2. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Математическое программирование – дисциплина, которая занимается изучением экстремальных задач и поисками методов их решения.

Указанная область исследования операций весьма схематично и приближённо представлена на рисунке 2.1, позаимствованном из [69]. Наименование блоков, представленных нумерацией, суть следующее.

1. Классические методы математического анализа.
2. Динамическое программирование.
3. Принцип Максимума Понтрягина.
4. Дискретный принцип максимума.
5. Ограничения отсутствуют либо в форме равенства.
6. Много ограничений
7. непрерывный процесс (8 – 11 задачи математического программирования)
8. Критерий $K = F(x_1, x_2, \ldots x_n)$ (минимизируется или максимизируется)
9. Ограничения
10. Число этапов
11. Тип процесса
12. Линейная функция
13. Нелинейная функция
14. В форме неравенств
15. Один
16. Много
17. Случайный
18. Выпуклая
19. Вогнутая
20. Требования целочисленности значений переменных
21. Линейное программирование
22. Нелинейное программирование
23. Целочисленное программирование
24. Стохастическое программирование
25. Блочное программирование
26. Параметрическое программирование

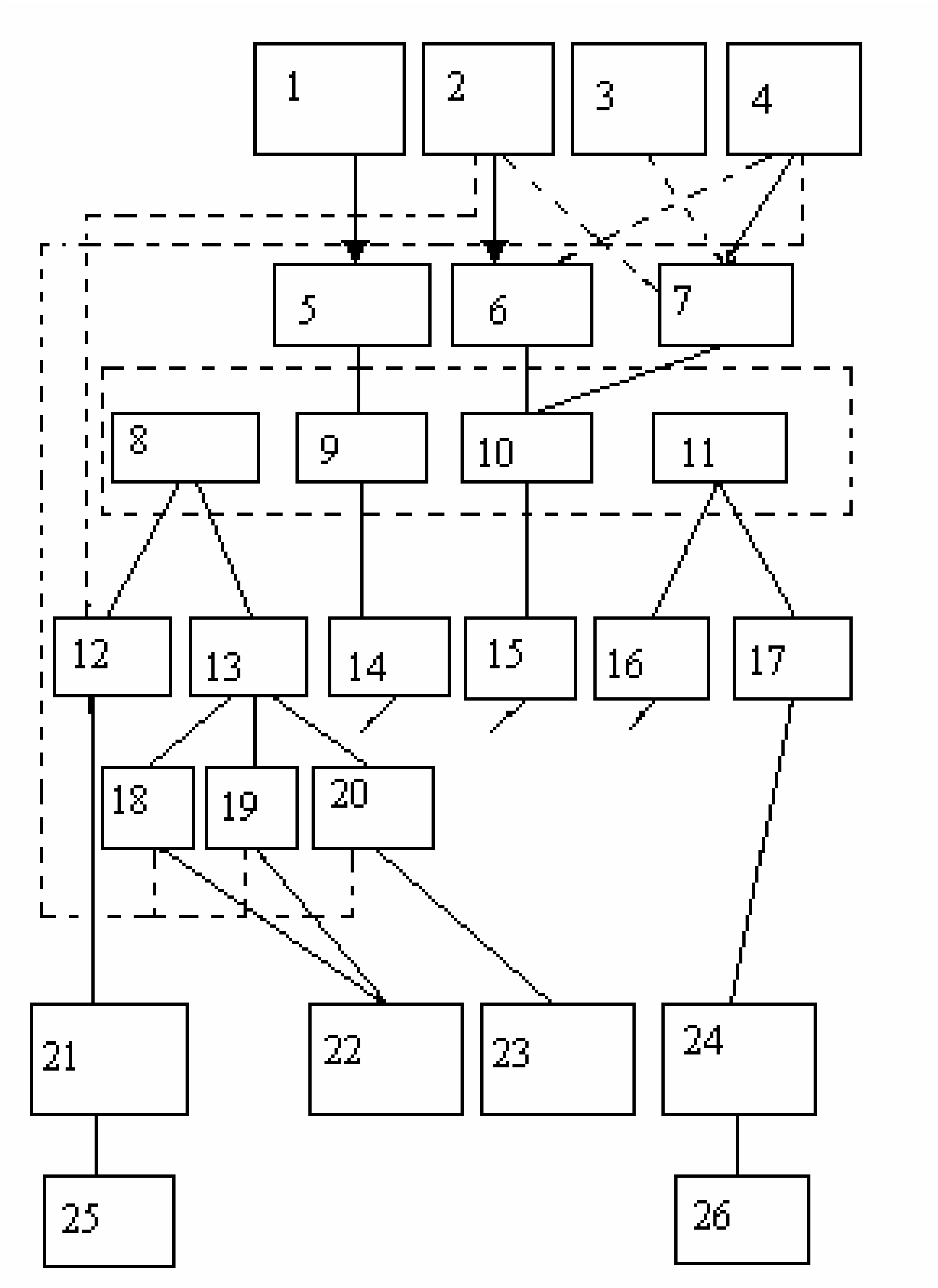

Рисунок 2.1 - Классификация задач математического программирования

2.1 Задачи математического программирования

Задачи математического программирования формируется следующим образом: [2, 17, 23, 26]

Пусть $f(x_1,\ x_2,\ \dots\ x_n)$ – функция нескольких переменных, а функции $g_i(x_1, x_2, \dots x_n) * b_i$, $i = 1, 2, \dots n$, – ограничения, связанные с переменными, где b_i – некоторое действительное число, а символ * – одно из ограничений вида ≥, ≤ или =.

Требуется найти минимум или максимум функции f при заданных ограничениях g_i . Функция f называется ***функцией цели*** или ***целевой функцией.***

В зависимости от вида функций f и g_i задача математического программирования бывает следующих видов:

1. Задача линейного программирования (ЗЛП), если f и g_i линейны.
2. Задача нелинейного программирования (ЗНП или НП-задача, НПЗ), если хотя бы одна из функций нелинейная.

Задачи делятся на классы:

1. Задача целочисленного программирования (ЦП), когда вектор переменных $X^T = \{x_1, x_2, \dots x_n\}$ целочисленный.
2. Задача параметрического программирования, если функции f и g_i зависят от параметров.
3. Если f – дробно-линейная функция, а ограничения g_i – линейны, то имеем задачу дробно-линейного программирования.
4. Стохастическое программирование, если среди компонентов функций f или g_i присутствуют случайные величины.
5. Динамическое программирование – многоэтапный процесс нахождения решения, при этом функции f и g_i зависит от времени или состояния (номера шага или этапа).

2.2. Линейное программирование [2, 3, 7, 24, 27]

Линейное программирование – решение экстремальных задач математического программирования с линейной зависимостью между переменными.

Важнейшие (основные) методы решения задач линейного программирования суть следующие:

1. Графический метод.
2. Прямой симплекс-метод (метод симплекс-таблиц).
3. Метод искусственного базиса.

4. Модифицированный симплекс-метод.

5. Двойственный симплекс-метод.

Далее нами будут подробно изложены указанные методы, их алгоритмические особенности, условия применения.

2.2.1. Построение математической модели [10, 70, 74 – 77]

Пусть имеем следующее описание задачи (содержательную постановку), позаимствованную в [10].

Фирма выпускает продукцию из картофеля трех видов: картофельные кубики, картофельные дольки жареные, картофельные чипсы. По технологии картофель сортируют по размерам и качеству и направляют на различные поточные линии. Исходный продукт покупается у двух поставщиков. Производство продукции и относительная прибыль (итоговая) на единицу закупки от продажи изделий сведены в таблицу. Каждый продукт не должен превышать в изготовлении соответствующий объем, в противном случае фирма не будет успевать осуществлять его доставку и продажу.

	Поставщики		
Продукция	I	II	Объём производства
Кубики	0,2	0,3	1,8
Дольки	0,2	0,1	1,2
Чипсы	0,2	0,3	2,4
Прибыль	5	6	

Требуется определить, какие объемы картофеля следует закупать у того или иного поставщика.

Чтобы построить математическую модель в терминах исследования операций, необходимо выполнить следующие шаги.

1. Определить переменные, для которых будет составлена целевая функция и ограничения на нее.

2. Сформулировать цель решение и составить функцию.

3. Составить ограничения задачи.

Продемонстрируем данную последовательность действий на изложенном выше содержательном примере.

Пусть k_1 - объем картофеля, закупаемого у первого поставщика, а k_2 - у второго. Тогда целевая функция (функция цели, или, сокращённо, ЦФ) будет выглядеть так:

$$f = 5k_1 + 6k_2 \to \max.$$

Поскольку речь идёт о прибыли, и, чем больше прибыль, тем лучше, то функция цели максимизируется.

Ограничения определяются строками таблицы, вид знака в ограничениях определяется словосочетанием “не должен превышать”:

$$\begin{cases} 0{,}2k_1 + 0{,}3k_2 \le 1{,}8; \\ 0{,}2k_1 + 0{,}1k_2 \le 1{,}2; \\ 0{,}3k_1 + 0{,}3k_2 \le 2{,}4; \\ k_1 \ge 0; \\ k_2 \ge 0. \end{cases}$$

Последние два ограничения называются ограничениями неотрицательности, они могут присутствовать в записи математической модели, а могут и опускаться, но всегда учитываются.

Важнейшими свойствами линейных моделей являются:

1) пропорциональность;

2) аддитивность.

То есть одна из эквивалентных моделей для данной задачи может иметь вид

$$f = 5x_1 + 6x_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 18; \\ 2x_1 + 1x_2 \le 12; \\ 3x_1 + 3x_2 \le 24; \\ x_1 \ge 0; \\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

По сравнению с исходной, каждое из ограничений задачи пропорционально увеличено в десять раз. Свойство аддитивности означает возможность добавлять новые ограничения, паче такие возникнут. В данном примере эта возможность не понадобилась.

2.2.2. Решение ЗЛП графическим методом[3, 7, 33, 34]

Областью применения данного метода будут задачи с числом переменных равным двум.

Для демонстрации метода обратимся к задаче, сформулированной выше.

$$f = 5k_1 + 6k_2 \to \max,$$
$$\begin{cases} 0{,}2k_1 + 0{,}3k_2 \le 1{,}8; \\ 0{,}2k_1 + 0{,}1k_2 \le 1{,}2; \\ 0{,}3k_1 + 0{,}3k_2 \le 2{,}4; \\ k_1 \ge 0; \\ k_2 \ge 0. \end{cases}$$

Каждому из неравенств соответствует некая полуплоскость в координатах (k_1, k_2), ограниченная прямой, построенной для случая, когда в ограничениях знак неравенства заменён знаком равенства.

