4. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ИГР

4.1 Основные определения

Теория игр – математическая теория конфликтов.

Конфликт – такая ситуация (стечение обстоятельств), в которой сталкиваются интересы сторон, и происходит борьба интересов.

Для возникновения игровой ситуации ещё необходимо желание сторон участвовать в конфликте, не всякий конфликт – игра. К примеру, продавец на рынке стремится поднять цену на товар, а покупатель – сбить её. Однако, если цена заломлена высоко, покупатель разворачивается и идёт дальше, в то же время, продавец может попытаться удержать покупателя, предлагая сниженную цену.… То есть, столкновение интересов сторон – налицо, но, тем не менее ситуация не переросла в игровую.

Правила игры – возможности, предоставляемые каждому игроку совместно с результатами, к которым приводит использование каждой возможности.

Далеко не каждый конфликт на практике протекает по строго определённым заранее правилам, часто один игрок, за неимением информации о действиях противоположной стороны и невозможности оценить игровую ситуацию в целом, не может быть со стопроцентной гарантией уверен в результатах своих действий. Поэтому в теории игр используют термин ***стратегия***.

Стратегия (образ действия) – порядок использования правил игры.

Тако же, в силу вероятностных причин говорят не о “результате” игры, а о “среднем результате”.

Предполагается, что ***средний результат игры***, будь то выигрыш или проигрыш, ***выражается числом***.

Основная задача теории игр формулируется так: “Как должен себя вести (какую избрать стратегию) разумный игрок в конфликте с разумным противником, чтобы обеспечить себе в ***среднем*** наибольший выигрыш (или наименьший проигрыш)?”.

Разумность игроков – категория философская, но ниже, на историческом примере, мы дадим её интерпретацию с позиции теории игр.

Пусть в каждой игре принимают участие два лица (или персоны) – Ян и ТатьЯна, и пусть каждая игра – конфликт между этими игроками. Такая игра называется ***парной***.

Игра называется ***игрой с нулевой суммой***, если одна из сторон выигрывает то, что проигрывает другая.

Пусть мы принимаем участие на стороне Яна (он же Красный или 1-й игрок). Ян заинтересован в том, чтобы сделать этот выигрыш наибольшим, а Татьяна (Синий или 2-й игрок) – сделать его наименьшим.

Если оба противника одинаково разумны, то, по-видимому, можно отыскать некоторое ***равновесное положение***, при котором каждый из игроков получит своё. Этот равновесный средний выигрыш, на который Ян вправе рассчитывать при своём оптимальном поведении, называется ***ценой игры***.

Таким образом, решит игру означает [30, 48, 79, 80]:

- найти пару стратегий для обоих игроков;
- цену игры Красного игрока.

А если один из игроков ведёт себя неразумно? Тем хуже для него, фактический выигрыш будет отклоняться от цены игры в невыгодную для неразумного игрока сторону.

4.2.Формальное описание игры двух персон с нулевой суммой

Как следует из определений предыдущего параграфа, для описания игры необходимо задать перечень возможностей, которыми обладают игроки, совместно с функцией, описывающей значения выигрыша при стечении обстоятельств, вызванными действиями игроков.

Рассмотрим те игры которые обладают конечным набором возможностей или стратегий, предоставляемым игрокам. В этом случае, функция выигрыша может быть задана таблично, в виде матрицы.

Пусть у Яна имеется m стратегий, а у Татьяны n. В этом случае игра носит название $m \times n$ игры. Игровую ситуацию при этом можно представить в виде таблицы. Строки соответствуют стратегиям Яна (красного), а столбцы – стратегиям Татьяны (синего). На пересечении столбцов и строк помещается значение выигрыша, получаемого красным игроком при выборе соответствующей пары стратегий обоими игроками.

	Стратегии 2-го игрока				
Стратегии 1-го игрока		C_1	C_2	…	C_n
	K_1	h_{11}	h_{12}	…	h_{1n}
	K_2	h_{21}	h_{22}	…	h_{2n}
	...				
	K_m	h_{m1}	h_{m2}	…	h_{mn}

Матрица H называется ***платёжной матрицей*** или ***матрицей игры***. О такой форме представления игры говорят, что игра приведена к ***нормальной форме***.

Если игра не является игрой с нулевой суммой, то функции выигрыша у игроков различны и представимы разными матрицами, поэтому эта игра называется ***биматричной***.

Если число стратегий, предоставляемых игрокам бесконечно, то при их нормировке возникают ***игры на квадратах***.

4.3. Седловая точка и оптимальные стратегии

Рассмотрим конфликтную ситуацию, которая сложилась в ходе 2-й мировой войны в результате боевых действий на Тихом океане между США и Японией [19, 64].

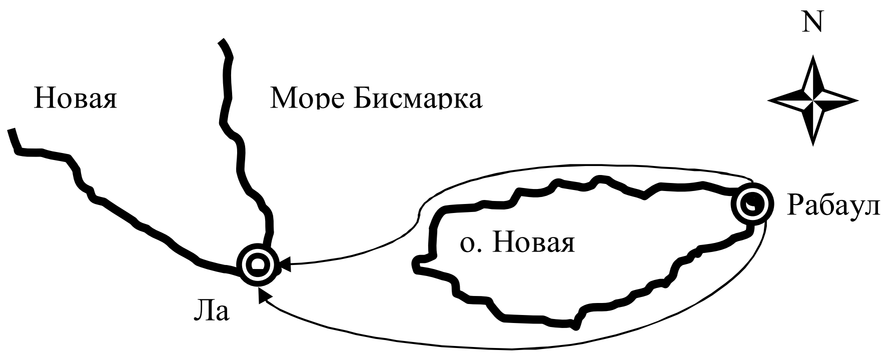


Рисунок 4.1 – Схема района перехода, февраль – март 1943 г., Тихий океан

Японская сторона в ходе эвакуации должна была выполнить переход между портами Рабаул и Лаэ в районе Новой Гвинеи. Остров Новая Британия можно было огибать как с северной стороны так и с южной. Не зависимо от маршрута время нахождения в пути занимало 3 дня. У командования США были аналогичные альтернативные варианты сосредоточения основных сил разведывательной авиации по направлениям: на севере были дождевые шквалы, на юге – относительно хорошая погода.

По замыслу американского командования, после обнаружения вышедшего из Рабаула каравана, и определения курсовых параметров, можно было ставить конкретные задачи на бомбометание. Своеобразие конфигурации мест базирования авиации состояла в том, что возможности нанесения ударов на пути следования конвоев с эвакуируемыми войсками значительно зависели от выбора маршрута движения судов и пунктов сосредоточения самолётов.

Работа штабных аналитиков вылилась в такое описание ситуации в форме матричной игры.

		Japan	
		Север	Юг
US	Север	2	2
	Юг	1	3

В качестве платежей выступает количество дней бомбардировки конвоя в пути. Очевидно, что ситуация складывается для японской стороны неудачно. Как мы видим, ни один из противников в этой игре не мог сделать выбор, который полностью отвечал бы его целям. Каждый из них, выбирая свою стратегию, должен был сознательно учитывать возможный выбор своего противника.

Аналитики США, анализируя таблицу, считают выгодным вариант (Юг, Юг): авиация сосредоточена на юге, и японскому командованию вздумалось огибать Новую Британию с юга. Однако, ***исходя из разумности противника***, в штабе генерала Кеннея решили избрать Северную стратегию, ***которая независимо от действий противника***, в любом случае ***гарантирует*** им два дня бомбардировки.

Японское руководство, разбираясь в ситуации, тоже выбрало Северную стратегию, которая, в ***случае неразумности генералитета*** США, обеспечило им всего один день перемещения под ударами авиации.

В результате – два дня под бомбами.

В данной жестокой игре целями игроков были:

- для США – увеличение (максимизация) дней бомбардировки, а
- для Японии – снижение (минимизация) их.

При этом в игре сложилось положение равновесия, так как в платёжной матрице присутствует седловая точка с координатами (Север, Север).

Определение [64]. Пусть дана игра Г. Ситуация (i_0, j_0) называется равновесной, если для любых i = 1, m и j = 1, n имеет место двойное неравенство

$$H(i, j_0) \leq H(i_0, j_0) \leq H(i_0, j),$$

где H – платёжная матрица (функция выигрыша) 1-го игрока (красного).

Для рассмотренной исторической ситуации это правило выполняется.

Выявление ситуаций равновесия имеет большое значение с точки зрения поиска благоприятных исходов.

Алгоритм нахождения равновесных ситуаций представлен ниже. Для удобства изложения и восприятия он представлен мнемонической схемой:

$$
\begin{array}{cc}
\begin{pmatrix}
h_{11} & h_{12} & \dots & h_{1n} \\
h_{21} & h_{22} & \dots & h_{2n} \\
\dots & \dots & \dots & \dots \\
h_{m1} & h_{m2} & \dots & h_{mn}
\end{pmatrix}
&
\left.\begin{array}{c}
\min\limits_j h_{1j} \\
\min\limits_j h_{2j} \\
\\
\min\limits_j h_{mj}
\end{array}\right\} \quad v_1 = \max\limits_i \min\limits_j h_{ij}
\\
\begin{array}{cccc}
\max\limits_i h_{i1} & \max\limits_i h_{i2} & & \max\limits_i h_{in}
\end{array}
&
\end{array}
$$

$$
\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{v_2 = \min\limits_j \max\limits_i h_{ij}}
$$

При этом неизменно $v_1 \le v_2$, то есть, ***нижний выигрыш*** первого игрока ***не превышает верхнего проигрыша*** второго игрока. Там, где $v_1 = v_2$ – есть ***седловая точка***. Элемент h_{i0j0} ***одновременно минимален*** в строке i_0 и ***максимален*** в столбце j_0.

Говорят, что первый игрок (красный) придерживается ***максиминно***й стратегии (увеличивает свой минимальный выигрыш), а второй игрок (синий) – ***минимаксной*** (минимизирует свой максимальный проигрыш) стратегии.

Когда оба игрока ведут себя разумно, то выигрыш красного игрока $\boldsymbol{v}$ должен быть ***не меньше***, чем максимин, но и ***не больше***, чем минимакс, то есть

$$v_1 \le v \le v_2.$$

Отклоняющийся от своей оптимальной стратегии будет нести потери, при которых значение выигрыша или проигрыш может выйти за пределы интервала.

В ходе решения игры может быть несколько точек равновесия. В этом случае, не играет роли, координаты какой из полученных равновесных точек использовать в качестве номеров стратегий в игре.

4.4. Понятие о смешанных стратегиях [51, 86, 88]

Рассмотрим ситуацию, известную нам по программе капитал-шоу “Поле чудес”, наступающую после угадывания трёх букв кряду: Л.А. Якубович предлагает на выбор две шкатулочки, в одной из которых лежат деньги, а другая пуста. Считая Якубовича игроком номер 1, представим игру в нормальной форме:

		Игрок	
		Лево	Право
Л.А.	Лево	– 1	0
	Право	0	– 1

Из приведённой таблицы следует, что Якубович в ходе игры ни не имеет шансов на выигрыш, но может остаться при своих деньгах.

Имеем $v_1 = \max_i \min_j h_{ij} = -1$, а $v_2 = \min_j \max_i h_{ij} = 0$. Таким образом, в данной игре ***отсутствует седловая точка***.

Ситуации, в которых $v_1 < v_2$ нередки в реальных играх. Может показаться даже, что игра не антагонистическая и не с нулевой суммой. Однако, в каждой конкретной игре выигрыш неизменно равен проигрышу.

Выход в создавшейся ситуации заключается в том, чтобы ***выбирать*** свои стратегии ***случайным образом***. Для этого необходимо

- задать вероятности использования каждой из стратегий и
- задействовать механизм случайного выбора.

Исходные стратегии, заданные в условии задачи (помещённые в таблицу) называют ***чистыми стратегиями***, а полученные с использованием вероятностного механизма – ***смешанными стратегиями***.

Определение. Смешанная стратегия игрока есть распределение вероятностей на множестве его чистых стратегий.

Смешанные стратегии указывают в виде набора вероятностей, с которыми игрок выбирает свои чистые стратегии, то есть

$$P = \{p_1, p_2, \ldots , p_m\},$$
$$Q = \{q_1, q_2, \ldots , q_n\},$$

где p_i — вероятность выбора Яном i-й чистой стратегии, а q_j — вероятность выбора Татьяной своей j-й чистой стратегии.

Очевидно, что $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$ и $\sum_{j=1}^{n} q_i = 1$. Это имеет место и для игр с седловой точкой: оптимальные стратегии задаются с единичной вероятностью, а остальные – с нулевыми.

4.5. Теорема об активных стратегиях

Предположим, что Якубович, чтобы не оставаться внакладе, слегка модифицировал правила игры.

В одну из коробочек прячется фишка. Отныне, игрок, нашедший фишку в левой шкатулке, получает 2 млн. рублей, а если фишка была спрятана слева, а он искал справа, то платит Л.А. Якубовичу штраф в размере 2 млн. рублей. Аналогично, за найденную правую фишку, выигрыш игрока составит 1 млн. рублей, а за ненайденную последует такой же штраф. Эта ситуация отображается такой платёжной матрицей.

		Игрок	
		Лево	Право
Л.А.	Лево	– 2	2
	Право	1	– 1

Имеем: $v_1 = \max_i \min_j h_{ij} = -1$, а $v_2 = \min_j \max_i h_{ij} = 1$, седловая точка отсутствует. Попробуем рассчитать вероятности использования игроками своих чистых стратегий.

Игроки информацией не обмениваются, поэтому каждое игровое сочетания стратегий противников реализуется с вероятностью $p_i{\cdot}q_j$.

Поэтому, математическое ожидание выигрыша красного игрока (Якубовича) составит

$$H(P,Q) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} h_{ij}\, p_i q_j\,, \tag{4.1}$$

при ожидаемом нижнем выигрыше не менее $v_1 = \max_P \min_Q H(P,Q)$,

и при ожидаемом верхнем проигрыше второго игрока не более, чем $v_2 = \min_P \max_Q H(P,Q)$.

Для игр с использованием оптимальных смешанных стратегий всегда выполняется равенство

$$v = v_1 = v_2 \text{ или}$$

$$\max_P \min_Q H(P,Q) = \min_Q \max_P H(P,Q)\,. \tag{4.2}$$

Выражение (4.2) составляет сущность ***основной*** теоремы теории игр, называемой тако же теоремой о ***минимаксе*** или теоремой о ***максимине***.

Теорема[64]. Всякая матричная игра имеет решение, а каждый игрок всегда имеет оптимальную стратегию.

Найдём оценку (4.1) для данной игры.

$$\mathrm{H(P,\ Q)} = -\,2{\cdot}p_1{\cdot}q_1 + 2{\cdot}p_1{\cdot}q_2 + 1{\cdot}p_2{\cdot}q_1 - 1{\cdot}p_2{\cdot}q_2 = 2{\cdot}p_1{\cdot}(q_2 - q_1) - p_2{\cdot}(q_2 - q_1) =$$

$= (q_2 - q_1)\cdot(2p_1 - p_2)$

Воспользовавшись условиями

$$p_1 + p_2 = 1 \text{ и } q_1 + q_2 = 1,$$

придем к выражению

$$H(P, Q) = (3p_1 - 1)(1 - 2q_1).$$

Из полученной формулы видно, что при $q_1 = 0{,}5$ значение выигрыша $H(P, Q) = 0$, не зависимо от величины p_1. То же наблюдается когда $p_1 = \frac{1}{3}$.

Получившийся результат не случаен, он отражает сущность теоремы об ***активных стратегиях***.

Теорема[64]. Если один из игроков придерживается своей оптимальной стратегии, ожидаемый выигрыш ***останется неизменным*** и равным цене игры, ***независимо от характера действий второго игрока*** в пределах его активных стратегий.

Подтверждающие теорему результаты имитационного моделирования [39] приводятся на рисунке 4.2.

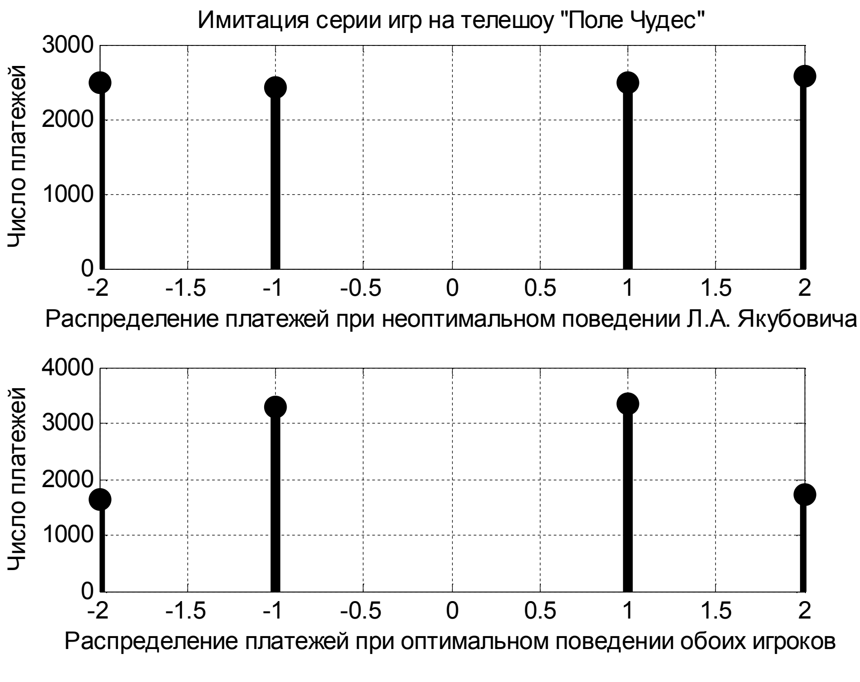


Рисунок 4.2 – Гистограммы платежей в серии из 10000 игр

Если мы сравним гистограммы, то увидим, что число выигрышей и число проигрышей одинаково для обеих сумм, поставленных на кон.

В рассмотренной игре оптимальные стратегии игроков суть: красного — $P^* = \left\{\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right\}$, синего — $Q^* = \left\{\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right\}$, цена игры — $H(P, Q) = 0$.

Таким образом, игра справедлива. Игрок, угадывающий шкатулочки, должен чередовать свои стратегии “фифти-фифти”, например, подбрасывая монетку. Якубович же должен применять свои стратегии в пропорции “один к двум”, воспользовавшись правильной игральной костью и положив выпадение тройки либо шестёрки за указание применять стратегию № 1 (то есть прятать фишку в левой шкатулочке), а в остальных случаях – пользоваться стратегией № 2 (правая шкатулка).

4.6. Поиск оптимальных стратегий в матричных играх

Совершенно очевидно, что непосредственное применение (4.1) для поиска оптимальных стратегий вельми неудобно, поэтому целесообразно было ожидать возникновения разнообразных методов решения, которые мы ниже и рассмотрим, это

- графо-аналитический метод;
- метод, основанный на построении эквивалентной ЗЛП;
- итерационный метод.

Будем подразумевать, что первым этапом поиска оптимальных стратегий, является нахождение решения в чистых стратегиях, и, если он закончился неудачей, придётся прибегнуть к вышепоименованным алгоритмам.

Перед началом изложения отметим (и напомним) особенности игровых задач, описываемых платёжными матрицами.

1. Матричная игра ***всегда*** имеет решение, согласно основной теореме.

2. ***Прибавление или вычитани***е действительного ***числа*** ко всем элементам платёжной матрицы ***не меняет*** пространства оптимальных стратегий.

3. Элементы платёжной матрицы ***могут быть преобразованы*** по формуле

$$a_{i,j} = k \cdot h_{i,j} + d\,, \tag{4.3}$$

где d — любое число, k — любое положительное число. При этом оптимальные стратегии обоих игроков не изменятся, а цена игры, соответствующая исходной платёжной матрице составит

$$v_h = \frac{v_a - d}{k}. \qquad (4.4)$$

4. Число активных стратегий в $m \times n$ игре не бывает выше наименьшего из чисел n и m.

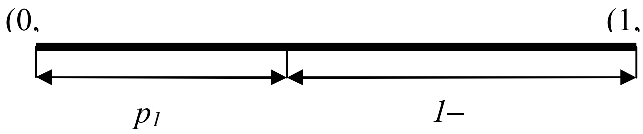
4.6.1. Графоаналитический метод решения игровых задач [27, 64]

Данный метод применяется в том случае, когда одна из размерностей платёжной матрицы равна двум. Первоначально, в качестве основания для дальнейших рассуждений, рассмотрим игру размерностью 2 × 2.

Матрица выигрышей в этом случае имеет вид

	q_1	q_2
p_1	h_{11}	h_{12}
p_2	h_{21}	h_{22}

Очевидно, что любую смешанную стратегию первого игрока можно представить в виде $P = \{p_1, p_2\} = \{p_1, 1 - p_1\}$, и отобразить единичным отрезком прямой.



Предположим, что Ян применяет смешанную стратегию, а Татьяна – только первую. Ожидаемый выигрыш Яна при этом составит

$$H(P, 1) = h_{12} \times p_1 + h_{21} \times (1 - p_1) = h_{21} - (h_{21} - h_{12}) \times p_1,$$

что в графической интерпретации выглядит как это показано на рисунке 4.2.

При фиксированной стратегии Татьяны выигрыш Яна перемещается вдоль прямой по мере использования различных вероятностей чистых стратегий в смешанной стратегии.

Указанное справедливо и для случая, когда Татьяна использует свою вторую чистую стратегию, а Ян – смешанную. В этом случае

$$H(P, 2) = h_{12} \times p_1 + h_{22} \times (1 - p_1) = h_{22} - (h_{22} - h_{12}) \times p_1,$$

что тако же представимо графически.

