

4. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ КАК ОБЩИЙ АППАРАТ АНАЛИЗА ПРОЦЕССОВ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ

4.1. Об установившихся и переходных процессах в электрических цепях

Установившимся называется процесс или режим, при котором токи и напряжения в цепи могут существовать неограниченно долго, не изменяя своего характера, и при заданных конфигурации цепи и ее параметрах определяются только видом действующих в цепи эдс. Если в цепи действуют постоянные во времени эдс, то в установившемся режиме токи и напряжения во всех участках цепи должны быть также постоянными во времени. Когда эдс источников изменяются во времени по закону синуса с одной и той же частотой, то и токи и напряжения в цепи в установившемся режиме должны быть синусоидальными (в случае нелинейных цепей – периодическими) функциями времени той же частоты. Если действующие в цепи эдс несинусоидальны, но изменяются периодически во времени с одним и тем же периодом, то токи и напряжения должны быть периодическими функциями времени с тем же периодом. Этими тремя видами эдс и токов исчерпывается перечень случаев установившихся режимов в цепи, причем постоянные и синусоидальные эдс и токи можно рассматривать как частные случаи периодических токов и эдс.

Отыскание токов и напряжений в установившемся режиме сводится к нахождению частных решений дифференциальных уравнений цепи.

Переходным называется процесс, возникающий при переходе от одного установленного режима к другому.

Для отыскания токов $i(t)$ и напряжений $u(t)$ в *переходном процессе* необходимо найти полные решения дифференциальных уравнений цепи. Как известно, в случае линейного уравнения его полное решение $i(t)$ образуется как сумма частного решения $i'(t)$ неоднородного уравнения, т. е. уравнения, содержащего заданные э. д. с. или заданные напряжения, и решения $i''(t)$ однородного уравнения, которое получается из того же уравнения цепи, если положить в нем заданные э. д. с. или напряжения равными нулю, т. е.

$$i(t) = i'(t) + i''(t).$$

При $t \rightarrow \infty$ ток $i''(t)$ стремится к нулю, так как процесс в цепи, обладающей конечным сопротивлением, должен затухать при отсутствии в цепи источников э. д. с. Поэтому ток $i''(t)$ называют *переходящим током*. Его называют также *свободным током*, так как он определяется из уравнений при отсутствии источников э. д. с.

Переходящий ток возникает вследствие того, что при включении или выключении цепи, или любом другом внезапном изменении в ней имеющиеся запасы энергии в полях цепи от предыдущего установленного режима не соответствуют запасам энергии в полях, которые должны были бы быть в новом установленном режиме после произошедших изменений в цепи.

Так как переходящий ток $i''(t)$ стремится к нулю, то ток $i(t)$ стремится к $i'(t)$. Следовательно, частное решение $i'(t)$ является *током установленного режима*, который устанавливается после произошедших изменений в цепи.

4.2. Классический путь расчета переходных процессов в электрических цепях

Общий путь расчета переходных процессов в любой сколь угодно сложной линейной электрической цепи заключается в нижеследующем. Составляем дифференциальные уравнения цепи согласно первому и второму законам Кирхгофа. Если заданными являются э. д. с. источниками, то неизвестными будут токи во всех p ветвях цепи. Пусть мы желаем найти ток i_k в k -й ветви. Исключая последовательно все остальные токи, мы получим одно дифференциальное уравнение, содержащее только ток i_k и его производные до порядка n :

$$a_n \frac{d^n i_k}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} i_k}{dt^{n-1}} + \dots + a_2 \frac{d^2 i_k}{dt^2} + a_1 \frac{di_k}{dt} + a_0 i_k = f_k(t),$$

т. е.

$$\sum_{s=0}^n a_s \frac{d^s i_k}{dt^s} = f_k(t).$$

Порядок n уравнения определяется конфигурацией цепи и характером ее элементов. Свободный член $f_k(t)$ содержит в себе заданные э. д. с.

Полный интеграл этого уравнения равен сумме частного решения i'_k , определяемого видом функции $f_k(t)$, и полного решения i''_k однородного уравнения:

$$\sum_{s=0}^n a_s \frac{d^s i''_k}{dt^s} = 0,$$

т. е.

$$i_k = i'_k + i''_k.$$

Для определения i''_k находим n корней характеристического уравнения:

$$a_n \alpha^n + a_{n-1} \alpha^{n-1} + \dots + a_s \alpha^s + \dots + a_1 \alpha + a_0 = \sum_{s=0}^n a_s \alpha^s = 0.$$

В случае, если все корни простые, имеем:

$$i''_k = A_{k1} e^{\alpha_1 t} + A_{k2} e^{\alpha_2 t} + \dots + A_{kn} e^{\alpha_n t} = \sum_{s=1}^n A_{ks} e^{\alpha_s t}$$

и, следовательно, искомое решение имеет вид

$$i_k = i'_k + \sum_{s=1}^n A_{ks} e^{\alpha_s t}.$$

Здесь A_{ks} — произвольные постоянные интегрирования. Они определяются из физических начальных условий, о чем будет сказано в следующем параграфе.

В случае наличия кратных корней характеристического уравнения приведенное выше выражение для i_k после определения всех величин A_{ks} из начальных условий будет содержать неопределенности, раскрывая которые получим выражение i_k для этого случая.

Изложенный метод часто называют *классическим*.

Выше было сказано, что дифференциальные уравнения цепи составляются по первому и второму законам Кирхгофа, при этом общее число уравнений равно числу ветвей цепи. Можно составлять дифференциальные уравнения для контурных токов, и тогда число уравнений будет равно числу независимых контуров цепи, или же для узловых напряжений, и тогда число уравнений будет равно числу узлов цепи без единицы.

4.3. Расчет переходных процессов в сложных цепях методом пространства состояний

Приведенные в предыдущем параграфе примеры расчета переходных процессов показывают, что даже для цепи сравнительно простой конфигурации решение системы дифференциальных уравнений становится весьма трудоемким. В связи с этим широкое распространение получают различные способы, облегчающие процесс решения. Одним из них является использование электронных вычислительных машин непрерывного действия, где интегрирование, дифференцирование и суммирование производятся непосредственно при помощи специальных электрических цепей, о которых некоторые сведения мы приведем в § 13-6.

Для решения задачи расчета переходных процессов в сложных линейных (и нелинейных) цепях при помощи таких вычислительных машин удобно дифференциальные уравнения сложной цепи представить так, чтобы в них слева от знака равенства была записана производная неизвестной величины, а справа от знака равенства — алгебраическая сумма остальных величин, т. е. в виде

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2, \dots, a),$$

$$\frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2, \dots, a).$$

...

В связи с этим уравнения цепи, составленные по первому и второму законам Кирхгофа, например, цепи, изображенной на рис. 9-29 (при обратных направлениях токов i_2 и i_3),

$$i_2 = i_1 + i_3, \quad r_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + r_2 i_2 + u_{2C} = e_1 - e_2,$$

$$r_3 i_3 + L_3 \frac{di_3}{dt} + r_2 i_2 + u_{2C} = -e_2,$$

где $i_2 = C \frac{du_{2C}}{dt}$, следует записать в виде

$$\frac{di_1}{dt} = \frac{1}{L_1} (e_1 - e_2) - \frac{r_2}{L_1} i_2 - \frac{1}{L_1} u_{2C} - \frac{r_1}{L_1} i_1,$$

$$\frac{di_3}{dt} = -\frac{1}{L_3} e_2 - \frac{r_2}{L_3} i_2 - \frac{1}{L_3} u_{2C} - \frac{r_3}{L_3} i_3,$$

$$\frac{du_{2C}}{dt} = \frac{1}{C} i_2,$$

$$i_2 = i_1 + i_3.$$

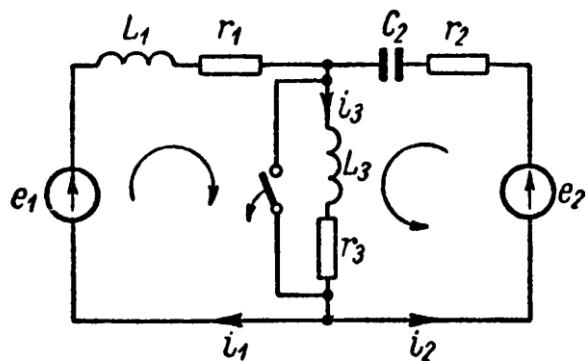


Рис. 9-29.

4.4. Законы коммутации и начальные условия

[Атабеков. ТОЭ, стр.429]

Высказанные выше положения о том, что запас энергии магнитного или электрического поля может изменяться только плавно, без скачков, выражают *принцип непрерывности во времени потокосцепления индуктивности и электрического заряда емкости* и называются *законами коммутации*.

Невозможность скачкообразного изменения потокосцепления следует из того, что в противном случае на индуктивности появилось бы бесконечно большое напряжение $u_L = d\Psi/dt = \infty$, что лишено физического смысла. Ввиду равенства $\Psi = Li$ принцип непрерывности потокосцепления означает, что при неизменном L ток i не может изменяться скачком. Итак, *в начальный момент после коммутации ток в индуктивности остается таким же, каким он был непосредственно перед коммутацией, а затем плавно изменяется*.

Аналогично невозможность скачкообразного изменения электрического заряда q следует из того, что в противном случае через емкость проходил бы бесконечно большой ток $i_C = dq/dt = \infty$, что также лишено физического смысла. Ввиду равенства $q = C u_C$ принцип непрерывности электрического заряда означает, что при неизменном C напряжение u_C не может изменяться скачком. Итак, *в начальный момент после коммутации напряжение на емкости остается таким же, каким оно было непосредственно перед коммутацией, а затем плавно изменяется*.

При этом следует отметить, что в цепях с идеализированными сосредоточенными параметрами скачкообразно могут изменяться: 1) токи в сопротивлениях и емкостях и 2) напряжения на сопротивлениях и индуктивностях.

Значения тока в индуктивности и напряжения на емкости в момент коммутации называются независимыми начальными условиями.

Обычно принимают, что коммутация происходит в момент времени $t = 0$; тогда ток в индуктивности и напряжение на емкости в момент времени непосредственно перед коммутацией обозначаются через $i_L(0-)$ и $u_C(0-)$, а в начальный момент переходного процесса после коммутации — через $i_L(0)$ и $u_C(0)$.

На основании законов коммутации:

$$\left. \begin{aligned} i_L(0-) &= i_L(0); \\ u_C(0-) &= u_C(0). \end{aligned} \right\}$$

Эти равенства выражают начальные условия цепи, в которых происходит коммутация.

При нулевых начальных условиях, т. е. когда $i_L(0-) = 0$ и $u_C(0-) = 0$, индуктивность в начальный момент после коммутации равносильна разрыву цепи, а емкость равносильна короткому замыканию.

В случае *ненулевых начальных условий*, т. е. когда $i_L(0) \neq 0$ и $u_C(0) \neq 0$, индуктивность в первый момент равносильна источнику тока $i_L(0)$, а емкость равносильна источнику э. д. с. $u_C(0)$.

Независимые начальные условия характеризуют энергию магнитного и электрического полей, запасенную к моменту коммутации, и для расчета переходного процесса обязательно требуется знание этих начальных условий, причем совершенно безразлично, каким образом эти условия в цепи были созданы.

При расчете переходных процессов в разветвленных электрических цепях наряду с независимыми начальными условиями используются так называемые *зависимые начальные условия*, а именно: значения токов, напряжений и их производных в начальный момент времени ($t = 0$). Методика вычисления зависимых начальных условий и их использование в расчете описаны в § 14-7.

До сих пор нами исключались из рассмотрения случаи коммутации, при которых неизбежно между контактами возникает искра или дуга. Один из таких случаев показан на рис. 14-1, а. До коммутации ток проходит через индуктивность L_1 и контакт, шунтирующий индуктивность L_2 ;

ток в L_2 равен нулю. В момент $t = 0$ контакт размыкается и индуктивности L_1 и L_2 оказываются включенными последовательно; ток в них принудительно становится одинаковым. Поскольку в момент коммутации ток в L_1 не изменяется, а ток в L_2 равен нулю, в силу первого закона Кирхгофа ток должен замкнуться через дугу, образовавшуюся между контактами. Кроме того, если под L_2 подразумевать реальную индуктивную катушку, то ток может частично

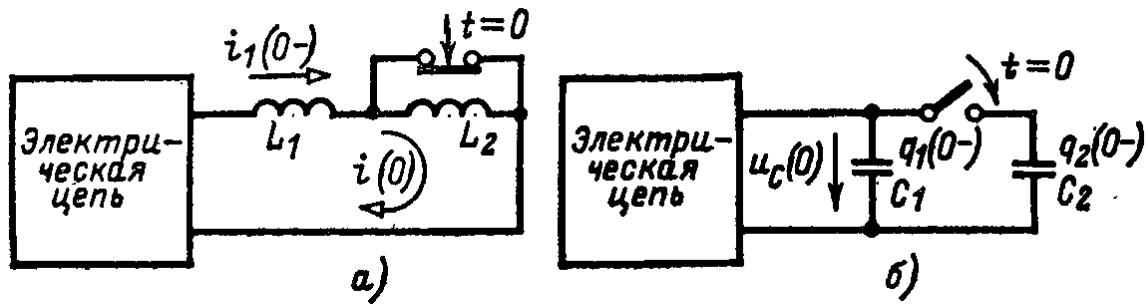


Рис. 14-1. Случай размыкания (а) или замыкания (б) при частичной потере энергии.

замкнуться и через межвитковую емкость. После быстрого погасания дуги токи в L_1 и L_2 уравниваются. Эта начальная стадия переходного процесса протекает столь быстро, что ею практически можно пренебречь, считая, что токи в L_1 и L_2 уравниваются мгновенно. Именно в этом смысле можно условно говорить о скачкообразном изменении токов в индуктивностях, которое предшествует исследуемому переходному процессу в цепи. При этом для расчета переходного процесса используется *принцип непрерывности суммарного потокосцепления* при коммутации, т. е. $L_1i(0-) = (L_1 + L_2)i(0)$. Скачкообразное изменение токов и соответствующих им потоков в L_1 и L_2 в момент коммутации не сопряжено в данном случае с наведением бесконечно большой суммарной э. д. с. самоиндукции, поскольку суммарное потокосцепление не претерпевает скачкообразного изменения. При новых значениях токов в L_1 и L_2 магнитная энергия, запасенная в катушках, будет меньше энергии, запасенной в первой катушке до коммутации. Часть энергии превратится в тепло в искре, а также излучится.

Найденный таким образом ток $i(0)$ в L_1 и L_2 может рассматриваться как независимое начальное условие для расчета переходного процесса во всей цепи на рис. 14-1, а после разрыва дуги.

При коммутациях в цепях с емкостями при отсутствии сопротивлений также возможны весьма быстрые перераспределения зарядов, условно рассматриваемые как мгновенные. В этом случае применим *принцип непрерывности суммарного заряда*. Полученные при этом значения зарядов и напряжений на отдельных емкостях используются в расчете последующего переходного процесса как независимые начальные условия.

Например, в случае схемы на рис. 14-1, б принцип непрерывности суммарного заряда до и после коммутации выражается равенством

$$q_1(0-) + q_2(0-) = q_1(0) + q_2(0) = u_C(0)(C_1 + C_2).$$

При сделанном допущении в остальной электрической цепи, соединенной с емкостями, не возникает бесконечно большого тока, так как суммарный заряд не изменяется скачкообразно при $t = 0$.

В процессе рассматриваемой коммутации энергия электрического поля уменьшится, так как часть ее превратится в тепло в очень малом сопротивлении проводника при очень большом токе, а также сможет выделиться в искре и излучиться.

[Нейман, Демирчян, стр.347]

5. АНАЛИЗ ПРОЦЕССОВ В ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ С ПОМОЩЬЮ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА

5.1. Операторное изображение функций

В предыдущей главе был изложен классический метод расчета переходных процессов в линейных электрических цепях с постоянными параметрами. Такие процессы описываются линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами. Эти уравнения могут быть проинтегрированы также операторным методом, что показал в 1862 г. М. Ващенко-Захарченко.

Хевисайд применил этот метод в конце предыдущего столетия к расчету переходных процессов в электрических цепях. При этом Хевисайд, не ссылаясь на предыдущие математические работы в этой области, не приводил и математического обоснования метода. Существенный вклад в развитие операторного метода, а также его практических приложений в последующем был сделан рядом ученых, среди которых видное место принадлежит советским ученым: В. С. Игнатовскому, А. М. Эфросу, А. М. Данилевскому, М. Ю. Юрьеву, М. И. Конторовичу, А. И. Лурье, К. А. Кругу и др.

При использовании операторного метода действительные функции времени, называемые *оригиналами*, заменяют их *операторными изображениями*. Соответствие между оригиналом и изображением устанавливается с помощью некоторого функционального преобразования. Это преобразование выбирается так, чтобы операции дифференцирования и интегрирования оригиналов заменялись алгебраическими операциями над их изображениями. В таком случае дифференциальные уравнения для оригиналов переходят в алгебраические уравнения для их изображений.

Связь между оригиналом $f(t)$ и его изображением устанавливается с помощью *интеграла Лапласа*:

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt,$$

где $p = \sigma + j\eta$ — комплексное число. Таким образом, операторное изображение действительной функции времени является функцией комплексного числа p .

Для того чтобы интеграл Лапласа имел конечное значение, функция $f(t)$ должна удовлетворять определенным условиям. Она должна удовлетворять условиям Дирихле, т. е. за любой конечный промежуток времени иметь конечное число разрывов первого рода и конечное число максимумов и минимумов. Кроме того, мы будем считать, что при $t > 0$ удовлетворяется условие $|f(t)| < Ae^{\alpha t}$, где A и α — некоторые положительные числа. Иными словами, можно выбрать A и α так, чтобы модуль функции $f(t)$ возрастал медленнее, чем $Ae^{\alpha t}$. Все реальные токи и напряжения удовлетворяют этим условиям. Для того чтобы интеграл Лапласа имел конечное значение, необходимо полагать $\sigma > \alpha$.

Условимся записывать преобразование Лапласа также в виде

$$F(p) = \mathcal{L}[f(t)].$$

Соответствие между оригиналом и изображением записывают условно в виде

$$F(p) \doteq f(t).$$

Заметим, что по определению преобразование Лапласа применимо начиная с момента $t = +0$. Далее, обозначая начальное значение функции и ее производных через $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$, ..., $f^{(n)}(0)$, будем понимать под ними их значения при $t = +0$.

