

1. Задания для индивидуальной работы к модулю «Теория функций комплексной переменной»

Задание 1

- Письменно ответить на вопросы:
 а) какая функция $f(z)$ называется аналитической в области D ?
 б) запишите условия Коши – Римана, как называются функции $U(x, y)$ и $V(x, y)$?
- Проверить с помощью условий Коши-Римана, является ли функция аналитической?

$$1. \ f(z) = x^2 - y^2 + 2xyi.$$

$$2. \ f(z) = x^2 + y^2 - 2xyi.$$

$$3. \ w = z^2 \cdot e^{-z}.$$

$$4. \ f(z) = e^x \cos y + i \sin y.$$

$$5. \ f(z) = y^2 + 2xi.$$

$$6. \ w = \bar{z} \cdot \sin z.$$

$$7. \ w = z \cdot e^z.$$

$$8. \ w = z \cdot |z|.$$

$$9. \ w = \bar{z} \cdot |z|.$$

$$10. \ w = e^{z^2}.$$

$$11. \ f(z) = e^x (\cos y - i \sin y).$$

$$12. \ w = \sin 3z - i.$$

$$13. \ w = \bar{z} \cdot \operatorname{Re} z.$$

$$14. \ f(z) = x^2 y + i \cdot x \cdot y^2.$$

$$15. \ w = \bar{z} \cdot \operatorname{Im} z.$$

$$16. \ w = |z| \cdot \operatorname{Im} z.$$

$$17. \ w = z \cdot \sin z.$$

$$18. \ w = z \cdot \cos z.$$

$$19. \ w = (iz)^3.$$

$$20. \ w = i(1 - z^2) - 2z.$$

$$21. \ w = z^3 - 2z + i.$$

$$22. \ w = e^{1+2z}.$$

$$23. \ w = z^2 \cdot \operatorname{Im} z.$$

$$24. \ w = e^{2iz}.$$

$$25. \ f(z) = y^2 - 3xi.$$

$$26. \ w = |z| \cdot \operatorname{Re} z.$$

$$27. \ f(z) = \sin x \cdot \cos y + i \cos x \cdot \sin y.$$

$$28. \ f(z) = (x^2 + x^2 y^2) + i(xy^2 - y^2).$$

$$29. \ f(z) = (x^3 - 3xy^2) + i(3x^2 y - y^2).$$

$$30. \ f(z) = \sin x \cdot \cosh y + i \cos x \cdot \sinh y.$$

Задание 2

1. Письменно ответить на вопросы:

- запишите комплексную переменную и её дифференциал в алгебраической и показательной формах.
- что называется интегралом от функции комплексной переменной по кривой C ?
- запишите формулу вычисления интеграла от ФКП через сумму криволинейных интегралов.

2. Вычислить интеграл

$$1. \int_C z \operatorname{Im} z^2 dz, \text{ где } C: |z| = 1, \quad (-\pi \leq \arg z \leq 0).$$

$$2. \int_C e^{|z|^2} \operatorname{Re} z dz, \text{ где } C - \text{прямая, соединяющая точки}$$

$$z_1 = 0, \quad z_2 = 1 + i.$$

$$3. \int_C \ln z dz, \text{ где } C: |z| = 1, \text{ обход против часовой стрелки.}$$

$$4. \int_C z \operatorname{Re} z dz, \text{ где } C: |z| = 1, \text{ обход против часовой стрелки.}$$

$$5. \int_C \bar{z}^2 dz, \text{ где } C: \text{луч } \phi = \frac{\pi}{3}, \quad 0 \leq \rho \leq 2.$$

$$6. \int_C z \cdot \bar{z} dz, \text{ где } C: |z| = 1, \quad \left(0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2}\right).$$

$$7. \int_C \operatorname{Re} z dz, \text{ где } C: z = (2 + i)t, \quad (0 \leq t \leq 1).$$

$$8. \int_C z \operatorname{Im} z dz, \text{ где } C: |z| = 1, \quad (-\pi \leq \arg z \leq 0).$$

$$9. \int_C e^{|z|^2} \operatorname{Im} z dz, \text{ где } C - \text{прямая, соединяющая точки}$$

$$z_1 = 0, \quad z_2 = -1 - i.$$

$$10. \int_C \ln z dz, \text{ где } C: |z| = 2, \text{ обход против часовой стрелки.}$$

11. $\int_C z \operatorname{Re} z dz$, где C : $|z| = 2$, $(0 \leq \arg z \leq \pi)$.

12. $\int_C \bar{z}^3 dz$, где C : луч $\phi = -\frac{\pi}{3}$, $0 \leq \rho \leq 1$.

13. $\int_C \operatorname{Im} z \cdot \sin z dz$, где C : отрезок прямой, соединяющий точки

$$z_1 = i, \quad z_2 = \frac{\pi}{2} + i.$$

14. $\int_C z \cdot \bar{z} dz$, где C : $|z| = 2$, $\left(0 \leq \arg z \leq \frac{3\pi}{2}\right)$.

15. $\int_C \operatorname{Re} z dz$, где C : $z = (-1 + i)t$, $(0 \leq t \leq 1)$.

16. $\int_C z \operatorname{Im} z^2 dz$, где C : $|z| = 1$, $(0 \leq \arg z \leq \pi)$.

17. $\int_C e^{|z|^2} \operatorname{Re} z dz$, где C – прямая, соединяющая точки

$$z_1 = 0, \quad z_2 = 1 - i.$$

18. $\int_C \ln z dz$, где C : $|z| = 1$, обход по часовой стрелке.

19. $\int_C \bar{z} \operatorname{Re} z dz$, где C : отрезок от точки $z_1 = 1 + i$ до точки $z_2 = 0$.

20. $\int_C \bar{z}^2 \operatorname{Im} z dz$, где C : отрезок прямой от точки $z_1 = 0$ до точки

$$z_2 = 1 - i.$$

21. $\int_C \operatorname{Re} z dz$, где C : отрезок прямой $z = (1 + i)t$, $(0 \leq t \leq 1)$.

22. $\int_C z \operatorname{Im} z dz$, где C : $|z| = 1$, $(0 \leq \arg z \leq \pi/2)$.

23. $\int_C e^{|z|^2} \operatorname{Im} z dz$, где C – отрезок прямой, соединяющей точки

$$z_1 = 0, \quad z_2 = -1 + i.$$

24. $\int_C \ln z dz$, где C : $|z| = 2$, обход по часовой стрелке.

25. $\int_C z \operatorname{Re} z dz$, где C : $|z| = 2$, обход по часовой стрелке.

26. $\int_C z \cdot \bar{z} dz$, где C : $|z| = 5$, обход по часовой стрелке.

27. $\int_C \operatorname{Re} z dz$, где C : $z = (2 + i)t$, $(0 \leq t \leq 2)$.

28. $\int_C \operatorname{Im} z \cdot \operatorname{Re} z dz$, где C : $|z| = 1$, $(0 \leq \arg z \leq \pi/2)$.

29. $\int_C \operatorname{Im}(z^2) \cdot \operatorname{Re} z dz$, где C : $|z| = 1$, обход против часовой стрелки.

30. $\int_C z \operatorname{Re} z dz$, где C : $|z| = 1$, обход по часовой стрелке.

Ответы в вариантах задания 2.

1. $-\frac{\pi}{2}$. 2. $\frac{1}{4}(e^2 - 1)(1+i)$. 3. $2\pi i$. 4. 0. 5. $\frac{4}{3} - i\frac{4\sqrt{3}}{3}$. 6. $-1+i$. 7. $2+i$. 8. $\frac{2}{3}i$.

9. $\frac{1}{4}(e^2 - 1)(1+i)$. 10. $4\pi i$. 11. $-\frac{32}{3}$. 12. $-\frac{1}{8} + i\frac{\sqrt{3}}{8}$. 13. $\operatorname{ch} 1 + i \operatorname{sh} 1$. 14. $-8-8i$. 15. $\frac{1}{2}(1-i)$.

16. $-\frac{\pi}{2}$. 17. $\frac{1}{4}(e^2 - 1)(1-i)$. 18. $-2\pi i$. 19. $-\frac{2}{3}$. 20. $\frac{-1-i}{2}$. 21. $\frac{1+i}{2}$. 22. $-\frac{2}{3} - i\frac{1}{3}$.

23. $\frac{1}{4}(e^2 - 1)(-1+i)$. 24. $-4\pi i$. 25. 0. 26. 0. 27. $8+4i$. 28. $\frac{13}{12}(1+i)$. 29. $-\frac{\pi}{2}$. 30. 0.

Задание 3

1. Письменно ответить на вопросы:

а) сформулируйте теоремы Коши для односвязной и многосвязной области;

б) напишите интегральную формулу Коши и обобщенную интегральную формулу Коши в той форме, которая применяется для вычисления интегралов.

2. Используя интегральные формулы Коши, вычислить интеграл по двум замкнутым контурам: 1) $|z|=0,5$; 2) $|z|=2$.

$$1. \int_C \frac{\sin iz}{(z-1)(z+3)^3} dz.$$

$$3. \int_C \frac{\cos i2z}{(z-i)(z+3)^2} dz.$$

$$5. \int_C \frac{e^{iz}}{(z+i)(z-3)^2} dz.$$

$$7. \int_C \frac{e^{2z}}{(z-1)(z+3i)^2} dz.$$

$$9. \int_C \frac{\sin 2z}{(z-i)(z-3)^2} dz.$$

$$11. \int_C \frac{\operatorname{sh} 2z}{(z-1)(z+5i)} dz.$$

$$13. \int_C \frac{z+1}{(z-1)(z+3i)^3} dz.$$

$$15. \int_C \frac{\operatorname{sh} iz}{(z+1)^2(z-3)} dz.$$

$$17. \int_C \frac{e^{iz}}{(z+i)^2(z-3)} dz.$$

$$19. \int_C \frac{z^3 + 2z - 1}{(z-i)^2(z+3)} dz.$$

$$21. \int_C \frac{\sin z}{(z-i)^3(z-3)} dz.$$

$$23. \int_C \frac{\operatorname{sh} z}{(z-1)^2(z+5i)} dz.$$

$$2. \int_C \frac{\operatorname{sh} iz}{(z+1)(z-3)^2} dz.$$

$$4. \int_C \frac{z^2 - 3z + 1}{(z+1)^2(z-3i)} dz.$$

$$6. \int_C \frac{\operatorname{ch} i2z}{(z+1)(z-3i)^2} dz.$$

$$8. \int_C \frac{z^2 + z + 2}{(z+i)(z-3)^2} dz.$$

$$10. \int_C \frac{\cos 2z}{(z+i)(z+3)^2} dz.$$

$$12. \int_C \frac{\operatorname{ch} 2z}{(z+1)(z-5i)} dz.$$

$$14. \int_C \frac{\sin iz}{(z-1)^3(z+3)} dz.$$

$$16. \int_C \frac{\cos(i2z)}{(z-i)^2(z+3)} dz.$$

$$18. \int_C \frac{\operatorname{ch}(iz)}{(z+1)^2(z-3i)} dz.$$

$$20. \int_C \frac{e^z}{(z-1)^3(z+3i)} dz.$$

$$22. \int_C \frac{\cos z}{(z+1)(z+7i)^2} dz.$$

$$24. \int_C \frac{\operatorname{ch} 2z}{(z+1)^2(z-5i)} dz.$$

25. $\int_C \frac{z^2 + 1}{(z+1)^2(z-3i)} dz .$

26. $\int_C \frac{\sin z}{(z-i)(z+3)^2} dz .$

27. $\int_C \frac{\cos z}{(z-3)(z+i)^2} dz .$

28. $\int_C \frac{z^2 + 3z - 1}{(z-5i)(z+i)^2} dz .$

29. $\int_C \frac{e^z}{(z-i)^2(z+6i)} dz .$

30. $\int_C \frac{\operatorname{sh} z}{(z+1)^2(z+3i)} dz .$

Ответы в вариантах задания 3 (интеграл по контуру $|z|=2$).

