Instrumentación Nuclear
SIMULACIÓN 2

Parte I: Distribución exponencial

La probabilidad de que un núcleo sobreviva sin decaer desde el instante $t = 0$ hasta el tiempo t es

$$S(t) = \exp\left(-\Gamma t\right), \tag{1}$$

con Γ la probabilidad de decaimiento por unidad de tiempo. Por lo tanto, la densidad de probabilidad $P(t)$ para que un núcleo sobreviva el tiempo t y luego decaiga durante el siguiente infinitesimal de tiempo es

$$P(t)\, dt = S(t)\, \Gamma dt. \tag{2}$$

Use esta densidad de probabilidad $P(t)$ para simular el decaimiento nuclear siguiendo el siguiente procedimiento:

1. Decida el núcleo del cual quiere simular su decaimiento. Tal elección fija el valor de Γ, τ.
2. Una vez elegido el núcleo, podrá elegir la escala Δt de discretización del tiempo. Es decir, va a suponer que cada "toma de datos" dura cuánto tiempo Δt?
3. Decida hasta qué tiempo t_{f} va a considerar que todavía hay probabilidad de decaimiento significativa. Puede, por ejemplo, basado en algún criterio, decidir que el tiempo final sucede después de cierto número n de veces la vida media,
$$t_{\mathsf{f}} = n\, \tau.$$
4. Construya la función acumulativa. Grafíquela en forma de histograma. Use para el ancho de la barra del histograma el valor de Δt que definió en el punto 2.
5. Diseñe el programa con la siguiente estrategia: Para $N(t = 0)$ núcleos decida núcleo por núcleo en qué momento decae y forme el histograma con el número de núcleos que decayeron en cada lapso de tiempo.
6. Compare en una gráfica su histograma con la predicción teórica dada por la ley de decaimiento exponencial.
7. Deje decaer 10^2, 10^3, 10^6 y 10^8 núcleos y muestre la comparación del punto anterior en los cuatro casos.

Parte II: Distribución binomial núcleo por núcleo

Va a considerar, en cada instante del rango de tiempo que usted defina, el decaimiento de un sólo núcleo. Por lo tanto en la densidad de probabilidad binomial

$$P_{\mathsf{B}}(x) = \frac{N!}{x!(N-x)!}\, p^x \left(1-p\right)^{N-x}, \tag{3}$$

el número de intentos es

$$N = 1\,. \tag{4}$$

Con un sólo intento, los únicos valores de la variable aleatoria son

$$x = \{0,\ 1\}\,. \tag{5}$$

8. Muestre detalladamente el cálculo que hace para verificar que

$$P_{\mathsf{B}}(x) = \begin{cases} 1-p & \text{si} \quad x = 0\,, \\ p & \text{si} \quad x = 1\,. \end{cases} \tag{6}$$

9. Tome el mismo núcleo y la misma discretización de tiempo que usó en la Parte I.

   Muestre cómo obtiene el valor de la probabilidad de decaer p, en un intervalo de tiempo Δt.

10. Construya y grafique en forma de histograma la función acumulativa. **Ojo!** En este caso la variable de la función acumulativa solamente tiene los dos valores de la igualdad (5) y es la misma para todo instante de tiempo.

11. La estrategia: para cada instante de tiempo $t_i = i \cdot \Delta t$ decida, por Monte Carlo, **para cada núcleo**, si decae o no decae. El número de núcleos que no hayan decaido, $N(t_i)$, son examinados en el siguiente tiempo $t_{i+1} = (i+1) \cdot \Delta t$ y así sucesivamente hasta cuando $N(t_i) = 0$.

12. Registre el número de núcleos que no hayan decaido en cada instante, $N(t_i)$.

13. Compare en una gráfica el resultado para cada número inicial N_0 (10^2, 10^3, 10^6, 10^8) la evolución en el tiempo para $N(t_i)$ dadas por las simulaciones según distribución exponencial (Parte I) y la distribución binomial.

14. Trace en cada gráfica del punto anterior la predicción teórica de la disminución exponencial.