

INSTRUMENTACIÓN NUCLEAR
Simulación de la interacción γ -detector (examen final)
Prof.: Fernando Cristancho

El tema

Simulación del resultado de la detección de los fotones emitidos por una fuente monoenergética con $E_\gamma = 662 \text{ keV}$.

La geometría

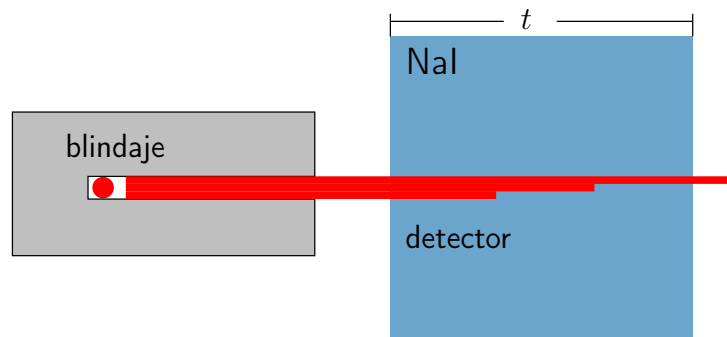


Figura 1: Esquema del experimento propuesto. El blindaje es perfecto: todos los haces salen paralelos unos a otros. No hay transmisión a través del material del blindaje. El detector está constituido solamente por el cristal de NaI, sin cápsula. $t = 3''$, es decir, se trata de un NaI $3'' \times 3''$. Energía del rayo gamma $E = 662 \text{ keV}$, es decir, va a simular el espectro del ^{137}Cs sin incluir su rayo X.

Aproximaciones

Vamos a hacer las siguientes aproximaciones:

- Apr.1. El colimador es perfecto, es decir, solamente deja pasar rayos gamma en una trayectoria paralela al eje de simetría cilíndrica del detector. Consecuencia para el cálculo: todos los fotones tienen la probabilidad de recorrer la misma longitud t .
- Apr.2. Hay posibilidad de solamente **una interacción** del rayo gamma con el detector. No incluimos la posibilidad de que si interactúa, lo haga de nuevo. El fotón producto de la interacción escapa del detector.

La física que sobrevive

Un fotón tendrá la probabilidad de realizar uno de los tres siguientes procesos:

1. Efecto fotoeléctrico, símbolo: f.
2. Efecto Compton. Tal como lo dice la Aproximación 2, solamente incluiremos Compton Simple. Símbolo: C.
3. "Pasar derecho". Símbolo: \emptyset (el conjunto vacío).

Construcción del modelo

Las probabilidades por unidad de recorrido para cada proceso son

$$P_f \propto \mu_f, \quad (1)$$

$$P_C \propto \mu_C, \quad (2)$$

$$P_\emptyset \propto ? \quad (3)$$

Tratando de resolver el problema de calcular correctamente las probabilidades relativas de los tres “eventos”, proponemos dos modelos.

Modelo A

Paso I. Primero decidimos **si hay o no interacción** dentro del detector, sin importarnos todavía qué tipo de interacción. Las respectivas probabilidades son

fenómeno	variable aleatoria	frecuencia: P
interactúa	int	$1 - \exp(-\mu t)$
pasa derecho	\emptyset	$\exp(-\mu t)$

La cantidad que relaciona la “física del problema” con el cálculo de probabilidades es

$$\mu = (\mu_f + \mu_C). \quad (4)$$

Observe que $P_{\text{int}} + P_\emptyset = 1$. En la práctica, es decir, al escribir el programa de simulación, un número aleatorio decide si interactúa o pasa derecho. Sencillo, para ello tiene que construir una función acumulativa con solamente dos variables (como en el cari-sello), como en la Fig. 2.