Существует обратное функциональное преобразование, дающее возможность определить оригинал по его изображению. Такое преобразование, носящее название *обратного преобразования Лапласа*, имеет вид

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_0 - j\infty}^{\sigma_0 + j\infty} F(p) e^{pt} dp = f(t), \text{ где } p = \sigma_0 + j\eta.$$

Обратное преобразование Лапласа кратко записывается в виде

$$\mathcal{L}^{-1}[F(p)] = f(t).$$

В электротехнической практике распространено также функциональное преобразование, называемое *преобразованием по Карсону*, имеющее вид

$$p \int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt = pF(p) = \Phi(p).$$

Достоинством преобразования по Карсону является одинаковость размерностей оригинала и изображения. Это видно из того, что произведение pt должно быть безразмерным. В случае же преобразования по Лапласу размерность изображения равна размерности оригинала, умноженной на размерность времени.

Достоинством преобразования по Лапласу является его соответствие с преобразованием Фурье, на котором основывается широко используемый в настоящее время частотный метод анализа цепей и который будет изложен в одиннадцатой главе. Исходя из последнего соображения, а также из того, что в значительной части современной литературы применяется преобразование по Лапласу, мы в дальнейшем будем также пользоваться этим преобразованием.

Получим изображение производной $\frac{d}{dt}[f(t)] = f'(t)$. Имеем:

$$f'(t) \doteq \int_0^\infty f'(t) e^{-pt} dt.$$

Интегрируя по частям и учитывая что согласно наложенным на $f(t)$ условиям $[e^{-pt}f(t)]_{t=\infty} = 0$, получаем:

$$f'(t) \doteq \left| e^{-pt} f(t) \right|_0^\infty + p \int_0^\infty e^{-pt} f(t) dt = pF(p) - f(0).$$

В частном случае при нулевом начальном условии, когда $f(0) = 0$, для изображения производной имеем:

$$\dot{f}(t) \doteq pF(p).$$

Изображение второй производной имеет вид:

$$\ddot{f}(t) \doteq p[pF(p) - f(0)] - \dot{f}(0) = p^2 \left[F(p) - \frac{f(0)}{p} - \frac{\dot{f}(0)}{p^2} \right].$$

Соответственно, для производной порядка n получаем:

$$\dot{f^n}(t) \doteq p^n \left[F(p) - \frac{f(0)}{p} - \frac{\dot{f}(0)}{p^2} - \frac{\ddot{f}(0)}{p^3} - \dots - \frac{f^{(n-1)}(0)}{p^n} \right].$$

В частности, при нулевых начальных условиях, если при $t = 0$ сама функция $f(t)$ и все ее производные до $(n - 1)$ -ой включительно равны нулю, имеем:

$$\dot{f^n}(t) \doteq p^n F(p).$$

Найдем теперь изображение интеграла $\psi(t) = \int_0^t f(t) dt$.

Используя определение изображения функции $\psi(t)$ с помощью интеграла Лапласа и интегрируя по частям, получаем:

$$\Psi(p) = \int_0^\infty \psi(t) e^{-pt} dt = \left| -\psi(t) \frac{1}{p} e^{-pt} \right|_0^\infty + \frac{1}{p} \int_0^\infty \psi'(t) e^{-pt} dt.$$

Первое слагаемое равно нулю, так как функция $\psi(t)$ должна удовлетворять условию $|e^{-pt}\psi(t)|_{t=\infty} = 0$, а при $t = 0$ будет

$\psi(t) = \int_0^t f(t) dt = 0$. Второе слагаемое равно $\frac{1}{p} F(p)$, так как $\psi'(t) = f(t)$ и $f(t) \doteq F(p)$. Таким образом, изображение интеграла, взятого в пределах от 0 до t , будет:

$$\int_0^t f(t) dt \doteq \frac{F(p)}{p}.$$

Итак мы убедились, что, изображая функции времени $f(t)$ с помощью интеграла Лапласа, мы операции дифференцирования и интегрирования этих функций заменяем алгебраическими операциями над изображениями этих функций.

В дифференциальных уравнениях электрической цепи с производной по времени мы чаще всего встречаемся в выражении для напряжения u_L на катушке $u_L = L \frac{di}{dt}$. Обозначая операторное изображение тока $i(t)$ в виде $I(p)$, получаем, согласно вышеизложенному, операторное изображение для $u_L(t)$:

$$U_L(p) = pLI(p) - Li(0).$$

С интегралом мы чаще всего встречаемся в выражении напряжения u_C на конденсаторе: $u_C = \frac{1}{C} \int_0^t idt + u_C(0)$.

Изображение первого слагаемого, согласно изложенному, будет $\frac{I(p)}{pC}$. Второе слагаемое $u_C(0)$ является постоянной величиной и имеет изображение

$$\int_0^\infty u_C(0) e^{-pt} dt = \left| -\frac{u_C(0)}{p} e^{-pt} \right|_0^\infty = \frac{u_C(0)}{p}.$$

Следовательно, в общем случае при ненулевом начальном условии изображение напряжения на конденсаторе $u_C(t)$ имеет вид

$$U_C(p) = \frac{I(p)}{pC} + \frac{u_C(0)}{p}.$$

Таким образом, при составлении уравнений цепи в операторной форме автоматически будут учитываться все физические начальные условия — значения токов в катушках и напряжения на конденсаторах при $t = 0$.

5.2. Примеры изображений функций

На основе этих результатов можно составить следующую таблицу соответствия некоторых функций (оригиналов) и их изображений:

Оригинал	Изображение
A	$\frac{A}{p}$
Ae^{at}	$\frac{A}{p-a}$
$1 - e^{-at}$	$\frac{1}{p} - \frac{1}{p+a} = \frac{a}{p(p+a)}$
$\sinh at = \frac{1}{2}(e^{at} - e^{-at})$	$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{p-a} - \frac{1}{p+a} \right) = \frac{a}{p^2 - a^2}$
$\cosh at = \frac{1}{2}(e^{at} + e^{-at})$	$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p+a} \right) = \frac{p}{p^2 - a^2}$
$\sin \omega t = \frac{1}{2j}(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t})$	$\frac{1}{2j} \left(\frac{1}{p-j\omega} - \frac{1}{p+j\omega} \right) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$
$\cos \omega t = \frac{1}{2}(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t})$	$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{p-j\omega} + \frac{1}{p+j\omega} \right) = \frac{p}{p^2 + \omega^2}$
$\sin(\omega t + \psi)$	$\frac{p \sin \psi + \omega \cos \psi}{p^2 + \omega^2}$
$\cos(\omega t + \psi)$	$\frac{p \cos \psi - \omega \sin \psi}{p^2 + \omega^2}$
$e^{-\delta t} \cdot \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(p+\delta)^2 + \omega^2}$
$e^{-\delta t} \cdot \cos \omega t$	$\frac{p+\delta}{(p+\delta)^2 + \omega^2}$
$te^{-\delta t}$	$\frac{1}{(p+\delta)^2}$
t	$\frac{1}{p^2}$

В приведенной таблице даны соотношения между оригиналами и их изображениями при преобразовании Лапласа. При использовании преобразования Карсона следует умножать все изображения на p . В этом случае изображением постоянной величины будет сама постоянная величина. Обратим внимание на то, что кратные полюсы в выражении для $F(p)$ изображают функции, в которых время t входит множителем (последние два выражения в таблице).

5.3. Законы Кирхгофа и элементов цепи в операторной форме

Первый закон Кирхгофа в применении к узлу цепи для действительных токов имеет вид

$$\sum i_k = 0.$$

Так как ток i_k изображается с помощью интеграла Лапласа, а интеграл суммы равен сумме интегралов от слагаемых этой суммы, то первый закон Кирхгофа в операторной форме записывается в виде

$$\sum I_k(p) = 0.$$

Соответственно, второй закон Кирхгофа в применении к контуру цепи:

$$\sum e_k = \sum u_k,$$

где e_k — сумма э. д. с. источников энергии в k -й ветви и u_k — напряжение на k -й ветви, записывается в операторной форме:

$$\sum E_k(p) = \sum U_k(p).$$

Естественно, что при составлении уравнений Кирхгофа в операторной форме необходимо задаться положительными направлениями всех токов и соблюдать все правила знаков, установленные ранее при составлении законов Кирхгофа для действительных функций времени. В общем случае для ветви, содержащей все три элемента (r , L , C), имеем:

$$u_k = r_k i_k + L_k \frac{di_k}{dt} + \frac{1}{C_k} \int_0^t i_k dt + u_{Ck}(0),$$

поэтому, согласно § 10-1, с учетом ненулевых начальных условий получим:

$$U_k(p) = r_k I_k(p) + pL_k I_k(p) - L_k i_k(0) + \frac{I_k(p)}{pC_k} + \frac{u_{Ck}(0)}{p},$$

или

$$U_k(p) + L_k i_k(0) - \frac{u_{Ck}(0)}{p} = I_k(p) \left(r_k + pL_k + \frac{1}{pC_k} \right).$$

Величину

$$r_k + pL_k + \frac{1}{pC_k} = Z_k(p)$$

называют обобщенным сопротивлением ветви, или, иначе, операторным сопротивлением ветви.

Окончательно при этом операторная запись законов Кирхгофа примет вид

$$\sum I_k(p) = 0,$$

$$\sum E_k(p) = \sum \left[I_k(p) Z_k(p) - L_k i_k(0) + \frac{u_{Ck}(0)}{p} \right].$$

Ток в k -й ветви и падение напряжения в этой ветви в операторной форме связаны соотношением:

$$I_k(p) = \frac{U_k(p) + L_k i_k(0) - \frac{u_{Ck}(0)}{p}}{Z_k(p)},$$

которое представляет собою закон Ома, обобщенный на случай переходного процесса. В частном случае при нулевых начальных условиях, т. е. при $i_{Lk}(0) = 0$ и $u_{Ck}(0) = 0$, имеем:

$$I_k(p) = \frac{U_k(p)}{Z_k(p)} = \frac{U_k(p)}{r_k + pL_k + \frac{1}{pC_k}}.$$

Заметим, что структуры записи операторного сопротивления ветви и комплексного сопротивления этой же ветви

$$Z_k = r_k + j\omega L_k + \frac{1}{j\omega C_k}$$

тождественны, и выражение для комплексного сопротивления Z_k можно получить через операторное сопротивление $Z_k(p)$ путем замены p на $j\omega$, т. е. $Z_k = Z_k(j\omega)$. В частности, полагая $p = 0$, получим сопротивление ветви постоянному току.

Сопоставляя выражения законов Кирхгофа в операторной форме с их выражением в комплексной форме:

$$\sum I_k = 0 \text{ и } \sum \dot{E}_k = \sum I_k Z_k,$$

где комплексы I_k , Z_k содержат частоту ω только с множителем j , мы видим, что при нулевых начальных условиях законы Кирхгофа в операторной форме одинаковы по виду с этими законами в комплексной форме. Поэтому при нулевых начальных условиях методы расчета любых сложных цепей при переходных процессах операторным методом аналогичны методам расчета установившихся режимов комплексным методом. В частности, при нулевых начальных условиях входное операторное сопротивление сколь угодно сложного пассивного двухполюсника можно получить из комплексного сопротивления этого двухполюсника заменой $j\omega$ на p .

В случае ненулевых начальных условий мы можем второй закон Кирхгофа для всех контуров записать в виде

$$\sum E_k(p) + \sum L_k i_k(0) - \sum \frac{u_{Ck}(0)}{p} = \sum I_k(p) Z_k(p).$$

Рассматривая члены $\sum L_k i_k(0)$ и $-\sum \frac{u_{Ck}(0)}{p}$ как э. д. с. добавочных источников энергии в контурах (рис. 10-1), мы можем с их учетом сохранить все те же общие методы расчета сложных цепей. В частности, можно воспользоваться методом наложения и рассчитать процесс в цепи сначала при нулевых начальных условиях, а затем наложить на него процесс, возникающий только под действием одних добавочных э. д. с., определяемых начальными токами в катушках и начальными напряжениями на конденсаторах.

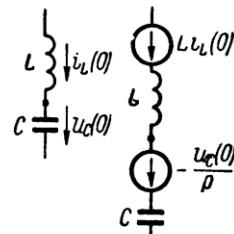


Рис. 10-1.

Рассмотрим последовательное соединение нескольких участков цепи. Пусть цепь состоит из одного контура. В таком случае ток для всех участков этой цепи один и тот же. Применяя второй закон Кирхгофа в операторной форме, имеем:

$$\sum E_k(p) = I(p) \sum Z_k(p) - \sum L_k i_k(0) + \sum \frac{u_{Ck}(0)}{p}.$$

Величина $Z(p) = \sum Z_k(p)$ является операторным сопротивлением всей цепи. Таким образом, *при последовательном соединении участков цепи их операторные сопротивления складываются*.

Рассмотрим параллельное соединение двух ветвей. В этом случае напряжение на них общее. Пусть в каждой ветви последовательно соединены r , L и C . Имеем для каждой ветви:

$$U(p) = I_1(p) Z_1(p) - L_1 i_1(0) + \frac{u_{C1}(0)}{p}$$

и

$$U(p) = I_2(p) Z_2(p) - L_2 i_2(0) + \frac{u_{C2}(0)}{p},$$

где

$$Z_1(p) = r_1 + pL_1 + \frac{1}{pC_1} \text{ и } Z_2(p) = r_2 + pL_2 + \frac{1}{pC_2}.$$

Суммарный ток в неразветвленной части цепи изображается:

$$I(p) = I_1(p) + I_2(p) = \frac{U(p) + L_1 i_1(0) - \frac{u_{C1}(0)}{p}}{Z_1(p)} + \frac{U(p) + L_2 i_2(0) - \frac{u_{C2}(0)}{p}}{Z_2(p)}.$$

Отсюда мы видим, что *при ненулевых начальных условиях нельзя представить $I(p)$ как произведение $U(p)$ на некоторый множитель $Y(p)$, имеющий смысл операторной проводимости*. Однако *при нулевых начальных условиях это возможно*, так как при этом имеем:

$$I(p) = U(p) \left[\frac{1}{Z_1(p)} + \frac{1}{Z_2(p)} \right] = U(p) [Y_1(p) + Y_2(p)] = U(p) Y(p).$$

Величины $Y_1(p) = \frac{1}{Z_1(p)}$, $Y_2(p) = \frac{1}{Z_2(p)}$ и $Y(p) = \frac{1}{Z(p)}$ называют *операторными проводимостями*.

Таким образом, *при нулевых начальных условиях в случае параллельного соединения участков цепи их операторные проводимости складываются*.

5.4. Расчет переходных процессов в электрических цепях операторным методом

Рассмотрим сначала несколько простых примеров, исследованных ранее классическим методом.

При включении цепи (r, L) под постоянное напряжение $u = U = \text{const}$ имеем $U(p) = \frac{U}{p}$ и $Z(p) = pL + r$, а следовательно, при

нулевом начальном условии $i(0) = 0$ операторное изображение тока, согласно закону Ома, в операторной форме получает выражение:

$$I(p) = \frac{U(p)}{Z(p)} = \frac{U/p}{r + pL} = \frac{U}{r} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p + r/L} \right);$$

Пользуясь изображением функции e^{at} (§ 10-2), можем написать для искомого тока:

$$i(t) = \frac{U}{r} \left(1 - e^{-\frac{r}{L}t} \right).$$

В случае включения цепи (r, C) под действие постоянного напряжения при $u_C(0) = 0$ имеем:

$$I(p) = \frac{U/p}{r + \frac{1}{pC}} = \frac{U}{r} \frac{1}{p + \frac{1}{rC}}$$

и, соответственно,

$$i(t) = \frac{U}{r} e^{-\frac{t}{rC}}.$$

При включении цепи (r, L, C) под действие постоянного напряжения, при нулевых начальных условиях, получаем:

$$\begin{aligned} I(p) &= \frac{U/p}{r + pL + \frac{1}{pC}} = \frac{U}{L} \frac{1}{p^2 + \frac{r}{L}p + \frac{1}{LC}} = \\ &= \frac{U}{L} \frac{1}{\left(p + \frac{r}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC} - \left(\frac{r}{2L}\right)^2} = \frac{U}{\omega'L} \frac{\omega'}{(p + \delta)^2 + \omega'^2}, \end{aligned}$$

где

$$\delta = \frac{r}{2L}, \quad \omega'^2 = \omega_0^2 - \delta^2 \text{ и } \omega_0^2 = \frac{1}{LC}.$$

Используя таблицу в § 10-2, находим оригинал искомого тока:

$$i(t) = \frac{U}{\omega'L} e^{-\delta t} \sin \omega' t.$$

Достоинство операторного метода для расчета переходных процессов, заключающееся в алгебраизации дифференциальных уравнений цепи, особенно проявляется при расчете сложных цепей.

В предыдущем параграфе было отмечено, что, учитывая члены вида $L_k i_k(0)$ и $-\frac{u_{Ck}(0)}{p}$, как добавочные э. д. с., мы можем для расчета переходных процессов воспользоваться всеми методами

5.5. Переход от изображений к оригиналам

Для нахождения оригинала представим изображение, полученное в виде рациональной дроби, простейшими слагаемыми, для которых известны оригиналы. С этой целью воспользуемся

теоремой разложения. Пусть имеется изображение в виде

$$X(p) = \frac{G(p)}{H(p)},$$

где $G(p)$ и $H(p)$ — полиномы от p . Здесь мы будем предполагать, что степень m полинома в числителе меньше степени n полинома в знаменателе ($m < n$). В дальнейшем, в двенадцатой главе, мы снимем это ограничение и увидим, что при $m \geq n$ появляются э. д. с., токи и напряжения, имеющие импульсный характер, т. е. принимающие бесконечно большие значения в течение бесконечно малых интервалов времени. Не рассматривая здесь таких импульсных функций, являющихся по сути дела результатом идеализации реальных э. д. с., токов и напряжений, мы будем полагать $m < n$.

Предположим, кроме того, что уравнение $H(p) = 0$ не имеет кратных корней, а также не имеет корней, равных корням уравнения $G(p) = 0$. При указанных условиях рациональную дробь можно разложить на простейшие дроби:

$$\frac{G(p)}{H(p)} = \frac{A_1}{p - p_1} + \frac{A_2}{p - p_2} + \dots + \frac{A_n}{p - p_n} = \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{p - p_k},$$

где p_1, p_2, \dots, p_n — корни $H(p)$. Для определения коэффициентов A_k можно воспользоваться одним из многих приемов, известных из алгебры. Умножив обе части равенства на $(p - p_k)$ и положив $p = p_k$, получим справа A_k , а слева — неопределенность. Раскрывая эту неопределенность, получим:

$$A_k = \left| \frac{G(p)(p - p_k)}{H(p)} \right|_{p=p_k} = G(p_k) \lim_{p \rightarrow p_k} \frac{p - p_k}{H(p)} = \frac{G(p_k)}{H'(p_k)}.$$

Таким образом,

$$X(p) = \frac{G(p)}{H(p)} = \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{p - p_k} = \sum_{k=1}^n \frac{G(p_k)}{H'(p_k)} \cdot \frac{1}{p - p_k}.$$

Так как $\frac{A_k}{p - p_k} \doteq A_k e^{p_k t}$, то для искомой величины $x(t)$ имеем:

$$x(t) = \sum_{k=1}^n \frac{G(p_k)}{H'(p_k)} e^{p_k t}.$$

Это равенство и называют *теоремой разложения*.

