

UNIVERSIDAD  
**NACIONAL**  
DE COLOMBIA

---

## Problemas

---

### Instrumentación Nuclear

Pedro Luis Epalza Castillo  
Juan David Hernández Pineda  
Miguel Augusto Rojas Jiménez  
Andrés Felipe Pinzón Harker

*Profesor:*

Luis Fernando Cristancho Mejia

Universidad Nacional de Colombia  
Bogotá D.C.  
Facultad de Ciencias  
16 de diciembre de 2024

# 1. La distribución uniforme

Sea  $u(x)$  la densidad de probabilidad de la forma

$$u(x) = \begin{cases} c & \text{si } x \in [a, b] \\ 0 & \text{si } x \notin [a, b] \end{cases}, \quad (1.1)$$

donde  $x$  es la variable aleatoria y  $[a, b]$  es el rango donde el valor de la distribución uniforme es  $M$ .

## 1.1. Normalización

La normalización típica está dada como

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(x) dx = 1 \quad (1.2)$$

Operando de tal manera que se cumpla la ec. 1.2 se obtiene

$$1 = \int_{-\infty}^a 0 dx + \int_a^b c dx + \int_b^{\infty} 0 dx = c(b - a)$$

En consecuencia

$$\boxed{c = \frac{1}{b - a}} \quad (1.3)$$

## 1.2. Valor Medio

Basado en la definición del *valor medio*  $\mu$  [1] como primer momento alrededor del cero definido para valores discretos de la variable aleatoria  $x$  como

$$\mu = \sum_{x=1}^n xP(x) \quad (1.4)$$

Y para valores continuos de  $x$  como

$$\mu = \int xP(x)dx \quad (1.5)$$

Siendo  $P(x) \equiv u(x)$  la *función de densidad de probabilidad*, en nuestro caso particular. A partir de lo anterior, se tiene

$$u(x) = \begin{cases} 1/(b - a) & \text{si } x \in [a, b] \\ 0 & \text{si } x \notin [a, b] \end{cases} \quad (1.6)$$

Luego, aplicando la definición se obtiene

$$\begin{aligned} \mu &= \int_a^b x \left( \frac{1}{b - a} \right) dx = \frac{x^2}{2(b - a)} \Big|_a^b \\ &= \frac{b^2 - a^2}{2(b - a)} = \frac{(b - a)(b + a)}{2(b - a)} \\ &\quad \boxed{\mu = \frac{a + b}{2}} \end{aligned} \quad (1.7)$$

### 1.3. Desviación Estándar

La *Varianza* se define como la raíz cuadrada del segundo momento alrededor de la media definido como [1]

$$\sigma = \sqrt{\int (x - \mu)^2 u(x) dx}, \quad (1.8)$$

con  $u(x)$  la densidad de probabilidad,  $\mu$  el valor esperado y  $x$  la variable aleatoria. Se conoce también el siguiente lema al respecto [1]

$$\sigma = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \mu^2} \quad (1.9)$$

Luego, basta determinar  $\langle x^2 \rangle$  como sigue

$$\begin{aligned} \langle x^2 \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 u(x) dx = \int_a^b x^2 \left( \frac{1}{b-a} \right) dx \\ &= \frac{x^3}{3(b-a)} \Big|_a^b = \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} \\ &= \frac{b^2 + ab + a^2}{3} \end{aligned} \quad (1.10)$$

Y a partir de ec. 1.9, obtenemos

$$\begin{aligned} \sigma &= \sqrt{\frac{b^2 + ab + a^2}{3} - \left( \frac{a+b}{2} \right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{4b^2 + 4ab + 4a^2 - 3a^2 - 6ab - 3b^2}{12}} \\ &= \sqrt{\frac{(b-a)^2}{12}} \end{aligned}$$

Y finalmente, la *desviación estándar* resulta

$$\boxed{\sigma = \frac{\sqrt{3}}{6} (b-a)} \quad (1.11)$$

### 1.4. Porcentaje Cubierto

El área cubierto  $A$  bajo la curva de la distribución  $u(x)$  en el rango  $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$  se calcula como

$$A = \int_{\mu-\sigma}^{\mu+\sigma} u(x) dx = c[(\mu + \sigma) - (\mu - \sigma)] = 2c\sigma$$

