

Севастопольский государственный университет

В.Г. Козырев

Лекции по теории электрических цепей

Севастополь
2017

Козырев В.Г. Лекции по теории электрических цепей / Севастополь: СГУ, 2017.

Лекции содержат изложение теории электрических цепей. Предназначены для студентов университетов, обучающихся по техническим направлениям.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение. Предмет теории электрических цепей.....	5
1. Основные положения электричества и магнетизма.....	6
2. Электрические цепи.....	46
3. Начала теории квазистационарных токов в электрических цепях.....	74
4. Дифференциальные уравнения как общий аппарат анализа процессов в электрических цепях.....	87
5. Анализ процессов в линейных электрических цепях с помо- щью преобразования Лапласа.....	94
6. Свойства и теоремы линейных электрических цепей.....	107
7. Переходные процессы в цепях с источниками постоянных эДС.....	113
8. Установившиеся процессы в цепях с источниками синусои- дальных ЭДС.....	127
Литература.....	145

ОСНОВНЫЕ ФИЗИЧЕСКИЕ ВЕЛИЧИНЫ ТЕОРИИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

электрический ток i ;

электрическое напряжение u .

ОСНОВНЫЕ ФИЗИЧЕСКИЕ ВЕЛИЧИНЫ ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМА

электрический заряд q ;

магнитных зарядов нет;

напряженность электрического поля \mathbf{E}
(электрическая напряженность);

индукция магнитного поля \mathbf{B}
(магнитная индукция).

ВВЕДЕНИЕ. ПРЕДМЕТ ТЕОРЕТИЧЕСКИХ ОСНОВ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

Дисциплина «Теория электрических цепей» (ТЭЦ) изучает наиболее общие закономерности процессов, протекающих во всех электротехнических устройствах и электрических сетях.

Задачи ТЭЦ:

разработка теоретических методов исследования процессов в электрических цепях электротехнических устройств и электрических сетей на базе системных представлений об электромагнитных явлениях;

решение типовых задач анализа и синтеза цепей с целью разработки и эксплуатации электротехнических устройств, служащих для создания, передачи и распределения электроэнергии как универсального посредника между источниками энергии и потребителями, для решения проблем электромеханики, электротехнологии, передачи и распределения информации, электроники, автоматики, информационно–измерительной и вычислительной техники.

1. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСТВА И МАГНЕТИЗМА

Дисциплина «Теория электрических цепей» опирается на учение об электричестве и магнетизме.

Предмет электричества и магнетизма. Учение об электричестве и магнетизме («электричество и магнетизм», «электромагнетизм») – это наука о существовании, движении и взаимодействии *электрически заряженных тел и частиц* («электрических зарядов»), а также о свойствах и закономерностях особого вида материи – *электромагнитного поля*, посредством которого заряды взаимодействуют друг с другом.

Термином «электричество» называют также сами *электрические заряды* и все *электрические явления*. Термином «магнетизм» называют все *магнитные явления*.

Среди известных науке четырех видов взаимодействий: гравитационных, электромагнитных, сильных (ядерных) и слабых* электромагнитные взаимодействия занимают первое место по широте и разнообразию проявлений. Они ответственны за огромное множество явлений окружающего мира.

* Слабые взаимодействия вызывают превращения элементарных частиц.

1.1. Электрический заряд.

Понятие электрического заряда. Электрическим зарядом называют *свойство* некоторых элементарных частиц взаимодействовать друг с другом с силой, которая подобно силе тяготения убывает обратно пропорционально квадрату расстояния, но в огромное число раз превосходит силу тяготения. Так, в атоме водорода электрон притягивается к ядру (протону) с силой, в $2 \cdot 10^{39}$ раз превышающей силу гравитационного притяжения. О частицах, обладающих подобным свойством, говорят, что *они имеют электрический заряд*. Сами частицы называются электрически заряженными или просто «заряженными».

Согласно данному определению *протон* ($m_p = 1,67 \cdot 10^{-27}$ кг) и *электрон* ($m_e = 0,911 \cdot 10^{-30}$ кг) – это электрически заряженные частицы. В свободном состоянии, а также в составе атомов они могут существовать неограниченно долго (если нет столкновений с другими, быстрыми, частицами). Существует и множество других элементарных заряженных частиц. Но все они живут микроскопические доли секунды ($\sim 10^{-20 \dots -30}$ с), самопроизвольно распадаясь на другие частицы.

Не все элементарные частицы обладают зарядом. Частицы, не обладающие зарядом, называются нейтральными. К ним относится *нейтрон* ($m_n = 1,67 \cdot 10^{-27}$ кг). Нейтрон устойчив только в составе атомных ядер. Свободный нейтрон живет около 16 минут, распадаясь на протон, электрон и электронное антинейтрино.

Такие же времена жизни наблюдаются и у античастиц всех частиц.

Взаимодействие между заряженными частицами называют электромагнитным. Можно сказать поэтому, что электрический заряд – это *свойство* частиц, проявляемое в наличии между ними *электромагнитных взаимодействий*. Он служит также количественной характеристикой, физической величиной, определяющей *интенсивность* этих взаимодействий (описываемых законом Кулона и др. законами электромагнетизма). Сами электромагнитные взаимодействия передаются при помощи особого вида материи, порождаемого заряженными частицами и называемого электромагнитным полем.

Итак, электрический заряд – это *источник электромагнитного поля*, связанный с материальным носителем, *внутренняя характеристика элементарной частицы*, определяющая её *электромагнитные взаимодействия*.

Макроскопические тела, а также составные микрочастицы (атомы, молекулы, группы молекул) построены из элементарных частиц – протонов, электронов и нейтронов*. Поэтому они тоже проявляют электромагнитные свойства. Тела и составные частицы способны *электризоваться* (приобретать избыточный электрический заряд**), порождать *электромагнитные поля* и вступать в *электромагнитные взаимодействия* друг с другом.

* Нейтроны не входят в состав только атомов водорода-протия.

** Механизм электризации тел описан далее в этом параграфе.

Существует **два типа электрических зарядов**. Их называют положительными и отрицательными и приписывают им знаки «+» и «-» соответственно. *Одинаково заряженные частицы и тела друг от друга отталкиваются, а разноименно заряженные – притягиваются. Протоны* (входящие в состав всех атомных ядер) считаются *положительно заряженными*. *Электроны* (образующие атомные оболочки) являются *отрицательно заряженными*.

Дискретность электрического заряда. **Элементарные частицы – носители элементарного заряда.** Опытным путем установлено, что электрический заряд *дискретен*, т.е. заряд любого тела составляет целое кратное от элементарного электрического заряда e ($e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл) (Кл – это кулон, единица измерения электрического заряда). *Носителем элементарного заряда являются элементарные частицы*, которые выше были названы *заряженными*. *Протон* является носителем *положительного* элементарного заряда ($+e$), а *электрон* – *отрицательного* ($-e$).

Заряд элементарной частицы – это минимально существующий в природе заряд.

Согласно сказанному заряд любого тела (количество электричества) можно выразить в виде:

$$q = N_+e - N_-e = (N_+ - N_-) \cdot e, \quad (1.1.1)$$

где N_+ – число положительно заряженных элементарных частиц в теле (в обычных условиях – протонов); N_- – число отрицательно заряженных элементарных частиц в теле (в обычных условиях – электронов).

Закон сохранения электрического заряда:

Алгебраическая сумма электрических зарядов любой замкнутой системы (системы, не обменивающейся зарядами с внешними телами) остается неизменной, какие бы процессы ни происходили внутри этой системы:

$$q_1 + q_2 + \dots + q_n = \text{const} \quad (1.1.2)$$

где q_i – заряды всех частиц системы ($i = 1, 2, \dots, n$).

Закон сохранения электрического заряда имеет глубокий смысл. Он состоит в том, что сохраняется именно заряд, а не число заряженных частиц. Если число заряженных частиц не меняется, то выполнение данного закона очевидно. Но элементарные частицы могут превращаться друг в друга, рождаться, исчезать, давая жизнь новым частицам. Однако во всех случаях заряженные частицы рождаются только парами с одинаковыми по модулю и противоположными по знаку зарядами. Исчезают заряженные частицы тоже только парами, превращаясь в нейтральные. И во всех случаях сумма зарядов остается одной и той же.

Более того, *электрический заряд – величина релятивистски инвариантная, т.е. не зависит от системы отсчета, в которой он измеряется, а значит, не зависит от того, движется этот заряд или нет.*

Заряженные тела. Электризация тел. В обычных условиях тела (а также составляющие их отдельные атомы и молекулы) электрически нейтральны. Количества положительных протонов и отрицательных электронов в каждом теле и в любой его (макроскопической) части одинаковы между собой. Суммарный заряд тела и любой его части равен нулю.

При определенных условиях (например, при трении) электрическая нейтральность тела может быть нарушена и на нем создан некоторый избыток заряженных частиц какого-то одного знака. Макроскопическое тело называется электрически заряженным, или наэлектризованным, если оно содержит избыточное количество заряженных частиц какого-либо одного знака.

Избыточный заряд могут приобретать и составные микрочастицы: атомы, молекулы, группы молекул, и в этом случае их тоже называют заряженными.

Создание избытка заряженных частиц на теле или частице называется его/ее электризацией. Коротко, электризация – это *приобретение телом (частицей) электрического заряда.*

Для краткости заряженные тела и частицы часто называют просто зарядами, электрическими зарядами. Таким образом, термин «заряд», «электрический заряд» может обозначать и свойство частицы или тела, и саму заряженную частицу и тело.

Способы электризации тел. Все тела в природе способны электризоваться. Электризация тел может осуществляться следующими способами:

соприкосновением, в т.ч. тесным соприкосновением (например, трением) незаряженных тел или прикосновением уже заряженного тела к незаряженному;

электростатической индукцией – электризацией через влияние на расстоянии для проводников;

электронной эмиссией – испусканием электронов поверхностью твердого тела или жидкости.

Единица электрического заряда. Единицу заряда в международной системе единиц СИ – кулон устанавливают с помощью единицы силы тока. *Один кулон (1 Кл) – это заряд, проходящий за 1 с через поперечное сечение проводника при силе тока в 1 А.* Саму единицу силы тока устанавливают при помощи силы магнитного взаимодействия двух длинных прямолинейных проводов с током.

1.2. Электромагнитное поле и его характеристики. Обобщенный закон Лоренца

Электромагнитное взаимодействие. Взаимодействие между электрически заряженными частицами или макроскопическими телами мы назвали в п.1.1 электромагнитным взаимодействием.

Согласно теории близкодействия, принимаемой в физике, любое взаимодействие происходит по схеме: частица-поле-частица. Частица создаёт в окружающем её пространстве определённое физическое поле (или сразу несколько полей), которое воздействует на другую частицу; и обратно, вторая частица через своё, созданное ею (и такое же) физическое поле (или поля) воздействует на первую частицу. Так осуществляется *взаимодействие* частиц.

Любое физическое поле материально, оно реально существует независимо от нас и наших знаний о нём. Оно непрерывно в пространстве (по представлению классической физики). Оно распространяется в пространстве с конечной скоростью.

В настоящее время физике известны четыре вида физических полей и соответствующих им взаимодействий: гравитационное (тяготения); электромагнитное; ядерное; и так называемые слабые поля/взаимодействия.

Электромагнитное поле. Электромагнитное взаимодействие осуществляется посредством электромагнитного поля. Электромагнитное поле представляет собой особый вид материи, или материальную субстанцию, которая порождается электрически заряженными частицами («электрическими зарядами»), пронизывает все окружающее их пространство и воздействует на другие заряженные частицы (заряды), находящиеся в этом пространстве.

Электромагнитное поле неподвижных или равномерно движущихся зарядов неразрывно связано с ними. Однако при ускоренном движении заряженных частиц электромагнитное поле «отрывается» от них и существует независимо от них, самостоятельно, распространяясь в пространстве в виде электромагнитных волн* (переменное, изменяющееся во времени электромагнитное поле). Скорость распространения электромагнитного поля и его изменений – электромагнитных волн в вакууме равна скорости света c (свет – это разновидность электромагнитных волн). В материальных средах электромагнитное поле распро-

страняется с меньшей скоростью, чем в вакууме ($v < c$). Способность электромагнитного поля существовать *самостоятельно* и распространяться с *конечной* скоростью *служат главными доказательствами его реальности*.

Электромагнитная сила. Сила*, действующая на заряд со стороны электромагнитного поля, называется электромагнитной силой. Обозначим ее буквой \mathbf{F} .

* Силами (механическими силами) называются действия, влияния тел друг на друга, создающие *ускорения* (динамическое проявление силы) и *деформации* (статическое проявление силы).

Для удобства описания электромагнитных явлений, а также по историческим причинам* электромагнитную силу принято разделять на две части – электрическую силу и магнитную силу:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_э + \mathbf{F}_м. \quad (1.2.1)$$

Здесь:

$\mathbf{F}_э$ – электрическая сила, под которой понимается та часть электромагнитной силы, которая действует на *неподвижный* заряд и не меняет своего значения и при движении заряда в данной точке поля: она не зависит от движения заряда.

$\mathbf{F}_м$ – магнитная сила – это другая часть электромагнитной силы, представляющая собой ее *приращение*, которое появляется при *движении* заряда и зависит от характера его движения.

* Вплоть до середины 19 века электрические и магнитные явления считались материальными продуктами различного физического происхождения и изучались в разных разделах физики.

Принятая указанным образом договоренность о разложении силы \mathbf{F} на две составляющие по формуле (1) является *определением электрической и магнитной сил*.

Электромагнитные поля, в которых не действует магнитная сила ($\mathbf{F}_м = 0$), а возбуждается только электрическая ($\mathbf{F}_э$), называют просто «электрическими». В таких полях полная электромагнитная сила \mathbf{F} , действующая на движущийся заряд, всегда равняется силе на неподвижный заряд, т.е. электрической силе: $\mathbf{F} = \mathbf{F}_э$. Иными словами, в чисто электрических полях электромагнитная сила \mathbf{F} не зависит от скорости заряда. Чисто электрические поля создаются неподвижными электрическими зарядами, зарядами в статике. Такие поля называются также электростатическими.

Когда же в поле отсутствует электрическая сила ($\mathbf{F}_э = 0$), а создается только магнитная сила $\mathbf{F}_м$, говорят о «чисто магнитном» поле. В таких полях неподвижный заряд не испытывает никакой силы со стороны поля, но как только он приходит в движение сила на него появляется. Чисто магнитные поля создаются (неподвижными) постоянными магнитами и постоянными токами в

сверхпроводниках (для протекания которых не требуется наличия электрической силы). Такие поля называются магнитоэлектростатическими.

Электростатические и магнитоэлектростатические поля являются частными и простейшими разновидностями электромагнитного поля.

Еще одним простым примером служит электромагнитное поле, создаваемое проводником с постоянным током. Его можно представить как комбинацию полей электростатического и магнитоэлектростатического типов, создаваемых в результате перераспределения и равномерного движения зарядов в проводнике. В этом поле на движущийся заряд действует и электрическая и магнитная силы.

В произвольном, переменном, электромагнитном поле (движущийся) заряд будет испытывать обе составляющие электромагнитной силы.

Количественными характеристиками электромагнитного поля служат электрическая напряженность \mathbf{E} и магнитная индукция \mathbf{B} . Знание \mathbf{E} позволяет определить электрическую силу $\mathbf{F}_э$, знание \mathbf{B} – магнитную силу $\mathbf{F}_м$. Вектора \mathbf{E} и \mathbf{B} исчерпывающе характеризуют состояние электромагнитного поля в любой точке пространства.

Электрическая напряженность \mathbf{E} определяется как *отношению силы, с которой электромагнитное поле действует на неподвижный точечный заряд, к этому заряду*:

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}_э}{q}. \quad (1.2.2)$$

Здесь $\mathbf{F}_э$ – электрическая сила на заряд; q – величина заряда.

Коротко: напряженность \mathbf{E} – это «*электрическая сила, отнесенная к единице заряда*».

Опыт показывает, что отношение (2) не зависит от величины заряда q , так как электрическая сила пропорциональна величине заряда. Поэтому \mathbf{E} служит характеристикой самого поля.

Электрическое поле. Распределение вектора электрической напряженности \mathbf{E} в пространстве, т.е. *поле вектора $\mathbf{E} = \mathbf{E}(x, y, z)$* , называется электрическим полем, а сам вектор \mathbf{E} – также и напряженностью электрического поля. Электрическое поле количественно характеризует *пространственное электрическое состояние* электромагнитного поля.

Расчет электрической силы. Если известна напряженность электрического поля (электрическая напряженность) \mathbf{E} , то в соответствии с (2) можно найти электрическую силу – силу, действующую со стороны электромагнитного поля на неподвижный заряд q по формуле

$$\mathbf{F}_э = q\mathbf{E}. \quad (1.2.3)$$

Направление силы $\mathbf{F}_э$ совпадает с направлением \mathbf{E} , если заряд положительный ($q > 0$), и противоположно вектору \mathbf{E} , если заряд отрицательный ($q < 0$) (рис.1.2.1).

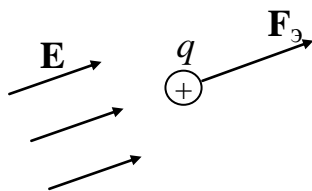


Рис.1.2.1. Заряд в электрическом поле

Единица измерения электрической напряженности. Согласно формуле (2) электрическую напряженность (напряженность электрического поля) в единицах СИ можно выразить в ньютонах на кулон (Н/Кл) (или в вольтах на метр (В/м); см. п.1.6).

Источники формирования электрической напряженности E . Электрическая напряженность E электромагнитного поля формируется избыточными электрическими зарядами q (в соответствии с законом Гаусса) и изменением магнитной индукции B поля: $\partial B / \partial t$ (в соответствии с законом электромагнитной индукции – обобщенным законом Фарадея; см. п.1.3). Кроме того, E может создаваться химическими силами, но этот процесс не описывается законами классической физики, а лишь квантовой.

Напряжённость электромагнитного (электростатического) поля неподвижного точечного заряда. Закон Кулона. Найдем напряжённость электростатического поля, создаваемого неподвижным точечным зарядом q_0 . По закону Кулона этот заряд будет действовать на другой точечный заряд q с силой

$$F = k \frac{q_0 \cdot q}{r^2}, \quad (1.2.4)$$

направленной по прямой, соединяющей заряды. С такой же силой, но противоположно направленной, будет действовать и второй заряд на первый. Здесь: r – расстояние между зарядами; k – коэффициент пропорциональности, численно равный силе взаимодействия единичных зарядов на расстоянии, равном единице длины. В системе СИ $k = 9 \cdot 10^9 \text{ Н} \cdot \text{м}^2 / \text{Кл}^2$ (точно). При $q_0 \cdot q > 0$ сила является отталкивающей: $F > 0$, при $q_0 \cdot q < 0$ – притягивающей: $F < 0$.

Согласно (2) и (4) напряжённость поля точечного заряда q_0 на расстоянии r от него равна по величине

$$E = \frac{F}{q} = k \frac{q_0}{r^2}. \quad (1.2.5)$$

Вектор напряжённости E в любой точке электростатического поля направлен вдоль прямой, соединяющей эту точку и заряд: при $q_0 > 0$ – от заряда, при $q_0 < 0$ – к заряду (рис.1.2.2).

Формулу (5) можно записать и в векторном виде:

$$E = k \frac{q_0}{r^2} e_r, \quad (1.2.6)$$

где e_r – орт радиус-вектора r , проведенного из центра поля, в котором расположен заряд q_0 , до интересующей нас точки: $e_r = r/r$ (см. рис.1.2.2).

Формулы (3), (6) представляют закон Кулона в полевой форме.

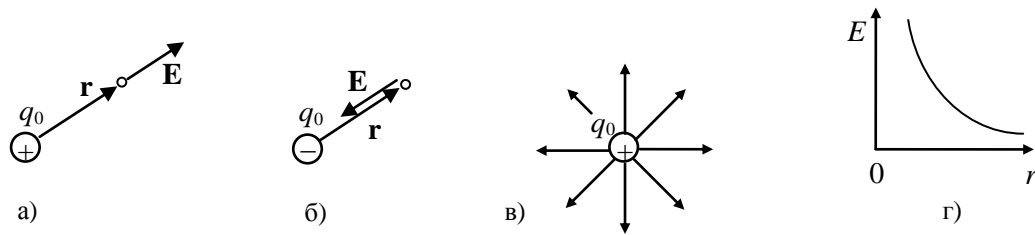


Рис.1.2.2. Электрическое поле неподвижного точечного заряда.

а) напряжённость поля положительного заряда; б) – отрицательного заряда; в) силовые линии поля; г) зависимость величины напряжённости $E = |\mathbf{E}|$ от расстояния до заряда r .

Магнитная индукция \mathbf{B} . Все свойства магнитной силы можно описать, если ввести вектор электромагнитного поля \mathbf{B} и записать данную силу в виде

$$\mathbf{F}_M = q \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (1.2.7)$$

Здесь: q – величина заряда; \mathbf{v} – его скорость; а выражение $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ обозначает векторное произведение векторов \mathbf{v} и \mathbf{B} . Модуль магнитной силы равен $F_M = |q| \cdot |\mathbf{v}| \cdot |\mathbf{B}| \cdot \sin \alpha$, где α – угол между векторами \mathbf{v} и \mathbf{B} . Направление магнитной силы перпендикулярно к векторам \mathbf{v} и \mathbf{B} (т.е. к плоскости, образованной этими векторами), так что вектора \mathbf{v} , \mathbf{B} и \mathbf{F}_M образуют правую винтовую систему. Иначе говоря, направление \mathbf{F}_M определяется по правилу правого буравчика: если головку буравчика вращать в плоскости \mathbf{v} , \mathbf{B} от вектора \mathbf{v} к вектору \mathbf{B} (по ближайшему пути), то движение оси буравчика покажет направление магнитной силы (рис.1.2.3).

Вектор электромагнитного поля \mathbf{B} называется вектором магнитной индукции или просто «магнитной индукцией».

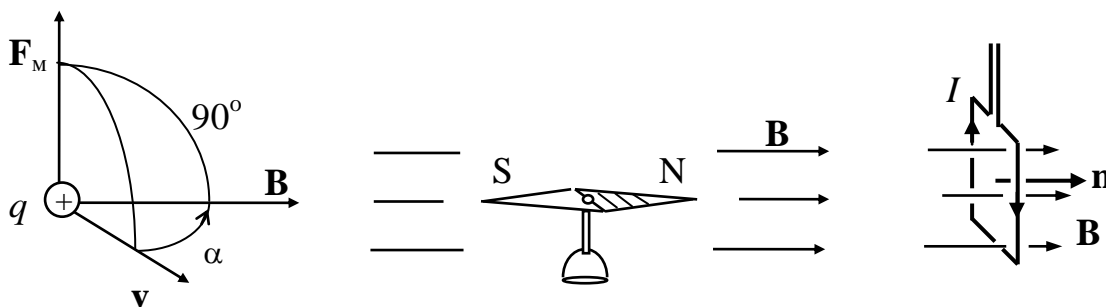


Рис.1.2.3. Заряд, магнитная стрелка и рамка с током («пробный ток») в магнитном поле

Магнитное поле. Поле вектора магнитной индукции \mathbf{B} , т.е. распределенная в пространстве векторная физическая величина $\mathbf{B} = \mathbf{B}(x, y, z)$, называется магнитным полем. Вектор \mathbf{B} называется также индукцией магнитного поля. Магнитное поле количественно характеризует *пространственное магнитное состояние* электромагнитного поля.

Расчет магнитной силы. Если известна индукция \mathbf{B} , то магнитная сила на заряд вычисляется по формуле (7).

Формула для магнитной силы (6) называется законом Лоренца, а сама магнитная сила, действующая на электрический заряд, тоже называется силой Лоренца и обозначается $\mathbf{F}_\text{л}$: $\mathbf{F}_\text{м} = \mathbf{F}_\text{л}$.

Единица измерения магнитной индукции определяется с помощью закона Ампера. Индукция поля принимается за единицу, если это поле (будучи однородным) действует на участок проводника длиной 1 м при силе тока 1 А с максимальной силой 1 Н. Эта единица называется *тесла* (Тл).

Источники формирования магнитной индукции \mathbf{B} . Магнитная индукция \mathbf{B} электромагнитного поля формируется электрическими токами i и изменением электрической напряженности поля $\partial\mathbf{E}/\partial t$ (закон полного тока, называемый иногда обобщенным законом Ампера; п.1.3).

Магнитная индукция электромагнитного (магнитоэстатического) поля прямолинейного постоянного тока. По закону Био-Савара-Лапласа (или закону полного тока) вектор \mathbf{B} электромагнитного поля, создаваемого прямолинейным проводником с постоянным током, направлен по касательной к окружности, как показано на рис.1.2.4. Плоскость окружности перпендикулярна проводу, а центр её лежит на оси провода. Направление вектора \mathbf{B} устанавливается с помощью правила правого буравчика: если ось буравчика совместить с током и вращать его ручку так, чтобы ось двигалась в направлении тока, то вращение ручки покажет направление вектора \mathbf{B} .

Модуль вектора \mathbf{B} равен

$$B = \mu_0 \frac{I}{2\pi r},$$

где μ_0 – так называемая магнитная постоянная, раздел 4); I – сила тока; r – расстояние от данной точки поля до провода.

В поле прямолинейного тока магнитная стрелка (или нормаль рамки с током) устанавливается по касательной к указанным окружностям, в направлении вектора \mathbf{B} .

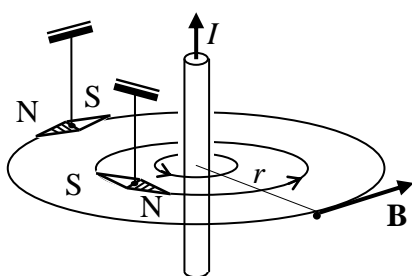


Рис.1.2.4. Магнитное поле прямолинейного тока.

Обобщенный закон Лоренца. При наличии и электрического поля \mathbf{E} и магнитного \mathbf{B} полная электромагнитная сила, действующая на заряд, будет равна

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_\text{э} + \mathbf{F}_\text{м} = q \cdot (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (1.2.8)$$

где q – величина заряда; \mathbf{v} – его скорость; $\mathbf{F}_\text{э} = q\mathbf{E}$ – электрическая сила; $\mathbf{F}_\text{м} = \mathbf{F}_\text{л} = q \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ – магнитная сила (сила Лоренца).

Это соотношение, как и (7), было впервые дано Лоренцом. Оно называется обобщенным законом Лоренца. Полную электромагнитную силу \mathbf{F} называют иногда (как и силу $\mathbf{F}_\text{м}$) силой

Лоренца; в этом случае магнитную силу \mathbf{F}_m называют магнитной частью силы Лоренца, а электрическую силу \mathbf{F}_e – электрической частью силы Лоренца. Соотношение (8) является *универсальным*: оно справедливо для произвольных электромагнитных полей, причем при любых значениях скорости \mathbf{v} заряда.

Распределение зарядов и токов. Для упрощения математических расчётов во многих случаях бывает удобно игнорировать тот факт, что заряды имеют дискретную структуру (электроны, ядра), и считать, что они «размазаны» определённым образом в пространстве. Другими словами, удобно заменить истинное распределение точечных дискретных зарядов фиктивным непрерывным распределением. Это позволяет значительно упрощать расчёты, не внося сколько-нибудь значительной ошибки.

При переходе к непрерывному распределению вводят понятие о плотности – объёмной ρ , поверхностной σ и линейной λ . По определению,

$$\rho = \frac{dq}{dV}, \quad \sigma = \frac{dq}{dS}, \quad \lambda = \frac{dq}{dl},$$

где dq – заряд, заключённый соответственно в объёме dV , на поверхности dS и на длине dl (и определяемый по формуле (1.1.1)). Иными словами, плотность заряда – объёмная, поверхностная и линейная – это величина заряда, приходящегося на единицу объёма, поверхности и линии соответственно.

Модель непрерывного распределения электрических зарядов приводит и к модели непрерывного распределения электрических токов по пространству и по поверхностям, через которые они протекают. Характеристики электрического тока – сила тока I через заданную поверхность и плотность его распределения \mathbf{j} по этой поверхности также становятся непрерывными функциями пространственных координат и времени. (Определение плотности тока дано в п.1.4.)