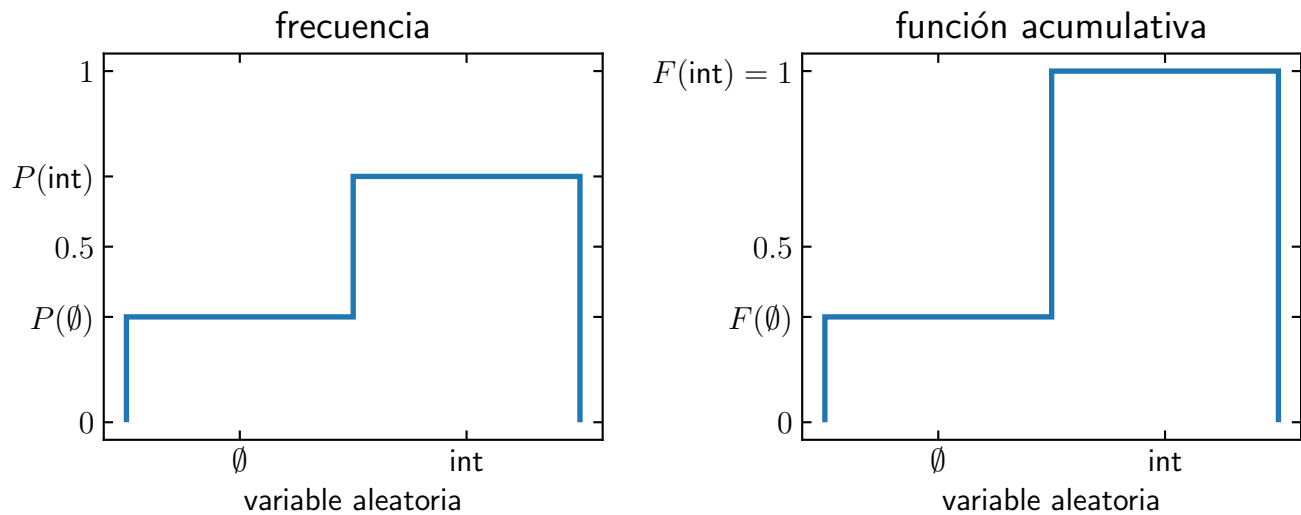


Figura 2: Posibles frecuencia y función acumulativa para la interacción de un rayo gamma con el material del detector.

Paso II. Si la decisión del número aleatorio es “pasa derecho”, no hay nada más qué hacer. Mejor dicho, habrá que ir al Paso I y empezar con otro fotón. Pero si la decisión es “interactúa”, habrá que preguntarle al programa

cuál de las dos opciones quiere tomar. Las probabilidades relativas son:

$$P_f = \frac{\mu_f}{\mu_f + \mu_C}, \quad (5)$$

$$P_C = \frac{\mu_C}{\mu_f + \mu_C}. \quad (6)$$

Para decidirlo en el programa, hay que construir una nueva función acumulativa con las dos variables 'f', 'C'.

Paso III. Si la interacción resultante es 'f', el programa debe añadir una cuenta al fotopico. Por supuesto, eso quiere decir que se ha definido un arreglo (histograma) que está llevando las cuentas de los fotones detectados y en qué energías (Ver Paso IV).

Paso IV. Si la interacción resultante es 'C': Si el fotón realiza Compton y el fotón dispersado se escapa, la energía medida por el detector es la del electrón. Entonces ahora hay que decidir la energía detectada usando la distribución de probabilidad como función de su energía. Tal distribución es decidida por $d\sigma/dE_e$ (ver texto de clase) y la probabilidad estadística tiene su forma funcional (sin normalizar):

$$P(E_e) \propto 2 + \frac{\epsilon_e^2}{\epsilon_\gamma^2(1 - \epsilon_e)^2} + \frac{\epsilon_e}{1 - \epsilon_e} \left(\epsilon_e - \frac{2}{\epsilon_\gamma} \right), \quad (7)$$

con las energías del electrón, ϵ_e , y del rayo gamma, ϵ_γ , en "otras" unidades:

$$\epsilon_e = \frac{E_e}{E_\gamma},$$

$$\epsilon_\gamma = \frac{E_\gamma}{m_e c^2}.$$

La forma funcional es como aparece en la Figura 3.