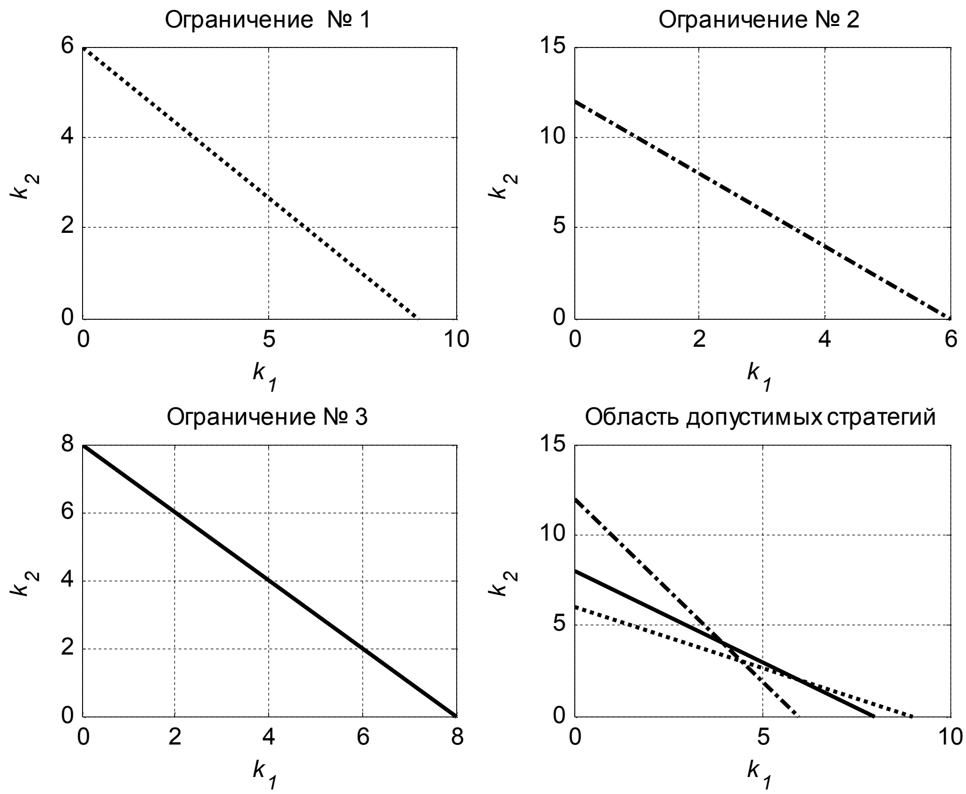

Рисунок 2.2 – Построение области ограничений

Для того, чтобы определить, по какую сторону от ограничивающей прямой находится область, необходимо подставить координаты точки начала (0, 0) в исходное ограничение и проследить, выполняется ли оно. Если неравенство выполняется, то точка (0, 0) принадлежит области. Следовательно, область распространяется, начиная от прямой, в направлении начала координат. Если неравенство не выполняется, начало координат (0, 0) не принадлежит области

Пересечение областей, соответствующих отдельным ограничениям, определяет область допустимых решений, называемой также областью допустимых стратегий. Ход построения областей иллюстрируется на рисунке 2.2.

Из приведённых рисунков видно, что неравенство № 3 не оказывает влияния на область допустимых стратегий закупок.

Рассмотрим целевую функцию $f(k_1, k_2)=5k_1+6k_2$. Выясним, существует ли экстремумы для данной функции?

Имеем $\frac{\partial f(k_1,k_2)}{\partial k_1} = c_1 = 5$ и $\frac{\partial f(k_1,k_2)}{\partial k_2} = c_2 = 6$.Это характеризует монотонно изменяющуюся функцию со скоростями изменения в указанных направлениях, определяемых этими частными производными.

Вектор, направленный от начала координат к точке с координатами (c_1, c_2), представляет собой нормаль к плоскости, определяемой целевой функцией f.

Нормаль ***перпендикулярна линии пересечения*** плоскости целевой функции с координатной плоскостью, а также ***проекциям линий равного уровня*** целевой функции на координатную плоскость.

Кроме того вектор нормали ***указывает направление возрастания*** целевой функции, а антинормаль, вектор, противоположный нормали –
– направление, в котором функция цели убывает.

Поэтому мы должны двигать перпендикуляр (который изображает местоположение равных значений функции) вдоль нормали, пока он не пересечёт границу области допустимых стратегий.

Направление движения определяется видом оптимизации:

- при решении задачи минимизации – от точки с координатами (c_1, c_2) к началу координат;
- при решении задачи максимизации – от начала координат к точке с координатами (c_1, c_2).

Обобщим наши рассуждения в виде алгоритма, приводимого в [3, 33, 34, 79, 83].

Алгоритм графического метода

1. Построить допустимое множество решений.

2. Построить нормаль к целевой функции и изобразить её проекцию на плоскости решений. Направление нормали указывают направление возрастания целевой функции.

3. Перемещать перпендикуляр к нормали до тех пор, пока он не достигнет крайней точки множества допустимых стратегий.

4. Определить значения координат крайней точки допустимого множества либо непосредственно по графику, либо по уравнениям ограничивающих прямых, пересекающихся в крайней точке.

5. Вычислить значение целевой функции, соответствующее оптимуму.

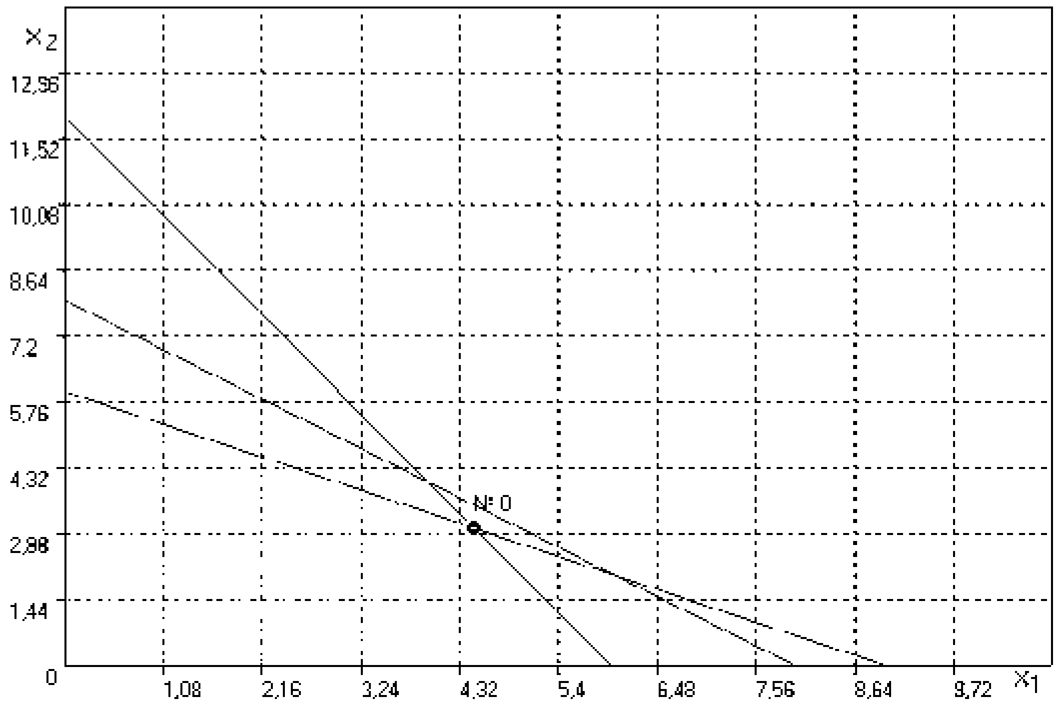

Рисунок 2.3 – Оптимум, найденный графическим методом

В ходе решения на различных наборах исходных данных иногда возникают ***частные случаи*** [33]:

1. Линия, ограничивающая область в направлении оптимизации, перпендикулярна нормали.
2. Область незамкнута в направлении оптимизации.
3. Несовместная система условий.
4. Невыпуклость области.

Алгоритм вполне распространим и на многомерный случай. В этом случае имеем:

- гиперплоскости;
- полупространства;
- выпуклое полиэдральное множество;
- выпуклый полиэдральный конус.

Проблемы заключаются в визуализации всего этого великолепия. Поэтому, как замечено выше, областью применения данного метода будут задачи с числом переменных равным двум.

Из решения, приведённого на рисунке 2.3, следует, что решение находится в крайней точке, определяемой пересечением прямых линий, соответствующих неравенствам 1 и 2. Поэтому для точного отыскания точки оптимума, достаточно решить систему уравнений вида

$$\begin{cases} 0{,}2k_1 + 0{,}3k_2 = 1{,}8; \\ 0{,}2k_1 + 0{,}1k_2 = 1{,}2. \end{cases}$$

Вычислим главный и вспомогательные определители этой системы:

$$\Delta = \begin{bmatrix} 0{,}2 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}1 \end{bmatrix} = -0{,}04\,,\ \Delta_1 = \begin{bmatrix} 1{,}8 & 0{,}3 \\ 1{,}2 & 0{,}1 \end{bmatrix} = -0{,}18\,,\ \Delta_2 = \begin{bmatrix} 0{,}2 & 1{,}8 \\ 0{,}2 & 1{,}2 \end{bmatrix} = -0{,}12\,,$$

откуда k_1 = 4,5, k_2 = 3, а значение функции цели после подстановки составляет f_{opt} = 40,5.

2.2.3. Расширенная (каноническая) форма записи ЗЛП [7, 8, 17, 18]

В общем виде ЗЛП, как мы знаем из предыдущего материала, формулируется следующим образом.

Найти максимум (минимум) целевой функции

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{2.1}$$

при заданных условиях (ограничениях)

$$\left.\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le b_1, \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le b_2, \\ &... \\ &a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \le b_{m1} \end{aligned}\right\} \text{ и} \tag{2.2}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, ..., x_n \ge 0\,. \tag{2.3}$$

Ограничения (2.3) называются ограничениями ***неотрицательности***, а запись (2.1) – (2.3) называется ***развёрнутой***. Когда в ограничениях (3.2) присутствуют наряду с неравенствами равенства, говорят о ***смешанной***

форме записи, а когда только равенства, то такая форма называется ***канонической***.

Задачу записывают еще в матричной форме

$$
\begin{aligned}
&Z = C^T X \to \max, \\
&AX \le B = A_0.
\end{aligned} \qquad (2.4)
$$

где обозначено:

- A – матрица ограничений размерностью $[m \times n]$;
- X – вектор переменных (неизвестных), которые называются основными, размерностью $[n \times 1]$;
- B – вектор свободных членов $[m \times 1]$;
- C – вектор коэффициентов линейной формы $[n \times 1]$.

Данная задача может быть записана и в векторной форме:

$$
\left.
\begin{aligned}
&A_1 x_1 + A_2 x_2 + \ldots A_n x_n \le B, \ \textit{где} \\
&A_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \cdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \ldots, A_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \cdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}, A_0 \equiv B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{bmatrix}
\end{aligned}
\right\}. \qquad (2.5)
$$

Для решения задачи необходимо привести ограничения задачи от ограничений типа “неравенство” к ограничениям типа “равенство”. С этой целью необходимо ввести ***дополнительные*** переменные (в отличие от основных, входящих изначально в условие) $x_{n+1} \ge 0$, $x_{n+2} \ge 0, \ldots$, $x_{n+m} \ge 0$, которые превращают неравенства (2.2) в равенства. Эта форма записи, по отношению к исходной математической модели, называется ***расширенной***.

Целевая функция при этом примет вид

$$
f(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n + 0x_{n+1} + \ldots + 0x_{n+m},
$$

а система ограничений, путём введения дополнительных переменных в каждое ограничение, придёт в каноническую форму:

$$
\left.
\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + 1x_{n+1} + 0x_{n+2} + \ldots + 0x_{n+m} = b_1, \\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + 0x_{n+1} + 1x_{n+2} + \ldots + 0x_{n+m} = b_2, \\
&\ldots \\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + 0x_{n+1} + 0x_{n+2} + \ldots + 1x_{n+m} = b_{m1}.
\end{aligned}
\right\} \qquad (2.6)
$$

В матричной форме эта система выглядит следующим образом:

$$AX + EX_{доп} = B\,.$$

Решения расширенной и исходной задачи, в области основных переменных, совпадают, как это видно из нижерасположенного рисунка 2.4, приведённого в [33].