1.3. Уравнения Максвелла

Предмет уравнений Максвелла. Уравнения Максвелла описывают поведение электромагнитного поля в вакууме или в произвольной среде. Они позволяют рассчитать основные (\mathbf{E} , \mathbf{B}) и вспомогательные (\mathbf{D} , \mathbf{H})* характеристики поля в каждой точке пространства в любой момент времени, если известны источники поля: ρ – плотность распределения заряда и \mathbf{j} – плотность тока как функции координат и времени. При наличии вещественной среды для указанного расчета нужны еще уравнения среды $\mathbf{D} = f(\mathbf{E})$ и $\mathbf{B} = g(\mathbf{H})$. В свою очередь, величины \mathbf{E} и \mathbf{B} задают силы, действующие со стороны поля на движущийся заряд в данной точке (закон Лоренца; п.1.2). Совместно с законом Лоренца уравнения Максвелла образуют полную систему уравнений классической электродинамики. *Зная распределение и движение всех прочих зарядов, создающих поле, мы можем рассчитать вектора \mathbf{E} и \mathbf{B} с помощью уравнений Максвелла в данной точке пространства и далее, по закону Лоренца, силу на рассматриваемый заряд q , находящийся в этой точке.*

* **D** – вектор электрической индукции, **H** – магнитная напряженность, напряженность магнитного поля: искусственные величины, учитывающие поляризацию и намагничивание вещества. Они связаны с **E** и **B** так называемыми материальными уравнениями

$$\mathbf{D} = f(\mathbf{E}), \quad \mathbf{B} = g(\mathbf{H}).$$

Для подавляющего большинства изотропных диэлектриков

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E},$$

где ε – диэлектрическая проницаемость или диэлектрическая постоянная диэлектрика. Для всех веществ $\varepsilon > 1$, для вакуума $\varepsilon = 1$.

Для парамагнитных и диамагнитных сред

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mu \mathbf{H},$$

где μ – магнитная проницаемость вещества. Тела, для которых $\mu > 1$ называются парамагнитными или парамагнетиками. Тела, для которых $\mu < 1$, называются диамагнитными или диамагнетиками. Приведенная зависимость часто используются и для ферромагнетиков, (для них $\mu \gg 1$), например, для мягкого железа.

Кроме того, плотность тока **j** зависит от **E** согласно третьему материальному уравнению

$$\mathbf{j} = h(\mathbf{E}),$$

причем для многих проводников эта зависимость линейная (закон Ома):

$$\mathbf{j} = \gamma \mathbf{E},$$

где γ – удельная электропроводность.

Уравнения Максвелла – это **аксиомы электродинамики**. Они получены Максвеллом на основе обобщения эмпирических законов электрических и магнитных явлений.

Они являются **фундаментальными уравнениями**. Это означает, что все остальные законы классического электромагнетизма являются либо следствиями уравнений Максвелла, либо частными законами, обнаруженными эмпирически.

Уравнения Максвелла справедливы всегда, как в динамических (переменных), так и в статических (постоянных) макроскопических полях, как для неподвижных, так и для движущихся зарядов.

Уравнения Максвелла. Уравнений Максвелла четыре:

два для расчета электрического поля **E**:

- 1) *закон Гаусса* (совпадающий в статике с *законом Кулона*) и
- 2) *обобщенный закон Фарадея* об электромагнитной индукции (строго сформулированный Максвеллом);

и два – для магнитного поля **B**:

- 3) *закон о замкнутости линий магнитной индукции* (о соленоидальности магнитного поля: магнитных зарядов нет) и
- 4) *закон полного тока* (называемый иногда *обобщенным законом Ампера*). Он объединяет в себе закон Ампера для магнитного поля и закон о магнитоэлектрической индукции (о «токе смещения»), теоретически предсказанный Максвеллом и экспериментально подтвержденный в опытах Герца.

Еще два закона относятся к заряду и силе:

- закон сохранения электрического заряда и
- обобщенный закон Лоренца (закон силы), позволяющий определять силу, действующую на заряд со стороны электромагнитного поля \mathbf{E} и \mathbf{B} (электромагнитную силу).

Эти шесть уравнений образуют законченную систему фундаментальных законов классической теории электромагнетизма.

Все уравнения классической теории записаны в табл.1.3.1 как словесно, так и в математических формулах. Уравнения Максвелла даны как в интегральной, так и дифференциальной форме.

Таблица 1.3.1. Классическая физика

Уравнения Максвелла	
I. Закон Гаусса	
Для вектора \mathbf{E} :	
$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$	(Поток \mathbf{E} через замкнутую поверхность) = = (Заряд внутри нее) / ε_0
Для вектора \mathbf{D} :	
$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho_{\text{стор}}$	(Поток \mathbf{D} через замкнутую поверхность) = = (Сторонний* заряд внутри нее)
II. Закон электромагнитной индукции (обобщенный закон Фарадея)	
$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$	(Циркуляция \mathbf{E} по замкнутому контуру, т.е. эдс) = $= -\frac{\partial}{\partial t} (\text{Поток } \mathbf{B} \text{ сквозь контур})$
III. Закон соленоидальности магнитного поля (магнитных зарядов нет)	
$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$	(Поток \mathbf{B} через замкнутую поверхность) = 0
IV. Закон полного тока (обобщенный закон Ампера)	
Для векторов \mathbf{B} и \mathbf{E} :	
$\frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} \mathbf{B} = \mathbf{j}_{\text{сум}} +$	(Циркуляция \mathbf{B} по замкнутому контуру) / $\mu_0 =$ = (Суммарный ток сквозь контур) +
$+ \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$	$+ \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\text{Поток } \mathbf{E} \text{ сквозь контур})$
Для векторов \mathbf{H} и \mathbf{D} :	
$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$	(Циркуляция \mathbf{H} по замкнутому контуру, т.е. мдс М) = = (Истинный ток сквозь контур) + $\frac{\partial}{\partial t} (\text{Поток } \mathbf{D} \text{ сквозь контур})$

Сохранение заряда (следует из I и IV)	
$\left[\operatorname{div} \mathbf{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad \left(\begin{array}{l} \text{Поток заряда через замкнутую} \\ \text{поверхность} \end{array} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} (\text{Заряд внутри нее}) \right]$	
Закон силы (обобщенный закон Лоренца) $\mathbf{F} = q \cdot (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$	
Закон движения $\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}, \text{ где } \mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (\text{Закон Ньютона, исправленный Эйнштейном})$	
Гравитация $\mathbf{F} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \mathbf{e}_r \quad \begin{array}{l} \mathbf{F} - \text{гравитационная сила на массу } m_2 \text{ со стороны } m_1, \\ \mathbf{e}_r - \text{единичный вектор, направленный от } m_1 \text{ к } m_2 \end{array}$	
* Сторонними называют все заряды, за исключением поляризационных, связанных.	

Уравнения Максвелла показывают, что *источниками электрического поля могут быть либо электрические заряды, либо магнитные поля, меняющиеся во времени. В свою очередь магнитные поля могут возбуждаться либо движущимися электрическими зарядами (электрическими токами), либо переменными электрическими полями.*

Уравнения Максвелла не симметричны относительно электрического и магнитного полей. Это связано с тем, что в природе существуют электрические заряды, но, насколько известно в настоящее время, нет зарядов магнитных.

Принцип суперпозиции электрических и магнитных полей. Благодаря линейности уравнений Максвелла *напряженности электрических полей и индукции магнитных полей удовлетворяют принципу суперпозиции.*

А именно: в данной точке пространства напряженность электрического поля \mathbf{E} , создаваемого несколькими зарядами (или несколькими переменными магнитными полями в силу явления электромагнитной индукции), равна сумме напряженностей $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3, \dots$ от отдельных зарядов (источников полей):

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3 + \dots$$

Такому же принципу суперпозиции удовлетворяет магнитная индукция:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 + \mathbf{B}_3 + \dots,$$

где \mathbf{B} – результирующая магнитная индукция, создаваемая несколькими источниками магнитного поля – движущимися зарядами (токами) или переменными электрическими полями; \mathbf{B}_i – магнитные индукции от отдельных источников поля.

Относительность электрического и магнитного полей. Деление электромагнитного поля на электрическое и магнитное имеет относительный характер: оно в решающей степени зависит от системы отсчета, в которой рассматриваются явления. Например, поле, являющееся чисто электрическим в одной системе отсчета, приобретает магнитные свойства в другой, движущейся относительно первой. И наоборот, чисто магнитное поле, наблюдаемое в одной системе отсчета, проявляет смешанные – и электрические и магнитные свойства в другой системе. Поле, постоянное в одной системе отсчета, также оказывается переменным в другой системе, движущейся относительно первой. При переходе от одной системы к другой поля **Е** и **В** определенным образом преобразуются. Эти преобразования называются **преобразованиями Лоренца**. Законы этого преобразования устанавливаются в специальной теории относительности. Мы не будем приводить здесь эти преобразования.

1.4. Электрический ток

Электрическим током называется любое направленное движение (движение в одну сторону) электрически заряженных частиц или электрически заряженных тел.

Разновидности электрического тока. Различают:

ток проводимости – направленное движение свободных зарядов в проводнике или в вакууме под действием электромагнитного поля. На рис.1.4.1 показан ток проводимости, образуемый под влиянием электрического поля. Ток проводимости возникает также под влиянием магнитного поля в движущихся проводниках;

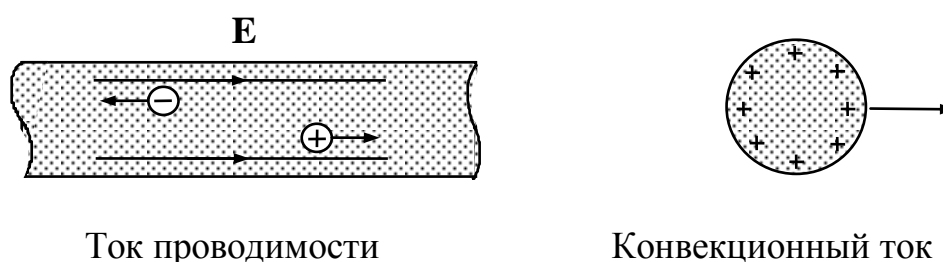


Рис.1.4.1. Электрический ток

конвекционный ток – перемещение в пространстве заряженного макроскопического тела (рис.1.4.1). Например, Земля имеет избыточный отрицательный заряд и при ее движении по орбите возникает конвекционный ток;

ток поляризации – упорядоченное смещение связанных зарядов диэлектрика в процессе его поляризации. Так как заряды связанные, они смещаются только в пределах атомов и молекул и не могут образовывать постоянный ток. Поэтому поляризационный ток может быть только кратковременным; либо переменным (при наложении переменного электрического поля).

Говорят также о токе смещения в вакууме (этот термин введен Дж. Максвеллом). «Током смещения в вакууме» условно называют изменяющееся во времени электрическое поле, поскольку оно, подобно настоящему электрическому току, создает магнитное поле. Более точно: плотностью тока смещения в вакууме называется величина $\mathbf{j}_{\text{см_вак}} = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$, где **Е** – напряженность электри-

ческого поля, а током смещения в вакууме через некоторую поверхность S – поток вектора $\mathbf{j}_{\text{см_вак}}$ через эту поверхность. Тогда ток смещения в диэлектрике складывается из тока смещения в вакууме и поляризационного тока диэлектрика: $\mathbf{j}_{\text{см}} = \mathbf{j}_{\text{см_вак}} + \mathbf{j}_{\text{пол}}^*$.

* В проводнике током смещения можно пренебречь по сравнению с током проводимости.

Проводники, диэлектрики и полупроводники. В зависимости от способности проводить электрический ток (ток проводимости) все тела делятся на проводники, диэлектрики (изоляторы) и полупроводники.

Проводники – это тела, хорошо проводящие электрический ток. Удельное сопротивление проводников ρ не превышает $10^{-8} - 10^{-6}$ Ом·м*. Хорошими проводниками обычно считают вещества с $\rho \leq 10^{-7}$ Ом·м.

* Удельное сопротивление вещества ρ – это сопротивление постоянному току однородного цилиндрического столбика, изготовленного из этого вещества и имеющего единичную длину и единичную площадь поперечного сечения.

К проводникам относятся *металлы, уголь, электролиты* (растворы кислот, щелочей и солей, а также расплавы солей) и *плазма* (частично или полностью ионизированный газ, в котором плотности положительных и отрицательных зарядов практически одинаковы).

В проводниках имеются заряженные частицы, способные перемещаться на макроскопические расстояния внутри проводника под влиянием электромагнитного поля. По этой причине эти частицы называются свободными заряженными частицами или свободными зарядами или носителями свободных зарядов. В металлах носителями свободных зарядов являются электроны, в электролитах – свободные ионы, в плазме – свободные ионы и электроны.

В проводниках очень много свободных зарядов, и они очень подвижны. Поэтому проводники хорошо проводят электрический ток.

Диэлектрики (изоляторы). В противоположность проводникам диэлектрики (изоляторы) плохо проводят электрический ток, они обладают большими сопротивлениями: $\rho \sim 10^8 - 10^{15}$ Ом·м. Хорошими изоляторами считаются вещества с $\rho > 10^{13}$ Ом·м.

К диэлектрикам относятся многие твердые вещества (стекло, фарфор, янтарь, эбонит, резина и др. аморфные тела и пластмассы; валентные кристаллы, например алмаз; молекулярные кристаллы – лед; ионные кристаллы – поваренная соль), жидкости (химически чистая вода, CH_3Cl и др.) и газы при нормальных температурах (H_2 , N_2 , CCl_4 , NH_3 и др.).

У диэлектрика все электрически заряженные частицы связаны друг с другом (связанные заряженные частицы). Они не могут, подобно свободным зарядам проводника, перемещаться по всему объему тела. Поэтому диэлектрики плохо проводят электрический ток*.

* В диэлектрике существует и некоторое, очень небольшое, число свободных заряженных частиц, оторвавшихся от своих атомов и способных переносить незначительный электрический ток. Но этим током обычно пренебрегают.

Полупроводники занимают промежуточное положение между проводниками и диэлектриками (для полупроводников $\rho \sim 10^{-6} - 10^8 \text{ Ом}\cdot\text{м}$). Типичными широко применяемыми полупроводниками являются германий Ge, кремний Si и теллур Te. К полупроводникам принадлежит подавляющее большинство веществ в природе.

В полупроводниках свободными зарядами (носителями тока) являются свободные электроны и так называемые «дырки проводимости»*.

* «Дырки проводимости» – это не частицы, а места – вакансии электронов, обладающие избыточным положительным зарядом. Но они перемещаются по телу подобно свободным заряженным частицам. На самом деле ток переносится, конечно, не дырками, а валентными электронами, последовательно перескакивающими от атома к атому в очередные образующиеся при таких перескоках дырки.

Условия, необходимые для существования тока:

- наличие *носителей тока* – заряженных частиц, способных перемещаться упорядоченно. В проводящей среде это – свободные заряженные частицы, образующие ток проводимости: электроны (в металлах), ионы (в электролитах), другие частицы. В диэлектрике – связанные заряженные частицы, образующие ток поляризации: электроны и атомные ядра нейтральных молекул (или их нейтральных частей) и неподвижные ионы твердых тел. Носитель тока конвекции – само заряженное тело;

- наличие *силы*, действующей на частицы в определенном направлении и вызывающей их движение. Эта сила создается (кроме особых случаев конвекционных токов) электрическим (в общем случае, электромагнитным) полем.

Электрический ток проводимости может быть получен только в веществе (или в вакууме), в котором имеются *свободные заряженные частицы*. Чтобы они пришли в упорядоченное движение, нужно создать в проводнике *электрическое (электромагнитное) поле*.

Действия тока:

- проводник, по которому течет ток проводимости, *нагревается*.
- электрический ток может изменять *химический состав* проводника (например, ток в электролитах). Наблюдается не во всех проводниках, а проводники, в которых оно имеет место, называются проводниками 2 рода. В отличие от них проводники, не испытывающие химических превращений при протекании в них тока, (например, металлы) называются проводниками 1 рода;

- ток оказывает *силовое (магнитное) воздействие* на другие токи и намагниченные тела. Магнитное действие тока является *основным*, так как проявляется у всех токов.

- **Направление тока.** За направление тока принимают направление движения положительных зарядов. Если ток образован движением отрицательных зарядов (например, свободных электронов в металлах), то направление тока считают противоположным фактическому направлению движения зарядов.

Силой или **величиной тока** I называется количество электричества, проходящее через поперечное сечение проводника или через некоторую поверхность S за единицу времени (рис.1.4.3):

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t}, \quad (1.4.1)$$

где Δq – заряд, прошедший через поверхность S за время Δt .

При бесконечно малом $\Delta t = dt$:

$$I = \frac{dq}{dt} \text{ – мгновенная величина тока.}$$

При большом промежутке времени Δt отношение (1) дает среднее значение силы тока за время Δt .

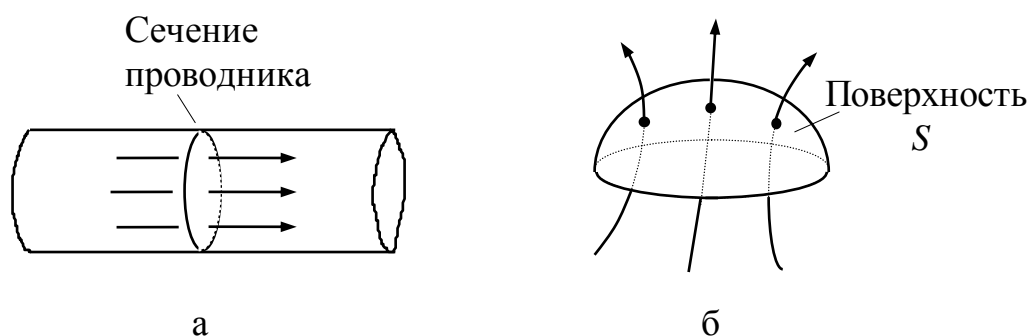


Рис.1.4.3. Электрический ток через поперечное сечение проводника (а) и поверхность S (б)

Перенос заряда $+\Delta q$ в одном направлении или заряда $-\Delta q$ в противоположном направлении с точки зрения нашего определения силы тока совершенно тождественны. Поэтому в формуле (1) под зарядом Δq мы разумеем сумму тех зарядов, которые были фактически перенесены положительно заряженными носителями заряда в направлении, условно принятом нами за направление тока, и отрицательными носителями в противоположном направлении.

Сила тока, подобно заряду, – величина скалярная. Она может быть как положительной, так и отрицательной. Если направление тока (т.е. направление движения положительных зарядов) совпадает с условно выбранным положительным направлением вдоль проводника (или сквозь поверхность S), то сила тока считается положительной: $I > 0$. В противном случае, если ток течет в противоположную сторону, против выбранной оси, он считается отрицательным: $I < 0$.

Единица силы тока. В Международной системе единиц *силу тока выражают в амперах (А)*. Эту единицу устанавливают на основе магнитного взаимодействия токов. Ампер – это сила неизменяющегося тока, который при прохождении по двум параллельным прямолинейным проводникам бесконечной длины и ничтожно малого поперечного сечения, расположенным в вакууме на расстоянии 1 м один от другого, создает между этими проводниками силу, равную $2 \cdot 10^{-7}$ Н (ньютона) на каждый метр длины.

Скорость упорядоченного движения электронов проводимости в металле

$$v = \frac{I}{e \cdot n \cdot S}, \quad (1.4.2)$$

где e – модуль заряда электрона.

Пусть, например, сила тока в медной проволоке $I = 1$ А, площадь поперечного сечения проволоки $S = 10^{-6}$ м². Модуль заряда электрона $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл. Число электронов в 1 м³ меди равно числу атомов в этом объеме, так как один из валентных электронов каждого атома меди коллективизирован и является свободным. Это число есть $n = \frac{m}{M} N_A$, где m – масса 1 м³ меди, M – молярная масса меди, N_A – число Авогадро. Получаем $n = 8,5 \cdot 10^{28}$ м⁻³. Следовательно, скорость упорядоченного движения электронов

$$v = \frac{1}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 8,5 \cdot 10^{28} \cdot 10^{-6}} \cdot \frac{\text{М}}{\text{с}} = 7,4 \cdot 10^{-5} \frac{\text{М}}{\text{с}} = 0,074 \frac{\text{мм}}{\text{с}}. \quad (1.4.3)$$

Как видите, эта скорость очень мала. Она ничтожно мала по сравнению со средней скоростью теплового движения электронов, которая в металлах при нормальной температуре доходит до 10^3 км/с (тысяча км/с!).

Скорость упорядоченного перемещения электронов (или иных свободных носителей тока) называется скоростью дрейфа, поскольку электроны совершают также хаотическое, тепловое движение; и при этом медленно, упорядоченно перемещаются (дрейфуют) под действие электрического поля со средней скоростью v (несоизмеримо меньшей скорости их теплового движения).

Постоянный и переменный ток. Ток, величина и направление которого не меняются с течением времени, называют постоянным (или стационарным) током. Для постоянного тока (рис.1.4.6):

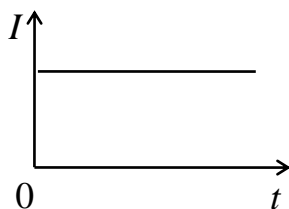
$$I = \frac{q}{t} = \text{const},$$

где q – заряд, прошедший через сечение проводника или поверхность S за время t .

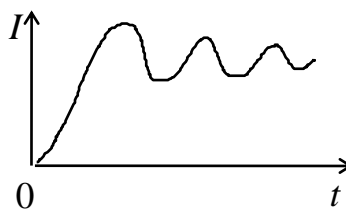
Если величина и/или направление тока изменяется с течением времени, то ток называется переменным. Для переменного тока (рис.1.4.4):

$$I = \frac{dq}{dt} = f(t),$$

где dq – заряд, прошедший через сечение проводника или поверхность S за малый промежуток времени dt , включающий в себя момент t .



Постоянный ток



Переменный ток

Рис.1.4.4. Постоянный и переменный ток

Установившийся и не установившийся ток. Если величина тока одинакова во всех поперечных сечениях проводника, в котором он течет, то такой ток называется установившимся. В этом случае электрические заряды проходят через проводник, не накапливаясь, через любое сечение проводника в одни и те же промежутки времени проходит одинаковое количество электрических зарядов. Опыт показывает, что для установления тока достаточно очень короткого промежутка времени. Поэтому постоянный ток всегда является установившимся (рис.1.4.5). Переменный ток тоже является практически установившимся, если он изменяется сравнительно медленно (см. рис.1.4.6 далее). Медленно изменяющийся переменный ток называют квазипостоянным («почти постоянным») или медленно переменным или квазистационарным.

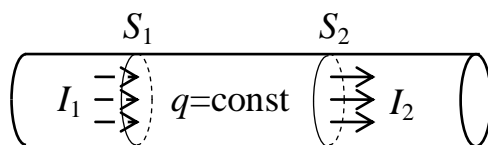


Рис.1.4.5. Сила постоянного тока одинакова по сечениям проводника, заряды в проводнике нигде не накапливаются: $I_1=I_2$ для любых двух сечений проводника S_1 и S_2 . Заряд q между сечениями остается постоянным.

Если ток меняет с течением времени свою величину или даже свое направление быстро, то может наблюдаться и не установившийся ток, т.е. в разных сечениях провода в один и тот же момент может наблюдаться ток разной величины. Чем длиннее провод, тем легче, при переменном токе, может создаться такое положение. Подобный, быстро изменяющийся, а, значит, не установившийся ток называют также быстро переменным или нестационарным.

Мы всегда будем иметь дело с установившимся током, так что для определения величины тока мы можем измерить его в любом месте проводника.

Квазистационарный электрический ток. Как мы уже говорили, опыт показывает, что переменный ток является установившимся, т.е. одинаковым во всех сечениях неразветвленного проводника, если он изменяется сравнительно медленно, или, как мы говорили, является квазистационарным.

Условие квазистационарности тока. Для того чтобы ток был квазистационарным (а значит, установившимся), все изменения во времени должны происходить настолько медленно, чтобы распространение электромагнитных возмущений можно было считать мгновенным. Условие *квазистационарности* (и *установления*) тока будет выполнено, если

$$T \gg \tau = \frac{l}{c}, \quad (1.4.3)$$

где T – характерное время всех изменений, например период изменений при периодических токах; l – длина электрической цепи; c – скорость света в вакууме, равная $c \approx 300\,000$ км/с; $\tau = l/c$ – время прохождения длины l .

Квазистационарный переменный ток имеет практически одинаковую силу вдоль провода цепи: $I_1 = I_2$ (как и ток стационарный) (рис.1.4.6).

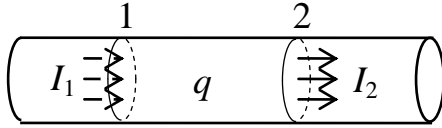


Рис.1.4.6. Квазистационарный ток практически одинаковый в любых двух сечениях проводника: $I_1 = I_2$.

Практически те переменные токи, с которыми имеет дело техника сильных токов (десятки, сотни и тысячи периодов в секунду), с достаточной степенью точности удовлетворяют условиям квазистационарности; к быстрым же электрическим колебаниям, применяющимся в радиотехнике, теория квазистационарных токов оказывается, вообще говоря, неприменимой или применимой лишь с известными ограничениями.

1.5. Работа электромагнитных сил.

Потенциальные и непотенциальные силы

Работа электромагнитной силы. На любой заряд со стороны поля других зарядов действует электромагнитная сила. Спрашивается, какую работу произведет эта сила при переносе нашего заряда из одной точки в другую. Заметим, что магнитная сила работу не производит, так как она перпендикулярна скорости заряда. Работу производит электрическая сила. Поэтому *работа полной электромагнитной силы $\mathbf{F} = \mathbf{F}_э + \mathbf{F}_м$ всегда численно равна работе ее электрической составляющей $\mathbf{F}_э$.*

Работа постоянной электрической силы (однородного электрического поля) при переносе заряда от точки 1 до точки 2 по прямолинейному пути вдоль линий поля (рис.1.5.1, а) определяется по известной из механики формуле и равна произведению модуля силы $F = |\mathbf{F}|$ на длину пути l :

$$A_{1-2} = Fl = qEl, \quad (1.5.1)$$

где q – величина заряда; $E = |\mathbf{E}|$ – модуль электрической напряженности \mathbf{E} поля.

Если заряд переносится под углом к полю (рис.1.5.1, б), то работа равна скалярному произведению силы на перемещение:

$$A_{1-2} = \mathbf{F}\mathbf{l} = q\mathbf{E}\mathbf{l} = qEl\cos\alpha. \quad (1.5.2)$$

Здесь $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$ – постоянная электрическая сила на заряд q на пути его переноса; \mathbf{E} – постоянная напряженность электрического поля на пути; α – угол между

векторами напряженности \mathbf{E} и перемещения \mathbf{l} ; $l = |\mathbf{l}|$ – длина пути (перемещения).

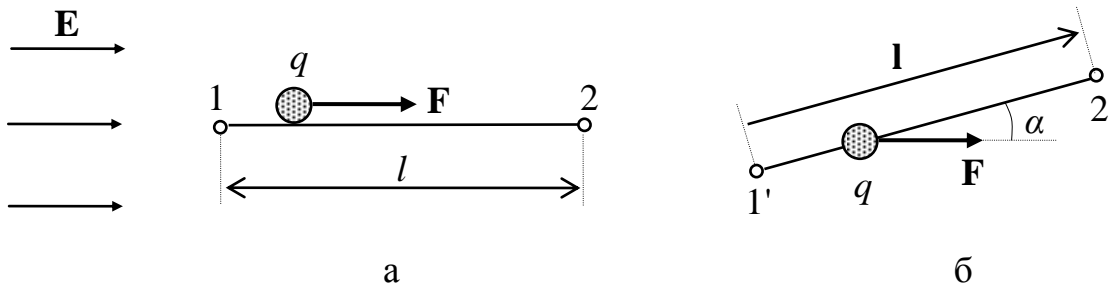


Рис.1.5.1. Работа постоянной электрической силы \mathbf{F} на прямолинейном пути

Общий случай. Работа изменяющейся электрической силы (неоднородного электрического поля) на пути 1-2 произвольной формы (рис.1.5.2) может быть найдена как сумма элементарных работ на малых отрезках пути:

$$A_{1-2} = \mathbf{F}_1 \cdot \Delta \mathbf{l}_1 + \mathbf{F}_2 \cdot \Delta \mathbf{l}_2 + \dots + \mathbf{F}_n \cdot \Delta \mathbf{l}_n = q \cdot (\mathbf{E}_1 \cdot \Delta \mathbf{l}_1 + \mathbf{E}_2 \cdot \Delta \mathbf{l}_2 + \dots + \mathbf{E}_n \cdot \Delta \mathbf{l}_n). \quad (1.5.3)$$

Здесь $\mathbf{F}_i \cdot \Delta \mathbf{l}_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) – элементарная работа электрической силы \mathbf{F} на i -м малом отрезке пути – перемещении $\Delta \mathbf{l}_i$; $\mathbf{F}_i = q\mathbf{E}_i$ – значение электрической силы на этом отрезке, являющееся практически одинаковым во всех точках отрезка ввиду его малости; q – переносимый заряд; \mathbf{E}_i – практически одинаковое значение напряженности поля \mathbf{E} на i -м отрезке.