В частном случае, когда один из корней полинома $H(p)$, пусть p_1 , равен нулю, то $e^{p_1 t} = 1$ и соответствующий член в разложении обращается в постоянную величину. Выделяя этот член, напишем:

$$X(p) \doteq x(t) = \frac{G(0)}{H'(0)} + \sum_{k=2}^n \frac{G(p_k)}{H'(p_k)} e^{p_k t}.$$

Полином $H(p)$ может иметь корень, лежащий в начале координат ($p_1 = 0$), когда в данной цепи имеются источники постоянной э. д. с. (или источники постоянного тока). Выделенный постоянный член представляет собой установившиеся ток или напряжение в цепи.

Если $H(p)$ имеет пару сопряженных чисто мнимых корней, лежащих на оси мнимых $p_1 = j\omega, p_2 = -j\omega$, то можно записать:

$$X(p) \doteq x(t) = \frac{G(j\omega)}{H'(j\omega)} e^{j\omega t} + \frac{G(-j\omega)}{H'(-j\omega)} e^{-j\omega t} + \sum_{k=3}^n \frac{G(p_k)}{H'(p_k)} e^{p_k t}.$$

Полином $H(p)$ может иметь пару чисто мнимых сопряженных корней в случае если рассматривается переходный процесс при наличии в цепи источников синусоидальных э. д. с. или источников синусоидальных токов. Два первых выделенных члена определяют синусоидальный ток или напряжение установившегося режима.

Для иллюстрации применения теоремы разложения рассмотрим некоторые примеры.

В качестве первого примера решим задачу о разряде конденсатора на цепь (r, L) , рассмотренную ранее (§ 9-7), классическим методом. Пусть начальное напряжение конденсатора $u_C(0) = U_0$, а начальное значение тока в катушке $i(0) = 0$. Операторное выражение тока имеет вид

$$\begin{aligned} I(p) &= \frac{U(p) + Li(0) - \frac{1}{p} u_C(0)}{Z(p)} = \frac{-U_0/p}{r + pL + \frac{1}{pC}} = \\ &= \frac{-U_0/L}{p^2 + \frac{r}{L}p + \frac{1}{LC}} = \frac{-U_0/L}{p^2 + 2\delta p + \omega_0^2}, \end{aligned}$$

так как $U(p) = 0$. Следовательно, в данном случае $G(p) = -U_0/L$ и $H(p) = p^2 + 2\delta p + \omega_0^2$. Корни уравнения $H(p) = 0$ будут $p_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$. Так как

$$H'(p) = 2p + 2\delta, \text{ то } \frac{G(p)}{H'(p)} = \frac{-U_0/L}{2(p + \delta)}.$$

Пользуясь теоремой разложения, получаем:

$$i(t) = \frac{-U_0}{2L(p_1 + \delta)} e^{p_1 t} + \frac{-U_0}{2L(p_2 + \delta)} e^{p_2 t} = -\frac{U_0}{2L\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}} (e^{p_1 t} - e^{p_2 t}).$$

Пусть корни p_1 и p_2 равны друг другу: $p_1 = p_2 = -\delta$ и $\delta = \omega_0$, т. е. полином $H(p)$ имеет кратные корни. Предположив сначала, что $p_1 \neq p_2$, мы получим только что найденное решение, обращающееся при $p_1 = p_2$ в неопределенность. Раскрывая эту неопределенность при $p_1 \rightarrow p_2$, получим, как это было сделано в § 9-7, искомое решение в виде

$$i = -\frac{U_0}{L} t e^{-\delta t}.$$

В более общем случае, когда один из корней, пусть p_1 , полинома $H(p)$ в степени n имеет кратность q , рациональную дробь можно разложить на простейшие в виде

$$\begin{aligned} \frac{G(p)}{H(p)} &= \frac{G(p)}{(p - p_1)^q H_1(p)} = \left[\frac{A_{11}}{(p - p_1)^q} + \frac{A_{12}}{(p - p_1)^{q-1}} + \dots \right. \\ &\dots + \left. \frac{A_{1s}}{(p - p_1)^{q-s+1}} + \dots + \frac{A_{1q}}{p - p_1} \right] + \frac{A_2}{p - p_2} + \dots + \\ &\quad + \frac{A_k}{p - p_k} + \dots + \frac{A_n}{p - p_n}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} A_{1s} &= \frac{1}{(s-1)!} \left[\frac{d^{s-1}}{dp^{s-1}} \frac{(p - p_1)^q G(p)}{H(p)} \right]_{p=p_1}, \\ A_k &= \frac{G(p_k)}{H(p_k)} = \frac{G(p_k)}{(p_k - p_1)^q H_1(p_k)}. \end{aligned}$$

Оригинал функции $\frac{A_{1s}}{(p - p_1)^{q-s+1}}$ имеет вид

$$\frac{A_{1s}}{(p - p_1)^{q-s+1}} \stackrel{?}{=} \frac{A_{1s}}{(q-s)!} t^{(q-s)} e^{p_1 t}.$$

Оригинал же функции $\frac{A_k}{(p - p_k)}$ равен $A_k e^{p_k t}$.

Решим с помощью теоремы разложения задачу о включении цепи (r, L) под синусоидальное напряжение $u = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$ при условии $i(0) = 0$, рассмотренную ранее классическим методом (§ 9-4). Изображение тока в цепи получим, принимая во внимание, что $Z(p) = r + pL$, а изображение синусоидальной функции имеет вид

$$u(t) = \frac{1}{2j} (U_m e^{j\psi_u} e^{j\omega t} - U_m e^{-j\psi_u} e^{-j\omega t}) \doteq \frac{1}{2j} \left(\frac{\dot{U}_m}{p - j\omega} - \frac{\dot{U}_m^*}{p + j\omega} \right) = U(p).$$

Операторное изображение тока в цепи определяется из выражения:

$$I(p) = \frac{U(p)}{Z(p)} = \frac{1}{2jL} \left[\frac{\dot{U}_m}{(p - j\omega)(p + \frac{r}{L})} - \frac{\dot{U}_m^*}{(p + j\omega)(p + \frac{r}{L})} \right].$$

Применив теорему разложения, получим:

$$\begin{aligned} I(p) &= \frac{1}{2jL} \left[\frac{\dot{U}_m}{j\omega + \frac{r}{L}} \cdot \frac{1}{p - j\omega} + \frac{\dot{U}_m}{-j\omega - \frac{r}{L}} \cdot \frac{1}{p + \frac{r}{L}} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\dot{U}_m^*}{-j\omega + \frac{r}{L}} \cdot \frac{1}{p + j\omega} - \frac{\dot{U}_m^*}{j\omega - \frac{r}{L}} \cdot \frac{1}{p + \frac{r}{L}} \right] \doteq \frac{1}{2j} \left[\frac{\dot{U}_m}{r + j\omega L} e^{j\omega t} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\dot{U}_m}{r + j\omega L} e^{-\frac{r}{L}t} - \frac{\dot{U}_m^*}{r - j\omega L} e^{-j\omega t} + \frac{\dot{U}_m^*}{r - j\omega L} e^{-\frac{r}{L}t} \right]. \end{aligned}$$

Группируя первый член с третьим и второй с четвертым и имея в виду, что $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{\omega L}{r}$, получим:

$$i(t) = \frac{U_m}{\sqrt{r^2 + \omega^2 L^2}} [\sin(\omega t + \psi - \varphi) - \sin(\psi - \varphi) e^{-\frac{r}{L}t}].$$

В качестве примера определения переходного тока в разветвленной цепи рассмотрим включение под постоянное напряжение U_0 цепи, приведенной на рис. 10-3, при нулевых начальных условиях. Операторное сопротивление такой цепи

$$Z(p) = pL + \frac{r \frac{1}{pC}}{r + \frac{1}{pC}} = \frac{p^2 rLC + pL + r}{1 + prC}.$$

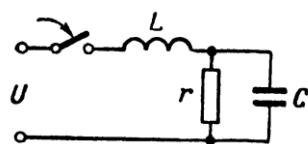


Рис. 10-3.

Изображение приложенного напряжения $U_0 \doteq \frac{U_0}{p}$.

Изображение тока представится в виде

$$\begin{aligned} I(p) &= \frac{U_0}{Z(p)} = \frac{U_0 (1 + prC)}{p(p^2 rLC + pL + r)} = \frac{\frac{U_0}{rLC} (1 + prC)}{p \left(p^2 + \frac{1}{rC} p + \frac{1}{LC} \right)} = \\ &= \frac{\frac{U_0}{rLC} (1 + prC)}{p \left(p^2 + 2\delta p + \omega_0^2 \right)}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$G(p) = \frac{U_0}{rLC} (1 + prC);$$

$$H(p) = p^3 + 2\delta p^2 + \omega_0^2 p; \quad H'(p) = 3p^2 + 4\delta p + \omega_0^2;$$

$$I(p) = \frac{G(p)}{H(p)} = \frac{A_1}{p - p_1} + \frac{A_2}{p - p_2} + \frac{A_3}{p - p_3};$$

$$p_1 = 0, \quad p_2 = -\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}, \quad p_3 = -\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2};$$

$$A_1 = \frac{G(0)}{H'(0)} = \frac{U_0}{r}, \quad A_2 = \frac{G(p_2)}{H'(p_2)} = \frac{\frac{U_0}{rLC} (1 + p_2 r C)}{p_2 \cdot 2(p_2 + \delta)},$$

$$A_3 = \frac{G(p_3)}{H'(p_3)} = \frac{\frac{U_0}{rLC} (1 + p_3 r C)}{p_3 \cdot 2(p_3 + \delta)}.$$

Тогда

$$i(t) = \frac{U_0}{r} + \frac{\frac{U_0}{rLC} (1 + p_2 r C)}{p_2 \cdot 2 \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}} e^{p_2 t} - \frac{\frac{U_0}{rLC} (1 + p_3 r C)}{p_3 \cdot 2 \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}} e^{p_3 t}.$$

Аналогичным образом можно определить токи в остальных ветвях.

5.6. Свойства корней характеристического уравнения

Рассмотрим любую сколь угодно сложную пассивную цепь, т. е. цепь, в которой отсутствуют источники энергии. В такой цепи может происходить только затухающий во времени переходящий (свободный) процесс, определяемый запасами энергии в магнитных и электрических полях в начальный момент времени. При использовании классического метода ток в любой k -й ветви в этом случае находится в результате решения однородного дифференциального уравнения.

Свойства корней α_i характеристического уравнения, соответствующего этому однородному дифференциальному уравнению, мы и рассмотрим в настоящем параграфе.

При использовании операторного метода сказанное относится к тем корням p_i полинома $H(p)$, которые определяют переходящий (свободный) процесс. Полином $H(p)$ можно записать в виде произведения $H(p) = N(p)H_1(p)$, где корни уравнения $N(p) = 0$ определяются видом действующей в цепи э. д. с. и дают установившийся режим. Корни же уравнения $H_1(p) = 0$ характеризуют переходящий (свободный) процесс. Все это хорошо видно из примеров, приведенных в предыдущем параграфе.

Корни p_i уравнения $H_i(p) = 0$ совпадают с корнями α_i характеристического уравнения, которое используется в классическом методе ($p_i = \alpha_i$).

Первое свойство этих корней для пассивной электрической цепи заключается в том, что вещественные части всех корней должны быть отрицательными:

$$\operatorname{Re}(\alpha_i) < 0.$$

Это свойство является прямым следствием того, что процесс должен быть затухающим.

Вторым свойством является то обстоятельство, что все комплексные корни должны быть попарно сопряженными, так как решения уравнения, определяющие действительные функции времени [ток $i(t)$, напряжение $u(t)$], должны быть вещественными.

Третье свойство заключается в том, что чисто мнимые корни $\alpha_i = j\omega_i$ и $\alpha_i^* = -j\omega_i$ должны быть простыми. Действительно, если бы такие корни имели каждый кратность $m > 1$, то соответствующее им решение имело бы вид

$$(A_0 + A_1 t + A_2 t^2 + \dots + A_{m-1} t^{m-1}) \sin \omega_i t.$$

При $m > 1$ мы получили бы колебания с нарастающей до бесконечности амплитудой, чего не может быть, так как на рассматриваемую цепь не воздействуют источники энергии и первоначальный запас энергии в магнитных и электрических полях цепи не может возрастать.

На рис. 10-4 показано расположение вещественных и сопряженных комплексных корней для реальной цепи, содержащей катушки, конденсаторы и сопротивления.

Чисто мнимые корни могут иметь место только для цепей без потерь. На рис. 10-5 показано расположение сопряженных корней на мнимой оси для этого идеализированного случая.

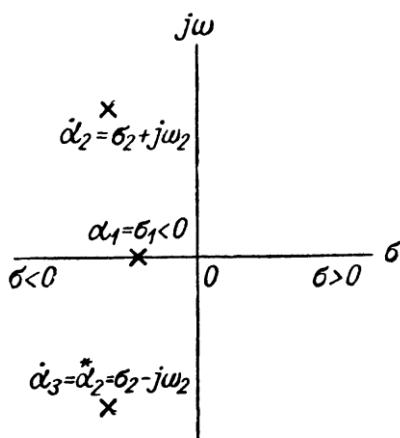


Рис. 10-4.

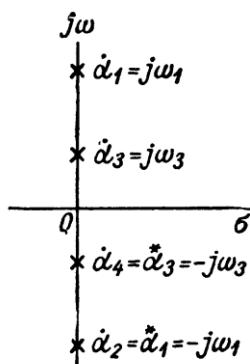


Рис. 10-5.

[Бессонов, стр.44]

6. СВОЙСТВА И ТЕОРЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЕЙ

Рассмотрим некоторые следствия из решений уравнений линейных электрических цепей, которые формулируются обычно в виде принципов или теорем линейных цепей.

6.1. Принцип (теорема) наложения

Каждую из контурных ЭДС можно выразить через ЭДС ветвей $E_1, E_2, E_3, \dots, E_k, \dots, E_n$, сгруппировать коэффициенты при этих ЭДС и получить выражение следующего вида:

$$I_k = E_1 g_{k1} + E_2 g_{k2} + E_3 g_{k3} + \dots + E_k g_{kk} + E_n g_{kn}. \quad (2.7)$$

Если контуры выбраны таким образом, что какая-либо из ЭДС, например E_m , входит только в один m -контур, а в другие контуры не входит, то $g_{km} = \Delta_{km} / \Delta$.

Уравнение (2.7) выражает собой принцип наложения.

Принцип наложения формулируется следующим образом: ток в k -ветви равен алгебраической сумме токов, вызываемых каждой из ЭДС схемы в отдельности. Этот принцип справедлив для всех линейных электрических цепей.

Принцип наложения положен в основу метода расчета, получившего название *метода наложения*.

При расчете цепей данным методом поступают следующим образом: поочередно рассчитывают токи, возникающие от действия каждой из ЭДС, мысленно удаляя остальные из схемы, но оставляя в схеме внутренние сопротивления источников, и затем находят токи в ветвях путем алгебраического сложения частичных токов. Заметим, что методом наложения нельзя пользоваться для подсчета выделяемых в сопротивлениях мощностей как суммы мощностей от частичных токов, поскольку мощность является квадратичной функцией тока ($P = RI^2$).

Если через некоторое сопротивление \bar{R} протекают согласно направленные частичные токи I_1 и I_2 , то выделяемая в нем мощность $P = R(I_1 + I_2)^2$ и не равна сумме мощностей от частичных токов: $P \neq RI_1^2 + RI_2^2$.

6.2. Входные и взаимные проводимости ветвей.

Входное сопротивление

На рис. 2.15,а изображена так называемая скелетная схема пассивной цепи. На ней показаны ветви и узлы. В каждой

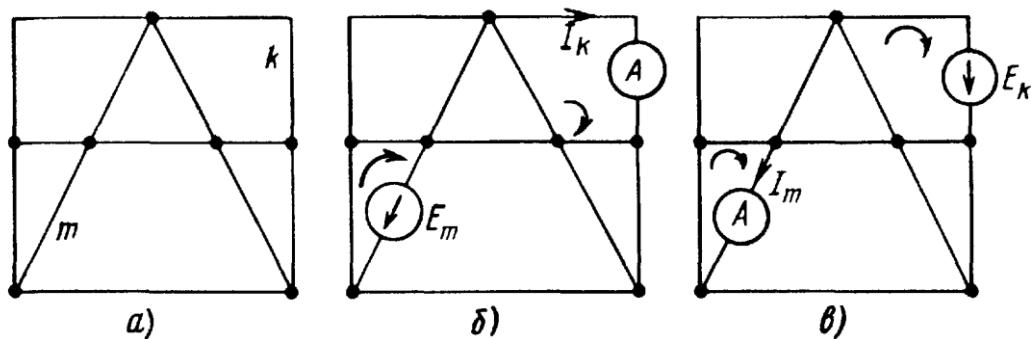


Рис. 2.15

ветви имеется сопротивление. Выделим в схеме две ветви: m и k . Поместим в ветвь m ЭДС E_m (других ЭДС в схеме нет). Выберем контуры в схеме так, чтобы k -ветвь входила только в k -контур, а m -ветвь — только в m -контур. ЭДС E_m вызовет токи в ветвях k и m :

$$\left. \begin{aligned} I_k &= E_m g_{km}; \\ I_m &= E_m g_{mm} \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

Коэффициенты g имеют размерность проводимости.

Коэффициент g с одинаковыми индексами (g_{mm}) называют *входной проводимостью* ветви (ветви m). Он численно равен току в ветви m , возникшему от действия ЭДС $E_m = 1\text{В}$ (единичной ЭДС): $I_m = 1g_{mm}$.

Коэффициенты g с разными индексами называют *взаимными проводимостями*. Так, g_{km} есть взаимная проводимость k - и m -ветвей. Взаимная проводимость g_{km} численно равна току в k -ветви, возникающему от действия единичной ЭДС в m -ветви¹.

¹ Входные и взаимные проводимости ветвей можно определить и иначе: входная проводимость m -ветви — это коэффициент пропорциональности между током и ЭДС этой ветви (при отсутствии ЭДС в других ветвях схемы); взаимная проводимость ветвей k и m — коэффициент пропорциональности между током k -ветви и ЭДС m -ветви при отсутствии ЭДС в других ветвях схемы.

Входные и взаимные проводимости ветвей используют при выводе общих свойств линейных электрических цепей (см. § 2.16 и 2.18) и при расчете цепей по методу наложения [см. формулу (2.7)].

Входные и взаимные проводимости могут быть определены расчетным и опытным путями.