Y a partir de los resultados previos ec. 1.3 y ec. 1.11 resulta el área como

$$A = 2 \left( \frac{1}{b-a} \right) \left( \frac{\sqrt{3}}{6} (b-a) \right) = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad (1.12)$$

Y dado que la función es normalizada (área total  $A_T = 1$ ), podemos asegurar el porcentaje cubierto como

$$\frac{A}{A_T} 100 \% = \frac{\sqrt{3}}{3} 100 \% \approx 57.7 \% \quad (1.13)$$

## 1.5. Valores del 68 %

En un proceso análogo al ejercicio previo pero  $A = 0.68$  alrededor de la media, basta despejar  $\alpha$  en  $A = 2c\alpha$ . Esto traería la dependencia del rango (parámetros  $a$  y  $b$ ), pero podemos eliminar este término dejando  $\alpha$  como un factor proporcional de  $\sigma$  como

$$A = 2c\alpha\sigma \iff \alpha = 0.68\sqrt{3} \approx 1.18 \quad (1.14)$$

Por tanto, el rango por el cuál la probabilidad es 68 % es

$$R = [\mu - 1.18\sigma, \mu + 1.18\sigma] \quad (1.15)$$

## 1.6. Representación gráfica

Se presenta la representación gráfica de la distribución uniforme para unos valores de ejemplo en la fig. 1 a continuación

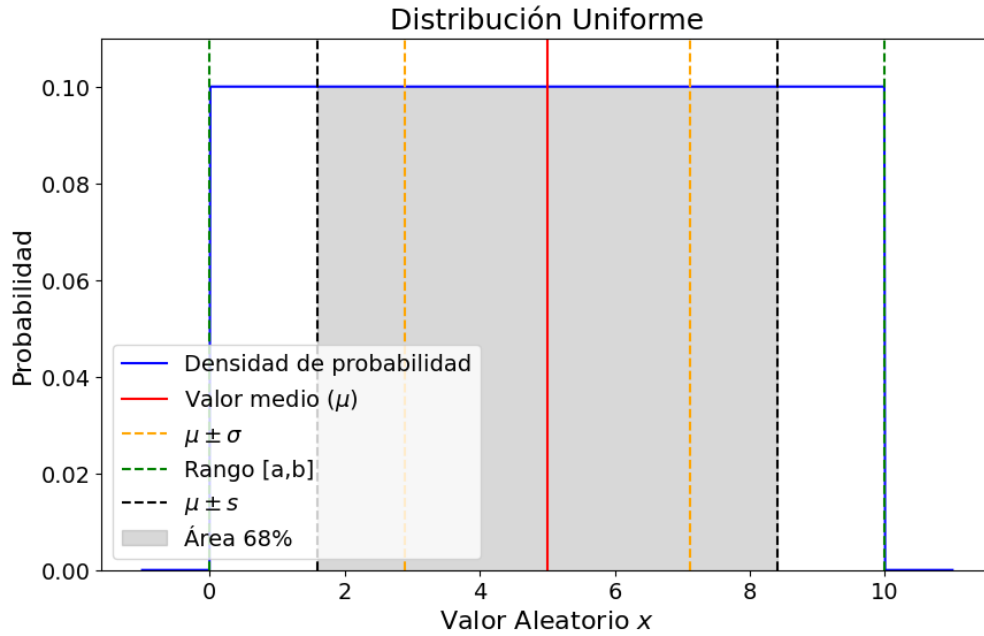


Figura 1: Distribución uniforme para valores ejemplo  $[a, b] = [0, 10]$

## 2. Los dados

Se dan las densidades de probabilidad para el dado piramidal  $P_p(x)$  y el dado cúbico  $P_c(x)$  como

$$P_c(x) = \left\{ \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6} \right\} \equiv \text{dado cúbico} \quad (2.1)$$

$$P_p(x) = \left\{ \frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{6} \right\} \equiv \text{dado piramidal} \quad (2.2)$$