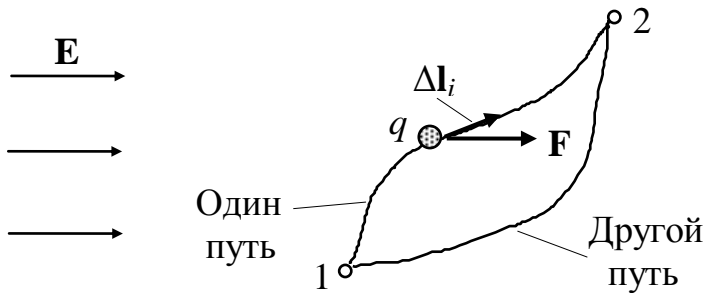


Рис.1.5.2. Работа электрической силы \mathbf{F} на пути произвольной формы

Устремляя длину элементарных отрезков в (3) к нулю, приходим к интегралу, дающему точное выражение для работы электрического поля:

$$A_{1-2} = \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int_1^2 \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot dl = q \cdot \int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}, \quad (1.5.4)$$

где $\boldsymbol{\tau}$ – единичная тангенциаль на контуре 1-2; $d\mathbf{l} = \boldsymbol{\tau} \cdot dl$ – вектор элементарного перемещения; dl – длина элементарного перемещения; а интегрирование ведется по заданному пути от точки 1 до точки 2, при этом сам путь должен быть неподвижным.

Если проволока движется, то работа поля вдоль проволоки 1-2 подчиняется не (4), а общему выражению:

$$A_{1-2} = \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int_1^2 (\mathbf{F}_э + \mathbf{F}_м) \cdot d\mathbf{l} = q \cdot \int_1^2 (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = q \cdot \int_1^2 (\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}, \quad (1.5.5)$$

где в данном случае $\mathbf{F} = \mathbf{F}_э + \mathbf{F}_м$ – это полная электромагнитная сила, равная векторной сумме электрической ($\mathbf{F}_э$) и магнитной ($\mathbf{F}_м$) сил; \mathbf{E} – вектор электрической напряженности; \mathbf{B} – вектор магнитной индукции; \mathbf{v} – скорость заряда; \mathbf{u} – скорость элемента проволоки $d\mathbf{l}$.

Два вида электромагнитных сил: потенциальные и непотенциальные.

Потенциальными (консервативными) электрическими силами называются такие электрические силы, работа которых при переносе заряда не зависит от формы пути, по которому переносится заряд, а только от начальной и конечной точек пути. При замкнутой траектории работа потенциальной силы равна нулю.* Соответственно, электрические поля, силы которых потенциальны, называются потенциальными электрическими полями.

* Это свойство является выражением закона сохранения (консервации) полной механической энергии (см. отдел Механика). Поэтому силовые поля, которые обладают указанным свойством, называют также консервативными.

Потенциальными электрическими полями являются поля, создаваемые неподвижными электрическими зарядами, т.е. электростатические поля; вызываемые ими силы – электростатические (кулоновские) силы консервативны (потенциальны) (рис.1.5.3). Потенциальные, кулоновские поля создаются также зарядами при стационарных и (с высокой точностью) квазистационарных токах. (Все эти поля и силы называются кулоновскими, потому что описываются законом Кулона.)

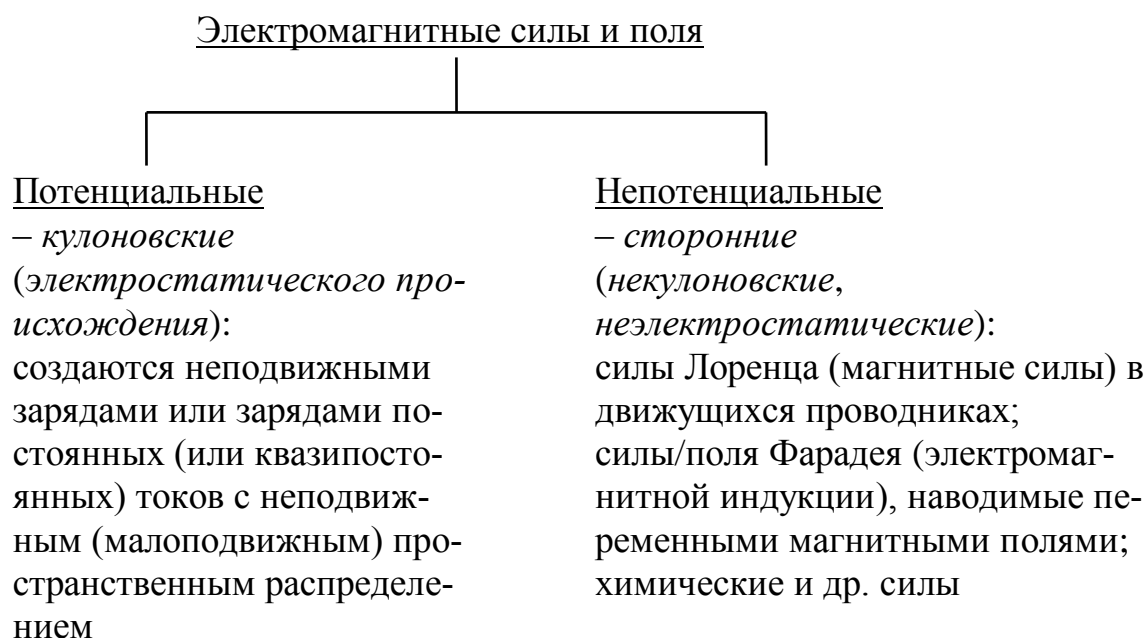


Рис.1.5.3. Потенциальные и непотенциальные силы и поля

В отличие от кулоновских сил все другие электрические (электромагнитные) силы являются непотенциальными (неконсервативными). Работа таких сил зависит не только от граничных точек пути, но и от его формы. При замкнутой траектории работа непотенциальной силы отлична от нуля.

При решении вопроса о потенциальном или не потенциальном характере сил в нестационарных полях $\mathbf{E} = \mathbf{E}(t)$ и $\mathbf{B} = \mathbf{B}(t)$ или в проводниках, движущихся в электромагнитном поле, время t в формулах (4), (5) надо считать фиксированным параметром; или, что эквивалентно, условно рассматривать одно-временное перемещение заряда q по всем элементарным отрезкам $d\mathbf{l}$ контура 1-2 (так называемое «мгновенное» перемещение). С этой целью интегралы (4), (5) необходимо вычислять для данного момента времени, т.е. для того распределения электрического и магнитного полей \mathbf{E} и \mathbf{B} , а также скоростей \mathbf{v} зарядов в контуре (нити проводника) 1-2, которое имеет место в этот момент. Таким образом, *потенциальность или непотенциальность сил понимается по отношению к данному моменту времени*. Иное толкование интегралов (4), (5) приводит к неоднозначной трактовке поля сил, так как их работа (вычисляемая по (4), (5)) будет зависеть уже не только от свойств поля в рассматриваемый момент времени, но и от его поведения в следующие моменты, когда это поле может измениться.

Кулоновские силы. Мы сказали, что потенциальные электромагнитные силы – это силы кулоновские, электростатические. Они возбуждаются полями электростатического типа, создаваемыми неподвижными зарядами или движущимися зарядами постоянных (или квазипостоянных) токов с неподвижным (малоподвижным) пространственным распределением. *В электростатическом поле работа сил поля при перемещении заряда (т.е. криволинейный интеграл (4)) не зависит от формы пути, а только от граничных точек пути. Электростатическое, кулоновское поле является потенциальным.* (Доказательство см. ниже.)

Если перемещаемый заряд единичный, то работа выражается интегралом $\int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$. В электростатическом поле он, как и интеграл (4), не зависит от формы пути, соединяющего точки 1 и 2. Этот интеграл равен электрическому напряжению вдоль пути 1-2: $U_{1-2} = \int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$. (Понятие электрического напряжения см. в п.1.6.) Поэтому свойством независимости от формы пути обладает и электрическое напряжение электростатического поля.

Если заряд переносится по замкнутому пути 1-3-2-4-1, то на участке 2-4-1 работа изменит знак: $A_{2-4-1} = -A_{1-4-2}$, а потому $A_{1-3-2} + A_{2-4-1} = 0$. Значит, при перемещении заряда по любому замкнутому пути работа электростатического поля равна нулю. В частности, для единичного заряда

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0. \quad (1.5.6)$$

Такой интеграл называется *циркуляцией вектора \mathbf{E}* по замкнутому контуру. Таким образом, *циркуляция \mathbf{E} электростатического поля равна нулю*. Это утверждение называют теоремой о циркуляции вектора \mathbf{E} электростатического поля.

Из уравнения (6) следует, что *силовые линии электростатического поля не могут быть замкнутыми*. В противном случае интеграл (6), взятый вдоль такой силовой линии, оказался бы отличным от нуля, что противоречило бы его равенству нулю по формуле (6).

Если заряды движутся, но так, что их скорости остаются намного меньшими скорости света в вакууме, то порождаемые ими электрические поля тоже остаются в каждый момент времени практически электростатическими, кулоновскими, а, значит, потенциальными, и для них уравнение (6) выполняется с хорошей точностью.

Доказательство потенциальности кулоновских сил (электростатического поля).

Потенциальность кулоновских сил связана с тем, что кулоновское поле точечного заряда (как и гравитационное поле материальной точки) является центральным, а центральное поле потенциально. Соответственно, ввиду принципа суперпозиции, потенциальным является и поле любого числа точечных зарядов как комбинация, наложение друг на друга центральных полей этих зарядов.

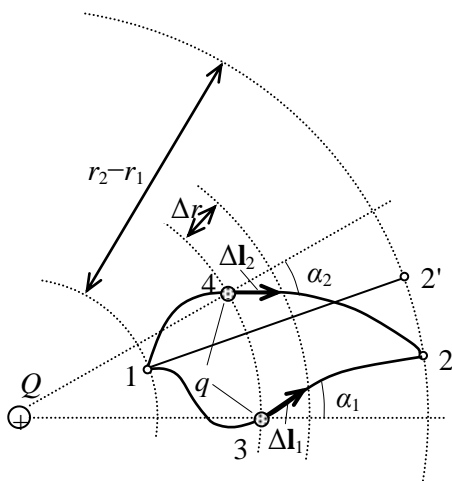


Рис.1.5.4. К доказательству независимости работы в электростатическом поле от формы пути.

Покажем, что поле, созданное неподвижными зарядами (электростатическое поле) является потенциальным. Т.е. покажем, что работа такого поля при переносе заряда от одной точки к другой не зависит от формы пути, а только от положения граничных точек пути. Докажем это сначала для поля, созданного точечным зарядом. Перенесём в поле точечного заряда Q пробный заряд q от 1 к 2 по двум разным путям произвольной формы 1-3-2 и 1-4-2 (рис.1.5.4) и подсчитаем совершаемые при этом работы. Для подсчёта работы проведём мысленно ряд сфер с центром в заряде Q , которые разобьют оба

пути на малые отрезки, и рассмотрим пару таких отрезков Δl_1 и Δl_2 , лежащие между соседними сферами на разных путях. Если отрезки Δl_1 и Δl_2 достаточно малы, то можно считать, что сила \mathbf{F} , действующая на пробный заряд q , во всех точках каждого из отрезков постоянна. Так как оба отрезка находятся на равном расстоянии от заряда Q , то согласно закону Кулона эта сила \mathbf{F} имеет на обоих отрезках одинаковую величину и отличается только направлением, образуя разные углы α_1 и α_2 с направлением перемещения. Наконец, при достаточной малости Δl_1 и Δl_2 эти отрезки можно считать прямолинейными. Поэтому работа ΔA_1 , совершаемая электрической силой на пути Δl_1 , будет равна произведению силы на путь и на косинус угла между направлениями силы и перемещения, т.е.

$$\Delta A_1 = F \cdot \Delta l_1 \cdot \cos \alpha_1.$$

Точно так же работа ΔA_2 , совершаемая на пути Δl_2 , равна

$$\Delta A_2 = F \cdot \Delta l_2 \cdot \cos \alpha_2.$$

Но $\Delta l_1 \cdot \cos \alpha_1 = \Delta l_2 \cdot \cos \alpha_2 = \Delta r$, где Δr – расстояние между сферами, заключающими отрезки Δl_1 и Δl_2 . Поэтому мы находим, что

$$\Delta A_1 = \Delta A_2,$$

т.е. что работы на участках Δl_1 и Δl_2 равны. Такой же результат мы получим и для любой другой пары соответствующих отрезков, заключённых между другими сферами на наших путях. Поэтому и полные работы по обоим путям тоже будут равны (как суммы равных величин):

$$A_{1-3-2} = A_{1-4-2} = A_{1-2}.$$

Таким образом, в самом деле, *работа кулоновской силы не зависит от формы пути.*

В частности, можно выбрать самый простой путь для переноса заряда от точки 1 до точки 2: сначала по радиусу 1-2', а затем по сфере 2'-2. На участке сферы 2'-2 работа не производится. Поле по закону Кулона радиально, т.е. направлено поперёк движения. Поэтому работа A_{1-2} будет равна работе $A_{1-2'}$ поля вдоль радиуса 1-2', и, следовательно, зависит только от радиусов r_1 и r_2 до точек 1 и 2' соответственно.

Итак, *работа, выполняемая кулоновской силой, зависит только от концов пути, но не зависит от его формы.*

Это мы доказали для поля, создаваемого одним точечным зарядом. Электрическая сила нескольких зарядов равна сумме электрических сил отдельных зарядов: $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots + \mathbf{F}_n$, где \mathbf{F}_i – сила i -го заряда ($i = 1, 2, \dots, n$). Работа каждой из сил \mathbf{F}_i не зависит от формы пути, следовательно, этим же свойством обладает и работа суммарной силы.

Итак, мы доказали, что *в электростатическом поле работа при перемещении заряда не зависит от формы пути, а только от граничных точек пути. Электростатическое поле является потенциальным.*

При перемещении единичного заряда работа выражается криволинейным интегралом $\int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$. Поэтому он тоже не зависит от формы пути, соединяющего точки 1 и 2. Согласно определению, которое будет дано в п.1.6, этот интеграл определяет электрическое напряжение вдоль пути 1-2: $U_{1-2} = \int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$. Стало быть, *свойством независимости от формы пути обладает и электрическое напряжение электростатического поля.*

Если заряд переносится по замкнутому пути 1-3-2-4-1 (см. рис.1.5.4), то на участке 2-4-1 работа изменит знак: $A_{2-4-1} = -A_{1-4-2}$, а потому $A_{1-3-2} + A_{2-4-1} = 0$. Значит, при перемещении заряда по любому замкнутому пути работа электростатического поля равна нулю. Для единичного заряда работа равна криволинейному интегралу по замкнутому пути $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$. Такой интеграл называют *циркуляцией вектора E* по замкнутому контуру. Таким образом, для любого замкнутого контура выполняется уравнение (1.5.6)

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0. \quad (1.5.6)$$

Электрический потенциал. Потенциалом φ электростатического поля в точке M называется физическая величина, измеряемая *работой, совершаемой силами поля при перемещении единичного положительного точечного заряда между этой точкой поля и некоторой «отправной» точкой «0», принимаемой за нуль отсчета потенциала*, (рис.1.5.5):

$$\varphi \equiv \varphi_M = \int_M^0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}. \quad (1.5.7)$$

Поскольку электростатическое поле потенциальное, то эта работа не зависит от формы пути, а только от граничных точек пути. При фиксированном нуле отсчета величина φ есть функция только положения точки M в пространстве, занимаемом полем:

$$\varphi = f(M).$$

Поэтому потенциал φ есть функция только точки M .

Отправная точка «0» (нуль отсчета потенциала) выбирается произвольно, исходя из соображений удобства. Часто за «нулевую» точку берут бесконечно удаленную точку, где прекращается действие всех электрических сил и полей. В практических задачах за «нулевую» точку принимают также поверхность Земли или точку общей шины в электрической цепи.

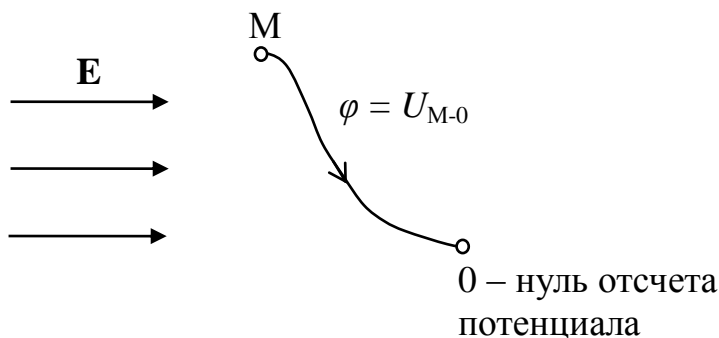


Рис.1.5.5. Электрический потенциал – это напряжение электростатического поля между точками M и «0»

Из (7) и определения электрического напряжения, которое будет дано в п.1.6, следует, что потенциал равен электростатическому напряжению между данной точкой поля M и «нулевой» точкой:

$$\varphi \equiv \varphi_M = U_{M-0}. \quad (1.5.8)$$

Поэтому потенциал, как и электрическое напряжение, измеряется в *вольтах* (В).

Потенциальная энергия заряженного тела в электростатическом поле.

Потенциальная энергия W_{Π} заряженного тела, находящегося в электростатическом поле, численно определяется как работа сил поля по переносу тела из данной точки поля M в некоторую отправную точку «0», которой приписывается нулевое значение потенциальной энергии (рис.1.5.6):

$$W_{\Pi} = A_{M-0}, \quad (1.5.9)$$

В качестве отправной точки можно взять, например, ту же точку «0», относительно которой отсчитывается потенциал; или любую другую точку.

Работа A_{M-0} не зависит от формы пути, а только от граничных точек пути (электростатическое поле потенциальное). Поэтому при фиксированном нуле отсчета величина W_{Π} есть функция только положения заряда в пространстве, занимаемом полем:

$$W_{\Pi} = g(M).$$

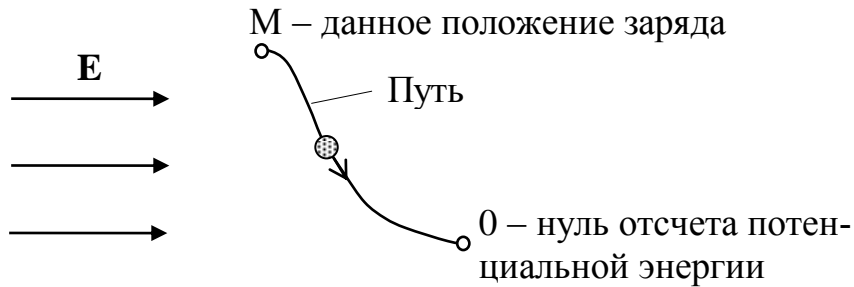


Рис.1.5.6. К определению потенциальной энергии заряда в электростатическом поле

Второе, эквивалентное, определение потенциала. Найдем потенциальную энергию $W_{п,q=1}$ единичного точечного заряда, находящегося в некоторой точке M электростатического поля. Для этого запишем выражение для работы A_{M-0} из (9) по формуле (4):

$$A_{M-0} = \int_M^0 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = q \int_M^0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l},$$

где $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$ – кулоновская сила на заряд q .

Значит, искомая энергия есть

$$W_{п,q=1} = \frac{W_{п}}{q} = \frac{A_{M-0}}{q} = \int_M^0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}.$$

Сравнивая с (7), находим:

$$W_{п,q=1} = \varphi, \text{ или } \varphi = \frac{W_{п}}{q}. \quad (1.5.10)$$

Таким образом, *потенциальная энергия единичного положительного точечного заряда в электростатическом поле равна потенциалу поля в месте нахождения заряда*. Это положение служит вторым, эквивалентным определением электрического потенциала.

Зная потенциал электростатического поля φ в данной точке, можно найти потенциальную энергию заряда q , помещенного в эту точку:

$$W_{п} = q\varphi = qU_{M-0} \quad (1.5.11)$$

Сторонние силы. В отличие от кулоновских сил все другие электромагнитные силы являются непотенциальными (неконсервативными). Работа таких сил зависит не только от граничных точек пути, но и от его формы. При замкнутой траектории работа непотенциальной силы отлична от нуля.

Непотенциальные электромагнитные силы принято называть сторонними силами, подчеркивая их стороннее, т.е. некулоновское, неэлектростатическое происхождение. Итак, сторонними силами называются все силы, действующие на электрически заряженные частицы, за исключением сил электростатического происхождения (т.е. кулоновских сил). Соответственно электромагнитные поля,

возбуждающие сторонние силы, называют сторонними электромагнитными полями. Таким образом, сторонними полями являются *все* электромагнитные поля *неэлектростатического* происхождения.

Природа сторонних сил и полей. К сторонним электромагнитным силам относятся:

- 1) *силы Лоренца (магнитные силы) в движущихся проводниках.*
- 2) *силы электромагнитной индукции («индукционные силы», силы Фарадея).*
- 3) *химические силы* в гальванических элементах и аккумуляторах (химических источниках тока). «Химические» силы имеют электрическое происхождение: это – электрические силы взаимодействия валентных электронов и атомов веществ;
- 4) *силы, вызывающие электризацию при тесном соприкосновении тел.*
- 5) *контактные силы*, возникающие в месте гальванического контакта двух металлов. Они действуют на границе соприкосновения двух разнородных металлов и обуславливают контактную разность потенциалов между ними.

Силы видов 4 и 5 имеют ту же природу, что и химические силы в гальванических элементах, и тоже действуют в таком же тонком приграничном слое тел.

6) *другие силы*, например *силы фотоэффекта*, т.е. силы, действующие на свободные электроны при освещении вещества светом (электромагнитным излучением, фотонами, которые выбивают электроны из вещества – обычно из металлов и полупроводников); и т.д.

Все значимые виды сторонних сил являются электромагнитными.

Напряженность поля сторонних сил. Для количественной характеристики сторонних сил вводят понятие поля сторонних сил (под которым понимается их распределение в пространстве) и его напряженность \mathbf{E}_c . Этот вектор численно равен *сторонней силе, действующей на единичный положительный точечный заряд*:

$$\mathbf{E}_c = \frac{\mathbf{F}_c}{q}, \quad (1.5.12)$$

где \mathbf{F}_c – сторонняя сила; q – величина точечного заряда, на который она действует.

Результирующая напряженность поля сторонних сил складывается из напряженностей полей отдельных видов сторонних сил:

$$\mathbf{E}_c = \mathbf{E}_L + \mathbf{E}_\Phi + \mathbf{E}'_c. \quad (1.5.13)$$

Здесь:

$\mathbf{E}_L = \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ – «напряженность» поля магнитных сил, т.е. магнитная сила, отнесенная к единице заряда. Она получается из закона Лоренца (1.2.4): $\mathbf{E}_L = \mathbf{F}_L / q = \mathbf{v} \times \mathbf{B}$;

\mathbf{E}_Φ – напряженность индукционного электрического поля, создаваемого переменным магнитным полем $\partial \mathbf{B} / \partial t$ по закону Фарадея об электро-

магнитной индукции. Она равняется индукционной силе (силе Фарадея) на единичный положительный заряд;

$\mathbf{E}'_c = \mathbf{E}_x + \mathbf{E}_{др}$ – результирующая напряженность полей других видов сторонних сил – химических, контактных и др. (из числа вышеперечисленных категорий 3-6). При учете данных видов сил мы отвлекаемся от детального рассмотрения возбуждающих их физических процессов, и учитываем эти процессы формально с помощью поля \mathbf{E}'_c .

Напряженность поля кулоновских сил определяется привычным образом как электрическая, в данном случае *кулоновская, сила, отнесенная к единичному положительному точечному заряду*:

$$\mathbf{E}_k = \frac{\mathbf{F}_k}{q}, \quad (1.5.14)$$

где \mathbf{F}_k – кулоновская сила; q – величина точечного заряда, на который она действует.

При наличии и кулоновского и стороннего силовых полей полная напряженность результирующего поля есть сумма напряженностей кулоновского (\mathbf{E}_k) и стороннего (\mathbf{E}_c) полей:

$$\mathbf{E}_{полн} = \mathbf{E}_k + \mathbf{E}_c. \quad (1.5.15)$$

Уравнения Максвелла I-IV, таблица 1.3.1, оперируют лишь с векторами $\mathbf{E} = \mathbf{E}_k + \mathbf{E}_\Phi$ и \mathbf{B} , характеризующими макроскопические электромагнитные поля. Химические и др. подобные микроскопические поля \mathbf{E}'_c вводятся в классическую электродинамику формально, по факту своего существования и уравнениями Максвелла не описываются.

Используя вектора \mathbf{E}_k и \mathbf{E}_c , общее выражение (5) для работы электромагнитных сил A_{1-2} на пути 1-2 можно переписать теперь так:

$$\begin{aligned} A_{1-2} &= q \cdot \int_1^2 (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = q \cdot \int_1^2 (\mathbf{E}_k + \mathbf{E}_\Phi + \mathbf{E}'_c + \mathbf{E}_L) \cdot d\mathbf{l} = \\ &= q \cdot \int_1^2 (\mathbf{E}_k + \mathbf{E}_c) \cdot d\mathbf{l} = q \cdot \int_1^2 \mathbf{E}_k \cdot d\mathbf{l} + q \cdot \int_1^2 \mathbf{E}_c \cdot d\mathbf{l}, \text{ или} \\ A_{1-2} &= A_{1-2_k} + A_{1-2_c}, \end{aligned} \quad (1.5.16)$$

где

$$A_{1-2_k} = q \cdot \int_1^2 \mathbf{E}_k \cdot d\mathbf{l}, \quad A_{1-2_c} = q \cdot \int_1^2 \mathbf{E}_c \cdot d\mathbf{l} \quad (1.5.17)$$

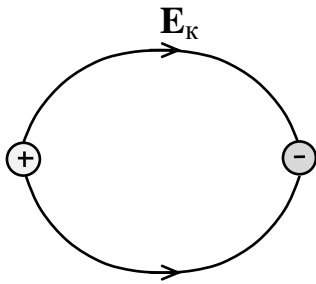
– работа кулоновских и сторонних сил соответственно

Итак, *работа электромагнитных сил равна сумме работ кулоновских и сторонних сил.*

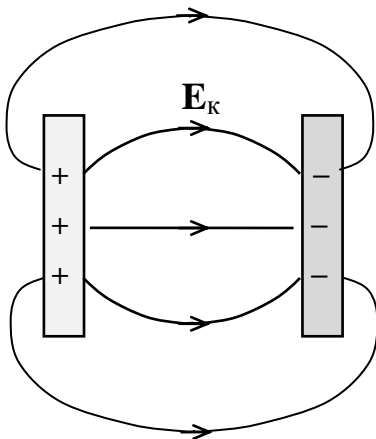
Вихревой характер сторонних сил. Сторонние силы *непотенциальные, вихревые*, кулоновские – *потенциальные, невихревые* (рис.1.5.8).

Кулоновские (потенциальные)

поля. В них силы, действующие на заряды (кулоновские силы), на одних участках замкнутой траектории направлены в одну ее сторону, а на других – в противоположную, так что суммарная работа этих сил на всей замкнутой траектории равна нулю.



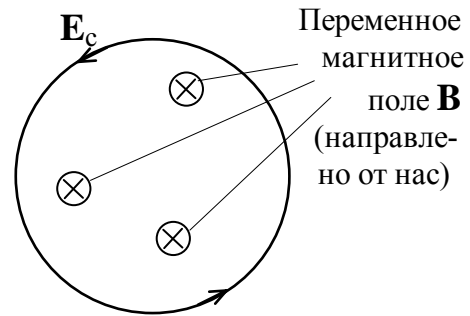
Кулоновское поле E_k
двух зарядов



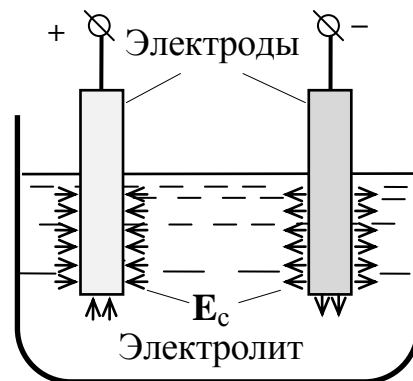
Кулоновское поле E_k двух
заряженных пластин

Сторонние (вихревые) поля.