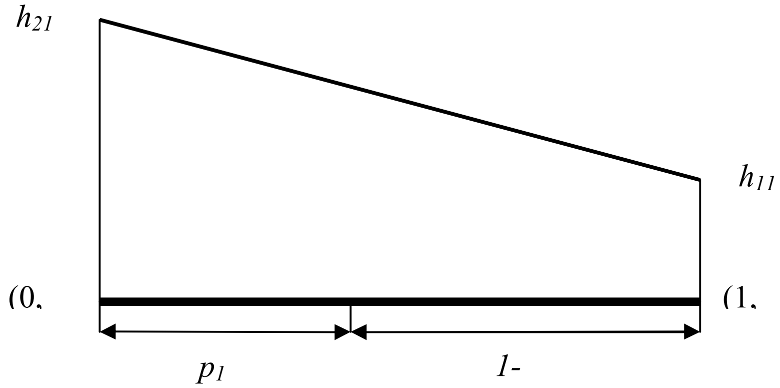


Рисунок 4.3 – Значение выигрыша при оптимальной стратегии 1-го игрока

Пересечение двух линий *H(P, 1)* и *H(P, 2)* на рисунке 4.4 даст точку, в которой находится оптимальное решение. Эта точка описывается системой уравнений:

$$\left.\begin{aligned} v_1 = H(P,1) = h_{21} - (h_{21} - h_{11})p_1^* \\ v_1 = H(P,2) = h_{22} - (h_{22} - h_{12})p_1^* \end{aligned}\right\}, \tag{4.5}$$

Вероятность стратегии, соответствующей максимальному выигрышу первого игрока определится при решении системы уравнений (4.5), откуда оптимальное значение вероятности применения 1-й чистой стратегии красного игрока составит

$$p_1^* = \frac{h_{22} - h_{21}}{h_{22} + h_{11} - h_{12} - h_{21}}. \tag{4.6}$$

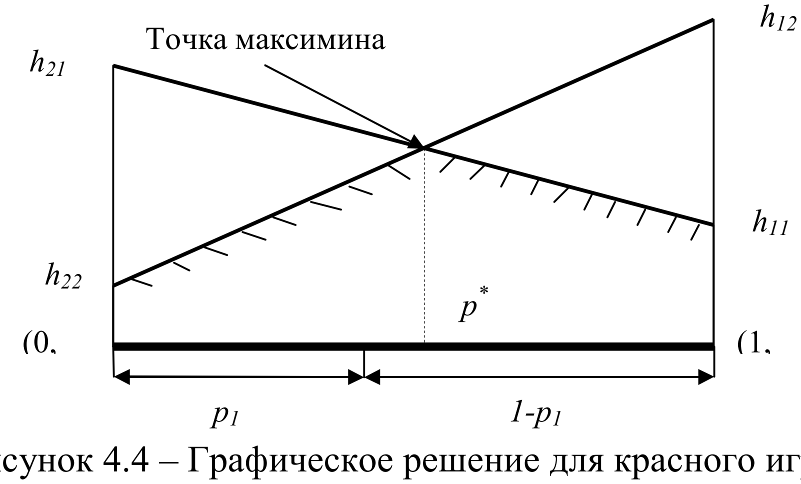


Рисунок 4.4 – Графическое решение для красного игрока

Аналогичные рассуждения можно проделать и для второго, синего игрока (см. рисунок 4.5), получим систему

$$\left.\begin{aligned} v_2 = H(1,Q) = h_{11}q_1^* + h_{12}(1-q_1^*) = h_{12} - (h_{12} - h_{11})q_1^* \\ v_2 = H(2,Q) = h_{21}q_1^* + h_{22}(1-q_1^*) = h_{22} - (h_{22} - h_{21})q_1^* \end{aligned}\right\}. \tag{4.7}$$

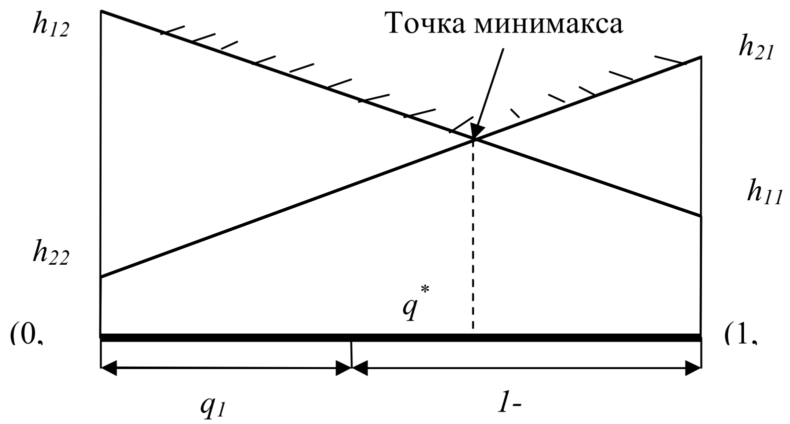


Рисунок 4.5 – Оптимальная стратегия синего игрока

Решение системы (4.7) даёт значение оптимальной вероятности использования синим игроком 1-й своей стратегии:

$$q_1^* = \frac{h_{22} - h_{12}}{h_{22} + h_{11} - h_{12} - h_{21}}. \tag{4.8}$$

Цена игры, определяемое как математическое ожидание выигрыша первого игрока, можно найти, используя (4.1), либо одно из четырёх выражений, представленных системами (4.5) или (4.7), подставляя в них (4.6) или (4.8):

$$v^* = \frac{h_{11} \cdot h_{22} - h_{12} \cdot h_{21}}{h_{22} + h_{11} - h_{12} - h_{21}}. \tag{4.9}$$

Для рассмотренной ранее задачи с Л.А. Якубовичем, платёжная матрица есть $H = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Использование формул (4.6), (4.8) и (4.9) даёт

$$p_1^* = \frac{-1-1}{-2-2-1-1} = \frac{-2}{-6} = \frac{1}{3}; q_1^* = \frac{-1-2}{-6} = \frac{1}{2}; v = 0.$$

что совпадает с ответом, выведенным аналитически.

Однако, если использовать полученный результат для расчёта оптимальных стратегий при анализе конфликтной ситуации между Японией и США, то получим оптимальное решение, не соответствующее правильному:

$$p_1^* = \frac{3-1}{2+3-1-2} = \frac{2}{2} = 1; q_1^* = \frac{3-2}{2} = \frac{1}{2}; v = \frac{2 \cdot 3 - 1 \cdot 2}{2} = 2.$$

Из этого решения, видно, что у красного игрока стратегия чистая, а у синего игрока – как бы смешанная. Хотя в соответствии с теоремой об активных стратегиях это не влияет на цену игры. Отсюда можно сделать вывод, что применять метод к решению игр с седловой точкой следует осторожно.

Перейдём далее к рассмотрению матричных игр, у которых одно из измерений равно двум. Графическая часть алгоритма применяется для определения активных стратегий игроков и сведения платёжной матрицы, таким образом, к размерности 2×2, после чего выполняются численные расчёты.

Рассмотрим игру *2×n*. Платёжная матрица такой игры имеет вид:

$$H = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & \dots & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & \dots & h_{2n} \end{bmatrix}.$$

Будем рассматривать игровую ситуацию с позиции красного игрока. Изобразим функции выигрыша 1-го игрока прямыми линиями, соединяющими точки $(h_{2j} \quad h_{1j})$ на отрезке единичной длины, для смешанных стратегий 1-го игрока: $H(P, \text{j}) = h_{1j} \times p_1 + h_{2j} \times (1 - p_1)$.

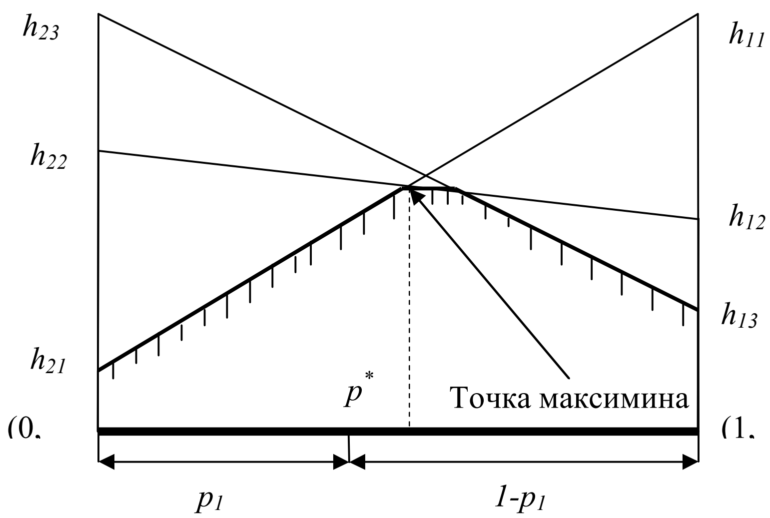


Рисунок 4.6 – Пояснение к решению игры 2 × *n*

На области, ограниченной отрезками прямых (h_{2j}, h_{1j}) и осью абсцисс, найдём пару стратегий, формирующих максимин. Линии, которые пересекаются в точке максимина, соответствуют активным стратегиям первого игрока. Для ситуации, отражённой на рисунке, стратегия № 3 синего игрока не является активной, поэтому может быть исключена из рассмотрения, а соответствующий столбец платёжной матрицы должен быть удалён.

В результате размерность платёжной матрицы сократилась до двух, и задача может быть решена применением формул (4.6), (4.8) и (4.9).

Если в точке максимина ***пересекаются более двух прямых***, то в качестве активных ***можно взять любую пару*** из них без потери точности решения.

Если возникает две точки максимина, то для определения пары активных стратегий ***можно взять любую точку***.

Рассмотрим игру $m\times2$. Платёжная матрица такой игры имеет вид:

$$H = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \\ \dots & \dots \\ h_{m1} & h_{m2} \end{bmatrix}.$$

Будем рассматривать игровую ситуацию с позиции синего игрока. Изобразим функции выигрыша 2-го игрока отрезками прямых вида (h_{i2}, h_{i1}) на отрезке единичной длины, что соответствует смешанным стратегиям 2-го игрока:

$$H(i, Q) = h_{i1} \times q_1 + h_{i2} \times (1 - q_1)$$

и отыщем точку минимакса, руководствуясь теми же соображениями, что и для решения матричной игры $2\times n$. После определения пары активных стратегий игроков остаётся лишь выполнить расчеты по формулам (4.6), (4.8) и (4.9). Точка минимакса показана на чертеже, показанном на рисунке4. 7.

Очевидно, что как и ранее, если в точке минимакса ***пересекаются более двух прямых***, то в качестве активных ***можно взять любую пару*** из них без потери общности решения.

Если возникает две точки минимакса (одна из прямых, участвующих в его формировании, параллельна оси абсцисс), то для определения пары активных стратегий ***можно взять любую точку***.

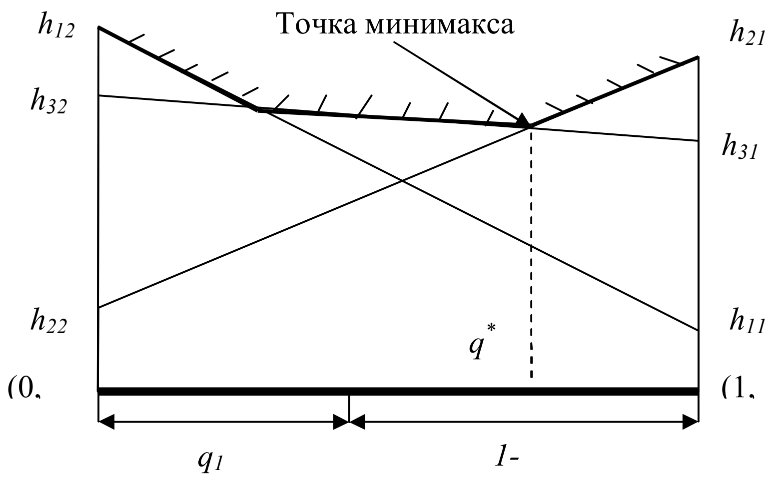


Рисунок 4.7 – Пояснение к решению игры $m \times 2$

Замечание. При значительном числе n или m поиск оптимальных стратегий становится визуально затруднительным, что должно компенсироваться выбором правильного размера и масштаба изображения.

4.6.2. Использование принципа доминирования для снижения размерности платёжной матрицы игровой задачи [64]

Определение. Вектор α размерности n строго доминирует вектор β размерности n, если каждая координата вектора α строго больше соответствующей координаты вектора β.

Принимая во внимание алгоритм нахождения равновесных ситуаций максимина и минимакса, изложенный нами ранее, можно сформулировать принцип доминирования следующим образом.

1. Если i-я строка платёжной матрицы строго ***доминируется*** некоторой выпуклой комбинацией других строк (в частности, если элементы некоторой строки больше соответствующих элементов строки i), то i-я строка может быть вычеркнута из матрицы без изменения множества оптимальных стратегий первого игрока.

2. Если j-й столбец платёжной матрицы строго ***доминирует*** некоторую выпуклую комбинацию других столбцов (в частности, если элементы столбца j больше соответствующих элементов некоторого другого столбца), то j-й столбец может быть вычеркнут из матрицы без изменения множества оптимальных стратегий второго игрока.

То есть, из множества стратегий игрока исключается та, которая принесёт заведомо худший, по сравнению с другими, результат: если одна стратегия игрока лучше, нежели другая, то худшая должна быть исключена. Для красного игрока – это строка, по стратегии, соответствующей которой, получается заведомо меньший выигрыш. А для синего игрока стратегия, соответствующая вычеркнутому столбцу, ведёт к большему проигрышу.

Поочерёдное применение принципов доминирования позволяет, в ряде случаев, существенно снизить размерность платёжной матрицы и уменьшить, тем самым, объём расчётов.

Пример [64]. Пусть задана платёжная матрица вида.

24	2	10	30
3	8	7	9
4	4	7	15
2	3	3	1

Оценки цены игры суть $v_1 = \max_i \min_j h_{ij} = 4$, а $v_2 = \min_j \max_i h_{ij} = 8$. Элементы, сформировавшие максимин и минимакс выделены серым цветом. Следовательно, седловая точка в платёжной матрице отсутствует. Видно, что 4-я строка строго доминируется одновременно 2-й и 3-й строками. Поэтому соответствующая стратегия красного игрока активной не является, и может быть удалена. Получим

24	2	10	30
3	8	7	9
4	4	7	15

В этой матрице 4-й столбец строго доминирует любой другой, поэтому соответствующая стратегия синего игрока исключается из списка активных. Новая платёжная матрица:

24	2	10
3	8	7
4	4	7

Теперь 3-я строка строго доминируется выпуклой комбинацией 1-й и 2-й строк: $24^{(1)} > 4$, $8^{(2)} > 4$, $10^{(1)} > 7$, и исключается вместе со стратегией № 3 красного игрока. Получается

24	2	10
3	8	7

Теперь можно применять графоаналитический метод. Отметим, что в новой платёжной матрице понизилось значение максимина $v_1 = \max_i \min_j h_{ij} = 3$.

Однако, в полученной матрице 3-й столбец доминирует выпуклую комбинацию двух других: $10^{(3)} > 2^{(2)}$, $7^{(3)} > 3^{(1)}$. Справедливость этой операции может быть проверена читателем графически.

24	2
3	8

Очевидно, что размерность не всякой платёжной матрицы может быть уменьшено до 2-х.

4.6.3. Построение эквивалентной ЗЛП по платёжной матрице [27, 64]

Пусть имеется игра, заданная в нормальной форме, а элементы платёжной матрицы либо положительны, либо приведены к таковому виду на основании использования выражения (4.3).

Из теоремы об активных стратегиях следует, что для любой чистой *j-й* стратегии 2-го игрока при использовании первым игроком своей оптимальной стратегии выполняется неравенство.

$$a_{1j} p_1^* + a_{2j} p_2^* + \ldots + a_{mj} p_m^* \geq v. \tag{4.10}$$

Знак “≥” возникает в неравенстве за счёт того, что j-я стратегия может не являться активной, а результат игры получится хуже. Неравенство (4.10) может послужить основой для построения системы ограничений

$$\begin{cases} a_{11} p_1^* + a_{21} p_2^* + \ldots + a_{m1} p_m^* \geq v, \\ a_{12} p_1^* + a_{22} p_2^* + \ldots + a_{m2} p_m^* \geq v, \\ \ldots \\ a_{1n} p_1^* + a_{2n} p_2^* + \ldots + a_{mn} p_m^* \geq v. \end{cases}$$

Прибегнув к нормировке, обозначим $x_i = \dfrac{p_i^*}{v}$, введём функцию цели вида

$$f(X)=\sum_{i=1}^{m}x_i=\frac{1}{v}\Rightarrow \min \qquad (4.11)$$

и получим систему ограничений, пригодную для расчётов:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{21}x_2+...+a_{m1}x_m\geq 1, \\ a_{12}x_1+a_{22}x_2+...+a_{m2}x_m\geq 1, \\ ... \\ a_{1n}x_1+a_{2n}x_2+...+a_{mn}x_m\geq 1. \end{cases} \qquad (4.12)$$

Выражения (4.11) и (4.12) представляют собой формулировку ЗЛП, построенной по платёжной матрице.

Для синего игрока, который является антагонистом красного, может быть сформулирована двойственная задача линейного программирования.

$$f(X)=\sum_{i=1}^{n}y_i\Rightarrow \max,$$
$$\begin{cases} a_{11}y_1+a_{12}y_2+...+a_{1n}y_n\leq 1, \\ a_{21}y_1+a_{22}y_2+...+a_{2n}y_n\leq 1, \\ ... \\ a_{m1}y_1+a_{m2}y_2+...+a_{mn}y_n\leq 1. \end{cases} \qquad (4.13)$$

В (4.13) обозначено $y_j=\frac{q_j^*}{v}$. Из теории решения двойственных задач известно, что вектор симплекс-разностей для дополнительных переменных соответствует вектору оптимальных значений переменных сопряжённой задачи. Пусть нами найдено оптимальное решение задачи (4.13). Тогда оптимальное решение матричной игры есть:

$P^*=\left\{\frac{\delta_{n+1}^*}{f_{opt}};\frac{\delta_{n+2}^*}{f_{opt}};...;\frac{\delta_{n+m}^*}{f_{opt}}\right\}$, $Q^*=\left\{\frac{y_1^*}{f_{opt}};\frac{y_2^*}{f_{opt}};...;\frac{y_n^*}{f_{opt}}\right\}$ где $f_{opt}=\frac{1}{v^*}$, v^* — цена игры.

Пример. Пусть платёжная матрица задачи имеет вид

5	1	1
2	3	1
3	2	4

Оценки игровой ситуации: $v_1 = \max_i \min_j h_{ij} = 2$, $v_2 = \min_j \max_i h_{ij} = 3$. По данному условию может быть составлена ЗЛП вида

$$f_{\max} = y_1 + y_2 + y_3,$$
$$\begin{cases} 5y_1 + 1y_2 + 1y_3 \le 1, \\ 2y_1 + 3y_2 + 1y_3 \le 1, \\ 3y_1 + 2y_2 + 4y_3 \le 1. \end{cases}$$

В ходе её решения получилась оптимальная симплекс-таблица

		c_j	1	1	1	0	0	0
Базис	$C_Б$	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
A_1	1	3/20	1	0	0	1/4	-1/20	-1/20
A_2	1	9/40	0	1	0	-1/8	17/40	-3/40
A_3	1	1/40	0	0	1	-1/8	-7/40	13/40
	δ_j	2/5	0	0	0	0	1/5	1/5

Из последней получаем цену игры $v = \frac{5}{2} = 2{,}5$ и оптимальные смешанные стратегии игроков: красного $P^* = \left\{0; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right\}$ и синего $Q^* = \left\{\frac{3}{8}; \frac{9}{16}; \frac{1}{16}\right\}$. У красного игрока, таким образом, две активных стратегии.

4.6.4. Итерационный метод решения матричной игры с нулевой суммой

При большом числе стратегий игроков решение эквивалентной ЗЛП представляется вычислительно трудоёмкой, требующей применения вычислительной техники.

Итерационный метод основывается на имитации серии игр, требует использования арифметики и наличия времени, необходимого для выполнения расчётов. Внешне ситуация напоминает игру крокодила Гены в шахматы с самим собой, сюжет визуализирован в 1-й части Советского мультблокбастера о похождениях Чебурашки со товарищи.

Применение метода состоит в попеременном выполнении за играющие стороны ходов. При этом синий игрок стремится уменьшить выигрыш красного в среднем (принцип минимакса), а красный – наоборот, увеличить его (принцип максимина).

1. Первый ход красного игрока может быть сделать случайно, либо по строке с максимальным средним значением выигрыша. Результаты хода, с разбивкой по стратегиям синего игрока, фиксируется в строке итога.

2. Ответный ход синих выбирается по элементу с наименьшим значением выигрыша, результат запоминается в столбце итога, разнесённый по стратегиям красного игрока.

3. Последующие ходы выполняются игроками поочерёдно, руководствуясь правилами максимина и минимакса. Результаты ходов суммируются накопительно, а выбираемые стратегии запоминаются.

4. По прошествии заданного числа ходов, игра прекращается, и подсчитываются относительные частоты использования тех или иных стратегий конфликтующими сторонами и цена игры.

Пусть сторонами проведено n игр. Тогда оптимальная смешанная стратегия 1-го игрока есть

$$\tilde{p}_i = \frac{m_i^{red}}{n}, \tag{4.14}$$

где m_i^{red} — число использований красным игроком своей i-ой чистой стратегии. Для второго игрока аналогично

$$\tilde{q}_j = \frac{m_j^{blue}}{n}, \tag{4.15}$$

где m_j^{blue} — число использований синим игроком своей j-ой чистой стратегии.

Оценка цены игры находится как

$$\tilde{v} = \frac{\tilde{v}_1 + \tilde{v}_2}{2 \times n}. \tag{4.16}$$

В выражении (4.16) $\tilde{v}_1$ и $\tilde{v}_2$ оценки суммарного максимина и минимакса, получающиеся в ходе накопления результатов ходов.

Результаты игры представляют совокупностью таблиц, заголовки которых определяются чистыми стратегиями игроков, а строки соответствуют ходам игроков и содержат суммарные текущие значения выигрыша красного игрока.

Иногда такие таблицы представляют в виде комплекса, Г-образно, как это будет показано ниже. Рассмотрим пример из предыдущего раздела с платёжной матрицей вида:

5	1	1
2	3	1
3	2	4

Итерационное решение игры, в ходе которой было проведено 20 розыгрышей, показано ниже.

5	1	1	1	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	*0*
2	3	1	1	3	6	9	12	**15**	**18**	**21**	22	**25**	**28**	29	32	**35**	**38**	39	42	**45**	**48**	49	*9*
3	2	4	**4**	**7**	**9**	**11**	**13**	15	17	19	**23**	25	27	**31**	**33**	35	37	**41**	**43**	45	47	**51**	*11*
2	3	**1**																					
5	5	6																					
8	**7**	7																					
11	**9**	11																					
14	**11**	15																					
17	**13**	19																					
19	**16**	20																					
21	**19**	21																					
23	22	**22**																					
26	**24**	26																					
28	**27**	27																					
30	30	**28**																					
33	**32**	32																					
36	**34**	36																					
38	**37**	37																					
40	40	**39**																					
43	**42**	43																					
46	**44**	47																					
48	**47**	48																					
50	50	**49**																					
1	*14*	*5*																					

В ходе игры, стратегии, используемые игроками в текущем розыгрыше, выделены жирным шрифтом и серым фоном.

Курсивом справа от боковика таблицы показано количество использования красным игроком каждой из своей стратегий, а внизу хвостовика таблицы такая же информация представлена по синему игроку. Суммарные оценки игры по максимину и минимаксу суть $\tilde{v}_1 = 49$ и $\tilde{v}_2 = 51$.

Имеем, по (4.16), оценку цены игры $\tilde{v} = \dfrac{49+51}{2 \times 20} = 2{,}5$.

Оценки оптимальных стратегий игроков, используя (4.14) и (4.15), составят:

для красного — $\widetilde{P}^* = \left\{0; \frac{9}{20}; \frac{11}{20}\right\}$, а для синего — $\widetilde{Q}^* = \left\{\frac{1}{20}; \frac{7}{10}; \frac{1}{4}\right\}$.

Сравнивая результаты расчётов – точного по ЗЛП и итерационного метода, можно отметить: цена игры совпала, значения вероятностей применения стратегий красного игрока практически совпали, для синего результаты несколько хуже.

Примечание. Для повышения точности результатов, надо сыграть изрядное число игр [66]. Математическая статистика гласит, что устойчивость среднего наступает после серии не менее 50 экспериментов, а устойчивость по дисперсии – после 400.

Очевидно, что бОльший размер платёжной матрицы потребует бОльшего объёма розыгрышей.

4.7. Конечные позиционные игры двух персон [64, 89]

К понятию позиционных игр можно прийти следующим образом. Необходимо отображать динамику действий, связанную с дополнительным приобретением или потерей информации, изменением игровой ситуации, ставок, возможных расценок и д.п.

Подобные ситуации моделируются теоретико-игровыми моделями, которые называются ***антагонистические позиционные игры***. В ходе игры (процессе развития игры) стороны проходят ***последовательно*** конечное число этапов, на каждом из которых необходимо принимать некоторое частное решение.

Ход – выбор игроком одной из его альтернатив.

На каждом этапе ход выполняется только одним игроком. Сами ходы ***бывают личными*** и случайными.

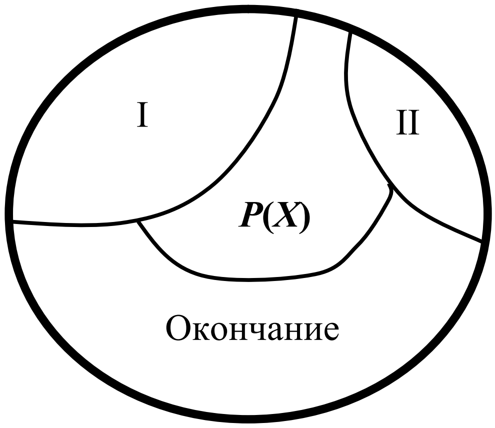
Личный ход – ***сознательный выбор*** игроком одной из имеющихся в его распоряжении альтернатив.

Случайный ход – отражение закономерностей случайных событий или величин.

Предполагается, что случайный ход выполняет природа, фактически не заинтересованная в чьей либо победе. Для этого случая задаётся распределение вероятностей на множестве всех альтернатив природы. Указанное множество априори известно.

Позиция – игровая ситуация, в которой игроки оказываются в результате совершения своих ходов.

Множество всех позиций разбивается на подмножества:
смешанных стратегий.



- а) позиции, принадлежащие 1-му игроку (Яну);
- б) позиции, принадлежащие 2-му игроку (ТатьЯне);
- в) позиции со случайными ходами, принадлежащие природе;
- г) окончательные позиции, в которых игра завершена и определяется выигрыш (проигрыш) игроков.

Позиционная игра будет являться ***конечной*** при ***конечном числе*** позиций и альтернатив. Такая игра представима в виде ***дерева***, называемого ***деревом игры***, вариант какового представлен на рисунке 4.8.