## 2.1. Parámetros

Para cada distribución de probabilidad de ambos dados, se encontraron los tres primeros momentos de sus distribuciones de probabilidad calculados a través de **Python 3**. según las definiciones respectivas de la *media* (ec. 1.4), de la *desviación estándar* (ec. 1.11) y finalmente de la *asimetría*  $\tau$  [2] como

$$\tau = \frac{1}{\sigma^3} \sum_{x=1}^n (x - \mu)^3 P(x_i), \quad (2.3)$$

donde  $\mu$  es la media,  $\sigma$  la desviación estándar,  $n$  el número de datos y  $x$  la variable aleatoria. Los resultados consecuentes son

Dados	Cubico	Piramidal
$\mu$	3.5	3.25
$\sigma$	1.71	1.69
$\tau$	0.0	0.33

Considerando el siguiente código fuente donde se encontraron los resultados previos

### 2.1.1. Código Dado Cúbico

---

```
1 valores = np.array([1, 2, 3, 4, 5, 6])
2 probabilidades = np.ones(6) / 6 # Probabilidad uniforme para cada valor
3
4 # Primer momento: media (valor esperado)
5 media = np.sum(valores * probabilidades)
6
7 # Segundo momento: varianza y desviación estándar
8 varianza = np.sum((valores - media) ** 2 * probabilidades)
9 desviacion_estandar = np.sqrt(varianza)
10
11 # Tercer momento: asimetría
12 asimetria = np.sum((valores - media) ** 3 * probabilidades) / (desviacion_estandar**3)
13
14 # Graficamos la distribución de probabilidad
15 plt.scatter(
16     valores,
17     probabilidades,
18     marker="o",
19     color="magenta",
20     edgecolors="blue",
21     linewidths=0.6,
22 )
23
24 # Media
25 plt.axvline(media, color="red", linestyle="--", label=f"$\mu$ = {media:.2f}")
26
```

```

27  # Marcamos el radio de la desviación estándar
28  plt.axvline(
29      media - desviacion_estandar,
30      color="#3953b2",
31      linestyle="--",
32      label=f"$\mu - \sigma$ = {media - desviacion_estandar:.2f}",
33  )
34  plt.axvline(
35      media + desviacion_estandar,
36      color="#3953b2",
37      linestyle="--",
38      label=f"$\mu + \sigma$ = {media + desviacion_estandar:.2f}",
39  )
40
41  # Graficar la asimetría como una línea vertical
42  plt.axvline(
43      media + asimetria * desviacion_estandar,
44      color="#165700",
45      linestyle="--",
46      label=f"$t$ = {asimetria:.2f}",
47  )
48
49  # Título y etiquetas
50  plt.title("Distribución de Probabilidad Dado Cúbico", pad=14, fontsize=18)
51  plt.xlabel("Valor Aleatorio $x$", fontsize=16)
52  plt.ylabel("Probabilidad", fontsize=16)
53  plt.legend()

```

---

### 2.1.2. Código Dado Piramidal

---

```

1  # Definimos los valores del dado y su probabilidad
2  valores = np.array([1, 2, 3, 4, 5, 6])
3  probabilidades = np.ones(6) / 6  # Probabilidad uniforme para cada valor
4  probabilidades[1] += 1 / 12
5  probabilidades[4] -= 1 / 12
6
7  # Primer momento: media (valor esperado)
8  media = np.sum(valores * probabilidades)
9
10 # Segundo momento: varianza y desviación estándar
11 varianza = np.sum((valores - media) ** 2 * probabilidades)
12 desviacion_estandar = np.sqrt(varianza)
13
14 # Tercer momento: asimetría
15 asimetria = np.sum((valores - media) ** 3 * probabilidades) / (desviacion_estandar**3)
16