Сторонние силы действуют одинаково на замкнутой траектории. Поэтому на такой траектории они производят работу, отличную от нуля.



Индукционное (стороннее) электрическое поле E_c , порожденное возрастающим магнитным полем B .



Стороннее электрическое поле сил E_c гальванического элемента

Рис.1.5.8. Сравнение конфигурации кулоновских (потенциальных) и сторонних (вихревых) силовых полей.

Здесь $E_k = F_k/q$ и $E_c = F_c/q$ – кулоновские и сторонние силы, действующие на единичный заряд (напряженности силовых полей).

Вывод. Ранее, в п.1.2, мы показали, что в зависимости от *действия на покоящийся или на движущийся заряд* электромагнитную силу принято разделять на сумму электрической и магнитной сил:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_э + \mathbf{F}_м, \quad (1.5.18)$$

где под электрической силой $\mathbf{F}_э$ понимается электромагнитная сила, действующая на *неподвижный* заряд, а под магнитной $\mathbf{F}_м$ – *приращение* электромагнитной силы, которое появляется при *движении* заряда.

В этом параграфе мы разделили электромагнитную силу на две составляющие ещё по одному признаку – *по признаку потенциальности*: на потенциальную – кулоновскую, и непотенциальную (вихревую) – стороннюю:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_к + \mathbf{F}_с. \quad (1.5.19)$$

Кулоновская сила $\mathbf{F}_к$ является частью электрической силы $\mathbf{F}_э$, а сторонняя $\mathbf{F}_с$ включает в себя все прочие силы: оставшуюся, непотенциальную, часть электрической силы (Фарадееву, химическую и др.), а также Лоренцову силу.

Кулоновская сила имеет *зарядовое* происхождение, т.е. возбуждается электромагнитными (электростатическими) полями, порождаемыми нескомпенсированными зарядами – неподвижными или имеющими неподвижное или малоподвижное пространственное распределение. Сторонняя сила имеет *не зарядовое* происхождение. Она возбуждается не полями избыточных зарядов, а другими полями: электромагнитными полями, у которых изменяется магнитное состояние (Фарадеева сила) или квантово-электродинамическими полями (химические и т.п. силы) или полями с магнитной составляющей при условии движения в них проводников (продольная к проводнику составляющая магнитной, Лоренцовой, силы). В принципе сторонняя сила может возбуждаться и полями, генерируемыми избыточными зарядами. Но в таком случае эти заряды должны двигаться со значительными – релятивистскими скоростями. Подобные явления не протекают в электрических системах и цепях квазистационарного тока, которые характерны для силовых электроэнергетических агрегатов.

1.6. Электрические напряжения

Электрическое напряжение. Электрическим напряжением (падением напряжения) U_{1-2} на некотором пути (например, на участке цепи) от точки 1 до точки 2 называется *распределённая электромагнитная сила, действующая на заряды продольно к рассматриваемому пути (например, проводу), и численно измеряемая интегралом от силы, отнесённой к единичному заряду, взятым по рассматриваемому пути*:

$$U_{1-2} = \int_1^2 \mathbf{E}_э \cdot d\mathbf{l} = \int_1^2 (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}, \quad (1.6.1)$$

где $\mathbf{E}_{\text{эм}} = \mathbf{F}/q = \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ – электромагнитная сила, действующая на единичный заряд, т.е. напряженность поля электромагнитных сил $\mathbf{E}_{\text{эм}}$.

Согласно (1) электрическое напряжение U_{1-2} на контуре 1-2 есть не что иное, как *суммарная тангенциальная электромагнитная сила, действующая на размещенную вдоль этого контура бесконечно тонкую трубку (прутик, нить) заряда с единичной линейной плотностью распределения.*

Действительно, рассмотрим трубку заряда с линейной плотностью распределения λ , находящуюся на линии 1-2. Тогда величина $(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \lambda d\mathbf{l}$ есть касательная к контуру электромагнитная сила, действующая на элемент заряда λdl , находящийся на отрезке контура $d\mathbf{l}$. В

этом случае интеграл $\int_1^2 (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \lambda d\mathbf{l}$ – это суммарная, распределенная, касательная к контуру в каждой его точке (продольная) электромагнитная сила, действующая на всю трубку. При $\lambda = 1$ получаем силу на трубку с единичной линейной плотностью заряда:

$$F_{1-2, q=1} = \int_1^2 (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} . \text{ Данное выражение совпадает с формулой для напряжения } U_{1-2}$$

(1). Поэтому напряжение – это продольная сила на указанную трубку. Если линейная плотность заряда не единичная: $\lambda \neq 1$, то продольная сила на трубку будет $F_{1-2} = \lambda U_{1-2}$ (при одинаковом λ), и напряжение оказывается равным $U_{1-2} = \frac{F_{1-2}}{\lambda}$.

Интеграл в правой части (1) выражает также *работу поля при переносе по пути 1-2 единичного положительного точечного заряда.* Поэтому *электрическое напряжение численно равно указанной работе.*

Таким образом, электрическое напряжение характеризует интегральный силовой напор, а также работоспособность поля на данном пути.

Если путь 1-2 прямолинейный и поле однородное (см. рис.1.5.1), то согласно формулам (1.5.1) или (1.5.2) электрическое напряжение на этом пути

$$U_{1-2} = El = \mathbf{E} \cdot \mathbf{l} , \quad (1.6.3)$$

где \mathbf{E} – постоянная напряженность электрического поля вдоль пути; \mathbf{l} – вектор перемещения вдоль прямолинейного пути; $E = |\mathbf{E}| \cos \alpha$ – касательная к пути составляющая напряженности \mathbf{E} (α – угол между векторами напряженности \mathbf{E} и перемещения \mathbf{l}); $l = |\mathbf{l}|$ – длина пути.

В общем случае для пути 1-2 произвольной формы и неоднородного поля (см. рис.1.5.2) из формулы (1.5.4) имеем:

если путь 1-2 неподвижен:

$$U_{1-2} = \int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} . \quad (1.6.4)$$

Если же контур 1-2 связан с движущимся телом (т.е. представляет собой материальную нить движущегося тела или движущуюся проволоку), то электрическое напряжение на этом контуре (нити тела или проволоке), согласно (1.5.5), равно:

$$U_{1-2} = \int_1^2 (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = \int_1^2 (\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}., \quad (1.6.5)$$

где \mathbf{u} – скорость элемента проволоки $d\mathbf{l}$.

В нестационарных полях $\mathbf{E} = \mathbf{E}(t)$ и $\mathbf{B} = \mathbf{B}(t)$ или при движении проводника в электромагнитном поле напряжение определяется формулами (3)-(5) в данный, фиксированный момент времени t , т.е. для того распределения электрического и магнитного полей \mathbf{E} и \mathbf{B} , а также скоростей зарядов \mathbf{v} (или скоростей \mathbf{u} самих отрезков $d\mathbf{l}$) вдоль контура (нити проводника) 1-2, которое имеет место в этот момент. Это соответствует воображаемому одновременному перемещению единичного заряда $q = 1$ по всем элементарным отрезкам $d\mathbf{l}$ контура 1-2 в интересующий нас момент времени (так называемому «мгновенному» перемещению). При указанном условии величина напряжения U_{1-2} будет определять действие поля на заряды на контуре 1-2 именно в этот момент t : $U_{1-2} = U_{1-2}(t)$. Следовательно, величина U_{1-2} будет задавать и силу тока в проводе 1-2 в этот момент (согласно закону Ома для установившегося тока).

Итак, электрическое напряжение, как физическое явление, – это сила, как физическая величина – интеграл (5). Коротко: электрическое напряжение представляет собой *тангенциальную силу, приходящуюся на единичный заряд, проинтегрированную по длине провода*.

Зная электрическое напряжение U_{1-2} на некотором пути 1-2, можно найти **работу поля при (мгновенном) переносе заряда q** по этому пути из формулы (1):

$$A_{1-2} = qU_{1-2}. \quad (1.6.7)$$

В обозначениях величин индекс «1-2» будем часто опускать и писать просто $A_{1-2} = A$, $U_{1-2} = U$.

Единицу электрического напряжения устанавливают с помощью формулы (3). В Международной системе единиц работу выражают в джоулях, а заряд – в кулонах. Поэтому *электрическое напряжение между двумя точками по некоторому пути равно единице, если при перемещении заряда в 1 Кл из одной точки в другую по этому пути электрическое поле совершает работу в 1 Дж*. Эту единицу называют **вольт** (В); $1 \text{ В} = 1 \text{ Дж} / 1 \text{ Кл}$.

Напряжение в 1 В на данном пути означает также, что если вдоль этого пути разместить трубку заряда с линейной плотностью распределения 1 кулон на 1 метр пути, то на эту трубку продольно к ней будет действовать сила в 1 ньютон.

Например, если по медному проводу длиной 1 м и поперечным сечением 1 мм^2 течет ток 1 А, то электрическое напряжение в проводе равно 0,017 В, и на все свободные заряды (электроны) в этом проводе действует суммарная продольная к проводу электрическая сила 228 Н, или 23 кГ. (Свободные электроны в таком куске медного провода несут общий заряд $1,36 \times 10^4$ Кл.)

Используя вольт, в СИ вводят и единицу напряженности электрического поля, о которой мы говорили в п.1.2. Ее устанавливают с помощью формулы $E = \frac{U}{l}$, следующей из (3). *Напряженность электрического поля равна единице, если электрическое напряжение в однородном поле по прямолинейному пути, параллельному линиям поля, длиной в 1 м, равно 1 В*. Наименование этой единицы – **вольт на метр (В/м)**. Разумеется, данная единица (В/м) равна единице

напряженности из п.1.2 (Н/Кл), а отличается только способом измерения и названием.

Два вида электрических напряжений: кулоновские (разности потенциалов) и «сторонние» (электродвижущие силы). Два вида электромагнитных сил – потенциальные и непотенциальные (п.1.5) создают два вида электрических напряжений: напряжения в поле потенциальных, кулоновских сил – «*потенциальные*» (*кулоновские, электростатические*) напряжения; и напряжения в поле непотенциальных, сторонних сил – «*непотенциальные*» (*некулоновские, «сторонние»*) напряжения, или так называемые «*электродвижущие силы*».

А именно, в любом участке цепи (или, вообще, на любом пути, проходящем как угодно в пространстве) на заряды действует некоторая электромагнитная сила \mathbf{F} (рис.1.6.1). Мы показали (п.1.5), что ее можно разложить на две части: силу электростатическую (кулоновскую) \mathbf{F}_k и силу неэлектростатическую (стороннюю) \mathbf{F}_c , включающую в себя все прочие силы:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_k + \mathbf{F}_c. \quad (1.6.8)$$

Эти силы выражаются через напряженности соответствующих силовых полей:

$$\mathbf{F}_k = q\mathbf{E}_k, \quad \mathbf{F}_c = q\mathbf{E}_c, \quad (1.6.9)$$

где \mathbf{E}_k – напряженность кулоновского поля; \mathbf{E}_c – напряженность поля сторонних сил, под которой мы понимаем *стороннюю силу, отнесенную к единице заряда*: $\mathbf{E}_c = \mathbf{F}_c / q$; q – величина заряда (формулы (1.5.12, 1.5.14)).

Общая сила \mathbf{F} вызывает движение свободных зарядов по участку электрической цепи – ток в участке. Совокупное действие этой силы, от которого зависит величина тока (например, по закону Ома; п.2.3), характеризуется электрическим напряжением. Его величина определяется формулой (1). С учетом (8) и (9) находим, что электрическое напряжение на участке цепи 1-2 равно

$$U = U_k + U_c, \quad (1.6.10)$$

где

$$U_k = \int_1^2 \mathbf{E}_k \cdot d\mathbf{l}$$

– электрическое напряжение кулоновского поля на участке 1-2 («кулоновское» напряжение);

$$U_c = \int_1^2 \mathbf{E}_c \cdot d\mathbf{l}$$

– электрическое напряжение поля сторонних сил на этом участке («стороннее» напряжение).

Таким образом, *электрическое напряжение U на участке цепи равно сумме напряжений кулоновского поля U_k и поля сторонних сил U_c на этом участке.*

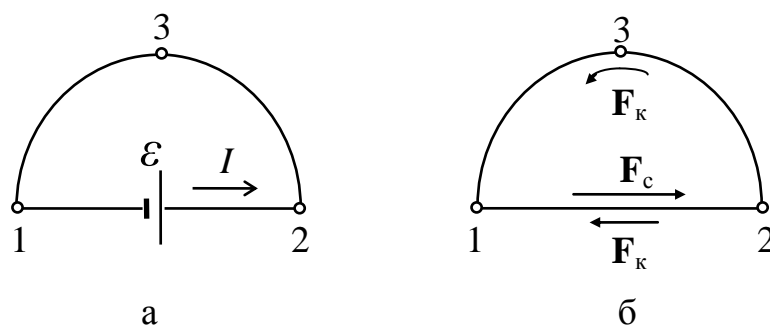


Рис.1.6.1. Замкнутый контур цепи (а) и действующие в нем поля сил (б)

Представленные формулы для U_k и U_c можно переписать при помощи условных выражений

$$U_k = E_{k_cp} \cdot l, \quad U_c = E_{c_cp} \cdot l,$$

где E_{k_cp} – средняя касательная к участку компонента напряженности кулоновского поля на участке 1-2; E_{c_cp} – средняя касательная компонента напряженности поля сторонних сил; l – длина участка. Здесь напряженности E_{k_cp} и E_{c_cp} берутся со знаком, согласованным с направлением прохода участка цепи (с направлением от точки 1 к точке 2): «+» – если касательная к участку компонента напряженности совпадает с направлением прохода (с направлением от 1 к 2), и «-» – если противоположна проходу.

Кулоновское напряжение равно разности потенциалов. Легко показать (опираясь на формулы (1.5.6)-(1.5.8)), что электрическое напряжение в поле кулоновских сил равно разности потенциалов этого поля между концами рассматриваемого участка цепи:

$$U_k = \varphi_1 - \varphi_2, \quad (1.6.11)$$

где φ_1 и φ_2 – потенциалы кулоновского поля в начальной (1) и конечной (2) точках участка.

«Стороннее» напряжение называется электродвижущей силой. В отличие от кулоновских сил поле сторонних сил не имеет потенциала, а его электрическое напряжение нельзя выразить через разность потенциалов по формуле (11).

Электрическое напряжение поля сторонних сил называют электродвижущей силой (эдс) и обозначают буквой \mathcal{E} :

$$U_c = \mathcal{E}. \quad (1.6.12)$$

Полное напряжение, или просто «напряжение» на участке цепи. Если на некотором участке цепи 1-2 действуют поля и кулоновских и сторонних сил, то, согласно (10), электрическое напряжение U на этом участке равно сумме напряжений этих двух полей, т.е. равно разности потенциалов на концах участка $\varphi_1 - \varphi_2$ плюс действующая на участке эдс \mathcal{E} :

$$U = (\varphi_1 - \varphi_2) + \mathcal{E}. \quad (1.6.13)$$

Напряжение на участке цепи 1-2 равно разности потенциалов в точках 1 и 2 *только* в том случае, если на этом участке отсутствуют эдс: $U = \varphi_1 - \varphi_2$ при $\mathcal{E} = 0$.

В общем случае электрическое напряжение на участке складывается из разности потенциалов на концах участка $\varphi_1 - \varphi_2$, Фарадеевой \mathcal{E}_Φ , Лоренцевой $\mathcal{E}_\text{Л}$, химической $\mathcal{E}_\text{х}$ и др. $\mathcal{E}_\text{др}$ эдс:

$$U = (\varphi_1 - \varphi_2) + \mathcal{E}_\Phi + \mathcal{E}_\text{Л} + \mathcal{E}_\text{х} + \mathcal{E}_\text{др},$$

или

$$U = (\varphi_1 - \varphi_2) + \mathcal{E}, \quad (1.6.14)$$

где $\mathcal{E} = \mathcal{E}_\Phi + \mathcal{E}_\text{Л} + \mathcal{E}_\text{х} + \mathcal{E}_\text{др}$ – полная эдс на участке цепи.

Потенциальное напряжение уже рассмотрено нами (в п.2.2, формула (2.2.8) и настоящем параграфе), Фарадеева и Лоренцева эдс обсуждаются в п.2.5, 2.6, а другие эдс ($\mathcal{E}_\text{х}$ и $\mathcal{E}_\text{др}$, например эдс аккумуляторов) не могут быть рассчитаны методами классической электродинамики и вводятся в расчеты как первичные параметры.

Электрические напряжения внутри и вне источника тока. Внутри источника тока на заряды действуют как сторонние $\mathbf{F}_\text{с}$, так и кулоновские $\mathbf{F}_\text{к}$ силы (рис.1.6.2), и эти силы распределены вдоль внутреннего проводящего генерирующего участка источника. Это означает, по нашей терминологии, что вдоль этого участка действуют два электрических напряжения: «стороннее» – электродвижущая сила и кулоновское – разность потенциалов. Вне источника действуют только одни из этих сил – кулоновские $\mathbf{F}_\text{к}$ и их напряжение – кулоновское напряжение (разность потенциалов).

Эдс, генерируемая внутри источника тока, называется электродвижущей силой источника. Она действует на заряды в направлении от отрицательного полюса источника (*a*) к положительному (*b*) (см. рис.1.6.2). Численно она равна

$$\mathcal{E} = \int_a^b \mathbf{E}_\text{с} \cdot d\mathbf{l}, \text{ или } \mathcal{E} = E_{\text{с_ср}} \cdot l_{\text{вн}}. \quad (1.6.15)$$

Здесь $\mathbf{E}_\text{с}$ – напряженность поля сторонних сил на участке *a-b* внутри источника; $E_{\text{с_ср}}$ – средняя тангенциальная напряженность поля сторонних сил на этом участке; $l_{\text{вн}}$ – длина внутреннего участка.

Эдс источника тока не зависит ни от состава внешней цепи и ее геометрической формы, ни (обычно) от протекающего в цепи тока. Она является *энергетической и силовой характеристикой самого источника*.

Вне источника тока – во внешней цепи сторонние силы источником не вырабатываются, никакой работы не производят – их напряжение вне источника равно нулю, оно существует только внутри источника.

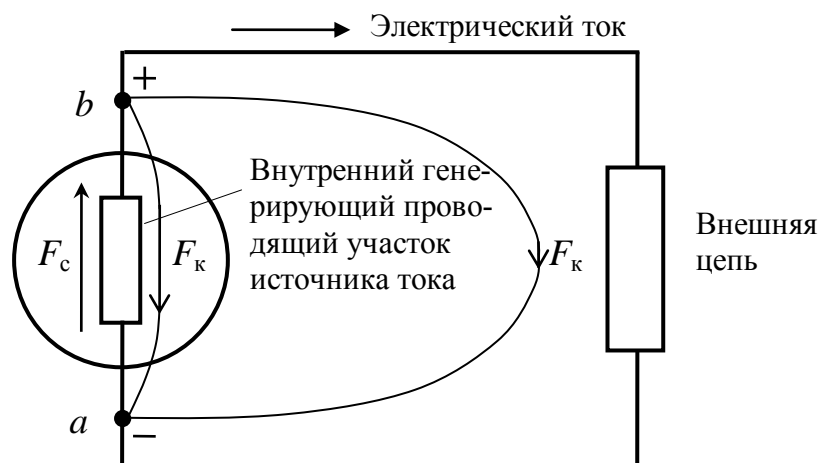


Рис.1.6.2. Сторонние (F_c) и кулоновские (F_k) силы на заряды в замкнутой электрической цепи (б).

Разность потенциалов между полюсами источника тока. ЭДС источника разделяет заряды внутри источника и создает на одном его полюсе (a) избыток отрицательных зарядов, а на другом (b) – избыток положительных зарядов. Разделенные заряды порождают собственное, кулоновское, поле. Его электрическое напряжение направлено от b к a , т.е. против генерируемой источником ЭДС, и выражается разностью потенциалов полюсов:

$$U_k = \int_b^a \mathbf{E}_k \cdot d\mathbf{l} = \varphi_b - \varphi_a, \text{ или } U_k = E_{k_cp} \cdot l_{вн}. \quad (1.6.16)$$

Здесь: \mathbf{E}_k – напряженность кулоновского поля на внутреннем участке цепи источника, соединяющем полюса b и a ; E_{k_cp} – средняя тангенциальная напряженность кулоновского поля на участке; φ_b – потенциал кулоновского поля на полюсе b , φ_a – потенциал на полюсе a .

Кулоновское напряжение (разность потенциалов $\varphi_b - \varphi_a$) действует как во внутренней цепи источника, так и во внешней цепи на рис.1.6.2. Внутри источника кулоновское напряжение направлено против ЭДС источника. Вне источника – во внешней цепи оно действует в одиночку и вызывает в ней электрический ток в направлении от полюса b к полюсу a . Внутри источника ток опять течет от a к b под действием ЭДС, преодолевающей разность потенциалов между полюсами.

Внутреннее напряжение источника тока. Внутри источника заряды испытывают действие двух сил – сторонней F_c и кулоновской F_k (см. рис.1.6.2). Сторонняя сила создает электрический ток. Кулоновская сила действует против сторонней и препятствует току. Но сторонняя сила несколько больше кулоновской и преодолевает ее сопротивление. Алгебраическая сумма этих сил (арифметическая разность) дает результирующую силу на заряд: $F_{рез} = F_c - F_k$. Дейст-

вие этой силы вдоль внутренней цепи источника можно характеризовать одним электрическим напряжением – внутренним напряжением источника. Оно выражается по формуле

$$U_{\text{вн}} = \int_a^b E_{\text{рез}} \cdot dl = \int_a^b (E_c - E_k) \cdot dl = U_c - U_k = \mathcal{E} - (\varphi_b - \varphi_a).$$

Таким образом, внутреннее напряжение источника, т.е. полное напряжение на его внутренней цепи равно алгебраической сумме (арифметической разности) эдс и разности потенциалов между полюсами источника:

$$U_{\text{вн}} = \mathcal{E} - (\varphi_b - \varphi_a). \quad (1.6.17)$$

Это соответствует общему выражению для напряжения (14).

В статике, когда полюса источника разомкнуты и ток отсутствует, внутри источника $F_c = F_k$ и $U_{\text{вн}} = 0$. Отсюда $\mathcal{E} = \varphi_b - \varphi_a$. Это состояние называется режимом «холостого хода» источника тока. Таким образом, *при отсутствии тока (при отключенной внешней цепи) разность потенциалов между полюсами источника равна его эдс*. Измеряя разность потенциалов $\varphi_b - \varphi_a$ между разомкнутыми полюсами, мы определяем эдс источника \mathcal{E} .

Последовательное и параллельное соединения элементов цепи. Соединение элементов называют последовательным, если все они включены в цепь поочередно друг за другом так, что конец первого элемента соединен с началом второго (и только с ним), конец второго – с началом третьего (и только с ним) и т.д. (рис.1.6.3). Начало первого элемента является при этом началом всего соединения, а конец последнего элемента – концом всего соединения.

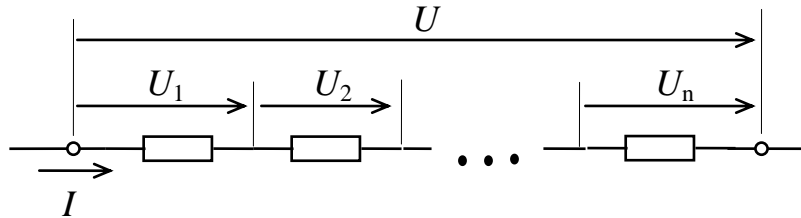


Рис.1.6.3. Последовательное соединение элементов цепи

Электрическое напряжение на участке цепи, составленном из *последовательно соединенных элементов*, (см. рис.1.6.3) равно сумме отдельных напряжений:

$$U = U_1 + U_2 + \dots + U_n, \quad (1.6.18)$$

где U – напряжение на всем участке; U_i – напряжения на отдельных элементах (частичные напряжения) ($i = 1, 2, \dots, n$).

Формула (18) выражает тот факт, что работа электромагнитного поля, а значит, согласно (1), и электрическое напряжение на всем пути равна сумме работ (напряжений) на его отдельных участках.

При *последовательном соединении* через все элементы течет один и тот же ток – ток, одинаковый для всех элементов:

$$I = I_1 = I_2 = \dots = I_n, \quad (1.6.19)$$

где I – ток через последовательное соединение; I_i – одинаковые токи в отдельных элементах.

Напомним, что такой ток мы называли в гл.1 установившимся. При нем заряды нигде не накапливаются на своем пути следования вдоль проводника, так что сила тока одна и та же в любом сечении проводника. Для того чтобы ток был установившимся, он должен изменяться сравнительно медленно. Если же ток быстропеременный, не установившийся, то (19), вообще говоря, не верно.

Соединение элементов называется параллельным, если начала всех элементов соединены в один узел (точка a на схеме рис.1.6.4), а концы – в другой (точка b на рис.1.6.4).

Электрическое напряжение на участке цепи, представляющем собой *параллельное соединение* элементов, не содержащих источников эдс, (см. рис.2.3.4) одинаково для всех элементов:

$$U = U_1 = U_2 = \dots = U_n, \quad (1.6.20)$$

где $U = U_i$ ($i=1, 2, \dots, n$) – одинаковые напряжения (разности потенциалов) на всех элементах.

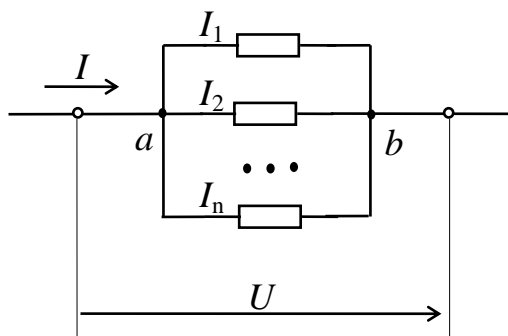


Рис.1.6.4. Параллельное соединение элементов цепи

Равенство (20) верно только для электростатических, кулоновских напряжений (разностей потенциалов). Такие напряжения не зависят от формы пути, а только от граничных точек пути. Поэтому (20) и верно: $U_1 = U_2 = \dots = U_n = \varphi_a - \varphi_b$, где φ_a и φ_b – потенциалы точек начала и конца параллельного соединения (см. рис.2.3.4).

Электрический ток через *параллельное соединение* элементов равен сумме токов через отдельные элементы:

$$I = I_1 + I_2 + \dots + I_n, \quad (1.6.21)$$

где I – результирующий ток через участок; I_i – токи через отдельные элементы (частичные токи).

(21) следует из закона сохранения электрического заряда при дополнительном условии, что токи квазистационарны, т.е. отсутствует ток смещения. В этом случае заряд, втекающий в узел цепи a (см. рис.2.3.4), равен заряду, вытекающему из этого узла за то же время, потому, что заряд не исчезает и не возникает в узле, а также не может накапливаться в нем ввиду квазистационарности тока. То же самое происходит и в узле b , в котором токи ветвей сходятся. Заметим, что (21) является выражением первого правила Кирхгофа.

2. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ

2.1. Понятие электрической цепи

Электрической цепью называют совокупность *источников, приемников и преобразователей* электрической (электромагнитной) энергии и соединяющих их *проводов*, образующих один или более замкнутых или условно замкнутых контуров – путей для электрического тока. Кроме этих устройств в электрическую цепь могут входить *электрические аппараты коммутации и защиты* (выключатели, переключатели, предохранители и т.д.), а также *измерительные и контрольные приборы*. В электрической цепи под действием электромагнитных сил (электрических напряжений) протекает электрический ток или токи. Отдельные части (объекты) цепи, выполняющие определенные функции: источники и приемники электромагнитной энергии, соединительные провода и т.д., называются элементами цепи.

Существенной особенностью электрической цепи, отличающей ее от электромагнитной системы вообще, является существование в ней определенных, достаточно узких путей для электрического тока. Эти пути называются контурами тока или контурами электрической цепи. Толщина этих путей (контуров) должна быть намного меньше их длины. Именно при наличии контуров для *всех* путей протекания тока электромагнитная система и называется электрической цепью. Во всех других случаях, когда *все* или *часть* путей тока не являются достаточно узкими, электромагнитную систему нельзя назвать электрической цепью (за исключением особых случаев, оговоренных ниже).