1. $-\frac{1}{32}\pi \sinh 1 .$
2. $\frac{1}{8}\pi \sin 1 .$
3. $\left(\frac{3}{25} + \frac{4}{25}i\right)\pi \cos 2 .$
4. $\left(\frac{12}{5} + \frac{9}{5}i\right)\pi .$
5. $\left(\frac{3}{25} + \frac{4}{25}i\right)\pi \cdot e .$
6. $\left(\frac{3}{25} - \frac{4}{25}i\right)\pi \cos 2 .$
7. $\left(\frac{3}{25} - \frac{4}{25}i\right)\pi \cdot e^2 .$
8. $\left(\frac{7}{25} + \frac{1}{25}i\right)\pi .$
9. $\left(\frac{-4}{25} - \frac{3}{25}i\right)\pi \sinh 2 .$
10. $\left(\frac{-3}{25} + \frac{4}{25}i\right)\pi \cosh 2 .$
11. $\left(\frac{5}{13} + \frac{1}{13}i\right)\pi \sinh 2 .$
12. $\left(\frac{-5}{13} - \frac{1}{13}i\right)\pi \cosh 2 .$
13. $\left(\frac{-9}{125} - \frac{13}{125}i\right)\pi .$
14. $\pi \left(\frac{1}{8} \cosh 1 - \frac{9}{32} \sinh 1\right) .$
15. $\pi \left(\frac{1}{2} \cos 1 - \frac{1}{8} \sin 1\right) .$
16. $\pi \left(\left(-\frac{6}{5} + \frac{2}{5}i\right) \sin 2 + \left(-\frac{3}{25} - \frac{4}{25}i\right) \cos 2\right) .$
17. $\left(\frac{12}{25} - \frac{9}{25}i\right)\pi \cdot e .$
18. $\pi \left(\left(-\frac{3}{5} - \frac{1}{5}i\right) \sin 1 + \left(-\frac{3}{25} + \frac{4}{25}i\right) \cos 1\right) .$
19. $\left(\frac{2}{25} - \frac{14}{25}i\right)\pi .$
20. $\left(\frac{18}{125} + \frac{26}{125}i\right)\pi \cdot e .$
21. $\pi \left(\left(-\frac{33}{125} - \frac{6}{125}i\right) \sinh 1 + \left(\frac{3}{25} - \frac{4}{25}i\right) \cosh 1\right) .$
22. $\left(\frac{-7}{625} - \frac{24}{625}i\right)\pi \cos 1 .$
23. $\pi \left(\left(-\frac{5}{169} - \frac{12}{169}i\right) \sinh 1 + \left(\frac{5}{13} - \frac{1}{13}i\right) \cosh 1\right) .$
24. $\pi \left(\left(\frac{10}{13} + \frac{2}{13}i\right) \sinh 2 + \left(-\frac{5}{169} + \frac{12}{169}i\right) \cosh 2\right) .$
25. $\left(\frac{24}{25} + \frac{18}{25}i\right)\pi .$
26. $\left(\frac{-4}{25} + \frac{3}{25}i\right)\pi \sinh 1 .$
27. $\pi \left(\left(\frac{3}{5} - \frac{1}{5}i\right) \sinh 1 + \left(-\frac{3}{25} - \frac{4}{25}i\right) \cosh 1\right) .$
28. $\left(\frac{-5}{6} + \frac{5}{9}i\right)\pi .$
29. $\left(\frac{2}{7} + \frac{2}{49}i\right)\pi \cdot e^i .$
30. $\pi \left(\left(\frac{3}{5} - \frac{1}{5}i\right) \cosh 1 + \left(-\frac{3}{25} - \frac{4}{25}i\right) \sinh 1\right) .$

Примечание – в пакете MathCAD синус и косинус гиперболические обозначаются $\sinh(z)$, $\cosh(z)$.

Задание 4

1. Письменно ответьте на вопросы:

а) что называется рядом Лорана для ФКП, какая часть ряда Лорана называется правильной, какая главной;

б) как по ряду Лорана в окрестности особой точки определить её тип.

2. Разложить функцию в ряд Лорана по степеням z . Определить тип особых точек $z = 0$ и $z = \infty$.

$$1. f(z) = z^3 \cdot \sin \frac{1}{z}.$$

$$2. f(z) = z^2 \cdot \cos \frac{1}{z}.$$

$$3. f(z) = \frac{1}{z^5} \cdot \sin z.$$

$$4. f(z) = \frac{1}{z^6} \cdot \cos z.$$

$$5. f(z) = \frac{1}{z^6} \cdot e^z.$$

$$6. f(z) = z^3 \cdot \operatorname{sh} \frac{1}{z}.$$

$$7. f(z) = z^2 \cdot \operatorname{ch} \frac{1}{z}.$$

$$8. f(z) = \frac{1}{z^5} \cdot \operatorname{sh} z.$$

$$9. f(z) = \frac{1}{z^6} \cdot \operatorname{ch} z.$$

$$10. f(z) = z^3 \cdot e^{\frac{1}{z}}.$$

$$11. f(z) = z^3 + \sin \frac{1}{z}.$$

$$12. f(z) = z^2 + z - 3 \cos \frac{1}{z}.$$

$$13. f(z) = \frac{1}{z^5} + \frac{2}{z} - \sin z.$$

$$14. f(z) = z^5 \cdot \sin \frac{1}{z^2}.$$

$$15. f(z) = \frac{1}{z^6} + \frac{3}{z^2} + \cos z.$$

$$16. f(z) = \frac{1}{z^6} - \frac{5}{z^2} + e^z.$$

$$17. f(z) = \frac{1}{z^5} \cdot \sin z^2.$$

$$18. f(z) = z^3 - z + \operatorname{sh} \frac{1}{z}.$$

$$19. f(z) = z^6 \cdot \cos \frac{1}{z^2}.$$

$$20. f(z) = z^2 - z + 6 + \operatorname{ch} \frac{1}{z}.$$

$$21. f(z) = z^3 \cdot e^{\frac{1}{z^2}}.$$

$$22. f(z) = \frac{1}{z^5} - \frac{2}{z^2} + \frac{1}{z} + \operatorname{sh} z.$$

$$\begin{array}{ll}
 23. f(z) = \frac{1}{z^6} + \frac{3}{z^5} + \frac{1}{z^4} - \operatorname{ch} z. & 24. f(z) = z^3 + 5z^2 - z + e^{\frac{1}{z}}. \\
 25. f(z) = \frac{1}{z^5} \cdot \operatorname{sh} z^2. & 26. f(z) = z^4 \cdot \sin \frac{1}{z}. \\
 27. f(z) = z^3 \cdot \cos \frac{1}{z} & 28. f(z) = z^5 \cdot e^{\frac{1}{z}} \\
 29. f(z) = 4 - z - 6z^3 + \operatorname{sh} \frac{1}{z^2}. & 30. f(z) = \frac{1}{z^6} \cdot \operatorname{ch} z.
 \end{array}$$

Задание 5

1. Письменно ответить на вопросы:
 а) что называется вычетом ФКП в изолированной особой точке;
 б) записать формулы вычисления вычетов в простых полюсах и в полюсе порядка m .

2. Вычислить вычеты в каждой из особых точек данной функции.

$$\begin{array}{ll}
 1. f(z) = \frac{z^2 + z + 1}{z^2 \cdot (z-1)(z+i)}. & 2. f(z) = \frac{z^2 + 2z + 7}{z \cdot (z+1)^2(z+i)}. \\
 3. f(z) = \frac{z^2 + z - 1}{z \cdot (z-2)(z+i)^2}. & 4. f(z) = \frac{z+3}{z^3 \cdot (z-2)(z+i)}. \\
 5. f(z) = \frac{z^2 + i}{z^2 \cdot (z-2i)(z+3)}. & 6. f(z) = \frac{z^2 + 2z + 1}{z \cdot (z-3)^2(z+3i)}. \\
 7. f(z) = \frac{z^2 + 1}{z^2 \cdot (z-1-i)(z+2)}. & 8. f(z) = \frac{z+1}{z \cdot (z-1)^3(z+i)}. \\
 9. f(z) = \frac{z+2}{z^3 \cdot (z-1)(z+i)}. & 10. f(z) = \frac{z-1}{z \cdot (z+2i)(z-3i)^2}. \\
 11. f(z) = \frac{z^2 + 1}{z^2 \cdot (z-2)(z+2i)}. & 12. f(z) = \frac{z^2 + 3z + 1}{z \cdot (z-2)^2(z+i)}.
 \end{array}$$

$$13. f(z) = \frac{z^2 - 1}{z \cdot (z-2)(z-i)^2}.$$

$$15. f(z) = \frac{z^2 - 8}{z^2 \cdot (z+2i)(z+3)}.$$

$$17. f(z) = \frac{z^2 + 9}{z^2 \cdot (z-1-i)(z+1)}.$$

$$19. f(z) = \frac{z+1}{z^3 \cdot (z-1)(z+3i)}.$$

$$21. f(z) = \frac{3z+1}{z^2 \cdot (z-1)(z+i)}.$$

$$23. f(z) = \frac{z^2 + 2i}{z^2 \cdot (z-5)(z+2)}.$$

$$25. f(z) = \frac{z^2 + 6}{z \cdot (z-2)(z-i)^2}.$$

$$27. f(z) = \frac{z-3}{z^3 \cdot (z+2)(z+i)}.$$

$$29. f(z) = \frac{z^2 + 1}{z^2 \cdot (z-2+i)(z+1)}.$$

$$14. f(z) = \frac{z-3}{z^3 \cdot (z+2i)(z+1)}.$$

$$16. f(z) = \frac{2z+1}{z \cdot (z-1)^2(z-3i)}.$$

$$18. f(z) = \frac{z+i}{z \cdot (z-1)^3(z+2i)}.$$

$$20. f(z) = \frac{z-5}{z \cdot (z+i)(z-3)^2}.$$

$$22. f(z) = \frac{3z-1}{z \cdot (z+2i)^2(z-3i)}.$$

$$24. f(z) = \frac{z^2 + z + 7}{z \cdot (z-2)^2(z-1+i)}.$$

$$26. f(z) = \frac{z^2 + z + 7}{z \cdot (z+1)^2(z-i)}.$$

$$28. f(z) = \frac{z^2 + z + 1}{z \cdot (z-3)^2(z+2i)}.$$

$$30. f(z) = \frac{z-3}{z \cdot (z+1)(z-3i)^2}.$$

Ответы в вариантах задания 5 (первым записан вычет в кратном полюсе).

$$1. (-1+2i), \left(\frac{3}{2}-\frac{3}{2}i\right), \left(\frac{-1}{2}-\frac{1}{2}i\right). \quad 2. (3+6i), (-7i), (-3+i).$$

$$3. \left(\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i\right), \left(-\frac{1}{2}\right), \left(\frac{3}{10}-\frac{2}{5}i\right). \quad 4. \left(\frac{-5}{4}-\frac{7}{8}i\right), (1+i), \left(\frac{1}{4}-\frac{1}{8}i\right).$$

$$5. \left(\frac{1}{18}+\frac{1}{12}i\right), \left(\frac{5}{26}-\frac{11}{52}i\right), \left(\frac{-29}{117}+\frac{5}{39}i\right). \quad 6. \left(\frac{4}{27}+\frac{4}{27}i\right), \left(\frac{-1}{27}i\right), \left(\frac{-4}{27}-\frac{1}{9}i\right).$$

$$7. \left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}i\right), \left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}i\right), \left(\frac{-3}{8}+\frac{1}{8}i\right). \quad 8. \left(\frac{-3}{2}i\right) (i), \left(\frac{1}{2}i\right). \quad 9. (-3+i), \left(\frac{3}{2}-\frac{3}{2}i\right), \left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i\right).$$