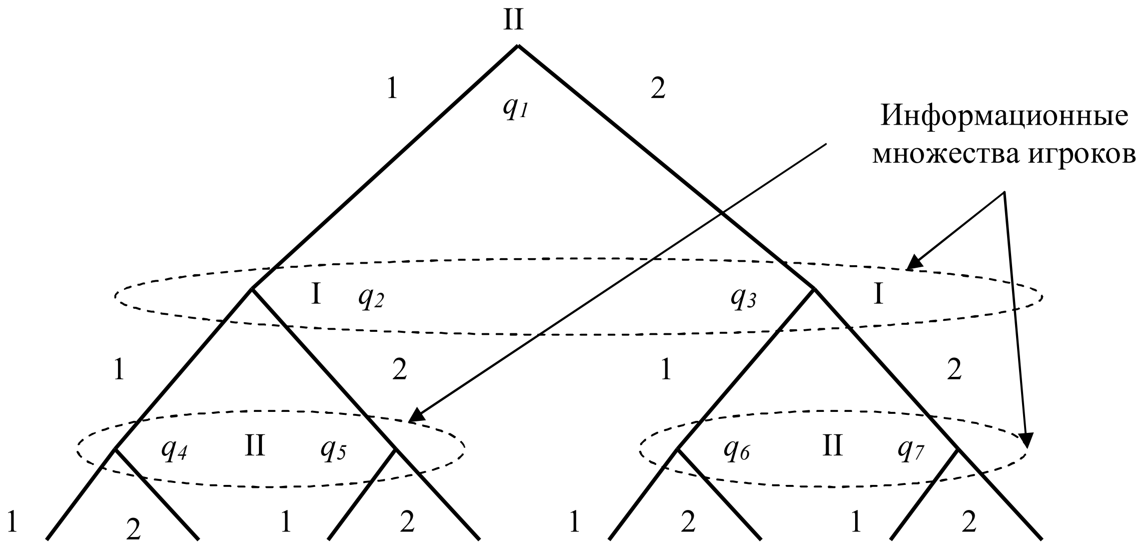


Рисунок 4.8 – Дерево конечной позиционной игры

Партия – путь на дереве игры от начальной вершины к заключительной вершине.

Если игрок при выборе своего очередного хода знает результаты предыдущих ходов, как своих, так и противника, то игра является игрой с ***полной информацией***. В противном случае игра называется игрой с

неполной информацией, и игрок может определить своё местоположение с точностью до некоторого множества вершин игрового дерева.

Такое множество называется ***информационным множеством*** игрока.

Свойства информационного множества [64]

- все позиции одного и того же информационного множества принадлежат одному и тому же игроку;
- все позиции одного и того же информационного множества должны иметь одинаковое число альтернатив (в противном случае игрок определится со своим местоположением бале или менее точно);
- одно информационное множество не должно содержать позиций различных этапов одной и той же партии игры.

Эти множества показаны пунктиром на рисунке 4.8.

Стратегии игроков в позиционных конечных играх суть следующие.

1. **Чистая стратегия**. Выбирается до начала игры в форме “если — то” перебором путей по дереву игры. В ходе перебора игра сводится к матричной нормальной форме. Если ***игра*** является игрой с ***полной информацией***, то имеется седловая точка платёжной матрицы и решение в чистых стратегиях.

2. **Стратегия поведения**. Представляет собой набор из r вероятностных распределений, каждое из которых задано на множестве возможных альтернатив в каждом информационном множестве. В общем случае, при наличии большого числа информационных множеств и альтернатив в них, решение задачи отыскания стратегий поведения нетривиально.

3. **Смешанная стратегия**. В соответствии с ранее данным определением, позволяет реализовывать случайный выбор на множестве чистых стратегий. Если ***игра*** является игрой ***с полной памятью***, то смешанная стратегия эквивалентна стратегии поведения. В этой ситуации необходимо решать ЗЛП, построенную по платёжной матрице. Реализация стратегии поведения предпочтительнее, чем смешанной стратегии.

Уместна следующая аналогическая связь этих стратегий.

Чистая стратегия представляет собой книжку инструкций, каждая страница которой относится к одному из информационных множеств, и где чётко и точно прописано, что делать игроку в том или ином информационном множестве.

Множество чистых стратегий, таким образом, представляет собой библиотеку, из которой, посредством смешанной стратегии, выбирается книжка строгих инструкций.

Стратегия поведения тако же представляет собой книжку, на каждой странице которой содержится распределение вероятностей по альтернативам соответствующего информационного множества, а не жёсткую инструкцию.

Формальное описание антагонистической позиционной игры[64]

Описание игры предусматривает задание системы компонент, в которую входят.

1. Конечное дерево с выделенной вершиной, называемой начальной позицией игры.
2. Функция выигрыша красных, которая ставит в соответствие с каждой окончательной позицией (окончательной вершиной дерева) некоторый выигрыш красного игрока I.
3. Разбиение всех позиций по принадлежности к игрокам.
4. перечисление альтернатив в каждой позиции в каждом информационном множестве.
5. Вероятностные распределения на множестве альтернатив по каждому случайному ходу (выполняемому природой).
6. Подразбиение позиций на информационные множества, при этом
   - позиции множества имеют одинаковое число следующих за ними альтернатив;
   - никакая другая позиция не может следовать за другой позицией из этого информационного множества.

Пример, навеянный произведением А.Н. Толстого “Золотой ключик”.

Папа Карло с Мальвиной, Буратино и прочей кукольной братией укрываются от Карабаса-Барабаса с Дуремаром и их приспешниками.

У беглецов имеются две альтернативы: поехать по правой дороге (П) или левой дороге (Л). В свою очередь, Карабас тоже имеет два варианта противодействия беглецам – выставить засады – блокпосты на путях следования кукол, это

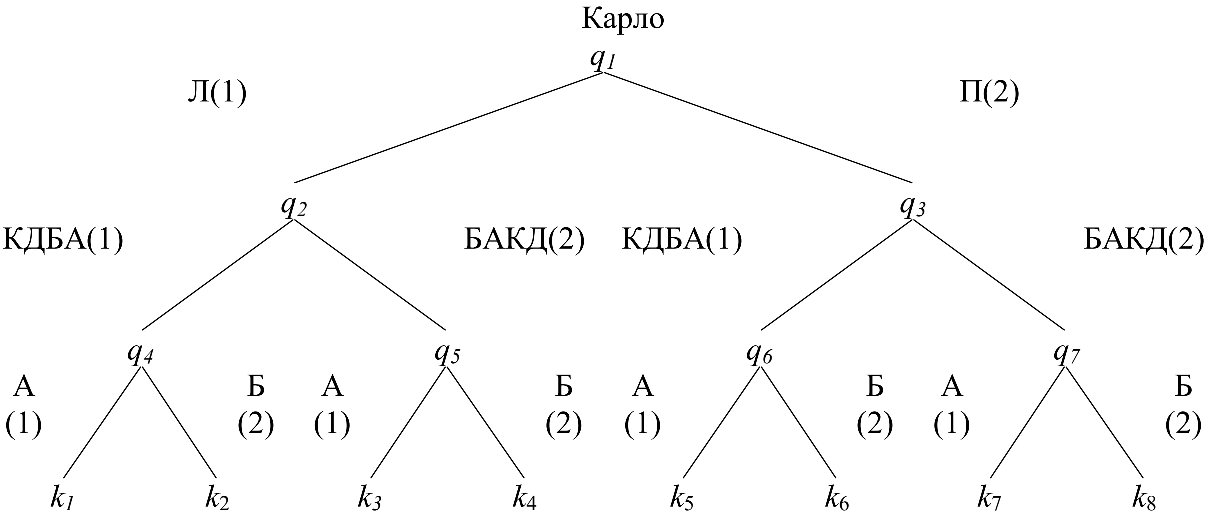
- КДБА – Карабас и Дуремар располагаются на левой дороге, а кот Базилио с лисой Алисой на правой; и
- БАКД – кот Базилио с лисой Алисой располагаются на левой дороге, а Карабас и Дуремар на правой.

При столкновении с засадой, когда будут ясен состав блокпоста, папа Карло со товарищи, может прорываться через заслон (атаковать, А) или спасаться бегством (Б).

Таким образом, формально игра состоит из этапов:

1. Выбор пути следования папы Карло.
2. Расстановка Карабасом групп захвата.
3. Выбор способа действий папы Карло и его спутниками при попадании в засаду.

По условию задачи строим следующее игровое дерево, показанное ниже.



В качестве функции выигрыша Карабаса-Барабаса примем вероятности пленения кукольной труппы.

Конечная позиция	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_6	k_7	k_8
Выигрыш	0,1	0,8	0,4	0,6	0,5	0,2	0,3	0,7

Обычно (в жизни) участники конфликта принимают решения по мере развития конфликтной ситуации во времени.

Однако, абстрагируясь от этого практического соображения, будем считать, что игроки учли все возможные обстоятельства до начала игры и подготовили (запаслись домашними заготовками) набор алгоритмов действия (чистые стратегии) в форме “если — то”.

Формально, если стратегии пронумерованы, чистая стратегия определяется на совокупности информационных множеств и является функцией, приписывающей множеству число из интервала $[1, k_i]$, где k_i — число альтернатив в i-м информационном множестве игрока. Таким образом, общее число чистых стратегий у игрока равно

$$k_1 \cdot k_2 \cdot \ldots \cdot k_r = \prod_{i=1}^{r} k_i \, .$$

Если стратегия игры приводит к окончательной вершине t, то выигрыш игрока составит величину $M(t)$ при отсутствии случайных ходов. Если в игре присутствуют случайные ходы, то математическое ожидание выигрыша при этом составит

$$\sum_t M(t)P(t), \tag{4.17}$$

где $P(t)$ - вероятность того, что игра окончится в позиции t.

Так как число позиций на дереве игры конечно, мы можем, в любом случае, свести игру к матричной, перечислив все стратегии игроков в виде иерархической системы чисел

$$[i\ (i_1,\ i_2,\ ,\ \dots\ ,\ i_k,,\dots\ ,\ i_m)],$$

что означает выполнить ход с номером i на первом этапе, а на втором использовать ход i_k, если противник использовал k-ю альтернативу.

Например, запись [1 (1, 1)] означает: использовать на 1-м шаге 1-ю стратегию, а на 2-м использовать 1-ю, не зависимо от действий противника. Или [2 (2, 1)] означает: использовать на 1-м шаге 2-ю стратегию, а на 2-м использовать 2-ю, если противник использовал накануне 1-ю, и 1-ю, если противником была использована 2-я.

Отсюда перечень стратегий папы Карло есть [1 (1, 1)], [1 (1, 2)], [1 (2, 1)], [1 (2, 2)], [2 (1, 1)], [2 (1, 2)], [2 (2, 1)], [2 (2, 2)]. Остаётся лишь проследить по дереву игры, в какие конечные вершины нас приведут указанные стратегии. Таким образом, имеем следующую матричную игру, представленную в нормальной форме

	1(1,1)	1(1,2)	1(2,1)	1(2,2)	2(1,1)	2(1,2)	2(2,1)	2(2,2)
	Л(А,А)	Л(А,Б)	Л(Б,А)	Л(Б,Б)	П(А,А)	П(А,Б)	П(Б,А)	П(Б,Б)
	1	2	3	4	5	6	7	8
КДБА	k_1	k_1	k_2	k_2	k_5	k_5	k_6	k_6
(1)	0,1	0,1	0,8	0,8	0,5	0,5	0,2	0,2
БАКД	k_4	k_4	k_3	k_4	k_7	k_8	k_7	k_8
(2)	0,6	0,6	0,4	0,6	0,3	0,7	0,3	0,7

Платёжная матрица имеет седловую точку, показанную серым цветом. Цена игры – вероятность захвата кукол-беглецов Карабасом-Барабасом составляет 0,3.

Противники должны использовать свои стратегии следующего содержания.

- В засаде на левом пути должны располагаться лиса Алиса и кот Базилио, а на правом пути – Карабас-Барабас с Дуремаром.
- Папа Карло должен для следования выбрать правый путь, при встречи с котом и лисой – спасаться бегством, а при виде Дуремара и Карабаса – пытаться прорваться напролом.

  Приведённый содержательный пример служит иллюстрацией теоремы.

Теорема [64]. Всякая игра с полной информацией, представленная в нормальной форме, имеет седловую точку и решение в чистых стратегиях.

4.7.1. Игры с полной информацией и игры с полной памятью

Игрок I (или игрок II), если для него игра является игрой с полной информацией, имеет дело с ситуацией, когда ***каждое*** его информационное множество состоит лишь из 1-го элемента.

Игра является игрой ***с полной информацией***, если в ней ***каждый игрок*** имеет ***полную*** информацию.

Ранее нами отмечено, что всякая такая игра имеет в нормальной форме седловую точку в платёжной матрице.

Игрой с полной памятью называется игра, в которой ***каждый*** из ***игроков*** помнит всё, что оно делал или знал на каждом этапе.

Однако, в отличие от игр с полной информацией, он ***может не знать***, какой выбор сделал его противник.

Когда противники ординарные (единичные, не делимые) это, как правило, соблюдается всегда, хотя и наблюдаются примеры иного свойства, например потеря кораблём своего места из-за ошибок в счислении или отказе навигационного оборудования. В этом случае, имеем игру с неполной памятью.

Если одна из противоборствующих сторон представляет собой группу из 2-х и более участников, то есть, является составной, а взаимодействие между членами группы, по объективным причинами, отсутствует, то такой игрок может попеременно вспоминать и забывать свои действия и их результаты на предыдущих этапах. В этом случае, тако же имеем игру с неполной памятью.

Формально игрок ***имеет полную память***, если для двух его любых информационных множеств U и V, одно из которых расположено на предыдущем этапе игры (выше на дереве игры) в другое множество ***можно попасть по единственной альтернативе***.

Для случая игры с полной памятью, любой вершины множества $\{q_4, q_5\}$ можно достичь, двигаясь по 1-му (левому) ребру дерева, представленному на рисунке 4.8. Совершенно аналогично, двигаясь по 2-му правому ребру этого дерева, можно достичь вершин $\{q_6, q_7\}$.

Для случая игры с неполной памятью, вершины q_4 из информационного множества $\{q_4, q_5, q_6, q_7\}$ нельзя достичь только по одному ребру.

Поэтому, 1-й игрок в одном случае может иметь полную память, а в другом – не иметь её.

Игры с полной памятью удобны тем, что каждый игрок может обойтись стратегиями поведения, описание которых и реализация проще, чем в случае

Сущность упрощения заключается в том, что ***один выбор*** из $k_1 \times k_2 \times \ldots \times k_i \times \ldots \times k_r$ возможных чистых стратегий заменяется r выборами из k_i возможных альтернатив в каждом информационном множестве.

По существу, ***стратегия поведения*** игрока есть функция, ***определённая на классе его информационных множеств***, которая назначает для каждого информационного множества распределение вероятностей альтернатив этого множества.

Поэтому, ***если*** у игрока только ***одно информационное множество***, то его ***стратегия поведения эквивалентна смешанной стратегии***.

Пример, навеянный книгой замечательного детского писателя А. Гайдара “Тимур и его команда”.

Пусть вожаки малолетних хулиганов Мишка Квакин и Пётр Пятаков (Фигура) организуют, действуя последовательно, налёт на сад, обороняемый Тимуром и С°. Пусть каждая из разбойных шаек имеет по 2 способа налёта (проникновения в сад), допустим, 1 – через дыру в заборе, 2 – ползком по канаве. Тимур, в свою очередь, из-за малочисленности своих сторонников, имеет возможность блокировать только один из путей.

Игра, по существу, состоит из трёх этапов:

- I: нападает группа Мишки Квакина;
- II: Тимур и С° противодействуют налётчикам;
- III: нападает группа, ведомая Фигурой.

В зависимости от степени доверительного отношения нападающих, возможны две теоретико-игровые модели ситуации.

1. Пусть Квакин и Фигура взаимодействуют и договариваются о совместных действиях при налёте на сад. В этом случае, имеем игру с ***неполной информацией,*** но с ***полной памятью***. Соответствующее игровое дерево показано на рисунке 4.9. Серым цветом выделены информационные множества игроков.

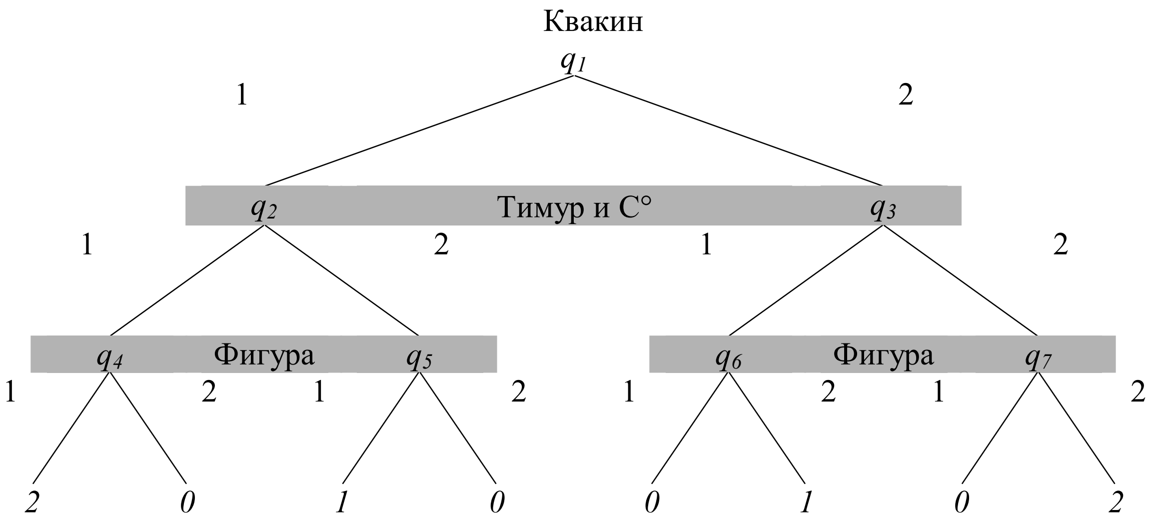


Рисунок 4.9 – Игра с неполной информацией и полной памятью

2. Пусть Квакин и Фигура не взаимодействуют, и выбор способа проникновения в сад ими не согласовывается. Тогда на III-м этапе составной игрок Квакин+Фигура “не помнит” своего хода, сделанного на I-м этапе. Следовательно, ***полной памяти он не имеет***, а игра может быть отнесена к играм ***с неполной информацией и неполной памятью***. Дерево показано на рисунке 4.10, серым цветом выделены информационные множества игроков.

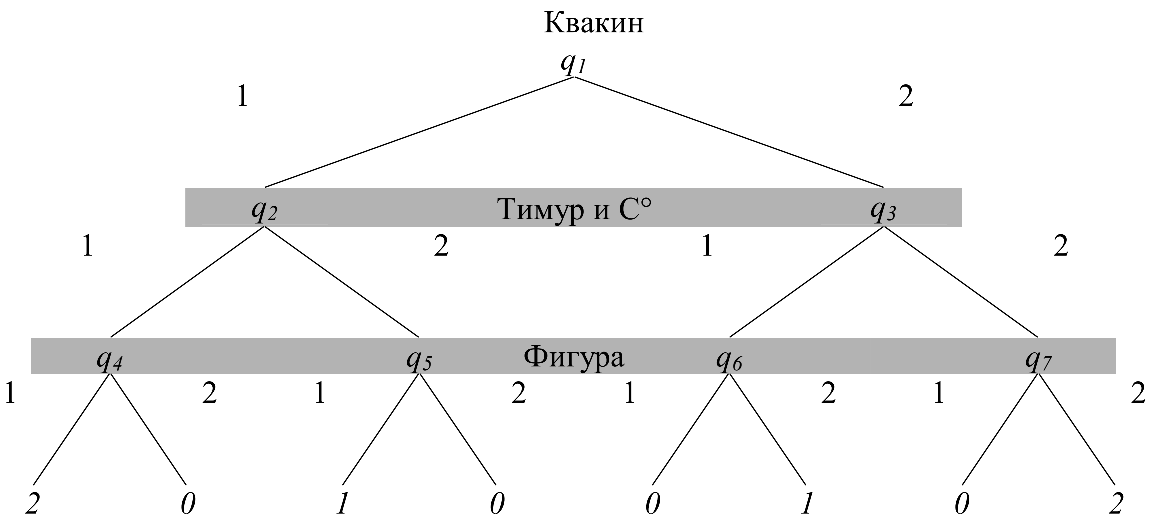


Рисунок 4.10 – Игра с неполной информацией и неполной памятью

На деревьях игры 4.9 и 4.10 в качестве платежей показано количество групп Квакин+Фигура, которым удаётся прорваться в сад.

Для игры с полной памятью, стратегия поведения 1-го игрока (Квакин+Фигура) есть система функций распределения по альтернативам информационных множеств

$$\left.\begin{aligned} f(q_1) &= (\alpha_1, 1-\alpha_1), \\ f(q_4, q_5) &= (\alpha_2, 1-\alpha_2), \\ f(q_6, q_7) &= (\alpha_3, 1-\alpha_3), \end{aligned}\right\} \tag{4.18}$$

где α_i — вероятность выбора 1-й стратегии в соответствующем информационном множестве.

У 2-го игрока стратегия поведения и смешанная стратегия совпадают:

$$g(q_2, q_3) = (\beta, 1-\beta). \tag{4.19}$$

Математическое ожидание 1-го игрока, при известных распределениях вероятностей, можно вычислить по дискретному аналогу формулы (4.17)

$$\begin{aligned} H(f, g) = 2\cdot\alpha_1\alpha_2\beta + 1\cdot\alpha_1\alpha_2(1-\beta) + 1\cdot(1-\alpha_1)(1-\alpha_3)\beta + \\ + 2\cdot(1-\alpha_1)(1-\alpha_3)(1-\beta) \end{aligned}, \tag{4.20}$$

получаемой при обходе дерева.

И.В. Романовский, в своей работе [62], показал, что для игр с полной памятью всякая смешанная стратегия эквивалентна стратегии поведения. Таким образом, игра сводится к нормальной форме матричной игры путём перечисления альтернатив.

		Тимур и С°		
Квакин+Фигура	Стратегии	1	2	
	1=[1(1, 1)]	2	1	
	2=[1(1, 2)]	2	1	
	3=[1(2, 1)]	0	0	← Не активная стратегия
	4=[1(2, 2)]	0	0	← Не активная стратегия
	5=[2(1, 1)]	0	0	← Не активная стратегия
	6=[2(1, 2)]	1	2	
	7=[2(2, 1)]	0	0	← Не активная стратегия
	8=[2(2, 2)]	1	2	

Решение эквивалентной ЗЛП для данного случая даёт значение оптимальных смешанных стратегий игроков:

$$P^* = \left\{\frac{1}{2},0,0,0,0,\frac{1}{2},0,0\right\}, \quad Q^* = \left\{\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\},$$
$$v = \frac{3}{2}.$$

Раздолбаи, однако, эти Квакин и Фигура, в заведомо выгодной для них стратегической конфигурации, проиграли слабому числом, но сильному духом Тимуру. Воистину, знания – сила.

Таким образом, 1-я и 6-я стратегии Квакин+Фигура должны применяться равновероятно на I-м этапе, далее, в информационном множестве $\{q_4, q_5\}$ – выбирается только 1-я, а в информационном множестве $\{q_6, q_7\}$ – выбирать только 2-ю. Последнее следует из анализа ситуаций на дереве игры. Поэтому стратегия поведения игрока Квакин+Фигура, эквивалентная его смешанной стратегии, то есть

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}; \alpha_2 = 1; \alpha_3 = 0.$$

Для модели игры неполной информацией и неполной памятью, соответствующей рисунку 4.10, имеем функции распределения вероятностей в информационных множествах

$$\left.\begin{aligned} & f(q_1) = (\alpha_1, 1-\alpha_1), \\ & f(q_4,q_5,q_6,q_7) = (\alpha_2, 1-\alpha_2), \\ & g(q_2,q_3) = (\beta, 1-\beta), \end{aligned}\right\} \tag{4.21}$$

совместно с функцией выигрыша, аналогичной (4.20).

$$\begin{aligned} H(f,g) = 2\cdot\alpha_1\alpha_2\beta + 1\cdot\alpha_1\alpha_2(1-\beta) + 1\cdot(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)\beta \\ + 2\cdot(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)(1-\beta) \end{aligned}. \tag{4.22}$$

В этом случае придётся использовать методы НП-программирования для отыскания оптимума функции (4.22).

Имеем градиент функции выигрыша

$$\nabla H(f,g) = \{3\alpha_2 - 2 + \beta; 3\alpha_1 - 2 + \beta; \alpha_1 + \alpha_2 - 1\} = 0,$$

откуда следует, что $\alpha_1 = \alpha_2 = \beta = 0{,}5$. Матрица Гёссе для рассматриваемого случая есть

$$\nabla^2 H(f,g) = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

угловые миноры суть (– 1, – 1, – 9), что говорит о том, что исследуемая точка является точкой перегиба, что характерно для седла функций.