```

```

17  # Graficamos la distribución de probabilidad
18  plt.figure(figsize=(10, 6))
19  plt.scatter(
20      valores,
21      probabilidades,
22      marker="o",
23      color="magenta",
24      edgecolors="blue",
25      linewidths=0.6,
26      s=9**2,
27  )
28
29  # Media
30  plt.axvline(media, color="red", linestyle="--", label=f"$\\mu$ = {media:.2f}")
31
32  # Marcamos el radio de la desviación estándar
33  plt.axvline(
34      media - desviacion_estandar,
35      color="#3953b2",
36      linestyle="--",
37      label=f"$\\mu - \\sigma$ = {media - desviacion_estandar:.2f}",
38  )
39  plt.axvline(
40      media + desviacion_estandar,
41      color="#3953b2",
42      linestyle="--",
43      label=f"$\\mu + \\sigma$ = {media + desviacion_estandar:.2f}",
44  )
45
46  # Graficar la asimetría como una línea vertical
47  plt.axvline(
48      media + asimetria * desviacion_estandar,
49      color="#165700",
50      linestyle="--",
51      label=f"$t$ = {asimetria:.2f}",
52  )
53
54  # Título y etiquetas
55  plt.title("Distribución de Probabilidad de un Dado Piramidal", pad=14, fontsize=18)
56  plt.xlabel("Valor Aleatorio $x$", fontsize=16)
57  plt.ylabel("Probabilidad", fontsize=16)
58  plt.legend()

```

---

## 2.2. Gráficas

Se grafican las distribuciones para cada dado junto con los parámetros que la caracterizan

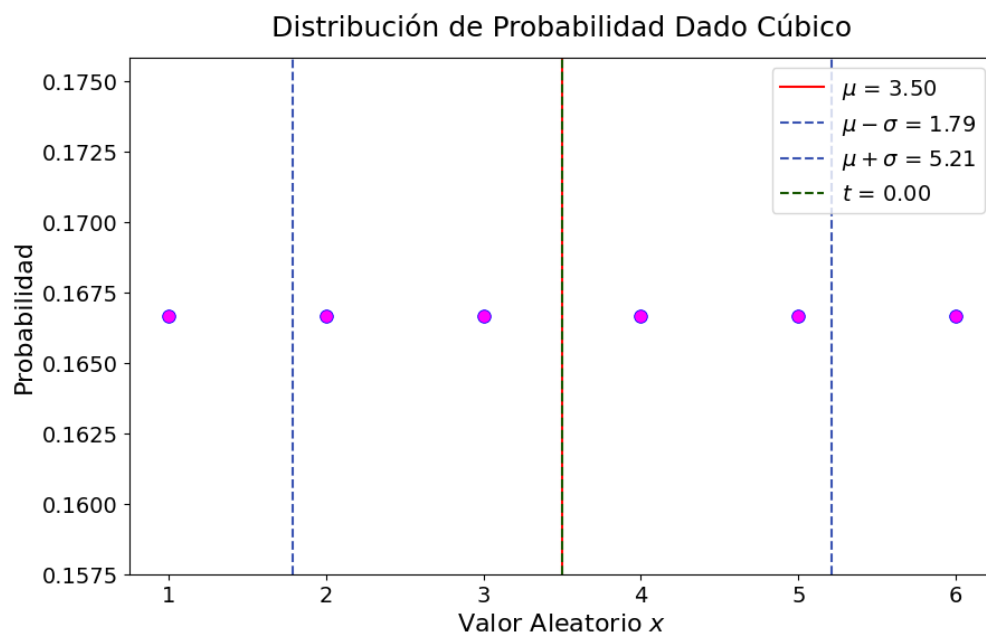


Figura 2: Distribución de probabilidad para dado cúbico calibrado con parámetros determinados.

