимум затрат, максимум продукции).

Оптимизационные модели отражают в математической форме смысл экономической задачи, и отличительной особенностью этих моделей является наличие условия нахождения оптимального решения (критерия оптимальности), которое записывается в виде функционала. Эти модели при определенных исходных данных задачи позволяют получить множество решений, удовлетворяющих условиям задачи, и обеспечивают выбор оптимального решения, отвечающего критерию оптимальности.

В общем виде постановка задачи математического программирования состоит в определении наибольшего или наименьшего значения целевой функции $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ при условиях g_i

$(x_1, x_2, ..., x_n) \le b_i$; $(i = 1,2,...m)$, где f и g_i; – заданные функции, а b_i – некоторые действительные числа.

Примеры экономических задач:

1. Задача о планировании выпуска продукции пошивочного предприятия

Намечается выпуск двух видов костюмов - мужских и женских. На женский костюм требуется 1 м шерсти, 2 м лавсана и 1 человеко-день трудозатрат. На мужской костюм – 4 м шерсти, 1 м лавсана и 1 человеко-день трудозатрат. Всего имеется 350 м шерсти, 240 м лавсана и 150 человеко-дней трудозатрат. Требуется определить, сколько костюмов каждого вида необходимо сшить, чтобы обеспечить максимальную прибыль. Нужно учесть, что прибыль от реализации женского костюма составляет 10 денежных единиц, а от мужского - 20 денежных единиц. При этом следует иметь в виду, что необходимо сшить не менее 60 мужских костюмов.

2. Задача о планировании выпуска продукции фармацевтической фирмы

Фармацевтическая фирма производит витамины двух видов: для детей и для взрослых. Продукция обоих видов поступает в продажу. Для их производства кроме стандартного комплекса витаминов, микроэлементов и аминокислот используют новые биологические добавки A, B, C и D. Расход этих добавок в граммах на килограмм соответствующих витаминов и ограничения в применении добавок A, B, C и D приведены в таблице 4.1

Таблица 4.1 – Показатели потребителя пищевых добавок

Добавки	Расход добавок в г на кг витаминов		Ограничения в применении добавок (г)
	Взрослые	Детские	
A	2	5	10
B	5	2	10
C	6	-	6
D	-	5	5

Оптовые цены 1 кг витаминов, изготовленных в виде капсул: для детей – 6 ден. ед., для взрослых – 7 ден.ед.

Требуется найти такое количество витаминов каждого вида, которое должна производить фирма, чтобы доход от реализации продукции был максимальным.

5. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

5.1. Графический метод

5.1.1. Описание алгоритма решения задачи

Данный метод применяется для задач, где общее число переменных n=2 или задача может быть сведена к соответствующей задаче с числом независимых переменных k=2.

Пусть ЛП-задача имеет вид

$$f(x_1, x_2) = (c_1 x_1 + c_2 x_2); \qquad (5.1.1.1)$$

$$g_1(x_1, x_2) \le b_1;$$

$$g_1(x_1, x_2) \le b_2; \qquad (5.1.1.2)$$

$$. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; .$$

$$g_1(x_1, x_2) \le b_m;$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \qquad (5.1.1.3)$$

Алгоритм метода заключается в следующем:

1) На плоскости строится допустимое множество решений, определяемое формулами (5.1.1.2) и (5.1.1.3). Эта область ограничений называется областью допустимых стратегий (ОДС).

2) По коэффициентам целевой функции (ЦФ) c_1 и c_2 строится вектор нормали, который указывает направление возрастания $f(x_1, x_2)$. Нормаль всегда проходит через точки $O(0;0)$ и $C\ (c_1; c_2)$, где

$$c_1 = \frac{\partial F}{\partial x_1}; \qquad c_2 = \frac{\partial F}{\partial x_2}.$$

Эта прямая перпендикулярна линии пересечения плоскости $f(x_1,x_2)$ с координатной плоскостью, а также проекциям всех линий равного уровня $f(x_1,x_2)$.

3) К нормали *N* восстанавливается перпендикуляр, который перемещается по ней, пока не достигнет крайней точки ОДС. Направление перемещения определяется видом оптимизации. Если задача решается на *min*, то перемещение осуществляется от точки *C* к точке *O*, а если – на *max*, то – от точки *O* к точке *C*.

При этом возможен один из следующих случаев:

а) Если область ограничений не замкнута в направлении оптимизации, то решений не будет.

б) Если одна из линий, образующих область ограничений, перпендикулярна нормали, то имеем бесконечное множество решений, что определяется теоремой 1. Безразлично, какую точку на этой прямой взять в качестве решения. Обычно берут крайние точки.

в) Если область ограничений образована несовместными неравенствами, то решений не будет.

г) Существуют невыпуклые области, для них решения отсутствуют, либо имеют 2 точки.

д) Существует решение в единственной крайней точке.

5.1.2. Пример решения задачи линейного программирования графическим методом

Решим задачу о планировании выпуска продукции пошивочному предприятию (задача 1 из параграфа 4):

Построение математической модели задачи.

Введем следующие обозначения:
x_1 - число женских костюмов;
x_2 - число мужских костюмов.

Прибыль от реализации женских костюмов составляет $10x_1$, а от реализации мужских $20x_2$, т.е. необходимо максимизировать целевую функцию

$$F(x) = 10\,x_1 + 20\,x_2 \Rightarrow max.$$

Ограничения задачи имеют вид:

$$x_1 + x_2 \le 150,$$
$$2x_1 + 1x_2 \le 240,$$
$$x_1 + 4x_2 \le 350,$$
$$x_2 \ge 60, \quad x_1 \ge 0.$$

Первое ограничение по труду $x_1 + x_2 \le 150$. Прямая $x_1 + x_2 = 150$ проходит через точки (150, 0) и (0, 150).

Второе ограничение по лавсану $2x_1 + 1x_2 \le 240$. Прямая $2x_1 + 1x_2 = 240$ проходит через точки (120, 0) и (0, 480).

Третье ограничение по шерсти $x_1 + 4x_2 \le 350$.

Добавим *четвертое ограничение* по количеству мужских костюмов $x_2 \ge 60$.

Решением этого неравенства является полуплоскость, лежащая выше прямой $x_2 = 60$. Область допустимых решений должна быть ограничена прямыми, соответствующими каждому из заданных ограничений (рассмотренных выше). На рисунке 5.1 заштрихована область допустимых решений.

Для определения направления движения к оптимуму построим точку *С* $(c_1; c_2)$, координаты которого являются частными производными целевой функции, т.е.

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} = c_1, \frac{\partial f}{\partial x_2} = c_2\right) = (10;20).$$

Чтобы построить вектор нормали, нужно соединить точку (10;20) с началом координат. Если задача решается на min, то перемещение осуществляется в направлении вектора нормали к точке (0;0), а если – на max, то наоборот.

В нашем случае движение линии уровня будем осуществлять до ее выхода из области допустимых решений. В крайней, угловой точке достигается максимум целевой функции. Для нахождения координат этой точки достаточно решить два уравнения прямых, получаемых из соответствующих ограничений и дающих в пересечении точку максимума: $x_1 + 4x_2 = 350$ и $x_1 + x_2 = 150$.

Отсюда легко записать решение исходной ЗЛП: $max\ f(x) = 2160$ и достигается при x_1=66 и x_2=84.

Примечание*:* Данная задача по постановке относится к классу задач линейного целочисленного программирования, присутствуют ограничения на x_1 и x_2 – целые, ибо не может быть $1\frac{1}{2}$ костюма.

Поэтому решение ищется не по всей непрерывной заштрихованной области, а по набору точек с целочисленными координатами.

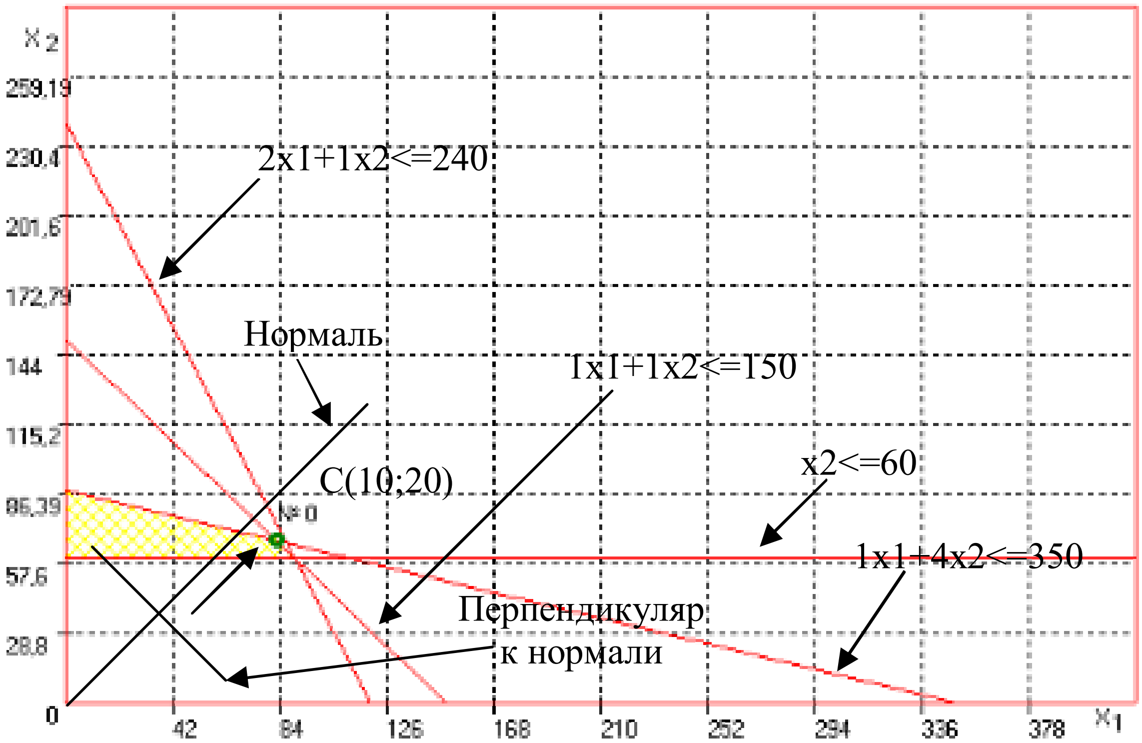


Рисунок 5.1 - Ход решения задачи

5.2. Табличный симплекс метод

5.2.1. Описание алгоритма решения задачи

Для решения ЗЛП существует метод, предназначенный для решения ЗЛП с видом знака ограничения $\le$, называемый прямым.

Допустим, имеется исходная ЗЛП в канонической форме:

$$F(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n => \max$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2$$

....

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m$$

В общем случае m любых переменных можно выразить через оставшиеся (n-m) переменные, например - $x_1 ... x_m$ *через* $x_m + 1 ... x_n$:

$$x_1 = b_1 - (a_{1m} + 1x_m + a_{1m} + 2x_m + ... + a_{1n}x_n)$$

....

$$x_m = b_m - (a_{mm} + 1x_m + 1 + a_{mm} + 2x_m + 2 + ... + a_{mn}x_n)$$

Переменные $x_1 ... x_m$ называются базисными, а $x_m + 1 ... x_n$ - свободными.

Если положить $x_m + 1 = ... = x_n = 0$, то $x_i = b_i$ и если при этом все $b_i = 0$, то и $x_i = 0$, и такой вектор: $X = (b_1, b_2, ..., b_m, 0, 0, ..., 0)$ называется базисным или опорным решением ЗЛП.

Выражение целевой функции через свободные переменные:

$F = c_0 - (c_m + 1x_m + 1 + ... + 1c_n x_n)$

Здесь коэффициенты C_0, C_{m+1}, ..., C_n выражаются через c_j, B_i, A_{ij}.

Составим по этим данным начальную симплекс-таблицу.

Таблица 5.2.1.1 - Начальная симплекс-таблица

		c_j	c_1	c_2	...	0	0	...	0
Базис	$C_б$	A_0	A_1	A_2	...	A_{n+1}	A_{n+2}	...	A_{n+m}
A_{n+1}	0	b_1	a_{11}	a_{12}	...	1	0	…	0
A_{n+2}	0	b_2	a_{21}	a_{22}	…	0	1	…	0
...	…	…	…	…	…	…	…	…	…
A_{n+m}	0	b_m	a_{m1}	a_{m2}	…	0	0	…	1
$F(x)$	δ_j	δ_0	δ_1	δ_2	…	δ_{n+1}	δ_{n+2}	…	δ_{n+m}

$C_б$ – коэффициенты целевой функции при переменных, соответствующих векторам, вошедшим в базис. Верхняя строка таблицы (c_j) соответствует значению коэффициентов при переменных целевой функции. Нижняя строка таблицы (δ_j) – строка симплекс - разностей, которые рассчитываются по следующей формулам:

$$\delta_0 = \sum_{i=1}^{m} a_{i0} C_{iб} , \quad \delta_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} C_{iб} - C_j , \text{ где } j=[1, n+m]$$

Замечание: В простейшем случае в качестве базисных переменных можно взять такие m переменных, каждая из которых входит только в одно ограничение, причем с положительным знаком, а все свободные члены $b_i>0$.