Цена игры составит 0,125 × (2 + 1 + 1 + 2) = 0,75. Таким образом, отсутствие полной памяти стоит, в нашем случае, половины выигрыша.

4.8. Многошаговые игры

Действия сторон иногда принимают форму чередующихся циклов. В общем случае, ***схема цикла*** такова:

- выполняется ход I-й играющей стороной из конечного множества альтернатив;
- не зная выбора противника, выполняется ход II-й играющей стороной;
- следует случайное событие, после чего каждый игрок получает информацию о действиях, предпринятых другой стороной и об их результатах;
- после оценки результатов принимается решение на возобновление игрового цикла (продолжить игру) или прекращение игры.

Пример [64] из боевых действий, преследование подводной лодки (ПЛ) морским (малым) охотником (МО): уклонение ПЛ, заход МО на бомбометание и сброс бомб. После этого оба игрока узнают о действиях друг друга и о результатах.

Таким образом, на каждом шаге игры разыгрывается игра с нулевой суммой, которая называется “***игрой компонентой***” (синонимы: ***игровой элемент***, ***игровая позиция***).

Число таких ***шагов*** может быть различным: конечным или бесконечным, фиксированным или нефиксированным заранее, но ***длительность партии*** обычно ***определяется реализацией*** некоторого ***случайного события***.

Если в партии повторяется ***одна*** и та же игра-компонента, то игра называется ***однокомпонентной***, в ***противном*** случае – ***многокомпонентной***.

Известны классы многошаговых игр:

- детерминированные;
- рекурсивные;
- стохастические.

4.8.1. Детерминированные игры

В данном классе игровых моделей задаётся, заранее, число шагов, не превышающее некоторое фиксированное значение, N и, как правило, одна игра-компонента.

Игра-компонента детерминированной игры задаётся $m \times n$ платёжной матрицей, элементы которой представляют собой либо обычные выигрыши, либо являются играми, разыгрываемыми при использовании игроками соответствующей пары стратегий.

Пусть, например, на первом шаге игры игра-компонента выглядит

$$\Gamma_N \sim \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & \Gamma_{N-1} \end{bmatrix},$$

где Γ_{N-1} — такой исход игры-компоненты Γ_N, при которым игроки должны разыграть игру-компоненту

$$\Gamma_{N-1} \sim \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & \Gamma_{N-2} \end{bmatrix}$$

и так далее.

Если в такой игре пара чистых стратегий приводит к элементу Γ_{N-k-1} на шаге $N - k$, $(k = 0, 1, \ldots, N-2)$, то игра закончится через N шагов, в противном случае, на $N - k$-ом шаге, получаем обычный выигрыш. Поэтому результат игры зависит от действий игроков на каждом шаге, а не определяются случаем.

Одним из интересных представителей этого класса игр выступает игра на разорение.

В ***общем случае***, постановка задачи такова. Играют двое игроков, в распоряжении которых имеется r и R-r ресурсов соответственно, и конечное число стратегий. В результате розыгрыша, на каждом шаге игры-компоненты, ресурсы одного из игроков увеличиваются на 1-цу, а другого – на 1-цу уменьшаются. При этом общий объём ресурсов тако же изменяется в сторону увеличения или уменьшение. Выигрывает тот, кто первым достигнет заданного уровня, либо разорит своего противника.

В [66], показано, что если вероятности успеха и неуспеха в отдельном розыгрыше игроков равны p и q соответственно, то вероятность разорения определяется выражением

$$q_r = \begin{cases} \dfrac{\left(\dfrac{q}{p}\right)^R - \left(\dfrac{q}{p}\right)^r}{\left(\dfrac{q}{p}\right)^R - 1}, & p \neq \dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{R-r}{R}, & p = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Пример. Пусть игроки обладают следующими объёмами ресурсов:

- ресурс “красного” r,
- ресурс “синего” $R - r$.

Правила игры на разорение таковы:

- если игроки одновременно выбирают i-ю чистую стратегию, то на единицу уменьшаются ресурсы II-го игрока;
- если игроки выбирают разные чистые стратегии, то на единицу уменьшаются ресурсы I-го игрока;
- игра завершается, когда будут исчерпаны ресурсы одного из играющих;
- выигрыш красного игрока, по завершению партии, составит + 1, если он разорит противника, и – 1, если разорится сам.

Общий подход к решению многошаговых игр состоит в том, что они решаются “задом наперёд”, от заключительного шага игры к начальному. В ходе рассмотрения этих шагов крайне желательно вывести (найти) рекуррентное выражение. Если рекуррентное выражение построить не удаётся, то оптимальные стратегии и цену игры приходится определять, перерешав все игровые ситуации. Последнее легко осуществимо лишь для игр с небольшой размерностью. Очевидно, что с ростом размерности игровых матриц и числа шагов, будут расти вычислительные расходы.

Обозначим как $\Gamma_{k,l}$, $1 \le k \le r$, $1 \le l \le R - r$ игру-компоненту, которой I-й игрок имеет k единиц ресурсов, а II-й игрок — l единиц ресурсов. Матрица такой игры есть

$$\Gamma_{k,l} \sim \begin{bmatrix} \Gamma_{k,l-1} & \Gamma_{k-1,l} \\ \Gamma_{k-1,l} & \Gamma_{k,l-1} \end{bmatrix},$$

причём $\Gamma_{k,0} \sim 1$, $\Gamma_{0,l} \sim -1$.

За шаг до окончания партии (в случае её максимальной продолжительности), будем иметь такую игру-компоненту

$$\Gamma_{11} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Её значение, то есть цена игры-компоненты, есть $val\,\Gamma_{11} = v_{11} = 0$.

За два шага до окончания игры получим одну из игр

$$\Gamma_{12} \sim \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & -1 \\ -1 & \Gamma_{11} \end{bmatrix} \text{ или } \Gamma_{2,1} \sim \begin{bmatrix} 1 & \Gamma_{11} \\ \Gamma_{11} & 1 \end{bmatrix},$$

где Γ_{11} — такая ситуация (исход) игр Γ_{12} и Γ_{21}, при которой разыгрывается игра-компонента Γ_{11}.

Для определения цены игры возможна замена вида

$$\Gamma_{12}(v_{11}) \sim \begin{bmatrix} v_{11} & -1 \\ -1 & v_{11} \end{bmatrix} \text{ и } \Gamma_{21}(v_{11}) \sim \begin{bmatrix} 1 & v_{11} \\ v_{11} & 1 \end{bmatrix}.$$

И, таким образом, игра-компонента заменяется матричной игрой, для которой находятся

$$v_{12} = val\,\Gamma_{12}(v_{11}) \text{ и } v_{21} = val\,\Gamma_{21}(v_{11}).$$

На третьем шаге от конца игры, когда у игроков, в общей сложности, 4 единицы ресурсов, будет разыгрываться одна из следующих компонент

$$\Gamma_{13} \sim \begin{bmatrix} \Gamma_{12} & -1 \\ -1 & \Gamma_{12} \end{bmatrix},\ \Gamma_{22} \sim \begin{bmatrix} \Gamma_{21} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{12} & \Gamma_{21} \end{bmatrix} \text{ и } \Gamma_{31} \sim \begin{bmatrix} 1 & \Gamma_{21} \\ \Gamma_{21} & 1 \end{bmatrix}.$$

В этих играх также производится приведение их к матричным играм

$$\Gamma_{13}(v_{12}) \sim \begin{bmatrix} v_{12} & -1 \\ -1 & v_{12} \end{bmatrix},\ \Gamma_{22}(v_{12}, v_{21}) \sim \begin{bmatrix} v_{21} & v_{12} \\ v_{12} & v_{21} \end{bmatrix} \text{ и } \Gamma_{31}(v_{21}) \sim \begin{bmatrix} 1 & v_{21} \\ v_{21} & 1 \end{bmatrix}.$$

После чего находятся

$$v_{13} = val\,\Gamma_{13}(v_{12}),\ v_{22} = val\,\Gamma_{22}(v_{12}, v_{21}) \text{ и } v_{31} = val\,\Gamma_{31}(v_{21}).$$

Далее, можно решать игры-компоненты с объёмом ресурсов 5, 6, …, *N*. При этом будет возникать игра-компонента вида

$$\Gamma_{r,R-r} \sim \begin{bmatrix} \Gamma_{r,R-r-1} & \Gamma_{r-1,R-r} \\ \Gamma_{r-1,R-r} & \Gamma_{r,R-r-1} \end{bmatrix},,$$

которая, в общем случае, заменяется матричной игрой

$$\Gamma_{r,R-r}(v_{r-1,R-r}, v_{r,R-r-1}) \sim \begin{bmatrix} v_{r,R-r-1} & v_{r-1,R-r} \\ v_{r-1,R-r} & v_{r,R-r-1} \end{bmatrix},\text{где}$$

$v_{r-1,R-r} = val\,\Gamma_{r-1,R-r}(v_{r-1,R-r-1}, v_{r-2,R-r})$, $v_{r,R-r-1} = val\,\Gamma_{r,R-r-1}(v_{r,R-r-2}, v_{r,R-r-1})$, и так далее.

Ещё раз обратим внимание на необходимость вывода рекуррентного соотношения для расчёта, дабы не погрязнуть в рассмотрение многочисленных игр-компонент, число которых может быть весьма велико.

Пример, опять же навеянный детским триллером “Золотой Ключик”.

Буратино доложен отпереть дверь золотым ключиком. Манипуляции с холстом скважиной и ключом занимают время ΔT. Патрульный Дуремар, за время, равное T, обходит город в случайном порядке, так как не знает, где появится Буратино. Внезапно появившись во время манипуляций возле двери, он помешает открыть проход в кукольную страну и поймает Буратино.

Задача Буратино – открыть портал в кукольную страну, а Дуремара – изловить строптивца и возмутителя спокойствия кукольного мира.

Пусть отношение $\dfrac{T}{\Delta T} = N$ — целочисленно, и Буратино может отпереть дверь в моменты времени $t = \Delta T,\ 2\Delta T, ..., k\Delta T, ..., N\Delta T$. Стратегии игроков в игре-компоненте, разыгрываемой в текущий момент времени, суть следующие: для Буратино – отпирать (1) или не отпирать (2), а для Дуремара – появиться (1) или не появиться (2) в районе каморки папы Карло.

Если оба действуют, то Дуремар поймает Буратино

На первом от конца шаге (за шаг до окончания) игры имеем для красного игрока Буратино:

$$\Gamma_1 \sim \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Имеем седловую точку в платёжной матрице с координатами (2, 1). То есть, Буратино доложен выжидать, а Дуремар – действовать. В этом случае, Буратино не решит своей задачи, но останется на свободе и может попытать счастье в следующей игре. Цена игры-компоненты составит $val\,\Gamma_1 = v_1 = 0$.

Для игры-компоненты за два шага до окончания имеем

$$\Gamma_2(v_1) \sim \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & v_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

То есть, действующий, в отсутствие Дуремара, Буратино победит, победу обеспечит и его бездействие при наличии Дуремара: дождавшись, когда Дуремар уйдёт, Буратино беспрепятственно откроет дверцу. Цена игры составит $v_2 = val\,\Gamma_2(v_1) = \frac{1}{3}$, можно определить и оптимальные стратегии.

В общем случае, игра-компонента будет иметь вид

$$\Gamma_N \sim \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & \Gamma_{N-1} \end{bmatrix}.$$

Для платёжной матрицы вида

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & a \end{bmatrix},$$

при $a < 1$, седловой точки в платёжной матрице не имеется, $v(a) < 1$ и составит величину $v(a) = \frac{1+a}{3-a}$, откуда непосредственно последует рекуррентное соотношение $v_N = \frac{v_{N-1}+1}{3-v_{N-1}}$.

В [55], для игр такого типа показано $v_N = \frac{N-1}{N+1}$.

То есть, для второго шага игры цена составит

$$v_{N-1} = \frac{N-2}{N}.$$

Применение последней формулы для начального шага игры даёт

$$\Gamma_N(v_{N-1}) \sim \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & \dfrac{N-2}{N} \end{bmatrix},$$

откуда легко находятся оптимальные смешанные стратегии игроков:

$$P_N^* = \left(\frac{1}{N+1}, \frac{N}{N+1}\right), \qquad Q_N^* = \left(\frac{1}{N+1}, \frac{N}{N+1}\right), \text{ при } N \geq 2.$$

Пусть T = 1 час, ΔT = 12 мин*,* тогда N = 5.

В начале 1-го кванта времени, в момент ΔT:

$$N{=}5;\ P_5^* = \left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}\right), Q_5^* = \left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}\right), v_5 = \frac{2}{3}.$$

В последующий, 2-й квант, в момент $2\Delta T$:

$$N{=}4;\ P_4^* = \left(\frac{1}{5}, \frac{4}{5}\right), Q_4^* = \left(\frac{1}{5}, \frac{4}{5}\right), v_4 = \frac{3}{4}.$$

И так далее…

$$N{=}2;\ P_2^* = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), Q_2^* = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), v_2 = \frac{1}{3}.$$

В самом конце интервала: $N{=}1;\ P_1^* = (0{,}1), Q_1^* = (1{,}0), v_1 = 0.$

Мы видим, что в самом начале игры Буратино должен пережидать, надеясь, что Дуремар покинет район каморки, и можно будет без помех отпереть дверь.

4.8.2. Стохастические игры

Стохастическая игра является ***многокомпонентной многошаговой*** игрой. В отличие от детерминированных игр, на каждом шаге стохастической игры разыгрывается игра компонента, которая будет использоваться на следующем шаге и определяются выигрыши игроков.

Принципиально, стохастическая игра может возвращаться в предыдущую позицию, и, теоретически, партия будет тянуться до бесконечности. Но, так как заданные априори ***вероятности*** окончания игры ***не равны*** нулю (***положительны***), и ***число позиций*** игры ***конечно***, то вероятность бесконечной продолжительности партии равна нулю. Таким образом, стохастическая игра завершится после неопределенного (стохастического, случайного) числа шагов.

Формально, стохастическая игра есть набор из P позиций, каждая игровая позиция Γ_k задаётся матрицей $m_k \times n_k$, $k = 1, P$ элементы которой имеют вид

$$h_{ij}^{k} = a_{ij}^{k} + \sum_{\mu=1}^{P} q_{ij}^{k\mu}\,\Gamma_{\mu} + q_{ij}^{ko}\,\Gamma_{o}, i = 1,\overline{m_k}, j = 1,\overline{n_k}, \qquad (4.23)$$

где a_{ij}^{k} — выигрыш игрока I, если он выберет стратегию i, а II-й игрок – стратегию j; $q_{ij}^{k\mu} \geq 0$ — вероятность перехода из позиции k в игровую позицию μ при выборе игроками стратегий i и j соответственно; $q_{ij}^{ko} = 1 - \sum_{\mu=1}^{P} q_{ij}^{k\mu} > 0$ — вероятность окончания партии в k-й игровой позиции. Иногда, запись компоненты $q_{ij}^{k_o}\,\Gamma_{o}$ в элементах платёжной матрицы опускают из очевидных соображений.

Пример описания двухкомпонентной стохастической игры приводится ниже. Партия между этими игроками закончится, когда испытание даст исход Γ_o.

Игра-компонента Γ_1.

	1	2
1	$6 + (0{,}3\,\Gamma_0 + 0{,}5\,\Gamma_1 + 0{,}2\,\Gamma_2)$	$0 + (0{,}1\,\Gamma_0 + 0{,}2\,\Gamma_1 + 0{,}7\,\Gamma_2)$
2	$-3 + (0{,}2\,\Gamma_0 + 0{,}3\,\Gamma_1 + 0{,}5\,\Gamma_2)$	$3 + (0{,}4\,\Gamma_0 + 0{,}4\,\Gamma_1 + 0{,}2\,\Gamma_2)$

Игра-компонента $Г_2$.

	1	2
1	$2 + (0{,}1\ Г_0 + 0{,}4\ Г_1 + 0{,}5\ Г_2)$	$0 + (0{,}5\ Г_0 + 0{,}3\ Г_1 + 0{,}2\ Г_2)$
2	$0 + (0{,}8\ Г_0 + 0{,}1\ Г_1 + 0{,}1\ Г_2)$	$3 + (0{,}3\ Г_0 + 0{,}4\ Г_1 + 0{,}3\ Г_2)$

Таким образом, партия стохастической игры будет переходить от одной позиции к другой, согласно вероятностям перехода. При этом выбор стратегии оказывает влияние не только на выигрыш при текущем шаге, но и на выигрыши всех последующих шагов.

В стохастической игре стратегию игрока I ***определяют для каждого игрового элемента*** (игры-компоненты) $k= 1, 2, \dots , P$ и ***для всех шагов*** t как набор m_k-мерных векторов $X^k(t)$, удовлетворяющих условию

$$\sum_{i=1}^{m_k} x_i^k(t) = 1.$$

Стратегии же игрока II определяются аналогичным набором векторов $Y^k(t)$ размерностью n_k.

Для простоты предполагается, что используется одна и та же схема рандомизации при разыгрывании одного и того же элемента. Это означает, что для каждой игры-компоненты $Г_k$ используется один и тот же набор вероятностей применения чистых стратегий, сколько бы раз этот элемент не разыгрывался.

Такая стратегия называется ***стационарной***.

Если стохастическая игра начинается с компоненты $Г_k$, то пара стратегий игроков определяется как в обычной матричной игре математическим ожиданием выигрыша I-го игрока v_k. Так как стохастическая игра может начаться с любой игры-компоненты, то имеем вектор оценок выигрышей по играм $V = \{v_1, v_2, \dots , v_P\}$.

Таким образом, стохастическая игра ***должна решаться для каждого*** начального условия (т.е. для каждого ***игрового элемента, с которого начнётся игра***).

Метод решения основан на “усечении” игры. Предполагается, что игра продолжается ровно r шагов, а затем заканчивается.

Это допущение равносильно замене разыгрывания на r+1-м шаге игр-компонент $\{\Gamma_\mu^{r+1}\}$ их значениями $\{v_\mu^O\}$, что называется усечением игры на r-м шаге посредством выигрышей $\{v_\mu^O\}$. Когда r достаточно велико, то игра не отличается от первоначальной, а величины $\{v_\mu^O\}$ не должны оказывать сильное влияние на значение усечённой игры.

При этом последовательность $\{v_\mu^O\}$, $\{v_\mu^1\}$, …, $\{v_\mu^r\}$ сойдётся к пределу $V = \{v_1, v_2, \dots , v_P\}$.

В общем случае, применяется следующий алгоритм пересчёта стохастической игры в матричную игру

$$\begin{cases} v_0 = (0,0,...,0); & (4.24) \\ b_{ij}^{kr} = a_{ij}^{k} + \sum\limits_{\mu=1}^{P} q_{ij}^{k\mu} v_{\mu}^{r}, r = 0,1,...,i = 1,\overline{m_k}, j = 1,\overline{n_k}; & (4.25) \\ v_k^{r+1} = \operatorname{val} B_k^r = \operatorname{val}\left\| b_{ij}^{kr} \right\|, i = 1,\overline{m_k}, j = 1,\overline{n_k}. & (4.26) \end{cases}$$

Оптимальными стационарными стратегиями игроков в стохастической игре являются стратегии серии матричных игр $\{B_k(v)\}$, в которых элементы матриц $m_k \times n_k$ игр-компонент определяются формулой

$$b_{ij}^{k} = a_{ij} + \sum_{\mu=1}^{P} q_{ij}^{k\mu} v_{\mu}, i = 1,\overline{m_k}, j = 1,\overline{n_k},$$

как это следует из (4.25). Г. Оуэн показал [55], что вероятность продолжения игры, более чем r шагов, не превосходит величины S^r, какие бы стратегии игроками не применялись, где

$$S = \max_{\{i,j,k\}} \left\{ \sum_{\mu=1}^{P} q_{ij}^{k\mu} \right\}. \qquad (4.27)$$

Руководствуясь этой оценкой можно определить компромиссное значение r, при котором усечённая игра сходится, в процессе решения, к оптимальным стратегиям и цене стохастической игры. Выражение (4.27) означает выбор максимальной возможной вероятности продолжения игры по всем играм-компонентам.

Пример [55, 64]. Пусть стохастическая игра задана своими играми-компонентами вида

$$\Gamma_1 \sim \begin{bmatrix} 2 + 0{,}5\Gamma_3 & -1 \\ -1 & 2 + 0{,}5\Gamma_2 \end{bmatrix}, \quad \Gamma_2 \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 + 0{,}5\Gamma_1 \\ -1 + 0{,}5\Gamma_1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{и}$$

$$\Gamma_3 \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 + 0{,}5\Gamma_2 \\ -1 + 0{,}5\Gamma_2 & 1 \end{bmatrix}.$$

В ходе анализа игр компонент выяснено, что S = 0,5. Пусть r = 5, тогда

$$S^r = \frac{1}{32} = 0{,}03125,$$

то есть, порядка трёх процентов, так называемой статистической погрешности. Поэтому мы вполне можем воспользоваться усечённой до 5-и шагов игрой.

Согласно (4.24), $v = (0, 0, 0)$, а согласно (4.25) получаем игры

$$B_1^0 \sim \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},\ B_2^0 \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ и } B_3^0 \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

В соответствии с (4.26), определяем цены игр:

$$v_1^1 = \mathrm{val}\, B_1^0 = \frac{1}{5},\ v_2^1 = \mathrm{val}\, B_2^0 = 0 \text{ и } v_3^1 = \mathrm{val}\, B_3^0 = 0\,.$$

Следовательно, для данного шага усечения имеем $v^1 = (0{,}2;\ 0;\ 0)$.

Затем, используя компоненты вектора v^1, находим v^2 и так далее…

Имеем последовательность векторов

$$\begin{cases} v^1 = (0{,}2 \quad 0 \quad 0), \\ v^2 = (0{,}2 \quad 0{,}05 \quad 0), \\ v^3 = (0{,}21 \quad 0{,}05 \quad 0), \\ v^4 = (0.21 \quad 0{,}05 \quad 0), \\ v^5 = (0{,}21 \quad 0{,}05 \quad 0). \end{cases}$$

Полагая последний вектор v^5 за вектор значения неусечённой стохастической игры, имеем

$$B_1^5 \sim \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1{,}25 \end{bmatrix},\ B_2^5 \sim \begin{bmatrix} 1 & -0{,}88 \\ -0{,}88 & 1 \end{bmatrix} \text{ и } B_3^5 \sim \begin{bmatrix} 1 & -0{,}975 \\ -0{,}975 & 1 \end{bmatrix}.$$

По последним полученным игровым матрицам рассчитываем оптимальные стационарные стратегии игроков по каждой из игр-компонент:

$x_1 = (0{,}43;\ 0{,}57)$; $y_1 = (0{,}43;\ 0{,}57)$;
$x_2 = (0{,}5;\ 0{,}5)$; $y_2 = (0{,}5;\ 0{,}5)$;
$x_3 = (0{,}5;\ 0{,}5)$; $y_3 = (0{,}5;\ 0{,}5)$.

4.8.3. Рекурсивные игры

Рекурсивная игра отличается от стохастической тем, что вероятность её бесконечного продолжения отлична от нуля, следовательно, партия такой игры может продолжаться бесконечно долго.

В этом случае выигрыш обозначается как h_∞ и полагается равным нулю.

Формально, рекурсивная игра есть набор из P позиций, каждая игровая позиция Γ_k задаётся матрицей $m_k \times n_k$, элементы которой записываются так

$$h_{ij}^{k} = a_{ij}^{ko} \cdot q_{ij}^{ko} + \sum_{\mu=1}^{P} q_{ij}^{k\mu}\,\Gamma_\mu, i = \overline{1, m_k}, j = \overline{1, n_k}\,, \qquad (4.28)$$

где $\sum_{\mu=0}^{P} q_{ij}^{k\mu} = 1, q_{ij}^{k\mu} \geq 0, \mu = \overline{0, P}$. В отличие от детерминированной игры, здесь допускаются ситуации, в которых $\exists(i, j, k) q_{ij}^{ko} = 0$, то есть игра завершиться не может и продолжается. Элемент h_{ij}^{k} означает, что при выборе пары чистых стратегий (i, j) в игровой позиции k вероятность окончания игры составит q_{ij}^{ko}, при этом игрок I получит выигрыш a_{ij}^{ko}, а вероятность того, что в следующей позиции будет разыграна игра-компонента Γ_μ, равна $q_{ij}^{ko} \geq 0$.

Пример рекурсивной однокомпонентной игры.