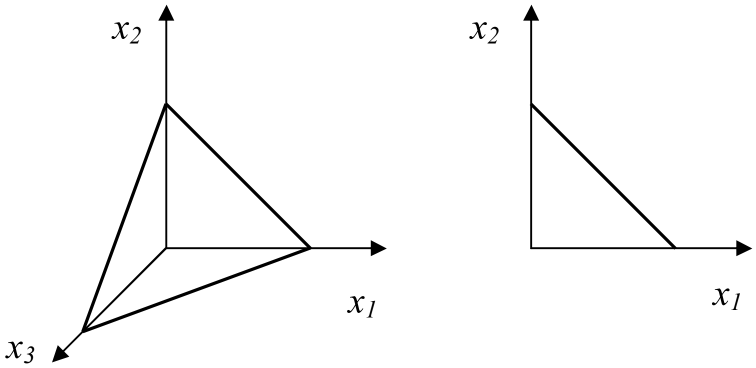

Рисунок 2.4 – Оптимальное решение в трёхмерном и двумерном пространствах

Поэтому, после получения оптимального решения дополнительные переменные можно отбросить. Содержательный смысл значения дополнительной переменной, входящей в оптимальное решение задачи, заключается в том, что это та величина, на которую отличаются левая и правая части соответствующего неравенства.

2.2.4. Определения и теоремы линейного программирования [33]

Допустимые решения – это совокупность чисел $\{x_1,\ x_2,\ \ldots\ x_n\}$, удовлетворяющих ограничениям ***исходной задачи***.

Оптимальное решение – допустимое решение, на котором достигается экстремум (оптимум, максимум или минимум) целевой функции.

Опорный (базисный) план – допустимое решение канонической задачи, в которое входит система линейно независимых векторов A_j, соответствующих переменным x_j.

В качестве напоминания [20]: вектора $\{y_1,\ y_2,\ \ldots\ y_n\}$ линейно независимы, если существуют такие $\alpha,\ \beta,\ \ldots,\ \gamma$, что $\alpha y_1 + \beta y_2 + \ldots + \gamma y_n = 0$ при $\alpha \neq \beta \neq \ldots \neq \gamma \neq 0$.

Каждый вектор содержит m компонент, а ЗЛП не более чем m решений.

Невырожденный опорный план содержит ровно m положительных компонент [80 – 82].

Теорема 1[33]. Если целевая функция принимает экстремальное (максимальное или минимальное) значение в некоторой точке допустимого множества решений $\boldsymbol{R}_I$, то она принимает это значение в крайней точке $\boldsymbol{R}_I$. Если целевая функция принимает экстремальное значение более чем в одной крайней точке, то она принимает это же значение в любой их выпуклой комбинации.

Теорема 2[33]. Если существует такое независимое множество m-мерных векторов $A_1, A_2, \dots A_k$, $k \le m$, что $A_1 \cdot x_1 + A_2 \cdot x_2 + \dots + A_k \cdot x_k = A_0$, то n-мерный вектор

$$X^T = [x_1, x_2, \dots, x_k, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{\leftarrow n-k \rightarrow}]$$

есть крайняя точка допустимого множества $\boldsymbol{R}_I$.

Теорема 3[33]. Если X_0^T – крайняя точка допустимых решений множества $\boldsymbol{R}_I$, то решение X_0^T – ***допустимое базисное решение*** (ДБР) системы ограничений.

Следствия:

1. При отыскании оптимума достаточно рассмотреть только крайние точки допустимого множества решений.
2. Для отыскания оптимума достаточно перебрать допустимые базисные решения.

На указанные следствия базируются практически все методы решения ЗЛП.

В качестве справочной информации [17, 18, 20, 35].

Линейной комбинацией множества векторов $A_1, A_2, \dots, A_m$ называется вектор A^*, определяемый выражениями

$$A^* = \sum_{i=1}^{m} \beta_i \cdot A_i; \ \beta_i \ge 0, \ i = \overline{1,m}; \ \sum_{i=1}^{m} \beta_i = 1.$$

В частности, для $m = 2$ линейная комбинация такова: $A^* = \beta_1 A_1 + \beta_2 A_2 \Rightarrow \beta_1 A_1 + (1-\beta_1) A_2$, а для случая $m = 3$ – $A^* = \beta_1 A_1 + \beta_2 A_2 + \beta_3 A_3$. Ниже представлена графическая интерпретация этих двух случаев.

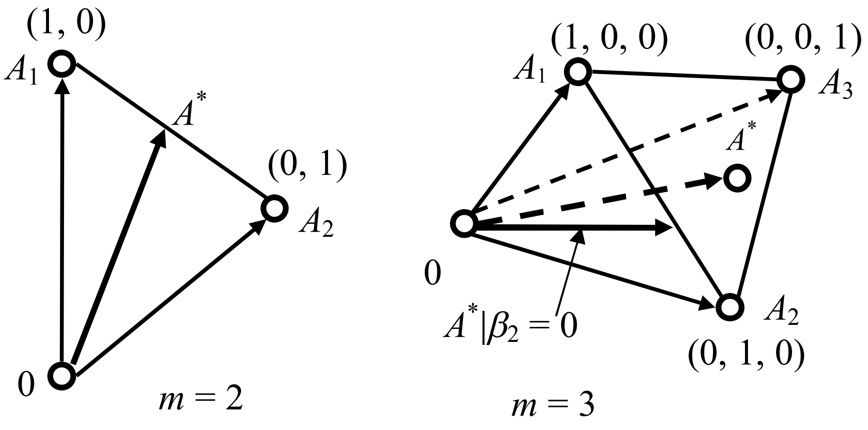

Рисунок 2.5 – Представление выпуклых комбинаций в в двумерном и трёхмерном пространствах

2.2.5 Решение ЗЛП прямым симплекс-методом [29 – 34]

Прямой симплекс-метод называется еще табличным, хотя использование таблиц присуще всем методам этой группы. Позволяет найти решение за конечное, хотя иногда и значительное, число шагов. Значение целевой функции при этом немонотонно возрастают (при решении задач на максимум) или немонотонно убывают (при решении задач на минимум).

Метод применяется, когда все ограничения системы имеют в записи знаки “≤”, то есть, математическая модель выглядит так.

$$
\begin{aligned}
& f(x_1, x_2, ..., x_n) \to opt \\
& \left.\begin{aligned}
& a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le b_1, \\
& a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le b_2, \\
& ... \\
& a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \le b_{m1},
\end{aligned}\right\} \\
& x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, ..., x_n \ge 0.
\end{aligned}
$$

Алгоритм прямого симплекс-метода

Алгоритм, структурная схема которого приведена на рисунке 2.6, включает следующие шаги: [3, 26, 27, 71, 72].

1. Приведение математической модели задачи к каноническому виду (2.6) и представление её в векторной форме (2.5).

Операция состоит во введении так называемых дополнительных переменных, преобразующих неравенства в равенства. При ограничениях “≤” указанные переменные введутся со знаком плюс. В результате имеем каноническую форму системы ограничений, и расширенную модель.

$$f(x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1}, ..., x_{n+m}) = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n + 0x_{n+1} + ... + 0x_{n+m} \to opt,$$

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n + 1x_{n+1} + 0x_{n+2} + ... + 0x_{n+m} = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n + 0x_{n+1} + 1x_{n+2} + ... + 0x_{n+m} = b_2, \\ ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n + 0x_{n+1} + 0x_{n+2} + ... + 1x_{n+m} = b_{m1}. \end{array}\right\}$$

Векторы, соответствующие дополнительным переменным канонической системы ограничений $A_{n+1}^T = [1 \ \dots \ 0]$, …, $A_{n+m}^T = [0 \ \dots \ 1]$, образуют начальный базис n-мерного пространства, с их помощью можно разложить любой из векторов, не вошедших в базис.

2. В качестве начального (опорного) решения выбирается крайняя точка, имеющая координаты: $X_0 = [0, 0, ..., 0, b_1, b_2, ..., b_m]$, что означает следующее: $x_1 = 0, x_2 = 0, ..., x_n = 0, x_{n+1} = b_1, x_{n+2} = b_2, ..., x_{n+m} = b_m$, то есть $E \times X_{ДОП} = A_0$.

3. Каноническая форма ЗЛП (2.6) совместно с координатами крайней точки помещается в так называемую симплекс-таблицу, общий вид которой представлен ниже.

		c_j	c_1	…	c_n	0	…	0
Базис	$C_Б$	A_0	A_1	…	A_n	A_{n+1}	…	A_{n+m}
A_{n+1}	0	b_1	a_{11}	…	a_{1n}	1	…	0
A_{n+2}	0	b_2	a_{22}	…	a_{2n}	0	…	0
…	…	…	…	…	…	…	…	…
A_{n+m}	0	b_m	a_{m1}	…	a_{mn}	0	…	1
	δ	δ_0	δ_1	…	δ_n	δ_{n+1}	…	δ_{n+m}

В последнюю строчку таблицы записываются значения симплекс-разностей, пояснения к вычислениям которых даются в следующем пункте.

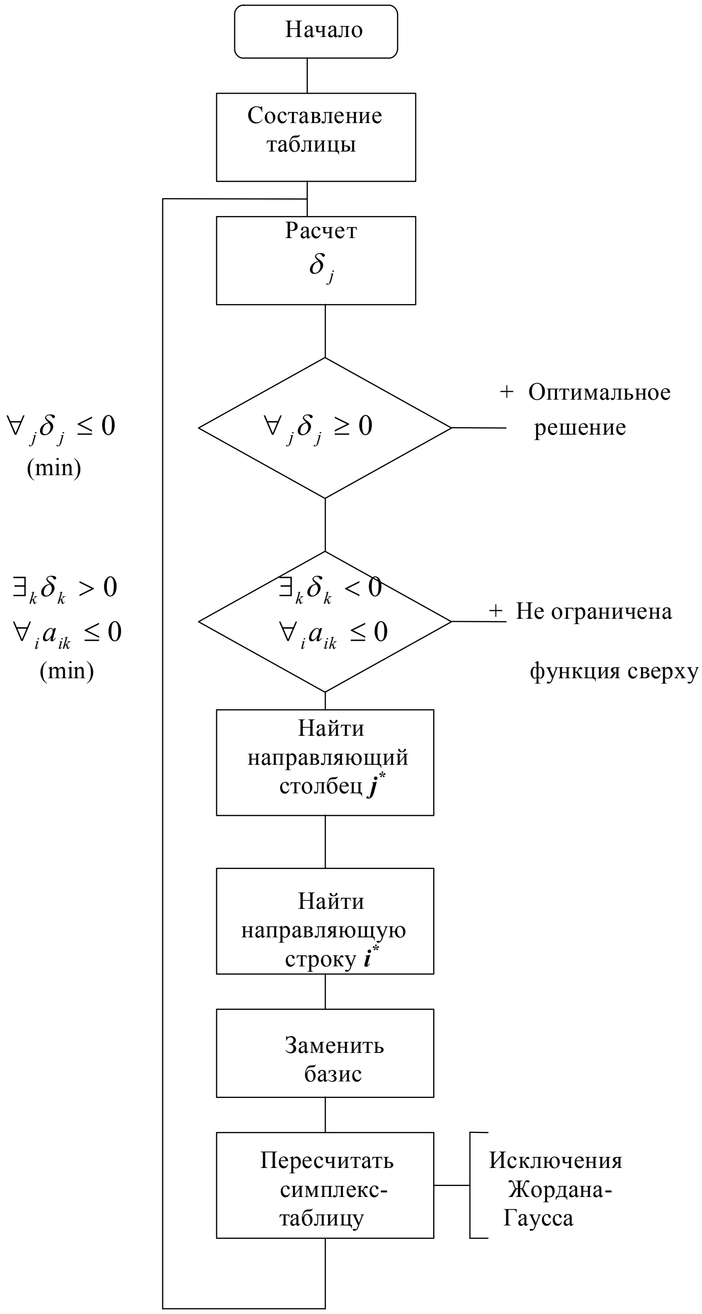

Рисунок 2.6 – Алгоритм симплекс-метода решения задачи максимизации

4. Расчёт симплекс-разностей. Эти величины характеризуют “удачность” текущего базисного плана и рассчитываются по формулам:

- текущее значение целевой функции $\delta_0 = \sum_{i=1}^{m} C_{i,Б} \times a_{i,o}$;
- симплекс-разности $\delta_j = \sum_{i=1}^{m} C_{i,Б} \times a_{i,j} - c_j$.