Алгоритм симплекс-метода:

1) Определить число и состав базисных и свободных переменных.

2) Выразить базисные переменные через свободные переменные.

3) Выразить целевую функцию через свободные переменные.

4) Построить начальную симплекс-таблицу.

5) Проверить решение на оптимальность: если в F-строке (кроме δ_0) все $\delta_{j0} \geq 0$ при решении задачи на максимум, то получено оптимальное решение: $X=(b_1,\ldots,b_{m0},\ldots,0)$, $F=\delta_0$. Если же существует $\delta_j<0$, то решение можно улучшить, но предварительно надо проверить факт существования решения.

6) Проверить существование решения: рассмотрим все столбцы, у которых $\delta_j<0$, если существует хотя бы один столбец, у которого все коэффициенты $a_{ij}<0$, то задача решения не имеет, т.к. множество допустимых решений D не ограничено, и целевая функция неограниченно возрастает. Если таких столбцов нет, то переходим к следующему этапу.

7) Выбрать свободную переменную, которую надо ввести в базис (выбор разрешающего столбца): это столбец, с минимальным значением δ_j (пусть это k-й столбец)

8) Выбрать базисную переменную, которую надо вывести из базиса (выбор разрешающей строки): рассмотрим k-й столбец и все его элементы, которые больше нуля, т.е. $a_{ik}>0$; для всех этих элементов находим отношение b_i/a_{ik} и выбираем строку, которая соответствует минимальному значению этого отношения (пусть это i-я строка); соответствующая i-я переменная x_i выводится из базиса; при нескольких одинаковых отношениях берем любую строку; элемент a_{ik} называется разрешающим элементом.

9) Пересчитать симплекс-таблицу: составляем новую симплекс-таблицу, заменив в составе базисных переменных x_i на x_k; заполняем сначала новую k-ю строку, записывая в нее элементы старой i-ой строки, поделенные на разрешающий элемент; после заполнения k-ой строки заполняем оставшиеся строки; для этого k-ю строку умножаем последовательно на такие числа, чтобы после сложения ее с каждой

строкой старой таблицы в k-ом столбце получить везде ноль (кроме единицы в k-ой строке).

10) После заполнения новой симплекс-таблицы алгоритм возвращается к 5-му пункту.

Конец работы алгоритма:

- либо когда в *F*-строке все коэффициенты (кроме δ_0) будут неотрицательны, тогда получаем оптимальное решение,
- либо когда существует столбец, у которого δ_j<<0 и все коэффициенты $A_{ij} \leq 0$, в этом случае решения не существует.

5.2.2. Пример решения задачи линейного программирования простым симплекс методом

Пусть дано следующее условие задачи:

$$F(x) = 2x_1 + 5x_2 -> \max$$

$$\begin{cases} x_1 \leq 400; \\ x_2 \leq 300; \\ x_1 + x_2 \leq 500. \end{cases}$$

Запишем условие задачи в расширенном виде. Для этого к каждому из уравнений прибавляется дополнительная переменная. Т.к. уравнений 3, то и переменных тоже 3. Получили следующую систему:

$$\begin{cases} 1x_1 + 0x_2 + 1x_3 + 0x_4 + 0x_5 = 400; \\ 0x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 1x_4 + 0x_5 = 300; \\ 1x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 1x_5 = 500. \end{cases}$$

Условие задачи запишем в виде:

		c_j	2	5	0	0	0
Базис	$C_б$	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_3	0	400	1	0	1	0	0
A_4	0	300	0	1	0	1	0
A_5	0	500	1	1	0	0	1
	δ_j	0	-2	-5	0	0	0

c_j - значение коэффициентов при переменных целевой функции.

Симплекс - разности считаются по формулам $\delta_0 = \sum_{i=1}^{m} a_{i0} C_{iб}$ и $\delta_j = \sum a_{ij} C_{iб} - C_j$:

$$\delta_0 = 400*0 + 300*0 + 500*0 = 0$$
$$\delta_1 = 1*0 + 0*0 + 1*0 - 2 = -2$$
$$\delta_2 = 0*0 + 1*0 + 1*0 - 5 = -5$$
$$\delta_3 = 1*0 + 0*0 + 0*0 - 0 = 0$$
$$\delta_4 = 0*0 + 1*0 + 0*0 - 0 = 0$$
$$\delta_5 = 0*0 + 0*0 + 1*0 - 0 = 0$$

Выбираем направляющий столбец. Т.к. задача решается на максимум, то направляющий столбец выбирается по минимальному элементу строки δ_j. Значит, в базис будет вводиться столбец A_2.

Выбираем направляющую строку. Для этого нужно вектор A_0 поэлементно разделить на вектор (столбец), вводимый в базис (в данном случае столбец A_2) и выбрать самый минимальный элемент:

$$\theta = \min\left\{\frac{a_{i0} \geq 0}{a_{ij} > 0}\right\} => i\,;\ \theta = \min\left\{\cancel{\frac{400}{0}}; \frac{300}{1}; \frac{500}{1}\right\},$$

В результате получим минимальное отношение для строки A_4, которая и будет соответствовать вектору, выводимому из базиса.

Примечание: Если после перебора всех столбцов не удается найти направляющую строку, то это говорит о не замкнутости области ограничений в направлении оптимизации, т.е. задача не имеет решений.

В результате имеем

		c_j	2	5	0	0	0
Базис	$C_б$	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_3	0	400	1	0	1	0	0
← A_4	0	300	0	1	0	1	0
A_5	0	500	1	1	0	0	1
	δ_j	0	-2	-5 ↑	0	0	0

Далее следует выполнить пересчет симплекс таблицы по методу Жордана – Гаусса.

Элемент, стоящий на пересечении направляющих столбца и строки, называется направляющим.

Направляющая строка поэлементно делится на направляющий элемент. В результате чего получаем преобразованную строку новой таблицы – в данном случае строка A_2, которая называется модифицированной. Из оставшихся строк исходной таблицы вычитаются элементы модифицированной строки, умноженные на число, стоящее на пересечении направляющего столбца и пересчитываемой строки.

В результате преобразований получим:

		c_j	2	5	0	0	0
Базис	$C_б$	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_3	0	400	1	0	1	0	0
A_2	5	300	0	1	0	1	0
A_5	0	200	1	0	0	-1	1

Подсчитаем симплекс-разности по формулам $\delta_0 = \sum_{i=1}^{m} a_{i0} C_{iб}$ и $\delta_j = \sum a_{ij} C_{iб} - C_j$:

$$\delta_0 = 400*0 + 300*5 + 200*0 = 1500$$

$$\delta_1 = 1*0 + 0*5 + 1*0 - 2 = -2$$

$$\delta_2 = 0*0 + 1*5 + 0*0 - 5 = 0$$

$$\delta_3 = 1*0 + 0*5 + 0*0 - 0 = 0$$

$$\delta_4 = 0*0 + 5*1 + 0*(-1) - 0 = 0$$

$$\delta_5 = 0*0 + 0*5 + 1*0 - 0 = 0$$

Выбираем направляющий столбец по минимальному элементу строки δ_j. Значит, в базис будет вводиться вектор A_1.

Выбираем направляющую строку. Для этого нужно вектор A_0 поэлементно разделить на вектор (столбец), вводимый в базис (в данном случае столбец A_1) и выбрать самый минимальный элемент:

$$\theta = \min\left\{\frac{400}{1}; \cancel{\frac{300}{0}}; \frac{200}{1}\right\},$$

Т.к. на 0 делить нельзя, в результате получим минимальный элемент в строке A_5, которая и будет определять вектор, выводимый из базиса.

Результат представлен ниже

		c_j	2	5	0	0	0
Базис	$C_б$	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_3	0	400	1	0	1	0	0
A_2	5	300	0	1	0	1	0
A_5	0	200	1	0	0	-1	1
	δ_j	1500	-2	0	0	0	0

Выполним пересчет симплекс таблицы:

Окружностью обозначим направляющий элемент, стоящий на пересечении строки A_5 и столбца A_1.

Разделим направляющую строку поэлементно на направляющий элемент. Получим преобразованную строку новой таблицы – строку A_1 - модифицированную. Из оставшихся строк исходной таблицы вычтем элементы модифицированной строки, умноженные на число, стоящее на пересечении направляющего столбца и пересчитываемой строки.

Подсчитаем симплекс-разности:

$\delta_0 = 200*0 + 300*5 + 200*2 = 1900$

$\delta_1 = 0*0 + 0*5 + 1*2 - 2 = 0$

$\delta_2 = 0*0 + 1*5 + 2*0 - 5 = 0$

$\delta_3 = 1*0 + 0*5 + 0*0 - 0 = 0$

$\delta_4 = 1*0 + 1*5 + 2*(-1) - 0 = 3$

$\delta_5 = -1*0 + 0*5 + 1*2 - 0 = 2$

В результате преобразований получим следующую симплекс - таблицу:

		c_j	2	5	0	0	0
Базис	$C_б$	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_3	0	200	0	0	1	1	-1
A_2	5	300	0	1	0	1	0
A_1	2	200	1	0	0	-1	1
	δ_j	1900	0	0	0	3	2

Т.к. данная задача решается на максимум функции, то соответственно мы должны искать самый отрицательный элемент в строке симплекс-разностей. Такового в полученной таблице нет, значит, найдено оптимальное решение. Из симплекс таблицы видно, что удовлетворять условиям задачи будут решения

$x_1 = 200$ *и* $x_2 = 300$. Переменная x_3 является свободной, поэтому в окончательном решении опущена. Максимальное значение функции находится в строке δ_j по столбцу A_0, т.е. $Fmax(x)$=1900.

Выполним проверку:

$F(x) = 2x_1 + 5x_2 = 2*200 + 5*300 = 1900$

$x_1 \le 400 \to 200 < 400$

$x_2 \le 300 \to 300 = 300$

$x_1 + x_2 \le 500 \to 200 + 300 = 500$

В результате вычислений получили оптимальное решение задачи на максимум: $x_1 = 200$, $x_2 = 300$, *Fmax(x)* =190, что показано на рисунке 1.1.

5.3. Метод искусственного базиса

Содержательная постановка задачи и необходимые сведения приводятся в разделе 4, задача 2.

5.3.1. Построение математической модели задачи

На основе содержания задачи построим ее математическую модель.

Пусть $x_1, x_2, ..., x_n$ - набор чисел, которые называются допустимым решением задач линейного программирования. Они удовлетворяют системе исходных ограничений. Оптимальным называется допустимое решение, при котором целевая функция достигает min или max,в соответствии с постановкой задачи.

Введем переменные x_1 и x_2, где x_1 - количество изготовленных витаминов для взрослых (в кг), а x_2 - количество изготовленных витаминов для детей (в кг).

Так как стоимость одного килограмма витаминов каждого вида известна, то общий доход от их реализации составляет $7x_1 + 6x_2$ (ден.ед.).

Обозначив общий доход через *F*, можно дать математическую формулировку целевой функции. Так как требуется, чтобы доход от реализации продукции был максимальным, то это определит направление оптимизации:

$$F_{\max} = 7x_1 + 6x_2 .$$

Составим систему ограничений.

При определении плана производства изделий должны быть учтены ограничения в применении добавок, а именно: расход каждого вида добавок на производство обоих видов витаминов должен соответствовать рецептам. Это приводит к следующим ограничениям:

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \geq 10, \\ 5x_1 + 2x_2 \geq 10, \\ x_1 \leq 6, \\ x_2 \leq 5. \end{cases}$$

Неявное ограничение, вытекающее из экономического смысла выбранных переменных, заключается в том, что объемы производства не могут принимать отрицательные значения:

$$x_1, x_2 \geq 0 .$$

Таким образом, математическую модель задачи можно записать в следующем виде: определить план $X = (x_1, x_2)$, обеспечивающий максимальное значение функции:

$$\max F(x) = \max(7x_1 + 6x_2)$$

при наличии ограничений:

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \geq 10 \\ 5x_1 + 2x_2 \geq 10 \\ x_1 \leq 6 \\ x_2 \leq 5 \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

5.3.2. Алгоритм решения задачи

Метод применяют в том случае, когда:

1) Все знаки отношения в системе ограничений имеют вид $\geq$;
2) Все знаки имеют вид =;

3) Имеется смесь знаков $\geq$, =, $\leq$.