Г ~		1	2
	1	0,7 Г + 3 · 0,3	2
	2	3	Г

Так как игра протекает теоретически бесконечно, то применение алгоритма, соответствующего формулам (4.24) – (4.26) не возможно, ибо не существует такого числа партий r, начиная с которого было бы проделано корректное усечение игры. В рекурсивных играх последовательность оценок v^r не обязательно сходится к истинному значению вектора цен игр-компонент v.

Проиллюстрируем последнее суждение примером. Дана однокомпонентная рекурсивная игра

$$\Gamma \sim \begin{pmatrix} \Gamma & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

для которой, в общем случае, можно записать

$$v^{r+1} \sim \mathrm{val}\begin{pmatrix} v^r & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Как следствие решения игры 2 × 2 имеем

$$v^{r+1} = \frac{1}{2 - v^r}.$$

Полагая, что игроки играют долго и безрезультатно ($v_0 = 0$), получим формулу $v = \dfrac{1}{1+r}$, откуда последует, что $\lim\limits_{r\to\infty}\dfrac{1}{1+r} = 1$.

Окончательно получим платёжную матрицу для расчётов $B \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, которой имеется пара седловых точек (1,1) и (1,2).

Обратимся теперь к исходной игре. Если в ней синий игрок будет выбирать свою первую стратегию в качестве оптимальной, то ***игра не завершится*** никогда, то есть выигрыш красного игрока, в этом случае, составит $h_\infty = 0$.

Поэтому, ***оптимальных стратегий может не существовать***, а существуют ***ε-оптимальные***.

Если, в рассматриваемой игре, игрок I будет осуществлять смешанную стратегию вида $(1 - \varepsilon, \varepsilon)$, где $0 < \varepsilon < 1$, то партия закончится гарантированно. Математическое ожидание выигрыша составит $v = 1 - \varepsilon$, не зависимо от действий игрока II.

Если же II-й игрок применит 2-ю чистую стратегию, то игра заканчивается, а математическое ожидание выигрыша I-го игрока всё равно составит $v = (1 - \varepsilon) \cdot 1 + \varepsilon \cdot 0$.

Поэтому игрок I может гарантировать математическое ожидание выигрыша, близкое к единице, но не достигающее его. При значениях ε, стремящихся к нулю, математическое ожидание продолжительности игры возрастет, а математическое ожидание выигрыша претерпевает разрыв при переходе к предельным стратегиям с $v = (1 - \varepsilon)$ на $v = \varepsilon$.

Пример. По колумбийским чащам следуют два наркобарона: дон Педро и дон Базилио со своими телохранителями (три телохранителя у Педро, два – у его оппонента). Оба ненавидят друг друга, стремятся уничтожить и знают, что находятся поблизости один от одного, и, поэтому, решаются на нападение.

При этом существует дилемма: сколько человек послать в нападение, а сколько оставить при теле хозяина. Обозначим стратегии игроков как систему чисел (i, j), где i – число телохранителей, участвующих в нападении, а j – число телохранителей, охраняющих хозяина.

Установим следующие правила игры. Если число нападающих больше, чем, охраняющих, то босс уничтожается, если наоборот, то нападение прекращается и организовывается снова (возобновляется игровой цикл).

Выигрыш дона Педро составит + 1, если он уничтожит дона Базилио, и – 1 в противном случае. В нормальной форме игра представима игрой-компонентой

Г ~

	{0, 2}	{1, 1}	{2, 0}
{0, 3}	Г	Г	Г
{1, 2)	Г	Г	1
{2, 1}	Г	1	— 1
{3, 0}	1	— 1	1

В данной случае имеем δ-оптимальную стратегию игрока I (дона Педро): $(0,\ 1 - \delta - \delta^2,\ \delta,\ \delta^2)$, получающуюся при рассмотрении предельной игры вида $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Чем меньше значение δ, тем больше вероятность победы и тем больше математическое ожидание продолжительности игры. При значении δ, равном нулю, игра будет бесконечной продолжительности.

4.9. Бесконечные игры

На практике возникают ситуации, в которых каждая из сторон выбирает некоторый ***непрерывный параметр***. Это может быть дистанция до цели или момент открытия огня, соотношение сил нападения и поиска, отношение сигнал-шум и т.д.

Как правило, такой параметр имеет бесчисленное число значений (в силу его непрерывности) или такое большое конечное число значений, что его удобно рассматривать как бесконечное.

Теоретическими моделями таких игровых ситуаций являются ***бесконечные игры***, то есть такие игры, в которых чистые стратегии представляют собой выборы тех или иных чисел из бесконечных множеств A и B.

Практически данные множества ограничены, поэтому представляют собой некоторые ***замкнутые интервалы*** либо ***замкнутые подмножества*** конечномерных эвклидовых пространств.

При этом стратегии игроков удобно отождествлять с отрезками единичной длины к которым, в принципе, может быть приведён интервал между максимальным и минимальным числами. Таким образом, пара чистых стратегий соответствует точке единичного квадрата.

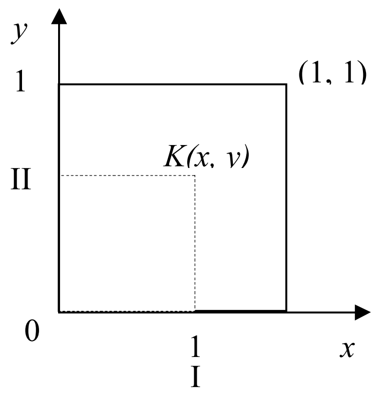


Рисунок 4.11 – Игровой квадрат

Термин "***бесконечная игра***" иногда заменяется термином "***непрерывная игра***", калькой от латинского слова ***continuum***. В качестве стратегий красного игрока принимается число $0 \le x \le 1$, а в качестве стратегий синего – $0 \le y \le 1$. Пара выбранных стратегий *(x, y)* определяет ситуацию, в которой игрок получит выигрыш равный *K(x, y)*, а игрок – выигрыш – *K (x, y)* (игра же с нулевой суммой!).

Так как множество пар точек *(x, y)* заполняет квадрат, то игра получила название "***игра на квадрате***" (смотри рисунок 4.11).

Функция *K (x, y)*, определяемая на единичном квадрате $[0, 1] \times [0, 1]$ и ставящая в соответствие каждой игровой ситуации выигрыш, который получает I-й игрок, называется ***функцией выигрыша*** или ***ядром*** (***игры***).

Для игр на квадрате ***остаются справедливыми*** все те зависимости, которые нами были рассмотрены ранее, для парной игры с нулевой суммой, касательно цены игры и седловой точки с точностью до обозначений.

$$v_1 = \max_x \min_y K(x, y); \qquad v_2 = \min_y \max_x K(x, y); \qquad v_1 \le v_2 .$$
$$K(x, y_0) \le K(x_0, y_0) \le K(x_0, y) .$$

Если находятся пары чисел, удовлетворяющих двойному неравенству седловой точки, то говорят, что игра имеет решение в ***чистых стратегиях***, а ядро имеет седловую точку, в общем же случае $v_1 \le v \le v_2$.

Смешанная стратегия, в соответствии с определением, представляет собой функцию распределения вероятностей, определяемую на интервале [0, 1] и обладающую известными свойствами:

1. $F(0) = 0$;
2. $F(1) = 1$;
3. $x > x_1 \Rightarrow F(x) \geq F(x_1)$;
4. $x_n \to x,\ x < 1,\ x_n < x \Rightarrow F(x_n) \to F(x)$.

Вероятность выбора числа из интервала $[x_1, x_2]$ есть $P(x_1, x_2) = F(x_2) - F(x_1)$, а функция распределения определяется интегралом

$$F(x) = \int_0^x f(x)dx,$$

в котором $f(x)$ есть плотность распределения вероятностей, называемая тако же дифференциальной функцией распределения или дифференциальным законом распределения. В теории игр часто используют специальную функцию распределения вида

$$F(x) = \alpha_1 I_{x_1}(x) + \alpha_2 I_{x_2}(x) + \ldots + \alpha_n I_{x_n}(x), \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1, 0 \leq x_i \leq x_{i+1} \leq 1, \quad (4.29)$$

а $I_a(x)$ одноступенчатая функция

$$I_a(x) = \begin{cases} 1, & x \geq a, \\ 0, & x < a. \end{cases} \quad (4.30)$$

Функция (4.29) называется ступенчатой функцией с n степенями.

Для синего игрока определятся функция $G(y)$, аналогичная (4.29) для красного игрока.

Пусть красный игрок использует смешанную стратегию F, а синий – чистую стратегию y. Тогда математическое ожидание выигрыша красного игрока (если существует)

$$E(F, y) = \int_0^1 K(x, y)dF(x).$$

Аналогично для синего игрока

$$E(x, G) = \int_0^1 K(x, y)dG(y).$$

При использовании игроками своих оптимальных смешанных стратегий, математическое ожидание выигрыша, если оно существует, равно

$$E(F,G)=\int_0^1\int_0^1 K(x,y)dF(x)dG(y).$$

Поэтому, как и в матричных играх, могут существовать максимин, минимакс

$$\max_F \min_G E(F,G) \le \min_G \max_F E(F,G)$$

и оптимальные стратегии игроков F^* и G^*, такие, что $E(F^*, G) \ge v$, $E(F, G^*) \le v$.

Воспользуемся примером по открыванию двери Буратино, изложенному в разделе 4.8.1 в качестве детерминированной игры, при гипотезе о дискретности времени наступления события. На этот раз будем исходить из того, что время непрерывно:

- T – время, в течение которого Буратино должен открыть дверь,
- T – время, в течение которого может появиться Дуремар,
- ΔT – время ($\Delta T < T$), за которое Буратино должен открыть дверь.

Пусть $0 \le t_{\mathrm{I}} \le T - \Delta T$ есть время начало действия Буратино, а $0 \le t_{\mathrm{II}} \le T$ момент появления Дуремара.

Введём обозначения: $t=\dfrac{\Delta T}{T}; x=\dfrac{t_I}{T}; y=\dfrac{t_{II}}{T}$, после чего будем иметь игру на квадрате, в которой стратегии игроков будут представимы числами из интервала: $[0, 1 - t]$ для первого игрока и $[0, 1]$ для второго, а функция выигрыша представит собой разрывную функцию

$$K(x,y)=\begin{cases}1, & y \le x \le 1-t \equiv y \le x, x \le 1-t;\\ 1, & x+t \le y \le 1 \equiv x+t \le y, y \le 1;\\ 0, & \text{в остальных случаях,}\end{cases}$$

область единичных значений, которые показаны на рисунке 4.12.

Нижняя область рисунка соответствует случаю, когда Дуремар не появился до момента времени , а нижняя – когда он появился и ушёл.

Для такой игры Дрешером [30] найдено следующее оптимальное решение.

Оптимальная стратегия красного игрока есть

$$F^*(x) = \frac{1}{[t^{-1}]} \cdot \sum_{j=0}^{[t^{-1}]-1} I_{j \times t}(x).$$

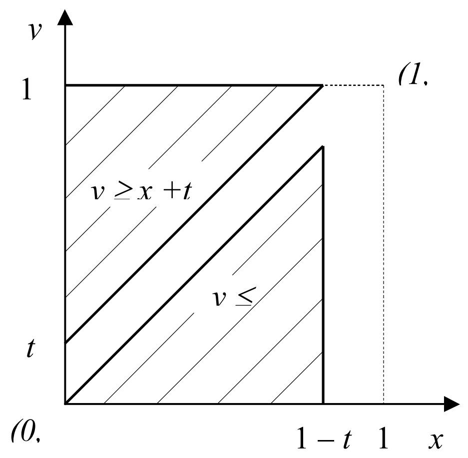


Рисунок 4.12 – Области ядра игры

Для синего игрока имеем

$$G^*(y) = \begin{cases} y, & t^{-1} - \text{целое число}, \\ \dfrac{1}{[t^{-1}]} \cdot \sum\limits_{j=0}^{[t^{-1}]} I_{\frac{j}{[t^{-1}]+1}}(y), & t^{-1} - \text{не целое число}. \end{cases}$$

При этом цена игры составит

$$v = 1 - \frac{1}{[t^{-1}]},$$

где запись [...] обозначает не превосходящее целое, то есть, округление по недостатку.

Пусть, например, T = 6 часов, а ΔT = 2,5 часа. Находим:

$$t^{-1} = \frac{6}{2{,}5} = \frac{12}{5} \Rightarrow [t^{-1}] = 2.$$

Имеем: оптимальную стратегию красного игрока

$$F^*(x) = 0{,}5 I_0(x) + 0{,}5 I_{\frac{5}{12}}(x),$$

синего игрока

$$G^*(y) = 0{,}5I_{\frac{1}{3}}(y) + 0{,}5I_{\frac{2}{3}}(y)$$

и цену игры v = 0,5. Получается, что Буратино должен начать манипуляции по отпиранию двери в начальный момент времени и через 2,5 часа равновероятно, а Дуремар – появиться в районе каморки в моменты 2 и 4 часа.

Пусть, как в примере раздела 4.8.1, теперь T = 1 час, ΔT = 12 мин, тогда t^{-1} = 5 – целое число. Цена игры составит v = 0,8.

Стратегия Буратино есть $F^*(x) = \dfrac{1}{5}\left[I_0(x) + I_{\frac{1}{5}}(x) + I_{\frac{2}{5}}(x) + I_{\frac{3}{5}}(x) + I_{\frac{4}{5}}(x)\right]$,

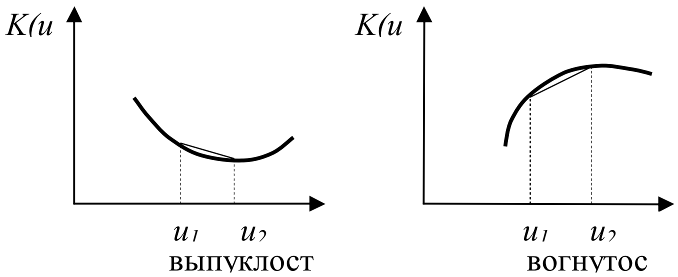
Дуремар же имеет равномерное распределение по всему временному интервалу $G^*(y) = y$, $0 \le y \le 1$.

Эта игра имеет ядро с разрывом. Для разрывного ядра игра, в ряде случаев, может не иметь решения, а игроки – своих оптимальных стратегий. Игры с ***разрывным ядром***, в которых выбирается ***момент времени***, называются ***дуэлями***.

Если ядро непрерывно, то решение может быть найдено всегда, но универсальных методов решения не существует.

4.9.1. Выпуклые и вогнутые игры [56, 64]

В случае, когда ядро игры (функция выигрыша) *K(x, y)* является нелинейным, то могут иметь место ***выпуклость*** и ***вогнутость*** по переменным x и y. Определение этих понятий аналогично определению, данному нами при рассмотрении НП-задач.



Функция *K(u)* называется ***выпуклой*** по u на интервале [0, 1] если

$$K[\lambda u_1 + (1-\lambda)u_2] \le \lambda K(u_1) + (1-\lambda)K(u_2),\ u_1, u_2 \in [0, 1],\ 0 \le \lambda \le 1,$$

и ***вогнутой*** по u если

$$K[\lambda u_1 + (1-\lambda)u_2] \geq \lambda K(u_1) + (1-\lambda)K(u_2),\ u_1,\ u_2 \in [0, 1],\ 0 \leq \lambda \leq 1.$$

Дважды дифференцируемая функция выигрыша $K(x, y)$ является выпуклой по y для любого x, если

$$\frac{\partial^2 K(x,y)}{\partial y^2} \geq 0.$$

Игра называется ***выпуклой***. В этом случае, игрок II имеет ***чистую*** оптимальную стратегию в случае ***строгой выпуклости***, и целое ***множество стратегий***, если имеет место ***нестрогая*** выпуклость.

Если

$$\frac{\partial^2 K(x,y)}{\partial x^2} \leq 0,$$

то игра вогнута по x для любого y. В этом случае, игрок I имеет ***чистую*** оптимальную стратегию в случае ***строгой вогнутости***, и целое ***множество стратегий***, если имеет место ***нестрогая*** вогнутость.

Чистая стратегия игрока задаются в виде одноступенчатых функций вида (4.30)

$$I_{y_1}(y) = \begin{cases} 1, & y \geq y_1, \\ 0, & y < y_1 \end{cases} \text{ и } I_{x_1}(x) = \begin{cases} 1, & x \geq x_1, \\ 0, & x < x_1 \end{cases},$$

в которых y_1 и x_1 определяются из уравнений:

$$v = \max_x K(x, y_1) \text{ и } v = \min_y K(x_1, y),$$

соответственно, а цена игры есть

$$v = \min_y \max_x K(x,y) = \max_x K(x, y^*) \text{ и } v = \max_x \min_y K(x,y) = \min_y K(x^*, y).$$

Если игра определяется функцией $K(x, y)$, которая вогнута по x при любом y и выпукла по y при любом x, то игра называется ***вогнуто-выпуклой***, имеет седловую точку, а игроки – по паре чистых оптимальных стратегий (x_0, y_0).

Существует ряд определений и теорем.

Определение [64]. Чистая стратегия x игрока I называется существенной, если для некоторой оптимальной стратегии y^* игрока II выполняется условие $K(x, y^*) = v$.

Теорема 1. Пусть Г – выпуклая игра с функцией выигрыша K, дифференцируемая по y при любом x; y^* – чистая оптимальная стратегия игрока II в ней, а v – её значение.

Тогда

1) если $y^* = 1$, то среди оптимальных стратегий игрока I имеется чистая стратегия x', которая является существенной и для которой $K'_y(x',1) \le 0$, где $K'_y(x,y) = \dfrac{\partial K(x,y)}{\partial y}$ (предполагается, что производная $K'_y(x,y)$ существует для всех значений x);

2) если $y^* = 0$, то среди оптимальных стратегий игрока I имеется чистая стратегия x'', которая является существенной и для которой $K'_y(x'',0) \ge 0$.

3) если $0 < y^* < 1$, то среди оптимальных стратегий игрока I найдётся такая, которая является смесью других существенных стратегий x' и x''. Для этих стратегий $K'_y(x', y^*) \le 0$ и $K'_y(x'', y^*) \ge 0$.

При этом стратегии x' и x'' выбираются с вероятностями α и $1 - \alpha$, где α – есть решение уравнения

$$\alpha K'_y(x', y^*) + (1-\alpha) K'_y(x'', y^*) = 0,$$

то есть, стратегии x' и x'' определяются функцией распределения

$$F^*(x) = \alpha \cdot I_{x'}(x) + (1-\alpha) \cdot I_{x''}(x), \qquad (4.31)$$

где $I_{x'}(x)$ и $I_{x''}(x)$ одноступенчатые функции распределения вида (4.30).

Теорема 2. Пусть Г – вогнутая игра с функцией выигрыша K, дифференцируемая по x при любом y; x^* – чистая оптимальная стратегия игрока I в ней, а v – её значение.

Тогда

1) если $x^* = 1$, то среди оптимальных стратегий игрока II имеется чистая стратегия y', которая является существенной и для которой $K'_x(1, y') \ge 0$, где $K'_x(x,y) = \dfrac{\partial K(x,y)}{\partial x}$ (предполагается, что производная $K'_x(x,y)$ существует для всех значений y);

2) если $x^* = 0$, то среди оптимальных стратегий игрока II имеется чистая стратегия y'', которая является существенной и для которой $K'_x(0, y'') \le 0$;

3) если $0 < x^* < 1$, то среди оптимальных стратегий игрока II найдётся такая, которая является смесью других существенных стратегий y' и y''. Для этих стратегий $K'_x(x^*, y') \ge 0$ и $K'_x(x^*, y'') \le 0$.

При этом стратегии y' и y'' выбираются с вероятностями β и $1 - \beta$, где β – есть решение уравнения

$$\beta K'_x(x^*, y') + (1-\beta) K'_x(x^*, y'') = 0,$$

то есть, стратегии y' и y'' определяются функцией распределения

$$G^*(y) = \beta \cdot I_{y'}(y) + (1-\beta) \cdot I_{y''}(y), \qquad (4.32)$$

где $I_{y'}(y)$ и $I_{y''}(y)$ одноступенчатые функции распределения вида (4.30).

Реализация стратегий (4.31) и (4.32) заключается в генерации случайного числа ξ из интервала (0, 1) и сравнение его с пороговым значением α или β (смотри рисунок 4.13).

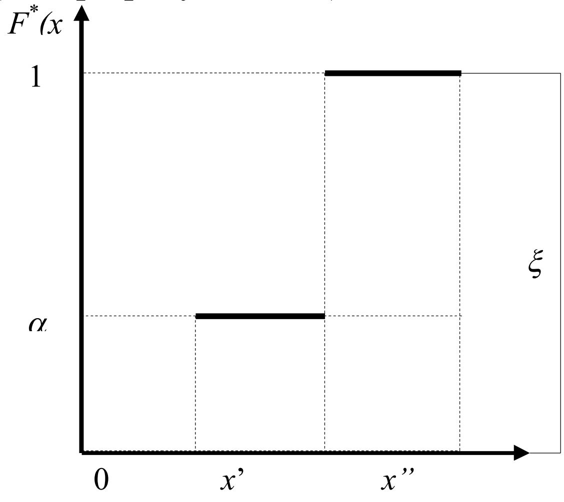


Рисунок 4.13 – Реализация стратегии $F^*(x)$

Если $\xi < \alpha$, то $x = x'$, в противном случае, если $\xi \ge \alpha$, то $x = x''$. Аналогичная схема применяется для смеси стратегий синего игрока $G^*(y)$ (4.32).

Пример 1. Пусть ядро игры имеет вид

$$K(x, y) = -x^2 + 2y^2 + 5xy - x - 2y.$$

Вторые производные ядра

$$\frac{\partial^2 K(x,y)}{\partial x^2} = -2 < 0 \text{ и } \frac{\partial^2 K(x,y)}{\partial y^2} = 4 > 0 .$$

Следовательно, данная игра вогнуто-выпуклая, при такой игре существует седловая точка (x_0, y_0). Её будем искать по алгоритму, предложенному в [55]. Необходимо решить систему вида

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= \psi(y_0), \\ y_0 &= \varphi(x_0) \end{aligned}\right\},$$

где $\psi(y)$ – такое значение x, которое максимизирует $K(x, y)$, а $\varphi(x)$ – такое значение y, которое минимизирует $K(x, y)$, то есть

$$K[\psi(y), y] = \max_x K(x,y),$$
$$K[x, \varphi(x)] = \min_y K(x,y).$$

Найдём $\frac{\partial K(x,y)}{\partial x} = -2x + 5y - 1 \Rightarrow x = \frac{5y-1}{2}$. Так как значение $y < \frac{1}{5}$ делает $x < 0$, что противоречит исходным посылкам, то функция будет ступенчатой:

$$\psi(y) = \begin{cases} 0, & y \le \frac{1}{5}, \\ \frac{5y-1}{2}, & y > \frac{1}{5}. \end{cases}$$

Аналогично имеем $\frac{\partial K(x,y)}{\partial y} = 4y + 5x - 2 \Rightarrow y = \frac{2-5x}{2}$ и функцию $\varphi(x)$:

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{2-5x}{2}, & x < \frac{2}{5}, \\ 0, & x \ge \frac{2}{5}. \end{cases}$$

Получаем систему уравнений для определения координат седловой точки и оптимальных стратегий:

$$\begin{cases} x_0 = \frac{5y-1}{2}, \\ y_0 = \frac{2-5x}{2}, \end{cases} \Rightarrow x_0 = \frac{2}{11};\ y_0 = \frac{3}{11}.$$

Пример 2.[64] Пусть игрок II выполняет стрельбу торпедой по игроку I. При обнаружении торпеды, игрок I уклоняется ходом: от неподвижного (Stop) до полного (Fool Speed). В свою очередь, игрок II выбирает упреждение, исходя из предположительной гипотезы о характере манёвра уклонения цели. Пусть ядро функции игры есть $K(x, y) = (x - y)^2$.

Полагая $x = 0$ для Stop, и $x = 1$ для Fool Speed, а в качестве y нормированную поправку на движение цели, придём к игре на квадрате.