10. $\left(\frac{1}{25} + \frac{8}{225}i\right)$, $\left(\frac{-1}{18}i\right)$, $\left(\frac{-1}{25} + \frac{1}{50}i\right)$. 11. $\left(\frac{-1}{8} + \frac{1}{8}i\right)$, $\left(\frac{5}{16} - \frac{5}{16}i\right)$, $\left(\frac{-3}{16} + \frac{3}{16}i\right)$.
12. $\left(\frac{-9}{25} + \frac{73}{100}i\right)$, $\left(\frac{-1}{4}i\right)$, $\left(\frac{9}{25} - \frac{12}{25}i\right)$. 13. $\left(\frac{8}{25} - \frac{6}{25}i\right)$, $\left(\frac{-1}{2}\right)$, $\left(\frac{9}{50} + \frac{6}{25}i\right)$.
14. $\left(1 + \frac{13}{8}i\right)$, $\left(\frac{-1}{5} - \frac{1}{40}i\right)$, $\left(\frac{-4}{5} - \frac{8}{5}i\right)$. 15. $\left(\frac{-2}{3} - \frac{4}{9}i\right)$, $\left(\frac{9}{13} + \frac{6}{13}i\right)$, $\left(\frac{-1}{39} - \frac{2}{117}i\right)$.
16. $\left(\frac{7}{50} - \frac{12}{25}i\right)$, $\left(\frac{1}{3}i\right)$, $\left(\frac{-7}{50} + \frac{11}{75}i\right)$. 17. $\left(\frac{9}{2}\right)$, $\left(\frac{-1}{2} - 2i\right)$, $(-4 + 2i)$.
18. $\left(\frac{57}{125} + \frac{1}{125}i\right)$, $\left(\frac{-1}{2}\right)$, $\left(\frac{11}{250} - \frac{1}{125}i\right)$. 19. $\left(\frac{-2}{9} + \frac{17}{27}i\right)$, $\left(\frac{1}{5} - \frac{3}{5}i\right)$, $\left(\frac{1}{45} - \frac{4}{135}i\right)$.
20. $\left(\frac{11}{50} - \frac{43}{450}i\right)$, $\left(\frac{5}{9}i\right)$, $\left(\frac{-11}{50} - \frac{23}{50}i\right)$. 21. $(-1+4i)$, $(2-2i)$, $(-1-2i)$.
22. $\left(\frac{3}{25} - \frac{7}{100}i\right)$, $\left(\frac{1}{12}i\right)$, $\left(\frac{-3}{25} - \frac{1}{75}i\right)$. 23. $\left(\frac{3}{50}i\right)$, $\left(\frac{1}{7} + \frac{2}{175}i\right)$, $\left(\frac{-1}{7} - \frac{1}{14}i\right)$.
24. $\left(\frac{-3}{8} + \frac{29}{8}i\right)$, $\left(\frac{-7}{8} - \frac{7}{8}i\right)$, $\left(\frac{5}{4} - \frac{11}{4}i\right)$. 25. $\left(\frac{-18}{5} - \frac{4}{5}i\right)$, (3) , $\left(\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i\right)$.
26. $\left(3 - \frac{13}{2}i\right)$, $(7i)$, $\left(-3 - \frac{1}{2}i\right)$. 27. $\left(\frac{5}{4} - \frac{7}{8}i\right)$, $(-1+i)$, $\left(\frac{-1}{4} - \frac{1}{8}i\right)$.
28. $\left(\frac{1}{13} + \frac{20}{117}i\right)$, $\left(\frac{-1}{18}i\right)$, $\left(\frac{-1}{13} - \frac{3}{26}i\right)$. 29. $\left(\frac{7}{25} + \frac{1}{25}i\right)$, $\left(\frac{-3}{5} - \frac{1}{5}i\right)$, $\left(\frac{8}{25} + \frac{4}{25}i\right)$.
30. $\left(\frac{-1}{75} + \frac{6}{25}i\right)$, $\left(\frac{1}{3}\right)$, $\left(\frac{-8}{25} - \frac{6}{25}i\right)$.

Задание 6

- Письменно ответить на вопрос: сформулировать основную теорему Коши о вычетах.
- Вычислить интегралы с помощью вычетов.

1. а) $\int_{|z-\frac{\pi}{2}|=1} \frac{\sinh iz}{(z+1)^2(z-\frac{\pi}{2})} dz$; б) $\int_{|z|=1} z^2 e^{\frac{1}{z}} dz$.

2. а) $\int_{|z+1|=1} \frac{\cos z}{(z-i)^2(z+1)} dz$; б) $\int_{|z|=1} z^2 \sinh \frac{1}{z} dz$.

3. a) $\int_{|z+i|=1} \frac{e^{iz}}{(z+i)^2(z-1)} dz ;$ 6) $\int_{|z|=1} z^3 \cos \frac{1}{z} dz .$

4. a) $\int_{|z-i|=1} \frac{\cosh iz}{(z+1)^2(z-i)} dz ;$ 6) $\int_{|z|=1} z^4 \sin \frac{1}{z} dz .$

5. a) $\int_{|z+2|=1} \frac{z^2 + 2z - 1}{(z-i)(z+2)^2} dz ;$ 6) $\int_{|z|=1} z \cosh \frac{1}{z} dz .$

6. a) $\int_{|z-1|=1} \frac{e^z}{(z-1)^3(z+2)} dz ;$ 6) $\int_{|z-1|=1} (z-1)^2 \sin \frac{1}{z-1} dz .$

7. a) $\int_{|z-i|=1} \frac{\sin z}{(z-i)^3(z+1)} dz ;$ 6) $\int_{|z+i|=1} (z+i)^5 \cos \frac{1}{z+i} dz .$

8. a) $\int_{|z+1|=1} \frac{\cos z}{(z+i)^3(z+1)} dz ;$ 6) $\int_{|z+1|=1} (z+1)^4 \sinh \frac{1}{z+1} dz .$

9. a) $\int_{|z+i|=1} \frac{\sinh z}{(z-1)^2(z+i)} dz ;$ 6) $\int_{|z-i|=1} (z-i)^3 \cosh \frac{1}{z-i} dz .$

10. a) $\int_{|z+1|=1} \frac{\cosh z}{(z+1)^2(z-1)} dz ;$ 6) $\int_{|z+2|=1} (z+2)e^{\frac{1}{z+2}} dz .$

11. a) $\int_{|z|=4} \frac{z^2 + 1}{(z+1)(z-3)^2} dz ;$ 6) $\int_{|z|=1} z^2 \sin \frac{1}{zi} dz .$

12. a) $\int_{|z-\pi|=1} \frac{\sin z}{(z-1)(z-\pi)^3} dz ;$ 6) $\int_{|z|=1} z \cos \frac{1}{iz} dz .$

13. a) $\int_{|z-2|=1} \frac{\sinh z}{(z+1)(z-2)^2} dz ;$ 6) $\int_{|z|=1} z^5 \cosh \frac{1}{iz} dz .$

14. a) $\int_{|z|=1} \frac{\cos iz}{(z-2i) \cdot z^3} dz ;$ 6) $\int_{|z|=1} z^4 \sinh \frac{1}{iz} dz .$

15. a) $\int_{|z|=4} \frac{z^2 - 3z + 1}{(z+1)(z-i)^2} dz ; \quad$ б) $\int_{|z|=1} z^3 e^{\frac{1}{iz}} dz .$

16. a) $\int_{|z-1|=1} \frac{e^{iz}}{(z+i)(z-1)^2} dz ; \quad$ б) $\int_{|z|=1} z^4 \sin \frac{2}{z} dz .$

17. a) $\int_{|z-2|=1} \frac{\cosh z}{(z+1)(z-2)^2} dz ; \quad$ б) $\int_{|z|=1} z^2 \sinh \frac{2}{z} dz .$

18. a) $\int_{|z-1|=1} \frac{e^z}{(z-1)(z+i)^2} dz ; \quad$ б) $\int_{|z|=1} z^3 \cos \frac{3}{z} dz .$

19. a) $\int_{|z-3|=5} \frac{z^2 + z + 2}{(z+i)(z-4)^2} dz ; \quad$ б) $\int_{|z|=1} z \cosh \frac{3}{z} dz .$

20. a) $\int_{|z-1|=1} \frac{\sin z}{(z-i)(z-1)^3} dz ; \quad$ б) $\int_{|z|=1} z^2 e^{\frac{3}{z}} dz .$

21. a) $\int_{|z|=1} \frac{\cos z}{(z+i) \cdot z^3} dz ; \quad$ б) $\int_{|z+1|=1} (z+1)^2 \sin \frac{1}{z+1} dz .$

22. a) $\int_{|z-i|=1} \frac{\sinh(iz)}{(z-1)(z-i)^2} dz ; \quad$ б) $\int_{|z-i|=1} (z-i)^5 \cos \frac{1}{z-i} dz .$

23. a) $\int_{|z-i|=1} \frac{\cosh(iz)}{(z+1)(z-i)^2} dz ; \quad$ б) $\int_{|z-2|=1} (z-2)^4 \sinh \frac{1}{z-2} dz .$

24. a) $\int_{|z+3|=5} \frac{z+1}{(z-1)(z+3)^3} dz ; \quad$ б) $\int_{|z+i|=1} (z+i)^3 \cosh \frac{1}{z+i} dz .$

25. a) $\int_{|z-1|=1} \frac{\sin iz}{(z-1)^2(z+2)} dz ; \quad$ б) $\int_{|z-3|=1} (z-3) e^{\frac{1}{z-3}} dz .$

26. a) $\int_{|z+1|=1} \frac{\sinh z}{(z-1)(z+1)^2} dz ; \quad$ б) $\int_{|z|=1} z^2 \sin \frac{i}{z} dz .$

27. а) $\int_{|z+i|=0.5} \frac{\cos(iz)}{(z+i) \cdot z^3} dz ;$ б) $\int_{|z|=1} z^4 \sinh \frac{i}{z} dz .$

28. а) $\int_{|z-i|=1} \frac{\sin iz}{(z+i)^2(z-i)} dz ;$ б) $\int_{|z|=1} z \cos \frac{i}{z} dz .$

29. а) $\int_{|z+i|=1} \frac{\cosh(iz)}{(z-1)(z+i)^2} dz ;$ б) $\int_{|z|=1} z^3 e^{\frac{i}{z}} dz .$

30. а) $\int_{|z+1|=1} \frac{z^2 - z + 5}{(z-i)(z+1)^2} dz ;$ б) $\int_{|z|=1} z^5 \cosh \frac{i}{z} dz .$

Ответы в вариантах задания 6.