В каноническую форму записи добавляются искусственные переменные, не имеющие смысла с точки зрения решения задачи. Одновременно корректируется целевая функция с таким расчетом, чтобы помешать оптимизации, т. е. если задача решалась на максимум, то искусственные переменные вводятся с множителем $-\mu$ (μ - это сколь угодно большое положительное число), а если на минимум, то вводят с множителем $+\mu$.

Предварительный этап:

1. Исходная система ограничений подвергается канонизации. Система ограничений считается представленной в канонической форме, если все знаки ограничений являются знаками равенства.

Дополнительная переменная вводиться в уравнения системы ограничений с коэффициентом К. Значение этого коэффициента К зависит от знака отношения в уравнении и определяется следующим образом:

$$K = \begin{cases} 0, если =; \\ 1, если \leq; \\ -1, если \geq; \end{cases}$$

2. В те строки канонизированной системы, которые изначально имели знаки $\geq$ и =, добавляются искусственные переменные по одной на каждое такое ограничение.

Одновременно модернизации подвергается и целевая функция, в которую вводятся искусственные переменные с множителем $\pm\mu$. Знак множителя выбирается таким образом, чтобы добавка ухудшала целевую функцию.

Сделано это для того, чтобы искусственные переменные выводились из базиса.

3. Условия задачи записываются в таблицу. При этом базис образуют вектора, соответствующие искусственным переменным и неотрицательным дополнительным переменным.

Этап решения.

1. Рассчитываются симплекс-разности:

$$\delta_0 = \sum_{i=1}^{m} a_{i0} \cdot C_{БI}, \ \delta_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \cdot C_{IБ} - C_j;$$

δ_0 – текущее значение целевой функции, δ_i показывают, на сколько велик вклад той или иной переменной в целевую функцию.

2. После расчета δ_i и δ_0 выполняется проверка на достижение оптимума. Если задача решается на максимум и все симплекс-разности неотрицательны, то это свидетельствует о получении оптимального решения (для решения на минимум об оптимальном решении свидетельствуют неположительные значения строки симплекс-разности), но δ_0 в это рассмотрение не входит.

Оптимальное решение находится в столбце A_0, а значение целевой функции, соответствующее оптимуму, в строке δ (строке симплекс - разностей).

Если строка симплекс-разности указывает на оптимальное решение, и в решение входят искусственные переменные, то это говорит о несовместимости системы ограничений.

Если проверка на достижение оптимума не выполнилась, то переходим к следующему этапу.

3. Определение направляющего столбца.

При решении задачи на max в строке симплекс-разностей находят отрицательную δ в порядке их возрастания (самую большую отрицательную). При решении задачи на min определяют δ в порядке убывания положительных симплекс-разностей (самую малую положительную).

Если во всех векторах, соответствующих δ, все числа неположительные, то задача решения не имеет по причине незамкнутости системы ограничений.

Столбец, соответствующий этой найденной симплекс-разности, и будет искомым направляющим столбцом.

4. Подбор направляющей строки.

Независимо от направления оптимизации номер направляющей строки определяется по правилу:

$$\theta = \min\{\frac{a_{i0} \geq 0}{a_{ij^*} > 0}\},$$

где j^* – номер направляющего столбца (смотрите п. 3.).

Если в ходе расчетов из базиса выводится искусственная переменная, то соответствующий столбец таблицы вычеркивается и не рассматривается далее.

Если мы перебрали все столбцы, и нам не удалось определить направляющую строку, то это говорит о том, что область ограничений не замкнута в направлении оптимизации. Следовательно, решения нет.

5. Пересчет таблицы по методу Жордана-Гаусса.

5.3.3. Пример решения задачи методом искусственного базиса.

Запишем условия задачи:

$$F_{\max} = 7x_1 + 6x_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \ge 10 \\ 5x_1 + 2x_2 \ge 10 \\ x_1 \le 6 \\ x_2 \le 5 \end{cases}$$

Предварительный этап:

1. Исходная система ограничений подвергается канонизации.

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - x_3 = 10 \\ 5x_1 + 2x_2 - x_4 = 10 \\ x_1 + x_5 = 6 \\ x_2 + x_6 = 5 \end{cases}$$

2. В строки канонизированной системы, которые изначально имели знак $\ge$, а именно: в первую и во вторую, добавляем искусственные переменные x_7 и x_8:

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - x_3 + x_7 = 10 \\ 5x_1 + 2x_2 - x_4 + x_8 = 10 \\ x_1 + x_5 = 6 \\ x_2 + x_6 = 5 \end{cases}$$

Одновременно модернизации подвергаем и целевую функцию, в которую вводим искусственные переменные с множителем $-\mu$:

$$F_{\max} = 7x_1 + 6x_2 - \mu x_7 - \mu x_8$$

3. Условия задачи записываем в таблицу.

При этом образуем базис из векторов, соответствующих искусственным переменным и неотрицательным дополнительным переменным, то есть из A_5, A_6, A_7, A_8.

		C_j	7	6	0	0	0	0	-μ	-μ
Б	$C_б$	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8
A_7	-μ	10	2	5	-1	0	0	0	1	0
A_8	-μ	10	5	2	0	-1	0	0	0	1
A_5	0	6	1	0	0	0	1	0	0	0
A_6	0	5	0	1	0	0	0	1	0	0
	δ									

Первая итерация.

1. Рассчитываем симплекс-разности:

$$\delta_0 = \sum_{i=1}^{m} a_{i0} \cdot C_{БI} = -10\mu - 10\mu + 0*6 + 0*5 = -20\mu$$

$$\delta_1 = \sum_{i=1}^{m} a_{i1} \cdot C_{IБ} - 7 = -2\mu - 5\mu - 7 = -7\mu - 7$$

$$\delta_2 = \sum_{i=1}^{m} a_{i2} \cdot C_{IБ} - 6 = -7\mu - 6$$

$$\delta_3 = \sum_{i=1}^{m} a_{i3} \cdot C_{IБ} - 0 = \mu$$

$$\delta_4 = \sum_{i=1}^{m} a_{i4} \cdot C_{IБ} - 0 = \mu$$

$$\delta_5 = \delta_6 = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \cdot C_{IБ} - 0 = 0$$

$$\delta_7 = \delta_8 = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \cdot C_{IБ} + \mu = -\mu + \mu = 0$$

		C_j	7	6	0	0	0	0	-μ	-μ
Б	$C_б$	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8
A_7	-μ	10	2	5	-1	0	0	0	1	0
A_8	-μ	10	5	2	0	-1	0	0	0	1
A_5	0	6	1	0	0	0	1	0	0	0
A_6	0	5	0	1	0	0	0	1	0	0
	δ	-20μ	-7μ-7	-7μ-6	μ	μ	0	0	0	0

2. Выполняем проверку на достижение оптимума. Задача решается на максимум, и поэтому о получении оптимального решения свидетельствуют неотрицательные симплекс-разности.

На этой итерации не все симплекс-разности неотрицательны, следовательно, проверка на достижение оптимума не выполнилась. Переходим к следующему этапу.

3. Определяем направляющий столбец.

Находим отрицательную δ в порядке их возрастания (самую большую отрицательную). Вектор A_1 будет вводиться в базис, так как его определяет самая отрицательная симплекс-разность: $\delta_1 = -7\mu - 7$

Столбец A_1 и будет искомым направляющим столбцом.

4. Подбираем направляющую строку.

Номер направляющей строки определяем по правилу:

$$\theta = \min\{\frac{a_{i0} \geq 0}{a_{ij^*} > 0}\},$$

где j^* – номер направляющего столбца.

Для этой итерации j^*=1.

$$\theta = \min\{\frac{10}{2}, \frac{10}{5}, \frac{6}{1}\} = \frac{10}{5} = 2$$

Следовательно, направляющей строкой, выводимой из базиса, будет A_8.

Так как из базиса выводится искусственная переменная, то соответствующий столбец таблицы вычеркивается и не рассматривается далее.

		C_j	7	6	0	0	0	0	$-\mu$	$-\mu$
Б	$C_б$	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8
A_7	$-\mu$	10	2	5	-1	0	0	0	1	0
A_8	$-\mu$	10	5	2	0	-1	0	0	0	1
A_5	0	6	1	0	0	0	1	0	0	0
A_6	0	5	0	1	0	0	0	1	0	0
	δ	-20μ	$-7\mu-7$	$-7\mu-6$	μ	μ	0	0	0	0

5. Пересчет таблицы по методу Жордана-Гаусса.

На пересечении направляющих столбца и строки стоит направляющий элемент, который равен 5.

Первым шагом, направляющую строку поэлементно делим на направляющий элемент. В результате получаем строку новой таблицы:

	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
A_1	10/5=2	5/5=1	2/5	0	1/5	0	0	0

Из оставшихся строк исходной таблицы вычитаются элементы модифицированной строки, умноженные на число, стоящее на пересечении направляющего столбца и пересчитываемой строки.

Вектор A_7:

	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
A_7	10-2*2 =6	2-1*2 =0	5-2/5*2 =21/5	-1-0*2 =-1	0+1/5*2 =2/5	0	0	1-0*2 =1

Вектор A_5:

	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
A_5	6-2*1 =4	0	0-2/5*1 =-2/5	0	0+1/5*1 =1/5	1-0*1 =1	0	0

Вектор A_6:

	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
A_6	5	0	1	0	0	0	1	0

В итоге получаем новую пересчитанную таблицу:

		C_j	7	6	0	0	0	0	-μ
Б	$C_б$	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
A_7	-μ	6	0	21/5	-1	2/5	0	0	1
A_1	7	2	1	2/5	0	-1/5	0	0	0
A_5	0	4	0	-2/5	0	1/5	1	0	0
A_6	0	5	0	1	0	0	0	1	0
	δ								

Вторая итерация.

1. Рассчитываем симплекс-разности:

$$\delta_0 = \sum_{i=1}^{m} a_{i0} \cdot C_{БI} = -6\mu + 7*2 + 0*4 + 0*5 = -6\mu + 14$$

$$\delta_1 = \sum_{i=1}^{m} a_{i1} \cdot C_{IБ} - 7 = 1*7 - 7 = 0$$

$$\delta_2 = \sum_{i=1}^{m} a_{i2} \cdot C_{IБ} - 6 = -21/5\mu + 2/5*7 - 6 = -21/5\mu - 16/5$$

$$\delta_3 = \sum_{i=1}^{m} a_{i3} \cdot C_{IБ} - 0 = \mu$$

$$\delta_4 = \sum_{i=1}^{m} a_{i4} \cdot C_{IБ} - 0 = -2/5\mu - 1/5 * 7 = -2/5\mu - 7/5$$

$$\delta_5 = \delta_6 = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \cdot C_{IБ} - 0 = 0$$

$$\delta_7 = \sum_{i=1}^{m} a_{i7} \cdot C_{IБ} + \mu = -\mu + \mu = 0$$

		C_j	7	6	0	0	0	0	-μ
Б	$C_б$	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
A_7	-μ	6	0	21/5	-1	2/5	0	0	1
A_1	7	2	1	2/5	0	-1/5	0	0	0
A_5	0	4	0	-2/5	0	1/5	1	0	0
A_6	0	5	0	1	0	0	0	1	0
	δ	-6μ+14	0	-21/5μ-16/5	μ	-2/5μ-7/5	0	0	0

2. Выполняем проверку на достижение оптимума. Задача решается на максимум, и поэтому о получении оптимального решения свидетельствуют неотрицательные симплекс-разности.

На этой итерации не все симплекс-разности неотрицательны, следовательно, проверка на достижение оптимума не выполнилась. Переходим к следующему этапу.

3. Определяем направляющий столбец.

Находим отрицательную δ в порядке их возрастания (самую большую отрицательную). Вектор A_2 будет вводиться в базис, так как его определяет самая отрицательная симплекс-разность: $\delta_2 = -21/5\mu - 16/5$

Столбец A_2 и будет искомым направляющим столбцом.

4. Подбираем направляющую строку.

Номер направляющей строки определяем по правилу:

$$\theta = \min\{\frac{a_{i0} \geq 0}{a_{ij^*} > 0}\},$$

где j^* – номер направляющего столбца.