При их расчетном определении составляют уравнения по методу контурных токов, следя за тем, чтобы ветви, взаимные и входные проводимости которых представляют интерес, входили каждая только в свой контур. Далее находят определитель системы Δ и по нему необходимые алгебраические дополнения:

$$g_{mm} = \Delta_{mm} / \Delta; \quad (2.9)$$

$$g_{km} = \Delta_{km} / \Delta. \quad (2.10)$$

По формуле (2.10) g_{km} может получиться либо положительной, либо отрицательной величиной. Отрицательный знак означает, что ЭДС E_m , направленная согласно с контурным током в m -ветви, вызывает ток в k -ветви, не совпадающей по направлению с произвольно выбранным направлением контурного тока I_k по k -ветви.

При опытном определении g_{mm} и g_{km} в m -ветвь схемы (рис. 2.15, б) включают источник ЭДС E_m , а в k -ветвь — амперметр (миллиамперметр). Поделим ток I_k на ЭДС E_m и найдем значение g_{km} . Для определения входной проводимости ветви m (g_{mm}) необходимо измерить ток в m -ветви, вызванной ЭДС E_m . Частное от деления тока m -ветви на ЭДС m -ветви и дает g_{mm} .

Выделим m -ветвь, обозначив всю остальную часть схемы (не содержащую ЭДС) некоторым прямоугольником (рис. 2.16). Вся схема, обозначенная прямоугольником, по отношению к зажимам ab обладает некоторым сопротивлением. Его называют *входным сопротивлением*. Входное сопротивление m -ветви обозначим $R_{\text{вх}m}$.

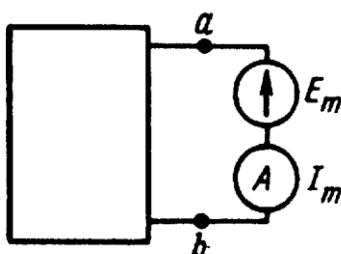


Рис. 2.16

Тогда

$$R_{\text{вх}m} = E_m / I_m = 1 / g_{mm} = \Delta / \Delta_{mm}. \quad (2.11)$$

Таким образом, входное сопротивление m -ветви есть величина, обратная входной проводимости этой ветви. Его не следует смешивать с полным сопротивлением m -контура в методе контурных токов.

6.3. Принцип (теорема) взаимности

Теорема взаимности формулируется следующим образом: для любой линейной цепи ток в k -ветви, вызванный источником ЭДС E_m , находящимся в m -ветви, $I_k = E_m g_{km}$ равен току I_m в m -ветви, вызванному источником ЭДС E_k (численно равной ЭДС E_m), находящимся в k -ветви, $I_m = E_k g_{mk}$.

Для доказательства теоремы взаимности обратимся к рис. 2.15, а. Как и при выводах в § 2.15, выделим две ветви схемы: ветвь k

и ветвь m . Включим в ветвь m источник ЭДС E_m , в ветвь k — амперметр A^1 для измерения тока I_k . Пусть каждая из ветвей k и m входит соответственно только в k - и m -контуры. Поэтому по методу контурных токов $I_k = E_m \Delta_{km} / \Delta$. Поменяем местами источник ЭДС и амперметр, т. е. источник ЭДС переместим из ветви m в ветвь k и назовем теперь E_k , а амперметр — из ветви k в ветвь m . В этом случае ток $I_m = E_k \Delta_{mk} / \Delta$.

Так как $E_k = E_m$, а $\Delta_{mk} = \Delta_{km}$ в силу симметрии определителя системы Δ относительно главной диагонали (см. § 2.13), то ток I_k в схеме рис. 2.15, б равняется току I_m в схеме рис. 2.15, в.

При практическом использовании теоремы взаимности важно иметь в виду взаимное соответствие направлений токов и ЭДС в схемах рис. 2.15, б, в.

Так, если ЭДС E_k источника ЭДС, находящегося в k -ветви схемы рис. 2.15, в, направлена согласно с контурным током I_k в схеме рис. 2.15, б, то положительное направление отсчета для тока I_m в схеме рис. 2.15, в будет совпадать с положительным направлением контурного тока по ветви m (ЭДС E_m в схеме рис. 2.15, в направлена по I_m).

Для нелинейных цепей теорема (принцип) взаимности невыполнима. Цепи, для которых не выполняется принцип взаимности, называют необратимыми.

6.4. Метод эквивалентного генератора

[Нейман, стр.216]

Задача отыскания тока в одной выделенной ветви, рассмотренная в предыдущем параграфе, может быть решена также с помощью метода эквивалентного генератора или, как иногда говорят, с помощью теоремы об эквивалентном генераторе. Сущность этого метода заключается в том, что

по отношению к выделенной ветви ab с сопротивлением Z_{ab} вся оставшаяся часть сложной цепи, содержащая источники э. д. с., может быть заменена одним эквивалентным генератором с э. д. с. \dot{E}_r и внутренним сопротивлением Z_r .

На рис. 5-18 оставшаяся часть цепи обведена пунктирной рамкой и обозначена буквой А. Она является активным двухполюсником с зажимами a и b . Величины \dot{E}_r и Z_r определяются через известные э. д. с. и сопротивления действительной сложной цепи внутри активного двухполюсника. Покажем, как найти эти величины.

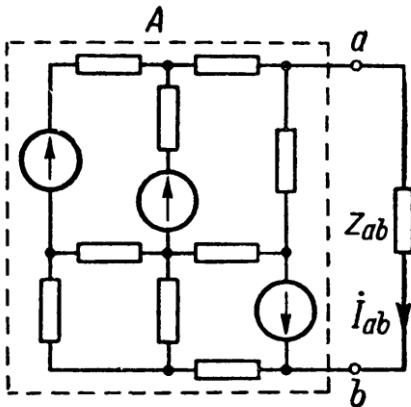


Рис. 5-18.

Введем в ветвь ab дополнительную э. д. с., величину и направление которой подберем так, чтобы ток в ветви ab был равен нулю. Тогда согласно второму закону Кирхгофа для величины этой э. д. с., положительное направление которой указано на рис. 5-19, имеем $\dot{E}_0 = \dot{U}_0$, где \dot{U}_0 — напряжение на зажимах ab при $I_{ab} = 0$. Такое же напряжение \dot{U}_0 возникает на зажимах a и b активного двухполюсника A , если ветвь ab на рис. 5-18 разомкнуть.

Рассмотрим теперь цепь, изображенную на рис. 5-20. Часть этой цепи, обведенная пунктиром и обозначенная буквой Π , представляет собой пассивный двухполюсник, который получается из активного двухполюсника A (рис. 5-18), если принять в последнем

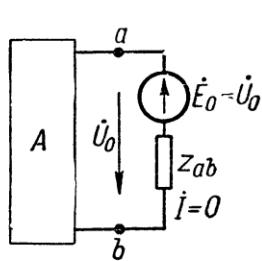


Рис. 5-19.

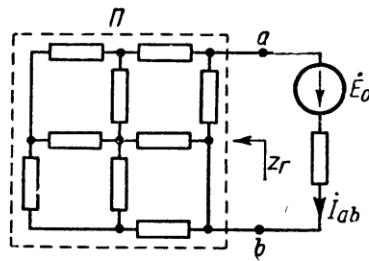


Рис. 5-20.

все э. д. с. равными нулю. Кроме того, в ветвь ab введем источник э. д. с., величина которой также равна $\dot{E}_0 = \dot{U}_0$, но положительное направление которой противоположно положительному направлению э. д. с. \dot{E}_0 на рис. 5-19. Налагая режимы в схемах рис. 5-19 и 5-20 друг на друга, мы получаем систему э. д. с. в исходной цепи (рис. 5-18), и так как в случае рис. 5-19 ток в ветви ab равен нулю, то токи в этой ветви в схемах рис. 5-18 и 5-20 равны друг другу.

Представив пассивный двухполюсник Π одним участком с со-противлением Z_r , равным входному сопротивлению двухполюсника Π , приходим к схеме рис. 5-21 и окончательно к схеме рис. 5-22. Последняя схема и свидетельствует о возможности замены активного двухполюсника A (рис. 5-18) эквивалентным генератором

с э. д. с. $\dot{E}_r = \dot{E}_0 = U_0$ и сопротивлением Z_r . Следовательно, искомый ток в ветви ab равен:

$$I_{ab} = \frac{U_0}{Z_r + Z_{ab}}.$$

Таким образом, для определения тока I_{ab} в интересующей нас ветви необходимо экспериментально или расчетным путем найти напряжение U_0 , при разрыве ветви ab и сопротивление Z_r всей прочей части цепи при замкнутых накоротко содержащихся в ней источниках э. д. с.

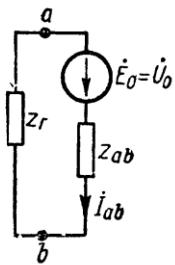


Рис. 5-21.

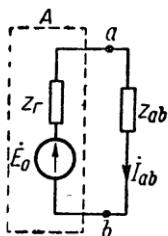


Рис. 5-22.

всей прочей части цепи при замкнутых накоротко содержащихся в ней источниках э. д. с.

[Ионкин. Раздел 2, Глава 3, стр.67]

7. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ С ИСТОЧНИКАМИ ПОСТОЯННЫХ ЭДС

7.1. Постановка задачи анализа электрических цепей.

В общем случае задача анализа электрической цепи состоит в определении токов в ветвях (элементах) цепи и -напряжений на зажимах ветвей (элементов). При этом должны быть известны схема цепи, параметры пассивных элементов, а также законы изменения во времени э. д. с. и токов источников.

Э. д. с. источников э. д. с. и токи источников тока представляют собой внешние «возмущающие воздействия», или, кратко, «возмущения». Токи в ветвях цепи или напряжения на зажимах ветвей можно рассматривать как «реакции цепи» на приложенные возмущения.

Часто представляет интерес определение тока только в одной из ветвей или напряжения между одной парой зажимов при возмущении от одного источника. В этом случае можно говорить о расчете некоторой выходной величины (реакции) $y(t)$ при известной входной величине (возмущении) $x(t)$, т. е. о расчете зависимости

$$y = y(x),$$

где $y = y(t)$; $x = x(t)$.

Расчет реакций цепи в виде функций времени называют анализом в о в р е м е н н о й о б л а с т и .

Большое практическое значение имеют два вида возмущений: *постоянные* (неизменные во времени) и *изменяющиеся во времени* по периодическому, например по гармоническому, закону.

Если при постоянных (периодических) возмущениях реакции цепи также постоянны (меняются по периодическому закону), то режим в цепи называют у с т а н о в и в ш и м с я . В других случаях говорят о переходных (нестационарных) режимах. Установившийся режим представляет собой частный случай переходного и наступает теоретически при бесконечно длительном воздействии источников.

В линейных цепях реакции пропорциональны возмущениям. Поэтому удобно рассматривать реакцию, отнесенную к возмущению, если возмущение - постоянная величина. Отношение реакции к возмущению, т.е. y/x . называемое в общем случае передаточной (схемной) функцией. может иметь различную размерность. Если y и x представляют собой напряжения (токи), то отношение y/x - безразмерная величина и называется к о э ф ф и ц и е н т о м п е р е д а ч и на п р я ж е н и я (тока). Если y - напряжение (ток), а x - ток (напряжение), то отношение y/x имеет размерность сопротивления (проводимости) и называется п е р е д а т о ч н ы м или в з а и м н ы м с о п р о т и в л е н и е м (проводимостью)*

* В частном случае, когда у и х - напряжение и ток одной ветви, отношение у/х называют в ходны м со противлением (проводимостью) в е т в и.

Учитывая сказанное, задача анализа может ставиться как задача расчета коэффициентов передачи напряжения и тока, передаточных (взаимных) сопротивлений и проводимостей, т. е. передаточных функций.

При гармонически изменяющемся возмущении отношение реакции к возмущению при установившемся режиме может быть представлено как некоторая комплексная величина, модуль и аргумент которой зависят от частоты гармонического возмущения. Расчет частотных зависимостей относится к задачам анализа цепи в ч а с т о т н о й о б л а с т и.

Для ряда цепей важное значение имеет определение энергетических показателей - энергий и мощностей генераторов и нагрузок. коэффициентов полезного действия и т. д. Расчет энергетических показателей сводится к расчету соответствующих напряжений и токов.

Следует отметить также еще ряд задач анализа цепей: вычисление изменения реакции цепи, обусловленного изменением параметров цепи; расчет характеристик чувствительности цепи к изменениям параметров; определение условий устойчивой работы цепи; исследование свойств передаточных функций (во временной и частотной областях). Решение этих задач в первую очередь требует умения рассчитывать токи и напряжения элементов' цепи.

7.2. Цепи с сопротивлением r и индуктивностью L

[Ионкин, стр.68]

Последовательная цепь. На рис. 3.1 показана схема электрической цепи, состоящей из последовательно соединенных сопротивления r и индуктивности L , а также источника постоянной э. д. с. При замыкании ключа источник подключается к ветви L, r .

Для этой цепи при замкнутом ключе, по второму закону Кирхгофа,

$$u_L + u_r = \mathcal{E},$$

где u_L , u_r — соответственно напряжения на индуктивности и сопротивлении. Учитывая выражения для напряжений

$$u_L = L \frac{di}{dt}; \quad u_r = ri,$$

данную цепь характеризуют следующим дифференциальным уравнением:

$$L \frac{di}{dt} + ri = \mathcal{E}$$

или

$$\tau \frac{di}{dt} + i = \frac{\mathcal{E}}{r}, \quad (3.1)$$

где $\tau = L/r$.

Уравнение (3.1) представляет собой обыкновенное линейное неоднородное дифференциальное уравнение первого порядка с постоянными коэффициентами. Чтобы решить это уравнение, сначала находят общее решение $i_{\text{св}}$ однородного уравнения, т. е. уравнения с правой частью, равной нулю:

$$\tau \frac{di_{\text{св}}}{dt} + i_{\text{св}} = 0. \quad (3.2)$$

Уравнение (3.2) — это уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{di_{\text{св}}}{i_{\text{св}}} = -\frac{1}{\tau} dt. \quad (3.3)$$

Интегрируя равенство (3.3), получаем

$$\ln i_{\text{св}} = -\frac{t}{\tau} + \ln A.$$

Следовательно, общее решение уравнения (3.2) имеет вид

$$i_{\text{св}} = A e^{-\frac{t}{\tau}},$$

где A — постоянная интегрирования.

Если найдено общее решение однородного уравнения, то общее решение неоднородного уравнения можно получить, например, с помощью вариации постоянной. Для этого принимают ток

$$i = B(t) e^{-\frac{t}{\tau}},$$

где $B(t)$ — неизвестная функция t .

Производная тока

$$\frac{di}{dt} = B'(t) e^{-\frac{t}{\tau}} - \frac{1}{\tau} B(t) e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

При подстановке выражений для тока и его производной в уравнение (3.1) получают

$$\tau B'(t) e^{-\frac{t}{\tau}} - B(t) e^{-\frac{t}{\tau}} + B(t) e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{\mathcal{E}}{r},$$

откуда

$$B'(t) = \frac{\mathcal{E}}{r\tau} e^{\frac{t}{\tau}};$$

$$B(t) = \frac{\mathcal{E}}{r\tau} \int e^{\frac{t}{\tau}} dt = \frac{\mathcal{E}}{r} e^{\frac{t}{\tau}} + A.$$

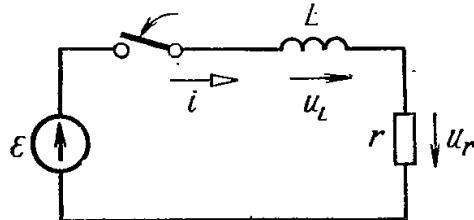


Рис. 3.1

Таким образом, общее решение неоднородного уравнения (3.1) записывается следующим образом:

$$i = \left(\frac{\mathcal{E}}{r} e^{\frac{t}{\tau}} + A \right) e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{\mathcal{E}}{r} + A e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad (3.4)$$

или

$$i = i_{\text{пр}} + i_{\text{св}}, \quad (3.5)$$

где $i_{\text{пр}} = \mathcal{E}/r$.

Как видно из выражения (3.5), ток i имеет две составляющие: первая составляющая $i_{\text{пр}}$ является *частным решением* неоднородного уравнения (получается из общего решения при $A=0$); вторая составляющая $i_{\text{св}}$ — *общим решением* однородного уравнения. Первая составляющая для рассматриваемого случая во времени не изменяется; вторая — изменяется с течением времени по экспоненциальному закону и обращается в нуль при $t=\infty$.

Момент времени $t=0$ рассматривают как момент, в который источник напряжения \mathcal{E} подключается к цепи. Момент $t=\infty$ соответствует установившемуся режиму: ток $i=i_{\text{пр}}$ не изменяется. При неизменном токе $di/dt=0$ и из уравнения (3.1) находят

$$i_{\text{пр}} = \mathcal{E}/r.$$

Таким образом, в выражении (3.5) первое слагаемое имеет физический смысл тока установившегося или принужденного режима и называется *принужденным током*.

Слагаемое $i_{\text{св}}$ в выражении (3.5) характеризует ток в цепи при отсутствии источника, т. е. при $\mathcal{E}=0$. Этот ток может быть обусловлен энергией, запасенной в магнитном поле, связанном с индуктивностью, и называется *свободным током*.

Если известно значение тока в начальный момент времени $t=0$ (момент замыкания ключа), можно найти постоянную интегрирования A . Так, при $i|_{t=0}=i(0)=0$ постоянная A определяется соотношением

$$i(0) = \frac{\mathcal{E}}{r} + A = 0,$$

откуда

$$A = -\frac{\mathcal{E}}{r}.$$

Подставляя найденное значение A в равенство (3.4), легко записать выражение для тока

$$i = \frac{\mathcal{E}}{r} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right). \quad (3.6)$$

На рис. 3.2 показаны графики изменения токов $i_{\text{пр}}$, $i_{\text{св}}$, i при $i(0)=0$. При $t=\tau$ свободная составляющая уменьшается по абсолютной величине в e раз; постоянная τ , имеющая размерность времени, характеризует скорость изменения свободной составляющей тока и называется *постоянной времени* цепи. Для рассматриваемой цепи $\tau=L/r$, т. е. постоянная времени пропорциональна индуктивности и обратно пропорциональна сопротивлению. Нетрудно убедиться, что постоянная времени τ соответствует подкасательной OM , т. е.

соответствует подкасательной ОМ, т. е.

$$\tau = \left| \frac{i_{cb}(0)}{i'_{cb}(0)} \right|.$$

Теоретически установившийся режим наступает при $t = \infty$. Практически уже при $t = 3\tau$ свободный ток в цепи уменьшается (по абсолютной величине) до 5% от своего начального значения; при $t = 5\tau$ свободный ток уменьшается до 0,7% от начального значения.