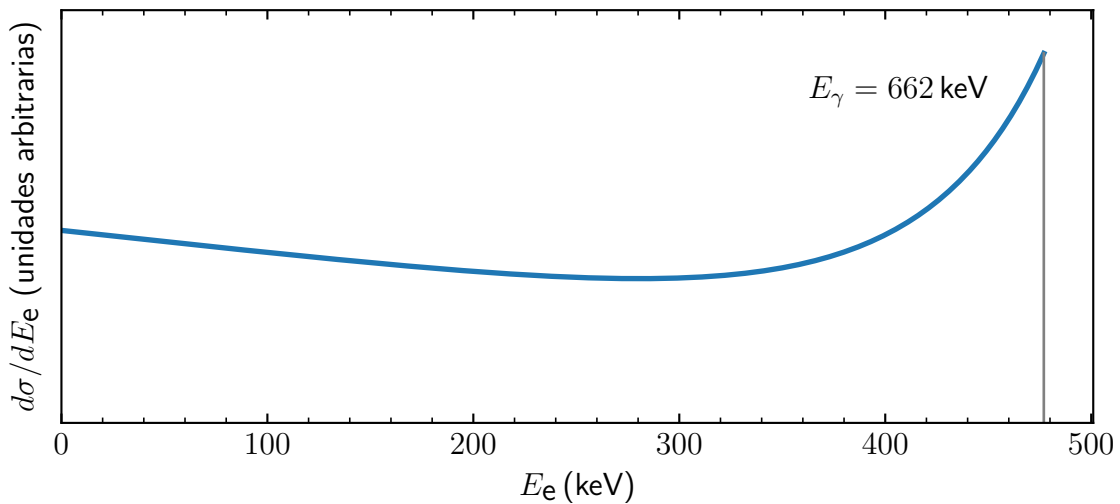


Figura 3: El fondo Compton (simple, una sola interacción) de la detección de un rayo gamma con $E_\gamma = 662$ keV si la resolución del detector fuera perfecta.

Para decidir E_e hay que discretizar esta distribución continua. Discretizar significa decidir en cuántos canales va a registrar su espectro. Supongamos que decide usar 800 canales y que cada canal tiene un ancho en

energía de 1 keV. Si asocia el canal 0 con $E_\gamma = 0$ keV, los coeficientes de la calibración canal-keV, $E_\gamma(\text{keV}) = a_0 + a_1 \times \text{canal}$ son

$$\begin{aligned} a_0 &= 0 \text{ keV} \\ a_1 &= 1 \frac{\text{keV}}{\text{canal}}. \end{aligned} \quad (8)$$

La anterior calibración quiere decir que el canal 662 contendrá el fotopico, mientras que los “eventos Compton” estarán guardados entre el canal 0 y el canal correspondiente al borde Compton E_C .

En la práctica:

1. Construya una función acumulativa con la distribución dada por la ec. (7). Ahora tendrá variables discretas desde 0 hasta E_C .
2. Monte Carlo debe decidir la energía E_e . Según la calibración (8) más arriba, tal valor corresponde al canal en el cual hay que añadir una cuenta.

Paso V. Incluya FWHM en el espectro simulado.

Una vez la energía detectada, llamémosla E_1 , haya sido decidida en el paso anterior,

$$E_1 = \begin{cases} 662 \text{ keV} & \text{fotoabsorción,} \\ E_e & \text{Compton,} \end{cases}$$

el proceso físico de registro (transporte de energía en el cristal y luego transporte de la señal en la electrónica) añade una incertidumbre en la “verdadera” energía que es finalmente registrada. La cuantificación de tal incertidumbre es FWHM.

Escriba una subrutina Monte Carlo que tome como dato de entrada la energía propuesta, E_1 , y como salida una energía aleatoriamente obtenida de una distribución gaussiana con

$$\sigma(E_1) = \frac{\text{FWHM}(E_1)}{2.35}, \quad \mu = E_1$$

$\text{FWHM}(E_\gamma)$ es la función que usted determinó para el detector de NaI en sus experiencias.

Vuelva al paso I.