Для этой итерации j^*=2.

$$\theta = \min\{\frac{30}{21}, \frac{10}{2}, 5\} = \frac{30}{21}$$

Следовательно, направляющей строкой, выводимой из базиса, будет A_7.

Так как из базиса выводится искусственная переменная, то соответствующий столбец таблицы вычеркивается и не рассматривается далее.

		C_j	7	6	0	0	0	0	$-\mu$
Б	$C_б$	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
← A_7	$-\mu$	6	0	21/5	-1	2/5	0	0	1
A_1	7	2	1	2/5	0	-1/5	0	0	0
A_5	0	4	0	-2/5	0	1/5	1	0	0
A_6	0	5	0	1	0	0	0	1	0
	δ	$-6\mu+14$	0	$-21/5\mu-16/5$ ↑	μ	$-2/5\mu-7/5$	0	0	0

5. Пересчет таблицы по методу Жордана-Гаусса.

На пересечении направляющих столбца и строки стоит направляющий элемент, который равен 21/5.

Первым шагом, направляющую строку поэлементно делим на направляющий элемент. В результате получаем строку новой таблицы:

	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
A_2	10/7	0	1	-5/21	2/21	0	0

Из оставшихся строк исходной таблицы вычитаются элементы модифицированной строки, умноженные на число, стоящее на пересечении направляющего столбца и пересчитываемой строки.

В итоге получаем новую пересчитанную таблицу:

		C_j	7	6	0	0	0	0
Б	$C_б$	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
A_2	6	10/7	0	1	-5/21	2/21	0	0
A_1	7	10/7	1	0	2/21	-5/21	0	0
A_5	0	32/7	0	0	-2/21	5/21	1	0
A_6	0	25/7	0	0	5/21	-2/21	0	1
	δ							

Третья итерация.

1. Рассчитываем симплекс-разности:

$$\delta_0 = \sum_{i=1}^{m} a_{i0} \cdot C_{БI} = 6*10/7 + 7*10/7 = 130/7$$

$$\delta_1 = \sum_{i=1}^{m} a_{i1} \cdot C_{IБ} - 7 = 1*7 - 7 = 0$$

$$\delta_2 = \sum_{i=1}^{m} a_{i2} \cdot C_{IБ} - 6 = 1*6 - 6 = 0$$

$$\delta_3 = \sum_{i=1}^{m} a_{i3} \cdot C_{IБ} - 0 = -6*5/21 + 7*2/21 = -16/21$$

$$\delta_4 = \sum_{i=1}^{m} a_{i4} \cdot C_{IБ} - 0 = 6*2/21 - 7*5/21 = -23/21$$

$$\delta_5 = \delta_6 = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \cdot C_{IБ} - 0 = 0$$

		C_j	7	6	0	0	0	0
Б	$C_б$	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
A_2	6	10/7	0	1	-5/21	2/21	0	0
A_1	7	10/7	1	0	2/21	-5/21	0	0
A_5	0	32/7	0	0	-2/21	5/21	1	0
A_6	0	25/7	0	0	5/21	-2/21	0	1
	δ	130/7	0	0	-16/21	-23/21	0	0

2. Выполняем проверку на достижение оптимума. Задача решается на максимум, и поэтому о получении оптимального решения свидетельствуют неотрицательные симплекс-разности.

На этой итерации не все симплекс-разности неотрицательны, следовательно, проверка на достижение оптимума не выполнилась. Переходим к следующему этапу.

3. Определяем направляющий столбец.

Находим отрицательную δ в порядке их возрастания (самую большую отрицательную). Вектор A_4 будет вводиться в базис, так как его определяет самая отрицательная симплекс-разность: $\delta_4 = -23/21$

Столбец A_4 и будет искомым направляющим столбцом.

4. Подбираем направляющую строку.

Номер направляющей строки определяем по правилу:

$$\theta = \min\{\frac{a_{i0} \geq 0}{a_{ij^*} > 0}\},$$

где j^* – номер направляющего столбца.

Для этой итерации j^*=4.

$$\theta = \min\{\frac{30}{2}, \frac{96}{5}\} = \frac{30}{2} = 15$$

Следовательно, направляющей строкой, выводимой из базиса, будет A_2.

		C_j	7	6	0	0	0	0
Б	$C_б$	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
A_2	6	10/7	0	1	-5/21	2/21	0	0
A_1	7	10/7	1	0	2/21	-5/21	0	0
A_5	0	32/7	0	0	-2/21	5/21	1	0
A_6	0	25/7	0	0	5/21	-2/21	0	1
	δ	130/7	0	0	-16/21	-23/21	0	0

5. Пересчет таблицы по методу Жордана-Гаусса.

На пересечении направляющих столбца и строки стоит направляющий элемент, который равен 2/21.

Первым шагом, направляющую строку поэлементно делим на направляющий элемент. В результате получаем строку новой таблицы:

	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
A_4	15	0	21/2	-5/2	1	0	0

Из оставшихся строк исходной таблицы вычитаются элементы модифицированной строки, умноженные на число, стоящее на пересечении направляющего столбца и пересчитываемой строки.

В итоге получаем новую пересчитанную таблицу:

		C_j	7	6	0	0	0	0
Б	$C_б$	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
A_4	0	15	0	21/2	-5/2	1	0	0
A_1	7	5	1	5/2	-1/2	0	0	0
A_5	0	1	0	-5/2	1/2	0	1	0
A_6	0	5	0	1	0	0	0	1
	δ							

Четвертая итерация.

1. Рассчитываем симплекс-разности:

$$\delta_0 = \sum_{i=1}^{m} a_{i0} \cdot C_{БI} = 7*5 = 35$$

$$\delta_1 = \sum_{i=1}^{m} a_{i1} \cdot C_{IБ} - 7 = 1*7 - 7 = 0$$

$$\delta_2 = \sum_{i=1}^{m} a_{i2} \cdot C_{IБ} - 6 = 5/2*7 - 6 = 23/2$$

$$\delta_3 = \sum_{i=1}^{m} a_{i3} \cdot C_{IБ} - 0 = -1/2*7 = -7/2$$

$$\delta_4 = \sum_{i=1}^{m} a_{i4} \cdot C_{IБ} - 0 = 0$$

$$\delta_5 = \delta_6 = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \cdot C_{IБ} - 0 = 0$$

		C_j	7	6	0	0	0	0
Б	$C_б$	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
A_4	0	15	0	21/2	-5/2	1	0	0
A_1	7	5	1	5/2	-1/2	0	0	0
A_5	0	1	0	-5/2	1/2	0	1	0
A_6	0	5	0	1	0	0	0	1
	δ	35	0	23/2	-7/2	0	0	0

2. Выполняем проверку на достижение оптимума. Задача решается на максимум, и поэтому о получении оптимального решения свидетельствуют неотрицательные симплекс-разности.

На этой итерации не все симплекс-разности неотрицательны, следовательно, проверка на достижение оптимума не выполнилась. Переходим к следующему этапу.

3. Определяем направляющий столбец.

Находим отрицательную δ в порядке их возрастания (самую большую отрицательную). Вектор A_3 будет вводиться в базис, так как его определяет самая отрицательная симплекс-разность: $\delta_3 = -7/2$

Столбец A_3 и будет искомым направляющим столбцом.

4. Подбираем направляющую строку.

Номер направляющей строки определяем по правилу:

$$\theta = \min\{\frac{a_{i0} \geq 0}{a_{ij^*} > 0}\},$$

где j^* – номер направляющего столбца.

Для этой итерации j^* =3.

$\theta = \min\{2\} = 2$

Следовательно, направляющей строкой, выводимой из базиса, будет A_5.

		C_j	7	6	0	0	0	0
Б	$C_б$	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
A_4	0	15	0	21/2	-5/2	1	0	0
A_1	7	5	1	5/2	-1/2	0	0	0
← A_5	0	1	0	-5/2	1/2	0	1	0
A_6	0	5	0	1	0	0	0	1
	δ	35	0	23/2	-7/2 ↑	0	0	0

5. Пересчет таблицы по методу Жордана-Гаусса.

На пересечении направляющих столбца и строки стоит направляющий элемент, который равен 1/2.

Первым шагом, направляющую строку поэлементно делим на направляющий элемент. В результате получаем строку новой таблицы:

	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
A_3	2	0	-5	1	0	2	0

Из оставшихся строк исходной таблицы вычитаются элементы модифицированной строки, умноженные на число, стоящее на пересечении направляющего столбца и пересчитываемой строки.

В итоге получаем новую пересчитанную таблицу:

		C_j	7	6	0	0	0	0
Б	$C_б$	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
A_4	0	20	0	-2	0	1	5	0
A_1	7	6	1	0	0	0	1	0
A_3	0	2	0	-5	1	0	2	0
A_6	0	5	0	1	0	0	0	1
	δ							

Пятая итерация.

1. Рассчитываем симплекс-разности:

$$\delta_0 = \sum_{i=1}^{m} a_{i0} \cdot C_{БI} = 7 * 6 = 42$$

$$\delta_1 = \sum_{i=1}^{m} a_{i1} \cdot C_{IБ} - 7 = 1 * 7 - 7 = 0$$

$$\delta_2 = \sum_{i=1}^{m} a_{i2} \cdot C_{IБ} - 6 = 0 - 6 = -6$$

$$\delta_3 = \sum_{i=1}^{m} a_{i3} \cdot C_{IБ} - 0 = 0$$

$$\delta_4 = \sum_{i=1}^{m} a_{i4} \cdot C_{IБ} - 0 = 0$$

$$\delta_5 = \sum_{i=1}^{m} a_{i5} \cdot C_{IБ} - 0 = 7$$

$$\delta_6 = \sum_{i=1}^{m} a_{i6} \cdot C_{IБ} - 0 = 0$$

		C_j	7	6	0	0	0	0
Б	$C_б$	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
A_4	0	20	0	-2	0	1	5	0
A_1	7	6	1	0	0	0	1	0
A_3	0	2	0	-5	1	0	2	0
A_6	0	5	0	1	0	0	0	1
	δ	42	0	-6	0	0	7	0

2. Выполняем проверку на достижение оптимума. Задача решается на максимум, и поэтому о получении оптимального решения свидетельствуют неотрицательные симплекс-разности.

На этой итерации не все симплекс-разности неотрицательны, следовательно, проверка на достижение оптимума не выполнилась. Переходим к следующему этапу.

3. Определяем направляющий столбец.

Находим отрицательную δ в порядке их возрастания (самую большую отрицательную). Вектор A_2 будет вводиться в базис, так как его определяет самая отрицательная симплекс-разность: $\delta_2 = -6$

Столбец A_2 и будет искомым направляющим столбцом.

4. Подбираем направляющую строку.

Номер направляющей строки определяем по правилу:

$$\theta = \min\{\frac{a_{i0} \geq 0}{a_{ij^*} > 0}\},$$

где j^* – номер направляющего столбца.

Для этой итерации j^* =2.

$\theta = \min\{\frac{5}{1}\} = 5$

Следовательно, направляющей строкой, выводимой из базиса, будет A_6.

		C_j	7	6	0	0	0	0
Б	$C_б$	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
A_4	0	15	0	21/2	-5/2	1	0	0
A_1	7	5	1	5/2	-1/2	0	0	0
A_3	0	1	0	-5/2	1/2	0	1	0
← A_6	0	5	0	1	0	0	0	1
	δ	35	0	23/2	-7/2	0	0	0
				↑				

5. Пересчет таблицы по методу Жордана-Гаусса.

На пересечении направляющих столбца и строки стоит направляющий элемент, который равен 1/2.

Первым шагом, направляющую строку поэлементно делим на направляющий элемент. В результате получаем строку новой таблицы:

	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
A_2	5	0	1	0	0	0	1

Из оставшихся строк исходной таблицы вычитаются элементы модифицированной строки, умноженные на число, стоящее на пересечении направляющего столбца и пересчитываемой строки.

В итоге получаем новую пересчитанную таблицу:

		C_j	7	6	0	0	0	0
Б	$C_б$	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
A_4	0	30	0	0	0	1	5	2
A_1	7	6	1	0	0	0	1	0
A_3	0	27	0	0	1	0	2	5
A_2	6	5	0	1	0	0	0	1
	δ							

Шестая итерация.