Для того чтобы создать узкие пути для тока вдоль них располагают проводники из материалов с высокой электрической проводимостью, окруженных хорошо изолирующей средой. Эти пути соединяют не только источники и потребители электромагнитной энергии и другие устройства (они создаются при помощи соединительных проводов, линий электропередач, электросетей), но и проходят внутри самих устройств (обмотки электрических машин и трансформаторов).

Вдоль этих путей могут быть помещены также какие-либо другие, хорошо проводящие, ограниченные по размерам устройства (например, электронные лампы, полупроводниковые приборы, электролитические ванны, химические источники тока и др.). Ток в подобных устройствах может течь по широким путям. Поэтому они составляют своего рода исключения из указанного выше правила состоять только из узких проводников. Однако, хотя пути для тока в этих приборах широкие, но обычно они относительно короткие и условия протекания по ним тока близки друг другу. В этом случае чаще всего их можно мысленно разбить на достаточно тонкие трубки тока, которые можно рассматривать как параллельно соединенные тонкие провода. Тогда разности потенциалов между концами этих проводов будут одинаковы для всех проводов. Если в этих проводах генерируются еще и электродвижущие силы \mathcal{E}_k (где $k=1, 2, \dots, n$, n –

число трубок), то они тоже одинаковы ввиду потенциального характера поля в области, где действуют сторонние силы. Применив к рассматриваемой системе проводов соотношение для параллельного соединения, мы снова придем к закону Ома. При этом ввиду одинаковости всех \mathcal{E}_k величина \mathcal{E}_k будет означать просто электродвижущую силу прибора.

Только при наличии контуров для всех путей тока удастся описать процессы в электрических цепях при помощи интегральных понятий: электрического напряжения, электрического заряда, электрического тока через поперечное сечение проводника, магнитного потока сквозь контур цепи, сопротивления, индуктивности, емкости.

Токи, протекающие по длинным узким проводникам – «контурам» цепи называют контурными или линейными.

На рисунках электрические цепи изображают при помощи электрических схем. Электрической схемой цепи, или схемой замещения цепи, называется графическое изображение электрической цепи, на котором с помощью условных знаков (обозначений) показывают элементы цепи и их соединения. При определенных условиях электрическая схема позволяет составить и уравнения цепи.

На рис.2.1.1 показана простейшая электрическая цепь и ее условное графическое обозначение (схема).

Интегральные характеристики, описывающие электромагнитные процессы в цепи, – электрические напряжения, токи и др., удовлетворяют уравнениям цепи, составленным в соответствии с законами протекания тока. Например, для цепи, показанной на рис.1, уравнение будет (при замкнутом ключе K):

$$\mathcal{E} = I(R + r),$$

где \mathcal{E} – эдс источника тока (аккумуляторной батареи); I – ток в цепи; R – сопротивление потребителя энергии (лампочки накаливания); r – внутреннее сопротивление источника.

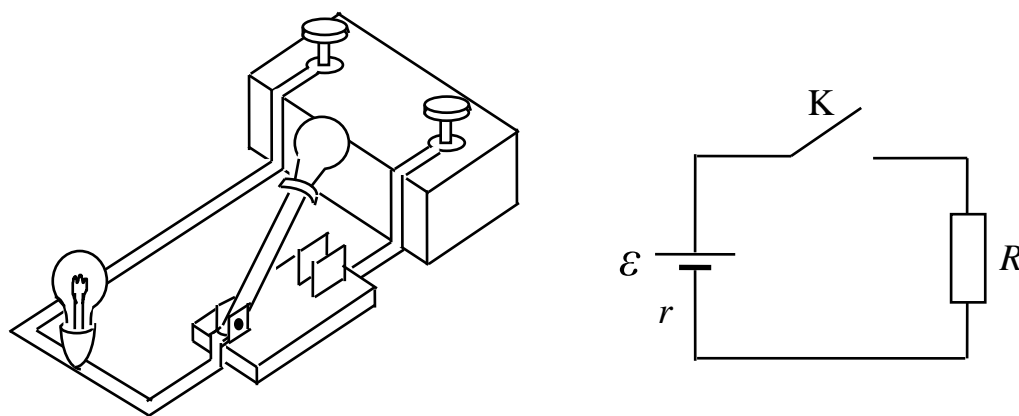


Рис.2.1.1. Простейшая электрическая цепь и ее схема замещения

Роль кулоновских и сторонних электрических сил в поддержании тока в цепи. Источники тока. Одно лишь электрическое поле заряженных частиц (кулоновское поле) не способно поддерживать постоянный электрический ток

в цепи. В этом можно убедиться на простом опыте. Соединим проводом два металлических шарика, несущих заряды противоположных знаков. Под влиянием электрического поля этих зарядов в проводнике возникает электрический ток (рис.2.1.2, а). Но этот ток будет очень кратковременный. Электроны быстро перетекут по проводу с отрицательно заряженного шарика на положительный, нейтрализуют на нем положительные ионы, потенциалы шариков выровняются, электрическое поле исчезнет, и ток прекратится.*

* Вместо шариков можно взять обыкновенный заряженный конденсатор. После замыкания его обкладок проводом конденсатор быстро разрядится и ток в проводе прекратится. Если вставить в цепь лампочку, то она вспыхнет на короткое время.

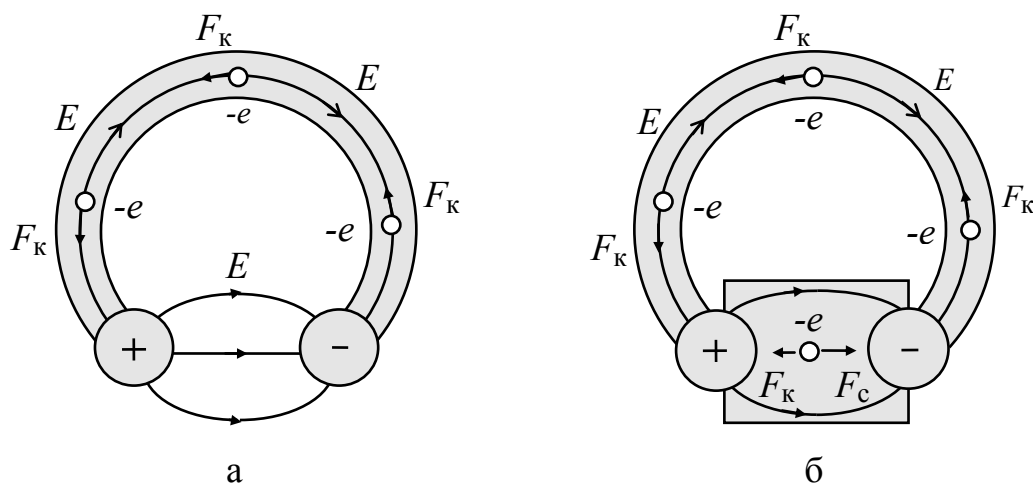


Рис.2.1.2. Электрические цепи без источника тока (а) и с источником тока (б). [1]

F_k – кулоновские силы; F_c – сторонние силы.

Для того чтобы ток был постоянным, надо снова переносить электроны с положительного шарика на отрицательный. Для этого в цепи должны действовать *силы неэлектростатического происхождения*. Мы назвали такие силы (в п.2.2) *сторонними*.

Сторонние силы создаются при помощи специальных устройств – источников тока; или могут возникать самопроизвольно в других местах цепи. Такое устройство изображено на рис.2.1.2, б в виде прямоугольной коробки. Сторонние силы действуют внутри него и перемещают свободные заряды по его внутреннему проводящему пути в направлении, противоположном действию кулоновских сил. В нашем примере (см. рис.2.1.2, б) они перемещают электроны от положительного шарика к отрицательному. В результате между полюсами устройства (шариками) поддерживается постоянная разность потенциалов, а в цепи течет постоянный ток. Источниками тока (их называют еще источниками эдс, источниками электромагнитной энергии) служат электрические генераторы, трансформаторы («вторичные» источники тока), химические источники тока (аккумуляторы и гальванические элементы), термоэлементы (тепловые источники тока), фотоэлементы и др.

Всякое устройство, в котором возникают сторонние силы (не относящиеся к силам собственной электромагнитной индукции), мы будем называть источником тока или источником ЭДС или источником электромагнитной энергии или источником электропитания.

Замечанием, указанным в скобках, мы хотим исключить из числа устройств, которые принято называть источниками тока, дроссель (катушку индуктивности) или любой другой индуктивный элемент. В дросселе сторонние (Фарадеевы) силы наводятся благодаря явлению собственной электромагнитной индукции. Это происходит при протекании по обмотке дросселя переменного электрического тока. Ток в обмотке создается перед этим самой цепью. Поэтому, прежде чем сгенерировать сторонние силы, способные создать ток в цепи и осуществить тем самым подачу в цепь электроэнергии, дроссель должен быть предварительно запитан током от самой же цепи. В процессе запитывания он отнимает у цепи энергию и ровно в таком количестве, которую он потом способен отдать в цепь. (Эта энергия концентрируется в магнитном поле, образуемом вокруг дросселя и являющемся носителем энергии.) Поэтому дроссель не считают источником тока. Мы относим к источникам электроэнергии лишь те устройства, которые способны поставлять электромагнитную энергию в потребляющую, нагрузочную цепь в больших количествах, чем черпать из неё (т.е. не так, как это делает дроссель). Для осуществления этой возможности *источник электроэнергии должен извлекать энергию (того или иного вида) из других, сторонних по отношению к внешней нагрузочной цепи тел или полей и, после преобразования её в электромагнитную форму, поставлять в цепь. Благодаря этому он имеет возможность сообщать цепи больше электромагнитной энергии, чем отбирать у неё.*

Итак, внутри источника заряды движутся под действием сторонних сил против кулоновских сил, а во всей остальной цепи их приводит в движение электростатическое поле (кулоновские силы). Кулоновские силы соединяют разноименные заряды по проводам внешней цепи, а сторонние – разделяют их внутри источника. Работа сторонних сил по разделению зарядов внутри источника совершается за счет внешних, «сторонних» источников энергии.

Источники постоянного тока вырабатывают постоянные сторонние силы (и, соответственно, постоянную ЭДС), т.е. такие, величина и направление которых не изменяются с течением времени. К подобным устройствам относятся химические источники тока, электрические генераторы постоянного тока и др. В источниках переменного тока величина и направление сторонних сил (и ЭДС) меняется с течением времени по некоторому (например, синусоидальному) закону. Соответственно, периодически меняется взаимное расположение положительного и отрицательного полюсов источника (и разность потенциалов между ними). К таким источникам относятся генераторы переменного тока и трансформаторы. При этом изменение сторонних сил происходит в них достаточно медленно, так что вызываемый ими ток является квазипостоянным (установившимся) (при не очень большой протяженности цепи).

Обозначение источников тока на схемах (рис.2.1.3).

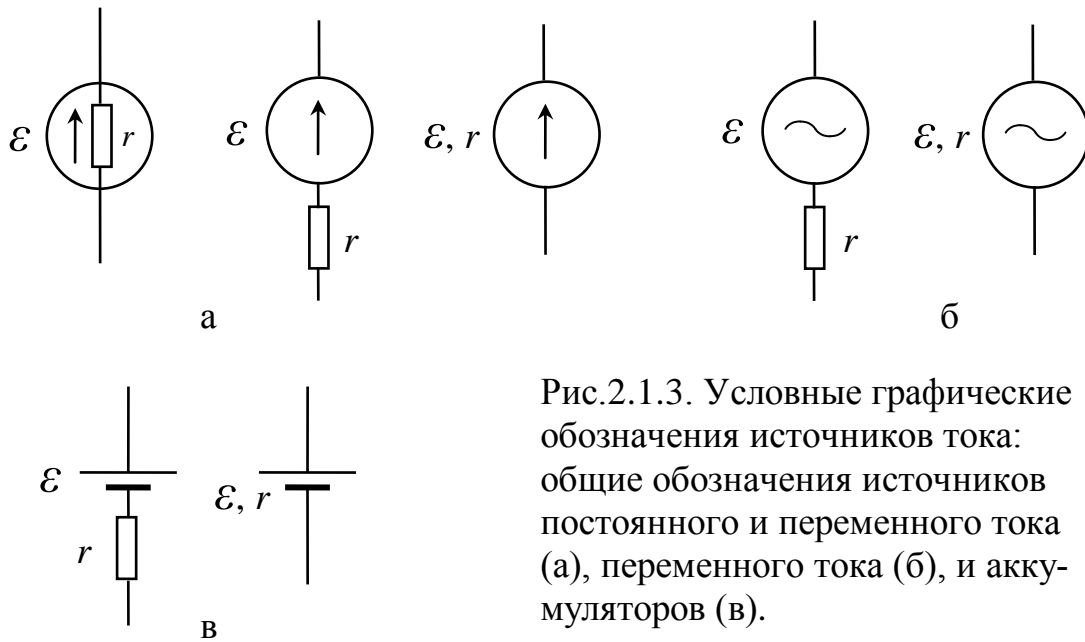


Рис.2.1.3. Условные графические обозначения источников тока: общие обозначения источников постоянного и переменного тока (а), переменного тока (б), и аккумуляторов (в).

2.2. Элементы электрических цепей

Классификация элементов электрических цепей.

Резистивные, индуктивные, ёмкостные и др. элементы.

Двух, трех, четырех и многополюсные элементы.

Активные (содержащие источники тока) и пассивные (не содержащие источников) элементы.

Инерционные, или статические (электрический ток в которых отсутствует в отсутствии источников тока) и безынерционные, или динамические (способные вырабатывать собственный электрический ток в отсутствии источников тока) элементы.

Линейные и нелинейные элементы и цепи.

Определение линейной системы.

Система называется линейной, если для нее выполняется принцип суперпозиции (наложения):

1°. Реакция системы на сумму воздействий равна сумме реакций на каждое воздействие в отдельности:

$$x_1(t) = F\{u_1(t)\} - \text{реакция на одно воздействие,}$$

$$x_2(t) = F\{u_2(t)\} - \text{реакция на другое воздействие,}$$

$$x(t) = F\{u_1(t) + u_2(t)\} = x_1(t) + x_2(t) - \text{реакция на сумму воздействий.}$$

2°. Реакция на кратное воздействие кратно реакции на исходное воздействие:

$$\text{если } x(t) = F\{u(t)\}, \text{ то } x_k(t) = F\{ku(t)\} = kF\{u(t)\} = kx(t).$$

В соответствии с этим определением элементы цепи также могут быть линейными и нелинейными. Элемент цепи называется линейным, если он подчи-

няется принципу суперпозиции по любой паре своих зажимов. А именно, для элемента должно выполняться два условия (рис.2.2.1)

1°. Пусть при некотором произвольном электрическом напряжении* (разности потенциалов) $u_1(t)$ на зажимах через них течет ток $i_1(t)$, а при другом произвольном напряжении $u_2(t)$ – ток $i_2(t)$. Тогда при суммарном напряжении $u(t) = u_1(t) + u_2(t)$ ток должен быть $i(t) = i_1(t) + i_2(t)$. Начальные условия для элемента предполагаются во всех трех случаях нулевыми. Например, конденсаторы, входящие в состав элемента, должны быть изначально разряжены, а дроссели – обесточены. В элементе не должны также действовать эдс первичных источников тока, возможно, содержащихся в нем, – аккумуляторов, электрических генераторов и т.п. (кроме трансформаторов, являющихся так называемыми вторичными источниками). Источники должны быть заменены эквивалентными по составу внутренних цепей пассивными элементами. Все это требуется для того, чтобы указанные устройства не создавали своих собственных токов в элементе, накладываемых на ток от напряжения на пробных зажимах.

2°. Если напряжение (разность потенциалов) на зажимах $u(t)$ увеличивается в произвольное число раз k , т.е. становится $k u(t)$, то и соответствующий ему ток $i(t)$ тоже увеличивается в k раз, т.е. становится $k i(t)$. Это свойство тоже должно выполняться при нулевых начальных условиях и эдс в элементе.

Коротко, *реакция элемента на сумму входных воздействий (электрических напряжений) равна сумме реакций на отдельные воздействия (напряжения); и при увеличении воздействия в k раз во столько же раз увеличивается и реакция*. (Заметим, что входным воздействием можно формально считать и ток (например, для конденсатора)).

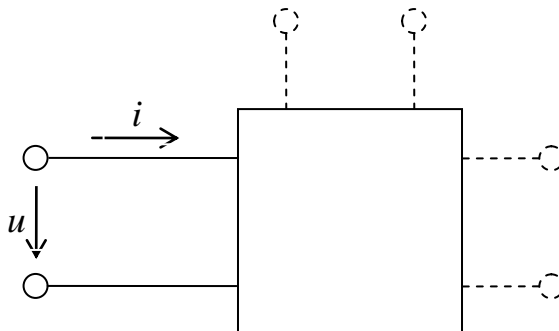


Рис.2.2.1. К выполнению принципа суперпозиции

Аналогично электрическая цепь называется линейной, если для нее выполняется принцип суперпозиции (условия 1° и 2°) по любой паре зажимов, как угодно взятых в двух точках цепи или в двух концах разрыва, сделанного в любой точке цепи. Цепь линейна тогда и только тогда, когда линейны все составляющие ее элементы.

Электрическая цепь, описываемая линейными уравнениями (в смысле выполнения для них принципа суперпозиции), является линейной. Для этого достаточно, чтобы уравнения отдельных элементов цепи были линейными, т.е. по отдельности подчинялись принципу суперпозиции. В частности:

для резистивных элементов должен выполняться закон Ома: $U = RI$;

для индуктивных элементов – закон Фарадея в линейной форме:

$$\mathcal{E}_L = -L \frac{di}{dt}, \text{ где } L \text{ – постоянная индуктивность элемента, не зависящая от тока } i;$$

для емкостных элементов – закон Гаусса в линейной форме, приводящий к уравнению $i = C \cdot \frac{du_C}{dt}$, где C – постоянная емкость элемента.

2.3. Закон Ома для участка цепи. Сопротивление

Вольт-амперная характеристика проводника. Для каждого проводника – твердого, жидкого и газообразного – существует определенная зависимость силы тока I от приложенной разности потенциалов на концах проводника:

$$I = f(U),$$

где $U = \varphi_1 - \varphi_2$ – потенциальное напряжение, равное разности потенциалов в начале (φ_1) и конце (φ_2) проводника.

Эту зависимость называют вольт-амперной характеристикой проводника. Ее находят экспериментально, измеряя силу тока в проводнике при различных значениях напряжения (рис.2.3.1). Различные виды ВАХ показаны на рис.2.3.2.

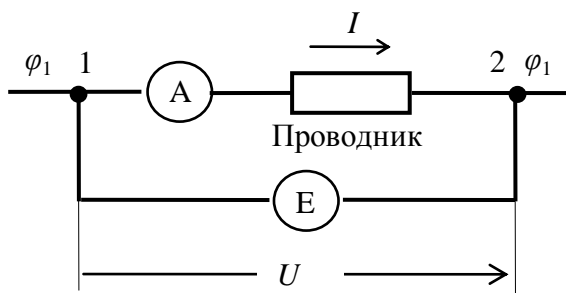


Рис.2.3.1. Однородный участок цепи – участок без эдс. А – амперметр; Е – электрометр, измеряющий разность потенциалов между концами проводника

Закон Ома.

Наиболее простой вид имеет вольт-амперная характеристика металлических проводников. Ее график представляет собой прямую линию, проходящую через начало координат (см. рис.3.7.2, а). Впервые ее установил немецкий учёный Георг Ом*, поэтому зависимость силы тока от напряжения в этом случае носит название закона Ома. Впоследствии оказалось, что этот закон верен для электролитов и многих других проводников.

* Георг Симон Ом (1787-1854) – немецкий физик.

Закон Ома для однородного участка цепи – участка, в котором нет источников тока и не действуют никакие эдс (см. рис.2.3.1). Согласно закону Ома на участке цепи, в котором не действуют сторонние силы, сила тока I в проводнике прямо пропорциональна напряжению (разности потенциалов) $U = \varphi_1 - \varphi_2$ на его концах:

$$I = GU \equiv G(\varphi_1 - \varphi_2). \quad (2.3.1)$$

Это соотношение и называется законом Ома.

Коэффициент пропорциональности G называется электрической проводимостью, а величина, обратная проводимости, – электрическим сопротивлением проводника. Если обозначить сопротивление проводника через R , то

$$G = 1/R,$$

и тогда закон Ома можно переписать в виде

$$U = RI \quad (2.3.2)$$

– приложенное к проводнику напряжение (разность потенциалов) равно произведению тока на сопротивление проводника.

Чем больше R , тем меньше ток в проводнике (при том же напряжении).

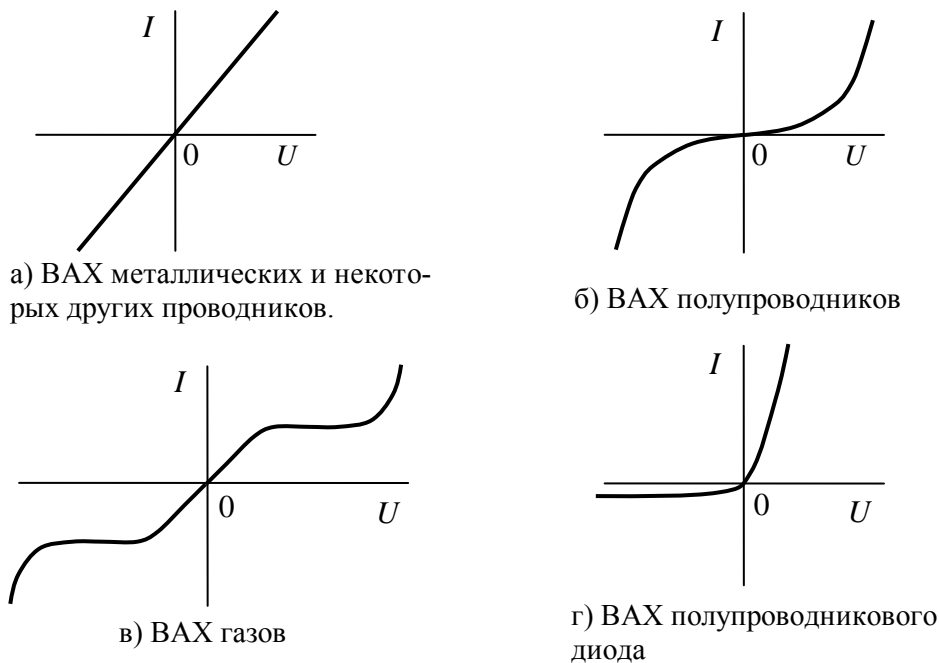


Рис.2.3.2. Вольт-амперные характеристики различных проводников (в условных масштабах). а – линейная ВАХ; б, в, г – нелинейные.

Вычисление сопротивления R через удельное сопротивление материала проводника. В простейшем случае однородного цилиндрического проводника длиной l с постоянной площадью поперечного сечения S (рис.2.3.2) равно:

$$R = \rho \frac{l}{S}, \quad (2.3.3)$$

где ρ – коэффициент пропорциональности, зависящий от рода вещества и его состояния (от температуры в первую очередь). Величина ρ называется удель-

ным сопротивлением материала. Она численно равна сопротивлению цилиндрического куска данного вещества, имеющего длину, равную единице, и площадь поперечного сечения, равную единице (при условии, что ток направлен перпендикулярно к поперечному сечению).

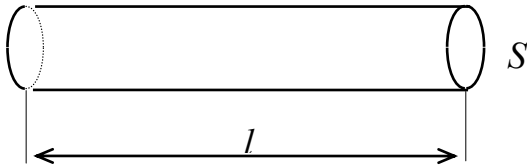


Рис.2.3.2. Сопротивление проводника прямо пропорционально его длине l и обратно пропорционально его сечению S

Единицу сопротивления проводника устанавливают на основе закона Ома и называют ее ом. Проводник имеет сопротивление 1 Ом, если при электрическом напряжении 1 В сила тока в нем 1 А.

Единицей удельного сопротивления является 1 Ом·м.

Закон Ома для неоднородного участка цепи – участка, содержащего не только проводники, но и источники тока, или другие источники эдс (рис.2.3.3) (обобщенный закон Ома):

общее электрическое напряжение на участке цепи (равное разности потенциалов на его концах плюс эдс на участке) равно произведению тока на полное сопротивление участка:

$$(\varphi_1 - \varphi_2) + \mathcal{E} = (r + r_{\text{вн}})I, \text{ или } U = RI, \quad (2.3.4)$$

где $\varphi_1 - \varphi_2$ – разность потенциалов на концах участка; \mathcal{E} – действующая в участке эдс, например, эдс источника; $U = (\varphi_1 - \varphi_2) + \mathcal{E}$ – общее напряжение на участке; I – сила тока; r – сопротивление проводников; $r_{\text{вн}}$ – внутреннее сопротивление источника; $R = r + r_{\text{вн}}$ – полное сопротивление участка.

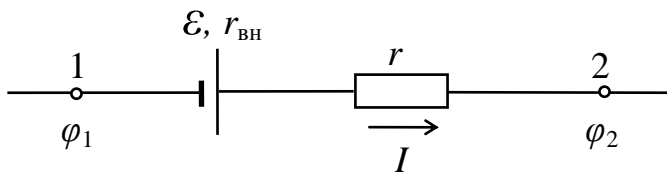


Рис.2.3.3. Неоднородный участок цепи – участок с эдс

Закон Ома для плотности тока («закон Ома в дифференциальной форме»): *плотность тока проводимости в данной точке внутри проводника пропорциональна суммарной напряженности \mathbf{E} кулоновского поля и поля сторонних сил и совпадает с ней по направлению в этой точке:*

$$\mathbf{j} = \gamma \mathbf{E} = \frac{1}{\rho} \mathbf{E}. \quad (2.3.5)$$

Здесь $\mathbf{E} = \mathbf{E}_\text{к} + \mathbf{E}_\text{с}$, $\mathbf{E}_\text{к}$ – электрическая напряженность кулоновского поля, $\mathbf{E}_\text{с}$ – напряженность поля сторонних сил.

Коэффициент пропорциональности $\gamma = 1/\rho$ в этой формуле – это *удельная электрическая проводимость среды (удельная электропроводность)*, а вели-

чина ρ – удельное электрическое сопротивление. Эта формула справедлива и для быстропеременных полей. В случае постоянных и квазипостоянных полей из нее легко выводится формула (2) или (4) путем простых математических преобразований.

Соотношение (5) выражает закон Ома в дифференциальной форме. Оно не содержит дифференциалов (производных), а свое название получило потому, что в нем устанавливается связь между величинами, относящимися к одной и той же точке проводника. Иначе говоря, соотношение (5) выражает *локальный закон Ома*.

Закон Ома для замкнутой («полной») одноконтурной цепи. Если электрическая цепь замкнута, т.е. точки 1 и 2 на рис.3 совпадают, то $\varphi_1 = \varphi_2$, и тогда из (4) получаем закон Ома для замкнутой цепи (рис.2.3.4):

$$\mathcal{E} = I(R + r). \quad (2.3.6)$$

Разомкнутая цепь. Если цепь, показанная на рис.2.3.3, разомкнута и, следовательно, ток в ней отсутствует ($I = 0$), то из (4)

$$\mathcal{E} = \varphi_2 - \varphi_1, \quad (2.3.7)$$

т.е. эдс источника равна разности потенциалов на его клеммах при разомкнутой цепи.

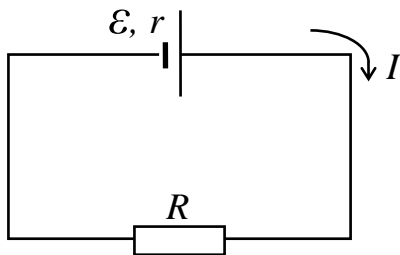


Рис.2.3.4. Замкнутая цепь

Внутреннее сопротивление источника тока r – это электрическое сопротивление внутреннего участка цепи самого источника, т.е. участка, по которому ток течет внутри источника от его отрицательного полюса (a) к положительному (b).

На внутреннем участке цепи действует электрическое напряжение $U_{\text{вн}}$, равное сумме стороннего и кулоновского напряжений (рис.2.3.5). В соответствии с обобщенным законом Ома (4) это напряжение вызывает прямо пропорциональный ему ток I . Коэффициент пропорциональности между $U_{\text{вн}}$ и I – это и есть внутреннее сопротивление источника r :

$$U_{\text{вн}} = rI, \text{ или } \mathcal{E} - (\varphi_b - \varphi_a) = rI. \quad (2.3.8).$$



Рис.2.3.5. Внутреннее сопротивление источника тока есть сопротивление проводящего участка внутри источника между его полюсами a и b .