Анализ свойств ядра показывает, что игра выпукла для обоих игроков

$$\frac{\partial^2 K(x,y)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 K(x,y)}{\partial y^2} = 2 > 0\,.$$

Поэтому игрок II имеет чистую оптимальную стратегию, а I – смешанную стратегию $F^*(x)$ при $x' = 0$ и $x'' = 1$, такую что

$$v = \min_y \max_x (x - y)^2 = \max_x (x - y^*)^2\,.$$

Для фиксированного значения y максимум v будет достигаться на концах интервала при $x = 0$ или $x = 1$ и будет равен

$$\max\left\{y^2, (1 - y^2)\right\}.$$

Указанное выше соображение иллюстрируется на рисунке 4.13, а. Решим уравнение

$$y^2 = (1 - y)^2 \Rightarrow y^* = 0{,}5;\ v^* = 0{,}25.$$

Вычислим, в соответствии с теоремой,

$$K'_y(x', y^*) = \left.\frac{\partial K(x,y)}{\partial y}\right|_{y^* = \frac{1}{2};\, x' = 0} = 1, K'_y(x'', y^*) = \left.\frac{\partial K(x,y)}{\partial y}\right|_{y^* = \frac{1}{2};\, x'' = 1} = -1\,.$$

Согласно третьему пункту теоремы 1, имеем уравнение

$$\alpha - (1 - \alpha) = 0 \Rightarrow \alpha = 0{,}5\,,$$

поэтому оптимальная стратегия первого игрока (4.31)

$$F^*(x) = 0{,}5 \cdot I_0(x) + 0{,}5 \cdot I_1(x)\,,$$

а ожидаемый выигрыш первого игрока составит

$$E(F,y) = 0{,}5y^2 + 0{,}5(1-y)^2 \geq 0{,}25.$$

Это показано на рисунке 4.14, б.

Таким образом, согласно оптимальным стратегиям, атакующий выбирает точку прицеливания посередине от возможного нахождения корабля от неподвижного до максимально уходящего. При этом обеспечивается вероятность уклонения не менее 0,25.

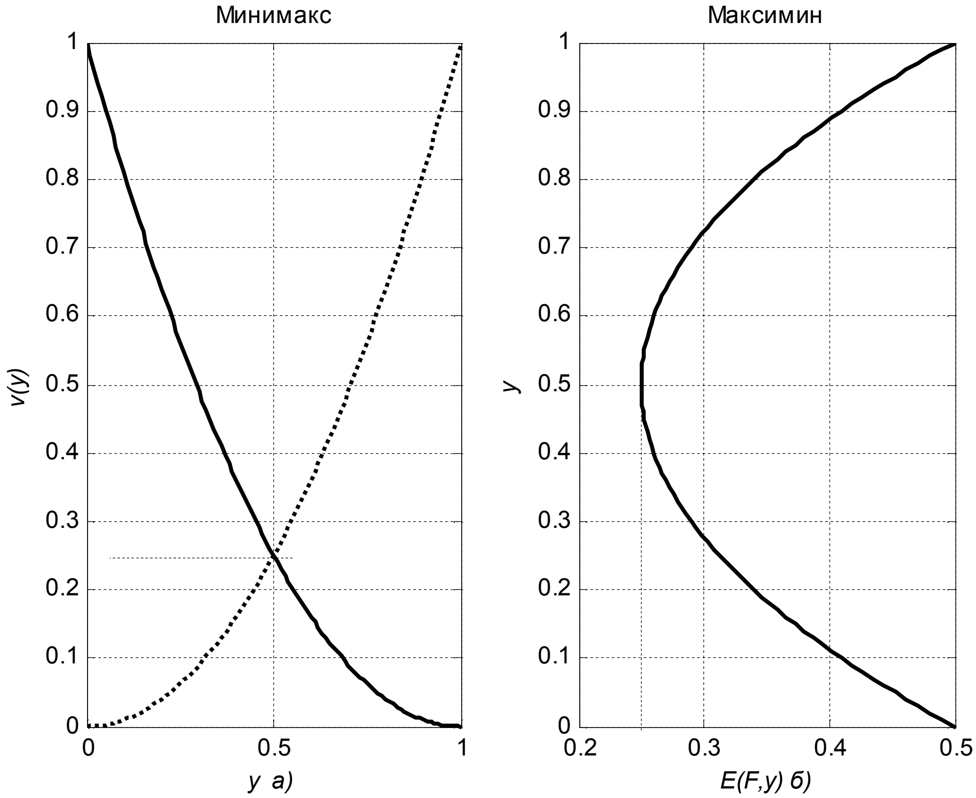


Рисунок 4.14 – Пояснения к исследованию функции ядра

Значения вероятности, равное 0,25, ни какая из противоборствующих сторон односторонними действиями изменить не может: для красного игрока это иллюстрируется рисунком 4.13, б. Если же синий игрок выбирает оптимальную стратегию $y^* = 0{,}5$, то, что бы ни делал красный, его выигрыш не превысит 0,25. Это следует из неравенства

$$(x - 0{,}5)^2 = x \cdot (x - 1) + 0{,}25 \leq 0{,}25.$$

4.9.2. Игры с выбором момента времени действия в условиях полной информации (шумные дуэли)

Существуют ситуации, столкновения интересов, в которых определяется стремление каждой из сторон, участвующих в конфликте, выбрать момент действия, обеспечивающий максимальную вероятность решения своей задачи, при условии упреждения противника.

Областью деятельности, описываемой подобными игровыми моделями, являются: военное дело [69], маркетинг, навигация [16, 19, 38], задачи управления в реальном масштабе времени быстропротекающими процессами и тому подобное.

По очевидному сходству с реальными поединками чести, данные игры называются дуэльными ситуациями или просто – дуэлями.

Характерной особенностью дуэлей является то, что противник стремится, по возможности, задержать свой выстрел (момент действия), так как с течением времени увеличивается вероятность поражения визави. Однако, задержка с применением своего оружия имеет разумные пределы, так как противник может выстрелить первым.

Дуэльная ситуация адекватно моделируется игрой на квадрате, если считать, то стратегии игроков являются числами x и $y \in [0, 1]$, интерпретируемыми как нормированные моменты времени применения оружия каждым игроком.

Функция выигрыша в такой игре есть

$$K(x,y)=\begin{cases} L(x,y), & x<y, \\ \Phi(x,y), & x=y,, \\ N(x,y), & x>y, \end{cases} \qquad (4.33)$$

где

- $L(x, y)$ – вероятность поражения I-м игроком II-го игрока, если I-й игрок произвёл выстрел первым;
- $\Phi(x)$ – вероятность поражения I-м игроком II-го игрока, при условии одновременного применения оружия;
- $N(x, y)$ – вероятность поражения I-м игроком II-го игрока, если II-й игрок произвёл выстрел первым.

Важно (!): При заданной функции выигрыша считается, что если II-й игрок предполагает применить оружие в момент времени y, то I-й игрок увеличивает свой выигрыш, ожидая сколь возможно, но ***действуя раньше*** II-го (читай красочное описание дуэли в романе в стихах А.С. Пушкина

“Евгений Онегин”). То есть, $L(x, y)$ монотонно возрастает по переменной x для каждого y.

При $x = y$ ядро $K(x, y)$ претерпевает разрыв.

Далее, в случае промаха игрока II, шансы на успех I-го игрока возрастают, таким образом, $N(x, y)$ монотонно возрастает по x для каждого y.

Рассуждая аналогичным образом, относительно II-го игрока, придём к выводу что $L(x, y)$ и $N(x, y)$ монотонно убывают по для каждого , а при $x = y$ ядро имеет разрыв.

Выигрыши по обе стороны разрыва могут существенно отличаться. При игре с полной информацией противник знает о применении другим противником оружия (шум выстрела), откуда следует, что $L(x, y) = l(x)$, а $N(x, y) = n(y)$. Поэтому ядро (4.33) трансформируется и выглядит так

$$K(x,y)=\begin{cases} l(x), & x<y, \\ \varphi(x), & x=y, \\ n(y), & x>y. \end{cases} \qquad (4.34)$$

Если предположить, что в ядре вида (4.34), функции $l(x)$ и $n(y)$ имеют непрерывные производные второго порядка, $\varphi(x)$ произвольная ограниченная функция, а $l(1) > n(1)$ и $l(0) < n(0)$, существует теорема [28].

Теорема [64]. Игра с ядром (4.34) имеет значение $v = l(a_0) = n(a_0)$, а оптимальные стратегии x^* и y^* описываются следующим образом. Если $\varphi(a_0) > v$, то $x^* = x_{a_0}$, а игрок II не имеет достижимой оптимальной стратегии; ε-оптимальная стратегия для игрока II имеет плотность в достаточно малом интервале справа от a_0. Если $\varphi(a_0) = v$, то $x^* = y^* = I_{a_0}$ – вырожденное распределение, сконцентрированное в точке a_0. Если $\varphi(a_0) = v$, то $y^* = y_{a_0}$, а игрок I не имеет достижимой оптимальной стратегии; ε-оптимальная стратегия для игрока I имеет плотность в достаточно малом интервале справа от a_0.

Стратегии x_0 и y_0 будут являться ε-оптимальными в случае выполнения условий

$$\begin{cases} K(x_0,y)\ge v-\varepsilon, & \forall y\in Y, \\ K(x,y_0)\le v+\varepsilon, & \forall x\in X, \end{cases}$$

v – значение игры.

ε-оптимальность означает, что игрок II применяя ε-оптимальную стратегию, может помешать игроку I получить выигрыш больше чем $v + \varepsilon$.

Аналогично игрок I, применяя ε-оптимальную стратегию, может гарантировать себе, по крайней мере $v - \varepsilon$ независимо от стратегии игрока II для любого $\varepsilon > 0$.

Пример. [64] Пусть $P_1(x)$ – вероятность поражения игрока II игроком I является непрерывной функцией, причём $P_1(0) = 0$ и $P_1(1) = 1$. А $P_2(y)$ – вероятность поражения игрока I игроком II возрастает по y и $P_1(0) = 0$ и $P_1(1) = 1$.

Пусть, если I поражает II, то его выигрыш составляет + 1, а если наоборот, то красный выигрывает – 1, если оба игрока промахнулись или уничтожены, то выигрыш I составил 0.

Если попадание гарантируется (самонаводящиеся торпеды, ракеты либо снаряды), то имеем матричную игру в нормальной форме:

		II	
		Пли	Дробь
I	Пли	0	1
	Дробь	– 1	0

Для этой игры мы уверенно можем отыскивать оптимальные смешанные стратегии (стрелять или не стрелять).

Определим ядро данной игры. Функция цены игры будет иметь вид

$$v = (-1) \times [1 - P_1(x)].$$

Поэтому, когда I-й игрок действует, а II-й – выжидает, то

$$l(x) = P_1(x) - [1 - P_1(x)] = 2\, P_1(x) - 1.$$

По аналогии, если как I-й так и II-й игрок ведут огонь, то

$$\varphi(x) = P_1(x)\, [1 - P_2(x)] - P_2(x)\, [1 - P_1(x)] = P_1(x) - P_2(x)].$$

И, наконец, если II-й игрок действует, а I-й выжидает, имеем

$$n(y) = -P_2(y) + [1 - P_2(y)] = 1 - 2\, P_2(y).$$

Таким образом, ядро игры есть

$$K(x,y) = \begin{cases} 2P_1(x) - 1, & x < y, \\ P_1(x) - P_2(x), & x = y, \\ 1 - 2P_2(y), & x > y. \end{cases} \tag{4.35}$$

Для данного ядра справедливо утверждение теоремы, поэтому могут быть найдены оптимальные чистые стратегии. Параметр a_0 может быть найдено при решении уравнения

$$2P_1(x)-1=1-2P_2(x)=v,$$

а сама цена

$$v=2P_1(a_0)-1=1-2P_2(a_0)\Rightarrow 2P_1(a_0)-1\cdot[P_1(a_0)+P_2(a_0)]=P_1(a_0)-P_2(a_0).$$

Оптимальная стратегия первого игрока определяется решением

$$P_1(x^*)+P_2(x^*)=1.$$

Оптимальная стратегия второго игрока определяется решением

$$P_1(y^*)+P_2(y^*)=1$$

Заметим, что равенство

$$P_1(y^*)-P_2(y^*)=P_1(x^*)-P_2(x^*)$$

есть отражение равновесия для пары (x^*, y^*) между желанием задержать выстрел и опасностью промедления.

Ядро (4.35) справедливо для одинаковой результативности выстрелов обоих противников (враг убит или остался в живых). Если же, при завершении игры, результат будет отличен от единичного, то, полагая вероятности поражения равными $P_1(x)$ и $P_2(y)$, а система выигрышей красного игрока такова, что:

α – если поражён синий игрок;

β – если поражён красный игрок;

γ – поражены оба игрока;

0 – если оба игрока не поражены, промахнылись.

Если определить стратегию x игрока I, а стратегию y игрока II как моменты упреждающего выстрела или выстрела после промаха противника, при котором вероятность поражения будет равна единице, можно отыскать математическое ожидание выигрыша игрока I.

$$K(x,y)=\begin{cases}(\alpha-\beta)P_1(x)+\beta, & x<y,\\ \alpha P_1(x)+\beta P_2(x)+(\gamma-\alpha-\beta)\cdot P_1(x)\cdot P_2(x), & x=y,\\ \alpha-(\alpha-\beta)\cdot P_2(y), & x>y.\end{cases}$$

При $\alpha > \beta$ определятся значение a_0

$$(\alpha-\beta)\cdot P_1(x)+\beta=\alpha-(\alpha-\beta)\cdot P_2(x)=v.$$

Когда $\varphi(a_0) \geq v$, красный игрок будет иметь оптимальную стратегию

$$\alpha P_1(a_0)+\beta P_2(a_0)+(\gamma-\alpha-\beta)\cdot P_1(a_0)\cdot P_2(a_0)\geq \alpha P_1(a_0)+\beta P_2(a_0),$$

если $\gamma-\alpha-\beta\geq 0$, то игрок I, в соответствии с теоремой имеет стратегию $x^*=x_{a_0}$. А у игрока II, в этом случае, нет оптимальной стратегии, и он должен придерживаться стратегии, сколь угодно близко совпадающей с x^*.

Если же $\gamma-\alpha-\beta<0$, то у игрока II имеется чистая стратегия $y^*=y_{a_0}$, а красный игрок таковой не имеет.

Пример. Рассмотрим, дуэль Е. Онегина и В. Ленского. По её условиям, противники начинают сходиться на $D_{\max}$ шагах от барьеров, которые расположены на расстоянии $D_{\min}$ от центра позиции, и за время сближения, включая начальную и конечную точки, могут произвести выстрел.

За игрока I примем Онегина, а за игрока II – Ленского, произведя нормировку дистанций вида

$$x=y=\frac{D_{\max}-d}{D_{\max}-D_{\min}},$$

где $D_{\min} \leq d \leq D_{\max}$ – дистанция выстрела, придём к игре на квадрате. Условимся, что “подстреленный” Ленский оценивается Онегиным в + 1, а собственные ранение или гибель – в – 1, взаимные повреждения или промахи – в 0.

Для данного случая будет справедливо ядро (4.35) со всеми вытекающими последствиями.

Пусть [55] вероятности в (4.35) описываются функциями вида

$$P_1(x) = 1 — x,\ P_2(y) = 1 — y^2,$$

являющимися монотонно убывающими, тогда

$$1 = P_1(x^*) + P_2(x^*) = \Rightarrow x + x^2 = 1,$$

откуда x^* = 0,62, аналогично и y^* = 0,62. Цена игры составит 0,24. Расчёт дистанции выстрела, из нормированного пространства в реальное, будет определяться выражением

$$d = D_{\max} - x^*\cdot(D_{\max} - D_{\min}) = D_{\max} - y^*\cdot(D_{\max} - D_{\min}).$$

Пусть барьеры положены в шести шагах друг от друга (жёсткая дуэль по условиям того времени) $D_{\min} = 6$ “…Зарецкий 32 шага отмерил с точностью отменной, развёл друзей на крайний след и каждый взял свой пистолет…”, то есть $D_{\max} = 32$. Отсюда мы можем рассчитать дистанцию выстрела как 32 — 0,62×26 = 15,88, то есть примерно за восемь шагов друг от друга или за два шага до барьера.

4.9.3. Игры с выбором момента времени действия в условиях неполной информации (бесшумные и смешанные дуэли)

В ряде дуэльных ситуаций каждая сторона имеет лишь частичную информацию (а точнее, хотя бы одна из сторон не имеет информации) о действиях противоположной стороны. И необходимо выбирать момент времени в условиях неполной информации.

В этих дуэлях функции L и N зависят как от x так и от y, а оптимальные стратегии будут смесями чистых стратегий типа I_x.

Пусть игроки производят только по одному выстрелу, но не знают, выстрелил ли его противник или нет.

Рассчитаем ядро при условиях, что $P_1(x) = P_2(x) = x$, $P_1(y) = P_2(y) = y$, а так же если игрок I поражает игрока II, то его выигрыш составляет + 1, а если наоборот, то красный выигрывает – 1, если оба игрока промахнулись или уничтожены, то выигрыш I составил 0.

Считая величины x и y независимыми, получим

$$K(x, y) = \begin{cases} x - y + xy, & x < y, \\ 0, & x = y, \\ x - y + xy, & x > y, \end{cases}$$

которое является симметричным, так как $K(x,\ y) = -\ K(x,\ y)$, такая игра называется симметричной и стратегии, которые оптимальны для одного игрока, являются оптимальными и для другого. В [30] получено, что, в этом случае, оптимальные стратегии игроков имеют плотность вероятностей вида

$$f^*(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x \le \dfrac{1}{3}; \\ \dfrac{1}{4x^2}, & \dfrac{1}{3} \le x \le 1. \end{cases}$$

Отсюда интегрированием можно найти

$$F^*(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x \le \dfrac{1}{3}; \\ \int\limits_{\frac{1}{3}}^{x} f^*(x)dx = \dfrac{1}{8}\left(9 - \dfrac{1}{x^2}\right), & \dfrac{1}{3} \le x \le 1. \end{cases}$$

Пусть красный игрок знает о производстве выстрела синим игроком, а синий игрок такого рода информацией о действиях красного игрока не располагает. Вероятности поражения примем $P_1(x) = P_2(x) = x$, $P_1(y) = P_2(y) = y$. Тогда функция выигрыша примет следующий вид

$$K(x, y) = \begin{cases} x - y + xy, & x < y, \\ 0, & x = y, \\ x - 2y, & x > y. \end{cases}$$

4.10. Игровые модели неантагонистических конфликтов (биматричные игры)

Антагонизм матричных игр двух персон заключался в том, что одна из сторон выигрывала то, что проигрывала другая.

Однако часто имеет место ситуация, когда игроки, чьи интересы сталкиваются, получают (или выплачивают) разные суммы при одних и тех же обстоятельствах. Поэтому суммарный выигрыш оказывается, в этом случае, не равен нулю, а игры называются играми с ***ненулевой суммой***.

Всякая конечная игра с ненулевой суммой формально описывается парой ($m \times n$) матриц $A = [a_{i,j}]$ и $B = [b_{i,j}]$, или биматрицей $(A, B) = [a_{i,j}, b_{i,j}]$, $i = 1, \ldots, m$; $j = 1, \ldots, n$. Благодаря особенности описания, такие игры ***называются биматричными***.

Пары (i, j) — ситуации в чистых стратегиях, числа $a_{i,j}$ и $b_{i,j}$ составляют выигрыши игроков I и II соответственно в указанных ситуациях.

По аналогии с играми с нулевой суммой, распределение вероятностей на множестве чистых стратегий будем определять как смешанные стратегии, и математические ожидания выигрышей игроков будут определяться выражениями

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} p_i q_j \text{ и } \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} b_{i,j} p_i q_j .$$

Игры с ненулевой суммой условно подразделяются на два класса:

1) бескоалиционные (некооперативные) биматричные игры, в которых напрочь исключаются совместные договорённости при выборе стратегии игроками;
2) кооперативные биматричные игры, в которых допускаются любые коалиции или кооперации.

4.10.1. Некооперативные биматричные игры

В основу построения оптимальных стратегий в биматричных играх положен следующий ***принцип***: отклонение от ситуации, сложившейся в результате оптимального поведения, либо невыгодно само по себе, либо, в результате отклонения появляется возможность перейти с выгодой к новой ситуации, достижимой при помощи оптимального поведения.

Ситуация ***является равновесной***, если ни один из игроков не имеет основания для изменения своей стратегии, если другой игрок будет придерживаться своей.

Математическое описание ситуации равновесия определяется через средние выигрыши обоих игроков:

$$\left.\begin{aligned} v_I(P^*,Q^*) &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} p_i^* q_j^* \geq \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} p_i q_j^*, \\ v_{II}(P^*,Q^*) &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} b_{i,j} p_i^* q_j^* \geq \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} b_{i,j} p_i^* q_j, \end{aligned}\right\} \tag{4.36}$$

где обозначено $v_I(P^*, Q^*)$ – математическое ожидание выигрыша I-го игрока, а $v_{II}(P^*, Q^*)$ – математическое ожидание выигрыша II-го игрока.

Ситуация равновесия в биматричных играх аналогична понятию оптимальная стратегия в матричных играх с нулевой суммой. Строго говоря, в последних ситуация равновесия образуется оптимальными стратегиями: если (P^*, Q^*) и $(P^\blacklozenge, Q^\blacklozenge)$ равновесные ситуации, то $(P^*, Q^\blacklozenge)$ и $(P^\blacklozenge, Q^*)$ тако же являются ситуациями равновесия,

$$v_I = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} h_{i,j} p_i^* q_j^* = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} h_{i,j} p_i^\lozenge q_j^\lozenge = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} h_{i,j} p_i^\lozenge q_j^* = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} h_{i,j} p_i^* q_j^\lozenge,$$

где P^*, $P^\blacklozenge$, Q^*, $Q^\blacklozenge$ – оптимальные смешанные стратегии игроков. То есть, в матричных играх, один из векторов, P^* либо Q^* определяет равновесную ситуацию независимо от другого.

Определение [8, 64]. Ситуации равновесия (P, Q) и ($P^{\blacklozenge}$, $Q^{\blacklozenge}$) называются:

а) эквивалентными, если $v_I(P, Q) = v_I(P^{\blacklozenge}, Q^{\blacklozenge})$ и $v_{II}(P, Q) = v_{II}(P^{\blacklozenge}, Q^{\blacklozenge})$;

б) взаимозаменяемыми, если (P, $Q^{\blacklozenge}$) и ($P^{\blacklozenge}$, Q) также являются ситуациями равновесия.

В играх с нулевой суммой ситуации равновесны, эквивалентны и взаимозаменяемы.

Определение [8, 64]. Пара (P, Q) называется совместно недопустимой (совместно подчинённой) если существует пара ($P^{\blacklozenge}$, $Q^{\blacklozenge}$), такая что

$$v_I(P^{\blacklozenge}, Q^{\blacklozenge}) > v_I(P, Q) \text{ и } v_{II}(P^{\blacklozenge}, Q^{\blacklozenge}) > v_{II}(P, Q). \tag{4.37}$$

В этом случае говорят, что пара ($P^{\blacklozenge}$, $Q^{\blacklozenge}$) совместно доминирует над парой (P, Q). Пара ($P^{\blacklozenge}$, $Q^{\blacklozenge}$) является совместно допустимой тогда и только тогда, когда она не является совместно подчинённой другой паре.

В [8, 64] показано, что каждая биматричная игра имеет, по крайней мере, одну ситуацию равновесия. Стратегии игроков, её образующие, называются равновесными, а пара чистых равновесных стратегий – ***седловой точкой Нэша***.

Как просматривается из сказанного выше, седловая точка Нэша является аналогом седловой точки матричной игры, при условии, что ни одному игроку не выгодно менять свою чистую стратегию в ситуации, когда противник придерживается своей чистой стратегии.

Пример 1. Пусть имеем биматричную игру в форме

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

В этом случае существует одна точка Нэша $P^* = (1, 0)$ и $Q^* = (1, 0)$. Эта же пара является совместно допустимой.

Определение [8, 48, 64]. Биматричная игра имеет решение в строгом смысле, когда среди совместно допустимых пар стратегий существует пара равновесных стратегий, а все совместно допустимые равновесные пары взаимозаменяемы и эквивалентны.

Пример 2. Биматричная игра

$$A = \begin{pmatrix} 30 & 10 \\ 15 & 20 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 40 & 20 \\ 17 & 30 \end{pmatrix}.$$

В этом случае, согласно (4.36), существует сразу две точка Нэша:

$$[P^* = (1, 0); Q^* = (1, 0)] \text{ и } [P^{\blacklozenge} = (0, 1); Q^{\blacklozenge} = (0, 1)].$$

Однако пара (P, Q) совместно доминирует пару ($P^{\blacklozenge}, Q^{\blacklozenge}$), потому что $v_I(P, Q) = 30 > v_I(P^{\blacklozenge}, Q^{\blacklozenge}) = 20$, поэтому данная игра имеет решение в строгом смысле.