1. Рассчитываем симплекс-разности:

$$\delta_0 = \sum_{i=1}^{m} a_{i0} \cdot C_{БI} = 7*6+6*5 = 72$$

$$\delta_1 = \sum_{i=1}^{m} a_{i1} \cdot C_{IБ} - 7 = 1*7-7 = 0$$

$$\delta_2 = \sum_{i=1}^{m} a_{i2} \cdot C_{IБ} - 6 = 6-6 = 0$$

$$\delta_3 = \sum_{i=1}^{m} a_{i3} \cdot C_{IБ} - 0 = 0$$

$$\delta_4 = \sum_{i=1}^{m} a_{i4} \cdot C_{IБ} - 0 = 0$$

$$\delta_5 = \sum_{i=1}^{m} a_{i5} \cdot C_{IБ} - 0 = 7$$

$$\delta_6 = \sum_{i=1}^{m} a_{i6} \cdot C_{IБ} - 0 = 6$$

		C_j	7	6	0	0	0	0
Б	$C_б$	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
A_4	0	30	0	0	0	1	5	2
A_1	7	6	1	0	0	0	1	0
A_3	0	27	0	0	1	0	2	5
A_2	6	5	0	1	0	0	0	1
	δ	72	0	0	0	0	7	6

2. Выполняем проверку на достижение оптимума. Задача решается на максимум, и поэтому о получении оптимального решения свидетельствуют неотрицательные симплекс-разности.

На этой итерации все симплекс-разности неотрицательны, следовательно, проверка на достижение оптимума выполнилась.

Получен следующий оптимальный план: X_{opt} = (6; 5), при этом максимальное значение целевой функции составляет: F_{max} = 7*6+6*5 = 72 ден.ед.

Значит, фирме необходимо изготавливать и продавать 6 кг витаминов для взрослых и 5 кг витаминов для детей, чтобы доход фирмы от реализации витаминов был максимальным.

5.4. Модифицированный симплекс-метод

5.4.1.Описание алгоритма решения задачи

Использование признака оптимальности

$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} * \lambda_i^* = c_j$ позволяет сконструировать

второй алгоритм симплекс-метода, или модифицированный симплекс-метод. В литературе он встречается также под названием метода обратной матрицы. Этот алгоритм был впервые применен Л.В. Канторовичем для решения одной из частных ЛП-задач, а затем для общей задачи линейного программирования в 1951 году.

При решении задач линейного программирования, в которых п (количество переменных) существенно больше m (количество ограничений), модифицированный симплекс-метод требует по сравнению с другими значительно меньшего количества вычислительных операций и объема памяти ЭВМ.

В модифицированном симплекс-методе реализуется та же основная идея, что и в обычном симплекс-методе, но здесь на каждой итерации пересчитывается не вся матрица A^{-1}, обратная матрице ограничений A, а лишь та часть, которая относится к текущему базису Ax.

Метод основан на использовании основной и вспомогательной таблиц. Во вспомогательную таблицу помещается математическая модель, представленная в канонической форме и несколько строк симплекс-разностей, которые формируются по мере вычисления. В основную таблицу помещается обратная матрица и промежуточные результаты расчетов.

Метод особенно эффективен при значительном превышении числа ограничений над числом переменных. Он работает независимо от системы ограничений, при этом по необходимости вводят искусственные переменные.

Алгоритм метода:

1. Исходная математическая модель подвергается канонизации и при необходимости в нее добавляется искусственные переменные.

2. По завершению предыдущего этапа строится пара таблиц: основная и вспомогательная. Во вспомогательную помещается условие задачи в канонической форме и переменное число строк симплекс-разностей. На каждой итерации появляется новая строка.

Вспомогательная таблица имеет вид:

		C_i	C_1	...	0	0	...	0	$\pm\mu$	...	$\pm\mu$
Б	$C_б$	A_0	A_1	...	A_n	A_{n+1}	...	A_{n+m}	A_{n+m+1}	...	A_{n+m+r}
A_{n+1}	0	b_1	a_{11}	....	a_{1n}	± 1	...	0	1	...	0
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
A_{n+m}	0	b_m	a_{m1}	....	a_{mn}	0	...	± 1	0	...	1

Основная таблица имеет вид:

A_x^{-1}

Б	$C_б$	e_0	e_1	e_2	...	e_n	A^*	Θ
A_{n+1}	0	b_1			...			
...	...	...	...	...	...	...	...	...
A_{n+m}	0	b_m			...			
		Λ			...			

В столбец e_0 помещается содержимое A_o, а столбцы Б и $C_б$ заполняются по известным правилам. A^* и Θ пока не заполнены.

Первым шагом рассчитывается строка Λ^T :

$$\Lambda^T = C_b^T * A_x^{-1}; \delta_0 = C_b^T * e_0$$

$$\delta_j = \Lambda^T * A_j - C_j$$

Правило для определения направляющего столбца такое, как и в ранее рассмотренных методах.

После определения направляющего столбца, правилу:

$$A^* = A_x^{-1} * A_j$$

Результаты расчетов заносятся в A^*. Затем рассчитываются коэффициенты Θ :

$$\Theta = \frac{l_{i0} \geq 0}{a_j^* > 0}, i = 1,2,...$$

Минимальное значение оценки 0 определяет вектор, который будет выводиться из базиса. После этого строится новая основная таблица, пересчет которой выполняется по методу Жордана-Гаусса.

Решение получается в столбце e_0 основной таблицы.

5.4.2. Пример решения задачи линейного программирования модифицированным методом

На свиноферме производится откорм свиней. Известно, что каждая свинья должна ежедневно получать не менее 6 единиц жиров, 8 единиц белков, 12 единиц углеводов. Для откорма свиней можно закупить три вида кормов: картофель, жмых и комбикорм. Содержание каждого вещества в различных видах корма и стоимость (в ден.ед.) единицы каждого корма приведены в таблице 5.4.1.

Таблица 5.4.1 - Содержание каждого вещества в различных видах корма и стоимость (в ден.ед.) единицы каждого корма

Вид корма	Вещества			Стоимость единицы корма
	Жиры	Белки	Углеводы	
Картофель	2	1	3	2
Жмых	1	2	4	3
Комбикорм	3	1,5	2	2,5

Требуется обеспечить наименьшие затраты при закупке кормов, при условии, что указанные вещества будут сбалансированы.

Пусть *x1, x2, x3* - количество единиц (в кг) соответственно картофеля, жмыха и комбикорма. Так как необходимо обеспечить наименьшие затраты, то математическую формулировку целевой функции можно дать следующим образом: определить допустимые значения *x1, x2, x3*, минимизирующие целевую функцию

$$F = 2x_1 + 3x_2 + 2.5x_3$$

Так как в рацион животных ежедневно должны поступать необходимые вещества в указанных количествах, то для того чтобы выполнить задачу, нельзя понижать эти нормы. Поэтому для определения рациона нужно учесть ограничения:

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 \ge 6$$

$$x_1 + 2x_2 + 1.5x_3 \ge 8$$

$$3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \ge 12$$

Неявное (т.е. подразумеваемое) ограничение, вытекающее из экономического смысла выбранных переменных, заключается в том, что количества кормов не могут принимать отрицательные значения: x_1,x_2,x_3 >= 0. Переменные *x1, x2, x3* могут быть нецелыми.

Таким образом, математическую модель задачи можно записать в следующем виде: определить план *X = (x1 x2, x3)*, обеспечивающий минимальное значение функции:

$$F = 2x_1 + 3x_2 + 2.5x_3$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 \ge 6 \\ x_1 + 2x_2 + 1.5x_3 \ge 8 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \ge 12 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0$$

Так как имеем в ограничениях знаки >=, то необходимо помимо дополнительных переменных ввести ещё и искусственные:

Расширенная форма:

$$F_{\min} = 2x_1 + 3x_2 + 2.5x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 + \mu x_7 + \mu x_8 + \mu x_9$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 1x_2 + 3x_3 - x_4 - 0x_5 - 0x_6 + 1x_7 + 0x_8 + 0x_9 = 6 \\ 1x_1 + 2x_2 + 1.5x_3 - 0x_4 - x_5 - 0x_6 + 0x_7 + 1x_8 + 0x_9 = 8 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 0x_4 - 0x_5 - x_6 + 0x_7 + 0x_8 + 1x_9 = 12 \end{cases}$$

Заполним вспомогательную таблицу и главную часть основной таблицы.

В первый столбец поместим вектора первоначального опорного плана *A7, A8, A9* т.к. они соответствуют искусственным переменным в ограничениях, в столбец *Cб* - соответствующие коэффициенты целевой функции. В строку *C* записываем коэффициенты целевой функции:

		C_i	2	3	2,5	0	0	0	μ	μ	μ
Б	$C_б$	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9
A_7	μ	6	2	1	3	-1	0	0	1	0	0
A_8	μ	8	1	2	1,5	0	-1	0	0	1	0
A_9	μ	12	3	4	2	0	0	-1	0	0	1
	Δ_0	26 μ	6 μ -2	7 μ -3	6,5 μ -2,5	- μ	- μ	- μ	0	0	0

В основной таблице главная часть: *e0* - записываем базисные компоненты текущего плана, *el, e2, e3* - представляют собой единичную матрицу.

Итерация 1

Рассчитываем $\Lambda_j = \sum c_i e_{ij}$

$$\Lambda_0 = 6\mu + 8\mu + 12\mu = 26\mu$$

$$\Lambda_1 = 1\mu + 0\mu + 0\mu = 1\mu$$

$$\Lambda_2 = 0\mu + 1\mu + 0\mu = 1\mu$$

$$\Lambda_3 = 0\mu + 0\mu + 1\mu = 1\mu$$

Рассчитываем симплекс-разности и записываем их во вспомогательную таблицу в 5-ую строку:

$$\Delta_j = \Lambda^T A_j - c_j$$

$$\Delta_0 = \Lambda_0 = 26\mu$$

$$\Delta_1 = [\mu\ \mu\ \mu]*\begin{bmatrix}2\\1\\3\end{bmatrix} - 2 = 6\mu - 2 \qquad \Delta_4 = [\mu\ \mu\ \mu]*\begin{bmatrix}-1\\0\\0\end{bmatrix} - 0 = -\mu$$

$$\Delta_2 = [\mu\ \mu\ \mu]*\begin{bmatrix}1\\2\\4\end{bmatrix} - 3 = 7\mu - 3 \qquad \Delta_5 = [\mu\ \mu\ \mu]*\begin{bmatrix}0\\-1\\0\end{bmatrix} - 0 = -\mu$$

$$\Delta_3 = [\mu\ \mu\ \mu] * \begin{bmatrix} 3 \\ 1.5 \\ 2 \end{bmatrix} - 2.5 = 6.5\mu - 2.5 \qquad \Delta_6 = [\mu\ \mu\ \mu] * \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} - 0 = -\mu$$

$$\Delta_7 = \Delta_8 = \Delta_9 = 0$$

Так как решаем задачу на минимум, то в строке симплекс-разности ищем самый большой положительный элемент. Он соответствует вектору *A2*, где $\Delta_2 = 7\mu - 3$, следовательно, будем вводить в базис вектор *A2*.

Далее произведём расчёт.

$$A^* = A_x^{-1} * A_{j^*} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Записываем в основную таблицу.

Вычислим: $Q = \dfrac{e_{i0}}{a_i^*} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}.$

Выводимый вектор определяем по минимальному элементу столбца *Q*, это будет вектор *A9*, и т.к. он соответствует искусственной переменной, то в дальнейшем рассмотрении не участвует. Элемент, стоящий на пересечении направляющей строки и столбца *A** - направляющий. Далее используем его для преобразования основной таблицы по методу исключений Жордана-Гаусса.

Основная таблица:

Б	$C_б$	e_0	e_1	e_2	e_3	A^*	Θ
A_7	μ	6	1	0	0	1	6
A_8	μ	8	0	1	0	2	4
A_9	μ	12	0	0	1	4	3
	Λ	26μ	μ	μ	μ		

Итак, преобразуем таблицу по следующим рекуррентным правилам:

$$e_{ij}^{l+1} = \begin{cases} e_{ij}^{l} - \dfrac{e_{rj}^{l}}{a_{r^*}^{l}} * a_{i^*}^{l}, \text{при } i \neq r \\ \dfrac{e_{rj}^{l}}{a_{r^*}}, \text{при } i = r \end{cases}$$

и перейдём ко второй итерации.

Итерация 2

Идём по той же схеме: вычисляем $\Lambda_j = \sum c_i e_{ij}$, записываем в основную таблицу; затем вычисляем симплекс-разности и помещаем в новую строку вспомогательной таблицы. Определяем вводимый в базис вектор — вектор *Аз*. Заполняем столбец A^*.
$Q = \min\{6/5; 4; 6\} = 6/5$.