Процесс нарастания тока в соответствии с графиком на рис. 3.2 можно пояснить следующим образом. В момент включения источника э. д. с. ток в цепи $i = 0$ и энергия, запасенная в магнитном поле, $W_L = 0$. При включении источника установившийся режим не может наступить мгновенно, так как не может мгновенно возрасти энергия магнитного поля, связанная с индуктивностью, до величины

$$W_{L_{np}} = \frac{Li_{np}^2}{2} = \frac{L\mathcal{E}^2}{2r^2}.$$

Мгновенное (скачкообразное) изменение энергии соответствовало бы бесконечной мощности

$$p_L = \frac{dW_L}{dt} = u_L i$$

и бесконечно большому напряжению u_L , что не имеет физического смысла для рассматриваемой цепи.

Поэтому в данной цепи с индуктивностью возможно лишь непрерывное изменение тока, соответствующее непрерывному изменению энергии, запасенной в магнитном поле, от начального до конечного уровня. Росту тока противодействует э. д. с. самоиндукции, возникающая по закону Ленца *:

$$\dot{e}_L = -u_L = -L \frac{di}{dt} = -\mathcal{E} e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

В начальный момент времени э. д. с. самоиндукции равна по величине и противоположна по направлению э. д. с. источника:

$$e_L(0) = -\mathcal{E}.$$

* При условии, что ток изменяется по формуле (3.6).

Пусть в цепи, схема которой приведена на рис. 3.3, ключ был замкнут (положение 1) и источник действовал достаточно

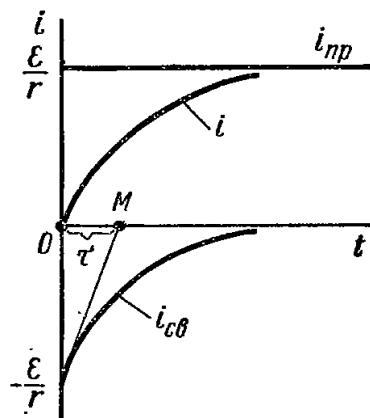


Рис. 3.2

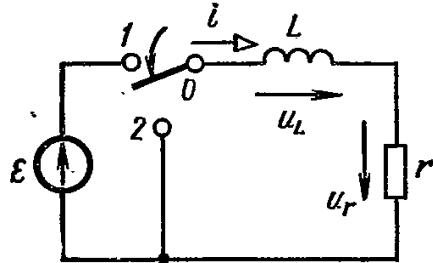


Рис. 3.3

долго, т. е. наступил установившийся режим. Если в некоторый момент времени, который можно считать равным $t=0$, ключ мгновенно (без разрыва rL -цепи) переключить в положение 2, то получится короткозамкнутая rL -цепь. Ток в короткозамкнутой цепи не может мгновенно уменьшиться до нуля, поскольку не может скачкообразно уменьшиться энергия, запасенная в магнитном поле индуктивной катушки.

Процесс в короткозамкнутой цепи описывается уравнением (3.2). По условию, начальное значение тока

$$i(0) = \mathcal{E}/r,$$

поэтому

$$i = i_{\text{cb}} = \frac{\mathcal{E}}{r} e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (3.7)$$

В данном случае ток в цепи поддерживается э. д. с. самоиндукции

$$e_L = -u_L = -L \frac{di}{dt} = \mathcal{E} e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (3.8)$$

Графики функций $i(t) = i_{\text{cb}}(t)$, $e_L(t) = u_r(t)$, $u_L(t)$ построены на рис. 3.4.

Начальный запас энергии магнитного поля, связанной с индуктивностью,

$$W_L(0) = \frac{Li^2(0)}{2} = \frac{L\mathcal{E}^2}{2r^2}.$$

Энергия, рассеиваемая в сопротивлении,

$$W_r = \int_0^\infty i^2 r dt = \frac{\mathcal{E}^2}{r} \int_0^\infty e^{-\frac{2t}{\tau}} d\tau = \frac{\mathcal{E}^2 \tau}{2r} = \frac{L\mathcal{E}^2}{2r^2}.$$

Таким образом,

$$W_r = W_L(0),$$

т. е. вся энергия магнитного поля выделяется в сопротивлении r в виде тепла.

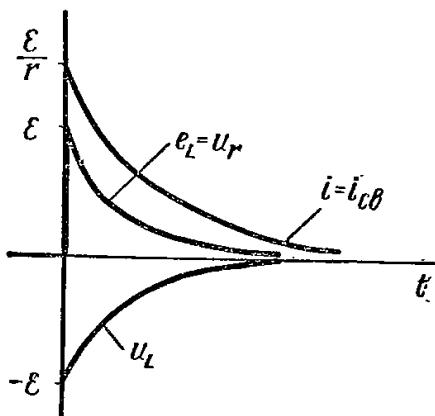


Рис. 3.4

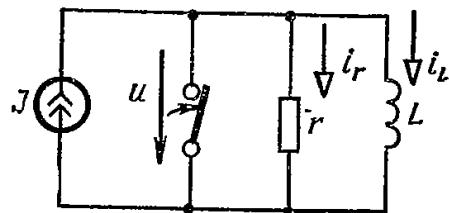


Рис. 3.5

7.3. Цепи с сопротивлением r и емкостью C

Последовательная цепь. На рис. 3.7 показана схема цепи, содержащей последовательно соединенные сопротивление r и емкость C , подключаемые при замыкании ключа к источнику постоянной э. д. с. \mathcal{E} .

Для такой цепи справедливо уравнение (при замкнутом ключе)

$$u_r + u_C = \mathcal{E}.$$

Учитывая, что напряжение

$$u_r = ri = rC \frac{du_C}{dt} = \tau \frac{du_C}{dt},$$

где $\tau = rC$ — постоянная времени цепи, получают дифференциальное уравнение

$$\tau \frac{du_C}{dt} + u_C = \mathcal{E}. \quad (3.14)$$

Уравнение (3.14) аналогично (3.9), поэтому его решение аналитично (3.10), т. е.

$$u_C = \mathcal{E} + Ae^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (3.15)$$

Выражение (3.15) содержит принужденную составляющую

$$u_{C_{\text{пр}}} = \mathcal{E}$$

и свободную составляющую

$$u_{C_{\text{св}}} = Ae^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Если момент времени $t = 0$ соответствует моменту включения источника напряжения и $u_C(0) = 0$, то постоянная $A = -\mathcal{E}$. В этом случае

$$u_C = \mathcal{E} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right). \quad (3.16)$$

Закон изменения напряжения (3.16) аналогичен закону изменения тока (3.11).

Напряжение на сопротивлении

$$u_r = \mathcal{E} - u_C = \mathcal{E} e^{-\frac{t}{\tau}}; \quad (3.17)$$

ток в цепи

$$i = \frac{u_r}{r} = \frac{\mathcal{E}}{r} e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (3.18)$$

Выражения (3.17) и (3.18) аналогичны (3.12) и (3.13). Графики функций $u_C(t)$, $u_r(t)$, $i(t)$ приведены на рис. 3.8.

Напряжение на емкости возрастает от нуля до значения $u_{C_{\text{пр}}} = \mathcal{E}$ по экспоненциальному закону. Конденсатор заряжается; ток, заряжающий его, имеет наибольшее значение в начальный момент времени. При установившемся режиме, когда конденсатор заряжен до напряжения \mathcal{E} , ток равен нулю, т. е. при установившемся режиме конденсатор с совершенной изоляцией эквивалентен разомкнутой ветви.

Запас энергии W_C , связанной с электрическим полем конденсатора, не может измениться скачкообразно. Такое изменение энергии привело бы к бесконечной мощности

$$p_C = \frac{dW_C}{dt} = u_C i$$

и бесконечно большому току i , что не имеет физического смысла для рассматриваемой цепи. Таким образом, в данной цепи возможно лишь непрерывное изменение напряжения u_C , соответствующее непрерывному изменению энергии в электрическом поле конденсатора.

Энергетические соотношения в цепи на рис. 3.7 полностью аналогичны соотношениям, полученным для цепи на рис. 3.5.

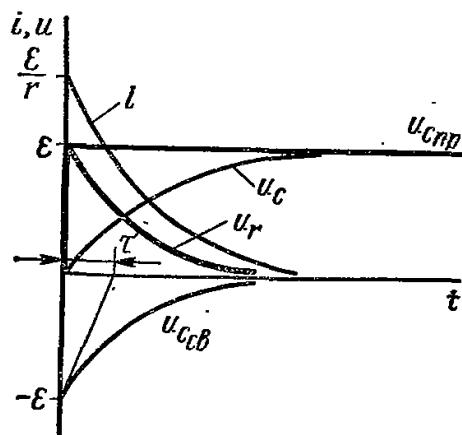


Рис. 3.8

Пусть конденсатор, заряженный до напряжения \mathcal{E} , в момент $t=0$ подключают к сопротивлению r (рис. 3.9). После

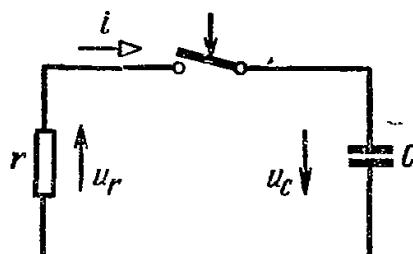


Рис. 3.9

замыкания ключа конденсатор разряжается. Для этой цепи справедливо уравнение

$$\tau \frac{du_C}{dt} + u_C = 0, \quad (3.19)$$

откуда

$$u_C = u_{C_{\text{св}}} = A e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

По условию, $u_C(0) = \mathcal{E}$, следовательно,

$$u_C = u_{C_{\text{св}}} = \mathcal{E} e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Ток в цепи

$$i = C \frac{du_C}{dt} = -\frac{\mathcal{E}}{r} e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Кривые изменения напряжения u_C и тока i при разряде конденсатора показаны на рис. 3.10. Вся энергия, запасенная в емкости, рассеивается в сопротивлении r .

7.4. Цепи с сопротивлением r , индуктивностью L и емкостью C

Последовательная цепь. Для последовательно соединенных сопротивления r , индуктивности L и емкости C , подключаемых к источнику постоянной э. д. с. (рис. 3.13), справедливо уравнение

ние (при замкнутом ключе)

$$u_L + u_r + u_C = \mathcal{E},$$

или

$$L \frac{di}{dt} + ri + \frac{1}{C} \int i dt = \mathcal{E}. \quad (3.24)$$

Дифференцируя по времени обе части равенства (3.24), легко получить линейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\frac{d^2i}{dt^2} + 2\alpha \frac{di}{dt} + \omega_0^2 i = 0, \quad (3.25)$$

где $2\alpha = r/L$, $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$.

Уравнение (3.25) — однородное; это означает, что ток в данной цепи имеет только свободную составляющую. Действительно, при установившемся режиме, когда ток и напряжения на всех элементах постоянны, ветвь с емкостью эквивалентна разомкнутой ветви.

Общее решение линейного однородного дифференциального уравнения n -го порядка определяется корнями характеристического уравнения, которое получается из дифференциального уравнения заменой производной k -го порядка ($k = 0, 1, \dots, n$) множителем p^k . Для уравнения (3.25) характеристическое уравнение имеет вид

$$p^2 + 2\alpha p + \omega_0^2 = 0. \quad (3.26)$$

Корни характеристического уравнения

$$p_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}. \quad (3.27)$$

Возможны три случая.

1-й случай. Если $\alpha > \omega_0$, то корни p_1 и p_2 вещественны и различны. При этом общее решение уравнения (3.25) записывают в виде суммы двух экспонент:

$$i = i_{\text{св}} = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}, \quad (3.28)$$

где A_1 и A_2 — постоянные интегрирования, определяемые из начальных условий.

Пусть в момент включения источника $t = 0$ ток $i(0) = 0$ и напряжение $u_C(0) = 0$. Тогда из равенства (3.28)

$$A_1 + A_2 = 0. \quad (3.29)$$

Из уравнения (3.24) находят значение производной в начальный момент времени, учитывая, что $i(0) = 0$, $u_C(0) = 0$:

$$\left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0} = \frac{\mathcal{E}}{L}.$$

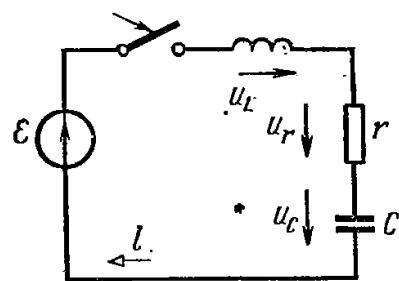


Рис. 3.13

Уравнение (3.25) — однородное; это означает, что ток в данной цепи имеет только свободную составляющую. Действительно, при установившемся режиме, когда ток и напряжения на всех элементах постоянны, ветвь с емкостью эквивалентна разомкнутой ветви.

Общее решение линейного однородного дифференциального уравнения n -го порядка определяется корнями характеристического уравнения, которое получается из дифференциального уравнения заменой производной k -го порядка ($k = 0, 1, \dots, n$) множителем p^k . Для уравнения (3.25) характеристическое уравнение имеет вид

$$p^2 + 2\alpha p + \omega_0^2 = 0. \quad (3.26)$$

Корни характеристического уравнения

$$p_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}. \quad (3.27)$$

Возможны три случая.

1-й случай. Если $\alpha > \omega_0$, то корни p_1 и p_2 вещественны и различны. При этом общее решение уравнения (3.25) записывают в виде суммы двух экспонент:

$$i = i_{\text{св}} = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}, \quad (3.28)$$

где A_1 и A_2 — постоянные интегрирования, определяемые из начальных условий.

Пусть в момент включения источника $t = 0$ ток $i(0) = 0$ и напряжение $u_C(0) = 0$. Тогда из равенства (3.28)

$$A_1 + A_2 = 0. \quad (3.29)$$

Из уравнения (3.24) находят значение производной в начальный момент времени, учитывая, что $i(0) = 0$, $u_C(0) = 0$:

$$\left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0} = \frac{\mathcal{E}}{L}.$$

Дифференцируя (3.28) и подставляя $t = 0$, получаем

$$A_1 p_1 + A_2 p_2 = \mathcal{E}/L. \quad (3.30)$$

Совместное решение уравнений (3.29) и (3.30) дает значения постоянных

$$A_1 = -A_2 = \frac{\mathcal{E}}{L(p_1 - p_2)}.$$

Таким образом, ток в цепи изменяется по закону

$$i = i_{\text{св}} = \frac{\mathcal{E}}{L(p_1 - p_2)} (e^{p_1 t} - e^{p_2 t}). \quad (3.31)$$

Зная ток, можно определить напряжение на каждом элементе цепи. Например, напряжение на емкости

$$u_C = \frac{1}{C} \int i dt = \frac{\mathcal{E}}{LC(p_1 - p_2)} \left(\frac{e^{p_1 t}}{p_1} - \frac{e^{p_2 t}}{p_2} \right) + \frac{\mathcal{E}}{LC p_1 p_2}.$$

Учитывая, что произведение корней квадратного уравнения равно свободному члену:

$$p_1 p_2 = \frac{1}{LC},$$

выражение для u_C преобразуется к виду

$$u_C = \frac{\mathcal{E}}{p_1 - p_2} (p_2 e^{p_1 t} - p_1 e^{p_2 t}) + \mathcal{E}. \quad (3.32)$$

Постоянная составляющая в этом выражении соответствует установившемуся (принужденному) режиму, когда $u_{C,\text{св}} = 0$ и все напряжение источника оказывается приложенным к емкости.

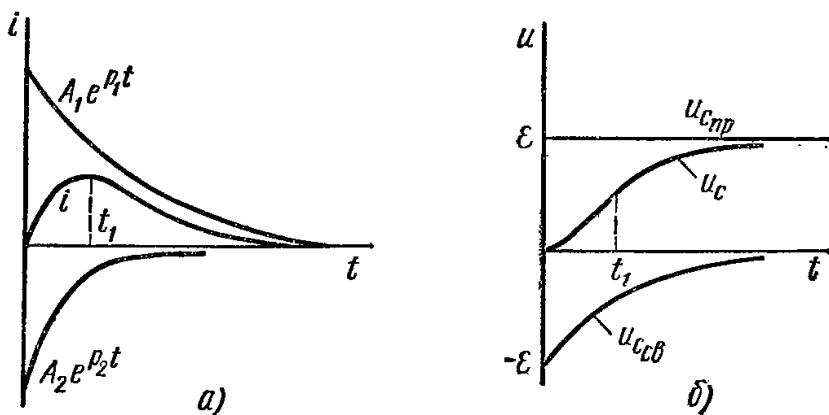


Рис. 3.14

Графики зависимостей (3.31) и (3.32) показаны соответственно на рис. 3.14, а, б при $|p_1| < |p_2|$.

Момент времени t_1 , в который ток достигает максимума, находят из выражения $di/dt = 0$. Так как $i = C du_C/dt$, то в момент t_1 кривая изменения напряжения u_C имеет перегиб (вторая производная $d^2u_C/dt^2 = 0$).

2-й случай. Если $\alpha = \omega_0$, то корни характеристического уравнения вещественны и одинаковы: $p_1 = p_2 = -\alpha$. Общее решение уравнения (3.25) в этом случае записывают в виде

$$i = i_{\text{св}} = (A_1 + A_2 t) e^{-\alpha t}. \quad (3.33)$$

Постоянные A_1 и A_2 определяют, как и в предыдущем случае, из начальных условий.

Выражение для тока получается непосредственно как предел функции (3.31) при $p_2 \rightarrow p_1$ (правило Лопитала):

$$i = \lim_{p_2 \rightarrow p_1} \frac{\mathcal{E}}{L(p_1 - p_2)} (e^{p_1 t} - e^{p_2 t}) = \frac{\mathcal{E}}{L} \lim_{p_2 \rightarrow p_1 = \alpha} \frac{-te^{p_2 t}}{-1} = \frac{\mathcal{E}}{L} te^{-\alpha t}. \quad (3.34)$$

Предел функции (3.32) дает выражение для напряжения на емкости:

$$u_C = -\mathcal{E}(1 + \alpha t)e^{-\alpha t} + \mathcal{E}. \quad (3.35)$$

Кривые тока i и напряжения u_C аналогичны кривым, приведенным на рис. 3.14.

3-й случай. Если $\alpha < \omega_0$, то корни p_1 и p_2 комплексно-сопряженные:

$$p_{1,2} = -\alpha \pm j\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = -\alpha \pm j\omega,$$

где $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$.

Подставляя значения корней в выражения (3.31) и (3.32), находим

$$i = i_{cb} = \frac{\mathcal{E}}{L\omega} e^{-\alpha t} \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}, \quad (3.36)$$

$$u_C = \frac{\mathcal{E}}{\omega} e^{-\alpha t} \left(\alpha \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} + \omega \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} \right) + \mathcal{E}. \quad (3.37)$$

Поскольку

$$\frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} = \sin \omega t; \quad \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} = \cos \omega t,$$

формулы (3.36) и (3.37) переписываем следующим образом:

$$i = i_{cb} = \frac{\mathcal{E}}{L\omega} e^{-\alpha t} \sin \omega t; \quad (3.38)$$

$$u_C = -\frac{\mathcal{E}}{\omega} e^{-\alpha t} (\alpha \sin \omega t + \omega \cos \omega t) + \mathcal{E}. \quad (3.39)$$

Легко убедиться в справедливости равенства

$$\alpha \sin \omega t + \omega \cos \omega t = \omega_0 \sin \left(\omega t + \arctg \frac{\omega}{\alpha} \right),$$

где $\omega_0 = \sqrt{\alpha^2 + \omega^2}$.

