$\boxed{6.97}$

$\psi(r) = A\cdot\exp\left(\frac{-r}{r_1}\right)$

$r_{вер}$

F_{cp}

U_{cp}

$$r_{cp} = \int_0^\infty r\cdot\psi\cdot\overline{\psi}\,dr = \int_0^\infty r\,dP \qquad \text{(как мат. ожидание)}$$

$$dP = \psi(r)^2\cdot dV \qquad dV = 4\cdot\pi\cdot r^2 dr \qquad dP = \psi(r)^2 \times 4\cdot\pi\cdot r^2\,dr = A^2\cdot\exp\left(2\cdot\frac{-r}{r_1}\right)\times 4\cdot\pi\cdot r^2\,dr$$

$$P(r) = A^2\cdot\exp\left(2\cdot\frac{-r}{r_1}\right)\times 4\cdot\pi\cdot r^2$$

т. к. $r_{вер}$ - мода случайной велечины r с плотностью P(r), то она находится как экстремум фцнкции P(r)

$$\frac{d}{dr}P(r) = 0 \qquad \frac{d}{dr}A^2\cdot\exp\left(2\cdot\frac{-r}{r_1}\right)\cdot 4\cdot\pi\cdot r^2 \rightarrow -8\cdot\frac{A^2}{r_1}\cdot\exp\left(-2\cdot\frac{r}{r_1}\right)\cdot\pi\cdot r^2 + 8\cdot A^2\cdot\exp\left(-2\cdot\frac{r}{r_1}\right)\cdot\pi\cdot r$$

$$-8\cdot\frac{A^2}{r_1}\cdot\exp\left(-2\cdot\frac{r}{r_1}\right)\cdot\pi\cdot r^2 + 8\cdot A^2\cdot\exp\left(-2\cdot\frac{r}{r_1}\right)\cdot\pi\cdot r = 0 \qquad r_{вер} = r_1$$

$Z = 1$

$$F(r) = \frac{1}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_0}\cdot\frac{Z\cdot e^2}{r^2} \qquad F(r) = k\cdot\frac{e^2}{r^2}$$

$$U(r) = \frac{-1}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_0}\cdot\frac{Z\cdot e^2}{r} \qquad U(r) = -k\cdot\frac{e^2}{r}$$

как мат. ожидания:

$$F_{cp} = \int_0^\infty F(r)\cdot P(r)\,dr$$

$$U_{cp} = \int_0^\infty U(r)\cdot P(r)\,dr$$

условие нормировки:

$$\int_0^\infty \psi\cdot\overline{\psi}\,dV = 1 \qquad \int_0^\infty A^2\cdot\exp\left(2\cdot\frac{-r}{r_1}\right)\cdot 4\cdot\pi\cdot r^2\,dr = 1$$

В интегралах будем производить замену $2\cdot\frac{r}{r_1} = z \qquad r = \frac{1}{2}\cdot z\cdot r_1 \qquad dr = \frac{1}{2}r_1\cdot dz$

$$\int_0^\infty A^2\cdot\exp(-z)\cdot 4\cdot\pi\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot z\cdot r_1\right)^2\cdot\frac{r_1}{2}\,dz = 1 \rightarrow A^2\cdot\pi\cdot r_1^{\,3} = 1 \qquad A^2 = \frac{1}{\pi\cdot r_1^{\,3}}$$

$$F_{cp} = \int_0^\infty F(r)\cdot P(r)\,dr = \int_0^\infty k\cdot\frac{e^2}{r^2}\cdot\psi(r)^2\cdot 4\cdot\pi\cdot r^2\,dr = \int_0^\infty k\cdot e^2\cdot\left(A^2\cdot\exp\left(2\cdot\frac{-r}{r_1}\right)\right)\cdot 4\cdot\pi\,dr$$