Следовательно, выводим вектор *А7*.

Основная таблица

Б	$C_б$	e_0	e_1	e_2	e_3	A^*	Θ
A_7	μ	3	1	0	-1/4	5/2	6/5
A_8	μ	2	0	1	-1/2	1/2	4
A_2	3	3	0	0	1/2	1/2	6
	Λ	5 μ +9	μ	μ	-3/4 μ +3/4		

Вспомогательная таблица

		C_i	2	3	2,5	0	0	0	μ	μ	μ
Б	$C_б$	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9
A_7	μ	6	2	1	3	-1	0	0	1	0	0
A_8	μ	8	1	2	1,5	0	-1	0	0	1	0
A_9	μ	12	3	4	2	0	0	-1	0	0	1
	Δ_0	26 μ	6 μ -2	7 μ -3	6,5 μ -2,5	- μ	- μ	- μ	0	0	0
	Δ_1	5 μ +9	3/4 μ +1/4	0	3 μ -1	- μ	μ	3/4 μ -1	0	0	-
	Δ_2	7/5 μ +51/5	3/4 -3/4 μ	0	0	1/5 μ -2/5	- μ	9/20 μ -13/20	-	0	-
	Δ_3	110/9	-1/3	0	-1/9	-1/9	-1/3	0	-	-	-

Итерация 3

Основная таблица

Б	$C_б$	e_0	e_1	e_2	e_3	A^*	Θ
A_3	2,5	1,2	2/5	0	-1/10	1/10	12
A_8	μ	7/5	-1/5	1	-9/20	9/20	28/9
A_2	3	12/5	-1/5	0	3/10	-3/10	-
	Λ	7/5 μ +51/5	2/5 -1/5 μ	μ	-9/20 μ +13/20		

Выводим из базиса вектор A8, вводим *A6*.

Итерация 4

Основная таблица

Б	$C_б$	e_0	e_1	e_2	e_3
A_3	2,5	8/9	4/9	-2/9	0
A_6	0	28/9	-4/9	20/9	-1
A_2	3	10/3	-1/3	2/3	0
	Δ	110/9	1/9	13/9	0

Так как на четвёртой итерации в строке симплекс-разностей нет положительных элементов и все вектора, соответствующие искусственным переменным, выведены из базиса, то достигнуто оптимальное решение:

$Xopt$ = (0, 10/3, 8/9, 0, 0, 28/9),

F_{min}= 110/9.

5.5. Двойственный симплекс - метод

5.5.1. Содержательная постановка задачи

Металлургический комбинат использует два высоко производительных способа получения стали для экспорта: конверторный и мартеновский. Для получения стали используются три основных вида сырья: чугун, руда и металлолом. Максимально возможные суточные запасы сырья составляют: 63, 24,12 ед. веса соответственно. Расходы сырья на производство одной тонны соответствующего вида стали приведены в таблице 5.5.1.

Таблица 5.5.1

Сырье	Расход сырья на одну тонну		Суточный запас сырья
	Конверторный способ	Мартеновский способ	
Чугун	9	7	63
Руда	3	4	24
Металлолом	1	3	12

Экспортная цена одной тонны стали, изготовленной конверторным способом, составляет 6 тыс. ден. ед., а мартеновским - 3 тыс. ден. ед.

Требуется определить, какое количество стали каждого вида должен производить металлургический комбинат за смену, чтобы получить максимальную прибыль.

5.5.2. Построение математической модели задачи

По условию задачи построим ее математическую модель.

Пусть $x_1, x_2, ..., x_n$ - набор чисел, которые называются допустимым решением задач линейного программирования. Они удовлетворяют системе исходных ограничений. Оптимальным называется допустимое решение, при котором целевая функция достигает *min* или *max*,в соответствии с постановкой задачи.

Рассматриваемую в задаче ситуацию можно охарактеризовать следующим образом: определить суточные объемы производства стали каждого вида, максимизирующие доход от реализации, с учетом ограничений на расход сырья: чугуна, руды и металлолома. А так же минимальную цену за единицу каждого вида сырья, чтобы доход от реализации всех его запасов был не меньше дохода от реализации всей продукции, которая может быть выпущена.

Так как нужно определить объемы производства стали каждого вида, переменными в модели являются:

x_1 – объем производства стали конверторным способом за смену.

x_2 – объем производства стали мартеновским способом за смену.

Так как стоимость одной тонны стали, полученной конверторным способом, составляет 3 тыс. ден. ед., а стоимость одной тонны стали, полученной мартеновским способом – 6 тыс. ден.ед., то общий доход от реализации составляет:

$$3x_1 + 6x_2 \text{ (тыс. ден.ед.)}$$

Обозначив общий доход через F, можно дать следующую математическую формулировку целевой функции:

$$F_{\max} = 3x_1 + 6x_2 .$$

При определении плана выпуска продукции должны быть учтены ограничения на расход сырья, а именно: расход каждого вида сырья на производство двух видов стали не должен превышать его запасов.

Это приводит к следующим ограничениям:

$$\begin{cases} 9x_1 + 7x_2 \le 63, \\ 3x_1 + 4x_2 \le 24, \\ x_1 + 3x_2 \le 12. \end{cases}$$

Неявное ограничение, вытекающее из экономического смысла выбранных переменных, заключается в том, что объемы производства продукции не могут принимать отрицательные значения:

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

Таким образом, математическую модель задачи можно записать в следующем виде: определить план $X = (x_1, x_2)$, обеспечивающий максимальное значение функции:

$$F_{\max} = 3x_1 + 6x_2$$

при наличии следующих ограничений:

$$\begin{cases} 9x_1 + 7x_2 \leq 63, \\ 3x_1 + 4x_2 \leq 24, \\ x_1 + 3x_2 \leq 12. \end{cases}$$

Построим математическую модель двойственной задачи

Всякая задача линейного программирования имеет соответственную двойственную задачу. Но не всегда двойственные переменные имеют какой-либо физический смысл.

Четкий смысл они имеют в задачах экономики. Двойственные переменные обычно интерпретируются как затраты.

Формальная связь прямой и двойственной задач.

1. Если прямая задача решается на max, то двойственная задача – на min, и наоборот.
2. Коэффициенты целевой функции прямой задачи становятся правыми частями ограничений двойственной задачи.
3. Вектор ограничений прямой задачи становится вектором коэффициентов при двойственных переменных в двойственной задаче.
4. При переходе от прямой задачи к двойственной задаче матрица системы ограничений транспонируется, а знаки ограничений меняют на противоположные.

Обозначим:

y_1 – цена одной тонны чугуна;

y_2 – цена одной тонны руды;

y_3 – цена одной тонны металлолома.

Тогда расходы на покупку сырья, необходимого для изготовления единицы продукции каждого вида стали, должны быть равны:

$9y_1 + 3y_2 + y_3$ – расход на изготовление стали конверторным способом;

$7y_1 + 4y_2 + 3y_3$ – расход на изготовление стали мартеновским способом.

Для того чтобы производство стали при данных расходах на сырье было прибыльным, должны выполняться следующие неравенства:

$9y_1 + 3y_2 + y_3 \geq 3$,

$7y_1 + 4y_2 + 3y_3 \geq 6$.

Неявное ограничение, вытекающее из экономического смысла выбранных переменных y_1, y_2, y_3, заключается в том, что цена сырья не может принимать отрицательные значения:

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0.$$

А суммарная стоимость сырья составит величину:

$$63y_1 + 24y_2 + 12y_3.$$

Любая система цен $y_i \geq 0$, установленных с учетом этого условия, удовлетворяет интересам предприятия-продавца. Естественно, что учет интересов предприятия-покупателя требует выбора такой системы цен, которая минимизировала бы суммарную стоимость сырья $63y_1 + 24y_2 + 12y_3$.

В итоге, постановка двойственной задачи принимает следующий вид (так как прямая задача решается на максимум, то двойственная будет решаться на минимум):

$$63y_1 + 24y_2 + 12y_3 \to \min$$

При ограничениях:

$$\begin{cases} 9y_1 + 3y_2 + y_3 \geq 3 \\ 7y_1 + 4y_2 + 3y_3 \geq 6 \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0 \end{cases}$$

где y_1 – цена одной тонны чугуна;

y_2 – цена одной тонны руды;

y_3 – цена одной тонны металлолома.

5.5.3. Алгоритм решения задачи

Сопряженный базис – система векторов прямой задачи, взятая из условия задачи и которая удовлетворяет системе ограничений двойственной задачи, то есть является допустимым базисным решением двойственной задачи.

Псевдоплан – разложение векторов прямой задачи, не вошедших в сопряженный базис, по векторам сопряженного базиса.

Предварительный этап:

1. Приведение прямой задачи к каноническому виду. При этом искусственные переменные не вводятся.
2. Подбор сопряженного базиса, удовлетворяющего, по определению, условиям:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^0 \geq c_j \quad j=1,n.$$

Количество векторов, из которых составляется сопряженный базис, равно m.

3. Построение псевдоплана.

Необходимо решить ряд матричных уравнений вида:

$$A_j = \left[C_{опр} Б_з\right] \cdot \widetilde{A}_j ,$$

где $\widetilde{A}_j$ - искомый вектор, j – номер вектора прямой задачи, не вошедшего в базис.

Для практических нужд первым разлагается вектор A_0.

Вектора разложения и базисные вектора помещаются в симплекс – таблицу общего вида.

Этап решения.

1. Рассчитываются симплекс-разности:

$$\delta_0 = \sum_{i=1}^{m} a_{i0} \cdot C_{БI} \ , \ \delta_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \cdot C_{IБ} - C_j \ ;$$

δ_0 – текущее значение целевой функции, δ_j показывают, на сколько велик вклад той или иной переменной в целевую функцию.

2. Выполняется проверка на достижение оптимума.

Если все компоненты вектора A_0 положительны, то это говорит о достижении оптимального решения. В противном случае среди компонентов A_0 есть отрицательные компоненты.

Если в столбце A_0 присутствуют отрицательные компоненты, а в соответствующих строках все элементы неотрицательны, то задача не разрешима при данных ограничениях.

3. Определение направляющей строки

Самый отрицательный элемент столбца A_0 определяет вектор, выводимый из базиса.

4. Определение направляющего столбца

Вектор, который будет вводиться в базис, определяется по правилу:

$$\min\left\{\frac{-\delta_j}{a_{ij}^* < 0}\right\} \Rightarrow j^*.$$

5. Пересчет таблицы по методу Жордана-Гаусса.

Направляющий столбец определяет вектор, который будет вводиться в базис, а направляющая строка определяет вектор, выводимый из базиса. На пересечении направляющих столбца и строки стоит направляющий элемент.

Алгоритм Жордана-Гаусса.

Первым шагом, направляющая строка поэлементно делится на направляющий элемент. В результате получается строка новой таблицы, которая называется модифицированной. Из оставшихся строк исходной таблицы вычитаются элементы модифицированной строки, умноженные на число, стоящее на пересечении направляющего столбца и пересчитываемой строки.

5.5.4. Пример решения задачи двойственным симплекс – методом

Запишем условия прямой задачи:

$$F_{\max} = 3x_1 + 6x_2$$

$$\begin{cases} 9x_1 + 7x_2 \le 63 \\ 3x_1 + 4x_2 \le 24 \\ x_1 + 3x_2 \le 12 \end{cases}$$

Сформулируем соответствующую двойственную задачу:

$$F_{\min} = 63y_1 + 24y_2 + 12y_3$$

$$\begin{cases} 9y_1 + 3y_2 + y_3 \ge 3 \\ 7y_1 + 4y_2 + 3y_3 \ge 6 \\ y_1 \ge 0, y_2 \ge 0, y_3 \ge 0 \end{cases}$$

Предварительный этап:

1. Приведение прямой задачи к каноническому виду. При этом искусственные переменные не вводятся.

$$\begin{array}{cccccc}
9x_1+ & 7x_2+ & x_3+ & 0x_4+ & 0x_5 & =63 \\
3x_1+ & 4x_2+ & 0x_3+ & x_4+ & 0x_5 & =24 \\
x_1+ & 3x_2+ & 0x_3+ & 0x_4+ & x_5 & =12 \\
A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 & A_0
\end{array}$$

2. Подбор сопряженного базиса.

Возьмем в качестве базиса векторы (A_1 , A_3 , A_4).