Последовательность текущих значения целевой функции позволяет контролировать ход расчётов: значения увеличиваются в ходе решения задачи максимизации и уменьшаются при поиске минимума целевой функции.

5. Если все симплекс-разности больше либо равны нулю (при решении задачи на максимум) или неположительные (при решении задачи на минимум), то достигнуто оптимальное решение. Признаки достижения оптимума можно сформулировать так: $\max : \forall_j \delta_j \ge 0$ или $\min : \forall_j \delta_j \le 0$.

Почему это так, станет понятно при обосновании ввода и вывода базисных векторов ниже.

6. Если существуют столбцы с отрицательными симплекс-разностями, и в соответствующих столбцах ***все*** элементы неположительные то при решении задачи на максимум мы имеем дело с ***неограниченной системой неравенств***. Аналогичная ситуация при решении задачи на минимум, когда существуют столбцы с положительными симплекс-разностями, а в соответствующих столбцах все элементы неположительные. Формально условие выглядит так

$$\max : \exists_k \delta_k < 0 \,\&\, \forall a_{i,k} \le 0,$$

$$\min : \exists_k \delta_k > 0 \,\&\, \forall a_{i,k} \le 0.$$

Более точно будет сказать, что область ограничений ***не замкнута в направлении оптимизации***.

В противном случае, имеются отрицательные симплекс-разности, и в столбцах им соответствующих, есть положительные элементы (для решения задачи максимизации) или положительные симплекс-разности и положительные элементы в столбцах (в случае минимизации). В этой ситуации, может быть получено новое решение, лучше, нежели текущее.

Новое допустимое базисное решение буде связано с новым базисом.

7. При решении задачи максимизации выбирается столбец с минимальной симплекс-разностью (минимальной оценкой), который называется ***направляющим***, указывается в таблице вертикальной стрелкой "↑", а в формулах он и его компоненты обозначаются символом "*".

Если задача решается на поиск минимума, то в этом случае выбирается максимальная оценка.

Формально условие выбора записывается так:

$$\text{для задачи на max} : \arg\min_j \delta_j < 0 \to j^*,$$

$$\text{для задачи на } \min : \arg\max_j \delta_j > 0 \to j^*.$$

Найденный вектор помещается на место вектора, выводимого из базиса. Соответствующая ему переменная включается в состав базисных переменных, эти изменения отображаются в содержимом столбца "Базис".

8. Вектор, выводимый из базиса, определяется путём нахождения ***направляющей*** строки. Независимо от направления проводимой оптимизации (минимизация или максимизация функции цели), направляющая строка определяется по правилу

$$\Theta = \min_i \left\{ \frac{a_{i,0} \geq 0}{a_{i,j^*} \geq 0} \right\} \rightarrow i^*$$

и обозначается символами “←” (в таблице) и “*” (в формулах).

9. После смены векторов строится новая симплекс-таблица, которая получаются модификацией текущей таблицы путем применения исключений Жордана-Гаусса [13, 33, 34, 36].

- Модифицируется направляющая строка путем деления на направляющий элемент a_{i^*,j^*} , стоящий на пересечении направляющей строки и направляющего столбца, а результат записывается на соответствующее место новой таблицы;
- Из всех остальных строк исходной таблицы вычитается поэлементно модифицированная направляющая строка, умноженная на элемент a_{i,j^*} , стоящий на пересечении “уменьшаемой” строки и направляющего столбца, результаты вычитаний записываются на соответствующие места в новой таблице.

10. Работа алгоритма повторяется циклически, начиная с пункта №4.

Замечание. Решать задачу минимизации можно точно так же, как и задачу максимизации, положив $F_{\max} = -1 \times F_{\min}$.

Математическое обоснование этапов ввода и вывода векторов в базис и из базиса

Как известно из теорем линейного программирования, если векторы $A_1, A_2, \dots, A_m$ являются базисом m-мерного пространства, то

$$A_1 x_1 + A_2 x_2 + \ldots + A_m x_m = A_0, \tag{2.7}$$

и любой вектор, входящий в каноническую систему ограничений, может быть разложен по векторам этого базиса [18, 20, 35]

$$A_j = \sum_{i=1}^{m} A_j x_{i,j}, \quad j = 1,2,\ldots,n+m \tag{2.8}$$

или, в развёрнутом виде

$$A_1 x_{1,j} + A_2 x_{2,j} + \ldots + A_m x_{m,j} = A_j \,. \qquad (2.9)$$

Введём в рассмотрение некоторую величину $\theta > 0$, на которую умножим (2.9):

$$A_1 \theta x_{1,j} + A_2 \theta x_{2,j} + \ldots + A_m \theta x_{m,j} = A_j \,\theta \,,$$

а результат умножения вычтем из (2.7). После приведения подобных членов выражения получим:

$$A_1 (x_1 - \theta x_{1,j}) + A_2 (x_2 - \theta x_{2,j}) + \ldots + A_m (x_m - \theta x_{m,j}) + A_j \,\theta = A_0 \,. \qquad (2.10)$$

Вектор X с координатами

$$X^{\mathrm{T}} = \{ \underbrace{\underbrace{\underbrace{x_1 - \theta x_{1,j}, \quad x_2 - \theta x_{2,j}, \quad \ldots, \quad x_m - \theta x_{m,j}}_{m}, \quad \theta}_{m+1}, \quad 0, \ldots 0}_{m+n} \}$$

будет допустимым решением ***при условии неотрицательности своих компонент***. Это будет выполняться когда

$$0 < \theta \le \min_i \left\{ \frac{x_i}{x_{i,j}} \right\},$$

а чтобы план оставался опорным, он не должен содержать больше, чем m компонент, поэтому одна из существующих компонент плана должна обратиться в нуль.

Симплекс-метод обусловливает направленный перебор опорных планов, переходя от одного опорного плана к другому, не худшему, нежели предыдущий.

Пусть ЗЛП обладает множеством опорных планов, которые являются невырожденными. Значение функции цели некого текущего плана составляет

$$F(X) = \sum_{i=1}^{m} c_i x_i \,.$$

В результате разложения любого A_j канонической формы представления ЗЛП в виде (2.8) и использования в качестве нового базисного (опорного) решения (2.10), значение целевой функции составит

$$F(A_j)=\sum_{i=1}^{m}c_i x_{i,j}=c_1(x_1-\theta x_{1,j})+c_2(x_2-\theta x_{2,j})+\ldots+c_j\theta=$$
$$=F(X)-\theta(c_1x_{1,j}+c_2x_{2,j}+\ldots-c_j).$$

Таким образом, изменение функции цели при переходе к новому базису есть

$$F(A_j)-F(X)=-\theta(c_1x_{1,j}+c_2x_{2,j}+\ldots-c_j)=-\theta\cdot\delta_j. \qquad (2.11)$$

Причём, величина θ всегда, по определению, положительна, δ_j – есть симплекс-разность базисного вектора A_j. Из (2.11) следует, что при поиске максимума значение δ_j должно быть самое отрицательное (новое значение больше старого), а неотрицательность (2.11) для всех векторов означает достижение оптимума и вызывает, как было отмечено выше, остановку алгоритма.

При решении задачи минимизации новое значение целевой функции должно быть меньше предыдущего, поэтому наблюдаем “зеркальную” ситуацию: δ_j должно быть максимально положительно, а отсутствие положительных симплекс-разностей означает достижения минимума функции цели при заданных ограничениях.

Продемонстрируем работу алгоритма на ранее рассмотренной модели.

$$f=5k_1+6k_2\to\max,$$
$$\begin{cases}0{,}2k_1+0{,}3k_2\le 1{,}8;\\0{,}2k_1+0{,}1k_2\le 1{,}2;\\0{,}3k_1+0{,}3k_2\le 2{,}4;\\k_1\ge 0;\ k_2\ge 0.\end{cases}$$

Расширенная или каноническая форма для этого случая есть

$$f=5k_1+6k_2+0k_3+0k_4+0k_5\to\max,$$
$$\begin{cases}0{,}2k_1+0{,}3k_2+1k_3+0k_4+0k_5=1{,}8;\\0{,}2k_1+0{,}1k_2+0k_3+1k_4+0k_5=1{,}2;\\0{,}3k_1+0{,}3k_2+0k_3+0k_4+1k_5=2{,}4;\\k_1\ge 0;\ k_2\ge 0;\ k_3\ge 0;\ k_4\ge 0;\ k_5\ge 0.\end{cases}$$

Построим таблицу

		c_j	5	6	0	0	0
Базис	$C_Б$	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
← A_3	0	1,8	0,2	0,3	1	0	0
A_4	0	1,2	0,2	0,1	0	1	0
A_5	0	2,4	0,3	0,3	0	0	1
	δ_j	0	-5	-6 ↑	0	0	0

Точка текущего решения (0; 0; 1,8; 1,2; 2,4). Расчёт симплекс-разностей показан ниже.

$$\delta_0 = 0\cdot 1{,}8 + 0\cdot 1{,}2 + 0\cdot 2{,}4 = 0 \quad - \textit{значения целевой функции};$$

$$\delta_1 = 0\cdot 0{,}2 + 0\cdot 0{,}2 + 0\cdot 0{,}3 - 5 = -5;$$

$$\delta_2 = 0\cdot 0{,}3 + 0\cdot 0{,}1 + 0\cdot 0{,}3 - 6 = -6;$$

$$\delta_3 = 0;\ \delta_4 = 0;\ \delta_5 = 0.$$

Значения симплекс-разностей свидетельствуют о том, что текущий план необходимо улучшать.

1-я итерация.

Направляющий столбец – 2-й, т.к. самое отрицательное $\delta_2 = -6$, поэтому в базис вводится вектор A_2, а в решение – переменная k_2. направляющую строку определит минимальное из отношений

$$\Theta = \min_i \left\{ \frac{a_{i,0} \geq 0}{a_{i,j^*} \geq 0} : \frac{1{,}8}{0{,}3} = 6; \frac{1{,}2}{0{,}1} = 12; \frac{2{,}4}{0{,}3} = 8 \right\} \rightarrow i^* = 1.$$

Поэтому из базиса выводится вектор A_3 и, соответствующая ему, переменная k_3 из решения, направляющая строка – 1-я. K=(0, k_2, 0, k_4, k_5).

Выполним исключения Жордана-Гаусса, модифицируя таблицу.