$$F_{cp} = \int_0^\infty k\cdot e^2\cdot\left(A^2\cdot\exp(-z)\right)\cdot 4\cdot\pi\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot r_1\right)dz \rightarrow F_{cp} = 2\cdot k\cdot e^2\cdot A^2\cdot\pi\cdot r_1 \qquad F_{cp} = 2\cdot k\cdot e^2\cdot A^2\cdot\pi\cdot r_1 = 2\cdot k\cdot e^2\cdot\frac{1}{\pi\cdot r_1^{\,3}}\cdot\pi\cdot r_1 = \frac{2\cdot k\cdot e^2}{r_1^{\,2}}$$

$$U_{cp} = \int_0^\infty U(r)\cdot P(r)\,dr = \int_0^\infty k\cdot\frac{-e^2}{r}\cdot\psi(r)^2\cdot 4\cdot\pi\cdot r^2\,dr = \int_0^\infty -k\cdot e^2\cdot\left(A^2\cdot\exp\left(2\cdot\frac{-r}{r_1}\right)\right)\cdot 4\cdot\pi\cdot r\,dr$$

$$U_{cp} = \int_0^\infty -k\cdot e^2\cdot\left(A^2\cdot\exp(-z)\right)\cdot 4\cdot\pi\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot z\cdot r_1\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot r_1\right)dz \rightarrow U_{cp} = -k\cdot e^2\cdot A^2\cdot\pi\cdot r_1^{\,2} \qquad U_{cp} = -k\cdot e^2\cdot A^2\cdot\pi\cdot r_1^{\,2} = -k\cdot e^2\cdot\frac{1}{\pi\cdot r_1^{\,3}}\cdot\pi\cdot r_1^{\,2} = \frac{-k\cdot e^2}{r_1}$$

$\boxed{6.99}$

$U(x) = \kappa\cdot x^2$

$\psi(x) = A\cdot e^{-\alpha\cdot x^2}$

$$U_{cp} = \int_0^\infty U(x)\cdot\psi(x)^2\,dx = \int_0^\infty \kappa\cdot x^2\cdot A^2\cdot e^{-2\alpha\cdot x^2}\,dx$$ (находим как мат. ожидание)

Пусть $2\cdot\alpha\cdot x^2 = z$ $\quad x = \sqrt{\frac{z}{2\alpha}}$ $\quad dx = \frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{z\cdot\alpha}}$

$$U_{cp} = \int_0^\infty \kappa\cdot\left(\sqrt{\frac{z}{2\cdot\alpha}}\right)^2\cdot A^2\cdot e^{-z}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{z\cdot\alpha}}\right)dz \to U_{cp} = \frac{1}{16\cdot\alpha^{\frac{3}{2}}}\cdot\pi^{\frac{1}{2}}\cdot\kappa\cdot A^2\cdot\sqrt{2}$$

$$\int_0^\infty \psi(x)^2\,dx = 1 \qquad \int_0^\infty A^2\cdot e^{-2\alpha\cdot x^2}\,dx = 1$$ (условие нормировки)

$$\int_0^\infty A^2\cdot e^{-z}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{z\cdot\alpha}}\right)dz = 1 \to \frac{1}{4}\cdot\frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{\alpha^{\frac{1}{2}}}\cdot A^2\cdot\sqrt{2} = 1 \qquad U_{cp} = \frac{1}{4\cdot\alpha}\cdot\frac{1}{4\cdot\alpha^{\frac{1}{2}}}\cdot\pi^{\frac{1}{2}}\cdot\kappa\cdot A^2\cdot\sqrt{2} = \frac{1}{4\cdot\alpha}\cdot\kappa$$

обозначим $\xi = \frac{h}{2\pi}$

Уравнение Шредингера $\frac{d^2}{dx^2}\psi + \frac{2m}{\xi^2}\cdot(E - U)\cdot\psi = 0$

$$\frac{d^2}{dx^2}A\cdot e^{-\alpha\cdot x^2} + \frac{2m}{\xi^2}\cdot\left(E - \kappa\cdot x^2\right)\cdot\left(A\cdot e^{-\alpha\cdot x^2}\right) = 0 \to -2\cdot A\cdot\alpha\cdot\exp\left(-\alpha\cdot x^2\right) + 4\cdot A\cdot\alpha^2\cdot x^2\cdot\exp\left(-\alpha\cdot x^2\right) + 2\cdot\frac{m}{\xi^2}\cdot\left(E - \kappa\cdot x^2\right)\cdot A\cdot\exp\left(-\alpha\cdot x^2\right) = 0$$