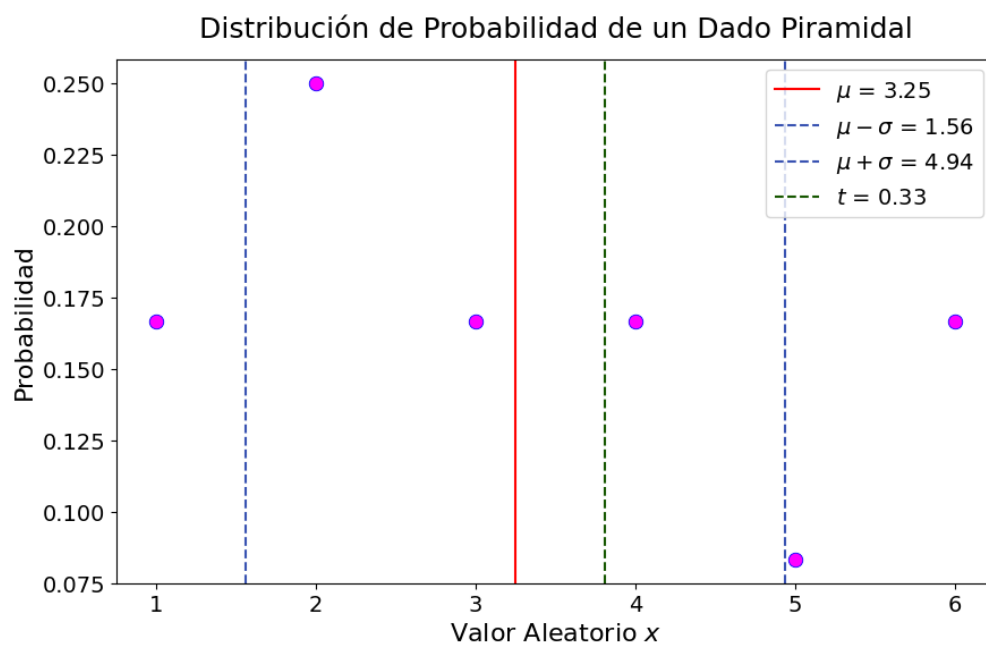


Figura 3: Distribución de probabilidad para dado piramidal de ejemplo con parámetros determinados.



### 3. Histograma

#### 3.1. Parámetros

A partir de los  $N = 200$  datos obtenidos por la secuencia de voltajes  $V_i$  en mV, se obtiene la descripción de los datos en con los parámetros de tendencia media deducidos a continuación

(a) **Media:** A partir de las ecs. 1.7 se calcula la media discreta como

$$\mu = \frac{1}{200} \sum_{i=1}^{200} V_i = 7501.8 \text{ mV} \quad (3.1)$$

(b) A partir de la ec. 1.11 de la desviación estándar, se obtiene

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{200} \sum_{i=1}^{200} (\mu - V_i)^2} = 26.7 \text{ mV} \quad (3.2)$$