Первая строка, согласно алгоритму, делится на направляющий элемент $a_{i^*,j^*} = 0{,}3$ (он выделен серым цветом в таблице), получаем

$$\frac{1{,}8}{0{,}3} = 6,\ \frac{0{,}2}{0{,}3} = \frac{2}{3},\ \frac{0{,}3}{0{,}3} = 1,\ \frac{1}{0{,}3} = \frac{10}{3},\ 0,\ 0.$$

Во второй строке, в месте пересечения с направляющим столбцом $a_{2,j^*} = a_{2,2} = \frac{1}{10}$.

$$a_{20} = \frac{12}{10} - 6\times\frac{1}{10} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5};\quad a_{21} = \frac{2}{10} - \frac{2}{3}\times\frac{1}{10} = \frac{2}{15};$$

$$a_{22} = \frac{1}{10} - 1\times\frac{1}{10} = 0;\qquad a_{23} = 0 - \frac{10}{3}\times\frac{1}{10} = -\frac{1}{3};$$

$$a_{24} = 1 - 0 \times \frac{1}{10} = 1;\ a_{25} = 0 - 0 \times \frac{1}{10} = 0.$$

В третьей строке, на пересечении с направляющим столбцом $a_{3,j^*} = a_{3,2} = \frac{3}{10}$.

$$a_{30} = \frac{24}{10} - 6 \times \frac{3}{10} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5};\ a_{31} = \frac{3}{10} - \frac{2}{3} \times \frac{3}{10} = \frac{1}{10};$$

$$a_{32} = \frac{3}{10} - 1 \times \frac{3}{10} = 0; \qquad a_{33} = 0 - \frac{10}{3} \times \frac{3}{10} = -1;$$

$$a_{34} = 0 - 0 \times \frac{3}{10} = 0; \qquad a_{35} = 1 - 0 \times \frac{3}{10} = 1.$$

Подставляем результаты расчётов в новую симплекс-таблицу и рассчитываем симплекс-разности.

			c_j	5	6	0	0	0
	Базис	$C_Б$	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
	A_2	6	6	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{10}{3}$	0	0
←	A_4	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{15}$	0	$-\frac{1}{3}$	1	0
	A_5	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{10}$	0	-1	0	1
		δ_j	36	-1	0	20	0	0
				↑				

$$\delta_0 = 6 \cdot 6 + 0 \cdot 0{,}6 + 0 \cdot 0{,}6 = 36,$$ - целевая функция возрастает,

$$\delta_1 = \frac{2}{3} \cdot 6 + \frac{4}{30} \cdot 0 + 0 \cdot \frac{1}{10} - 5 = -1,$$

$$\delta_2 = 6 \cdot 1 + 0 + 0 - 6 = 0,$$

$$\delta_3 = 6 \cdot \frac{10}{3} = 20,\ \delta_4 = \delta_5 = 0.$$

Значения симплекс-разностей показывают, что оптимум не достигнут. Текущее решение имеет координаты $K^T = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 0 & \frac{3}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$.

2-я итерация.

Направляющий столбец – 1-й, ибо δ_2 = – 1, поэтому в базис вводится вектор A_1, в решение – переменную k_1. Определим направляющую строку

$$\Theta = \min_i \left\{ \frac{a_{i,0} \ge 0}{a_{i,j^*} \ge 0} : \frac{\frac{6}{1}}{\frac{2}{3}} = 9; \frac{\frac{6}{10}}{\frac{2}{15}} = \frac{9}{2} = 4{,}5; \frac{\frac{6}{10}}{\frac{1}{10}} = 6 \right\} \to i^* = 2..$$

Из базиса уходит вектор A_4, вводится A_1. Решение будет иметь структуру: K=(k_1, k_2, 0, 0, k_5).

Выполняем преобразование Жордана-Гаусса. Делим направляющую строку на элемент $a_{i^*,j^*} = a_{2,1} = \frac{2}{15}$.

$$a_{20} = \frac{3}{5} : \frac{2}{15} = \frac{9}{2} = 4{,}5; \quad a_{21} = \frac{2}{15} : \frac{2}{15} = 1;$$

$$a_{22} = 0 : \frac{2}{15} = 0; \qquad a_{23} = -\frac{1}{3} : \frac{2}{15} = -\frac{5}{2} = -2{,}5;$$

$$a_{24} = 1 : \frac{2}{15} = \frac{15}{2} = 7{,}5; \quad a_{25} = 0.$$

Преобразуем первую строку таблицы с элементом $a_{1,j^*} = a_{1,1} = \frac{2}{3}$.

$$a_{10} = 6 - \frac{9}{2} \times \frac{2}{3} = 3; \qquad a_{11} = \frac{2}{3} - 1 \times \frac{2}{3} = 0;$$

$$a_{12} = -1; \qquad a_{13} = \frac{10}{3} + \frac{25}{10} \times \frac{2}{3} = 5;$$

$$a_{14} = 0 - \frac{75}{10} \times \frac{2}{3} = -5; \qquad a_{15} = 0.$$

Для третьей строки множитель будет $a_{3,j^*} = a_{3,1} = \frac{1}{10}$.

a_{30} = 0,6 – 4,5 × 0,1 = 0,15; a_{31} =0,1 – 1 × 0,1 = 0;
a_{32} =0 – 0 × 0,1=0; a_{33} = –1 + 2,5 × 0,1 = –0,75;
a_{34} = 0 –7,5 × 0,1 = –0,75; a_{35} = –1.

Строим новую таблицу и рассчитываем значения симплекс-разностей.

		c_j	5	6	0	0	0
Базис	$C_Б$	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_2	6	3	0	1	5	–5	0
A_1	5	4,5	1	0	–2,5	7,5	0
A_5	0	0,15	0	0	–0,75	–0,75	1
	δ_j	40,5	0	0	17,5	7,5	0

$\delta_0 = 6 \times 3 + 5 \times 4{,}5 + 0 \times 0{,}15 = 40{,}5$; $\delta_1 = \delta_2 = \delta_5 = 0$;

$\delta_3 = 6 \times 5 - 5 \times 2{,}5 = 17{,}5$; $\delta_4 = -6 \times 5 + 5 \times 7{,}5 = 7{,}5$.

Все симплекс-разности неотрицательны, поэтому достигнут максимум целевой функции в точке с координатами (4,5; 3; 0; 0; 0,15). Оптимальное значение функции в этой точке равно F_{max} =40,5. Значения основных переменных получены: k_1 = 4,5 и k_2 = 3.

Результат решения совпадает с решением, рассчитанным при демонстрации графического метода.

Следовательно, для обеспечения максимальной прибыли следует закупать картофель в указанных или пропорциональных (3:2) количествах у первого и у второго поставщиков соответственно. Каков же содержательный смысл переменной k_5 = 0,15 в оптимальном решении?

Если подставить оптимальные значения в третье уравнение канонизированной системы, то мы получим равенство. Таким образом, 0,15 – величина, уравновешивающая третье ограничение в точке оптимума. Если бы правая часть указанного ограничения была бы меньше на эту величину, то в точке оптимума пересекались бы сразу три прямые.

2.2.6. Решение ЗЛП методом искусственного базиса [27, 50, 65]

Указанный метод называют ещё методом искусственных переменных. Он предназначен для решения ЗЛП с целевой функцией

$$Z = C^T X \to opt,$$

при наличии ограничениях на переменные вида

$$A \cdot X \otimes B, \qquad (2.12)$$

где обозначено:

- C – вектор коэффициентов целевой функции размерностью $[n \times 1]$;
- T – символ транспонирования;
- X – вектор искомых параметров математической модели размерностью $[n \times 1]$;
- *opt* - вид оптимизации (min или max);
- A - двумерная матрица $[m \times n]$ системы линейных ограничений;
- $\otimes$ – знак отношения ($\geq$, $=$, $\leq$);
- B – вектор правой части ограничений размерностью $[m \times 1]$.

Достаточно хотя бы ***одного знака отношений*** “≥” или “=” для необходимости использовать этот метод.

Система, в которой присутствуют различные знаки ограничений, называется ***смешанной***.

Пусть все знаки ограничений, для примера, имеют вид “≥”. В этом случае, после введения дополнительных переменных и приведения задачи в каноническую форму имеем

$$A \cdot X - E \cdot X_{ДОП} = B \equiv A_0. \qquad (2.13)$$

Если воспользоваться прямым симплекс-методом, то координатами начальной точки решения являются значения дополнительных переменных, удовлетворяющие системе уравнений $-E \cdot X_{ДОП} = A_0$, но при этом ***будет нарушаться условие неотрицательности*** дополнительных переменных (в этом несложно убедиться, решив систему).

Поэтому появляется потребность во введении фиктивных ***искусственных переменных***, не имеющих содержательного смысла, но обеспечивающих существование корректного допустимого базисного решения (ДБР) на начальном шаге, благодаря чему метод и получил своё наименование.

После введения искусственных переменных x_{n+m+1}, x_{n+m+2}, $\ldots, x_{n+2\times m}$ получаем

$$A \cdot X - E \cdot X_{ДОП} + E \cdot X_{ИСК} = A_0, \qquad (2.13)$$

полагая в котором равными нулю основные и дополнительные переменные, придём к ДБР, соответствующему уравнению

$$E \cdot X_{ИСК} = A_0.$$

В случае, когда исходная математическая модель представлена в канонической форме, также вводятся искусственные переменные для обеспечения начального решения.

Когда, наряду с ограничениями “≥” или “=”, присутствуют ограничения “≤” на практике используют, для компактности расчётных таблиц, вместо целиком искусственного базиса, ***смешанный базис***, составленный из ортов, соответствующих как искусственным переменным, так и дополнительным переменным, введённым для канонизации неравенств со знаком “≤”.

Подведя итоги, скажем, что метод искусственного базиса применяется в следующих случаях [45, 59].

- Все знаки отношения в системе ограничений имеют вид “≥”. Имеем чисто искусственный базис.

- Все знаки имеют вид “=”. Также строится чисто искусственный базис.
- Имеется смесь знаков “$\geq$” и “=”. Базис чисто искусственный.
- Имеется смесь знаков “$\geq$”, “=” и “$\leq$”. Базис смешанный.

Для того, чтобы, по мере потери надобности, избавляться от искусственных переменных, которые, как мы помним, не имеют содержательного смысла ни в постановке задачи, ни при её канонизации, в целевую функцию искусственные переменные вводятся с коэффициентами $-\mu$ для задач максимизации и $+\mu$ для решения задач минимизации, где μ – бесконечно большое число.

Обратите внимание, что знак выбран таким, чтобы помешать оптимизации.

Алгоритм метода дадим в отличиях от прямого симплекс-метода для избегания повторения, которое, вопреки расхожему мнению о “матери учения”, таковою быть не может, ибо – среднего рода.

Алгоритм метода искусственных переменных

1. Ограничения исходной математической модели подвергаются канонизации путём введения дополнительных переменных в ограничения со знаками “$\geq$” и “$\leq$”. Система ограничений при этом приобретёт вид (2.12).