1. а) $\frac{-8\pi}{(\pi+2)^2} ;$ б) $\frac{\pi i}{3} .$ 2. а) $\pi \cdot \cos 1 ;$ б) $\frac{\pi i}{3} .$ 3. а) $-i \cdot \pi \cdot e^1 ;$ б) $\frac{\pi i}{12} .$ 4. а) $\pi \cdot \cosh 1 ;$ б) $\frac{\pi i}{60} .$

5. а) $\left(\frac{28}{25} + \frac{46}{25} \cdot i \right) \cdot \pi ;$ б) $\pi i .$ 6. а) $\frac{5 \cdot i \cdot \pi}{27} \cdot e ;$ б) $-\frac{\pi i}{3} .$ 7. а) $\pi \cdot (\sinh 1 - \cosh 1) ;$ б) $-\frac{\pi i}{360} .$

8. а) $\frac{\pi}{2} \cos 1 \cdot (1+i) ;$ б) $\frac{\pi i}{60} .$ 9. а) $-i \cdot \pi \cdot \sin 1 ;$ б) $\frac{\pi i}{12} .$ 10. а) $\frac{1}{4} i \pi (e - 3e^{-1}) ;$ б) $\pi i .$

11. а) $2i\pi ;$ б) $\frac{\pi i}{3} .$ 12. а) $\frac{2i\pi}{(\pi-1)^2} ;$ б) $\pi i .$ 13. а) $\frac{2}{9} i \cdot \pi (e^2 + 2e^{-2}) ;$ б) $-\frac{\pi i}{360} .$ 14. а) $\frac{-\pi}{4} ;$

б) $\frac{\pi}{60} .$ 15. а) $2i\pi ;$ б) $\frac{\pi i}{12} .$ 16. а) $\pi \cdot e^i (-2+i) ;$ б) $\frac{8\pi i}{15} .$ 17. а) $\frac{2}{9} i \pi (e^2 - 2e^{-2}) ;$ б) $\frac{8\pi i}{3} .$

18. а) $\pi \cdot e ;$ б) $\frac{27\pi i}{4} .$ 19. а) $2i\pi ;$ б) $9\pi i .$ 20. а) $\pi \cdot e^{-i} ;$ б) $9\pi i .$ 21. а) $-3\pi ;$ б) $-\frac{\pi i}{3} .$

22. а) $\pi(\cosh 1 - \sinh 1 + i \cdot \cosh 1) ;$ б) $-\frac{\pi i}{360} .$ 23. а) $\pi(\sinh 1 - \cosh 1 - i \cdot \sinh 1) ;$ б) $\frac{\pi i}{60} .$ 24. а) 0;

б) $\frac{\pi i}{12} .$ 25. а) $\frac{2}{9} \pi (-e - 2e^{-1}) ;$ б) $\pi i .$ 26. а) $\frac{1}{4} i \pi (-3e^{-1} - e) ;$ б) $-\frac{\pi i}{3} .$ 27. а) $2\pi \cos 1 ;$ б) $-\frac{\pi}{60} .$

28. а) $\frac{1}{2} i \cdot \pi \cdot \sin 1 ;$ б) $\pi i .$ 29. а) $\pi(\sinh 1 - \cosh 1 - i \cdot \sinh 1) ;$ б) $\frac{\pi i}{12} .$ 30. а) $\pi(-4 + 3i) ;$ б) $-\frac{\pi i}{360} .$

2. Задания для индивидуальной работы к модулю «Операционное исчисление»

Задание 1

Для данного оригинала найти изображение по Лапласу.

1. $f(t) = 4 \sin 2t - 2e^{-t} \cos 3t + 5t^2 \cdot e^{3t} - 6 + \Phi(t-3) \cdot \sinh 2(t-3)$
2. $f(t) = 4 \sinh 2t - 2e^{3t} \sin 4t + 5t^3 \cdot e^{-2t} - 8 + \Phi(t-5) \cdot \sin 3(t-5)$
3. $f(t) = 7 \cos 2t - 3e^{-2t} \cosh 3t + 4t^4 \cdot e^t + 9t + \Phi(t-2) \cdot \sin 5(t-3)$
4. $f(t) = 5 \cosh 2t - 4e^{6t} \sinh 3t + 5t \cdot e^{-3t} - 10t^2 + \Phi(t-1) \cdot \cos 4(t-1)$
5. $f(t) = 4 + 2e^{6t} \cos t + t^5 \cdot e^{-t} - 7t \cdot \sin 2t + \Phi(t-7) \cdot \cosh 3(t-7)$
6. $f(t) = 2e^{4t} - 3e^{-6t} \cosh t + t^5 \cdot e^{-6t} - 7t \cdot \sinh 2t + \Phi(t-7) \cdot (t-7)^2$
7. $f(t) = 3e^{-7t} - 7e^{-t} \sin 2t + t^6 \cdot e^{-t} - 7t \cdot \cosh 5t + \Phi(t-2) \cdot (t-2)^3$
8. $f(t) = 5e^{2t} + 2e^{6t} \sinh t + t^7 \cdot e^{-2t} - 7t \cdot \cos 3t + \Phi(t-5) \cdot (t-5)$
9. $f(t) = 5\Phi(t-2)e^{(t-2)} + 3e^{2t} \sinh 4t + 2 \sin^2 t - 7t \cdot \cos 3t + 2t - 5$
10. $f(t) = 4 \sin 3t - 4e^{-t} \cos 4t + 6t^2 \cdot e^{3t} + 7t + \Phi(t-4) \cdot \sinh(t-4)$
11. $f(t) = 5 \sinh 3t - 3e^{3t} \sin 5t + 6t^3 \cdot e^{-3t} - 9 + \Phi(t-6) \cdot \sin(t-6)$
12. $f(t) = 8 \cos 3t - 4e^{-3t} \cosh 4t + 4t^5 \cdot e^{2t} + t + \Phi(t-4) \cdot \sin(t-4)$
13. $f(t) = 6 \cosh 3t - 5e^{7t} \sinh 4t + 6t \cdot e^{-5t} - 9t^2 + \Phi(t-2) \cdot \cos(t-2)$
14. $f(t) = 5 + 2e^{5t} \cos 2t + t^4 \cdot e^{-5t} - 6t \cdot \sin 3t + \Phi(t-6) \cdot \cosh(t-6)$
15. $f(t) = 3e^{5t} - 4e^{-7t} \cosh 2t + t^4 \cdot e^{6t} - t \cdot \sinh t + \Phi(t-5) \cdot (t-5)^4$
16. $f(t) = e^{-7t} - 7e^{-t} \sin 3t + t^6 e^{-t} - 4t \cdot \cosh 2t + \Phi(t-2) \cdot (t-2)^5$
17. $f(t) = 3e^{2t} + 5e^{6t} \sinh t + t^7 \cdot e^{-2t} - 7t \cdot \cos 2t + \Phi(t-4) \cdot (t-4)$
18. $f(t) = \Phi(t-3)e^{2(t-3)} + e^{-2t} \sinh 5t + 2 \sin^2 t - 9t \cdot \cos 2t + 6t - 8$
19. $f(t) = 4\Phi(t-3)e^{(t-3)} + 5e^{-2t} \sin 5t + 2 \cos^2 t - t \cdot \cosh 3t + 3t + 7$
20. $f(t) = 3\Phi(t-4)e^{(t-4)} + 6e^{2t} \cos 6t + 4 \sin^2 2t + t \cdot \sin 4t + 2t^2$
21. $f(t) = 2\Phi(t-5)e^{(t-5)} + 7e^{2t} \cosh 7t + 6 \cos^2 3t - t \cdot \sinh 2t + 4t^3 + 4$

22. $f(t) = \Phi(t-4)e^{(t-4)} + 2e^t \operatorname{sh} 5t + 6 \sin^2 5t - 4t \cdot \cos 2t + t^3 + 3$
23. $f(t) = e^{-2t} + e^{6t} \cos t + t^5 \cdot e^{-t} - 7t \cdot \sin 2t + \Phi(t-7) \cdot \operatorname{ch} 3(t-7)$
24. $f(t) = 3e^{-4t} + 3e^{-6t} \operatorname{cht} + t^4 \cdot e^{-7t} - t \cdot \operatorname{sh} 2t + \Phi(t-5) \cdot (t-5)^2$
25. $f(t) = 7e^{-7t} - 6e^{2t} \sin 3t + t^7 \cdot e^{-t} - t \cdot \operatorname{ch} 4t + \Phi(t-2) \cdot (t-2)^3$
26. $f(t) = e^{6t} \cos t + t^8 \cdot e^{-2t} - 7t \cdot \sin 2t + \Phi(t-7) \cdot \operatorname{ch} 3(t-7)$
27. $f(t) = 3e^{6t} \operatorname{ch} 5t + t^5 \cdot e^{-6t} - 7t^2 \cdot \operatorname{sh} 2t + \Phi(t-7) \cdot (t-7)^2$
28. $f(t) = 3 + 7e^{-t} \sin 2t + t^6 \cdot e^{-t} - 7t \cdot \operatorname{ch} 5t + \Phi(t-2) \cdot 7(t-2)^3$
29. $f(t) = 5e^{2t} + 2e^{6t} \operatorname{sht} + t^7 \cdot e^{-2t} - t \cdot \cos 3t + \Phi(t-5) \cdot 6(t-5)$
30. $f(t) = \Phi(t-4)e^{7(t-4)} + e^{-2t} \operatorname{sh} 7t + \sin^2 t - t^2 \cdot \cos 3t + 2t - 5$

Задание 2

По данному изображению найти оригинал.

1. $F(p) = \frac{p-3}{p^2 \cdot (p+2)}$.
2. $F(p) = \frac{p^2-1}{p^2 \cdot (p+3)}$.
3. $F(p) = \frac{2p+1}{p \cdot (p-2)^2}$.
4. $F(p) = \frac{p+9}{p \cdot (p^2+1)}$.
5. $F(p) = \frac{p+5}{(p+2) \cdot (p-1)^2}$.
6. $F(p) = \frac{p+1}{(p-5)(p^2+9)}$.
7. $F(p) = \frac{p-5}{(p+3) \cdot (p^2+2p+10)}$.
8. $F(p) = \frac{3p+1}{(p^2+16) \cdot (p-1)}$.
9. $F(p) = \frac{3p-1}{(p+2)(p^2+4p+5)}$.
10. $F(p) = \frac{p^2-1}{(p^2-2p+17) \cdot (p-5)}$.
11. $F(p) = \frac{p^2+p+1}{(p+1) \cdot (p-2)^2}$.
12. $F(p) = \frac{p^2+6}{p(p^2-4p+5)}$.

$$13. F(p) = \frac{p+1}{(p^2 + 25) \cdot (p-1)}.$$

$$15. F(p) = \frac{p^2 + p - 1}{p \cdot (p-2)(p+7)}.$$

$$17. F(p) = \frac{p^2 + p}{(p^2 - 6p + 10) \cdot (p+3)}.$$

$$19. F(p) = \frac{p^2 + 1}{(p^2 - 6p + 13)(p+5)}.$$

$$21. F(p) = \frac{p+1}{p \cdot (p-1)(p+4)}.$$

$$23. F(p) = \frac{p^2 + 3}{(p^2 + 4) \cdot (p-2)}.$$

$$25. F(p) = \frac{p^2 - 1}{(p+7)(p^2 + 2p + 17)}.$$

$$27. F(p) = \frac{p-2}{(p^2 + 4) \cdot (p+5)}.$$

$$29. F(p) = \frac{p^2 - p - 1}{(p+1) \cdot (p-3)^2}.$$

$$14. F(p) = \frac{2p+7}{(p+1)(p^2 - 4)}.$$

$$16. F(p) = \frac{p+5}{(p^2 - 9)(p+1)}.$$

$$18. F(p) = \frac{p^2 + 2p + 1}{p \cdot (p-3)^2}.$$

$$20. F(p) = \frac{p+3}{(p+6) \cdot (p^2 - 1)}.$$

$$22. F(p) = \frac{p^2 - 1}{p \cdot (p+2)(p-3)}.$$

$$24. F(p) = \frac{p^2 + 3p + 7}{p \cdot (p-2)(p+1)}.$$

$$26. F(p) = \frac{p^2 + 1}{(p-1) \cdot (p+5)^2}.$$

$$28. F(p) = \frac{p+8}{(p-2)(p+4)(p+7)}.$$

$$30. F(p) = \frac{p-3}{(p+3)(p^2 + 4p + 13)}.$$

Ответы в вариантах задания 2.