Решение в строгом смысле может существовать не всегда. Полагается, что если игра не имеет ни одной совместно допустимой пары, и если две любые равновесные пары взаимно заменяются, то игра называется ***разрешимой в смысле Нэша***[51, 52].

Пример 3. Задана биматричная игра

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

В ней всякая пара чистых или смешанных стратегий определяет ситуацию равновесия, следовательно, игра разрешимо в смысле Нэша.

Пример 4. А вот в случае биматричной игры

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

имеется две ситуации равновесия [$P^* = (1, 0)$; $Q^* = (1, 0)$] и [$P^{\blacklozenge} = (0, 1)$; $Q^{\blacklozenge} = (0, 1)$], но они не взаимозаменяемы, поэтому игра не разрешима в смысле Нэша, но разрешима в строгом смысле.

Пример 5. Для биматричной игры

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

нет точек Нэша и решений в чистых стратегиях. Необходимо искать смешанные стратегии.

Теорема[64]. Если в некооперативной биматричной игре (A, B) в стратегиях (P^*, Q^*) ситуации равновесия (P^*, Q^*) активны все чистые стратегии ($p_i^* > 0$ и $q_i^* > 0$) и если один из игроков придерживается равновесной смешанной стратегии, то математическое ожидание выигрыша другого игрока остаётся постоянным.

На основании этой теоремы выполняется построение систем уравнений для поиска оптимальных смешанных стратегий.

Для вычисления равновесных смешанных стратегий в ($m \times n$) биматричных играх, необходимо составить $n_a + 1$ уравнение для синего игрока, и $m_a + 1$ уравнение для игрока красного, где m_a и n_a – число активных стратегий для красного и синего игрока соответственно, вида

$$v_I(P^*, Q^*) = \sum_{j=1}^{n_a} a_{i,j} q_j; \qquad \sum_{j=1}^{n_a} q_j = 1; \qquad v_{II}(P^*, Q^*) = \sum_{i=1}^{m_a} b_{i,j} p_i; \qquad \sum_{i=1}^{m_a} q_i = 1;$$

и решить эти две системы, после чего проверить выполнение неравенств (4.36) ситуации равновесия для полученных решений P^*, Q^*, $v_I(P^*, Q^*)$ и

$v_{II}(P^*, Q^*)$. Если неравенства выполняются, то смешанные стратегии P^* и Q^* являются равновесными.

Рассмотрим систему уравнений, для игры 2 × 2 (как тривиальный вариант)

$$\left.\begin{array}{l} v_I = a_{11}q_1^* + a_{12}q_2^* \\ v_I = a_{21}q_1^* + a_{22}q_2^* \\ q_1^* + q_2^* = 1 \\ v_{II} = b_{11}p_1^* + b_{21}p_2^* \\ v_{II} = a_{12}p_1^* + a_{22}p_2^* \\ p_1^* + p_2^* = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} p_1^* = \dfrac{b_{22} - b_{21}}{b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22}} \\ q_1^* = \dfrac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}} \end{array}\right. . \qquad (4.38)$$

Применяя эти формулы к расчёту биматричной игры последнего примера, получим

$$P^* = \left\{\frac{3}{5}; \frac{2}{5}\right\}, Q^* = \left\{\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right\}; \qquad v_I(P^*, Q^*) = \frac{11}{5}; \quad v_{II}(P^*, Q^*) = \frac{11}{5}.$$

Если биматричная игра не разрешима ни в строгом в смысле, ни в смысле Нэша, то вводится в оборот понятие “приведённая игра”, получающаяся при исключении доминируемых стратегий в исходной игре.

При этом говорят, что биматричная игра разрешима в слабом смысле, если соответствующая ей приведённая игра разрешима в строгом смысле.

Принцип доминирования, несколько более видоизменённый, выглядит следующим образом.

1. Если i-я строка матрицы A строго доминируется некоторой выпуклой комбинацией других строк (в частности, если элементы некоторой строки матрицы A больше соответствующих элементов строки i), то, без изменения множества равновесных стратегий обоих игроков, i-я строка матриц из матриц A и B может быть вычеркнута.

2. Если j-й столбец матрицы B строго доминируется некоторой выпуклой комбинацией других столбцов (в частности, если элементы некоторого столбца матрицы B больше соответствующих элементов столбца j), то, без изменения множества равновесных стратегий обоих игроков, j-й столбец из матриц A и B может быть вычеркнут.

Таким образом, стратегии исключаются из списка активных при выполнении условий:

$$\left.\begin{array}{l} p_k^* = 0 \text{ если } a_{i,j} > a_{k,j},\ \text{для } j = \overline{1,n} \text{ либо } a_{k,j} < \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_{k,j},\ \text{для } i = \overline{1,m}; \\ q_r^* = 0 \text{ если } b_{i,j} > b_{k,r},\ \text{для } i = \overline{1,m} \text{ либо } b_{i,r} < \sum_{j=1}^{n} \lambda_j b_{i,r},\ \text{для } j = \overline{1,n}; \end{array}\right\}$$

$$\text{где}\begin{cases} \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{m}} \lambda_{\mathrm{i}} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1, \\ \lambda_i \geq 0, \lambda_j \geq 0. \end{cases}.$$

Пример 6. Пусть биматричная игра (*A, B*) задаётся следующими матрицами [64]:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & 6 \\ 4 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Видно, что игра седловых точек Нэша не имеет, посему применим принцип доминирования. В матрице *B* для первого столбца выполняется неравенство

$$b_{i,r} < \sum_{j=1}^{n} \lambda_j b_{i,r},\ \text{так как } 2 = \frac{1}{2}\cdot 4 + \frac{1}{2}\cdot 0; 4 < \frac{1}{2}\cdot 3 + \frac{1}{2}\cdot 6; 4 = \frac{1}{2}\cdot 0 + \frac{1}{2}\cdot 8,$$

по каковой причине матрицы сокращаются

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, B' = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 6 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

В уменьшенной матрице A' вторая стратегия доминируется первой, ибо $a_{2j} < a_{1j}$, $j = 2, 3$, после исключения которой матрицы сократятся до размерностей 2×2.

$$A'' = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, B'' = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Формальный расчёт по (4.38) и учёт стратегий, не признанных активными, позволяет найти решение исходной биматричной игры

$$P^* = \left\{\frac{2}{3}; 0; \frac{1}{3}\right\}, \qquad Q^* = \left\{0; \frac{3}{4}; \frac{1}{4}\right\}; \qquad v_I(P^*, Q^*) = \frac{3}{2}; \qquad v_I(P^*, Q^*) = \frac{8}{3}.$$

Результат проверки неравенства (4.36), показывает, что нами найдены равновесные стратегии игроков I и II в биматричной игре (*A, B*). Полученная пара стратегий не является совместно допустимой. Об этом свидетельствует неравенство (4.37). Поэтому, данная игра (*A, B*) неразрешима в строгом смысле.

Тем не менее, найденная пара (P^*, Q^*) – единственная ситуация равновесия, которая и будет решением в смысле Нэша.

Поскольку под теоретическими игроками, как правило, понимаются люди, то им не чуждо всё человеческое. При этом возникает феномен "психологического" доминирования.

Пример 7. Пусть биматричная игра описывается матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -30 & 6 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}.$$

Пары равновесных стратегий, [P = (0, 1); Q = (1, 0)] и [$P^\blacklozenge$ = (1, 0); $Q^\blacklozenge$ = (0, 1)] являются совместно допустимыми, но невзаимозаменяемыми и неэквивалентными. Смешанные стратегии образуют ещё одну ситуацию равновесия

$$P^{\lozenge\lozenge} = \left\{\frac{1}{10}; \frac{9}{10}\right\}, \qquad Q^{\lozenge\lozenge} = \left\{\frac{5}{9}; \frac{4}{9}\right\}; \; v_I(P^\lozenge, Q^\lozenge) = \frac{20}{3}; \qquad v_{II}(P^\lozenge, Q^\lozenge) = \frac{21}{5}.$$

Пары [P, Q] и [$P^\blacklozenge$, $Q^\blacklozenge$] или [$P^\blacklozenge$, $Q^\blacklozenge$] и [$P^{\blacklozenge\blacklozenge}$, $Q^{\blacklozenge\blacklozenge}$] невзаимозаменяемые. Поэтому данная игра (A, B) неразрешима ни в строгом смысле, ни в смысле Нэша. Поскольку стратегии игроков активны, то приведение игры неосуществимо, поэтому игра неразрешима и в слабом смысле.

Если же рассматривать пару равновесных стратегий [$P^\blacklozenge$, $Q^\blacklozenge$], то второй игрок психологически будет избегать применения стратегии № 1, поскольку при выборе 1-м игроком стратегии № 1 (он будет на ней "настаивать", поскольку выигрыш по этой строке максимален) его проигрыш составит 30 единиц. Поэтому получается, что пара [$P^\blacklozenge$, $Q^\blacklozenge$] "психологически" доминирует над [P, Q].

Учет психологических особенностей просматривается и в игре [38].

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 12 & 5 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -3000 & 6 \\ 8 & 4 \end{pmatrix},$$

в которой пара равновесных стратегий [P = (1, 0); Q = (0, 1)] с вектором выигрышей (10, 6) совместно подчинена паре стратегий [$P^\blacklozenge$ = (0, 1); $Q^\blacklozenge$ = (1, 0)] при векторе (12, 8). Здесь психологически предпочтительна пара [P, Q], хотя пара [$P^\blacklozenge$, $Q^\blacklozenge$] есть решение игры (A, B) в строгом смысле.

4.10.2. Кооперативные игры

Данные игровые модели отражают ситуацию, когда участники игры, преследуя разные цели, которые частично совпадают, могут прийти к взаимному соглашению. В этом случае между игроками допускается кооперирование:

- заключаются совместные соглашения, совместно выбирается смешанная стратегия;
- возможна передача части выигрыша одного игрока другому.

При этом соблюдается следующее:

- игроки могут передавать друг другу необходимую информацию;
- все соглашения являются обязательными для обеих сторон и включаются в правила игры;
- переговоры между игроками не изменяют оценок игры.

Рассмотрим, первоначально, кооперативную игру двух персон.

Смешанную стратегию, на которую согласны оба игрока называют ***совместной смешанной стратегией***, обозначают как Z, а множество смешанных стратегий – $\mathbf{Z}$.

Математическое ожидание выигрышей игроков составит

$$v_I(Z) = \sum_{i,j} a_{ij} z_{ij} ,$$
$$v_{II}(Z) = \sum_{i,j} b_{ij} z_{ij} .$$

где z_{ij} — вероятность, с которой выбирается пара чистых стратегий согласно смешанной стратегии Z.

Точки [$u = v_I(Z)$; $v = v_{II}(Z)$] образуют множество S, которое называется допустимым. Под допустимостью понимается, что для любой точки $(u, v) \in S$, игроки I и II могут получить выигрыши соответственно u и v.

Пусть для пары точек (u, v) и (u', v') выполняется условия $u' > u$ и $v' > v$, тогда точка (u, v) называется совместно подчинённой точке (u', v').

Очевидно, что совместно подчинённые точки рассматривать нецелесообразно, предпочтение следует отдавать совместно неподчинённым точкам. Указанные точки образуют граничную линию (a, b, c, d), показанную на рисунке 4.15 для абстрактной выпуклой области.

Эта линия удовлетворяет принципу оптимальности Парето, и образуют множество Парето. В основе оптимума по Парето лежит идея взаимной выгодности, постулат которой заключается в том, что ни один из выигрышей u или v не может быть увеличен без уменьшения другого. Формально множество Парето описывается следующим образом:

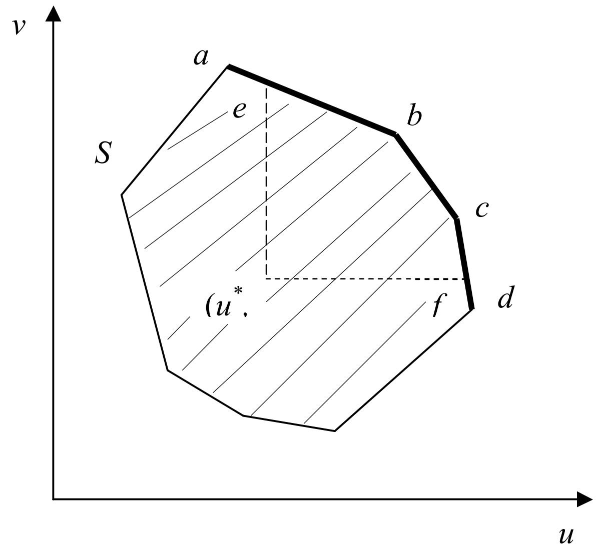


Рисунок 4.15 – Допустимое множество кооперативных стратегий

$$S^0 = \{(\tilde{u}, \tilde{v}) \in S : \neg\exists(u, v) \geq (\tilde{u}, \tilde{v})\}.$$

В любой точке множества S^0 один из игроков получает тем больше, чем меньше получает другой.

Глядя на рисунок 4.14, легко предположить, что игрок I выберет точку *d*, а игрок II выберет точку *a*. При этом не обязательно, что эти чаяния могут осуществиться, ибо возникает резонный вопрос, а сколько позволит выиграть противнику в ущерб себе? Практически в ходе решения игры, эти пожелания нужно как-то совместить.

Житейски разумно предположить, что выигрыш в кооперативной игре должен быть не меньше, чем игрок мог бы получить индивидуально, не связываясь с кооперацией, то есть, руководствуясь своей максиминной стратегией на соответствующей матрице:

$$u^* = \max_P \min_Q \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} p_i q_j \,,$$

$$v^* = \max_P \min_Q \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} b_{i,j} p_i q_j \,.$$

Точка с координатами (u^*, v^*) даёт каждому игроку гарантируемый выигрыш в индивидуальной (некооперативной) игре и образует (точнее, способствует образованию) так называемое ***переговорное множество*** (которое обозначается как $\overline{S}^0$) *ebcf*, которое представляет собой решение кооперативной биматричной игры [38].

Выбор точки переговорного множества зависит от индивидуальных различий и психологических свойств игроков, проявляющихся на переговорах. В плане формальных методов известен подход [38, 55], называемый “схемами арбитража” или “задачей о сделках”, базирующийся на ***теории полезности***.

Изложение теории полезности не входит в задачи дисциплины, однако, некоторые, необходимые для дальнейшего изложения сведения, мы всё же рассмотрим.

Пусть *A, B, C ...Z* – события или явления, одни из которых, для принимающего решение, предпочтительнее, чем другие, либо безразличны.

Между событиями существуют отношение предпочтения $\succ$ и отношение равноценности ~, то есть

- $A \succ B$ – *A* предпочтительнее *B*;
- $B \succ A$ – *B* предпочтительнее *A*;
- $A \sim B$ – *A* и *B* равноценны, то есть ни $A \succ B$, ни $B \succ A$.

Отношения предпочтения обладают свойством транзитивности (переносимости).

Полезность – порядковая или количественная величина, выражающая отношение предпочтения и являющаяся вторичным понятием по сравнению с ним.

То есть, $A \succ B$ не потому, что а имеет б***о***льшую полезность, а наоборот, из-за того, что $A \succ B$, событию *A* приписывается б***о***льшая полезность.

Пусть, например, $A \succ B \succ C$, где *B* – достоверное событие, а *A* и *C* события, возникающие в лотерее (случайном испытании) с вероятностями *p* и $(1 - p)$. Очевидно, что наш выбор будет определяться распределением этих вероятностей.

При значении *p*, близком к 1, предпочтительнее лотерея, а при *p* около 0, следует выбрать достоверное событие *B*, и, таким образом происходит переход от выбора случайного испытания до выбора достоверного.

Аналогичная лотерея может быть распространена и на *m* событий. Главное при этом есть следующее:

- лотерея представляет собой испытание, которое проводится только 1 раз (единичное испытание);
- лотерея может сама по себе является событием;
- возможна лотерея, одним из исходов которой является другая лотерея, и, таким образом, возможна последовательность лотерей.

Лотереи организуются следующим образом:

1. важны лишь окончательные вероятности возможных исходов, а порядок, в котором разыгрывается последовательность лотерей, роли не играет;
2. лотереи, содержащие равноценные события являются равноценными;

3. когда одно из событий предпочтительнее другого, то лотерея, содержащее первое событие, предпочтительнее лотереи, содержащей второе событие;
4. если $A \succ C$, а $C \succ B$, то существует лотерея, включающая A и B с соответствующими вероятностями, которая является равноценной C.

С учётом допущений, изложенных выше, представляется возможным построить функцию полезности u, которая для любых двух событий $A \succ B$

$$u(A) > u(B),\ u[pA + (1 - p)B] = p \cdot u(A) + (1 - p) \cdot u(B)$$

В частности, когда $A_1 \succ\sim A_2 \succ\sim \ldots \succ\sim A_m$ можно построить функцию полезности со следующими параметрами:

$$u(A_1) = 1;$$
$$u(A_i) = u_i,\ \text{для } 1 < i < m;$$
$$u(A_m) = 0;$$
$$u(p_1 \cdot A_1, \ldots, p_m \cdot A_m) = p_1 \cdot A_1 + p_2 \cdot A_2 + \ldots + p_m \cdot A_m.$$

Важнейшее свойство функции полезности – линейность относительно лотереи. Это означает, что средняя полезность исходов, входящих в лотерею, равна полезности лотереи.

Пусть на выпуклом допустимом множестве S игроки выбирают точки $T_1(u_1, v_1)$, $T_2(u_1, v_1)$ и т.д, а точка $T^*(u^*, v^*)$ означает случай когда выбора не происходит, а её координаты (u^*, v^*) – её полезности для игрков.

Каждый отрезок, соединяющий точки, даёт пару полезностей, которые получат игроки при розыгрыше лотереи вида $p \cdot T_r + (1 - p) \cdot T_k$, где p – вероятность выбора T_r, а T_r и T_k – крайние точки отрезка.

Как видно из рисунка 4.14, игрок II будет стремиться выбирать точки выше точки $T^*(u^*, v^*)$, а игрок I – правее. Поскольку эти чаяния не совместимы, в качестве компромисса выступает арбитражная схема.

Математически арбитражная схема определяется как

$$\varphi(S, u^*, v^*) = (\tilde{u}, \tilde{v}), \qquad (4.39)$$

функция, которая по заданной тройке (S, u^*, v^*) даёт единственную точку $(\tilde{u}, \tilde{v})$, которая называется арбитражным решением игры.

Дж. Нэшем доказано [52], что “справедливое” арбитражное решение игры состоит в том, что точка $(\tilde{u}, \tilde{v})$ есть решение задачи максимизации вида

$$g(u, v) = (u - u^*)(v - v^*), \qquad (4.40)$$

при условиях $(u,v)\in S,\ u>u^*,\ v>v^*$.

Схема Нэша означает, что дополнительная полезность должна делиться между игроками в таком же отношении, в котором она может передаваться.

В частности, в случае линейной зависимости, один игрок может передавать другому игроку 1-цу полезности, сам при этом лишаясь только одной единицы полезности, то есть, когда точки арбитражного множества лежат вдоль прямой $u + v = k$, то решением будет точка $(\widetilde{u},\widetilde{v})$ рассчитываемая по выражениям

$$\left.\begin{aligned}\widetilde{u}&=\frac{1}{2}\left(u^*-v^*+k\right),\\ \widetilde{v}&=\frac{1}{2}\left(v^*-u^*+k\right),\end{aligned}\right\}\tag{4.41}$$

где k – максимально возможная полезность, которую игроки могут получить совместно.

Пример [64]. Игроки, действуя совместно, добиваются передачи одной из сторон объекта номинальной стоимостью 100 тыс. у.е. Сторона, получившая объект, выпланчивает партнёру часть его стоимости. Пусть сторона I получает объект и выплачивает компенсацию, а сторона II – получает компенсацию.

Даже не прибегая к мудрёным построениям, понятно, что приемлемое решение представляется парой (0,5; 0,5), что математически подтверждается значениями функций

$$u=1-\frac{x}{100},\ \text{и}\ v=\frac{x}{100},\ 0\le x\le 100,$$

в предположении, что если игрок I не выплачивает компенсации, то его полезность единица, а если отдаёт полную стоимость объекта – то нуль.

Пусть функции полезности у игроков различны, например

$$u=1-\frac{x}{100},\ \text{а}\ v=\frac{\sqrt{x}}{100},\ 0\le x\le 100.$$

Выразим функцию u через v как $u = 1 - 100 \cdot v^2$ (Рисунок 4.16).

Выполним максимизацию функции по (4.40)

$$g(u, v) = u \cdot v = (1 - 100 \cdot v^2) \cdot v$$

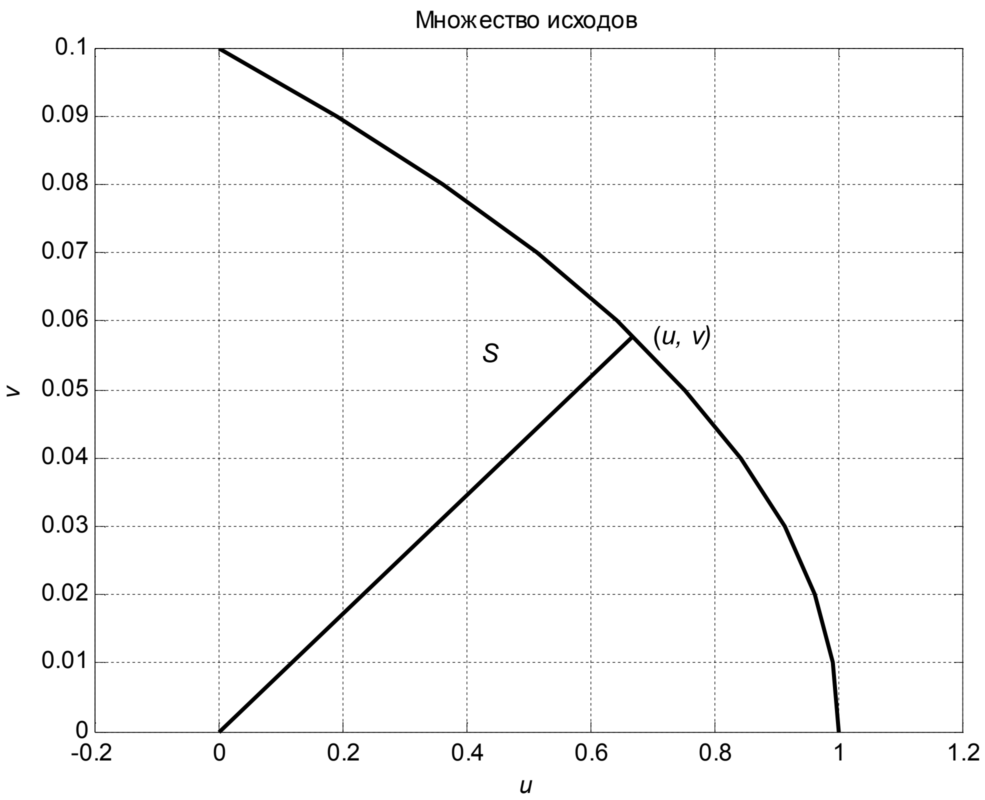


Рисунок 4.16 – Множество S для арбитражного решения

Выполним максимизацию функции по (4.40)

$$g(u, v) = u \cdot v = (1 - 100 \cdot v^2) \cdot v$$

на отрезке [0,0; 0,1]. Используя аппарат математического анализа, после дифференцирования и приравнивания к нулю производной, получим

$$\tilde{v} = \frac{1}{10 \cdot \sqrt{3}}; \tilde{u} = \frac{2}{3}, \text{ откуда } x = \frac{100}{3}.$$

В данном случае, фактическая полезность у игрока II убывает быстрее, чем у I, поэтому он вынужден уступать.

4.10.2.1 Кооперативные игры *n* лиц

Если в конфликт вовлечено более двух персон, то, по сравнению с игрой двух участников, возникают следующие особенности:

- появляется возможность сотрудничества с несколькими участниками;

- число возможных коалиций возрастает.

При этом различаю бескоалиционную и коалиционную игры.

Бескоалиционные игры представляют собой род некооперативной игры, распространённой на n участников [38]. В правилах таких игр особо оговорен запрет на кооперацию.

Коалиционные игры призваны моделировать ситуацию, в которых участников с разными, но не противоречивыми интересами, более двух, и они способны кооперироваться или вступать в коалицию.

Обычно обозначают $N = 1, 2, \ldots, n$ – множество игроков, вовлечённых в конфликт.

Определение [64]. Любое непустое подмножество N, включая само N и все его одноэлементные подмножества, называется коалицией.