#### 3.2. Gráficas

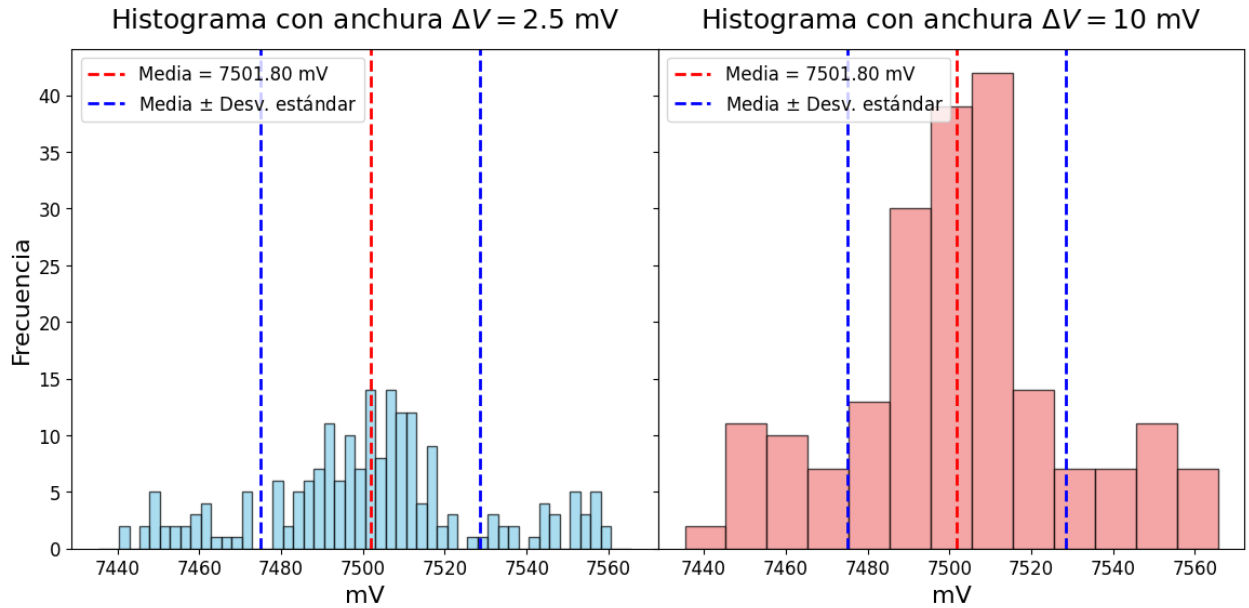


Figura 4: Histograma comparativo respecto la anchura de las barras  $\Delta V$

#### 3.3. Alternativas de Cálculo

Empleando las formulas definidas para la media  $\mu$  y la varianza  $\sigma^2$  para datos agrupados:

$$\mu = \frac{1}{\sum f_j} \sum_{j=1}^N V_j f_j \quad (3.3)$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{\sum f_j} \sum_{j=1}^N (V_j - \mu)^2 f_j \quad (3.4)$$

Obtenemos que evaluando los 2 casos enunciados en el numeral anterior:

(a) Para  $\Delta V_1 = 2.5\text{mV}$

- $\mu_1 = 7501.84\text{mV}$
- $\sigma_1 = 26.78\text{mV}$

(b) Para  $\Delta V_2 = 10\text{mV}$

- $\mu_2 = 7502.10\text{mV}$
- $\sigma_2 = 26.95\text{mV}$

### 3.4. Tabulacion

Caso	$\mu$ (mV)	$\sigma$ (mV)
Valores originales	7501.80	26.74
Histograma $\Delta V = 2.5$ mV	7501.84	26.78
Histograma $\Delta V = 10$ mV	7502.10	26.95