$$1. f(t) = \frac{5}{4} - \frac{3}{2}t - \frac{5}{4}e^{-2t}. \quad 2. f(t) = \frac{1}{9} - \frac{1}{3}t + \frac{8}{9}e^{-3t}. \quad 3. f(t) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}e^{2t} + \frac{5}{2}t \cdot e^{2t}.$$

$$4. f(t) = 9 - 9\cos t + \sin t. \quad 5. f(t) = \frac{1}{3}e^{-2t} - \frac{1}{3}e^t + 2t \cdot e^t. \quad 6. f(t) = \frac{3}{17}e^{5t} - \frac{3}{17}\cos 3t + \frac{2}{51}\sin 3t.$$

$$7. f(t) = e^{-t} \left(\frac{8}{13}\cos 3t - \frac{1}{13}\sin 3t \right) - \frac{8}{13}e^{-3t}. \quad 8. f(t) = \frac{4}{17}e^t - \frac{4}{17}\cos 4t + \frac{47}{68}\sin 4t.$$

$$9. f(t) = e^{-2t}(7\cos t + 3\sin t) - 7e^{-2t}. \quad 10. f(t) = e^t \left(\frac{1}{4}\cos 4t + \frac{3}{4}\sin 4t \right) + \frac{3}{4}e^{5t}.$$

$$11. f(t) = \frac{1}{9}e^{-t} + \frac{8}{9}e^{2t} + \frac{7}{3}t \cdot e^{2t}. \quad 12. f(t) = \frac{6}{5} - e^{2t} \left(\frac{1}{5}\cos t + \frac{22}{5}\sin t \right).$$

$$13. f(t) = \frac{1}{13}e^t - \frac{1}{13}\cos 5t + \frac{12}{65}\sin 5t. \quad 14. f(t) = \frac{11}{12}e^{2t} + \frac{3}{4}e^{-2t} - \frac{5}{3}e^{-t}.$$

$$15. f(t) = \frac{1}{14} + \frac{41}{63}e^{-7t} + \frac{5}{18}e^{2t}. 16. f(t) = \frac{1}{6}e^{-3t} + \frac{1}{3}e^{3t} - \frac{1}{2}e^{-t}.$$

$$17. f(t) = e^{3t} \left(\frac{31}{37} \cos t + \frac{73}{37} \sin t \right) + \frac{6}{37}e^{-3t}. 18. f(t) = \frac{1}{9} + \frac{8}{9}e^{3t} + \frac{16}{3}t \cdot e^{3t}.$$

$$19. f(t) = e^{3t} \left(\frac{21}{34} \cos 2t + \frac{18}{34} \sin 2t \right) + \frac{13}{34}e^{-5t}. 20. f(t) = \frac{2}{7}e^t - \frac{1}{5}e^{-t} - \frac{3}{35}e^{-6t}.$$

$$21. f(t) = \frac{2}{5}e^t - \frac{3}{20}e^{-4t} - \frac{1}{4}. 22. f(t) = \frac{3}{10}e^{-2t} + \frac{8}{15}e^{3t} + \frac{1}{6}. 23. f(t) = \frac{7}{8}e^{2t} + \frac{1}{8}(\cos 2t + \sin 2t).$$

$$24. f(t) = \frac{5}{3}e^{-t} + \frac{17}{6}e^{2t} - \frac{7}{2}. 25. f(t) = e^{-t} \left(\frac{1}{13} \cos 4t - \frac{8}{13} \sin 4t \right) + \frac{12}{13}e^{-7t}.$$

$$26. f(t) = \frac{1}{18}e^t + \frac{17}{18}e^{-5t} - \frac{13}{3}t \cdot e^{-5t}. 27. f(t) = -\frac{7}{29}e^{-5t} + \frac{7}{29}\cos 2t - \frac{3}{29}\sin 2t.$$

$$28. f(t) = \frac{5}{27}e^{2t} - \frac{2}{9}e^{-4t} + \frac{1}{27}e^{-7t}. 29. f(t) = \frac{1}{16}e^{-t} + \frac{15}{16}e^{3t} + \frac{5}{4}t \cdot e^{3t}.$$

$$30. f(t) = e^{-2t} \left(\frac{3}{5} \cos 3t + \frac{2}{15} \sin 3t \right) - \frac{3}{5}e^{-3t}.$$

Задание 3

Методом операционного исчисления найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям

1. $x'' + 2x' - 3x = \sin t, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = -1.$
2. $x'' + 2x' = \cos t, \quad x(0) = -1, \quad x'(0) = 0.$
3. $x'' + 6x' + 13x = 1, \quad x(0) = 2, \quad x'(0) = 0.$
4. $x'' + 2x' + 5x = t - 2, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0.$
5. $x'' - x' - 2x = \sin 2t, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 0.$
6. $x'' - 2x' + 17x = 1, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 0.$
7. $x'' + 4x = 1 - t, \quad x(0) = 2, \quad x'(0) = 0.$
8. $x'' - 3x' + 2x = \cos 2t, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 2.$
9. $x'' + 9x = e^{-2t}, \quad x(0) = -2, \quad x'(0) = 1.$
10. $x'' - 4x' + 3x = \sin 3t, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = -2.$
11. $x'' + 5x' + 4x = \cos 3t, \quad x(0) = 2, \quad x'(0) = 0.$

12. $x'' + 3x' - 4x = \sin 4t$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 1$.
13. $x'' + 16x = e^{-3t}$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 2$.
14. $x'' - 6x' + 13x = t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$.
15. $x'' + 2x' + 5x = 3$, $x(0) = 1$, $x'(0) = -2$.
16. $x'' - 5x' + 6x = \cos 2t$, $x(0) = -1$, $x'(0) = 1$.
17. $x'' + 5x' + 6x = t^2$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$.
18. $x'' + 25x = t + 1$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$.
19. $x'' + 3x' = \cos 2t$, $x(0) = 2$, $x'(0) = 0$.
20. $x'' - 4x' + 5x = 2$, $x(0) = 1$, $x'(0) = -1$.
21. $x'' + 2x' + 17x = 1$, $x(0) = -1$, $x'(0) = 2$.
22. $x'' + x' - 6x = \sin 4t$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$.
23. $x'' + 36x = 2 - t$, $x(0) = 2$, $x'(0) = 0$.
24. $x'' - x' - 6x = 2 \sin t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 2$.
25. $x'' + x = t + 1$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$.
26. $x'' - 5x' + 4x = \sin t$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$.
27. $x'' + 5x' = t^2 \cdot e^t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$.
28. $x'' + x = \cos 2t$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 1$.
29. $x'' - 2x' + 2x = t \cdot e^{-2t}$, $x(0) = -1$, $x'(0) = 1$.
30. $x'' + 4x' - 5x = \sin 3t$, $x(0) = 1$, $x'(0) = -1$.

Ответы к заданию 3.

1. $x(t) = \frac{5}{8}e^t + \frac{19}{40}e^{-3t} - \frac{1}{5}\sin t - \frac{1}{10}\cos t$.
2. $x(t) = \frac{1}{5}e^{-2t} - 1 - \frac{1}{5}\cos t + \frac{2}{5}\sin t$.
3. $x(t) = \frac{1}{13} + \frac{75}{26}e^{-3t} \sin 2t + \frac{25}{13}e^{-3t} \cos 2t$.
4. $x(t) = \frac{1}{5}t - \frac{12}{25} + \frac{7}{50}e^{-t} \sin 2t + \frac{12}{25}e^{-t} \cos 2t$.
5. $x(t) = \frac{8}{15}e^{-t} + \frac{5}{12}e^{2t} - \frac{3}{20}\sin 2t + \frac{1}{20}\cos 2t$.
6. $x(t) = \frac{1}{17} - \frac{4}{17}e^t \sin 4t + \frac{16}{17}e^t \cos 4t$.
7. $x(t) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}t + \frac{7}{4}\cos 2t + \frac{1}{8}\sin 2t$.
8. $x(t) = \frac{9}{4}e^{2t} - \frac{11}{5}e^t - \frac{3}{20}\sin 2t - \frac{1}{20}\cos 2t$.
9. $x(t) = \frac{1}{13}e^{-2t} + \frac{5}{13}\sin 3t - \frac{27}{13}\cos 3t$.
10. $x(t) = \frac{47}{20}e^t - \frac{17}{12}e^{3t} - \frac{1}{30}\sin 3t + \frac{1}{15}\cos 3t$.
11. $x(t) = \frac{79}{30}e^{-t} - \frac{46}{75}e^{-4t} + \frac{3}{50}\sin 3t - \frac{1}{50}\cos 3t$.
12. $x(t) = \frac{89}{85}e^t - \frac{1}{40}e^{-4t} - \frac{5}{136}\sin 4t - \frac{3}{136}\cos 4t$.

13. $x(t) = \frac{1}{25}e^{-3t} + \frac{53}{100}\sin 4t - \frac{1}{25}\cos 4t$. 14. $x(t) = \frac{1}{13}t + \frac{6}{169} + \frac{87}{169}e^{3t}\sin 2t - \frac{6}{169}e^{3t}\cos 2t$.
15. $x(t) = \frac{3}{5} - \frac{4}{5}e^{-t}\sin 2t + \frac{2}{5}e^{-t}\cos 2t$. 16. $x(t) = \frac{42}{13}e^{3t} - \frac{17}{4}e^{2t} - \frac{5}{52}\sin 2t + \frac{1}{52}\cos 2t$.
17. $x(t) = \frac{1}{6}t^2 - \frac{5}{18}t + \frac{19}{108} - \frac{1}{4}e^{-2t} + \frac{2}{27}e^{-3t}$. 18. $x(t) = \frac{1}{5}t + \frac{1}{25} - \frac{1}{125}\sin 5t - \frac{1}{25}\cos 5t$.
19. $x(t) = \frac{1}{13}e^{-3t} + 2 + \frac{3}{26}\sin 2t - \frac{1}{13}\cos 2t$. 20. $x(t) = \frac{2}{5} - \frac{11}{5}e^{2t}\sin t + \frac{3}{5}e^{2t}\cos t$.
21. $x(t) = \frac{1}{17} + \frac{8}{17}e^{-t}\sin 2t - \frac{18}{17}e^{-t}\cos 2t$. 22. $x(t) = \frac{46}{125}e^{-3t} + \frac{16}{25}e^{2t} - \frac{11}{250}\sin 4t - \frac{1}{125}\cos 4t$.
23. $x(t) = -\frac{1}{36}t + \frac{1}{18} + \frac{1}{216}\sin 6t + \frac{70}{36}\cos 6t$. 24. $x(t) = \frac{11}{25}e^{3t} - \frac{12}{25}e^{-2t} - \frac{7}{25}\sin t + \frac{1}{25}\cos t$.
25. $x(t) = t + 1 - \cos t$. 26. $x(t) = \frac{7}{6}e^t - \frac{16}{51}e^{4t} + \frac{3}{34}\sin t + \frac{5}{34}\cos t$.
27. $x(t) = \frac{1}{6}t^2 \cdot e^t - \frac{7}{18}t \cdot e^t + \frac{43}{108}e^t - \frac{2}{5} + \frac{1}{540}e^{-5t}$. 28. $x(t) = -\frac{1}{3}\cos 2t + \sin t + \frac{4}{3}\cos t$.
29. $x(t) = \frac{1}{10}t \cdot e^{-2t} + \frac{3}{50}e^{-2t} + \frac{104}{50}e^t \sin t - \frac{53}{50}e^t \cos t$.
30. $x(t) = \frac{43}{60}e^t + \frac{65}{204}e^{-5t} - \frac{7}{170}\sin 3t - \frac{6}{170}\cos 3t$.