2. В те ограничения, которые изначально имели знаки “$\geq$” и “=”, вводятся искусственные переменные. Эти же одновременно вводятся в целевую функцию с бесконечно большими множителями $\pm\mu$, знаки которых определяются направлением оптимизации: $-\mu$ для задач максимизации и $+\mu$ для решения задач минимизации. Ограничения при этом трансформируются в форму (2.13). В развёрнутой форме записи, для случая всех знаков “$\geq$”, получается

$$f(x_1,...,x_n,x_{n+1},...,x_{n+m}) = c_1x_1 + ... + c_nx_n + 0x_{n+1} + ... + 0x_{n+m} \pm \mu x_{n+m+1} ... \pm \mu x_{n+2m},$$

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n - 1x_{n+1} + 0x_{n+2} + ... + 0x_{n+m} + 1x_{n+m+1} + 0x_{n+m+2} ... + 0x_{n+2m} = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n + 0x_{n+1} - 1x_{n+2} + ... + 0x_{n+m} + 0x_{n+m+1} + 1x_{n+m+2} ... + 0x_{n+2m} = b_2, \\ ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n + 0x_{n+1} + 0x_{n+2} + ... - 1x_{n+m} + 0x_{n+m+1} + 0x_{n+m+2} ... + 1x_{n+2m} = b_{m1}. \end{array}\right\}$$

Векторы-орты A_{n+m+1}, A_{n+m+2}, ..., $A_{n+2\times m}$ – образуют начальный базис в крайней точке

$$X_0^T = \Big[\underbrace{0,...,0,}_{\leftarrow n \rightarrow} \quad \underbrace{0,...0,}_{\leftarrow n \rightarrow} \quad b_1, b_2, ..., b_m\Big]$$

выпуклого полиэдрального множества.

3. По условиям расширенной задачи производится построение симплекс-таблицы следующего общего вида.

		c_j	c_1	…	c_n	0	…	0	$\pm\mu$	$\pm\mu$	…	$\pm\mu$
Базис	$C_Б$	A_0	A_1	…	A_n	A_{n+1}	…	A_{n+m}	A_{n+m+1}	A_{n+m+2}	…	A_{n+2m}
A_{n+m+1}	$\pm\mu$,	b_1	a_{11}	…	a_{1n}	-1	…	0	1		…	
A_{n+m+2}	$\pm\mu$,	b_2	a_{22}	…	a_{2n}	0	…	0	0		…	
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…		…	
A_{n+2m}	$\pm\mu$,	b_m	a_{m1}	…	a_{mn}	0	…	-1	0		…	
	δ	δ_0	δ_1	…	δ_n	δ_{n+1}	…	δ_{n+m}	δ_{n+m+1}	δ_{n+m+2}	…	δ_{n+2m}

4. Задача решается изложенным в предыдущем разделе симплекс-методом, со всеми нюансами.

5. Если искусственная переменная выводится из базиса, то соответствующий ей столбец удаляется из таблицы.

6. В процессе решения необходимо вывести искусственные переменные из базиса. Если строка симплекс-разностей указывает на получение оптимума, а в базисе находятся искусственные переменные, то это означает несовместность системы ограничений. Это дополнительный признак неразрешимости по сравнению с прямым симплекс-методом.

Продемонстрируем работу алгоритма на ранее рассмотренном примере. Математическая модель модернизирована. Заменены: направление оптимизации, знаки в первом и втором неравенстве, а все неравенства умножены на 10 для удобства расчётов.

$$f = 5k_1 + 6k_2 \to \min,$$

$$\begin{cases} 2k_1 + 3k_2 \ge 18; \\ 2k_1 + 1k_2 \ge 12; \\ 3k_1 + 3k_2 \le 24; \\ k_1 \ge 0;\ k_2 \ge 0. \end{cases}$$

Каноническая форма с введёнными искусственными переменными для этого случая есть

$$f = 5k_1 + 6k_2 + 0k_3 + 0k_4 + 0k_5 + \mu k_6 + \mu k_7 + \mu k_8 \to \min,$$

$$\begin{cases} 2k_1 + 3k_2 + 1k_3 + 0k_4 + 0k_5 + 1k_6 + 0k_7 + 0k_8 = 18; \\ 2k_1 + 1k_2 + 0k_3 + 1k_4 + 0k_5 + 0k_6 + 1k_7 + 0k_8 = 12; \\ 3k_1 + 3k_2 + 0k_3 + 0k_4 + 1k_5 + 0k_6 + 0k_7 + 1k_8 = 24; \\ k_1 \ge 0;\ k_2 \ge 0;\ k_3 \ge 0;\ k_4 \ge 0;\ k_5 \ge 0;\ k_6 \ge 0;\ k_7 \ge 0;\ k_8 \ge 0. \end{cases}$$

В записи использован полностью искусственный базис A_6, A_7, A_8, однако, так как вектор A_8 дублирует вектор A_5, следует использовать смешанный базис A_6, A_7, A_5, составленный как из дополнительных, так и из искусственных переменных. Первоначально решение, в последнем случае, находится в точке с координатами (0; 0; 0; 0; 24; 18; 12).

Построим симплекс-таблицу, содержащую векторное представление канонической формы.

			c_j	5	6	0	0	0	μ	μ
	Базис	$C_Б$	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
	A_6	μ	18	2	3	–1	0	0	1	0
←	A_7	μ	12	2	1	0	–1	0	0	1
	A_5	0	24	3	3	0	0	1	0	0
		δ_j	30μ	4μ–5	4μ–6	–μ	–μ	0	0	0
				↑						

Значения симплекс-разностей свидетельствуют о том, что текущий план необходимо улучшать. По поводу выбора направляющего столбца в шутку, хотя в ней немало логики, заметим, что “четыре мешка зерна без пяти зёрнышек” больше, чем “четыре мешка зерна без шести зёрнышек”

1-я итерация даёт:

			c_j	5	6	0	0	0	μ
	Базис	$C_Б$	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
←	A_6	μ	6	0	2	–1	1	0	1
	A_1	5	6	1	0,5	0	–0,5	0	0
	A_5	0	6	0	1,5	0	1,5	1	0
		δ_j	6μ+30	0	2μ–3,5	-μ	μ–2,5	0	0
					↑				

После 2-й итерации получим оптимальное решение:

		c_j	5	6	0	0	0
Базис	$C_Б$	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_2	6	3	0	1	-0,5	0,5	0
A_1	5	4,5	1	0	0,25	-0,75	0
A_5	0	1,5	0	0	0,75	2,25	1
	δ_j	40,5	0	0	-1,75	-0,75	0

Достигнут минимум целевой функции в точке с координатами (4,5; 3; 0; 0; 0,15). Это хорошо просматривается на рисунке 2.3, с учётом области действия двух первых ограничений. Оптимальное значение при этом равно $F_{\max} = 40{,}5$ при основных переменных $k_1 = 4{,}5$ и $k_2 = 3$.

2.2.7. Решение ЗЛП модифицированным симплекс-методом [27, 26]

Указанный метод называется ещё ***методом обратной матрицы***.

Его особенностью [71, 33, 34] является работа только с базисными векторами, поэтому объём расчётом определяется числом базисных векторов, определяемым размером системы ограничений m. По этой причине наибольшая эффективность алгоритма, по сравнению с прямым симплекс-методом или методом искусственного базиса, проявляется, когда n значительно превосходит m. Экономия памяти под промежуточные результаты и сравнительно меньший объём вычислений обусловил преимущественную реализацию этого метода на ЭВМ. Впервые предложен Л.В. Канторовичем.

Для расчётов используются ***две таблицы***. Вспомогательная таблица, содержащая в постоянной части каноническую форму системы ограничений, а в переменной части – заранее не известное число строк симплекс-разностей, пополняемых по мере расчёта при завершении итерации. По необходимости, каноническая форма пополняется искусственными переменными, а таблица – соответствующими им столбцами векторов искусственного базиса.

		c_j	c_1	.....	c_n	0	......	0
Базис	$C_Б$	A_0	A_1	.....	A_n	A_{n+1}	......	A_{n+m}
A_{n+1}	0	b_1	a_{11}	...	a_{1n}	1	...	0
A_{n+2}	0	b_2	a_{22}	...	a_{2n}	0	...	0
...	...	...	...	...	...	...	...	...
A_{n+m}	0	b_m	a_{m1}	...	a_{mn}	0	...	1
	δ^0	δ_0^0	δ_1^0	...	δ_n^0	δ_{n+1}^0	...	δ_{n+m}^0
	...							
	δ^r	δ_0^r	δ_1^r	...	δ_n^r	δ_{n+1}^r	δ_0^r	δ_1^r

Основная таблица, в которой производятся расчёты и содержится матрица, обратная матрице, ***составленной из базисных векторов*** системы ограничений ***канонической задачи***, из-за чего метод и получил второе своё название.

$$\longleftarrow\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\; A_x^{-1} \;-\!\!\!-\!\!\!\longrightarrow$$

Базис	$C_Б$	e_0	e_1	e_2	…	e_m	A^*	Θ
A_{n+1}	*0*	b_1	1	0	…	0		
A_{n+2}	*0*	b_2	0	1	…	0		
…	…	…	…	…	…	…		
A_{n+m}	*0*	b_m	0	0	…	1		
	Λ	λ_0	λ_1	λ_2	…	λ_m		

Графы последней таблицы имеют следующее смысловое наполнение.

A_x^{-1} – обратная матрица, по отношению к базисному фрагменту исходной матрицы ограничений. Первоначально – это единичная матрица.

Столбец e_0 вычисляется по векторной формуле

$$e_0 = A_x^{-1} \times A_0, \tag{2.14}$$

что, на первых порах совпадает с A_0.

Строка оценок Λ определяется формулой

$$\Lambda^T = C_Б^T \times A_x^{-1}, \tag{2.15}$$

а произведение

$$\lambda_0 = C_Б^T \times e_0 \tag{2.16}$$

есть текущее значение целевой функции.

Столбец A^* рассчитывается после выбора направляющего столбца:

$$A^* = A_x^{-1} \times A_{j^*}. \tag{2.17}$$

Столбец оценок Θ служит для определения вектора, выводимого из базиса:

$$\Theta_i = \frac{e_{i,0} \geq 0}{a_i^* > 0}. \tag{2.18}$$

Алгоритм модифицированного симплекс-метода

1. Приведение задачи к канонической форме, введение, по необходимости, искусственных переменных, формирование на их базе основной и вспомогательных таблиц.

2. Расчёт текущего значения целевой функции (2.14), вектора оценок (2.15) и симплекс-разностей . Расчёт последних выполняют по формуле

$$\delta_j = \Lambda^T \times A_j - c_j, \tag{2.19}$$

где A_j – столбец вспомогательной таблицы.

3. Анализ симплекс-разностей на предмет получения оптимального решения. Осуществляется традиционным для прямого симплекс-метода способом. При наличии в базисе искусственных переменных здесь может быть определена несовместность системы ограничений.

4. Выбор направляющего столбца и вектора, вводимого в базис, выполняется на основании симплекс-разностей по известному правилу:

$$\max : \arg\min_j \delta_j < 0 \to j^*, \text{ или } \min : \arg\max_j \delta_j > 0 \to j^*.$$

5. Выполнение пересчёта вектора, вводимого в базис, (вектор A^*) и заполнение соответствующего столбца основной таблицы осуществляется по формуле (2.17).

6. Заполнение столбца Θ основной таблицы по выражению (2.18).

7. Выбор направляющей строки по минимальному значению компонентов столбца Θ. Если направляющую строку определить не удаётся, то необходимо выбрать другой столбец в качестве направляющего, повторив пп. 4 – 7. В случае невозможности выбора остаётся констатировать неразрешимость задачи по причине незамкнутости области ограничений в направлении оптимизации.

8. Преобразование основной таблицы по методу исключений Жордана – Гаусса.

9. После пересчёта таблицы алгоритм продолжает своё выполнение с п.2.