С учетом этого равенства соотношение (3.39) приводится к виду *

$$u_C = -\mathcal{E} \frac{\omega_0}{\omega} e^{-\alpha t} \sin \left(\omega t + \arctg \frac{\omega}{\alpha} \right) + \mathcal{E}. \quad (3.40)$$

* Угол $0 < \arctg \frac{\omega}{\alpha} \leq \frac{\pi}{2}$, так как $\omega > 0$, $\alpha > 0$.

Графики зависимостей (3.38) и (3.40) показаны на рис. 3.15, а, б.

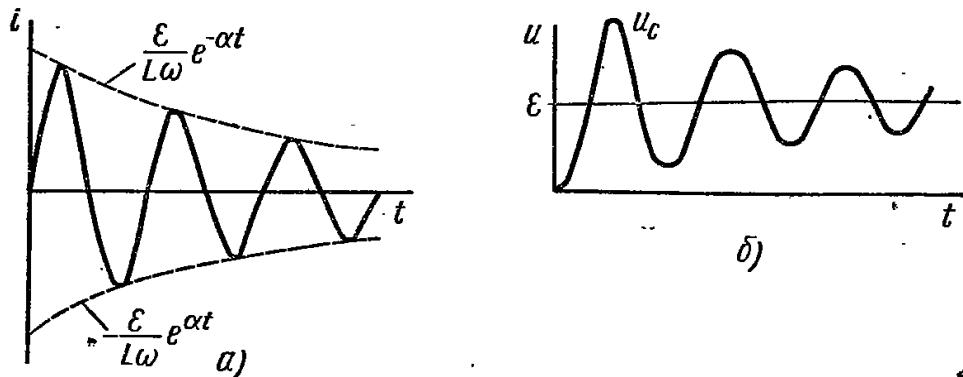


Рис. 3.15

Во всех трех рассмотренных случаях под действием источника постоянной э. д. с. \mathcal{E} происходит зарядка конденсатора. В первых двух случаях зарядный ток не изменяет направления, что характеризует апериодический процесс. В последнем случае ток представляет собой затухающую синусоидальную функцию, что характеризует колебательный процесс. Колебания в цепи возникают вследствие периодического взаимного преобразования энергии электрического поля, связанного с емкостью, и энергии магнитного поля, связанного с индуктивностью. Наличие сопротивления в цепи приводит к затуханию колебаний из-за рассеивания энергии в сопротивлении.

Характер процесса зависит от вида корней характеристического уравнения, который, в свою очередь, определяется соотношениями параметров элементов цепи.

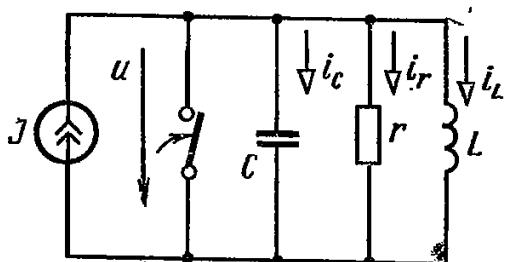


Рис. 3.16

7.5. Общие замечания об анализе цепей с сопротивлением R , индуктивностью L и емкостью C

Как уже отмечалось, при включении источников постоянной э. д. с. и постоянного тока в цепях, содержащих резисторы, индуктивные катушки и конденсаторы, токи в ветвях и напряжения на зажимах элементов изменяются во времени от начальных до установившихся значений. Практически длительность переходных режимов можно считать конечной, измеряемой, как правило, долями секунд. В цепях, не содержащих индуктивных катушек и конденсаторов, установившийся режим наступает практически очень быстро (мгновенно).

Дифференциальное уравнение для искомой величины может быть получено на основании системы уравнений Кирхгофа, описывающих цепь, путем последовательного исключения неизвестных.

Принужденная составляющая искомой величины также может быть найдена в общем случае путем совместного решения уравнений, составленных по законам Кирхгофа.

Начальные значения любых токов и напряжений вычисляют из уравнений, составленных по законам Кирхгофа, при известных начальных значениях токов в индуктивностях и напряжений на емкостях. Токи в индуктивностях и напряжения на емкостях изменяются только непрерывно, поэтому их начальные значения равны значениям в предшествующем режиме цепи. Если, например, цепь ранее не была подключена к источникам, то токи в индуктивностях и напряжения на емкостях имеют нулевые начальные значения.

Значения производных токов и напряжений при $t=0$ находят на основании уравнений Кирхгофа и уравнений, получаемых путем дифференцирования уравнений Кирхгофа.

Расчет начальных и установившихся значений токов и напряжений в *rLC*-цепи с источниками постоянной э. д. с. и постоянного тока сводится к расчету чисто резистивных схем. Действительно, для начального момента индуктивность можно заменить источником тока $i_L(0)$ [если $i_L(0)=0$, то ветвь с индуктивностью эквивалентна разрыву], а емкость — источником напряжения $u_C(0)$ [если $u_C(0)=0$, то емкость эквивалентна короткозамкнутому участку]. В установившемся режиме индуктивность (емкость) эквивалентна короткозамкнутому участку (разомкнутой ветви). Методы расчета сложных резистивных цепей рассматриваются в следующих главах.

[Ионкин. Раздел 3, Глава 6, стр.149]
 [Бессонов. Глава 3, стр.81]

8. УСТАНОВИВШИЕСЯ ГАРМОНИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ В ЦЕПЯХ

В настоящей главе рассматриваются методы расчета установившихся режимов в линейных электрических цепях, когда эдс и токи источников являются синусоидальными функциями времени.

8.1. Переменные и синусоидальные (гармонические) напряжения и токи

Переменным током $i = i(t)$ называют *ток, изменяющийся во времени*. Это и все следующие определения относятся и к напряжению, а также к любым переменным функциям времени.

Периодическим током называется ток $i = i(t)$, значения которого повторяются через определенный промежуток времени T , т.е. для него справедливо равенство

$$i(t) = i(t + T)$$

для всех t . Коротко, *периодический ток – это повторяющийся ток*. Наименьший промежуток времени T , через который ток снова принимает те же значения, называется периодом колебаний электрического тока.

Простейшей периодической функцией является гармоническая, или синусоидальная, функция.

Гармоническим (синусоидальным) током называют ток, мгновенное значение которого $i(t)$ при любом t определяется равенством

$$i(t) = i_m \sin(\omega t + \Psi_i), \quad (8.1.1)$$

где i_m – максимальное значение, или амплитуда, тока, а величина $\omega = 2\pi/T$ называется радиальной (или угловой, круговой) скоростью (или частотой). Аргумент $\omega t + \Psi_i$ называют фазой, а величину Ψ_i , равную фазе при $t = 0$, называют начальной фазой тока. Фаза измеряется в радианах (рад) или градусах (°). За промежуток времени T фаза увеличивается на 2π рад или 360° .

Величину, обратную периоду, называют частотой $f = 1/T$. Частота показывает, сколько раз за единицу времени (за секунду) происходит повторение значений тока. Частота измеряется в герцах (Гц) – количестве колебаний в одну секунду. В России, Украине и странах Европы принята стандартная частота переменного тока 50 Гц, которой соответствует период $T = 0,02$ с = $T = 20$ мс (полпериода $\omega = 2\pi/T$ мс). В радиотехнике применяют гармонические колебания с частотами до $3 \cdot 10^{10}$ Гц.

Соответственно радиальная (угловая) частота ω измеряется в радианах в секунду (рад/с). Если $f = 50$ Гц, то $\omega = 2\pi \cdot 50 = 314$ рад/с.

Из равенства (1) видно, что для определения гармонически изменяющейся функции времени необходимо знать три величины: амплитуду, частоту (период) и начальную фазу.

На рис. 8.1.1 изображены синусоидальные напряжение и ток с одним и тем же периодом. Обратим внимание на то, что положительные фазы напряжения $\Psi_u > 0$ и тока $\Psi_i > 0$ должны откладываться от начала координат влево. По оси абсцисс можно откладывать или время t или пропорциональную ему угловую величину ωt . Соответственно периодом будет являться T или 2π .

Из равенства (6.1) видно, что для определения гармонически изменяющейся функции необходимо знать три величины: *амплитуду, частоту (период) и начальную фазу*.

На рис. 6.1 приведены графики двух гармонических токов одинаковой частоты, но с различными амплитудами и начальными фазами:

$$i_1 = I_{m_1} \sin(\omega t + \psi_1); \\ i_2 = I_{m_2} \sin(\omega t + \psi_2).$$

Начальная фаза отсчитывается от момента, соответствующего началу синусоиды (т. е. нулевому значению при переходе от отрицательных к положительным значениям), до момента $t=0$. При $\psi_1 > 0$ начало синусоиды сдвинуто влево, а при $\psi_2 < 0$ — вправо от начала координат.

Если у двух гармонических функций одинаковой частоты начальные фазы одинаковы (различны), то говорят, что функции совпадают (не совпадают, сдвинуты) по фазе. Сдвиг фаз двух гармонических функций измеряется разностью фаз, равной разности начальных фаз. Если сдвиг фаз гармонических функций равен $\pm\pi$ ($\pm\pi/2$), то говорят, что функции противоположны по фазе (находятся в квадратуре).

Гармонически изменяющуюся величину можно представить с помощью вектора на комплексной плоскости. Так, току $i = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$ можно поставить в соответствие вектор на комплексной плоскости, длина которого равна I_m и который образует с действительной осью угол ψ_i (рис. 6.2). Этот вектор обозначен \vec{I}_m . Проекция вектора \vec{I}_m на ось мнимых величин равна $i(0) = I_m \sin \psi_i$. Если этот вектор вращается против направления движения часовой стрелки с угловой скоростью ω , то для любого момента времени t проекция вектора на ось мнимых величин равна мгновенному значению тока $i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$. Можно считать вектор \vec{I}_m неподвижным, а оси мнимых и вещественных величин (оси координат) — вращающимися по направлению движения часовой стрелки.

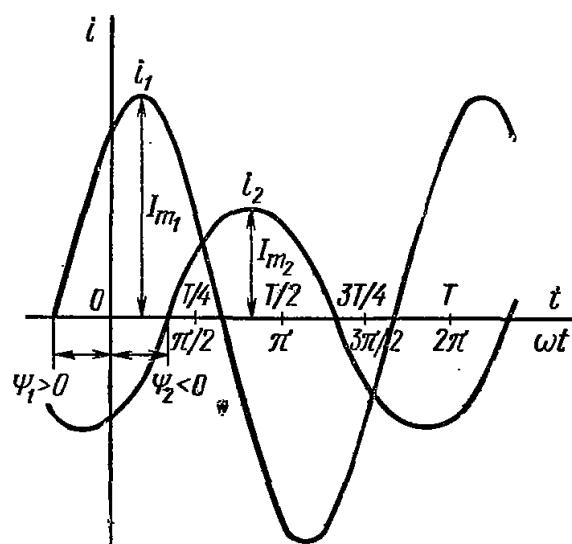


Рис. 6.1

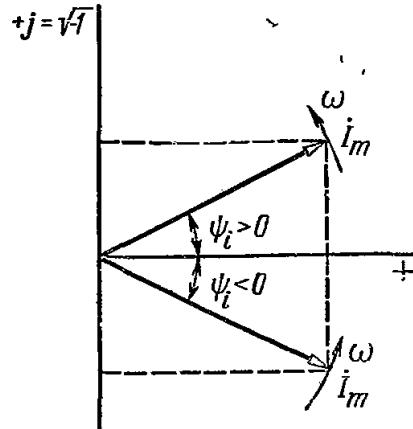


Рис. 6.2

8.2. Понятие о генераторах гармонической эдс

Генераторы гармонической э. д. с. (гармонического напряжения), применяемые в электроэнергетике, состоят из неподвижной части — статора и подвижной, вращающейся, части — ротора. На рис. 6.3 схематически изображен такой генератор. На роторе обычно располагают электромагниты, полюсные наконечники которых выполняются из электротехнической стали. Обмотка электромагнитов соединена с кольцами; с помощью щеток к кольцам подводится напряжение от источника постоянной э. д. с. Магнитную цепь статора также выполняют из электротехнической стали. В пазах статора находятся проводники статорной обмотки, соединенные между собой последовательно. Соединения проводников на переднем и заднем торцах статора показаны на рис. 6.3 соответственно сплошными и штриховыми линиями.

При вращении ротора в каждом проводнике статорной обмотки индуцируется э. д. с.

$$e = Blv,$$

где B — радиальная составляющая индукции магнитного поля, движущегося относительно проводника обмотки статора; l — активная длина проводника, в котором индуцируется э. д. с.; v — скорость перемещения магнитного поля относительно проводника обмотки статора.

При условии, что l и v — постоянные величины, закон изменения э. д. с. e определяется законом изменения B . Для получения гармонической э. д. с. радиальная составляющая индукции должна изменяться по гармоническому закону. Если воздушный зазор между статором и полюсными наконечниками ротора сделать переменным (увеличивающимся от середины полюсных наконечников к их краям), придавая полюсным наконечникам соответствующую форму, то можно получить закон распределения радиальной составляющей магнитной индукции по окружности статора, достаточно близкий к гармоническому.

За один оборот ротора, имеющего p пар полюсов, происходит p полных циклов изменения э. д. с. Если ротор вращается

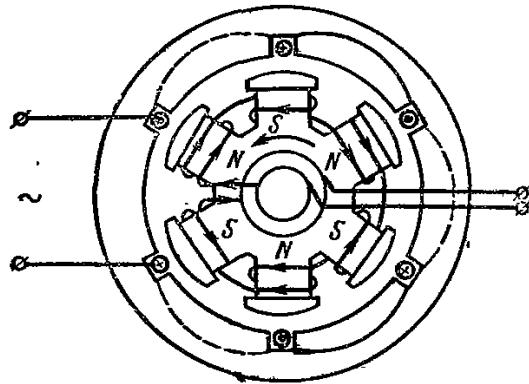


Рис. 6.3

со скоростью n оборотов в минуту, то частота индуцированной э. д. с. $f = pn/60$. Для получения частоты 50 Гц роторы генераторов с одной парой полюсов должны вращаться со скоростью $n = 3000$ об/мин, с двумя парами полюсов — $n = 1500$ об/мин. Чтобы обеспечить необходимую механическую прочность, при таких больших скоростях вращения роторы выполняют без выступающих полюсов. Роторы мощных генераторов приводятся во вращение с помощью турбин. Механическая энергия турбины в генераторе преобразуется в электрическую энергию.

Для получения э. д. с., изменяющихся с частотой $800 \div 10\,000$ Гц, применяют машинные генераторы специальных конструкций или электронные генераторы. Переменные напряжения более высоких частот, которые находят применение в радиотехнике и технике связи, получают, как правило, от электронных — ламповых или транзисторных — генераторов.

Электронный генератор содержит усилительный элемент (лампу или транзистор), колебательный контур, устройство обратной связи и источник постоянного напряжения. Как было показано в гл. 3, в контуре, состоящем из индуктивной катушки и конденсатора, при разряде конденсатора возникают затухающие колебания (при условии, что сопротивление r , характеризующее потери энергии в контуре, достаточно мало). Если к контуру непрерывно подводить энергию от вспомогательного источника, компенсирующую потери энергии в сопротивлении r , то можно получить незатухающие гармонические колебания.

На рис. 6.4 показана упрощенная схема лампового генератора. В контуре L_aC_a , включенном в анодную цепь лампы, возникают гармонические колебания. Потери энергии в контуре (сопротивление потерь r не показано) восполняются за счет источника питания анодной цепи \mathcal{E}_a . Чтобы периодичность поступления энергии в контур была согласована с колебаниями в контуре, анодный ток лампы i_a управляется сеточным напряжением u_c , которое, в свою очередь, пропорционально напряжению на контуре u_a . Пропорциональность напряжений u_a и u_c достигается тем, что катушки L_c и L_a , включенные в сеточную и анодную цепи лампы, имеют связь за счет общего магнитного потока, т. е. за счет взаимной индуктивности (аналогично катушкам совершенного трансформатора, рассмотренного в гл. 1). Таким образом, взаимная индуктивность M обеспечивает обратную связь между анодной и сеточной цепями лампы и необходимую периодичность поступления энергии в контур от источника постоянного напряжения.

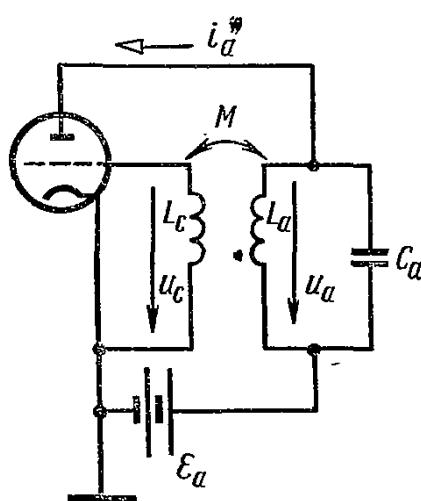


Рис. 6.4

могательного источника, компенсирующую потери энергии в сопротивлении r , то можно получить незатухающие гармонические колебания.

Если к электронному генератору присоединяется нагрузка, то энергия, отбираемая в нагрузку, также восполняется за счет энергии источника \mathcal{E}_a . В электронном генераторе энергия источника постоянного напряжения преобразуется в энергию гармонических колебаний. Частота таких колебаний определяется параметрами L_a и C_a контура *.

[Бессонов. Глава 3, стр.81]
 [Ионкин. Раздел 3, Глава 6, стр.149]

8.3. Комплексные напряжения, токи и сопротивления

Комплексные амплитуды и действующие значения. Как уже отмечалось в § 6.1, гармоническим токам, напряжениям и другим величинам можно поставить в соответствие вращающийся радиус-вектор на комплексной плоскости. Этот радиус-вектор в любой момент времени служит геометрическим изображением комплексного числа. Таким образом, величинам, изменяющимся по гармоническому закону, соответствуют комплексные функции.

Например, значению тока $i = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$ в любой фиксированный момент времени t соответствует комплексное число, изображаемое вектором, длина которого равна амплитуде I_m и который образует с вещественной осью комплексной плоскости угол $\omega t + \psi_i$ (положительные углы отсчитываются в направлении, противоположном направлению движения часовой стрелки, а отрицательные — наоборот). В начальный момент времени $t=0$ вектор образует с вещественной осью угол ψ_i . Такой вектор можно обозначить через

$$\hat{I}_m = I_m e^{j\psi_i} = I_m \angle \psi_i, \quad (7.1)$$

где длина вектора I_m — это модуль, а угол ψ_i — аргумент комплексного числа, геометрическим изображением которого служит вектор \hat{I}_m ; $j = \sqrt{-1}$ *.