Задание 4

Методом операционного исчисления найти частное решение системы дифференциальных уравнений, удовлетворяющее заданным начальным условиям (независимая переменная - t).

1. $\begin{cases} x' = -x + 5y, \\ y' = -x + 3y, \end{cases} \quad x(0) = 1, \quad y(0) = -1.$

2. $\begin{cases} x' = -2x - 4y, \\ y' = 5x + 6y, \end{cases} \quad x(0) = 2, \quad y(0) = 1.$

3. $\begin{cases} x' = -x + 8y, \\ y' = x + y, \end{cases} \quad x(0) = 0, \quad y(0) = 1.$

4. $\begin{cases} x' = 7x + 3y, \\ y' = 6x + 4y, \end{cases} \quad x(0) = 1, \quad y(0) = 0.$

5. $\begin{cases} x' = -x + y, \\ y' = -2x - 3y, \end{cases}$ $x(0) = 1, \quad y(0) = 1.$

6. $\begin{cases} x' = y, \\ y' = -2x + 3y, \end{cases}$ $x(0) = -1, \quad y(0) = 1.$

7. $\begin{cases} x' = x + 3y, \\ y' = -x + 5y, \end{cases}$ $x(0) = 0, \quad y(0) = -1.$

8. $\begin{cases} x' = -x + 9y, \\ y' = -x - y, \end{cases}$ $x(0) = 0, \quad y(0) = 2.$

9. $\begin{cases} x' = -3x + y, \\ y' = -20x + 6y, \end{cases}$ $x(0) = 0, \quad y(0) = 2.$

10. $\begin{cases} x' = -x + 5y, \\ y' = x + 3y, \end{cases}$ $x(0) = 0, \quad y(0) = 1.$

11. $\begin{cases} x' = -2x - 2y, \\ y' = x - 4y, \end{cases}$ $x(0) = 2, \quad y(0) = 0.$

12. $\begin{cases} x' = 7x + 3y, \\ y' = 6x + 4y, \end{cases}$ $x(0) = 1, \quad y(0) = 2.$

13. $\begin{cases} x' = -x + 5y, \\ y' = -x + 3y, \end{cases}$ $x(0) = 0, \quad y(0) = 2.$

14. $\begin{cases} x' = -\frac{y}{2}, \\ y' = 2x, \end{cases}$ $x(0) = 1, \quad y(0) = -1.$

$$15. \begin{cases} x' = -8y, \\ y' = \frac{1}{2}x, \end{cases} \quad x(0) = -1, \quad y(0) = 0.$$

$$16. \begin{cases} x' = -2x - 4y, \\ y' = 5x + 6y, \end{cases} \quad x(0) = 0, \quad y(0) = 2.$$

$$17. \begin{cases} x' = -4y, \\ y' = 16x, \end{cases} \quad x(0) = 2, \quad y(0) = 0.$$

$$18. \begin{cases} x' = -x + y, \\ y' = -2x - 3y, \end{cases} \quad x(0) = -1, \quad y(0) = 2.$$

$$19. \begin{cases} x' = y, \\ y' = -2x + 3y, \end{cases} \quad x(0) = 2, \quad y(0) = -1.$$

$$20. \begin{cases} x' = -\frac{y}{2}, \\ y' = 2x, \end{cases} \quad x(0) = -2, \quad y(0) = 1.$$

$$21. \begin{cases} x' = -8y, \\ y' = \frac{1}{2}x, \end{cases} \quad x(0) = 2, \quad y(0) = -1$$

$$22. \begin{cases} x' = -2x - 2y, \\ y' = x - 4y, \end{cases} \quad x(0) = 1, \quad y(0) = -2.$$

$$23. \begin{cases} x' = -x + 9y, \\ y' = -x - y, \end{cases} \quad x(0) = 1, \quad y(0) = -1.$$

$$24. \begin{cases} x' = -x + 8y, \\ y' = x + y, \end{cases} \quad x(0) = 2, \quad y(0) = -1.$$

25. $\begin{cases} x' = x + 3y, \\ y' = -x + 5y, \end{cases} \quad x(0) = 1, \quad y(0) = 2.$

26. $\begin{cases} x' = 18y, \\ y' = -2x, \end{cases} \quad x(0) = -1, \quad y(0) = -1.$

27. $\begin{cases} x' = -3x + y, \\ y' = -20x + 6y, \end{cases} \quad x(0) = 2, \quad y(0) = -1.$

28. $\begin{cases} x' = -x + 5y, \\ y' = x + 3y, \end{cases} \quad x(0) = 2, \quad y(0) = -1.$

29. $\begin{cases} x' = 18y, \\ y' = -2x, \end{cases} \quad x(0) = 2, \quad y(0) = 1.$

30. $\begin{cases} x' = -4y, \\ y' = 16x, \end{cases} \quad x(0) = -1, \quad y(0) = 2.$

Ответы к заданию 4.

1. $x(t) = e^t (\cos t - 7 \sin t), \quad y(t) = e^t (-\cos t - 3 \sin t).$
2. $x(t) = e^{2t} (2 \cos 2t - 6 \sin 2t),$
 $y(t) = e^{2t} (\cos 2t + 7 \sin 2t).$
3. $x(t) = \frac{8}{3} \operatorname{sh} 3t, \quad y(t) = \operatorname{ch} 3t + \frac{1}{3} \operatorname{sh} 3t.$
4. $x(t) = \frac{2}{3} e^{10t} + \frac{1}{3} e^t,$
 $y(t) = \frac{2}{3} e^{10t} - \frac{2}{3} e^t.$
5. $x(t) = e^{-2t} (\cos t + 2 \sin t), \quad y(t) = e^{-2t} (\cos t - 3 \sin t).$
6. $x(t) = 2e^{2t} - 3e^t,$
 $y(t) = 4e^{2t} - 3e^t.$
7. $x(t) = \frac{3}{2} e^{2t} - \frac{3}{2} e^{4t}, \quad y(t) = \frac{1}{2} e^{2t} - \frac{3}{2} e^{4t}.$
8. $x(t) = 6e^{-t} \sin 3t,$
 $y(t) = 2e^{-t} \cos 3t.$
9. $x(t) = 2e^{2t} - 2e^t, \quad y(t) = 10e^{2t} - 8e^t.$
10. $x(t) = \frac{5}{6} e^{4t} - \frac{5}{6} e^{-2t},$
 $y(t) = \frac{5}{6} e^{4t} + \frac{1}{6} e^{-2t}.$
11. $x(t) = e^{-3t} (2 \cos t + 2 \sin t), \quad y(t) = 2e^{-3t} \sin t.$
12. $x(t) = \frac{4}{3} e^{10t} - \frac{1}{3} e^t,$
 $y(t) = \frac{4}{3} e^{10t} + \frac{2}{3} e^t.$
13. $x(t) = 10e^t \sin t, \quad y(t) = e^t (2 \cos t + 4 \sin t).$
14. $x(t) = \cos t + \frac{1}{2} \sin t,$
 $y(t) = 2 \sin t - \cos t.$
15. $x(t) = -\cos t, \quad y(t) = -\frac{1}{4} \sin 2t.$
16. $x(t) = -4e^{2t} \sin 2t,$
 $y(t) = e^{2t} (2 \cos 2t + 4 \sin 2t).$
17. $x(t) = 2 \cos 8t, \quad y(t) = 4 \sin 8t.$
18. $x(t) = e^{-2t} (-\cos t + \sin t),$
 $y(t) = 2e^{-2t} \cos t.$
19. $x(t) = 5e^t - 3e^{2t}, \quad y(t) = 5e^t - 6e^{2t}.$

$$20. \quad x(t) = -2\cos t - \frac{1}{2}\sin t, \quad y(t) = \cos t - 4\sin t.$$

$$21. \quad x(t) = 2\cos 2t + 4\sin 2t, \quad y(t) = -\cos 2t + \frac{1}{2}\sin 2t. \quad 22. \quad x(t) = e^{-3t}(\cos t + 5\sin t),$$

$$y(t) = e^{-3t}(-2\cos t + 3\sin t). \quad 23. \quad x(t) = e^{-t}(\cos 3t - 3\sin 3t), \quad y(t) = e^{-t}\left(-\cos 3t - \frac{1}{3}\sin 3t\right).$$

$$24. \quad x(t) = 2\operatorname{ch}3t - \frac{10}{3}\operatorname{sh}3t, \quad y(t) = -\operatorname{ch}3t + \frac{1}{3}\operatorname{sh}3t. \quad 25. \quad x(t) = \frac{5}{2}e^{4t} - \frac{3}{2}e^{2t}, \quad y(t) = \frac{5}{2}e^{4t} - \frac{1}{2}e^{2t}.$$

$$26. \quad x(t) = -\cos 6t - 3\sin 6t, \quad y(t) = -\cos 6t + \frac{1}{3}\sin 6t. \quad 27. \quad x(t) = 11e^t - 9e^{2t}, \quad y(t) = 44e^t - 45e^{2t}.$$

$$28. \quad x(t) = -\frac{1}{2}e^{4t} + \frac{5}{2}e^{-2t}, \quad y(t) = -\frac{1}{2}e^{4t} - \frac{1}{2}e^{-2t}. \quad 29. \quad x(t) = 2\cos 6t + 3\sin 6t,$$

$$y(t) = \cos 6t - \frac{2}{3}\sin 6t. \quad 30. \quad x(t) = -\cos 8t - \sin 8t, \quad y(t) = 2\cos 8t - 2\sin 8t.$$

3. Примеры решения задач

Все задачи можно решать «вручную», однако желательно использовать возможности компьютерного математического пакета MathCAD, как это показано ниже.

Задачи модуля «ТФКП»

Задание 1. Проверить с помощью условий Коши-Римана, является ли функция $w = \bar{z} \cdot \cos z$ аналитической?

Решение. Представим функцию в алгебраической форме, учитывая, что $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$.

$w = \bar{z} \cdot \cos z = (x - iy) \cdot \cos(x + iy) = (x - iy)(\cos x \cdot \cos iy - \sin x \cdot \sin iy)$. С учетом зависимостей $\cos iy = \operatorname{ch}y$ и $\sin iy = i \operatorname{sh}y$ получим: $w = u(x, y) + iv(x, y)$, где

$$u(x, y) = \operatorname{Re} w = x \cos x \operatorname{ch}y - y \sin x \operatorname{sh}y,$$

$$v(x, y) = \operatorname{Im} w = -x \sin x \operatorname{sh}y - y \cos x \operatorname{ch}y.$$

В пакете MathCAD задаем функции $u(x, y)$, $v(x, y)$ и определяем их частные производные:

$$u(x, y) := x \cdot \cos(x) \cdot \cosh(y) - y \cdot \sin(x) \cdot \sinh(y)$$

$$v(x, y) := -x \cdot \sin(x) \cdot \sinh(y) - y \cdot \cos(x) \cdot \cosh(y)$$

$$\frac{d}{dx} u(x, y) \rightarrow \cos(x) \cdot \cosh(y) - x \cdot \sin(x) \cdot \cosh(y) - y \cdot \cos(x) \cdot \sinh(y)$$

$$\frac{d}{dy} v(x, y) \rightarrow -x \cdot \sin(x) \cdot \cosh(y) - \cos(x) \cdot \cosh(y) - y \cdot \cos(x) \cdot \sinh(y)$$

$$\frac{d}{dy} u(x, y) \rightarrow x \cdot \cos(x) \cdot \sinh(y) - \sin(x) \cdot \sinh(y) - y \cdot \sin(x) \cdot \cosh(y)$$

$$\frac{d}{dx} v(x, y) \rightarrow -\sin(x) \cdot \sinh(y) - x \cdot \cos(x) \cdot \sinh(y) + y \cdot \sin(x) \cdot \cosh(y)$$

Ответ: условия Коши-Римана не выполняются. Функция $w = \bar{z} \cdot \cos z$ не аналитическая.