Пример. Используем математическую модель из демонстрационных материалов раздела 2.2.1 вида

$$f = 5x_1 + 6x_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 18; \\ 2x_1 + 1x_2 \le 12; \\ 3x_1 + 3x_2 \le 24; \\ x_1 \ge 0; \\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Построим каноническую форму и вспомогательную таблицу.

		c_j	5	6	0	0	0
Базис	$C_Б$	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_3	0	18	2	3	1	0	0
A_4	0	12	2	1	0	1	0
A_5	0	24	3	3	0	0	1
	δ^0	0	-5	-6↑	0	0	0
	δ^1	36	-1↑	0	2	0	0
	δ^2	40,5	1	0	2/3	2/3	0

Формируем основную таблицу.

	Базис	$C_Б$	e_0	e_1	e_2	e_3	A^*	Θ
←	A_3	*0*	18	1	0	0	3	6
	A_4	*0*	12	0	1	0	1	12
	A_5	*0*	24	0	0	1	3	8
		Λ	*0*	0	0	0		

$$A_x^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Рассчитываем оценки Λ по формулам (2.11) и (2.12) и заносим в основную таблицу.

$$\Lambda^T = C_Б^T \times A_x^{-1} = [0 \quad 0 \quad 0] \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [0 \quad 0 \quad 0].$$

Рассчитываем симплекс-разности по формуле (2.15) и помещаем во вспомогательную таблицу.

$$\delta_1 = \Lambda^T \times A_1 - c_1 = [0 \quad 0 \quad 0] \times \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} - 5 = -5,$$

$$\delta_2 = \Lambda^T \times A_2 - c_2 = [0 \quad 0 \quad 0] \times \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} - 6 = -6,$$

$$\delta_3 = 0,\ \delta_4 = 0,\ \delta_5 = 0.$$

По значениям симплекс-разностей определяем: оптимум не достигнут, направляющий столбец – 2-й.

1-я итерация.

Пересчитываем столбец, используя (2.17),

$$A^* = A_x^{-1} \times A_j^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$ и помещаем в основную таблицу.

Вычисляем оценки (2.18), тако же помещаем в соответствующий столбец основной таблицы

$$\Theta^T = \left[\frac{e_{i,0} \ge 0}{a_i^* > 0}\right] = \begin{bmatrix} \frac{18}{3} & \frac{12}{1} & \frac{24}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 12 & 8 \end{bmatrix}$$

и принимаем решение о выводе из базиса вектора A_3 (обозначен стрелкой), направляющий элемент выделен серым цветом.

Пересчитываем таблицу по методу исключений Жордана-Гаусса.

	Базис	$C_Б$	e_0	e_1	e_2	e_3	A^*	Θ
	A_2	*6*	6	$\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{2}{3}$	9
←	A_4	*0*	6	$-\frac{1}{3}$	1	0	$\frac{4}{3}$	$\frac{9}{2}$
	A_5	*0*	6	-1	0	1	1	6
		Λ	*36*	2	0	0		

Рассчитываем оценки Λ по формулам (2.14) и (2.15) и заносим в основную таблицу.

$$\Lambda^T = C_Б^T \times A_x^{-1} = [6 \quad 0 \quad 0] \times \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [2 \quad 0 \quad 0].$$

$$\lambda_0 = C_Б^T \times e_0 = [6 \quad 0 \quad 0] \times \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix} = 36.$$

Рассчитываем симплекс-разности по формуле (2.19) и помещаем во вспомогательную таблицу.

$$\delta_1 = \Lambda^T \times A_1 - c_1 = [2 \quad 0 \quad 0] \times \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} - 5 = -1,$$

$$\delta_2 = \Lambda^T \times A_2 - c_2 = [2 \quad 0 \quad 0] \times \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} - 6 = 0,$$

$$\delta_3 = 2, \ \delta_4 = 0, \ \delta_5 = 0.$$

Оптимум не достигнут, направляющий столбец – 2-й.

Пересчитываем столбец, используя (2.17),

$$A^* = A_x^{-1} \times A_j^* = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} \\ 1 \end{bmatrix}$$

и помещаем в основную таблицу, затем вычисляем и заполняем столбец оценок Θ. На его основании выводим A_4. Преобразуем таблицу по методу Жордана-Гаусса.

Базис	$C_Б$	e_0	e_1	e_2	e_3	A^*	Θ
A_2	*6*	3	2/3	-1	0		
A_1	*5*	4,5	-0,5	1,5	0		
A_5	*0*	1,5	-0,5	-1,5	1		
	Λ	*40,5*	3/2	3/2	0		

Рассчитываем симплекс-разности и помещаем их во вспомогательную таблицу.

$$\delta_1 = \Lambda^T \times A_1 - c_1 = [\tfrac{3}{2} \quad \tfrac{3}{2} \quad 0] \times \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} - 5 = 1, \quad \delta_2 = \Lambda^T \times A_2 - c_2 = [\tfrac{3}{2} \quad \tfrac{3}{2} \quad 0] \times \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} - 6 = 0,$$

$$\delta_3 = 2/3, \ \delta_4 = 2/3, \ \delta_5 = 0.$$

Решение можно считать законченным. Обратите внимание на значение оптимальной дополнительной переменной, соответствующей вектору A_5. Её значение в десять раз больше значения соответствующей переменной, полученной для исходной модели.

2.2.8. Двойственность в ЗЛП [3, 26, 27, 28, 33, 37, 78]

Рассмотрим ранее упоминавшуюся содержательную задачу о картофельных чипсах, кубиках и дольках, для которой была построена модель

$$f = 5k_1 + 6k_2 \to \max,$$
$$\begin{cases} 0{,}2k_1 + 0{,}3k_2 \le 1{,}8; \\ 0{,}2k_1 + 0{,}1k_2 \le 1{,}2; \\ 0{,}3k_1 + 0{,}3k_2 \le 2{,}4; \\ k_1 \ge 0; \\ k_2 \ge 0. \end{cases} \tag{2.20}$$

При построении модели было принято во внимание, что переменные k_1 и k_2 – суть количества картофеля, закупаемого у поставщиков, коэффициенты целевой функции показывают прибыль на единицу продукции из сырья соответствующего поставщика, элементы матрицы $a_{i,j}$ – выход i-ой продукции из сырья j-того поставщика.

Теперь построим наши рассуждения следующим образом [70, 75 – 77]. Пусть y_i, $i = 1, m$ – затраты на вид выпускаемой продукции, её себестоимость. Тогда себестоимость всей продукции есть

$$\sum_{i=1}^{m} b_i \times y_i,$$

а величина

$$\sum_{i=1}^{m} a_{i,j} \times y_i$$

представляет суммарную стоимость продукции, получаемой из сырья j-того поставщика.

Поэтому мы вправе потребовать снижения себестоимости продукции (минимизацию её), а так как прибыль включаётся (закладывается) в суммарную стоимость продукции, то величина последней превышает прибыль (что определит знак ограничений как “больше или равно”).

Исходя из этих соображений, можно записать

$$g(y_1, y_2, y_3) = 1{,}8y_1 + 1{,}2y_2 + 2{,}4y_3 \to \min,$$
$$\begin{cases} 0{,}2y_1 + 0{,}2y_2 + 0{,}3y_3 \ge 5, \\ 0{,}3y_1 + 0{,}1y_2 + 0{,}3y_3 \ge 6, \\ y_1 \ge 0, y_2 \ge 0, y_3 \ge 0. \end{cases} \qquad (2.21)$$

Задачу (2.21) называют ***двойственной*** по отношению к (2.20), которую называют ***прямой***. Для каждой прямой задачи существует соответствующая двойственная задача. Двойственные переменные не имеют, в общем случае, физического (смыслового) содержания, исключая задачи производственные и экономические, где этим переменным приписывается смысл затрат разнообразной природы.

2.2.9. Формальная связь прямой и двойственной задач

Сопоставим математические модели прямой и двойственной задач.

Прямая задача	Двойственная задача
Развёрнутая форма представления	
$\min \sum_{j=1}^{n} c_i x_i,$	$\min \sum_{i=1}^{m} b_i y_i,$
$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_i \le b_i,\ i = \overline{1,m},$	$\sum_{i=1}^{m} a_{i,j} y_i \ge c_j,\ j = \overline{1,n},$
$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,n}.$	$y_i \ge 0,\ i = \overline{1,m}.$
Матричная форма представления	
$C^T X \to \max,$	$B^T Y \to \min,$
$AX \le B.$	$A^T Y \ge C.$

Анализируя эти выражения, сформулируем **правила перехода между** этими **задачами**.

- Если прямая задача решается на максимум, то двойственная – на минимум.

- Коэффициенты целевой функции прямой задачи становятся элементами вектора ограничений двойственной задачи.
- Свободные члены в ограничениях прямой задачи становятся коэффициентами целевой функции в двойственной задаче.
- Матрица ограничений двойственной задачи получается транспонированием матрицы ограничений прямой задачи.
- Знаки ограничений в неравенствах заменяются противоположными знаками.
- Число ограничений прямой задачи равно числу переменных двойственной задачи, а число ограничений двойственной задачи равно числу переменных в прямой задаче.

Когда в ограничениях задачи присутствуют только неравенства, пара задач прямой и двойственной и сами задачи называется ***симметричными***. Если i-ая переменная не ***ограничена в знаке*** в прямой задаче, то j-ое ограничение в двойственной задаче будет ***равенством***.

В некоторых источниках, например в [3, 27, 25], правила перехода сформулированы в виде теорем.

2.2.10. Теоремы двойственности [33]

Теорема 1. Если X_0 и Y_0 суть допустимые решения прямой и двойственной задач соответственно (при этом выполняется неравенство $AX_0 \leq B$ и $A^TY_0 \geq$ C), то значение целевой функции прямой задачи не превышает значения целевой функции двойственной $C^{\mathrm{T}}X_0 \leq B^{\mathrm{T}}Y_0$.

Теорема 2 (Основная). Если X_0 и Y_0 суть допустимые решения прямой и двойственной задач и если $C^{\mathrm{T}}X_0 = B^{\mathrm{T}}Y_0$, то X_0 и Y_0 – оптимальные решения пары двойственных задач.

Теорема 3. Если в оптимальном решении прямой задачи i-ое ограничение выполняется как строгое неравенство, то оптимальное значение соответствующей двойственной переменной равно нулю, то есть $A_i X^* < b_i \Rightarrow y_i^* = 0$, где A_i – i-я строка матрицы.

Теорема 4. Если в оптимальном решении двойственной задачи j-ое ограничение выполняется как строгое неравенство, то оптимальное значение соответствующей переменной прямой задачи равно нулю, то есть $A_j^T Y^* - c_j > 0 \Rightarrow x_j^* = 0$, где A_j – j-й столбец матрицы.

Из последних теорем просматривается связь оптимальных решений прямой и двойственной задач:

$$\delta_{n+i}^{ПрямойЗадачи} = y_i^*,\ i = 1,\overline{m},$$
$$-\delta_{m+j}^{ДвойственнойЗадачи} = x_j^*,\ j = 1,\overline{n},$$

где n и m – число переменных и ограничений прямой задачи.

Поэтому оптимальное решение одной из пары двойственных задач позволяет автоматически получить значение другой.

2.2.11. Решение ЗЛП двойственным симплекс-методом [11, 26, 33, 34]

Двойственный симплекс-метод предложен Дж. Данцигом [26] и называется ещё методом последовательного улучшения оценок. Метод базируется на ряде определений.

Сопряжённый базис (базис двойственной задачи) – система m независимых векторов, составленная из матрицы ограничений прямой задачи, базисное решение которой Y удовлетворяет ограничениям двойственной задачи: $A_j^T Y > c_j$.

Псевдоплан прямой задачи – допустимое базисное решение относительно сопряжённого базиса.