Для простоты считается, что интересы игроков внутри коалиции совпадают, а межкоалиционные – не пересекаются. Например, в игре могут образоваться две коалиции $\{1, 2, \ldots, n\text{-}1\}$ и $\{n\}$, в этом случае n-1 игроков объединяют усилия в одной игре против одного из игроков.

Вместо термина "**выигрыш**" в кооперативной игре применяют термин "**платёж**", под которым понимается передача своего выигрыша или части его.

По правилам игры, для каждого игрока устанавливается платёж, обусловленный правилами игры, а иногда и побочный платёж, который он может заплатить или получить за сотрудничество с другими игроками.

Механизм платежей позволяет образовывать коалиции и определяет их устойчивость, позволяя избежать операций комбинаторики при решении игры.

Пример [64]. Пусть любые два игрока из трёх вступают в коалицию с целью взять с игрока, не вошедшего в коалицию, "дань" в размере 2-х единиц каждому коалиционеру. В данном случае возможны коалиции {1, 2}, {1, 3} и {2, 3}, в которых будут платежи игрокам, соответственно: (2, 2, – 4), (2, – 4, 2) и (– 4, 2, 2). Указанные платежи указывают, что все коалиции равноценны, поэтому любая из них может возникнуть.

Поэтому указанные платежи можно принять за результат игры и считать её решением.

Если правила игры скорректировать, как указано ниже

	Коалиция	Платежи
1	{1, 2}	(2,2; 1,8; – 4)
2	{1, 3}	(2, – 4, 2)
3	{2, 3}	(– 4, 2, 2)

то существование первой коалиции проблематично, игроки 2 и 3 могут получить большее, образовав коалицию {2, 3}, игроки 1 и 3, образовав коалицию {1, 3}, так же получат по две единицы. Неустойчивость 1-й коалиции делает неясным результат игры, который можно бы было принять за решение.

Если игрок 1 будет согласен заплатить игроку 2, за сотрудничество с ним 0,2 единицы, то игра свелась к предыдущей.

Любую коалицию S можно рассматривать как игрока антагонистической игры, вторым игроком которой является коалиция $N \setminus S$.

Значение такой игры $v(S)$ называется характеристической функцией игры n лиц и определяется на всех подмножествах множества $N = 1, 2, \dots, n$.

По смыслу характеристическая функция есть полезность, которую коалиция S может извлечь из игры, не зависимо от действий прочих игроков. Характеристическая функция обладает следующими свойствами

$$\begin{cases} v(\varnothing) = 0, \\ v(S \cup T) \ge v(S) + v(T), \end{cases}$$

где S и T – непересекающиеся коалиции.

После розыгрыша игры каждый из игроков получит некоторый размер прямого платежа, обусловленного правилами игры, и “побочного”, определяемого соглашениями, заключаемыми при заключении коалиции.

Пусть суммарный платёж игрока i составит x_i. Тогда вся совокупность игроков получит вектор платежей $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Элементы этого вектора (платёж конкретному игроку) удовлетворяют нижеследующим условиям.

1. Окончательный платёж не может быть меньше, чем тот, который бы он мог получить, действуя одиночно, сыграв один против всех

$$x_i \ge v(\{i\}), \quad \forall i \in N. \tag{4.42}$$

2. Какие бы коалиции не образовывались, суммарный платёж не превышает характеристической функции всего множества игроков

$$\sum_{i \in N} x_i \ge v(N). \tag{4.43}$$

Если допустить, что (4.43) нарушается, то каждый игрок был бы в состоянии увеличить свой выигрыш на величину

$$\frac{1}{n}\left(v(N) - \sum_{i \in N} x_i \right).$$

Так как $v(N)$ – наибольший доход, который игроки могут получить, образовав коалицию $N \setminus N = \varnothing$ против коалиции N, поэтому (4.43) равносильно равенству.

Вектор x, удовлетворяющий условиям (4.42) и (4.43), называется ***дележом***.

Множество всех дележей игры v обозначается как $E(v)$ и включает более одного вектора x. Таким образом, на множестве всех дележей необходимо найти такой делёж, который является “решением”.

Считается, что для решения кооперативной игры необходимо постоить множество дележей и характеристическую функцию.

В самом общем виде решение трактовать как набор дележей, любые из которых могут быть реализованы, если игроки выберут стратегии и составят соглашение наилучшим образом.

Для поиска решения вводится понятие C-ядра, обозначаемое как $C(v)$, определяемое множеством дележей, которые удовлетворяют условиям:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{i\in S} x_i \ge v(S),\ \forall S \subset N, \\ &\sum_{i\in N} x_i = v(N). \end{aligned}\right\} \tag{4.44}$$

Любой делёж из ядра считается устойчивым, потому, что ни одна из коалиций не может обеспечить большего выигрыша.

Если ядро отсутствует, то принимается концепция фон Неймана и Моргенштерна, называемая НМ-концепцией [52].

Для игры, изложенной выше, характеристическая функция запишется так

$$v(S) = \begin{cases} -4, & \text{когда множество } S \text{ состоит из одного игрока,} \\ 4, & \text{когда множество } S \text{ состоит из двух игроков,} \\ 0, & \text{когда множество } S \text{ состоит из трёх игроков.} \end{cases}$$

Исходом игры будет следующее множество $V = \{(2, 2, -4), (2, -4, 2), (-4, 2, 2)\}$. Оно характеризуется тем, что ни один из его дележей ни для какой коалиции не хуже другого, а любой делёж из $E(v)$, не входящий в V, для какой-нибудь коалицци хуже, чем некоторый делёж V.

То есть, множество V обладает внутренней устойчивостью (ни один делёж из V не хуже другого) и внешней устойчивостью (любой делёж, не входящий в V хуже, чем некоторый делёж из V).

К, сожалению, НМ-решений много и отсутствуют формальные методы и процедуры, поэтому на практике применяется подход Шепли.

Подход, предложенный Шепли, базируется на аксиомах, носящих его имя, и векторе значений игры (вектор Шепли, значение по Шепли)

Указанный вектор, в отличие от НМ-решений, представляющихся уравновешенными платежами, даёт набор априорных оценок всей игры каждым из участником

$$\varphi[v] = \{\varphi_1[v], \varphi_2[v], \ldots , \varphi_n[v]\}$$

где i-ая компонента указывает величину, получаемую i-м игроком. Этот вектор удовлетворяет ряду аксиом.

Аксиома 1 [52]. Сумма выигрышей всех игроков равна выигрышу коалиции, состоящей из всех игроков:

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi_i[v] = v(N).$$

Смысл аксиомы в том, что если игроки вносят в коалиции лишь ту величину, которую могли бы получить самостоятельно, то они её и получают.

Аксиома 2 [52]. Если для игрока i и любой коалиции S, в которую i не входит, выполняется равенство

$$v[S \cup i] = v(S) + v(i),$$

то

$$\varphi_i[v] = v(i).$$

Аксиома утверждает, что между игроками будет распределён выигрыш, который эти игроки могут получить вследствие объединения.

Аксиома 3 [52]. (Аксиома симметрии). Для любой перестановке игроков π и любого i выполняется равенство

$$\varphi_{\pi(i)}[\pi v] = \varphi_i[\pi],$$

где $\pi(i)$ – игрок, соответствующий перестановке π, а $\pi v(S)$ – такая характеристическая функция, что

$$\pi v(S) = v(\pi^{--1}S),$$

где π^{-1} – обратная перестановка игроков.

То есть, если игроки симметричны относительно характеристической функции, то они получат поровну.

Аксиома 4. Если u и v — две любые игры, то $\varphi_i[u + v] = \varphi_i[u] + \varphi_i[v]$.

Эта аксиома утверждает, что при сложении характеристических функций, выигрыши игроков складываются.

Шепли показал [55], что существует лишь один вектор, который удовлетворяет этим аксиомам, и который определяется выражением:

$$\varphi_i[v] = \sum_{\substack{T \subset N \\ i \in T}} \gamma_i(T)[v(T) - v(T \setminus \{i\})], \tag{4.45}$$

где $\gamma_i = \frac{1}{n!}(t-1)!(n-t)!$, t – число элементов в T, а само выражение (4.44) есть суммы выигрышей по всем коалициям от $T = \{i\}$ до $T = \{1, \ldots, N\}$.

Коэффициент γ_i есть вероятность случайного образования коалиции T при последовательном объединении игроков, при условии, что игрок i присоединяется на шаге t.

Величина под знаком суммы […] теряется коалицией при выходе из неё игрока i.

Вектор (4.45) называется векторм Шепли.

10.4.3. Содержательные примеры биматричных игр

Пример 1 [64].

Противолодочная подводная лодка USA (игрок II) осуществляет поиск противолодочной лодки RU (игрок I), которая, в свою очередь, пытается обнаружить атомный ракетный подводный крейсер USA. В распоряжении сторон имеется пара стратегий поиска: работа ГАС в активном (№ 1) и пассивном (№ 2) режимах [53].

Цели игроков разные, но не прямо противоположные. Пусть a_{ij} – вероятность обнаружения подводной лодки USA, а b_{ij} – вероятность обнаружения нашей подводной лодки. Имеем классическую биматричную игру. Пусть, например,

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}30 & 0{,}10 \\ 0{,}15 & 0{,}20 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}20 \\ 0{,}17 & 0{,}30 \end{pmatrix}.$$

В игре существует точка Нэша $[P^* = (1, 0);\ Q^* = (0, 1)]$ с парой стратегий, которые является совместно допустимыми. Следовательно, игра разрешима в строгом смысле. При заданных значениях вероятностей целесообразно использовать активный режим ГАС.

Пример 2 [64].

Некое КБ разработало устройство, которое можно внедрить на одном из двух объектов, при условии согласия всех трёх сторон [33]. Само КБ (игрок № 1) оценивает разработку в a единиц, в бухгалтерии первого предприятия (игрок № 2) считают возможным внедрить разработку за b единиц, а во втором (игрок № 3) за c единиц.

Очевидно, $a < b \le c$ что , так как в противном случае внедрение не состоится (оценки предприятий ниже, чем просит КБ). Фактическая стоимость внедрения x необходимо согласовать с бухгалтерией места внедрения. Понятно, что КБ будет максимизировать стоимость работ в одном из интервалов $[a, b]$ или $[a, c]$, а предприятия – в этих же интервалах минимизировать.

Каждая из сторон стремится к внедрению объекта, но даёт разные оценки стоимости внедрения, цели разные, но не прямо противоположные, поэтому данная игра будет игрой коопреративной.

Определим характеристическую функцию для коалиций $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$, $\{1, 2, 3\}$:

$$v(S) = \begin{cases} 0, & \text{для коалиций } \{2\}, \{3\}, \{2,3\}; \\ a, & \text{для коалиций } \{1\}; \\ b, & \text{для коалиций } \{1,2\}; \\ c, & \text{для коалиций } \{1,3\}, \{1,2,3\}. \end{cases}$$

Согласно (4.44), дележом будет являться любая тройка (x_1, x_2, x_3) при условии

$$\sum_{i \in N} x_i = c,\ x_1 \ge a,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,$$

а множество

$$C(v) = \{(b \le x_1 \le c), 0, (c - x_1)\}$$

– ядром.

То есть, внедрение состоится на втором предприятии, а его с тоимость будет между b и c.

Полученное “решение” согласуется с экономическим смыслом, поскольку на предприятии № 1 готовы заплатить не больше, чем b, а предприятие № 2 может больше.

Поэтому коалиций $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$ при разумных действиях образоваться не должна, поэтому целесообразна коалиция $\{2, 3\}$, которая не позволит предприятию № 1 “остаться с носом”, а предприятию № 2 – переплатить КБ.

Обозначим прибыль коалиции $\{2, 3\}$ как k и найдём максиминные бескоалиционные значения (u^*, v^*):

- по характеристической функции $u^* = v(\{2, 3\}) = 0$;
- по соображению, что предприятие № 1 реально воспрепятствует получению выигрыша больше, чем $v^* = c - b$, перебивая цену.

Воспользовавшись формулами (4.41) получим:

$$\tilde{u} = \frac{1}{2}(k - c + b), \tilde{v} = \frac{1}{2}(k + c - b).$$

Теперь необходимо рассмотреть игру между КБ и коалицией {2, 3}. На основании характеристической функции имеем $(u^*, v^*) = (a, 0)$. По схеме Нэша КБ получит: $\tilde{u} = \frac{1}{2}(c + a)$, а коалиция предприятий – $\tilde{v} = \frac{1}{2}(c - a)$, откуда прибыль коалиции составит $k = \frac{1}{2}(c - a)$, поэтому, в конце концов, получается такой вектор платежей

$$V = \left\{\frac{1}{2}(c + a); \frac{1}{4}(2b - a - c); \frac{1}{2}(3c - a - 2b)\right\}.$$

Указанное решение будет иметь смысл, когда $2b - a - c \geq 0 \Rightarrow c + a \leq 2b$.

Окончательно имеем значение игр по Шепли:

$$\begin{cases} \varphi_1[v] = \frac{1}{3}a + \frac{1}{6}b + \frac{1}{2}c; \\ \varphi_2[v] = -\frac{1}{6}a + \frac{1}{6}b; \\ \varphi_3[v] = -\frac{1}{6}a - \frac{1}{6}b + \frac{1}{2}c. \end{cases}$$

Пример 3[64].

Для заправки кораблей топливом n сторон должны строить хранилища. Пусть стоимость хранилища задаётся возрастающей функцией от его объёма. Потребности каждой стороны в топливе определяются с помощью функции $f_i(t)$, $i = \overline{1, n}$, где t – время наступления потребности, откуда суммарный объём хранилищ $\max\limits_t \sum\limits_{i=1}^{n} f_i(t)$. Когда образуется коалиция *S*, то объём такого хранилища составит $\max_t \sum_{i \in S} f_i(t)$, а его стоимость – $F\left(\max_t \sum_{i \in S} f_i(t)\right)$.

Необходимо определить коалиции, которые займутся строительством и число таких хранилищ.

Будем считать, что это игра *n* лиц с характеристической функцией

$$v(s) = F\left(\max_t \sum_{i \in S} f_i(t)\right).$$

Применение подхода Шепли, после вычисления компонент вектора $\varphi_i[v]$ для каждой коалиции необходимо проверить выполнение неравенства

$$\varphi_{S_i}[v] < \varphi_i[v],$$

где $\varphi_{S_i}[v]$ – вектор Шепли, заданный функцией на подмножествах коалиций. При удовлетворении неравенства, коалиция S будет строить своё хранилище, игроки, не вошедшие в неё – своё. Если все игроки вошли в одну коалицию, то они сообща строят общее хранилище, а бремя расходов распределяется согласно вектору Шепли.

Пусть, в конкретных цифрах, имеем [64] характеристическую функцию вида

Коалиция $\{S\}$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1, 2\}$	$\{1, 3\}$	$\{2, 3\}$	$\{1, 2, 3\}$
Характеристическая функция $v\{S\}$	2	3	2,5	4	3,9	5	6

Для коалиций $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 2\}$, $\{2, 3\}$ и $\{1, 3\}$ по формуле (4.45) найдём, сперва

$$\varphi_1[v] = \frac{2!0!}{3!}(6-5) + \frac{1!1!}{3!}(4-3) + \frac{1!1!}{3!}(3{,}9-2{,}5) + \frac{0!2!}{3!}(2-0) = \frac{8{,}4}{6};$$

$$\varphi_2[v] = \frac{2!0!}{3!}(6-3{,}9) + \frac{1!1!}{3!}(4-2) + \frac{1!1!}{3!}(5-2{,}5) + \frac{0!2!}{3!}(3-0) = \frac{14{,}7}{6};$$

$$\varphi_3[v] = \frac{2!0!}{3!}(6-4) + \frac{1!1!}{3!}(3{,}9-2) + \frac{1!1!}{3!}(5-3) + \frac{0!2!}{3!}(2{,}5-0) = \frac{12{,}9}{6}.$$

Затем, для коалиций $\{1, 2\}$, $\{2, 3\}$ и $\{1, 3\}$ получается

$$\varphi_1'[v] = \frac{3}{2}; \varphi_1''[v] = \frac{3{,}5}{2}; \varphi_2'[v] = \frac{5}{2}; \varphi_2''[v] = \frac{5{,}5}{2}; \varphi_3'[v] = \frac{4{,}5}{2}; \varphi_3''[v] = \frac{4{,}4}{2}.$$

Сравнив $\varphi_i[v], \varphi_i'[v]$ и $\varphi_i''[v]$, заметим, что неравенство $\varphi_{S_i}[v] < \varphi_i[v]$ не выполняется, поэтому игрокам целесообразно построить одно мегахранилище, при этом расходы определяться таким образом:

- первый компаньон – $\frac{8{,}4}{6}$;

- второй компаньон – $\frac{14{,}7}{6}$;
- третий компаньон – $\frac{12{,}9}{6}$

условных единиц затрат.

Иногда распределение ресурсов n игроков задаётся при помощи функций вида $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, которые обладают следующими свойствами

- f линейный по каждой переменной полином;
- $f(x) = 0$, если $x = 0$;
- $f(x) = f(\pi x)$, где π – произвольная перестановка.

В [55] доказана следующая **теорема**. Существует лишь один набор линейных по каждой переменной полиномов $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ который удовлетворяет аксиомам:

а) если $x_i = 0$, то $\varphi_i(x) \equiv 0$;

б) если π_{ij} – произвольная перестановка, которая переводит игрока i в j, то $\varphi_i(x) \equiv \varphi_i(\pi_{ij}\, x)$;

в) если π_{ij} – произвольная перестановка, которая переводит игрока i в i, то $\varphi_i(x) \equiv \varphi_i(\pi_i\, x)$;

г) $\sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x) \equiv f(x)$.

Этот набор является вектором Шепли для игры с характеристической функцией $v(S) = f(x^S)$, где $x_i^S = 0$ при $x \notin S$, $x_i^S = x_i$ при $x \in S$.

Действительно, по условиям полином имеет вид

$$\alpha_1 \sum_{i=1}^{n} x_i + \alpha_2 \sum_{i<j} x_i x_j + \alpha_3 \sum_{i<j<k} x_i x_j x_k + \dots + \alpha_n x_1 x_2 \dots x_n ,$$

где α_i – некоторый коэффициент.

По аксиомам а) и г) получается, что

$$\varphi_1(x) = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_1 \sum_{i \ne 1} x_j + \beta_3 x_1 \sum_{1 \ne j < k} x_j x_k + \dots + \beta_n x_1 x_2 \dots x_n ,$$

аксиома б) обеспечивает

$$\varphi_i(x) = \beta_1 x_i + \beta_2 x_i \sum_{i \ne j} x_j + \beta_3 x_i \sum_{\substack{j<k \\ j \ne i \\ k \ne i}} x_j x_k + \dots + \beta_n x_i \prod_{k \ne i}^{n} x_k , \qquad (4.46)$$

а применение аксиомы г)

$$f \equiv \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x) = \beta_1 \sum_{i=1}^{n} x_i + \beta_2 \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i \ne j} x_j + \dots + \beta_n \sum_{i=1}^{n} x_i \prod_{k \ne i}^{n} x_k ,$$

откуда $\beta_1 = \alpha_1; \beta_2 = \frac{\alpha_2}{2}; \dots; \beta_n = \frac{\alpha_n}{n}$.

Компоненты вектора Шепли для игры с характеристической функцией $v(S) = f(x^S)$ суть

$$\varphi_i[x] = \sum_{\substack{T \subset N \\ i \in T}} \frac{(i-1)!(n-1)!}{n!} \left[f(x^T) - f(x^{T \setminus \{i\}}) \right].$$

Пример 4 [64]. Пусть цепочка из n предприятий производит продукцию в таком порядке:

- 1-е предприятие добывает сырьё;
- 2-е предприятие делает полуфабрикат из сырья;
- 3-е предприятие из полуфабриката производит промежуточный продукт;

и так далее, по технологической цепочке, причём в каждом её звене единица входного продукта преобразуется в единицу выходного, а стоимость сырья равна 1.

Пусть стоимость возросла, а i-му предприятию требуется уже не единица входного продукта, а $1 + x_i$, $i > 1$.

В новых условиях стоимость полуфабриката n-ого предприятия будет равна

$\prod_{i=1}^{n} (1 + x_i)$, а убыток составит $f(x_1, ..., x_n) = \prod_{i=1}^{n} (1 + x_i) - 1$.

Требуется определить распределение убытков между предприятиями.

По формуле (4.46) получается

$$\varphi_i^*(x) = x_i + \frac{1}{2} x_i \sum_{i \neq j} x_j + \frac{1}{3} x_i \sum_{\substack{j<k \\ j \neq i \\ k \neq i}} x_j x_k + ... + \frac{1}{n} x_i \prod_{k \neq i}^{n} x_k \, .$$

Пусть $n = 3$. Тогда

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3 + x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 + x_1 x_2 x_3 ,$$

$$\varphi_i^*(x) = x_i + \frac{1}{2} x_i \sum_{i \neq j} x_j + \frac{1}{3} x_1 x_2 x_3 .$$

Положим $x_1 = 1$. $x_2 = 2$, $x_3 = 3$ и получим:

$$\varphi_1^*(x) = 1 + \frac{1}{2} 1 \cdot (2 + 3) + \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 = 5{,}5 \, ;$$

$$\varphi_2^*(x) = 2 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (1 + 3) + \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 = 8{,}0 \, ;$$

$$\varphi_3^*(x) = 3 + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot (1 + 2) + \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 = 9{,}5 \, ;$$

$f(x) = 23$.

В результате общий убыток составит 23 единицы, 1-е предприятие потеряет 5,5 единиц, 2-е потеряет 8, а на долю третьего придётся 9, 5 единиц потерь.

4.11. Вопросы для самоконтроля

1. Что называется “конфликтом”?
2. Что такое “цена игры”?
3. Что называется стратегией?
4. В чём состоит основная задача теории игр?
5. Что означает термин “игра с нулевой суммой”?
6. Что называется правилами игры?
7. Как формально описать игры двух персон?
8. Как Вы понимаете термины “чистые” и “смешанные” стратегии?
9. Что такое “платёжная матрица”?
10. Что утверждает основная теорема теории игр?
11. Что утверждает теорема об активных стратегиях?
12. Как скажется на стратегиях игроков умножение платёжной матрицы на положительное число?
13. Как скажется на стратегиях игроков добавление ко всем элементам платёжной матрицы произвольного числа?
14. Что вкладывается в понятие “оптимальная стратегия”?
15. Как определить седловые точки платёжной матрицы?
16. Когда представляется возможным применение графоаналитический метод для расчёта оптимальных стратегий?
17. На чём обоснован метод графоаналитического решения матричных игр?
18. Как, используя метод доминирования, добиться понижения размерности платёжной матрицы?
19. На чём основано применение симплекс-метода для решения задач теории игр?
20. Каковы достоинства и недостатки итерационного метода решения игровых задач?
21. Какие ситуации описываются моделями позиционных игр?
22. Какие игры называются играми с полной информацией, а какие – с полной памятью?
23. Что такое “стратегия поведения”?
24. Что вкладывается в понятие “информационное множество”?
25. Какая игра называется “игра-компонента”?
26. В чём заключается общий подход к решению многошаговых игр?

27. Когда конфликтная ситуация моделируется стохастической игрой?
28. В какой ситуации необходимо применять усечение игры?
29. В чём отличия рекурсивной игры от стохастической?
30. В каком случае игровая модель представляется игрой на квадрате?
31. Что такое “ядро игры”?
32. Как представляются оптимальные стратегии в играх на квадратах?
33. Что вкладывается понятие игр дуэльного типа?
34. В каком случае будет использована дуэль шумного типа, а в каком – бесшумного?
35. Что является побудительным мотивом возникновения кооперации игроков?
36. Когда игра разрешима в смысле Нэша?
37. Что представляет собой совместная смешанная стратегия?
38. Для чего может быть использован вектор Шепли?

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Математизация естественных наук означает формализацию содержательных моделей объективной реальности, которые используются этими науками для описания коллизий, возникающих в практической деятельности, для научного обоснования и принятия наилучших разумных и целесообразных решений. Формализация содержательных моделей является, как принято считать, прикладной функцией различных отраслей математики, которые и объединены в тот неудобопереваримаемый винегрет, который называется “исследованием операций” и изложению которого посвящён настоящий опус.

В заключение уместно процитировать Устав корпуса морских инженеров России 1910 г. “… Никакая самая совершенная инструкция не в состоянии переписать все возможные обязанности должностного лица, предусмотреть все отдельные случаи, и дать наперёд соответствующие указания. А по сему, господа инженеры должны проявить инициативу и употребить все свои знания и опыт для оправдания своего предназначения…”.

Тем и руководствоваться…

Автор