Проверяем, удовлетворяет ли этот базис системе ограничений:

$$\begin{cases} A_1 : 9y_1 + 3y_2 + y_3 = 3 \\ A_3 : y_1 = 0 \\ A_4 : y_2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1 = 0 \\ y_2 = 0 \\ y_3 = 3 \end{cases}$$

Подставим найденные значения y_1, y_2 и y_3 в уравнения A_2 и A_5. Получим:

$$\begin{cases} A_2 : 7*0 + 4*0 + 3*3 \ge 6 - да \\ A_5 : 1*3 \ge 0 - да \end{cases}$$

Следовательно, базис (A_1, A_3, A_4) удовлетворяет системе ограничений.

Дальнейшая выборка векторов для базиса не имеет смысла.

3. Построение псевдоплана.

Находим псевдоплан, которому удовлетворяет базис (A_1, A_3, A_4).

$$A_1 = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad A_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Для этого разложим вектора, не вошедшие в базис, по векторам A_1, A_3, A_4.

Для вектора A_0 это разложение будет иметь вид:

$$\begin{pmatrix} 63 \\ 24 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} a_{10} \\ a_{20} \\ a_{30} \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} a_{10} &= 12 \\ a_{20} &= -45 \\ a_{30} &= -12 \end{aligned}$$

Для вектора A_2:

$$\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} a_{12} &= 3 \\ a_{22} &= -20 \\ a_{32} &= -5 \end{aligned}$$

Для вектора A_5:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} a_{15} \\ a_{25} \\ a_{35} \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} a_{15} &= 1 \\ a_{25} &= -9 \\ a_{35} &= -3 \end{aligned}$$

Вектора разложения и базисные вектора помещаются в симплекс – таблицу общего вида.

В столбец **Б** записываем найденный сопряженный базис (A_1, A_3, A_4). В столбец $C_б$ - коэффициенты векторов, вошедших в базис, при соответствующих переменных в целевой функции. В столбцы векторов A_0, A_2 и A_5 записываем элементы, найденные при разложении этих векторов по векторам базиса. А в столбцы векторов, вошедших в базис, записываем соответственно столбцы единичной матрицы.

		C_j	3	6	0	0	0
Б	$C_б$	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_1	3	12	1	3	0	0	1
A_3	0	-45	0	-20	1	0	-9
A_4	0	-12	0	-5	0	1	-3
	δ						

Первая итерация.

1. Рассчитываются симплекс-разности:

$$\delta_0 = \sum_{i=1}^{m} a_{i0} \cdot C_{БI} \text{ , } \delta_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \cdot C_{IБ} - C_j \text{ ;}$$

δ_0 – текущее значение целевой функции, δ_i показывают, на сколько велик вклад той или иной переменной в целевую функцию.

		C_j	3	6	0	0	0
Б	$C_б$	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_1	3	12	1	3	0	0	1
A_3	0	-45	0	-20	1	0	-9
A_4	0	-12	0	-5	0	1	-3
	δ	36	0	3	0	0	3

2. Выполняется проверка на достижение оптимума.

Так как не все компоненты вектора A_0 положительны, то это говорит о том, что оптимальное решение еще не получено.

3. Определение направляющей строки

Самый отрицательный элемент столбца A_0: -45. Значит A_3 - вектор, выводимый из базиса.

4. Определение направляющего столбца

Вектор, который будет вводиться в базис, определяется по правилу:

$$\min\left\{\frac{-\delta_j}{a_{ij}^* < 0}\right\} \Rightarrow j^*$$

где δ_j - симплекс – разность в столбце вектора A_j.

$$\min\left\{\frac{-3}{-20};\frac{-3}{-9}\right\} = \frac{3}{20}$$

Следовательно, направляющим столбцом, вводимым в базис, будет вектор A_2.

		C_j	3	6	0	0	0
Б	$C_б$	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_1	3	12	1	3	0	0	1
A_3	0	-45	0	-20	1	0	-9
A_4	0	-12	0	-5	0	1	-3
	δ	36	0	3	0	0	3

5. Пересчет таблицы по методу Жордана-Гаусса.

На пересечении направляющих столбца и строки стоит направляющий элемент, который равен -20.

Первым шагом, направляющую строку поэлементно делим на направляющий элемент. В результате получаем строку новой таблицы:

	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_2	2,25	0	1	-0,05	0	0,45

Из оставшихся строк исходной таблицы вычитаются элементы модифицированной строки, умноженные на число, стоящее на пересечении направляющего столбца и пересчитываемой строки.

В итоге получаем новую пересчитанную таблицу:

		C_j	3	6	0	0	0
Б	$C_б$	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_1	3	5,25	1	0	0,15	0	-0,35
A_2	6	2,25	0	1	-0,05	0	0,45
A_4	0	-0,75	0	0	-0,25	1	-0,75
	δ						

Вторая итерация.

1. Рассчитываются симплекс-разности:

$$\delta_0 = \sum_{i=1}^{m} a_{i0} \cdot C_{БI} \text{ , } \delta_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \cdot C_{IБ} - C_j \text{ ;}$$

δ_0 – текущее значение целевой функции, δ_i показывают, на сколько велик вклад той или иной переменной в целевую функцию.

		C_j	3	6	0	0	0
Б	$C_б$	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_1	3	5,25	1	0	0,15	0	-0,35
A_2	6	2,25	0	1	-0,05	0	0,45
A_4	0	-0,75	0	0	-0,25	1	-0,75
	δ	29,25	0	0	0,15	0	1,65

2. Выполняется проверка на достижение оптимума.

Так как не все компоненты вектора A_0 положительны, то это о том, что оптимальное решение еще не получено.

3. Определение направляющей строки

Самый отрицательный элемент столбца A_0: -0,75. Значит A_4 - вектор, выводимый из базиса.

4. Определение направляющего столбца

Вектор, который будет вводиться в базис, определяется по правилу:

$$\min\left\{\frac{-\delta_j}{a_{ij}^* < 0}\right\} \Rightarrow j^*,$$

$$\min\left\{\frac{-0{,}15}{-0{,}25}; \frac{-1{,}65}{-0{,}75}\right\} = \frac{0{,}15}{0{,}25}.$$

Следовательно, направляющим столбцом, вводимым в базис, будет вектор A_5.

		C_j	3	6	0	0	0
Б	$C_б$	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_1	3	5,25	1	0	0,15	0	-0,35
A_2	6	2,25	0	1	-0,05	0	0,45
← A_4	0	-0,75	0	0	-0,25	1	-0,75
	δ	29,25	0	0	0,15 ↑	0	1,65

5. Пересчет таблицы по методу Жордана-Гаусса.

На пересечении направляющих столбца и строки стоит направляющий элемент, который равен -0,25.

На первом шаге элементы направляющей строки делим на соответствующий направляющий элемент. В результате получаем строку новой таблицы:

	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_3	3	0	0	1	-4	3

Из оставшихся строк исходной таблицы вычитаются элементы модифицированной строки, умноженные на число, стоящее на пересечении направляющего столбца и пересчитываемой строки.

В итоге получаем новую пересчитанную таблицу:

		C_j	3	6	0	0	0
Б	$C_б$	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_1	3	4,8	1	0	0	0,6	-0,8
A_2	6	2,4	0	1	0	-0,2	0,6
A_3	0	3	0	0	1	-4	3
	δ	28,8	0	0	0	0,6	1,2

Третья итерация.

1. Рассчитываются симплекс-разности:

$$\delta_0 = \sum_{i=1}^{m} a_{i0} \cdot C_{БI}\ ,\ \delta_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \cdot C_{IБ} - C_j\ ;$$

δ_0 – текущее значение целевой функции, δ_i показывают, на сколько велик вклад той или иной переменной в целевую функцию.

		C_j	3	6	0	0	0
Б	$C_б$	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_1	3	4,8	1	0	0	0,6	-0,8
A_2	6	2,4	0	1	0	-0,2	0,6
A_3	0	3	0	0	1	-4	3
	δ	28,8	0	0	0	0,6	1,2

2. Выполняется проверка на достижение оптимума.

Так как все компоненты вектора A_0 положительны, то оптимальное решение достигнуто.

Получен следующий оптимальный план: X_{opt} = (4,8 ; 2,4), при этом максимальное значение целевой функции составляет: F_{max} = 3*4,8+6*2,4 = 28,8 тыс. ден.ед.

Значения переменных y_1, y_2 и y_3 находятся в строке симплекс – разностей таблицы и равны: y_1 = 0, y_2 = 0,6 и y_3 = 1,2.

Следовательно, металлургический комбинат должен производить 4,8 тонн стали конверторным способом и 2,4 тонны стали мартеновским способом, чтобы получить максимальную прибыль. При этом цена одной тонны руды равна 0,6 (тыс.ден.ед.),а цена одной тонны металлолома – 1,2 (тыс.ден.ед.).

6. ИССЛЕДОВАНИЕ МОДЕЛИ НА ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТЬ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

6.1. Теоретические положения

Целью проведения анализа на чувствительность является изучение влияния изменения отдельных параметров модели на оптимальное решение, получаемое при статических условиях. Очевидно, что такие изменения способны как “улучшать”, так и “ухудшать” оптимальное решение. Поэтому, в первом случае, целесообразно изменить условия задачи, т.е. рекомендовать руководителю, соответствующим образом “подогнать” структуру производства под изменения с целью получения более оптимального решения. Подобный подход позволяет адаптировать математическую модель к реальным процессам.

Дополнительным фактором, понуждающим к проведению такого анализа, является наличие погрешностей вычислений, которая обусловлена разрядностью ЭВМ. Таким образом, рассчитанное с использованием вычислительной техники “оптимальное” решение на самом деле будет лишь приближением к оптимуму.

В процессе анализа модели на чувствительность, необходимо ответить на следующие вопросы:

- каков статус ресурсов, т.е. какие из них “дефицитные”, а какие “недефицитные”;
- какова значимость ресурсов, то есть, изменение объема какого из ресурсов является наиболее выгодным, с точки зрения обеспечения наибольшего дохода (или наименьших потерь) при выполнении операции;
- в каких пределах допустимо изменение запаса ресурсов, при которых их влияние на исходную модель задачи линейного программирования адекватно описывается двойственной задачей;
- как отразится на оптимальном плане увеличение (уменьшение) запаса ресурсов.

Этапы анализа модели на чувствительность:

1. Определение статуса ресурсов.

Ресурсы относятся к **дефицитным**, если оптимальный план предусматривает их полное использование, при частичном использовании ресурсов они считаются недефицитными.

Статус ресурсов для любой модели линейного программирования можно установить непосредственно из оптимальной симплекс-таблицы исходной (прямой) задачи по значению дополнительных переменных. Положительное значение дополнительной переменной указывает на неполное использование дополнительного ресурса, т.е. на его “недефицитность”, нулевое значение дополнительной переменной указывает на “дефицитность” ресурса. При решении двойственной задачи, статус ресурсов определяется по значению основных переменных. Нулевое значение основной переменной указывает на его “недефицитность” ресурса, ненулевое значение основной переменной указывает на его “дефицитность”.

2. Определение значимости ресурсов.

Значимость ресурса характеризуется величиной улучшения оптимального значения целевой функции F, приходящейся на единицу прироста данного ресурса. Значимость ресурса всегда можно определить по значению двойственных переменных в оптимальном решении двойственной задачи. Из нескольких дефицитных ресурсов большую значимость имеет тот, который даёт максимальное увеличение в целевой функции, т. е. увеличение объемов запасов этого продукта более выгодно с точки зрения влияния на значение целевой функции.

3. Определение допустимого интервала изменения запаса ресурсов.

Произвольное изменение запасов ресурсов (т.е. правых частей ограничения) может привести к недопустимости текущего решения. Поэтому важно определить диапазон изменений компонент вектора ограничений, в котором допустимость решений не нарушается.

Пусть найдено оптимальное решение $X_{opt} = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0)$ некоторой задачи линейного программирования. Обозначим через A матрицу коэффициентов исходной системы ограничений задачи. Тогда в оптимальной симплекс-таблице матрица, расположенная под начальными базисными переменными (базисными переменными первой симплекс-таблицы) будет обратной к A (обратная матрица A^{-1} может быть вычислена также по исходной матрице коэффициентов A).

Очевидно, что

$$X_{opt} = A^{-1} * B_{исх} \qquad (1)$$

где B - столбец свободных членов.

Новое базисное решение может быть найдено следующим образом:

$$X' = A^{-1} * B' \qquad (2)$$

где B' - новый вектор правых частей ограничений.