Равенство (7.1) называют показательной формой записи комплексного числа \hat{I}_m . Комплексное число можно записать также в алгебраической

$$\hat{I}_m = I'_m + jI''_m \quad (7.2a)$$

или тригонометрической

$$\hat{I}_m = I_m \cos \psi_i + jI_m \sin \psi_i \quad (7.2b)$$

форме. Величины $I'_m = I_m \cos \psi_i$, $I''_m = I_m \sin \psi_i$ называют соответственно вещественной (Re) и мнимой (Im) частями комплексного числа \hat{I}_m :

$$I'_m = \text{Re } \hat{I}_m; \quad I''_m = \text{Im } \hat{I}_m.$$

* Здесь и далее буквой с точкой наверху обозначаются комплексное число и его графическое изображение (вектор), соответствующее гармонически изменяющейся величине.

Для фиксированного момента времени $t > 0$ значению $i = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$ соответствует комплексное число (комплексный мгновенный ток)

$$\dot{I}_m e^{j\omega t} = I_m e^{j(\omega t + \psi_i)} = I_m [\cos(\omega t + \psi_i) + j \sin(\omega t + \psi_i)]. \quad (7.3)$$

Гармоническую функцию $i(t)$ можно, следовательно, рассматривать как мнимую часть комплексной функции:

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi_i) = \operatorname{Im}[I_m e^{j(\omega t + \psi_i)}] = \operatorname{Im}[\dot{I}_m e^{j\omega t}]. \quad (7.4)$$

Комплексное число \dot{I}_m называют комплексной амплитудой гармонической функции i . Если это число разделить на $\sqrt{2}$, то

$$\dot{I} = \dot{I}_m / \sqrt{2} = I e^{j\psi_i}$$

называют комплексным действующим значением, так как модуль числа \dot{I} равен действующему значению гармонической функции i .

Между функцией i и комплексным действующим значением существует связь, выражаемая равенством

$$i = \sqrt{2} I \sin(\omega t + \psi_i) = \operatorname{Im}[\sqrt{2} I e^{j(\omega t + \psi_i)}] = \operatorname{Im}[\sqrt{2} \dot{I} e^{j\omega t}]. \quad (7.5)$$

Векторы \dot{I}_m (\dot{I}) и $\dot{I}_m e^{j\omega t}$ ($\dot{I} e^{j\omega t}$) отличаются тем, что первые неподвижны, а вторые врачаются с угловой скоростью ω в направлении, противоположном направлению вращения часовой стрелки. Все эти векторы можно рассматривать как соответствующие одной и той же гармонической функции i .

Термин «вектор» как изображение комплексного числа \dot{I}_m или \dot{I} имеет смысл, отличный от смысла этого же термина, применяемого для определения физических величин, характеризуемых модулем и направлением в пространстве (например, сила, скорость, напряженность поля и т. п.).

Переход от гармонических функций к комплексным амплитудам или действующим значениям позволяет упростить действия с гармоническими функциями: сложение и вычитание, дифференцирование и интегрирование.

Пусть заданы функции

$$i_1 = I_{1m} \sin(\omega t + \psi_1); \quad i_2 = I_{2m} \sin(\omega t + \psi_2).$$

Тогда

$$\begin{aligned} i = i_1 \pm i_2 &= \operatorname{Im}[\dot{I}_{1m} e^{j\omega t}] \pm \operatorname{Im}[\dot{I}_{2m} e^{j\omega t}] = \\ &= \operatorname{Im}[(\dot{I}_{1m} \pm \dot{I}_{2m}) e^{j\omega t}] = \operatorname{Im}[\dot{I}_m e^{j\omega t}], \end{aligned}$$

где $\dot{I}_m = \dot{I}_{1m} \pm \dot{I}_{2m}$. Таким образом, суммированию гармонических функций одинаковой частоты соответствует суммирование комплексных амплитуд или действующих значений.

Производная гармонической функции $i = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$

$$\frac{di}{dt} = \frac{d}{dt} \operatorname{Im} [\dot{I}_m e^{j\omega t}] = \operatorname{Im} \left[\frac{d}{dt} \dot{I}_m e^{j\omega t} \right] = \operatorname{Im} [j\omega \dot{I}_m e^{j\omega t}].$$

Интеграл от гармонической функции

$$\int i dt = \int \operatorname{Im} [\dot{I}_m e^{j\omega t}] dt = \operatorname{Im} \int \dot{I}_m e^{j\omega t} dt = \operatorname{Im} \left[\frac{1}{j\omega} \dot{I}_m e^{j\omega t} \right].$$

Как видно из записанных равенств, дифференцированию (интегрированию) гармонической функции соответствует умножение (деление) комплексной амплитуды или комплексного действующего значения на $j\omega$.

Линейной комбинации комплексных амплитуд, часть из которых умножена (разделена) на $j\omega$, соответствует линейная комбинация гармонических функций, часть из которых продифференцирована (пронтегрирована). Суммирование комплексных чисел можно выполнить, если эти числа представлены в алгебраической форме. Для перехода от показательной формы к алгебраической следует воспользоваться равенством (7.2 б). Обратный переход осуществляется с помощью соотношений *

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \psi &= \frac{I'_m}{I''_m}; \\ I_m &= \sqrt{I'_m + I''_m} = \frac{I'_m}{\cos \psi} = \frac{I''_m}{\sin \psi}. \end{aligned} \right\} \quad (7.6)$$

Умножение (деление) комплексных чисел выполняется, если эти числа представлены в показательной форме.

* Все соотношения, записанные в данном параграфе для токов, аналогично записываются для напряжений, э. д. с., потенциалов, зарядов и т. п.

Комплексные сопротивления и проводимости. Пусть напряжение и ток пассивного участка некоторой ветви электрической цепи, содержащей источники гармонической э. д. с. и гармонического тока, изменяются по законам

$$u = U_m \sin(\omega t + \psi_u); \quad i = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$$

(положительные направления u и i на схеме приняты одинаковыми). Гармоническим функциям \dot{u} и \dot{i} соответствуют комплексные величины $\dot{U}_m (\dot{U})$ и $\dot{I}_m (\dot{I})$. Отношение

$$Z = \frac{\dot{U}_m}{\dot{I}_m} = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{U e^{j\psi_u}}{I e^{j\psi_i}} = z e^{j\Phi} \quad (7.7)$$

($z = U/I$; $\Phi = \psi_u - \psi_i$) называют комплексным сопротивлением пассивного участка ветви. В алгебраической форме

$$Z = r + jx.$$

Вещественную часть комплексного сопротивления $r = \operatorname{Re} Z = z \cos \varphi$ называют активным сопротивлением, а минимую часть $x = \operatorname{Im} Z = z \sin \varphi$ — реактивным сопротивлением. Модуль комплексного сопротивления $z = \sqrt{r^2 + x^2}$ называется полным сопротивлением. Активное и полное сопротивления — неотрицательные величины; реактивное сопротивление может быть положительной, отрицательной, а также равной нулю величиной*. Аргумент комплексного сопротивления $\varphi = \arctg x/r$ равен углу сдвига фаз между напряжением и током.

* Для пассивного участка цепи угол $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, если положительные направления u и i совпадают (см. гл. 6).

В общем случае пассивный участок ветви схемы может содержать последовательно соединенные сопротивление r , индуктивность L и емкость C . При этом напряжение u и ток i участка связаны соотношением

$$u = ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt.$$

Если u и i — гармонические функции, то записанному равенству можно поставить в соответствие равенство для комплексных действующих значений

$$\dot{U} = r\dot{I} + j\omega LI + \frac{1}{j\omega C} \dot{I} = Z\dot{I},$$

где

$$Z = r + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = r + j(x_L - x_C). \quad (7.8)$$

Реактивное сопротивление такого участка $x = x_L - x_C$; аргумент комплексного сопротивления $\varphi = \arctg [(x_L - x_C)/r]$. Сопротивления x_L и x_C неотрицательны, сопротивление x может быть положительной, отрицательной и равной нулю величиной.

Комплексное сопротивление Z можно представить на комплексной плоскости гипотенузой прямоугольного треугольника с катетами r и jx (рис. 7.1, a). Такой треугольник называют треугольником сопротивлений.

Величину, обратную комплексному сопротивлению Z , называют комплексной проводимостью

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{i_m}{\dot{U}_m} = \frac{i}{\dot{U}} = \frac{I e^{j\psi_i}}{U e^{j\psi_u}} = y e^{-j\varphi}, \quad (7.9)$$

где $y = 1/z = I/U$. В алгебраической форме $Y = g - jb$, где $g = \operatorname{Re} Y = y \cos \varphi$ — активная проводимость; $b = \operatorname{Im} Y = y \sin \varphi$ — реактивная проводимость; $y = \sqrt{g^2 + b^2}$ — полная проводимость. Активная и полная проводимости — неотрицательные величины; реактивная проводимость может быть положительной, отрицательной или равной нулю величиной. Для принятых форм записи комплексных сопротивлений (7.7) и комплексных проводимостей (7.9) знаки у x и b совпадают.

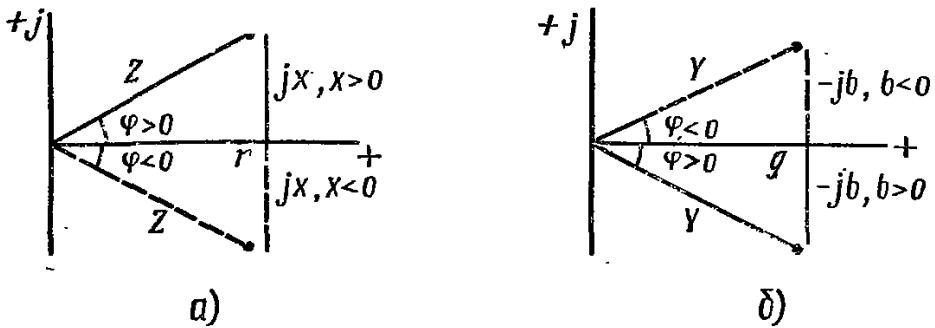


Рис. 7.1

В общем случае пассивный участок цепи может состоять из параллельно соединенных проводимости g , емкости C и индуктивности L . В этом случае ток i и напряжение u участка связаны соотношением

$$i = gu + C \frac{du}{dt} + \frac{1}{L} \int u dt,$$

которому соответствует равенство для комплексных действующих значений

$$I = gU + j\omega CU + \frac{1}{j\omega C} U = YU,$$

где $Y = g - j(b_L - b_C)$. (7.10)

Реактивная проводимость такого участка $b = b_L - b_C$; аргумент комплексной проводимости $\varphi = \arctg [(b_C - b_L)/g]$. Проводимости b_L и b_C неотрицательны, проводимость b может быть положительной, отрицательной или равной нулю величиной.

Комплексную проводимость Y на комплексной плоскости можно представить гипотенузой прямоугольного треугольника с катетами g и $-jb$ (рис. 7.1, б). Такой треугольник называют **треугольником проводимостей**.

Если $Z = r + jx$, то

$$Y = \frac{1}{r + jx} = \frac{r - jx}{(r + jx)(r - jx)} = \frac{r}{r^2 + x^2} - j \frac{x}{r^2 + x^2}, \quad (7.10 \text{ a})$$

откуда

$$g = r/(r^2 + x^2), \quad b = -\frac{x}{r^2 + x^2}.$$

Если $Y = g - jb$, то

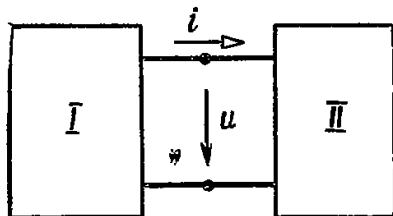
$$Z = \frac{1}{g - jb} = \frac{g + jb}{(g - jb)(g + jb)} = \frac{g}{g^2 + b^2} + j \frac{b}{g^2 + b^2}, \quad (7.11)$$

откуда $r = g/(g^2 + b^2)$, $x = b/(g^2 + b^2)$. Как видно, параметры r и g , x и b одного участка ветви не являются обратными величинами. Обратными являются комплексные и полные сопротивления и проводимости участка.

8.4. Энергетические процессы в цепи переменного тока

[Ионкин, стр.190]

Мощности. На рис. 7.2 изображены две соединенные между собой части цепи, каждая из которых содержит источники энергии. Для указанных положительных направлений напряжение и ток выражаются формулами



$$u = U_m \sin(\omega t + \psi_u); \quad i = I_m \sin(\omega t + \psi_i).$$

Мгновенная мощность

$$p = ui = \frac{U_m I_m}{2} [\cos \varphi - \cos(2\omega t + \psi_u + \psi_i)].$$

Рис. 7.2

Если $\psi_u \neq \psi_i$, то мгновенная мощность может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Это означает, что в различные промежутки времени энергия передается из первой части цепи (I) во вторую (II) и наоборот.

Активная мощность

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p dt = \frac{U_m I_m}{2} \cos \varphi = UI \cos \varphi. \quad (7.12)$$

Величина энергии, передаваемой из первой части цепи во вторую,

$$W = \int_0^t p dt = Pt + UI \left[\frac{1}{2\omega} \sin(\psi_u - \psi_i) - \frac{1}{2\omega} \sin(2\omega t + \psi_u + \psi_i) \right] \quad (7.13)$$

представляет собой пульсирующую функцию. За целое число полупериодов N энергия $W = PNT/2$.

На рис. 7.3 показаны графики зависимости напряжения u , тока i , мощности p и энергии W от ωt при $0 < \varphi < \pi/2$; $\psi_u = 0$; а на рис. 7.4 — при $\varphi > \pi/2$, $\psi_u = 0$.

Одна и та же активная мощность может быть получена при различных значениях тока I и одном и том же напряжении U (при различных значениях напряжения U при одном и том же токе I), если изменять сдвиг фаз между напряжением и током. Мгновенная мощность дает более полную характеристику энергетических процессов цепи по сравнению с активной мощностью.

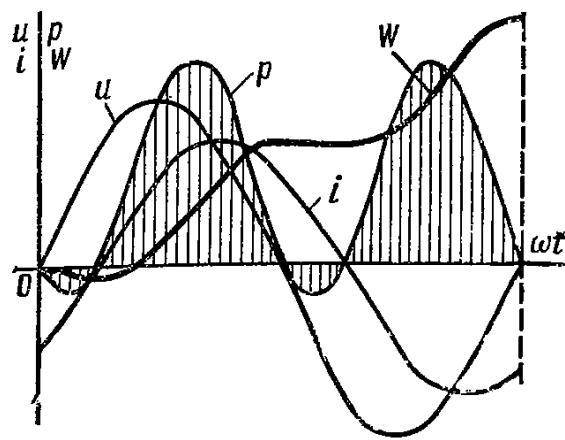


Рис. 7.3

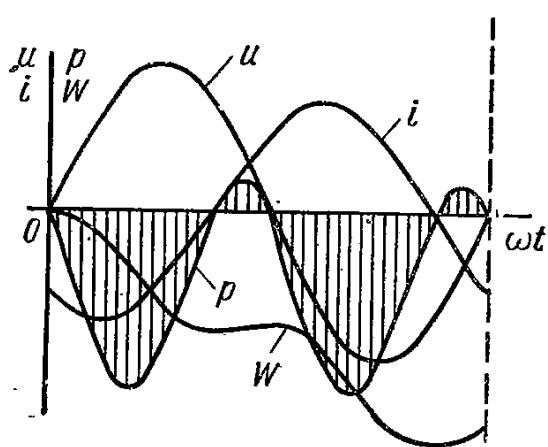


Рис. 7.4

Амплитуду пульсаций мгновенной мощности $S = UI$ называют полной мощностью. Полную мощность можно рассматривать как модуль комплексной величины, называемой комплексной мощностью:

$$\tilde{S} = \dot{U}\dot{I}, \quad (7.14)$$

где $\dot{I} = Ie^{-j\Psi_i}$ — комплексное число, сопряженное с $\dot{I} = Ie^{j\Psi_i}$, т. е. отличающееся от комплексного числа \dot{I} знаком аргумента и знаком мнимой части.

В алгебраической форме $\tilde{S} = P + jQ$. вещественная часть комплексной мощности совпадает с активной мощностью

$$\operatorname{Re} \tilde{S} = \operatorname{Re} UI e^{j(\Psi_u - \Psi_i)} = UI \cos \varphi = P.$$

Мнимую часть комплексной мощности

$$\operatorname{Im} \tilde{S} = UI \sin \varphi = Q$$

называют реактивной мощностью.

Полная мощность

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}.$$

При положительном знаке активной мощности ($-\pi/2 < \varphi < \pi/2$) реактивная мощность может иметь положительный или отрицательный знак. При $\varphi > 0$ (ток отстает по фазе от напряжения) $Q > 0$; при $\varphi < 0$ (ток опережает по фазе напряжение) $Q < 0$. Положительный (отрицательный) сдвиг фаз φ между напряжением и током пассивного участка ветви соответствует индуктивному (емкостному) характеру реактивного сопротивления или реактивной проводимости b этого участка. Следовательно, положительная (отрицательная) реактивная мощность пассивного участка ветви также соответствует индуктивному (емкостному) характеру реактивного сопротивления или реактивной проводимости.

Реактивная мощность $Q=0$ при $\varphi=0$ или $\varphi=\pi$, т. е. при условии, что ток и напряжение совпадают или противоположны по фазе и, следовательно, в цепи отсутствуют периодические процессы накопления и последующего возвращения энергии, связанный с магнитным или электрическим полем.

В простейшем случае, когда пассивный участок ветви содержит последовательно (параллельно) соединенные индуктивность и емкость, реактивная мощность такого участка $Q=Q_L-Q_C$ (см. гл. 6). Учитывая выражения для Q_L и Q_C , приведенные в гл. 6,

$$Q = Q_L - Q_C = \omega \left(\frac{LI_m^2}{2} - \frac{CI_m^2}{2} \right) = p_{L\max} - p_{C\max},$$

т. е. реактивная мощность равна разности максимальных энергий магнитного и электрического полей, связанных соответственно с индуктивностью и емкостью, умноженной на частоту ω , или разности максимальных мгновенных мощностей индуктивности и емкости. Пульсации мгновенных мощностей в индуктивности и емкости сдвинуты по фазе на угол π , что и приводит к вычитанию максимальных значений мгновенных мощностей.

Отношение активной мощности к полной

$$P/S = \cos \varphi \quad (7.15)$$

называют коэффициентом мощности. Полная мощность электрической машины, трансформатора или другого устройства определяется предельно допустимыми напряжением U и током I . При $\cos \varphi = 1$ активная мощность равна полной, что означает наиболее эффективное использование устройства, поэтому повышению коэффициента мощности электроэнергетических установок уделяется значительное внимание. Такое повышение возможно при компенсации реактивной мощности индуктивного характера реактивной мощностью емкостного характера, так как реактивные мощности индуктивности и емкости имеют противоположные знаки.