$$-\alpha + 2\cdot\alpha^2\cdot x^2 + \frac{m}{\xi^2}\cdot\left(E - \kappa\cdot x^2\right) = 0 \qquad \left(2\cdot\alpha^2 - \frac{m}{\xi^2}\cdot\kappa\right)\cdot x^2 - \alpha + \frac{m}{\xi^2}\cdot E = 0 \qquad 2\cdot\alpha^2 - \frac{m}{\xi^2}\cdot\kappa = 0$$

$$\alpha = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{(m\cdot\kappa)^{\frac{1}{2}}}{\xi} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{m\cdot\kappa}}{\xi} \qquad U_{cp} = \frac{1}{4\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{m\cdot\kappa}}{\xi}\right)}\cdot\kappa = \frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\xi\cdot\sqrt{\frac{\kappa}{m}}$$

$\boxed{6.102}$

m

E

R $\quad E > U_0$

$x_{эф}$ $\quad E < U_0$

$$\frac{d^2}{dx^2}\psi + \frac{2m}{\xi^2}\cdot(E - U)\cdot\psi = 0$$

$\boxed{E > U_0}$

(1) $\quad x < 0 \quad U = 0 \qquad \sqrt{\frac{2m}{\xi^2}\cdot E} = k \qquad \psi'' + k^2\psi = 0$

Решение вида: $\quad \psi_1(x) = A_1\cdot e^{i\cdot k_1\cdot x} + B_1\cdot e^{-i\cdot k_1\cdot x}$

где, мнимый компонент $B_1\cdot e^{-i\cdot k_1\cdot x}$ определяет волну, которая распространяется в обратном направлении (отражается от барьера).

(2) $\quad x > 0 \quad U = U_0 \qquad \sqrt{\frac{2m}{\xi^2}\cdot\left(E - U_0\right)} = k \qquad \psi'' + k^2\psi = 0$

Решение вида: $\psi_2(x) = A_2 \cdot e^{i \cdot k_2 \cdot x} + B_2 \cdot e^{-i \cdot k_2 \cdot x}$ $B_2 = 0$ (за барьером нет отраженной волны)

$R = \frac{I_{отр.}^2}{I_{пад.}^2}$ т. к. R имеет смысл только при $x < 0$ $I_{отр.} = B_1$ $I_{пад.} = A_1$ $R = \left(\frac{B_1}{A_1}\right)^2$

Рассматриваем условия непрерывности $\psi(x)$ на барьере ($x = 0$)

$\psi_1(0) = \psi_2(0)$ $A_1 + B_1 = A_2$

$\frac{d}{dx}\psi_1(0) = \frac{d}{dx}\psi_2(0)$ $A_1 \cdot k_1 - B_1 \cdot k_1 = A_2 \cdot k_2$ $A_2 = k_1 \cdot \frac{(A_1 - B_1)}{k_2}$

$A_1 + B_1 = k_1 \cdot \frac{(A_1 - B_1)}{k_2}$ $\frac{B_1}{A_1} = \frac{(-k_2 + k_1)}{(k_2 + k_1)}$ $R = \left(\frac{-k_2 + k_1}{k_2 + k_1}\right)^2$

$\boxed{E < U_0}$

$x > 0$ $U = U_0$ $\sqrt{\frac{2m}{\xi^2} \cdot (U_0 - E)} = k$ $\psi'' - k^2\psi = 0$

Решение вида: $\psi(x) = A \cdot e^{k \cdot x} + B \cdot e^{-k \cdot x}$ $A = 0$ (требование кончности в пределах от 0 до ∞)

$\psi(x) = B \cdot e^{-k \cdot x}$ $p(x) = \psi(x)^2 = B^2 \cdot e^{-2k \cdot x}$ $\frac{p(0)}{p(x_{эф})} = e$ $\frac{B^2 \cdot e^{-2k \cdot 0}}{B^2 \cdot e^{-2k \cdot x_{эф}}} = e$