Нагрузочной (или внешней) характеристикой источника тока называется зависимость напряжения на выходе источника (разности потенциалов между его полюсами) от тока. Она легко получается из выражения (2.3.16) для внутреннего напряжения источника:

$$U_{\text{вн}} = \mathcal{E} - (\varphi_b - \varphi_a) \equiv \mathcal{E} - U,$$

и закона Ома, записанного для внутренней цепи источника (8), где \mathcal{E} – эдс источника; φ_a и φ_b – потенциалы его полюсов a и b ; U – выходное напряжение источника, равное разности потенциалов $U = \varphi_b - \varphi_a$; I – ток источника; r – его внутреннее сопротивление (рис.2.3.6 слева).

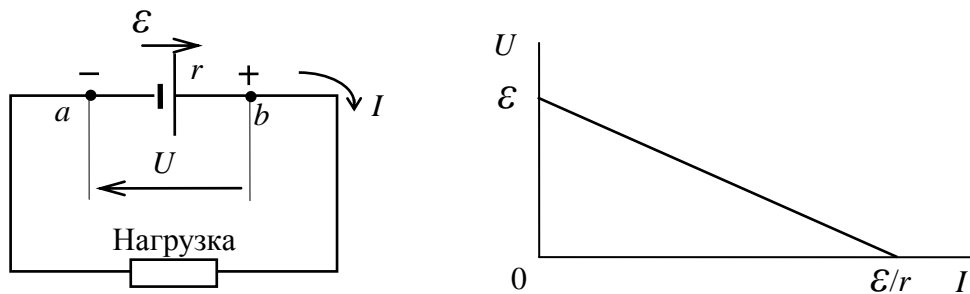


Рис.2.3.6. Нагрузочная характеристика источника тока.

Отсюда находим искомую зависимость – нагрузочную характеристику источника:

$$U = \mathcal{E} - rI. \quad (2.3.9)$$

График зависимости U от I (9) показан на рис.2.3.6 справа.

При резистивной нагрузке (см. рис.2.3.6) для неё можно записать закон Ома

$$U = RI, \quad (2.3.10)$$

где R – сопротивление нагрузки.

Система уравнений (9), (10) замкнута, т.е. число уравнений в ней (два) равно числу неизвестных (U и I). Из неё можно найти U и I при заданных эдс \mathcal{E} и сопротивлениях r и R .

Согласно нагрузочной характеристике (9) разность потенциалов на выходе источника тока наибольшая, когда тока в цепи нет ($I = 0$), т.е. цепь разомкнута

($R = \infty$). В этом состоянии разность потенциалов $U = \varphi_b - \varphi_a$ равна эдс источника: $U = \mathcal{E}$. Такой режим работы цепи называется холостым ходом.

С увеличением силы тока I разность потенциалов U уменьшается. Наконец, при $R = 0$ она становится равной нулю: $U = 0$. В этом режиме ток в цепи наибольший: $I = \mathcal{E} / r$ (режим короткого замыкания источника).

Чем меньше внутреннее сопротивление источника r , тем нагрузочная характеристика (9) более горизонтальная, т.е. тем слабее зависимость напряжения U от тока I .

В идеальном случае $r = 0$, и

$$U = \mathcal{E} = \text{const}, \quad (2.3.11)$$

т.е. при нулевом внутреннем сопротивлении источника разность потенциалов на выходе источника не зависит от нагрузки (тока I ; или сопротивления нагрузки R). Такой источник называют идеальным. График его нагрузочной характеристики горизонтальный, т.е. выходное напряжение U остаётся постоянным при любом токе нагрузки I (формула (11)). Реальные источники тока обладают, разумеется, некоторым конечным внутренним сопротивлением r , и их нагрузочная характеристика имеет вид, как на рис.2.7.7.

Внутреннее напряжение источника в функции тока определяется формулой (8), т.е. пропорционально току через источник.

При $r = 0$ $U_{\text{вн}} = 0$.

Последнее означает, что во внутреннем проводящем участке идеального источника тока нет поля: кулоновские силы уравниваются сторонние. На практике это означает, что сопротивление участка настолько мало, что для поддержания тока через источник не требуется сколько-нибудь значимого поля и, следовательно, внутреннего напряжения.

Последовательное и параллельное соединение проводников. При *последовательном соединении* проводников (рис.2.3.7) сопротивление всей группы проводников равно сумме отдельных сопротивлений:

$$R = R_1 + R_2 + \dots + R_n, \quad (2.3.14)$$

где R – полное сопротивление участка цепи, образованного последовательным соединением проводников; R_1, R_2, \dots, R_n – сопротивления отдельных проводников.

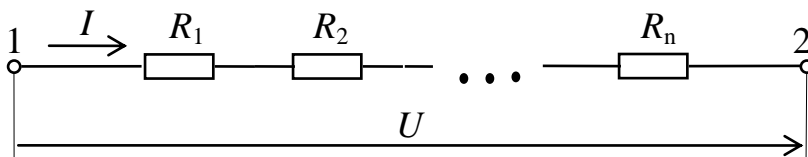


Рис.2.3.7. Последовательное соединение n проводников

При *параллельном соединении* проводников (рис.2.3.8) сопротивление всей системы определяется из выражения:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n}, \quad (2.3.15)$$

где R – полное сопротивление параллельного соединения проводников; R_1, R_2, \dots, R_n – сопротивления отдельных проводников; $1/R$ – проводимость параллельного соединения; $1/R_1, 1/R_2, \dots, 1/R_n$ – отдельные проводимости.

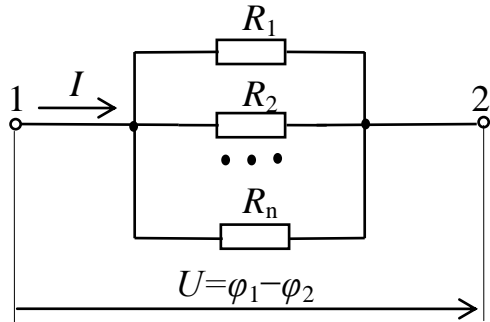


Рис.2.3.8. Параллельное соединение n проводников

Коротко: При последовательном соединении проводников складываются их сопротивления, при параллельном – проводимости.

2.4. Электроёмкость. Конденсатор

Электроёмкость характеризует способность проводников накапливать электрический заряд. Различают взаимную и собственную электроёмкости.

Взаимная электроёмкость. Если два соседних проводника несут одинаковые по величине и противоположные по знаку заряды q и $-q$, и поблизости нет других проводников, тел и зарядов (рис.2.4.1), то напряженность электростатического поля \mathbf{E} в любой точке вокруг проводников будет пропорциональна заряду q .^{*} Поэтому, согласно (1.5.7), и разность потенциалов $U = \varphi_1 - \varphi_2$ между проводниками пропорциональна заряду: $U \sim q$, или

$$q = CU \equiv C(\varphi_1 - \varphi_2), \quad (2.4.1)$$

где φ_1 – потенциал одного проводника (несущего заряд q), а φ_2 – потенциал другого проводника (с зарядом $-q$).

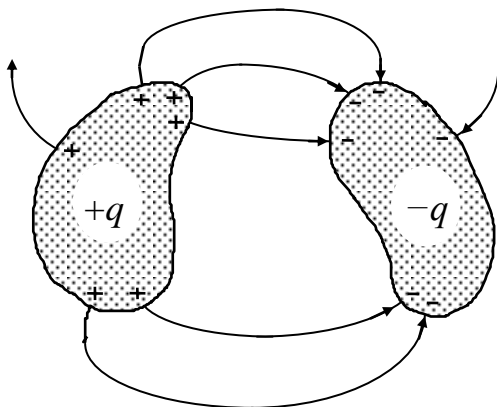


Рис.2.4.1. Система двух проводников

Коэффициент C в этой формуле называют электрической ёмкостью двух соседних проводников или их взаимной электроёмкостью. Взаимная ёмкость не зависит от заряда, а определяется только размерами, формой и расположением проводников друг относительно друга.

* Это связано с тем, что уравнения электростатики (как, впрочем, и сами уравнения Максвелла) линейны.

Из (2.8.1) следует, что $q = C$ при $U = 1$. Это значит, что взаимная ёмкость измеряется зарядом, находящимся на каждом из проводников, если напряжение (разность потенциалов) между ними равно единице. Взаимную ёмкость можно получить также, взяв отношение заряда одного из проводников к разности потенциалов между этим и другим проводником:

$$C = \frac{q}{U} \equiv \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2}.$$

Собственная электроёмкость проводника. Уединённый заряженный проводник создаёт электростатическое поле, потенциал φ которого (измеряемый относительно бесконечно удалённой точки, потенциал в которой условно считается нулевым) по уже высказанным соображениям пропорционален заряду проводника q . Значит

$$q = C\varphi. \quad (2.4.2)$$

Коэффициент пропорциональности C в этом случае называется электроёмкостью уединённого проводника или собственной электроёмкостью проводника. Соответственно, величину C можно получить как отношение заряда к потенциалу проводника:

$$C = \frac{q}{\varphi}.$$

и это отношение не зависит от величины заряда, а только от размеров и формы проводника.

Собственную электроёмкость проводника можно понимать как взаимную электроёмкость между данным проводником и удалёнными предметами, потенциал которых равен нулю (рис.2.4.2).

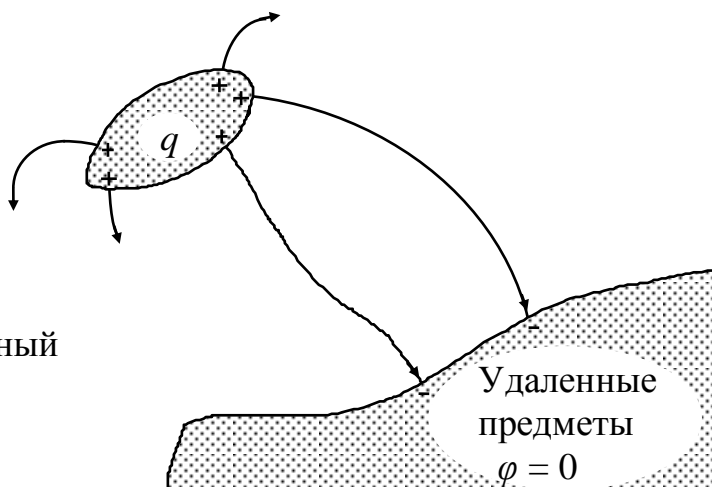


Рис.2.4.2. Уединенный проводник

Если во всех рассмотренных случаях пара проводников или уединённый проводник (см. рис.2.4.1, 2.4.2) погружены в однородный, изотропный и безграничный диэлектрик с постоянной диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = \text{const}$, то пропорциональный характер зависимостей между зарядом и потенциалами сохраняется, и ёмкость, как коэффициент пропорциональности в этих зависимостях, определяется аналогично. В этом случае она будет зависеть ещё от величины ε .

Единицы электроёмкости. Формула (1) позволяет ввести единицу электроёмкости.

Электроёмкость двух проводников равна единице, если при сообщении им зарядов +1 Кл и –1 Кл между ними возникает разность потенциалов 1 В. Эту единицу называют фарад (Ф). 1 Ф = 1 Кл/В.

Из-за того что заряд в 1 Кл очень велик, ёмкость 1 Ф очень велика. Поэтому на практике часто используют доли этой единицы: микрофарад (мкФ) – 10^{-6} Ф и пикофарад (пФ) – 10^{-12} Ф.

Конденсаторы. Фарад – очень большая величина: ёмкостью 1 Ф обладал бы уединённый шар радиусом 9 млн. км, что в 1500 раз больше радиуса Земли, а ёмкость самой Земли равна 700 мкФ [5, 9]. На практике чаще всего приходится встречаться с собственными ёмкостями от 1 мкФ до 1 пФ. Невелики также и взаимные ёмкости большинства тел в природе. Для накопления («конденсирования») на небольших телах заметных по величине зарядов при невысоком относительно окружающих тел потенциале используют устройства, называемые конденсаторами.

Конденсатором называется система двух близко расположенных проводников, разделённых диэлектриком. Толщина диэлектрика в конденсаторе должна быть мала по сравнению с размерами проводников. Проводники в этом случае называются обкладками или электродами конденсатора. Такая система обладает большой взаимной электроёмкостью, так как она способна накапливать значительный электрический заряд при небольшой разности потенциалов между проводниками (разность потенциалов небольшая в силу малого расстояния между обкладками). Обкладки конденсатора заряжаются обычно равными по величине, но разными по знаку зарядами. Под зарядом конденсатора понимают в этом случае абсолютное значение заряда одной из обкладок (т.е. заряд, который был перенесён с одной обкладки на другую при зарядке конденсатора и который может быть отдан конденсатором в цепь при его разрядке).

На рис.2.4.3 показан конденсатор, образованный двумя параллельно расположенными плоскими пластинами (плоский конденсатор). Заряды конденсатора создают *электрическое поле*, которое в силу малого расстояния между пластинами и большой площади пластин почти *всё сосредоточено внутри конденсатора*, в узком зазоре между пластинами. При указанном условии электрическое поле окружающих тел почти не проникает внутрь конденсатора и не влияет на разность потенциалов между его обкладками. Обкладки выполняют роль экрана для внешнего электрического поля. Поэтому *электроёмкость конденсатора практически не зависит от наличия вблизи него каких-либо других тел.*

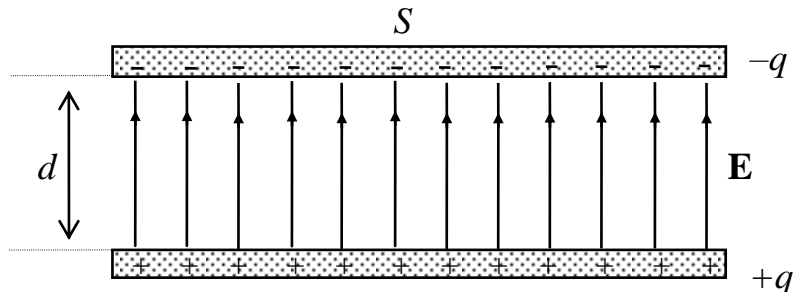
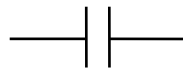


Рис.2.4.3. Плоский конденсатор

Обозначение конденсатора (и любого другого ёмкостного элемента) на схемах:



2.5. Закон Фарадея об электромагнитной индукции. Эдс Фарадея

Магнитный поток. Магнитный поток, или поток вектора магнитной индукции \mathbf{B} сквозь площадь S (рис.2.5.1) называют величину:

$$\Phi = \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \cdot S = B \cdot S \cdot \cos \alpha = B_n \cdot S, \quad (2.5.1)$$

где \mathbf{n} – единичная нормаль на площадке S , т.е. единичный вектор, перпендикулярный к площадке; $B = |\mathbf{B}|$; α – угол между нормалью \mathbf{n} и вектором \mathbf{B} ;

$B_n = \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} = B \cdot \cos \alpha$ – нормальная компонента вектора \mathbf{B} , имеющая постоянное значение на площадке S .

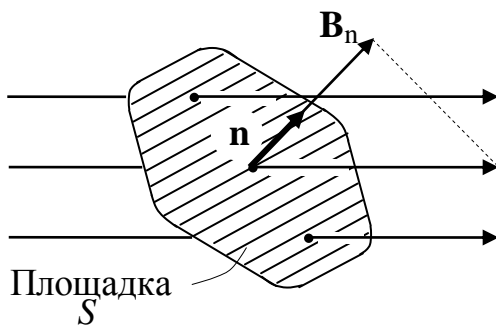


Рис.2.5.1. Магнитный поток через площадку

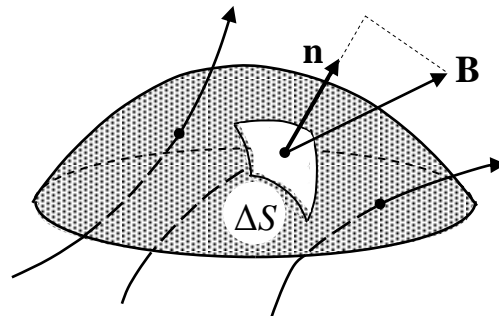


Рис.2.5.2. Магнитный поток через произвольную поверхность

Формула (1) применима только для однородного поля, т.е. поля, магнитная индукция которого \mathbf{B} одинакова во всех точках площадки S (или, во всяком случае, одинакова ее нормальная составляющая B_n). В общем случае, когда поле неоднородно (вектор \mathbf{B} неодинаков в разных точках поверхности S), магнитный поток определяется как сумма элементарных потоков через малые участки ΔS поверхности S , на которых \mathbf{B} можно принять постоянным

(рис.2.5.2). В пределе при стремлении размеров элементарных площадок к нулю, получаем общее выражение для магнитного потока сквозь поверхность S в виде интеграла по этой поверхности:

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \equiv \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \cdot dS, \quad (2.5.2)$$

где \mathbf{n} – единичная нормаль на поверхности; $d\mathbf{S} = \mathbf{n} \cdot dS$ – вектор элемента поверхности dS .

Единица магнитного потока. Единица магнитного потока в Международной системе единиц называется *вебером* (Вб). Она определяется на основании закона электромагнитной индукции. *Магнитный поток через площадь, ограниченную замкнутым контуром, равен 1 Вб, если при равномерном убывании этого потока до нуля за 1 с в контуре возникает эдс индукции 1 В: $\Delta\Phi = \mathcal{E} \cdot \Delta t$, $1\text{Вб} = 1\text{В} \cdot 1\text{с}$.*

Для однородного магнитного поля на основании уравнения (1) следует, что его магнитная индукция равна 1 Тл, если магнитный поток через контур площадью 1 м^2 равен 1 Вб:

$$B = \frac{\Phi}{S}, \quad 1\text{Тл} = \frac{1\text{Вб}}{1\text{м}^2} = 1\text{Вб/м}^2.$$

Явление электромагнитной индукции, открытое английским физиком М.Фарадеем, заключается в том, что в замкнутом проводящем контуре при изменении магнитного потока, пронизывающего площадь контура, возникает индуцированный электрический ток. Возникновение индукционного тока указывает на наличие в контуре индукционной электродвижущей силы, или эдс индукции. Поэтому можно сказать, что электромагнитная индукция заключается в создании эдс индукции в замкнутой цепи или, в соответствии с обобщением Дж.К. Максвелла, в любом воображаемом замкнутом контуре, проведенном как угодно в телах или в вакууме, если изменяется пронизывающий его магнитный поток.

Обобщенный закон Фарадея. Фарадей пришел к количественному закону, определяющему эту эдс, который называется «правилом потока» или законом Фарадея об электромагнитной индукции. Этот закон в обобщающей формулировке Максвелла (обобщенный закон Фарадея) гласит:

эдс индукции \mathcal{E} в любом замкнутом контуре (рис.2.5.3) равна скорости изменения магнитного потока, пронизывающего площадь контура:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}, \quad (2.5.3)$$

где \mathcal{E} – эдс индукции в замкнутом контуре; Φ – поток магнитной индукции сквозь его площадь.

Знак минус в формуле (3) является математическим выражением правила Ленца – общего правила для нахождения направления индукционного тока (индукционной эдс).

Правило Ленца: *индукционный ток (i , следовательно, вызывающая его индукционная эдс) в контуре имеет всегда такое направление, что создаваемое им магнитное поле препятствует всякому изменению магнитного потока, вызвавшего этот индукционный ток.*

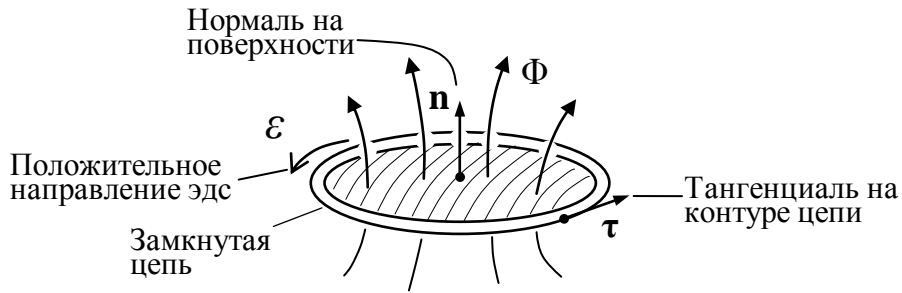


Рис.2.5.3. К правилу потока, сформулированному Фарадеем. Если поток Φ возрастает, то эдс \mathcal{E} направлена против тангенциали на контуре. Если поток убывает, то эдс \mathcal{E} направлена по тангенциали.

Согласно этому правилу, когда поток сквозь контур возрастает*, индукционный ток I течёт против стрелки на контуре (указывающей положительное направление эдс на рис.2.5.3), поскольку его магнитное поле в этом случае направлено против вызвавшего этот ток потока и, значит, *уменьшает, препятствует* его возрастанию, как того и требует правило Ленца. И, наоборот, когда поток падает**, индукционный ток течёт по стрелке на контуре, так что его поле направлено одинаково с индуцировавшим потоком, опять-таки, по правилу Ленца, *уменьшая, препятствуя* его падению. Соответственно в ту же сторону, что и ток, направлена всякий раз и эдс индукции.

* Например, мы приближаем снизу к контуру магнит, северный полюс которого направлен вверх, к контуру.

** Например, мы удаляем магнит вниз от контура, и северный полюс направлен на контур.

Направление индукционной эдс можно определять и без применения правила Ленца, при помощи одного только уравнения (1), формально. Для этого надо предварительно, до записи (1), выбрать тангенциаль τ на контуре, задающую положительное направление его обхода (т.е. положительное направление эдс и тока в контуре), и нормаль \mathbf{n} на поверхности, задающую положительное направление пронзания поверхности (т.е. положительное направление потока сквозь поверхность). При этом τ и \mathbf{n} согласуются по правилу правого буравчика: буравчик должен пронзать площадь контура в сторону нормали \mathbf{n} , если вращать его головку в направлении тангенциали τ . Такой выбор сделан на рис.2.5.3. После этого можно записывать уравнение (1). Теперь, если в силу (1) эдс \mathcal{E} получается положительной, то, значит, она направлена по обходу контура (по тангенциали τ). Если же эдс \mathcal{E} получается отрицательной, то она на самом деле направлена против обхода (против τ). Окончательно получаем: если поток через контур возрастает ($\Phi \uparrow$), то его приращение положительно ($\Delta\Phi > 0$), и тогда эдс \mathcal{E} в силу (1) отрицательна ($\mathcal{E} < 0$). Значит, фактически она действует против направления τ . Если же поток убывает ($\Phi \downarrow$), то $\Delta\Phi < 0$, и эдс \mathcal{E} положительна ($\mathcal{E} > 0$). Значит, она действует в направлении τ .

Самоиндукция. Явлением самоиндукции называется наведение эдс в цепи в результате изменения магнитного поля, создаваемого самим током, протекающим в этой же цепи. Возникающая при этом эдс называется эдс самоиндукции.

Индуктивность (собственная индуктивность замкнутого контура). Электрический ток, текущий в замкнутом контуре, (рис.2.5.4) создает вокруг себя магнитное поле \mathbf{B} , пропорциональное в каждый момент времени (если ток квазистационарный) величине тока i в контуре. Поэтому порожденный этим током магнитный поток сквозь контур пропорционален току i в контуре:

$$\Phi = L \cdot i, \quad (2.5.4)$$

где коэффициент пропорциональности L называется индуктивностью контура (или собственной индуктивностью контура).

Единица индуктивности. За единицу индуктивности в системе СИ принимается *генри* (Гн). Эта единица определяется по формуле (1): $L = \frac{\Phi}{i}$.

Индуктивность контура равна 1 Гн, если при силе постоянного тока 1 А магнитный поток через контур равен 1 Вб: 1 Гн = 1 Вб/1 А.

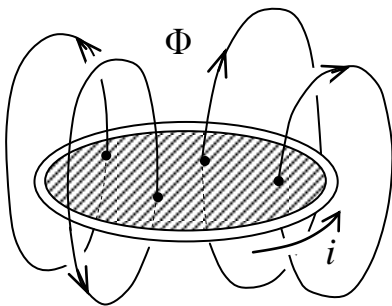


Рис.2.5.4. Собственный магнитный поток Φ электрического тока i .

Эдс самоиндукции (собственная Фарадеева эдс). При изменении тока в контуре будет изменяться также и поток Φ , и в контуре будет наводиться эдс самоиндукции, равная

$$\mathcal{E}_c = -\frac{d\Phi}{dt} = -L \frac{di}{dt}. \quad (2.5.5)$$

Знак минус в формуле (5) свидетельствует о том, что мгновенное значение эдс отрицательно, если приращение тока положительно ($\frac{di}{dt} > 0$), и наоборот. А именно, если ток возрастает ($i \uparrow$), то \mathcal{E}_c направлена против тока. Если, наоборот, ток уменьшается ($i \downarrow$), то \mathcal{E}_c по направлению совпадает с током. Таким образом, контур с током обладает электрической инертностью, т.е. ток в нем не может прекратиться мгновенно при отсутствии внешних причин; и не может мгновенно возрасти при подаче в контур внешнего напряжения.

Отметим, что эдс в контуре складывается из электродвижущих сил, наводимых в его отдельных участках. Отдельные эдс не обязаны быть одинаковыми,

вихревое электрическое поле \mathbf{E} , порождаемое переменным магнитным полем $d\mathbf{B}/dt$ в данной точке пространства (согласно закону электромагнитной индукции), вообще говоря, неоднородно вдоль контура. Поэтому в каких-то участках контура могут наводиться значительные индукционные эдс, а в других они оказываются небольшими. К участкам со значительной эдс самоиндукции относится соленоид. Индукционная эдс сосредоточена в основном в проволоке соленоида, а не в соединительных проводах внешней цепи, в которых она пренебрежимо мала. Поэтому в таком случае говорят не об индуктивности всего замкнутого контура цепи, содержащего такой участок, а об индуктивности отдельного участка, в нашем примере – соленоида. Соответственно, формулу (5)

$\mathcal{E}_c = -L \frac{di}{dt}$ можно применять только к этому участку, (к соленоиду), где коэффициент L – это индуктивность участка (соленоида).

Соленоидом (от греч. «солиноидес» – трубообразный, т.е. катушка) называется цилиндрическая катушка без сердечника, состоящая из большого числа витков проволоки, которые образуют винтовую линию.

Обозначение соленоида или другого индуктивного элемента на схемах:



Взаимная индукция и взаимная индуктивность. Взаимной индукцией называется явление наведения эдс в одном контуре под действием переменного магнитного поля, порождаемого током в другом контуре (рис.2.5.5). Точно так же ток во втором контуре индуцирует своим магнитным полем эдс в первом контуре (на рисунке это поле не показано). Далее мы, как и прежде, ограничимся рассмотрением квазипостоянных токов. Тогда

$$\Phi_{21} = L_{21} \cdot i_1,$$

где Φ_{21} – часть магнитного потока, порождаемого током i_1 , которая пронизывает контур 2; i_1 – ток в контуре 1; L_{21} – коэффициент пропорциональности.

Аналогично

$$\Phi_{12} = L_{12} \cdot i_2,$$

где Φ_{12} – часть магнитного потока сквозь контур 1, порождаемая током в контуре 2; i_2 – ток в контуре 2; L_{12} – коэффициент пропорциональности.

Коэффициенты пропорциональности L_{21} и L_{12} называются взаимной индуктивностью контуров. Показано, что всегда

$$L_{21} = L_{12} = M.$$

Это подтверждается и опытом.

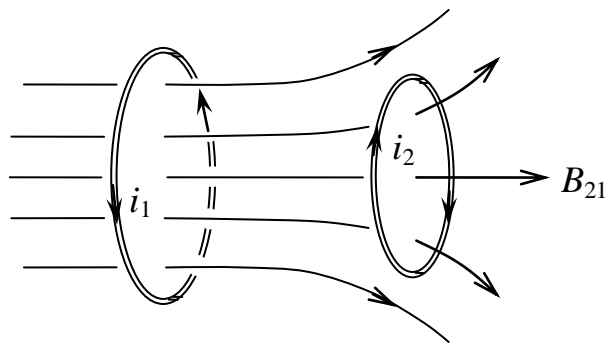


Рис.2.5.5. Магнитная связь двух контуров.