Modelo B

Paso I. Primero decidimos cuál de las “interacciones” $\{f, C, \emptyset\}$ tiene lugar. Las probabilidades que le asociamos a cada una son:

$$\text{absorción fotoeléctrica: } P_f = \frac{1}{2} - \exp(-\mu_f t) \quad (9)$$

$$\text{dispersión Compton: } P_C = \frac{1}{2} - \exp(-\mu_C t) \quad (10)$$

$$\text{pasa derecho: } P_\emptyset = \exp(-\mu_f t) + \exp(-\mu_C t). \quad (11)$$

Observe que en este caso también tenemos $P_f + P_C + P_\emptyset = 1$. La primera diferencia con el Modelo A es que ahora tendremos una función acumulativa con tres variables.

2. El número aleatorio decidirá cuál de los tres “procesos” tiene lugar:

\emptyset : vuelva al Paso I.

Paso II. f: agregue una cuenta en el canal correspondiente al fotopico (Ver Paso III del Modelo A).

Paso III. C: Realice lo descrito para el Paso IV del Modelo A.

Paso IV. Una vez determine la energía del fotón detectado (por fotoabsorción o por efecto Compton) realice el Paso V del Modelo A.

EXAMEN

1. Decida cuál de los dos modelos es mejor y póngalo en práctica en un programa.

[Programa correcto que demuestra funcionar y que esté de acuerdo con las gráficas presentadas: **40 puntos**]

Añada el Manual de Operación de su software. Opciones:

- Explíquelo en el mismo texto del examen.
- Añada un archivo README.txt que lo explique.
- Agregue las líneas suficientes que lo expliquen en el caso de ipynb, py.

2. Escriba por lo menos 2 argumentos independientes (numérelolos!) aduciendo por qué el modelo que escogió es mejor que el otro. Intente “clasificar” las razones que da según su “naturaleza”, es decir, recuerde que el modelo debe involucrar tan correctamente como pueda diferentes aspectos: **[12]**

- a) Geometría del experimento.
- b) Son los diferentes procesos independientes?
- c) Los axiomas estadísticos se cumplen?
- d) El modelo no viola las suposiciones?
- e) ... ¿Qué otros aspectos?
- f) No puede usar el argumento: "Porque es más fácil de programar".

Ojo: La calificación en este punto **depende** del modelo elegido y de la manera de usar los argumentos:

- Si el modelo elegido es el incorrecto, obviamente usó mal los argumentos y la calificación en este punto es 0/12.
- Si el modelo elegido es el correcto pero no está correctamente argumentado puede dar lugar a una calificación entre 0/12 y 8/12.

3. Recuerde que el detector es un centellador de NaI. Use la base de datos del NIST y alguna otra referencia para la densidad del NaI para encontrar los coeficientes lineales de atenuación μ_C y μ_f . Anótelos en la Tabla 1. No olvide añadir las correspondientes unidades y la referencia completa de donde toma los datos. **[3]**

interacción	μ'	μ	P
f			
C			
\emptyset	—		
$\rho(\text{NaI})$			

Tabla 1: Preparación para el programa de cómputo.

μ	λ	t/λ

Tabla 2: No olvide agregar las unidades.

4. Caracterización del paso del rayo gamma a través del detector. [5]
 Reporte cuántas veces λ es la longitud del cilindro del detector, t en la Tabla 2. Basándose en los números anotados la Tabla 2, escriba por lo menos tres renglones sobre qué esperaría de la aproximación hecha en la simulación de tomar en cuenta solamente Compton Simple.
5. Envíe 10^6 fotones para construir un espectro **sin incluir el efecto del FWHM**. Compare la región Compton con la distribución teórica, ec. (7) . [8]
6. Construya otro espectro **incluyendo el efecto del FWHM**. Haga una gráfica comparándolo con el correspondiente espectro experimental. Rotule la abscisa en keVs. [12]
7. Construya otro espectro similar al que logró en el punto 6 salvo por un detalle adicional: la calibración canal-keV es la misma del espectro experimental. [15]
 - a) Normalice este espectro a la altura máxima del fondo Compton experimental.
 - b) Compare el espectro simulado con el experimental en la misma gráfica con la abscisa **en canales**.
8. Escriba por lo menos 3 observaciones acerca de las diferencias y de las similitudes entre el espectro simulado y el experimental ofreciendo razones físicas para explicarlas. [5]