Так как на величину тока, потребляемого или генерируемого электроэнергетической установкой при заданном напряжении, оказывает влияние не только активная, но и реактивная мощности, в энергосистемах и промышленных предприятиях наряду с энергией W учитывают также величину $W_p = Qt$, называемую реактивной энергией, измеряемой в вольт-ампер-час (вар·ч). Реактивная энергия — условный термин, так как W_p не является энергией.

Комплексная мощность $\tilde{S} = P + jQ$ может быть представлена на комплексной плоскости в виде гипotenузы прямоугольного треугольника с катетами P и jQ (рис. 7.5). Такой треугольник называют треугольником мощностей.

Связь мощностей с сопротивлениями и проводимостями. Пусть на зажимах ветви с комплексным сопротивлением $Z = r + jx$ известны напряжение \dot{U} и ток \dot{I} (рис. 7.6, а). Тогда комплексная мощность $\tilde{S} = \dot{U}\dot{I} = P + jQ$.

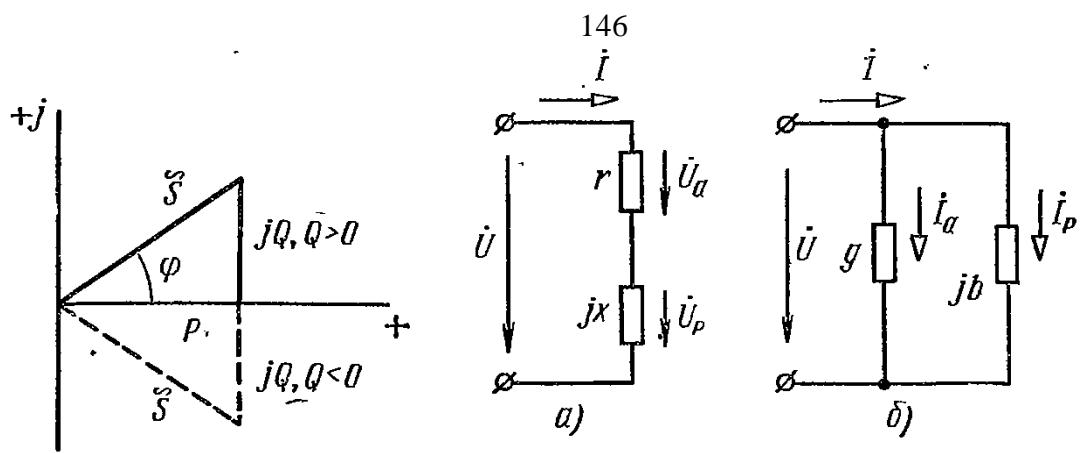


Рис. 7.5

Рис. 7.6

Из определения комплексного сопротивления $\dot{U} = Z\dot{I}$. Следовательно,

$$\tilde{S} = \dot{U}\dot{I} = Z\dot{I}\dot{I}^* = ZI^2 = (r + jx)I^2 = rI^2 + jxI^2;$$

$$P = rI^2; Q = xI^2; S = zI^2.$$

Активное, реактивное и полное сопротивления можно определить по соответствующим мощностям:

$$r = P/I^2; x = Q/I^2; z = S/I^2. \quad (7.16)$$

Сопротивление r — пассивный элемент схемы; термин «активное сопротивление» подчеркивает связь этого сопротивления с активной мощностью: элемент схемы r отражает процессы необратимого рассеяния энергии. Сопротивление проводника r , измеренное при переменном токе, отличается от сопротивления того же проводника, измеренного при постоянном токе. При переменном токе сопротивление r увеличивается с ростом частоты за счет поверхностного эффекта и эффекта близости.

Если комплексная проводимость ветви $Y = g - jb$ (рис. 7.6, б), то ток $\dot{I} = Y\dot{U}$. Сопряженный ток

$$\dot{I} = \dot{Y}^*\dot{U}^* = (g + jb)^*\dot{U}^*.$$

Комплексная мощность

$$\tilde{S} = \dot{U}\dot{I} = \dot{U}\dot{Y}^*\dot{U}^* = \dot{Y}^*\dot{U}^2 = (g + jb)^*U^2 = gU^2 + jbU^2.$$

Следовательно, $P = gU^2$; $Q = bU^2$; $S = yU^2$. Активную, реактивную и полную проводимости можно определить из выражений

$$g = P/U^2; b = Q/U^2; y = S/U^2. \quad (7.17)$$

Вектор \dot{U} на зажимах схемы на рис. 7.6, а разлагается на две составляющие: активную составляющую \dot{U}_a , совпадающую по фазе с током \dot{I} , и реактивную составляющую \dot{U}_p , сдвинутую по

фазе относительно тока \dot{I} на угол $\pi/2$ (рис. 7.7, а). Эти составляющие можно рассматривать как напряжения на элементах r и x схемы, так как

$$\begin{aligned}\dot{U} &= \dot{U}_a + \dot{U}_p = (r + jx) \dot{I} = r\dot{I} + jx\dot{I}; \\ \dot{U}_a &= r\dot{I}; \quad \dot{U}_p = jx\dot{I}.\end{aligned}$$

Из векторной диаграммы видно, что

$$U_a = U \cos \varphi; \quad U_p = U |\sin \varphi|, \quad U = \sqrt{\dot{U}_a^2 + \dot{U}_p^2} \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}\right).$$

Аналогично можно разложить на две составляющие ток \dot{I} (рис. 7.7, б). Активная составляющая \dot{I}_a совпадает по фазе с напряжением \dot{U} , реактивная составляющая \dot{I}_p сдвинута по фазе относительно напряжения на угол $\pi/2$. Эти составляющие можно рассматривать как токи в элементах g и b схемы на рис. 7.6, б. Действительно,

$$\dot{I} = \dot{I}_a + \dot{I}_p = (g - jb) \dot{U} = g\dot{U} - jb\dot{U}; \quad \dot{I}_a = g\dot{U}; \quad \dot{I}_p = -jb\dot{U}.$$

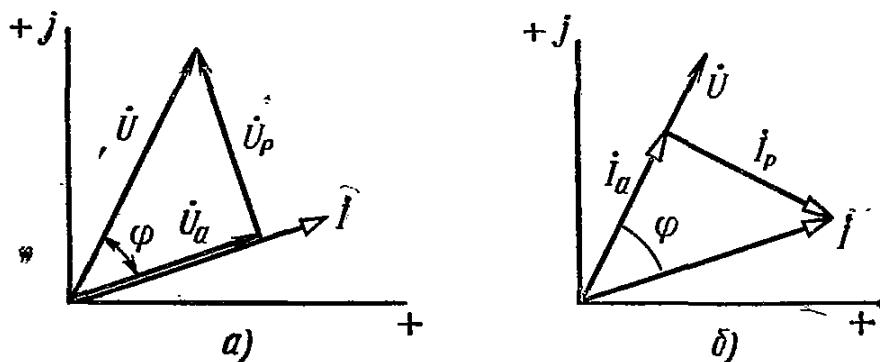


Рис. 7.7

Из векторной диаграммы следует, что

$$I_a = I \cos \varphi; \quad I_p = I |\sin \varphi|; \quad I = \sqrt{I_a^2 + I_p^2}.$$

Мощности P и Q выражаются через активные и реактивные составляющие напряжений и токов:

$$\begin{aligned}P &= UI \cos \varphi = UI_a = U_a I; \\ Q &= UI \sin \varphi = \pm UI_p = \pm U_p I.\end{aligned}$$

Знак мощности Q может быть установлен, если известен знак угла φ .

Схемы на рис. 7.6, а, б рассматривают соответственно как последовательную и параллельную эквивалентные схемы пассивного двухполюсника. Параметры эквивалентных схем определяют, в частности, с помощью измерений напряжения U , тока I и мощности P . Действующие значения тока и напряжения измеряют с помощью вольтметров и амперметров. Активная потреб-

ляемая мощность измеряется ваттметром, схема включения которого изображена на рис. 7.8. Отклонение стрелки ваттметра пропорционально величине $P_W = U_W I_W \cos \varphi_W$, где U_W , I_W — действующие значения напряжения на зажимах обмотки напряжения и тока токовой обмотки ваттметра; φ_W — сдвиг фаз между \dot{U}_W и \dot{I}_W , причем положительные направления \dot{U}_W и \dot{I}_W должны быть одинаковыми относительно зажимов, отмеченных звездочками. Показание ваттметра можно также записать в виде $P_W = \operatorname{Re}[\dot{U}_W \dot{I}_W]$. Если при измерении определены U , I , P , то параметры эквивалентных схем находят из соотношений

$$z = U/I; \quad r = P/I^2; \quad x = \pm \sqrt{z^2 - r^2}$$

или

$$y = I/U; \quad g = P/I^2; \quad b = \pm \sqrt{y^2 - g^2}.$$

Знаки реактивного сопротивления и реактивной проводимости могут быть установлены с помощью дополнительных измерений. Например, последовательно с двухполюсником можно включить конденсатор с емкостным сопротивлением $x_C < 2|x|$. Если при этом абсолютная величина реактивного сопротивления схемы с учетом x_C возрастает: $|x - x_C| > |x|$, то реактивное сопротивление двухполюсника x имеет емкостный характер; если $|x - x_C| < |x|$, то реактивное сопротивление x имеет индуктивный характер.

8.5. Уравнения состояния электрических цепей с источниками гармонических эдс в комплексной форме

Законы Ома и Кирхгофа. Для пассивного участка ветви электрической цепи с источниками гармонических э. д. с. и токов $\dot{U} = Z\dot{I}$, $\dot{I} = Y\dot{U}$. В общем случае, если k -я ветвь содержит источники э. д. с. и тока (рис. 7.9), справедливы равенства

$$\dot{U}_k = Z_k (\dot{I}_k + \dot{J}_k) - \dot{\mathcal{E}}_k; \quad (7.18)$$

$$\dot{I}_k = Y_k (\dot{U}_k + \dot{\mathcal{E}}_k) - \dot{J}_k \quad (7.19)$$

($Z_k = 1/Y_k$), аналогичные равенствам (4.1) и (4.2).

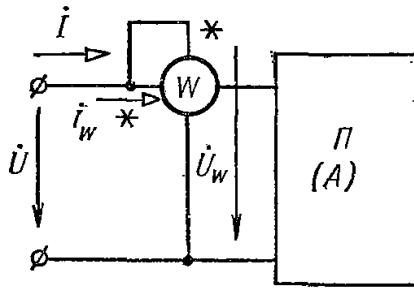


Рис. 7.8

Для всех ветвей схемы можно записать матричные соотношения:

$$\dot{\mathbf{U}}^{(B)} = \mathbf{Z}^{(B)} [\dot{\mathbf{I}}^{(B)} + \dot{\mathbf{j}}^{(B)}] - \dot{\mathbf{E}}^{(B)}; \quad (7.20)$$

$$\dot{\mathbf{I}}^{(B)} = \mathbf{Y}^{(B)} [\dot{\mathbf{U}}^{(B)} + \dot{\mathbf{E}}^{(B)}] - \dot{\mathbf{j}}^{(B)}, \quad (7.21)$$

где $\dot{\mathbf{U}}^{(B)}$, $\dot{\mathbf{I}}^{(B)}$, $\dot{\mathbf{E}}^{(B)}$, $\dot{\mathbf{j}}^{(B)}$ — столбцовые матрицы комплексных действующих значений соответственно напряжений, токов, э. д. с.

и токов источников токов ветвей цепи; $\mathbf{Z}^{(B)}$, $\mathbf{Y}^{(B)}$ — матрицы соответственно комплексных сопротивлений и проводимостей ветвей, причем $\mathbf{Z}^{(B)} = [\mathbf{Y}^{(B)}]^{-1}$.

Равенства (7.20) и (7.21) выражают матричную запись закона Ома в комплексной форме.

Для цепей, не содержащих взаимной индуктивности и электронных элементов, $\mathbf{Z}^{(B)}$ и $\mathbf{Y}^{(B)}$ — диагональные матрицы.

Если ветвь схемы содержит последовательно соединенные сопротивление, индуктивность и емкость, то

$$Z_k = r_k + j\omega L_k + \frac{1}{j\omega C_k};$$

$$\mathbf{Z}^{(B)} = \mathbf{R}^{(B)} + j\omega \mathbf{L}^{(B)} + \frac{1}{j\omega} \mathbf{D}^{(B)}.$$

Матрицы $\mathbf{R}^{(B)}$, $\mathbf{L}^{(B)}$ и $\mathbf{D}^{(B)}$ диагональны. На главной диагонали этих матриц записывают соответственно параметры ветвей r_k , L_k и $D_k = 1/C_k$, где $k = 1, 2, \dots, v$.

Если ветвь схемы содержит параллельно соединенные сопротивление, индуктивность и емкость, то

$$Y_k = g_k + j\omega C_k + \frac{1}{j\omega L_k}.$$

При этом матрица

$$\mathbf{Y}^{(B)} = \mathbf{G}^{(B)} + j\omega \mathbf{C}^{(B)} + \frac{1}{j\omega} \mathbf{L}^{(B)}.$$

Матрицы $\mathbf{G}^{(B)}$, $\mathbf{C}^{(B)}$ и $\mathbf{L}^{(B)}$ диагональны. На главной диагонали этих матриц записывают соответственно параметры ветвей g_k , C_k и $L_k = 1/g_k$, где $k = 1, 2, \dots, v$.

Уравнениям Кирхгофа (2.5), (2.7) и (2.9) для мгновенных значений соответствуют уравнения Кирхгофа в комплексной форме:

$$\mathbf{A}\dot{\mathbf{I}}^{(B)} = \mathbf{0}; \quad (7.22a)$$

$$\mathbf{Q}\dot{\mathbf{I}}^{(B)} = \mathbf{0}; \quad (7.22b)$$

$$\mathbf{B}\dot{\mathbf{U}}^{(B)} = \mathbf{0}. \quad (7.23)$$

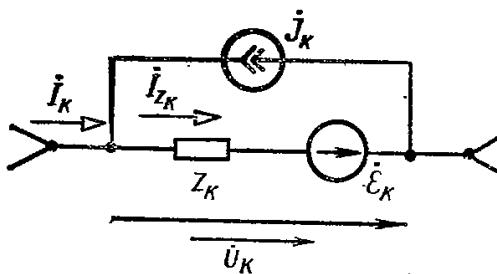


Рис. 7.9

Соотношения (2.6), (2.8) и (2.10) также могут быть записаны в комплексной форме:

$$\dot{\mathbf{U}}^{(B)} = \mathbf{A}^{(T)} \dot{\boldsymbol{\varphi}}; \quad (7.24)$$

$$\dot{\mathbf{U}}^{(B)} = \mathbf{Q}^{(T)} \dot{\mathbf{U}}^{(L)}; \quad (7.25)$$

$$\dot{\mathbf{I}}^{(B)} = \mathbf{B}^{(T)} \dot{\mathbf{I}}^{(K)}, \quad (7.26)$$

где $\dot{\boldsymbol{\varphi}}$, $\dot{\mathbf{U}}^{(L)}$, $\dot{\mathbf{I}}^{(K)}$ — столбцовые матрицы комплексных действующих значений соответственно узловых потенциалов, напряжений ветвей дерева и контурных токов.

Как видно, все соотношения в комплексной форме, характеризующие цепь с источниками гармонических напряжений и токов, аналогичны соответствующим соотношениям, характеризующим цепь с источниками э. д. с. и токов. Переход к комплексам позволяет алгебраизировать уравнения цепи при гармонических э. д. с. и токах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мякишев Г.Я. Физика: Учеб. для 10 кл. сред. шк. / Г.Я. Мякишев, Б.Б. Буховцев // М.: Просвещение, 1992. – 222 с.
2. Элементарный учебник физики. Т.2 – Электричество и магнетизм / Под ред. акад. Г.С. Ландсберга. – М.: Наука, 2001. – 528 с.
3. Купер Л.Н. Физика для всех. Т.1 – Классическая физика – М.: Мир, 1973. – 478 с.
4. Фейнман Р. Фейнмановские лекции по физике. Вып.5 – Электричество и магнетизм / Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэндс // М.: Мир, 2003. – 296 с.; вып.6 – Электродинамика. – М.: Мир, 2003. – 344 с.
5. Иродов И.Е. Основные законы электромагнетизма. Учеб. пособие для студентов вузов. – М: Высш. шк., 1991. – 288 с.
6. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Т.3 – Электричество. – М.: Высш. шк., 1983. – 703 с.
7. Тамм И.Е. Основы теории электричества. – М.: Наука, 1989. – 504 с.
8. Калашников С.Г. Электричество. – М.: Наука, 1977. – 592 с.
9. Савельев И.В. Курс общей физики. Т.2: Учеб. пособие. – М.: Наука, 1982. – 496 с.
10. Берклеевский курс физики. Т.2 – Электричество и магнетизм / Э. Парсел. // М.: Наука, 1975. – 440с.
11. Трофимова Т.И. Курс физики: М.: Высш. шк., 1990. – 478с.
12. Яворский Б.М. Справочное руководство по физике для поступающих в вузы и самообразования / Б.М. Яворский, Ю.А. Селезнев // М.: Наука, 1984. – 384с.
13. Яворский Б.М. Справочник по физике / Б.М. Яворский, А.А. Детлаф // М.: Наука, 1990. – 478с.
14. Физическая энциклопедия / Под ред. А.М. Прохорова. – М.: «Советская энциклопедия», 1988.
15. Большая советская энциклопедия / Главный редактор А.М. Прохоров – М.: «Советская энциклопедия», 1970.
16. Кудрявцев Л.Д. Математический анализ в 2-х т. – М.: Высшая школа, 1970.
17. Нейман Л.Р. Теоретические основы электротехники: В 2-х Т. Учеб. для вузов/ Л.Р.Нейман, К.С.Демирчян. – Л.: Энергоатомиздат, 1981. Т.1 – 432с., Т2 – 416с.
18. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники. –М.:Высшая школа, 1996.-640с.
19. Теоретические основы электротехники /П.А.Ионкин и др. Под ред. П.А.Ионкина. – Т.1 и 2. – М.: Высшая школа, 1976. Т.1. – 544с., Т.2. – 383с.
20. Зевеке Г.В. Основы теории цепей: Учеб для вузов/ Г.В.Зевеке, П.А.Ионкин, А.В.Нетушил, С.В.Страхов. – М.: Энергоатомиздат, 1990. – 753 с.
21. Шебес М.Р. Задачник по теории линейных электрических цепей: учеб. пособие для студ. электротехн. и радиотехн. спец. вузов / М. Р. Шебес, М. В. Каблукова. – М.: Высшая школа, 1990. – 544 с.