Трансформатор – это устройство, которое применяется для повышения или понижения напряжения переменного тока. Принцип его действия основан на явлении взаимной индукции. Устройство трансформатора показано на рис.2.5.6. На сердечнике, собранном из отдельных плит, образующих замкнутую раму, намотаны две обмотки – первичная (1) и вторичная (2) с числами витков соответственно N_1 и N_2 . Переменный ток i_1 в первичной обмотке создает переменное магнитное поле, которое пронизывает вторичную обмотку и наводит в ней эдс \mathcal{E}_2 (эдс взаимной индукции).

Запишем уравнения трансформатора. Ток в первичной обмотке определяется согласно обобщенному закону Ома:

$$u_1 - \frac{d}{dt}(N_1\Phi) = i_1 R_1,$$

где Φ – магнитный поток сквозь первичную обмотку; R_1 – сопротивление первичной обмотки.

Обычно R_1 мало по сравнению с величинами эдс. Поэтому

$$u_1 \approx N_1 \frac{d\Phi}{dt}.$$

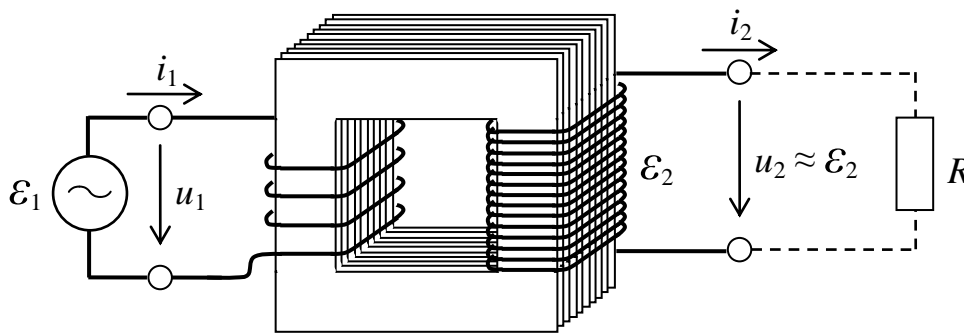


Рис.2.5.6. Устройство трансформатора.

Поскольку магнитный поток Φ практически полностью локализован в сердечнике (не рассеивается), то он весь пронизывает и вторичную обмотку, наводя в ней эдс взаимной индукции

$$\mathcal{E}_2 = -\frac{d}{dt}(N_2\Phi).$$

Сравнивая два последних выражения, получим, что эдс, возникающая во вторичной обмотке,

$$\mathcal{E}_2 = -\frac{N_2}{N_1}u_1,$$

где знак минус показывает, что напряжение и эдс во вторичной обмотке противоположны по фазе.

Отношение числа витков

$$k = \frac{N_2}{N_1}$$

показывает, во сколько раз эдс во вторичной обмотке больше, чем напряжение, приложенное к первичной. Оно называется коэффициентом трансформации.

Если $k = \frac{N_2}{N_1} > 1$, то трансформатор называется повышающим, а если $k < 1$

– понижающим.

Если сопротивление нагрузки $R \gg R_2$, где R_2 – сопротивление вторичной обмотки, то $u_2 \approx \mathcal{E}_2$.

Возникновение эдс во вторичной (и первичной) обмотке трансформатора соответствует второму случаю «поле меняется». Таким образом, принцип действия трансформатора объясняется именно законом об электромагнитной индукции (а не законом Лоренца, объясняющим принцип работы электрогенератора).

2.6. Индукционная эдс в движущихся проводниках – эдс Лоренца. Принцип работы электрогенератора

Объяснение работы магнитной силы в движущихся проводниках.

Электродвижущая сила Лоренца. Эффект силы Лоренца (магнитной силы) в движущихся проводниках нуждается в объяснении, поскольку магнитная сила не производит работу (так как перпендикулярна к перемещению заряда). Мы уже указывали на это в п.1.5.

На рис.2.6.1 показаны силы, вызывающие движение условного свободного положительного заряда q в прямолинейной проволоке. Для простоты предположим, что направление проволоки 1-2, направление индукции магнитного поля \mathbf{B} и направление движения проволоки \mathbf{u} взаимно перпендикулярны между собой. Двигаясь вместе с проволокой со скоростью \mathbf{u} , заряд испытывает магнитную силу (силу Лоренца) вдоль проволоки $\mathbf{F}_{\text{м_прод}}$ (продольная сила), которая перемещает его со скоростью \mathbf{v}' . Появляется вторая составляющая магнитной силы $\mathbf{F}_{\text{м_попер}}$, направленная против скорости \mathbf{u} (поперек проволоки). Для ее уравнивания на заряд должна действовать механическая сила $\mathbf{F}_{\text{мех}} = -\mathbf{F}_{\text{м_попер}}$, поддерживающая скорость \mathbf{u} постоянной. Сила $\mathbf{F}_{\text{мех}}$ в практически значимых случаях имеет электрическое происхождение*, и ее можно обозначить также как $\mathbf{F}_{\text{мех}} = \mathbf{F}_э$. Таким образом, результирующая сила на заряд (электромагнитная сила) будет $\mathbf{F} = \mathbf{F}_э + \mathbf{F}_{\text{м_прод}} + \mathbf{F}_{\text{м_попер}} = \mathbf{F}_{\text{м_прод}}$, т.е. совпадает с продольной (для проволоки) составляющей силы Лоренца. Она и совершает работу по перемещению заряда в проволоке.

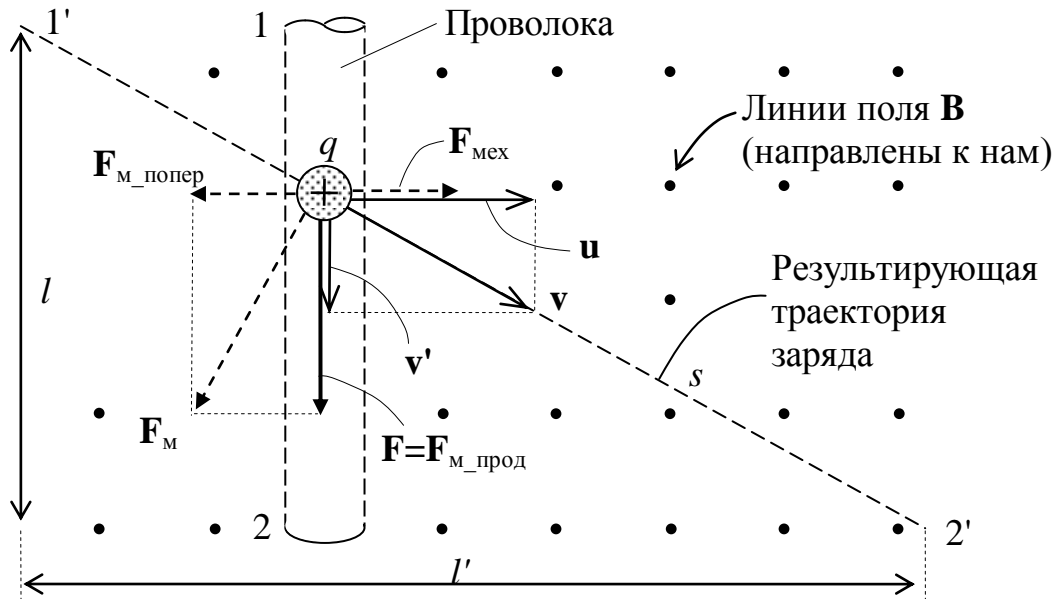


Рис.2.6.1. Силы на заряд в движущемся проводнике.

* Сила $\mathbf{F}_{\text{мех}}$ действует на заряд q со стороны соседних микрочастиц, образующих остов проволоки. При движении проволоки в направлении \mathbf{u} эти частицы набегают на свободный заряд q со стороны одного края проволоки (находящегося против хода движения) и убегают от него в сторону другого края (по ходу движения). Своим электрическим полем они и увлекают заряд в том же направлении \mathbf{u} . Поэтому сила $\mathbf{F}_{\text{мех}}$ есть сила электрическая.

Продольные силы $\mathbf{F} = \mathbf{F}_{\text{м_прод}}$ действуют на все свободные заряды (заряженные частицы), находящиеся в проволоке. Они перемещают их вдоль проволоки, вызывают ток и совершают при этом работу. *Суммарное действие этих сил – продольных сил Лоренца на заряды в движущейся проволоке (или другом движущемся проводнике) называют электродвижущей силой Лоренца (Лоренцевой эдс или индукционной эдс в движущемся проводнике)* *. Численно эту эдс измеряют величиной работы продольной силы Лоренца по переносу вдоль проволоки единичного положительного точечного заряда (см. формулу (1.5.5)). Или ее можно определить как суммарную распределенную магнитную силу, действующую продольно к проволоке на трубку положительного заряда, размещенного вдоль проволоки с единичной линейной плотностью распределения $\lambda = 1$ (см. п.1.5). Найдем эту эдс для нашей проволоки.

* Индукционную эдс в движущемся проводнике – эдс Лоренца не следует путать с индукционной эдс Фарадея, генерируемой переменным магнитным полем в неподвижном контуре.

При постоянном однородном поле она равна:

$$\mathcal{E} = A/q = F_{\text{м_прод}} \cdot v' \cdot \Delta t / q = u \cdot B \cdot v' \cdot \Delta t = B \cdot u \cdot l,$$

или

$$\mathcal{E} = B \cdot u \cdot l, \quad (2.6.1)$$

где Δt – время движения заряда вдоль проволоки, $l = v' \cdot \Delta t$ – длина проволоки.

Напомним, что полная магнитная сила (сила Лоренца)

$\mathbf{F}_M = \mathbf{F}_{M_прод} + \mathbf{F}_{M_попер}$ работу не производит, так как она перпендикулярна к результирующей траектории заряда (см. рис.2.5.1). Но поскольку работа силы \mathbf{F}_M равна нулю, то работы ее составляющих – сил $\mathbf{F}_{M_прод}$ и $\mathbf{F}_{M_попер}$ одинаковы по модулю и противоположны по знаку. Продольная сила $\mathbf{F}_{M_прод}$ совершает положительную работу по перемещению зарядов (созданию тока) в проводнике, а поперечная сила $\mathbf{F}_{M_попер}$ – такую же по величине, но отрицательную работу по торможению зарядов и всего проводника в целом в направлении, противоположном к \mathbf{u} (против действия механической силы $\mathbf{F}_{мех}$).

Принцип работы электрогенератора.

Электрический генератор переменного тока. Рассмотрим важный пример образования эдс в замкнутом проводнике. Он относится к рамке, вращающейся в однородном магнитном поле (рис.2.6.2). Найдем эдс в рамке с помощью закона Лоренца.

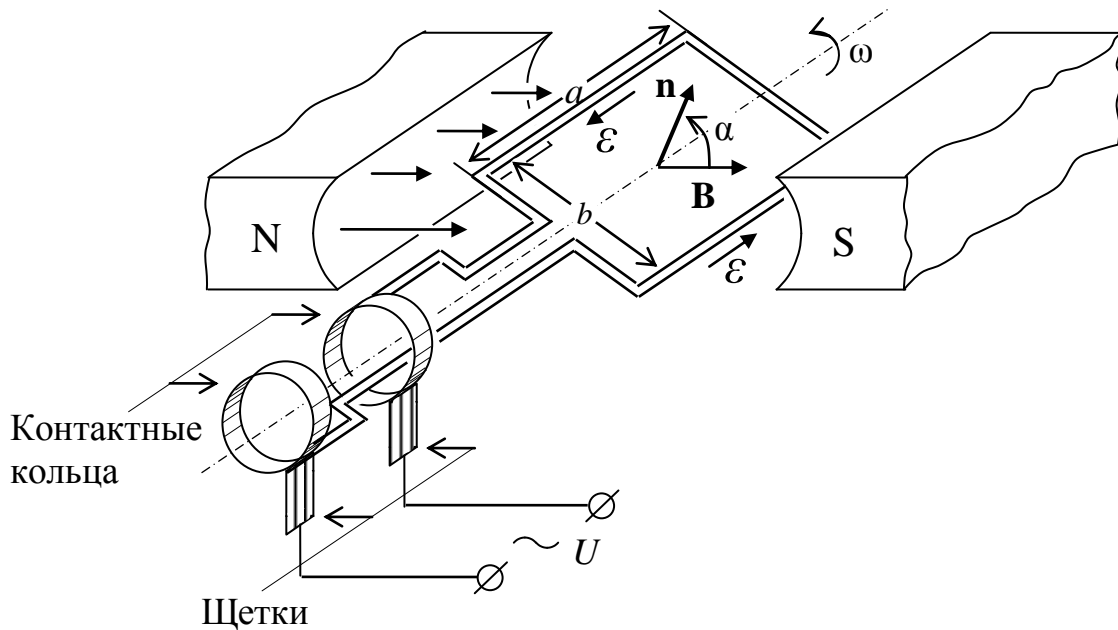


Рис.2.6.2. Образование эдс во вращающейся рамке.
Генератор переменного тока.

Пусть a и b – стороны рамки (см. рис.2.6.2). В поперечных сторонах b сила Лоренца действует поперек проводника, поэтому эдс не создает. Эдс образуется только в двух продольных участках рамки a . В этих участках на единичный заряд вдоль проводника действует сила Лоренца $F_M / q = u \cdot B \cdot \sin \alpha$, где u – линейная скорость проводников a . Следовательно, вдоль всего замкнутого контура действует эдс

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= \frac{F_{\text{л}}}{q} 2a = u \cdot B \cdot \sin \alpha \cdot 2a = \frac{b}{2} \cdot \omega \cdot B \cdot \sin \alpha \cdot 2a = \\ &= ab\omega B \cdot \sin \alpha = BS\omega \cdot \sin \omega t = \mathcal{E}_{\text{м}} \cdot \sin \omega t,\end{aligned}$$

где $\mathcal{E}_{\text{м}} = BS\omega$. Эта эдс изменяется по гармоническому закону.

Выведем теперь ту же формулу с помощью «правила потока». Магнитный поток, сцепленный с рамкой площадью S , в любой момент времени равен

$$\Phi = B_n S = BS \cos \alpha = BS \cos \omega t,$$

где B – постоянная магнитная индукция; B_n – ее нормальная составляющая, перпендикулярная площади рамки; $\alpha = \omega t$ – угол поворота рамки в момент t ; ω – постоянная угловая скорость вращения рамки.

Тогда согласно «правилу потока» при вращении рамки в ней будет наводиться переменная эдс индукции

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = BS\omega \sin \omega t = \mathcal{E}_{\text{м}} \sin \omega t,$$

т.е. мы получили то же самое выражение для эдс, что и по закону Лоренца.

Таким образом, если в однородном и постоянном магнитном поле равномерно вращается рамка, то в ней возникает переменная эдс, изменяющаяся по гармоническому закону.

Явление индуцирования эдс во вращающейся рамке применяется для преобразования механической энергии в электрическую. Для этой цели используются электрические генераторы, принцип действия которых основан на вращении обмотки в магнитном поле. Обмотка представляет собой большое количество витков, или рамок (подобно той, которая изображена на рис.3.6.2), благодаря чему в обмотке наводится значительная эдс. В рассмотренном случае на зажимах электрогенератора (на выводах рамки) образуется переменная эдс, изменяющаяся по гармоническому закону. Такие электрогенераторы называются генераторами переменного тока. В нашей стране в промышленных силовых генераторах и других устройствах принята стандартная частота тока $\nu = \omega/(2\pi) = 50 \text{ Гц}$.

Электрический генератор постоянного тока отличается от электрогенератора переменного тока только тем, что снабжен не двумя сплошными контактными кольцами (как генератор переменного тока), а одним кольцом, которое, однако, разрезано на дуги (рис.2.6.3). Такое разрезанное на дуги контактное кольцо называется коллектором. Оно обеспечивает преобразование переменного тока, протекающего во вращающейся рамке (обмотке генератора), в постоянный ток во внешней цепи – цепи нагрузки, или, как говорят, выпрямляет переменный ток.

При большом числе витков (рамок), смещенных друг относительно друга на одинаковый угол, (при этом коллектор разрезается на дуги по числу выводов рамок) ток во внешней цепи не только имеет постоянное направление, но и сохраняет постоянную силу, поскольку возникающие в цепи пульсации тока, вызванные поворотом каждой рамки, накладываются друг на друга и, будучи

сдвинутыми во времени, сглаживаются при большом числе рамок. Поэтому на выводах такого генератора действует практически постоянное электрическое напряжение.

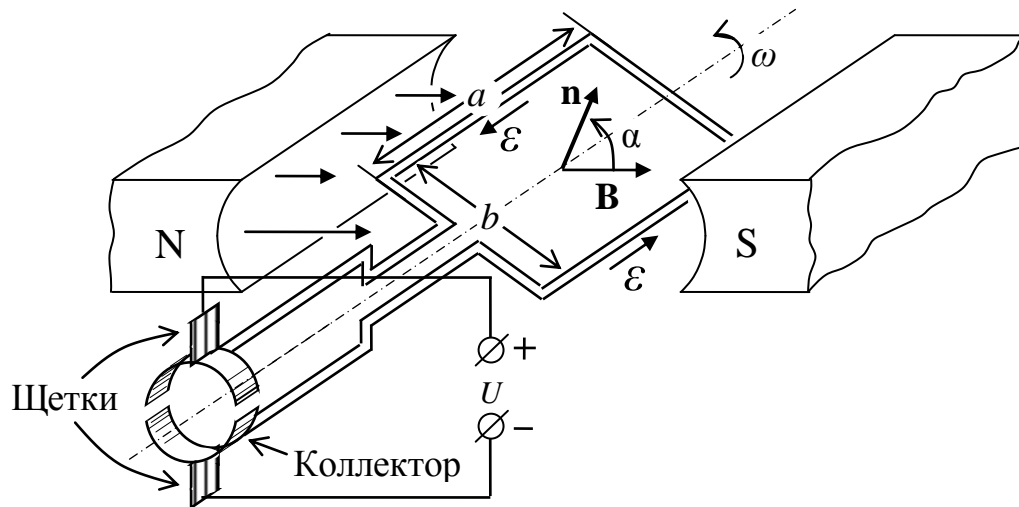


Рис.2.6.3. Генератор постоянного тока.

2.7. Работа и мощность электрического тока.

Закон Джоуля-Ленца

Работа тока. Работу сил электрического (электромагнитного) поля по созданию и поддержанию тока называют работой тока.

Рассмотрим произвольный участок цепи. Это может быть однородный проводник, например нить лампы накаливания, обмотка электродвигателя и др. Пусть за время Δt через поперечное сечение проводника проходит заряд Δq . Тогда, согласно выражению (1.5.5), электрическое поле совершит работу $\Delta A = \Delta q \cdot U$.

Так как сила тока $I = \frac{\Delta q}{\Delta t}$, то эта работа равна:

$$\Delta A = IU \cdot \Delta t. \quad (2.7.1)$$

Работа тока на участке цепи равна произведению силы тока, напряжения и времени, в течение которого совершалась работа.

Разумеется, (1) верно только при постоянных значениях тока и напряжения на отрезке времени Δt ; или при достаточно малом Δt , на котором их можно принять постоянными. Если напряжение и ток меняются, то работа тока за время t выражается интегралом

$$A = \int_0^t IU \cdot dt. \quad (2.7.2)$$

Согласно закону сохранения энергии эта работа должна быть равна изменению энергии рассматриваемого участка цепи. Поэтому энергия, выделяемая

на данном участке цепи за время Δt , равна работе тока (1) или (2). Эта энергия может идти на нагревание проводника (нити накаливания лампы), совершение механической работы (вращение ротора электродвигателя), химические изменения в проводниках (проводниках второго рода), создание магнитного поля (запасание магнитной энергии в соленоидах) и др. процессы.

В случае если на участке цепи не совершается механическая работа, ток не производит химических действий и не увеличивает энергию магнитного поля, происходит только нагревание проводника. Нагретый проводник отдает теплоту окружающим предметам.

Если в формуле (1) выразить либо напряжение через силу тока, либо силу тока через напряжение с помощью закона Ома для участка цепи, то получим три эквивалентные формулы:

$$\Delta A = IU \cdot \Delta t = I^2 R \cdot \Delta t = \frac{U^2}{R} \cdot \Delta t = \Delta Q.$$

где ΔQ – количество выделяемое в проводнике теплоты.

Для случая переменных напряжения и тока (формула (2))

$$A = \int_0^t I^2 R \cdot dt = \int_0^t \frac{U^2}{R} \cdot dt = Q.$$

Закон Джоуля-Ленца. Закон, определяющий количество теплоты, которое выделяет проводник с током в окружающую среду, был впервые установлен экспериментально английским ученым Д.Джоулем (1818-1889) и русским ученым Э.Х.Ленцем (1804-1865). Закон Джоуля-Ленца был сформулирован следующим образом: *количество теплоты, выделяемое проводником с током (в режиме теплового равновесия с окружающими предметами), равно произведению квадрата силы тока, сопротивления проводника и времени прохождения тока по проводнику:*

$$\Delta Q = I^2 R \cdot \Delta t, \quad (2.7.3)$$

или, для переменного тока,

$$Q = \int_0^t I^2 R \cdot dt. \quad (2.7.4)$$

Теплота ΔQ или Q часто называется «джоулевой».

Мы получили этот закон с помощью рассуждений, основанных на законе сохранения энергии. Формулы (3) и (4) позволяют вычислить количество теплоты, выделяемое на любом участке цепи, содержащем какие угодно проводники.

В частности, на внутреннем сопротивлении r источника тока выделяется количество теплоты, равное

$$\Delta Q_{\text{вн}} = I^2 r \cdot \Delta t, \text{ или } Q_{\text{вн}} = \int_0^t I^2 r \cdot dt.$$

Тогда полное количество теплоты, выделяющееся при протекании тока на внешнем и внутреннем участках цепи, равно

$$\Delta Q_{\text{полн}} = I^2 R \cdot \Delta t + I^2 r \cdot \Delta t = I^2 (R + r) \cdot \Delta t, \text{ или } Q_{\text{полн}} = \int_0^t I^2 (R + r) \cdot dt. \quad (3.7.5)$$

Разумеется, в формулах для ΔQ ток и напряжение должны оставаться неизменными на промежутке времени Δt . Если же они существенно изменяются, то надо пользоваться точными интегральными формулами для Q .

Мощность тока. Любой электрический прибор (лампа, электродвигатель) рассчитан на потребление определенной энергии в единицу времени. Поэтому наряду с работой тока важное значение имеет понятие мощности тока. Мощность тока равна работе тока, производимой в единицу времени. Ее можно определить, взяв отношение работы тока за время Δt к этому интервалу времени:

$$P = \frac{\Delta A}{\Delta t} = IU.$$

Это выражение можно переписать в нескольких эквивалентных формах, если использовать закон Ома для участка цепи:

$$P = IU = I^2 R = \frac{U^2}{R}.$$

На большинстве приборов указана потребляемая ими мощность.

Если мощность тока затрачивается только на нагревание проводника, то количество выделяемой в единицу времени теплоты равно:

$$q = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = I^2 R.$$

3. НАЧАЛА ТЕОРИИ КВАЗИСТАЦИОНАРНЫХ ТОКОВ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ

3.1. Уравнения простейших элементов цепи

Законы электромагнетизма позволяют построить теорию переменных токов в электрических цепях. Переходя к изучению этих токов, мы ограничимся рассмотрением токов установившихся, квазистационарных (почти постоянных, медленно переменных) (п.1.4).

Для анализа токов нужны уравнения, связывающие токи с напряжениями на элементах цепи, – уравнения элементов цепи. Во многих случаях цепь может быть представлена соединением *источников тока* с простейшими двухполюсными (с двумя подводящими проводами) элементами – *резистивными*, *ёмкостными* и *индуктивными*. Мы ограничимся рассмотрением линейных двухполюсных элементов, т.е. элементов, описываемых линейными уравнениями – уравнениями, для которых выполняется принцип суперпозиции.

Если цепь содержит нелинейные элементы, то вместо линейных надо использовать более сложные – нелинейные уравнения. К нелинейным элементам относятся:

источники тока, у которых вырабатываемая эдс (или другие параметры, например внутреннее сопротивление) зависит от протекающего через источник тока;

резистивные элементы с нелинейными вольт-амперными характеристиками, такие как диоды, транзисторы и т.п. элементы;

индуктивные элементы, у которых проводники с током окружены ферромагнитными средами, например дроссели с ферромагнитными сердечниками;

ёмкостные элементы с электродами, разделёнными диэлектриками, обладающими сегнетоэлектрическими свойствами; др. элементы.

Согласно п.2.1 **источник тока** представляет собой устройство, вырабатывающее сторонние электродвижущие силы. На электрических схемах он обозначается кружочком, показанным на рис.3.1.1. Внутри кружочка изображается внутренний проводящий участок источника, в котором и генерируются указанные сторонние силы (см. рис.3.1.1, слева). Генерирующий участок на схемах часто опускают и рисуют иногда рядом с кружочком обозначение внутреннего сопротивления источника (см. рис.3.1.1, справа).

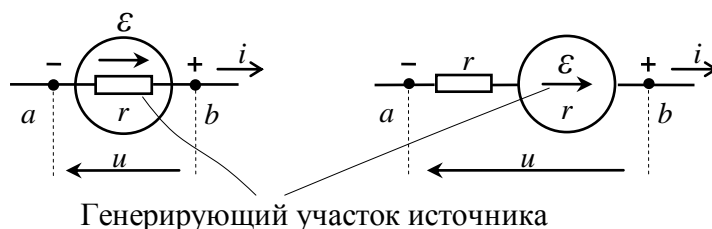


Рис.3.1.1. Источник тока.

Генерируемые источником сторонние силы образуют в совокупности стороннее электрическое напряжение, называемое электродвижущей силой источ-

ника и обозначаемое буквой \mathcal{E} (формула (2.3.15)). Условное положительное направление эдс задаётся на схемах стрелкой внутри кружочка (см. рис.3.1.1).

Под действием эдс \mathcal{E} на полюсах a и b источника собираются избыточные противоположно заряженные частицы, создающие собственное электрическое поле и, соответственно, напряжение u , направленное против эдс \mathcal{E} (см. рис.3.1.1). Это напряжение является кулоновским, потенциальным и выражается через разность потенциалов на полюсах:

$$u = \varphi_b - \varphi_a, \quad (3.1.1)$$

где φ_b – потенциал полюса b , φ_a – потенциал полюса a . Оно (кулоновское напряжение u) действует и вне источника, а значит, способно создавать ток во внешней цепи, если её подключить к полюсам источника.

Внутри источника образуется результирующее (внутреннее) электрическое напряжение

$$u_{\text{вн}} = \mathcal{E} - (\varphi_b - \varphi_a) \equiv \mathcal{E} - u, \quad (3.1.2)$$

где r – электрическое сопротивление внутреннего проводящего участка источника. Согласно обобщённому закону Ома оно равно произведению сопротивления r на ток через источник i :

$$u_{\text{вн}} = ri. \quad (3.1.3)$$

Уравнения (1)-(3) служат уравнениями источника тока.

Резистивный элемент – это проводящий элемент, характеризующийся только электрическим сопротивлением и не обладающий индуктивностью и ёмкостью. К такого рода элементам принадлежат: соединительные провода, резисторы, нагревательные металлические спирали и керамические теплоэлементы, проводящие участки электрических приборов и т.д. Ток в них с хорошей точностью описывается законом Ома:

$$u = Ri, \quad (3.1.4)$$

где u – электрическое напряжение на элементе, i – ток в элементе, R – его сопротивление.

Таким образом, *ток в резистивном элементе пропорционален приложенному к нему напряжению* (закон Ома (2.3.2, 2.3.4)). Формула (4) представляет уравнение резистивного элемента, т.е. уравнение, связывающее приложенное к элементу напряжение u и протекающий через него ток i . С её помощью, зная напряжение на элементе, можно найти ток.

На электрических схемах резистивные элементы обозначаются прямоугольником, как показано на рис.3.1.2.

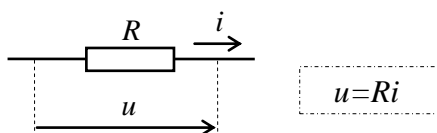


Рис.3.1.2. Резистивный элемент – «сопротивление».

Прямоугольником обозначают не только сам резистивный элемент (физическое устройство), но и его параметр – электрическое сопротивление, т.е. физическую величину, характеризующую устройство. Например, соленоид харак-

теризуется индуктивностью, но может иметь и значимое сопротивление. Тогда на схемах соленоид изображают двумя последовательно соединенными абстрактными элементами – резистивным и индуктивным, один из которых представляет сопротивление соленоида и обозначается прямоугольником, а другой – его индуктивность (и обозначается фигуркой, показанной далее на рис.3.1.3).