Чтобы новое базисное решение осталось допустимым, необходимо, чтобы все компоненты вектора X' были неотрицательны:

$$x_i \geq 0, \qquad i=1,\ m.$$

Отсюда следует правило вычисления допустимого интервала изменений правых частей ограничений:

1. Изменяется свободный член в некотором ограничении, например, $b_i' = b_i + \Delta i$.
2. Вычисляется новое базисное решение:

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ \cdots \\ x_i' \\ \cdots \\ x_m' \end{bmatrix} = A^{-1} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ \cdots \\ b_i \\ \cdots \\ b_m \end{bmatrix} \qquad (3)$$

Компоненты нового базисного решения зависят от величин приращений измененных компонентов вектора B.

Решается система неравенств относительно приращения Δi.

$$x_k = (\Delta i) \geq 0, \qquad x_k = b_k(\Delta i) \geq 0 \quad k=1,\ m. \qquad (4)$$

Получаем допустимый интервал изменения свободного члена в i-ом ограничении.

Данный метод может быть обобщен и на случай варьирования одновременно нескольких свободных членов ограничений. При этом усложняются вычислительные процессы, связанные с решением системы. (При этом придется дополнительно решить ЗЛП).

6.2. Пример анализа модели на чувствительность

Рассмотрим задачу из раздела 5.5.1.

Прямая модель этой задачи имеет вид:

$$F_{\max} = 3x_1 + 6x_2$$

$$\begin{cases} 9x_1 + 7x_2 \le 63 \\ 3x_1 + 4x_2 \le 24 \\ x_1 + 3x_2 \le 12 \end{cases}$$

Проведение анализа модели на чувствительность связанно с использованием теории двойственности. Поэтому необходимо построить двойственную задачу и найти решение задачи.

Для рассматриваемой задачи двойственная модель имеет вид:

$$F_{\min} = 63y_1 + 24y_2 + 12y_3$$

$$\begin{cases} 9y_1 + 3y_2 + y_3 \ge 3 \\ 7y_1 + 4y_2 + 3y_3 \ge 6 \\ y_1 \ge 0, y_2 \ge 0, y_3 \ge 0 \end{cases}$$

В результате решения получим следующее:

		C_j	3	6	0	0	0
Б	$C_б$	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_1	3	4,8	1	0	0	0,6	-0,8
A_2	6	2,4	0	1	0	-0,2	0,6
A_3	0	3	0	0	1	-4	3
	δ	28,8	0	0	0	0,6	1,2

Оптимальное решение прямой задачи - X_{opt} = (4,8 ; 2,4), при этом значение целевой функции равно

F = 3*4,8+6*2,4 = 28,8 тыс. ден.ед.

Значения переменных y_1, y_2 и y_3 находятся в строке симплекс – разностей таблицы и равны: y_1 = 0, y_2 = 0,6 и y_3 = 1,2.

Оптимальное решение двойственной задачи - $Y_{opt} = (0;0.6;1.2)$, при этом значение целевой функции равно $F(Y_{opt}) = 28.8$.

1. Определение статуса ресурсов

Дефицитными являются второй и третий ресурсы (руда и металлолом), так как им соответствует ненулевая оценка: 0,6 и 1,2 соответственно. Первый ресурс (чугун) является недефицитный, так как его оценка равна нулю.

2. Определение значимости ресурсов

Из двух дефицитных ресурсов наиболее значимым является тот, который даёт максимальное приращение функции. При увеличении второго ресурса на единицу, функция увеличится на $\Delta F = 1 * y_2 = 1 * 0.6 = 0.6$. При увеличении третьего ресурса на единицу, функция увеличится на $\Delta F = 1 * y_3 = 1 * 1.2 = 1.2$. Таким образом из двух дефицитных ресурсов третий имеет большую значимость. Следовательно, с экономической точки зрения выгоднее увеличивать третий ресурс.

3. Определение допустимого интервала изменения запаса ресурса

Произвольное изменение запасов ресурсов (т.е. правых частей ограничения) может привести к недопустимости текущего решения. Поэтому важно определить диапазон изменений компонент вектора ограничений, в котором допустимость решений не нарушается.

Так как начальными базисными переменными являлись x_3, x_4, x_5, то в оптимальной симплексной таблице в соответствующих столбцах расположена матрица A^{-1}.

		C_j	3	6	0	0	0
Б	$C_б$	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_1	3	4,8	1	0	0	0,6	-0,8
A_2	6	2,4	0	1	0	-0,2	0,6
A_3	0	3	0	0	1	-4	3
	δ	28,8	0	0	0	0,6	1,2

Рассчитаем диапазон изменения объемов третьего ресурса. Для этого будем изменять величину третьего ресурса на величину Δ, при этом скорректированный объем запаса этого продукта будет $\Delta + 12$.

Найдём базисное решение, соответствующее измененным запасам третьего ресурса:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0.6 & -0.8 \\ 0 & -0.2 & 0.6 \\ 1 & -4 & 3 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 63 \\ 24 \\ \Delta + 12 \end{bmatrix}. \quad (5)$$

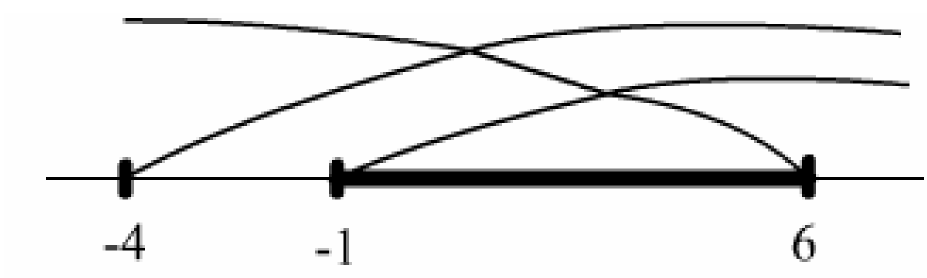
Решая, получим:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.8 - 0.8 * \Delta \\ 2.4 + 0.6 * \Delta \\ 3 + 3 * \Delta \end{bmatrix}.$$

Обратите внимание, что элементы результирующего вектора представляются суммой некоторой постоянной и члена, линейно зависящего от *Δ*. Постоянные есть компоненты оптимального решения (смотрите столбец A_0 оптимальной симплексной таблицы), а коэффициенты при *Δ* равны коэффициентам при x_3 в оптимальной симплексной таблице, так эта переменная являлась начальной базисной переменной первого ограничения. Это наблюдение, в дальнейшем, позволяет строить систему неравенств без выполнения матричных операций.

Так как все переменные должны быть не меньше нуля, решим систему неравенств:

$$\begin{cases} 4{,}8 - 0{,}8 * \Delta \ge 0 \\ 2{,}4 + 0{,}6 * \Delta \ge 0 \\ 3 + 3 * \Delta \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta \le 6 \\ \Delta \ge -4 \\ \Delta \ge -1 \end{cases}$$



Из рисунка видно, что $-1 \le \Delta \le 6$, тогда $11 \le b_1 \le 18$.

Таким образом, первоначальный запас третьего ресурса (12 тонн) может быть увеличен до 18 тонн или уменьшен до 11 тонн без нарушения допустимости решения. Уменьшение запаса ресурса в данном примере повлечет за собой уменьшение прибыли от реализации продукции, поэтому является нецелесообразным.

4. Исследование зависимости оптимального решения от изменения запасов ресурсов

Будем изменять запасы ресурса, начиная с 12 тонн (начальный запас) с шагом h = 1 тонна до 18 тонн. Результаты расчетов приведены в таблице:

Δ	0	1	2	3	4	5	6
b_1	12	13	14	15	16	17	18
ΔF, тыс.ден.ед.	0	1,2	2,4	3,6	4,8	6	7,2
F, тыс.ден.ед.	28,8	30	31,2	32,4	33,6	34,8	36

где Δ – величина, на которую увеличиваем третий ресурс;

b_1 – свободный член;

ΔF – приращение функции;

F – значение функции.

Для определения соответствующих оптимальных решений (т.е. оптимального плана производства данного вида продукции) необходимо воспользоваться (5) или решить задачу на ЭВМ с новыми значениями свободных членов ограничений.

В следующей таблице приведены данные об оптимальном выпуске стали в зависимости от объемов запаса металлолома.

b_1	12	13	14	15	16	17	18
X_{opt}	(4,8;2.4)	(4;3)	(3.2;3.6)	(2.4;4.2)	(1.6;4.8)	(0.8;5.4)	(0;6)
F, тыс.ден. ед.	28,8	30	31,2	32,4	33,6	34,8	36

где b_1 – свободный член;

X_{opt} – пределы, в которых изменяется x;

F – значение функции.

Это позволяет сделать вывод о том, что с увеличением объема запасов третьего ресурса (металлолома) на 6 тонн увеличивается выпуск стали мартеновским способом на 3,6 тонн и уменьшается выпуск стали конвертерным способом на 4,8 тонн. При этом прибыль от реализации продукции увеличивается на 7,2 тыс.ден.ед.

Построим график зависимости функции от изменения запасов продукта:

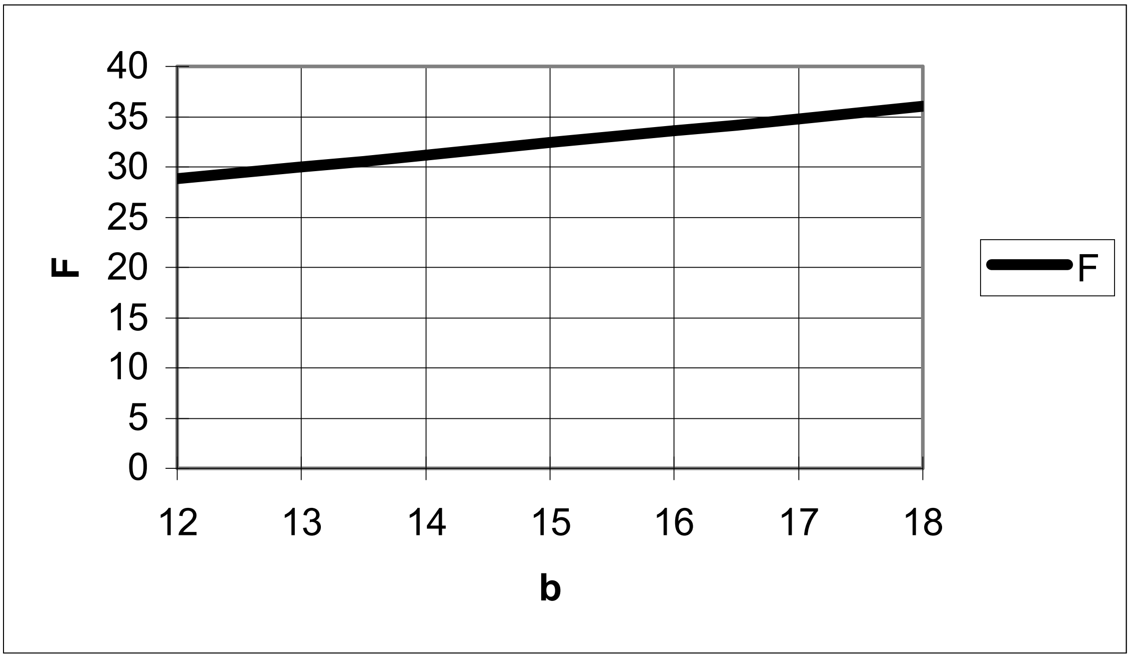


Рисунок 6.1 – График зависимости функции от изменения запасов продукта

6. Вывод по анализу модели на чувствительность

В ходе проведения анализа модели на чувствительность было выяснено, что дефицитными являются такие ресурсы, как руда и металлолом. Из двух дефицитных ресурсов металлолом имеет большую значимость.

Было выяснено, что с увеличением объема запасов металлолома на 6 тонн увеличивается выпуск стали мартеновским способом на 3,6 тонн и уменьшается выпуск стали конвертерным способом на 4,8 тонн. При этом прибыль от реализации продукции увеличивается на 7,2 тыс.ден.ед.

БИБЛИОГРАФИЯ

1. Зайченко Ю.П. Исследование операций: учебное пособие. / Ю.П. Зайченко. – К.: Вища школа, 1979. - 392 с.

2. Зайченко Ю.П. Исследование операций: сборник задач. / Ю.П. Зайченко, С.А. Шумилова. – К.: Вища школа, 1990. - 239 с.

3. Кюлян В.Р. Математическое программирование. / В.Р. Кюлян, Е.А. Юнькова, А.Б. Жильцов. – К.: - МАУАП, 2000. - 124 с.

4. Таха Х.А Введение в исследование операций. / Х. А. Таха. – М.: Издательский дом “Вильямс”, 2001. – 912 с.