Иногда псевдоплан трактуется как разложение векторов прямой задачи, не вошедших в сопряжённый базис, по векторам сопряжённого базиса.

Если среди ***базисных*** компонентов псевдоплана нет отрицательных, то псевдоплан оказывается оптимальным решением прямой задачи, а опорный план – оптимальным решением двойственной задачи.

Алгоритм двойственного симплекс-метода

Подразумевается, что решается задача максимизации функции цели.

1. Необходимо привести систему ограничений в каноническую форму. Искусственные переменные при этом не вводятся.

Перед началом канонизации имеет смысл, путём умножения на –1, добиться одинаковых знаков в ограничениях, и, по необходимости, преобразовать задачу минимизации к задаче максимизации.

2. Выполнить построение двойственной задачи по отношению к канонической форме.

3. Осуществить отыскание базиса сопряжённой задачи (сопряжённый базис).

- Подбор сопряжённого базиса, осуществляется отчасти наугад.

- Нужно выбрать m векторов, руководствуясь определением, данным выше.
- Неравенства двойственной задачи, соответствующие включаемым в базис векторам, преобразуются в систему линейных алгебраических уравнений, результат решения которых подставляется в остальные неравенства, не вошедшие в сопряжённый базис.
- Если неравенства выполняются как истинные, базис подобран правильно, в противном случае, подбор базиса необходимо продолжить.
- Если сопряжённый базис подобрать не удалось, то система ограничений не совместна, и пара задач является неразрешимой.

4. Рассчитать псевдоплан, путём решения ряда систем уравнений вида

$$A_j = M \times \widetilde{A}_j,$$

где A_j – разлагаемый вектор, M – матрица составленная из векторов прямой задачи, образующих сопряжённый базис, $\widetilde{A}_j$ – искомое разложение вектора для всех векторов прямой задачи, не вошедших в базис.

Из практических соображений, в первую очередь рассчитывают A_0.

5. Если в полученном псевдоплане все элементы столбца A_0 неотрицательны, то указанный план является ***оптимальным***, алгоритм завершается нормально. В противном случае, когда $\exists_i\, a_{i,0} < 0\ \&\ \forall_j\, a_{i,j} \geq 0$, имеем дело с неразрешимой задачей, целевая функция которой не ограничена в направлении оптимизации, и алгоритм завершает работу аварийно.

6. В иных случаях самый минимальный отрицательный элемент столбца A_0 определяет ***направляющую строку***: $\arg\min\limits_i a_{i,0} < 0 \Rightarrow i^*$,

а ***направляющий столбец*** определится по правилу

$$\arg\min_j \left\{ \frac{-\delta_j \geq 0}{a_{i^*,j} < 0} \right\} \Rightarrow j^*.$$

7. Далее выполняются исключения Жордана-Гаусса, после чего переходим к п.5.

Замечания.

1. Симплекс-метод перемещается от одного опорного плана к другому, а двойственный симплекс-метод переходит от псевдоплана к псевдоплану.

2. К текущему псевдоплану допускается добавлять новые строки, соответствующие дополнительным ограничениям, усиливающим уже существующие ограничения задачи.

Продемонстрируем работу алгоритма на примере задачи о закупке картофеля.

Этап 1. Приведение математической модели в каноническую форму.

$$f = 5k_1 + 6k_2 + 0k_3 + 0k_4 + 0k_5 \to \max,$$

$$\begin{cases} 0{,}2k_1 + 0{,}3k_2 + 1k_3 + 0k_4 + 0k_5 = 1{,}8; \\ 0{,}2k_1 + 0{,}1k_2 + 0k_3 + 1k_4 + 0k_5 = 1{,}2; \\ 0{,}3k_1 + 0{,}3k_2 + 0k_3 + 0k_4 + 1k_5 = 2{,}4; \\ \quad A_1 \qquad A_2 \qquad A_3 \qquad A_4 \qquad A_5 \qquad\qquad A_0. \end{cases}$$

Этап 2. Построение двойственной задачи.

$$1{,}8y_1 + 1{,}2y_2 + 2{,}4y_3 \to \min,$$

$$\begin{cases} 0{,}2y_1 + 0{,}2y_2 + 0{,}3y_3 \ge 5, & A_1 \\ 0{,}3y_1 + 0{,}1y_2 + 0{,}3y_3 \ge 6, & A_2 \\ y_1 \ge 0, & A_3 \\ y_2 \ge 0, & A_4 \\ y_3 \ge 0. & A_5 \end{cases}.$$

Её целевая функция нам безразлична, в дальнейших расчётах она не используется.

Этап 3. Подбор сопряжённого базиса.

Постараемся включить в него один из векторов, соответствующий основной переменной. Ориентировочно выберем A_1, A_2 и A_3. Решим систему уравнений, составленную из соответствующих строк системы ограничений двойственной задачи:

$$\begin{cases} 0{,}2y_1 + 0{,}2y_2 + 0{,}3y_3 = 5, \\ y_1 = 0, \\ y_3 = 0. \end{cases}$$

В результате нами получено $y_2 = 25$.

Проверка на остальных ограничениях двойственной задачи показывает, что ограничение $A_4 : y_2 \ge 0$ – выполняется, а $A_2 : 0{,}3y_1 + 0{,}1y_2 + 0{,}3y_3 = 2{,}5 \ge 6$ – нет.

Поэтому базис A_1, A_2 и A_3 не подходит в качестве сопряжённого.

Попробуем базис A_2, A_3 и A_5. Соответствующая система уравнений выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} 0{,}3y_1 + 0{,}1y_2 + 0{,}3y_3 = 6, & A_2 \\ y_1 = 0, & A_3 \\ y_3 = 0. & A_5 \end{cases}$$ её решение даёт $y_2 = 20$.

Легко показать, что выполняются неравенства A_1 и A_4. Поэтому A_2, A_3 и A_5 является сопряжённым базисом.

Этап 4. Найдём псевдоплан для этого базиса. Для этого нам необходимо решить несколько систем уравнений.

$$\left.\begin{aligned} A_0 &= A_2X_{20} + A_3X_{30} + A_5X_{50}, \\ A_1 &= A_2X_{21} + A_3X_{31} + A_5X_{51}, \\ A_4 &= A_2X_{24} + A_3X_{34} + A_5X_{54}.. \end{aligned}\right\}$$ – индексы суть координаты в таблице

псевдоплана, первый индекс указывает на привязку к базисному вектору, второй – к разлагаемому. Имеем:

$$\begin{bmatrix} 1{,}8 \\ 1{,}2 \\ 2{,}4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}3 & 1 & 0 \\ 0{,}1 & 0 & 0 \\ 0{,}3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} X_{20} \\ X_{30} \\ X_{50} \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0{,}2 \\ 0{,}2 \\ 0{,}3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}3 & 1 & 0 \\ 0{,}1 & 0 & 0 \\ 0{,}3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} X_{21} \\ X_{31} \\ X_{51} \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}3 & 1 & 0 \\ 0{,}1 & 0 & 0 \\ 0{,}3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} X_{24} \\ X_{34} \\ X_{54} \end{bmatrix}.$$

Для первой системы $1{,}2 = 0{,}1 \times X_{20} \Rightarrow X_{20} = 12$, остальные переменные находятся путём последовательной подстановки в первое и третье уравнения. Окончательно рассчитаем:

$$\widetilde{A}_0 = \begin{bmatrix} 12 \\ -1{,}8 \\ -0{,}6 \end{bmatrix}; \qquad \widetilde{A}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -0{,}4 \\ -0{,}3 \end{bmatrix}; \qquad \widetilde{A}_4 = \begin{bmatrix} 10 \\ -3 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

Из базисных векторов и векторов разложения формируем симплекс-таблицу и подсчитываем симплекс-разности.

			c_j	5	6	0	0	0
	Базис	$C_Б$	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
	A_2	6	12	2	1	0	10	0
←	A_3	0	–1,8	–0,4	0	1	–3	0
	A_5	0	–0,6	–0,3	0	0	–5	1
		δ_j	72	7	0	0	60	0
				↑				

Направляющая строка определяется самым отрицательным элементом столбца A_0. направляющий столбец определится как $\min\left\{\frac{-7}{-0,4};\quad \frac{-60}{-3}\right\}$.

Пересчитываем таблицу и проводим расчёт симплекс-разностей.

		c_j	5	6	0	0	0
Базис	$C_Б$	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_2	6	3	0	1	5	–5	0
A_1	5	4,5	1	0	–2,5	7.5	0
A_5	0	0,15	0	0	–0,75	–0,75	1
	δ_j	40,5	0	0	17.5	7.5	0

Получено оптимальное решение, которое совпадает с полученными нами ранее.

2.2.12. Вопросы для самоконтроля

1. Какие модели являются предметом исследования в линейном программировании?
2. Что утверждают основные теоремы линейного программирования?
3. Каковы условия применения графического метода?
4. Каковы особые случаи, возникающие при решении ЗЛП?
5. Почему при решении ЗЛП графическим методом используют именно перпендикуляр к нормали, а не линию под каким-либо другим углом?
6. Поясните, с чем связан выбор направления движения перпендикуляра к нормали?
7. Что такое каноническая форма ЗЛП?
8. Какое функциональное назначение отводится дополнительным переменным?
9. В чём состоят признаки (условия) неразрешимости задачи при решении её симплекс-методом?
10. Чем обосновано правило выбора вектора, вводимого в базис?
11. Каков смысл симплекс – разности?
12. Чем обоснован выбора выводимого из базиса вектора?
13. Какова последовательность работы алгоритма Жордана-Гаусса?
14. Как проконтролировать правильность хода решения задачи по значениям симплекс – разностей?

15. Чем обосновано требование положительности к вектору свободных членов системы ограничений?

16. В чём состоит связь обычной и канонической форм задач ЛП?

17. Что значит присутствие в столбце оптимального решения ненулевых значений дополнительных переменных?

18. Для чего требуются искусственные переменные?

19. В чём сходство и различие дополнительных и искусственных переменных?

20. От чего зависят знаки и множители при искусственных переменных?

21. Как по последовательности значений целевой функции определить правильность хода решения задачи?

22. Как определить, что задача имеет несовместные ограничения?

23. Какие случаи неразрешимости ЗЛП отображаются в симплекс-таблице?

24. Почему, при наличии ограничений больше или равно ("≥"), нельзя обойтись базисом соответствующим, дополнительным переменным?

25. В чем привлекательность машинной реализации модифицированного симплекс-метода?

26. Почему модифицированный симплекс-метод наиболее эффективен в случаях, когда число переменных n превышает число ограничений m?

27. Почему модифицированный симплекс-метод ещё называют методом обратной матрицы?

28. Где располагается обратная матрица в симплекс-таблице, и по отношению к какой матрице она является обратной?

29. Что утверждают теоремы двойственности.

30. Как связаны прямая и двойственная задачи?

31. Как по оптимальному решению прямой задачи получить оптимальное решение двойственной?

32. Что такое псевдоплан?

33. Что такое сопряженный базис?

34. Как узнать при решении двойственным симплекс-методом, что ограничения, заданные в математической модели, несовместны?

35. В чём проявляются особенности алгоритма двойственного симплекс-метода при определении вводимого и выводимого векторов?

36. Какой вид имеет симплекс-таблица двойственного метода в случае неразрешимости задачи?

37. Как соотносятся целевые функции прямой и двойственной задач в ходе решения и в оптимальном решении?

38. В каких случаях основные переменные двойственной задачи имеют содержательный смысл, и какой именно?