Для краткости резистивные элементы (устройства) часто называются просто «сопротивлениями». Поэтому термин «сопротивление» имеет двоякий смысл. Это и количественная характеристика элемента цепи и сам резистивный физический элемент.

Индуктивный элемент. Так называют проводящий участок цепи, обладающий индуктивностью, т.е. генерирующий собственную индукционную эдс, когда ток через участок изменяется. Индукционная эдс \mathcal{E}_L подчиняется соотношению (2.5.5):

$$\mathcal{E}_L = -L \frac{di}{dt}, \quad (3.4.5)$$

где L – индуктивность участка цепи (элемента), i – ток через элемент.

Это соотношение служит основным уравнением индуктивного элемента. Оно означает, что эдс самоиндукции пропорциональна взятой с обратным знаком скорости изменению тока (следствие из обобщённого закона Фарадея (2.5.3)).

Индукционными свойствами (индуктивностью) обладают: соленоиды; обмотки электрических машин, трансформаторов, реле и электромагнитов (п.2.5); другие устройства. Даже соединительные провода имеют некоторую, хотя и совсем небольшую («паразитную») индуктивность, проявляющуюся только при очень быстрых изменениях тока.

Индуктивные элементы обозначаются на схемах, как и соленоид, волнообразной фигуркой, изображённой на рис.3.1.3. Они называются часто для краткости просто «индуктивностями».

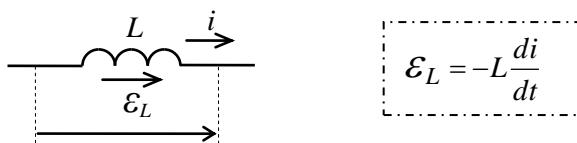


Рис.3.1.3. Индуктивный элемент – «индуктивность».

Стрелками показаны положительные направления эдс и тока.

Рассмотрим процесс протекания тока в индуктивном элементе. Если на индуктивный элемент наложить внешнее напряжение $u_{\text{внеш}}$, то в нём потечёт электрический ток. При изменении тока начнёт генерироваться собственная индукционная эдс элемента \mathcal{E}_L (5). Алгебраическая сумма напряжений $u_{\text{внеш}}$ и \mathcal{E}_L даст полное, результирующее внутреннее напряжение на элементе:

$$u = u_{\text{внеш}} + \mathcal{E}_L. \quad (3.1.6)$$

(Данная формула есть применение общей формулы (1.6.18).)

Согласно обобщённому закону Ома оно равно произведению тока i на сопротивление элемента r :

$$u = ir. \quad (3.1.7)$$

Но сопротивление (идеального) индуктивного элемента равно нулю:

$$r = 0.$$

Значит, и полное напряжение равно нулю:

$$u = ir = i \cdot 0 = 0. \quad (3.1.8)$$

Отсюда вытекает, что *внешнее напряжение $u_{\text{внеш}}$ на идеальном индуктивном элементе равно взятой с обратным знаком эдс самоиндукции элемента*:

$$u_{\text{внеш}} = -\mathcal{E}_L = L \frac{di}{dt}. \quad (3.1.9)$$

Поясним, что напряжение $u_{\text{внеш}}$ мы называем внешним потому, что оно создаётся внешним электромагнитным полем, которое образуется не индуктивным элементом (например, соленоидом), а другими устройствами. Чаще всего внешнее поле – это поле источника тока (или цепи, содержащей источник), подключенного к выводам индуктивного элемента (к концам обмотки соленоида). Данное поле возбуждается вокруг источника (цепи) избыточными электрическими зарядами, накапливаемыми на полюсах источника (или проводах цепи). Для того чтобы оно проникло внутрь проволоки индуктивного элемента и вызвало в ней ток, надо концы проволоки подсоединить к клеммам источника (цепи). Подобное внешнее напряжение $u_{\text{внеш}}$ представляет собой потенциальное, кулоновское напряжение. Оно выражается разностью потенциалов между клеммами источника (цепи) по формуле (1.6.11).

Иногда, не очень точно, внешнее напряжение $u_{\text{внеш}}$ называют просто «напряжением индуктивного элемента» и обозначают u_L : $u_{\text{внеш}} = u_L$.

Соотношения (5)-(9) составляют полную совокупность уравнений индуктивного элемента.

Схема замещения соленоида. Проволока соленоида (как и любого другого индукционного устройства) может иметь значимое электрическое сопротивление r . В этом случае наряду с индуктивностью надо учесть сопротивление соленоида. Поэтому схема замещения соленоида имеет вид, показанный на рис.3.1.4. В ней отражено, что контур соленоида обладает индуктивностью L , а проволока его обмотки имеет сопротивление r .

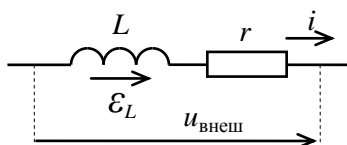


Рис.3.1.4. Схема замещения соленоида или реального индуктивного элемента.

Уравнение соленоида должно связывать приложенное к нему внешнее напряжение $u_{\text{внеш}}$ (т.е. напряжение, создаваемое каким-либо внешним полем) и протекающий в соленоиде ток i (см. рис.3.1.3).

Внутри и вокруг соленоида генерируется собственное электромагнитное поле соленоида. В этом поле согласно закону электромагнитной индукции наводится собственное электрическое напряжение соленоида – эдс самоиндукции \mathcal{E}_L , определяемая формулой (5). В результате наложения двух указанных полей – внешнего и собственного результирующее напряжение вдоль обмотки соленоида u будет равно алгебраической сумме (6) двух напряжений – внешнего $u_{\text{внеш}}$ и индукционного \mathcal{E}_L : $u = u_{\text{внеш}} + \mathcal{E}_L$.

Результирующее, полное, напряжение u , действующее вдоль проволоки соленоида, создаёт в проволоке ток. Этот ток i связан с напряжением u формулой (7): $u = ri$.

Объединяя (6) и (7) с учётом (5), получаем уравнение соленоида (реального индуктивного элемента):

$$u_{\text{внеш}} - L \frac{di}{dt} = ri, \text{ или } u_{\text{внеш}} = ri + L \frac{di}{dt}. \quad (3.1.10)$$

Ток в соленоиде при включении и отключении источника тока. При включении соленоида на источник постоянной эдс (рис.4.1.5, ключ поворачиваем в положение 1) на концы обмотки соленоида поступает электрическое напряжение (разность потенциалов) $u_{\text{внеш}}$. Если внутреннее сопротивление источника эдс мало, то $u_{\text{внеш}} = \mathcal{E}$, где \mathcal{E} – постоянная эдс источника (см. формулу (2.3.11)). В этом случае электрический ток в цепи (находимый путём решения уравнения (10)), возрастает по закону:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{r} (1 - e^{-t/\tau}). \quad (3.1.11)$$

Здесь: r – электрическое сопротивление контура цепи; $\tau = \frac{L}{r}$ – постоянная времени, равная отношению индуктивности соленоида L и сопротивления r (см. рис.3.1.5, 1).

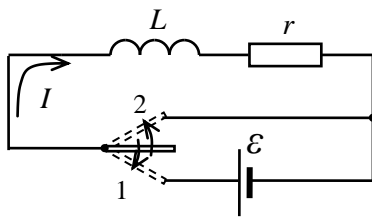
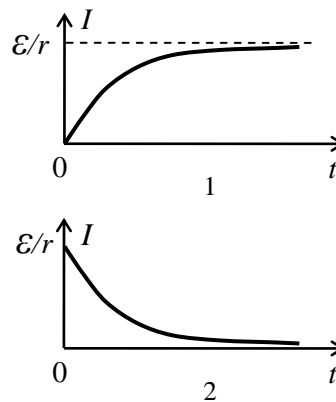


Рис.3.1.5. Ток в соленоиде при включении (1) и выключении (2) источника эдс.



Если затем, после достижения током своего предельного значения $I(\infty) = \frac{\mathcal{E}}{r}$, повернуть ключ из положения 1 в положение 2, то ток в соленоиде не исчезает мгновенно, а, замыкаясь по цепи 2- L - r -2, убывает по закону:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{r} e^{-t/\tau} \quad (3.1.12)$$

(что тоже следует из решения уравнения для этой замкнутой цепи) (см. рис.3.1.5, 2).

Хотя вывода решений упомянутых уравнений мы не приводим, однако формулы (11) и (12) можно проверить простой подстановкой в уравнение (10) с учётом начальных условий для тока.

Ёмкостной элемент цепи – это устройство или часть цепи, состоящая из двух проводников, разделённых диэлектриком. Система таких проводников характеризуется взаимной электрической ёмкостью (п.2.4). Типичным ёмкостным элементом является конденсатор. Он имеет большую, по сравнению с другими элементами цепи, ёмкость. Взаимной ёмкостью могут обладать и иные участки цепи, например: два параллельных длинных провода линии электропередачи или система провод-земля в такой же линии; обмотка электрической машины и стальной статор, в изолированных пазах которого обмотка проложена; другие пары проводящих тел. Ёмкостным элементом является стальной корпус автомобиля и земля. Накапливающийся на корпусе заряд нередко разряжается на землю, что может вызвать случайное воспламенение горючего. Во избежание этого корпус автомобиля заземляют (соединяют с землей проводником), чтобы заряд беспрерывно стекал на землю и не накапливался на корпусе.

Ёмкостной элемент обозначается на схемах, как и конденсатор, двумя параллельными чёрточками (рис.3.1.6). Для краткости его часто называют просто «ёмкостью». О двух проводящих телах, образующих ёмкостной элемент, тоже можно говорить, по аналогии с конденсатором, как об обкладках или электродах элемента.

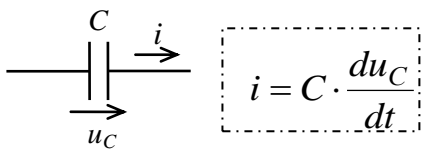


Рис.3.1.6. Ёмкостной элемент – «ёмкость». Стрелками показаны положительные направления напряжения и тока элемента.

Пусть u_C – напряжение на ёмкостном элементе между левой и правой обкладками (см. рис.3.1.6), а q – заряд левой обкладки (заряд другой, правой, обкладки равен $-q$). Тогда u_C и q связаны формулой (2.4.1):

$$q = C \cdot u_C.$$

(Эта формула есть выражение закона Кулона или закона Гаусса.)

Заметим, что если взять напряжение, наоборот, между правой и левой обкладками и заряд правой обкладки, то эта формула не изменится.

Дифференцируя данную формулу по времени и учитывая, что $\frac{dq}{dt} = i$, где i

– ток в проводах, подходящих к обкладкам (ток «через ёмкость»), получаем уравнение ёмкостного элемента:

$$i = C \cdot \frac{du_C}{dt} \quad (3.1.13)$$

– ток ёмкостного элемента пропорционален скорости изменения напряжения на нем.

Напомним, что напряжение на ёмкости создаётся противоположными зарядами обкладок q и $-q$. Это кулоновское, потенциальное напряжение. Оно равно разности потенциалов между электродами ёмкости: $u_C = \varphi_1 - \varphi_2$, где φ_1 – потенциал обкладки, заряд которой равен q , а φ_2 – потенциал обкладки с зарядом $-q$.

Схема замещения участка цепи с конденсатором. При расчёте тока через конденсатор (или другой ёмкостной участок цепи) следует учитывать не только его ёмкость C , но и сопротивление R подводящих проводов и соединённых последовательно с ним резисторов. Соответствующая схема замещения конденсатора представлена на рис.3.1.7. Она состоит из последовательно соединённых ёмкости и сопротивления.

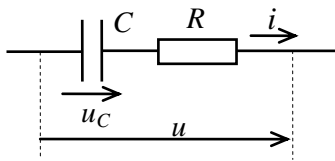


Рис.3.1.7. Конденсатор и подводящие провода.

Ток при зарядке и разрядке конденсатора. Действующее в цепи на рис.3.1.7 напряжение u делится между конденсатором и резистором:

$$u = u_C + u_R,$$

где u_C – напряжение на конденсаторе, u_R – на резисторе. Напряжение u_C под-

чиняется уравнению (13): $i = C \cdot \frac{du_C}{dt}$, а напряжение u_R – уравнению (4): $u = Ri$ (закону Ома), где i – одинаковый для конденсатора и резистора ток. Объединяя их вместе и дифференцируя по времени, получаем уравнение конденсатора с резистором:

$$C \cdot \frac{du}{dt} = i + RC \cdot \frac{di}{dt}. \quad (3.1.14)$$

С помощью этого уравнения можно рассчитать ток в конденсаторе при его включении и отключении (рис.3.1.8). При включении тока (зарядке конденсатора от источника постоянной эдс \mathcal{E}) ток через конденсатор изменяется по закону:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-t/\tau}, \quad (3.1.15)$$

где R – электрическое сопротивление контура цепи; $\tau = RC$ – постоянная времени цепи, равная произведению ёмкости конденсатора C и сопротивления цепи R (см. рис.3.1.8, 1). При отключении тока от источника и переключении конденсатора самого на себя (при разрядке конденсатора) (ключ из 1 в 2) ток конденсатора изменяется по тому же закону (17), что и при включении тока (см. рис.3.1.8, 2).

Формула (15) проверяется подстановкой в уравнение (14) при имеющихся начальных условиях для тока.

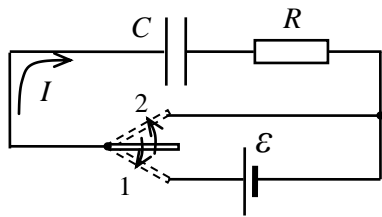
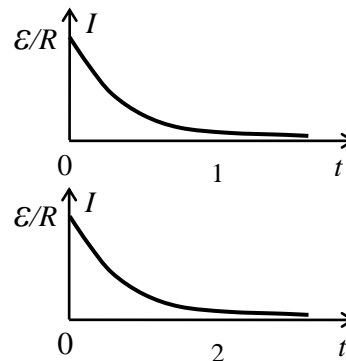
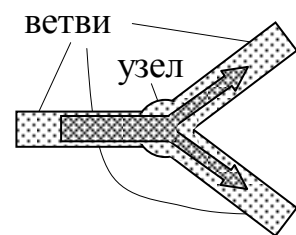
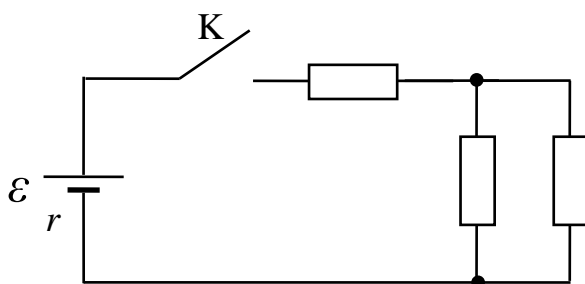


Рис.3.1.8. Ток при зарядке (1) и разрядке (2) конденсатора.



3.2. Правила Кирхгофа

Разветвленные и неразветвленные электрические цепи. Электрические цепи бывают неразветвленные и разветвленные. Цепь на рис.2.1.1 представляет собой простейшую неразветвленную цепь, в которой все элементы включены последовательно, во всех элементах течет один и тот же ток. В общем случае цепь является разветвленной (сложной) и содержит ветви и узлы. Простейшая разветвленная цепь изображена на рис.3.2.1. В ней имеются три ветви и два узла. В каждой ветви течет свой ток. Ветвь можно определить как участок цепи,



Разветвление тока в узле цепи

Рис.3.2.1. Простейшая разветвленная электрическая цепь.

образованный последовательно соединенными элементами и заключенный между двумя узлами. В свою очередь, узел есть место («точка») цепи, в котором сходится не менее трех ветвей. Узлы обозначаются на схеме «жирными» точка-

ми. Если же в месте пересечения двух линий на электрической схеме нет «жирной» точки, то эти линии пересекаются без электрического соединения.

Электрическую цепь называют плоской (планарной), если она может быть изображена на плоскости в виде схемы с непересекающимися ветвями (рис.3.2.5 далее).

Контуром (или замкнутым контуром) электрической цепи называют любой замкнутый путь, проходящий по нескольким ветвям (в частном случае одноконтурной цепи – по одной ветви, начало и конец которой соединены в одну точку). (Неразветвленная цепь состоит из одного контура, одновременно являющегося и ветвью, и не имеющего ни одного узла.)

Правила Кирхгофа. Обобщенный закон Ома вместе с обобщенным законом Фарадея и законом Гаусса (из которых получаются уравнения простейших элементов цепи, позволяют рассчитать практически любую сложную цепь*. Однако непосредственный расчет разветвленных цепей довольно сложен. Эта задача решается более просто с помощью двух правил Кирхгофа.

* Если, конечно, она не содержит элементов с нелинейными вольт-амперными характеристиками типа диодов, транзисторов и т.п. Тогда вместо закона Ома надо использовать непосредственно ВАХ элемента.

Первое правило Кирхгофа применяется к узлам:

сумма подтекающих к узлу токов равна сумме утекающих от узла токов:

$$\sum i_{\text{вт}} = \sum i_{\text{выт}}, \quad (3.2.1)$$

где $i_{\text{вт}}$ – втекающие и $i_{\text{выт}}$ – вытекающие из узла токи; при этом условные положительные направления токов выбираются произвольно.

Например, применительно к узлу, изображенному на рис.3.2.2, имеем:

$$i_1 = i_2 + i_3 + i_4.$$

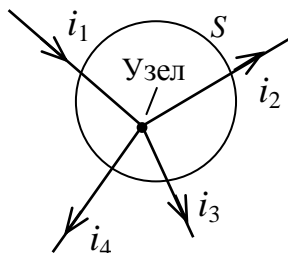


Рис.3.2.2. К правилу Кирхгофа для узла

Это правило можно переформулировать и так:

алгебраическая сумма токов в узле равна нулю:

$$-i_1 + i_2 + i_3 + i_4 = 0,$$

где со знаком «+» берутся токи, положительные направления которых выбраны от узла, а со знаком «-» – в узел (можно и наоборот).

Физически первое правило означает, что движение зарядов в цепи происходит так, что ни в одном из узлов они не скапливаются.

Первое правило Кирхгофа следует из уравнения непрерывности стационарных и квазистационарных токов: $\oint \mathbf{j} d\mathbf{S} = 0$. Если некоторый узел цепи охватить замкнутой поверхностью S (см. рис.3.2.2), то для этой поверхности справедливо указанное уравнение $\oint \mathbf{j} d\mathbf{S} = 0$, т.е. ток, входящий в узел, равен току, выходящему из него. Иными словами, не происходит накопления заряда на участках цепи, и в частности, в ее узлах.

Второе правило Кирхгофа применяется к замкнутым или условно замкнутым контурам (путям тока) электрической цепи:

алгебраическая сумма напряжений вдоль любого замкнутого контура равняется алгебраической сумме эдс в этом контуре:

$$\sum u = \sum \mathcal{E}, \quad (3.2.2)$$

Положительные направления напряжений и индукционных эдс на участках контура (например, ветвях цепи) выбираются при этом произвольно. Если, после этого выбора, они совпадают с направлением обхода контура (тоже выбранным произвольно), то записываются в уравнении (2) со знаком «+», а если противоположны – со знаком «–». Направления эдс источников тока, разумеется, должны быть известны.

Доказательство второго правила Кирхгофа (как и первого) тоже очень простое. Напряжение на любом участке цепи складывается в общем случае из потенциального напряжения (разности потенциалов на концах участка) и непотенциального напряжения (эдс в участке) (рис.3.2.3):

$$u = (\varphi_a - \varphi_b) + \mathcal{E}. \quad (3.2.3)$$

Здесь u – результирующее напряжение на участке цепи a - b ; $\varphi_a - \varphi_b$ – разность потенциалов между началом (a) и концом (b) участка; \mathcal{E} – действующая в участке эдс.

Сумма потенциальных напряжений (разностей потенциалов) по любому замкнутому контуру равна нулю. Поэтому после сложения всех напряжений, действующих в контуре, остаются одни только эдс: $\sum u = \sum \mathcal{E}$, что и утверждает второе правило.

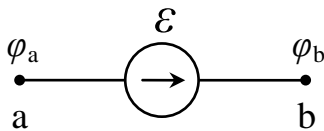


Рис.3.2.3. На любом участке цепи могут одновременно действовать разность потенциалов и эдс, дающие в сумме общее напряжение на участке u .

Например, для контура на рис.3.2.4 сумма напряжений будет:

$$u_1 + u_2 + u_3,$$

где u_i – напряжение на i -ветви, $i = 1, 2, 3$. В силу (3): $u_1 = (\varphi_1 - \varphi_2) + \mathcal{E}_1$, $u_2 = (\varphi_2 - \varphi_3) + \mathcal{E}_2$, $u_3 = (\varphi_3 - \varphi_1) + \mathcal{E}_3$. Складывая их, получаем: $u_1 + u_2 + u_3 = (\varphi_1 - \varphi_2) + \mathcal{E}_1 + (\varphi_2 - \varphi_3) + \mathcal{E}_2 + (\varphi_3 - \varphi_1) + \mathcal{E}_3 = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3$, т.е. сумма напряжений, действительно, равна сумме эдс.

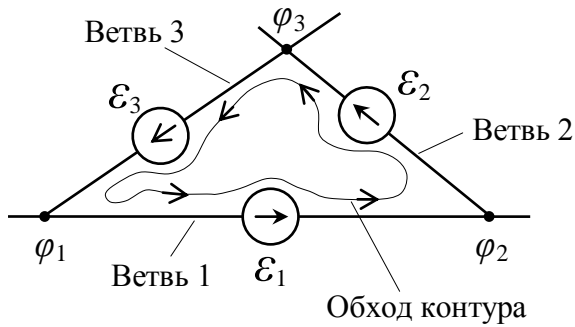


Рис.3.2.4. Произвольный замкнутый контур в электромагнитном поле

Из доказательства видно, что второе правило Кирхгофа справедливо не только для контура цепи, но и вообще для любой воображаемой замкнутой линии, как угодно проведенной в пространстве, где имеется электромагнитное поле.

Применим второе правило для одного из контуров цепи, изображенной на рис.3.2.5. Для выделенного контура оно запишется так:

$$u_1 + u_L + u_C - u_R - u_2 = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_L - \mathcal{E}_2.$$

Здесь:

$u_1 \equiv u_{\text{вн1}}$ и $u_2 \equiv u_{\text{вн2}}$ – внутренние (полные, результирующие) напряжения 1-го и 2-го источников тока (имеющих эдс \mathcal{E}_1 и \mathcal{E}_2);

$u_L \equiv u_{\text{вн}_L}$ – внутреннее напряжение вдоль провода индуктивного элемента L ;

u_C – напряжение (разность потенциалов) на емкостном элементе C ;

u_R – напряжение (тоже разность потенциалов*) на резистивном элементе R ;

\mathcal{E}_1 и \mathcal{E}_2 – эдс 1-го и 2-го источников тока;

\mathcal{E}_L – индукционная эдс, наводимая в индуктивном элементе.

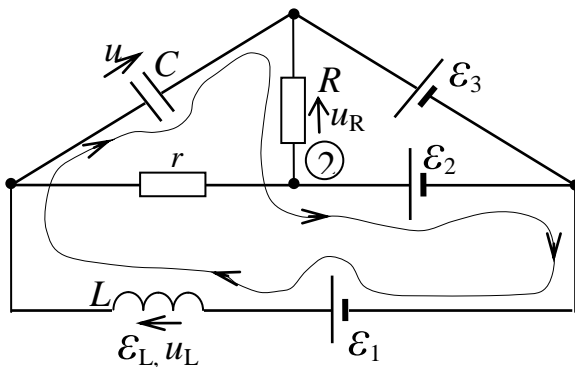


Рис.3.2.5. К правилу Кирхгофа для контура

* Мы считаем, что никакая эдс в резистивных элементах не создается.

Если внутренние сопротивления источников тока \mathcal{E}_1 и \mathcal{E}_2 , а также индуктивного элемента L малы, то внутренние (результирующие) напряжения в этих элементах тоже малы: $u_{\text{вн1}} \approx u_{\text{вн2}} \approx u_{\text{вн}_L} \approx 0$. Это сразу получается из обобщенного закона Ома, записанного для внутренних проводников этих элементов:

$u_{\text{BH}} = r_{\text{BH}} \cdot i$. Здесь $r_{\text{BH}} = 0$ и, значит, $u_{\text{BH}} = 0$ для всех этих элементов. Тогда предыдущее уравнение становится таким:

$$u_C - u_R = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_L - \mathcal{E}_2.$$

Для отдельных элементов рассмотренного контура выполняются зависимости: $i_C = C \cdot \frac{du_C}{dt}$, $u_R = R \cdot i_R$, $\mathcal{E}_L = -L \frac{di_L}{dt}$, где i_C – ток через емкость, C – величина емкости, i_R – ток в сопротивлении R , i_L – ток в катушке, L – индуктивность катушки.

Итак, в уравнении (2), выражающем второе правило Кирхгофа, напряжения u , входящие в сумму слева, имеют следующий смысл:

u_R – напряжение (разность потенциалов) на резистивном элементе, равное $u_R = R \cdot i_R$, где R – сопротивление элемента, i_R – ток через него;

u_{BH_L} – внутреннее, полное напряжение на индуктивном элементе, равное $u_{\text{BH}_L} = r i_L$, где r – сопротивление элемента, i_L – ток через него. На идеальном ($r = 0$) индуктивном элементе полное напряжение равно нулю: $u_{\text{BH}_L} = 0$;

u_C – напряжение (разность потенциалов) на емкостном элементе. Для u_C закон Ома, разумеется, записать нельзя;

и, наконец, u_{BH} – внутреннее напряжение источника тока, тоже выражаемое, как и для всех других проводящих элементов, формулой $u_{\text{BH}} = r_{\text{BH}} i$, где r_{BH} – внутреннее сопротивление источника, i – ток через него. Для идеального источника ($r_{\text{BH}} = 0$) внутреннее напряжение равно нулю: $u_{\text{BH}} = 0$.

Правила Кирхгофа не несут в себе новых законов электромагнитного поля. Выше мы убедились, что первое правило выражает не что иное, как уравнение непрерывности стационарных и квазистационарных токов, следующее из закона сохранения заряда. Второе правило Кирхгофа вытекает из свойства потенциальных сил и напряжений совершать нулевую работу по замкнутому пути. Поэтому указанные положения и называют правилами, а не законами (хотя иногда их называют законами).

Ввиду сказанного правила Кирхгофа строго применимы лишь к стационарным и практически строго к квазистационарным (медленнопеременным) токам, поскольку первое правило опирается на уравнение таких токов (1), а второе использует понятия электрического напряжения и потенциала, бесполезных для быстро меняющихся полей. Известное исключение составляют длинные линии. Токи в них хотя и не установившиеся по всей длине линии, но на ее коротких, элементарных отрезках их можно считать установившимися, квазистационарными и применять к этим отрезкам правила Кирхгофа.

Составление замкнутой системы уравнений цепи. Чтобы рассчитать токи в цепи, надо применить правила Кирхгофа для узлов и контуров цепи и записать уравнения для всех элементов цепи. В результате можно получить замкнутую систему независимых уравнений относительно всех неизвестных токов и напряжений цепи. Система уравнений называется замкнутой, если число неиз-

вестных в ней равно числу уравнений. Уравнения называют независимыми, если они не выводятся друг из друга путем тождественных преобразований. Решив эти уравнения, мы найдем искомые токи и напряжения на элементах.

При расчете цепей постоянного и переменного (медленно переменного, квазистационарного) тока с применением правил Кирхгофа необходимо:

1. Выбрать произвольное направление токов во всех ветвях цепи. Направления неизвестных напряжений и эдс на элементах тоже можно взять произвольным. Удобно взять их совпадающими с выбранными направлениями токов в тех же ветвях.
2. Записать уравнения для узлов и контуров по правилам Кирхгофа. Применяя первое правило, надо считать токи в уравнении (1) втекающими в узел, если их выбранные положительные направления идут к узлу, и вытекающими из узла – если их направления взяты от узла. Применяя второе правило Кирхгофа, надо учитывать направление обхода контура. Напряжения и эдс берутся в уравнении (2) со знаком плюс, если их выбранные направления совпадают с направлением обхода, и со знаком минус – если противоположны обходу.
3. Составить столько независимых уравнений, чтобы их число было равно числу искомых величин, и решить их.
4. В результате решения определяются истинные направления токов и напряжений. Если ток (напряжение) получился положительным, то его направление было выбрано правильно, и он действительно течет (действует) в этом направлении. Если искомый ток (напряжение) получился отрицательным, то на самом деле он течет (действует) в направлении, противоположном выбранному.