Задание 2. Вычислить интеграл $\int_C z^2 \operatorname{Re} z dz$,

а) если C : $z = (-1 + 2i)t$, $(0 \leq t \leq 2)$;

б) если C : $|z| = 1$, $(0 \leq \arg z \leq \pi/3)$.

Решение а) Уравнение пути интегрирования задано через параметр t : $x = -t$, $y = 2t$. Избавляясь от параметра, получим $y = -2x$, откуда $dy = -2dx$. Представим подынтегральную функцию в алгебраической форме: $z^2 \operatorname{Re} z = (x + iy)^2 x = x^3 - xy^2 + i2x^2 y$. Дифференциал $dz = dx + idy = (1 - 2i)dx$.

$$\int_C z^2 \operatorname{Re} z dz = \int_C (x^3 - xy^2 + i2x^2 y)(1 - 2i)dx = (y = -2x) =$$

$$= (1 - 2i) \int_0^{-2} (x^3 - 4x^3 - i4x^3) dx. \text{ В пакете MathCAD:}$$

$$i := \sqrt{-1} \quad (1 - 2 \cdot i) \cdot \int_0^{-2} (-3 \cdot x^3 - i \cdot 4 \cdot x^3) dx \rightarrow -44 + 8 \cdot i.$$

б) Так как C : $|z| = 1$, $(0 \leq \arg z \leq \pi/2)$ - часть дуги окружности с центром в начале координат, то вычисления удобно производить в полярной системе координат, при этом переменную интегрирования

представим в показательной форме, с учетом, что $\rho = |z| = 1$, $\arg z = \varphi$.
 $z = \rho \cdot e^{i\varphi} = e^{i\varphi}$, $dz = ie^{i\varphi} d\varphi$; $z^2 = e^{i2\varphi}$; $\operatorname{Re} z = \rho \cos \varphi = \cos \varphi$. В свою очередь, по формуле Эйлера $\cos \varphi = \frac{1}{2}(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi})$. Тогда

$$\int_C z^2 \operatorname{Re} z dz = \int_0^{\pi/2} e^{i2\varphi} \frac{1}{2}(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}) ie^{i\varphi} d\varphi = \frac{i}{2} \int_0^{\pi/2} (e^{i4\varphi} + e^{i2\varphi}) d\varphi.$$

Интеграл вычисляем в MathCAD:

$$\frac{i}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (e^{i \cdot 4 \cdot t} + e^{i \cdot 2 \cdot t}) dt \rightarrow -\frac{1}{2}.$$

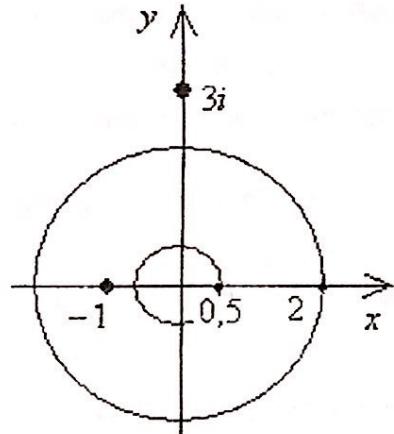
Ответ: а) $-44 + 8i$; б) $-1/2$.

Задание 3. Используя интегральные формулы Коши, вычислить интеграл

$$\int_C \frac{\operatorname{sh} 4z}{(z+1)^2(z-3i)} dz \quad \text{по двум замкнутым контурам: 1) } |z|=0,5; \text{ 2) } |z|=2.$$

Решение. Рисуем на комплексной плоскости заданные контуры интегрирования и отмечаем особые точки подынтегральной функции:
 $z_1 = -1$, $z_2 = 3i$.

$$1) \int_{|z|=0,5} \frac{\operatorname{sh} 4z}{(z+1)^2(z-3i)} dz = 0 \quad \text{согласно}$$



теореме Коши для односвязной области (подынтегральная функция аналитическая во всех точках замкнутой области).

2) Внутри контура $|z|=2$ имеется одна особая точка $z = -1$.

$$\int_{|z|=2} \frac{\operatorname{sh} 4z}{(z+1)^2(z-3i)} dz = 2\pi i \cdot \left(\frac{\operatorname{sh} 4z}{z-3i} \right) \Big|_{z=-1}. \quad \text{Далее в MathCAD:}$$

$$i := \sqrt{-1} \quad f(z) := \frac{\sinh(4 \cdot z)}{z - 3 \cdot i} \quad f1(z) := \frac{d}{dz} f(z)$$

$$(2 \cdot \pi \cdot i \cdot f1(-1)) \rightarrow 2 \cdot i \cdot \pi \cdot \left(\left(\frac{-2}{5} + \frac{6}{5} \cdot i \right) \cdot \cosh(4) + \left(\frac{-2}{25} - \frac{3}{50} \cdot i \right) \cdot \sinh(4) \right)$$

$$(2 \cdot \pi \cdot i \cdot f1(-1)) = -195.611 - 82.35i$$

Ответ: $-195.611 - 82.35i$.

Задание 4. Разложить функцию $f(z) = \frac{1}{z^8} \cdot \operatorname{ch}2z$ в ряд Лорана по степеням z . Определить тип особых точек $z = 0$ и $z = \infty$.

Решение. Воспользуемся определением гиперболического косинуса [2, §2.5]:
 $\operatorname{ch}z = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \dots + \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \dots$ Подставим в ряд вместо z выражение $2z$ и умножим ряд почленно на $\frac{1}{z^8}$:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z^8} \cdot \operatorname{ch}2z = \frac{1}{z^8} \left(1 + \frac{2^2 z^2}{2!} + \frac{2^4 z^4}{4!} + \dots \right) = \\ &= \frac{1}{z^8} + \frac{2}{z^6} + \frac{2^4}{z^4 \cdot 4!} + \frac{2^6}{z^2 \cdot 6!} + \frac{2^8}{8!} + \frac{2^{10} z^2}{10!} + \frac{2^{12} z^4}{12!} + \dots \end{aligned}$$

На комплексной плоскости заданная функция имеет только одну особую точку $z = 0$. Область $0 < |z| < \infty$ - окрестность точки $z = 0$ и бесконечно удаленной изолированной особой точки $z = \infty$. Поэтому ряд Лорана по степеням z позволяет судить о типе этих точек.

Ответ: $z = 0$ - полюс 8-го порядка (ряд содержит конечное число членов главной части со старшим членом z^{-8}); $z = \infty$ - существенно особая бесконечно удаленная точка (ряд содержит бесконечное число членов с положительными степенями z).

Задание 5. Вычислить вычеты в каждой из особых точек данной функции

$$f(z) = \frac{z^2 + z + 9}{z^3 \cdot (z - 2 + i)^2 (z + 1)}.$$

Решение. Значения z , превращающие в ноль знаменатель функции, являются полюсами. Функция имеет три полюса: простой полюс $a = -1$, полюс второго порядка $a = 2 - i$, полюс третьего порядка $a = 0$. Используя формулы для простого и кратного полюса, вычисления проводим в MathCAD:

$$i := \sqrt{-1} \quad f(z) := \frac{z^2 + z + 9}{z^3 \cdot (z - 2 + i)^2 \cdot (z + 1)}$$

$$a := -1 \quad \lim_{z \rightarrow a} (z - a) \cdot f(z) \rightarrow \frac{-18}{25} - \frac{27}{50} \cdot i$$

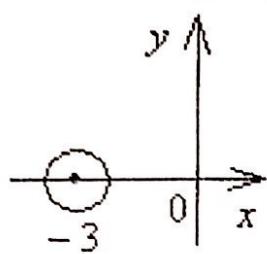
$$a := 2 - i \quad m := 2 \quad \frac{1}{(m-1)!} \cdot \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} (z - a)^m \cdot f(z) \rightarrow \frac{124}{625} - \frac{661}{1250} \cdot i$$

$$a := 0 \quad m := 3 \quad \frac{1}{(m-1)!} \cdot \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} (z-a)^m \cdot f(z) \rightarrow \frac{326}{625} + \frac{668}{625} \cdot i$$

Задание 6. Вычислить интегралы с помощью вычетов.

$$\text{а)} \int_{|z+3|=1} \frac{z^2 - 2z + 7}{(z-i)(z+3)^2} dz; \quad \text{б)} \int_{|z|=1} z^5 \cosh \frac{2i}{z} dz.$$

Решение. а) $\int_{|z+3|=1} \frac{z^2 - 2z + 7}{(z-i)(z+3)^2} dz$. Рисуем на комплексной плоскости



контур интегрирования – окружность радиуса 1 с центром в точке $z = -3$. Внутри окружности расположен один полюс второго порядка. Вычисляем вычет в этом полюсе.

$$i := \sqrt{-1} \quad f(z) := \frac{z^2 - 2z + 7}{(z-i) \cdot (z+3)^2}$$

$$a := -3 \quad m := 2 \quad \frac{1}{(m-1)!} \cdot \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} (z-a)^m \cdot f(z) \rightarrow \frac{16}{25} + \frac{13}{25} \cdot i$$

По теореме Коши о вычетах

$$\int_{|z+3|=1} \frac{z^2 - 2z + 7}{(z-i)(z+3)^2} dz = 2\pi i \left(\frac{16}{25} + \frac{13}{25} i \right) = \pi \left(-\frac{26}{25} + \frac{32}{25} i \right).$$

б) Подынтегральная функция $f(z) = z^5 \cdot \cosh \frac{2i}{z}$ имеет существенно особую

изолированную точку $z = 0$. Разложим функцию в ряд Лорана, учитывая, что $\cosh(2i/z) = \cos(2/z)$.

$$\begin{aligned} f(z) &= z^5 \cdot \cos \frac{2}{z} = z^5 \left(1 - \frac{2^2}{z^2 \cdot 2!} + \frac{2^4}{z^4 \cdot 4!} - \frac{2^6}{z^6 \cdot 6!} + \frac{2^8}{z^8 \cdot 8!} - \dots \right) = \\ &= z^5 - z^3 \cdot 2 + z \cdot \frac{2}{3} - \frac{4}{z \cdot 9} + \frac{2}{z^3 \cdot 315} - \dots \end{aligned}$$

Вычет равен коэффициенту при

$$z^{-1}: \operatorname{res} f(0) = C_{-1} = -\frac{4}{9}. \quad \text{Тогда } \int_{|z|=1} z^5 \cosh \frac{2i}{z} dz = 2\pi i \cdot \left(-\frac{4}{9} \right) = -\frac{8\pi i}{9}.$$

Ответ: а) $\pi \left(-\frac{26}{25} + \frac{32}{25} i \right)$; б) $-\frac{8\pi i}{9}$.