$e^{2k \cdot x_{эф}} = e$ $x_{эф} = \frac{1}{2 \cdot k}$

$\boxed{6.103}$

$$D = \exp\left[\frac{-2}{\xi} \cdot \int_{L_1}^{L_2} \sqrt{2m \cdot (U(x) - E)}\, dx\right]$$

E

L

U_0

(1) $U(x) = U_0$

Пусть левая стенка барьера совпадает с началом координат ($x = 0$), тогда $L_1 = 0$ $L_2 = L$

$$D = \exp\left[\frac{-2}{\xi} \cdot \int_0^L \sqrt{2 \cdot m \cdot (U_0 - E)}\, dx\right] = \exp\left[\frac{-2}{\xi} \cdot L \cdot \sqrt{2 \cdot m(U_0 - E)}\right]$$

D

(2) $U(x) = \frac{U_0}{L} \cdot x$

Условие существования барьера

$\frac{U_0}{L} \cdot x > E$ $\frac{U_0}{L} \cdot x - E > 0$

Пусть $L_2 = L$ и $\frac{U_0}{L} \cdot L_1 - E = 0$ тогда левая стенка барьера $L_1 = \frac{E}{U_0} \cdot L$

$$D = \exp\left[\frac{-2}{\xi} \cdot \int_{\frac{E}{U_0} \cdot L}^{L} \sqrt{2m \cdot \left(\frac{U_0}{L} \cdot x - E\right)}\, dx\right] \rightarrow D = \exp\left[\frac{-4}{3 \cdot \xi} \cdot \frac{(m \cdot U_0 - m \cdot E)^{\frac{3}{2}}}{m \cdot U_0} \cdot L \cdot \sqrt{2}\right]$$

$\boxed{???}$

$\boxed{6.104}$

$$U(x) = U_0\cdot\left(1 - \frac{x^2}{L^2}\right) \qquad D = \exp\left[\frac{-2}{\xi}\cdot\int_{L_1}^{L_2}\sqrt{2m\cdot(U(x) - E)}\,dx\right]$$

E $\qquad L_1 \quad L_2$ находим из условия: $\quad U_0\cdot\left(1 - \frac{x^2}{L^2}\right) = E$

D $$\begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -L\cdot\sqrt{\dfrac{U_0 - E}{U_0}} \\ L\cdot\sqrt{\dfrac{U_0 - E}{U_0}} \end{pmatrix}$$

$$D = \exp\left[\frac{-2}{\xi}\cdot\int_{-L\cdot\sqrt{\frac{U_0-E}{U_0}}}^{L\cdot\sqrt{\frac{U_0-E}{U_0}}}\sqrt{2m\cdot\left[U_0\cdot\left(1 - \frac{x^2}{L^2}\right) - E\right]}\,dx\right] = \exp\left[\frac{-2}{\xi}\cdot 2\cdot\int_{0}^{L\cdot\sqrt{\frac{U_0-E}{U_0}}}\sqrt{2m\cdot\left[U_0\cdot\left(1 - \frac{x^2}{L^2}\right) - E\right]}\,dx\right]$$

$$2\cdot\int_{0}^{L\cdot\sqrt{\frac{U_0-E}{U_0}}}\sqrt{2\cdot m\cdot\left[U_0\cdot\left(1 - \frac{x^2}{L^2}\right) - E\right]}\,dx = \frac{-1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot m\cdot\left(E - U_0\right)\cdot\frac{\ln(-1)}{\left(\sqrt{-m\cdot\frac{U_0}{L^2}}\right)} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot m\cdot\left(U_0 - E\right)\cdot\frac{\pi}{\left(\sqrt{m\cdot\frac{U_0}{L^2}}\right)} = \frac{\pi\cdot L}{2}\cdot\sqrt{\frac{2m}{U_0}}\cdot\left(U_0 - E\right)$$

$$D = e^{-\frac{\pi\cdot L}{\xi}\cdot\sqrt{\frac{2\cdot m}{U_0}}\cdot\left(U_0 - E\right)}$$