Задачи модуля «Операционное исчисление»

Задание 1. Для данного оригинала найти изображение по Лапласу.

$$f(t) = 7e^{3t} + 2e^{-5t} \sinh 3t + t^7 \cdot e^{-5t} - t \cdot \cos 3t + \Phi(t-5) \cdot 6(t-5).$$

Решение. Используем линейные свойства изображения:

$$\begin{aligned} L\{f(t)\} &= 7L\{e^{3t}\} + 2L\{e^{-5t} \sinh 3t\} + L\{t^7 \cdot e^{-5t}\} - L\{t \cdot \cos 3t\} + \\ &+ L\{\Phi(t-5)6(t-5)\}. \end{aligned}$$

Для последнего слагаемого используем теорему запаздывания:

Если $f(t) \neq F(p)$, то для любого положительного τ

$$\Phi(t-\tau) \cdot f(t-\tau) \doteq e^{-p\tau} F(p).$$

В нашем случае $f(t) = 6t$, $\tau = 5$. $L\{6t\} = \frac{6}{p^2}$, следовательно,

$$L\{\Phi(t-5)6(t-5)\} = \frac{6}{p^2} \cdot e^{-5p}. \quad \text{Изображения остальных}$$

слагаемых определяем по таблице преобразований Лапласа.

$$F(p) = \frac{7}{p-3} + \frac{6}{(p+5)^2-9} + \frac{7!}{(p+5)^8} - \frac{p^2-9}{(p^2+9)^2} + \frac{6}{p^2} e^{-5p}.$$

Задание 2. По данному изображению найти оригинал:

$$\text{а) } F(p) = \frac{p^2 - p - 10}{p(p+5)^2 \cdot (p-3)^3}; \quad \text{б) } F(p) = \frac{p^2 - 3p + 1}{(p^2+4)(p^2+4p+13)}.$$

Решение. а) Если полюсы изображения расположены в действительных точках, то удобно применять метод обратного преобразования, использующий вычеты изображения:

$$f(t) = \sum_{k=1}^N \text{res}[F(p_k) \cdot e^{p_k t}], \quad \text{где сумма вычетов берется по всем}$$

особым точкам p_k функции $F(p)$. MathCAD:

$$F(p) = \frac{p^2 - p - 10}{p \cdot (p+5)^2 \cdot (p-3)^3} \quad a := 0 \quad \lim_{p \rightarrow a} (p-a) \cdot F(p) \cdot e^{p \cdot t} \rightarrow \frac{2}{135}$$

$$a := -5 \quad m := 2$$

$$\frac{1}{(m-1)!} \cdot \lim_{p \rightarrow a} \frac{d^{m-1}}{dp^{m-1}} (p-a)^m \cdot F(p) \cdot e^{p \cdot t} \rightarrow \left(\frac{1}{5120} + \frac{1}{128} \cdot t \right) \cdot \exp(-5 \cdot t)$$

$$a := 3 \quad m := 3$$

$$\frac{1}{(m-1)!} \cdot \lim_{p \rightarrow a} \frac{d^{m-1}}{dp^{m-1}} (p-a)^m \cdot F(p) \cdot e^{p \cdot t} \rightarrow \frac{-415}{27648} \cdot \exp(3 \cdot t) + \frac{11}{288} \cdot t \cdot \exp(3 \cdot t) - \frac{1}{96} \cdot t^2 \cdot \exp(3 \cdot t)$$

Таким образом, оригинал имеет вид:

$$f(t) = \frac{2}{135} + \left(\frac{1}{5120} + \frac{t}{128} \right) \cdot e^{-5t} + \left(-\frac{t^2}{96} + \frac{11t}{288} - \frac{415}{27648} \right) \cdot e^{3t}.$$

б) Если полюсы изображения расположены в комплексных точках, т.е. знаменатель изображения разложен на квадратные трехчлены, имеющие комплексные корни, можно применять тот же метод, использующий вычеты.

Однако оригинал в этом случае будет представлять собой комплексную функцию, которую ещё нужно преобразовывать в действительную форму. Поэтому удобнее раскладывать изображение на сумму простейших дробей с последующим табличным переводом их в оригинал. Разложение на простейшие дроби выполняем в MathCAD.

Набираем изображение, не забывая вводить знак умножения (*), затем выделяем переменную p и щелкаем по строке **Convert to Partial Fraction** в пункте **Variable** меню **Symbolics**. Получим:

$$\frac{p^2 - 3 \cdot p + 1}{(p^2 + 4) \cdot (p^2 + 4 \cdot p + 13)} = \frac{-3}{29} \cdot \frac{(p+5)}{(p^2 + 4)} + \frac{1}{29} \cdot \frac{(56 + 3 \cdot p)}{(p^2 + 4 \cdot p + 13)}$$

Преобразовываем каждое слагаемое.

$$-\frac{3}{29} \cdot \frac{(p+5)}{(p^2 + 2^2)} = -\frac{3}{29} \cdot \frac{p}{(p^2 + 2^2)} - \frac{15}{2 \cdot 29} \cdot \frac{2}{(p^2 + 2^2)} \div$$

$$\div -\frac{3}{29} \cos 2t - \frac{15}{58} \sin 2t.$$

$$\frac{1}{29} \cdot \frac{(56 + 3p)}{(p^2 + 4p + 13)} = \frac{1}{29} \cdot \frac{3(p+2) + 50}{(p+2)^2 + 3^2} = \frac{3}{29} \cdot \frac{(p+2)}{(p+2)^2 + 3^2} +$$

$$+ \frac{50}{29 \cdot 3} \cdot \frac{3}{(p+2)^2 + 3^2} \div \frac{3}{29} e^{-2t} \cos 3t + \frac{50}{87} e^{-2t} \sin 3t.$$

Итак, оригинал имеет вид:

$$f(t) = -\frac{3}{29} \cos 2t - \frac{15}{58} \sin 2t + e^{-2t} \left(\frac{3}{29} \cos 3t + \frac{50}{87} \sin 3t \right)$$

Задание 3. Методом операционного исчисления найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям.

$$x'' - 2x' - 8x = e^{-t} \cos 2t, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = -2.$$

Решение. Обозначим $L\{x(t)\} = X(p)$ и преобразуем по Лапласу обе части уравнения. Преобразование правой части уравнения – пункт 18 таблицы преобразований Лапласа.

Для преобразования производных в левой части уравнения используем теорему дифференцирования оригинала:

Если $L\{x(t)\} = X(p)$, то $L\{x'(t)\} = p \cdot X(p) - x(0)$. А также,

$$L\{x''(t)\} = p^2 \cdot X(p) - p \cdot x(0) - x'(0).$$

Таким образом,

$$p^2 X(p) - p \cdot 1 - (-2) - 2(pX(p) - 1) - 8X(p) = \frac{p+1}{(p+1)^2 + 2^2},$$

$$X(p)(p^2 - 2p - 8) = \frac{p+1}{(p+1)^2 + 2^2} + p - 4,$$

$$X(p) = \frac{p^3 - 2p^2 - 2p - 19}{(p-4)(p+2)(p^2 + 2p + 5)}$$

Далее, как указано в решении задания 2, разкладываем дробь на сумму простейших дробей, используя MathCAD.

$$\frac{p^3 - 2p^2 - 2p - 19}{(p-4)(p+2)(p^2 + 2p + 5)} = \frac{5}{154 \cdot (p-4)} + \frac{31}{[31 \cdot (p+2)]} - \frac{1}{145} \cdot \frac{(25 + 9 \cdot p)}{(p^2 + 2 \cdot p + 5)}$$

Преобразуем последнее слагаемое к табличному виду. Начинаем с выделения квадрата суммы в знаменателе.

$$\frac{1}{145} \cdot \frac{9(p+1) - 8 \cdot 2}{(p+1)^2 + 2^2} = \frac{9}{145} \cdot \frac{p+1}{(p+1)^2 + 2^2} - \frac{8}{145} \cdot \frac{2}{(p+1)^2 + 2^2} =$$

$$\doteq -\frac{9}{145}e^{-t}\cos 2t - \frac{8}{145}e^{-t}\sin 2t.$$

Ответ. $x(t) = \frac{5}{174}e^{4t} + \frac{31}{30}e^{-2t} - e^{-t} \left(\frac{9}{145}\cos 2t + \frac{8}{145}\sin 2t \right).$

Задание 4. Методом операционного исчисления найти частное решение системы дифференциальных уравнений, удовлетворяющее заданным начальным условиям (независимая переменная - t).

$$\begin{cases} x' = -x + 9y, \\ y' = -x + 5y, \end{cases} \quad x(0) = 1, \quad y(0) = -2.$$

Решение. Обозначим $L\{x(t)\} = X(p)$, $L\{y(t)\} = Y(p)$ и преобразуем по Лапласу оба уравнения, используя теорему дифференцирования оригинала.

$$\begin{cases} pX(p) - 1 = -X(p) + 9Y(p), \\ pY(p) + 2 = -X(p) + 5Y(p). \end{cases} \quad \begin{cases} X(p)(p+1) - 9Y(p) = 1, \\ X(p) + Y(p)(p-5) = -2. \end{cases}$$

Решаем систему по правилу Крамера.

$$\Delta = \begin{vmatrix} p+1 & -9 \\ 1 & p-5 \end{vmatrix} = p^2 - 4p - 5 + 9 = (p-2)^2;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -9 \\ -2 & p-5 \end{vmatrix} = p-23; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} p+1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -2p-3.$$

$$X(p) = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{p-23}{(p-2)^2} = \frac{1}{p-2} - \frac{21}{(p-2)^2} \doteq e^{2t} - 21 \cdot t \cdot e^{2t};$$

$$Y(p) = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-2p-3}{(p-2)^2} = \frac{-2}{p-2} - \frac{7}{(p-2)^2} \doteq -2e^{2t} - 7 \cdot t \cdot e^{2t}.$$

Ответ. $x(t) = e^{2t} - 21 \cdot t \cdot e^{2t}$, $y(t) = -2e^{2t} - 7 \cdot t \cdot e^{2t}$.

Приложение А
Таблица преобразований Лапласа

$F(p)$	$f(t)(t > 0)$
1	2
1 $\frac{1}{p}$	1
2 $\frac{1}{p^2}$	t
3 $\frac{2}{p^3}$	t^2
4 $\frac{(n-1)!}{p^n} (n = 1, 2, \dots)$	t^{n-1}
5 $\frac{1}{p-a}$	e^{at}
6 $\frac{1}{(p-a)^2}$	te^{at}
7 $\frac{(n-1)!}{(p-a)^n} (n = 1, 2, 3, \dots)$	$t^{n-1} \cdot e^{at}$
8 $\frac{a-b}{(p-a)(p-b)}$	$e^{at} - e^{bt}$
9 $\frac{p(a-b)}{(p-a)(p-b)}$	$ae^{at} - be^{bt}$
10 $\frac{a}{p^2 + a^2}$	$\sin at$
11 $\frac{p}{p^2 + a^2}$	$\cos at$
12 $\frac{a}{p^2 - a^2}$	$\operatorname{sh} at$

Продолжение таблицы преобразований Лапласа

1	2
13 $\frac{p}{p^2 - a^2}$	$\operatorname{ch} at$
14 $\frac{2a^3}{(p^2 + a^2)^2}$	$\sin at - at \cos at$
15 $\frac{2ap}{(p^2 + a^2)^2}$	$t \sin at$
16 $\frac{p^2 - a^2}{(p^2 + a^2)^2}$	$t \cos at$
17 $\frac{a}{(p - b)^2 + a^2}$	$e^{bt} \sin at$
18 $\frac{p - b}{(p - b)^2 + a^2}$	$e^{bt} \cos at$
19 $\frac{a}{(p - b)^2 - a^2}$	$e^{bt} \operatorname{sh} at$
20 $\frac{p - b}{(p - b)^2 - a^2}$	$e^{bt} \operatorname{ch} at$

Библиографический список

1. Ледяев С.Ф. Основы высшей математики: учеб. пособие/ С.Ф. Ледяев, Ю.М. Рудов. – Севастополь: Изд-во СевНТУ, 2002.– 278 с.: ил.
2. Лунц Г.Л. Функции комплексного переменного с элементами операционного исчисления/ Г.Л. Лунц, П.Э. Эльсгольц. – М.: Физматгиз, 1958.- 296 с.
3. Специальный курс высшей математики «Операционное исчисление». Методические указания/ Разраб. Л.Н. Моисеенко. – Севастополь: СевГТУ, 2002. –66 с.