Tabla 1: Valores de  $\mu$  y  $\sigma$  en diferentes casos

### 3.5. Código plots y cálculos $\mu$ y $\sigma$

---

```
1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3
4 # Conjunto de datos
5 datos = np.array([
6     7521.2, 7556.1, 7478.0, 7495.1, 7487.3, 7488.2, 7508.6, 7510.6, 7488.1, 7537.9,
7     7452.8, 7502.0, 7487.7, 7490.2, 7515.8, 7514.9, 7501.4, 7551.5, 7502.7, 7501.8,
8     7492.2, 7512.9, 7494.7, 7533.0, 7501.3, 7522.4, 7480.9, 7442.3, 7530.9, 7535.3,
9     7545.7, 7503.8, 7511.2, 7509.1, 7517.9, 7545.4, 7516.0, 7495.8, 7496.9, 7505.9,
10    7507.1, 7441.3, 7478.9, 7491.3, 7506.7, 7493.8, 7510.7, 7485.0, 7481.0, 7544.0,
11    7559.7, 7491.6, 7503.0, 7496.1, 7460.5, 7558.1, 7508.5, 7470.3, 7500.8, 7449.0,
12    7511.5, 7495.1, 7504.3, 7513.1, 7499.9, 7511.6, 7486.0, 7502.7, 7490.2, 7459.4,
13    7551.9, 7502.3, 7485.4, 7452.3, 7459.1, 7553.6, 7495.6, 7508.6, 7500.8, 7551.3,
14    7502.1, 7506.9, 7510.6, 7557.2, 7512.8, 7484.9, 7506.3, 7490.7, 7500.5, 7501.4,
15    7461.8, 7514.7, 7456.0, 7491.0, 7462.5, 7508.9, 7480.2, 7488.5, 7506.8, 7515.9,
16    7457.8, 7498.6, 7478.0, 7506.6, 7448.3, 7536.0, 7508.2, 7510.5, 7496.0, 7446.8,
17    7489.9, 7461.9, 7498.4, 7497.7, 7528.4, 7495.9, 7511.6, 7500.6, 7507.1, 7464.2,
18    7494.0, 7455.4, 7480.4, 7470.9, 7499.7, 7447.1, 7497.7, 7503.3, 7504.1, 7517.7,
19    7515.7, 7508.4, 7518.7, 7558.6, 7509.3, 7516.8, 7487.6, 7506.4, 7505.1, 7509.0,
20    7493.3, 7510.5, 7499.6, 7505.5, 7496.2, 7505.0, 7514.4, 7507.5, 7554.4, 7552.2,
21    7472.6, 7532.6, 7557.1, 7490.8, 7458.7, 7491.9, 7516.0, 7547.7, 7510.6, 7558.0,
22    7491.0, 7488.2, 7449.5, 7521.4, 7472.4, 7510.8, 7466.0, 7527.0, 7491.1, 7546.2,
23    7507.6, 7519.2, 7507.1, 7534.4, 7487.1, 7492.2, 7542.2, 7449.2, 7498.6, 7470.8,
24    7550.7, 7510.7, 7506.7, 7499.6, 7479.7, 7509.1, 7507.2, 7470.7, 7545.4, 7504.8,
```

```

25     7483.4, 7497.9, 7483.6, 7450.1, 7517.2, 7490.7, 7544.2, 7487.1, 7455.1, 7553.8
26 ])
27
28
29
30 # Rango de voltajes (mínimo y máximo con un 5% de margen)
31 v_min = min(datos)
32 v_max = max(datos)
33 margen = 0.05 * (v_max - v_min)
34 rango_min = v_min - margen
35 rango_max = v_max + margen
36
37 # Cálculo del valor medio y desviación estándar no agrupados
38 def calc_media_std(datos):
39     valor_medio = np.mean(datos)
40     desviacion_estandar = np.std(datos)
41     return(valor_medio,desviacion_estandar)
42
43 # Cálculo media y desviación estándar agrupados
44 def calc_media_std_por_barras(hist, bin_edges):
45     # Puntos medios de los bins
46     bin_mids = 0.5 * (bin_edges[1:] + bin_edges[:-1])
47     # Media ponderada
48     media = np.sum(hist * bin_mids) / np.sum(hist)
49     # Desviación estándar ponderada
50     varianza = np.sum(hist * (bin_mids - media) ** 2) / np.sum(hist)
51     desviacion_std = np.sqrt(varianza)
52     return media, desviacion_std
53
54
55 # Medidas sin agrupar
56 media, std = calc_media_std(datos)
57 print(f"Media sin agrupar: {media:.2f} mV")
58 print(f"Desviación estándar sin agrupar: {std:.2f} mV")
59
60 # Configuración del histograma con delta de 2.5 y 10
61 delta1 = 2.5
62 delta2 = 10
63 num_bins1 = int((rango_max - rango_min) / delta1)
64 num_bins2 = int((rango_max - rango_min) / delta2)
65
66 # Crear figuras para los dos histogramas
67 fig, axs = plt.subplots(1, 2, figsize=(14, 6), sharey=True)
68 plt.subplots_adjust(wspace=0)
69
70
71 # Histograma con delta = 2.5

```

```

72 hist1, bin_edges1, _ = axs[0].hist(datos, bins=num_bins1, range=(rango_min, rango_max), density=False, a
73 media1, std1 = calc_media_std_por_barras(hist1, bin_edges1)
74 print(f"Media con delta = 2.5: {media1:.2f} mV")
75 print(f"Desviación estándar con delta = 2.5: {std1:.2f} mV")
76 axs[0].axvline(media, color='red', linestyle='--', lw = 2, label=f'Media = {media:.2f} mV')
77 axs[0].axvline(media - std, color='blue', linestyle='--', lw = 2, label=f'Media $\pm$ Desv. estándar')
78 axs[0].axvline(media + std, color='blue', linestyle='--', lw = 2)
79 axs[0].set_title("Histograma con anchura $\Delta V = 2.5$ mV", pad = 14, fontsize = 18)
80 axs[0].set_xlabel("mV", fontsize=16)
81 axs[0].set_ylabel("Frecuencia", fontsize=16)
82 axs[0].legend()
83
84 # Histograma con delta = 10
85 hist2, bin_edges2, _ = axs[1].hist(datos, bins=num_bins2, range=(rango_min, rango_max), density=False, a
86 media2, std2 = calc_media_std_por_barras(hist2, bin_edges2)
87 print(f"Media con delta = 10: {media2:.2f} mV")
88 print(f"Desviación estándar con delta = 10: {std2:.2f} mV")
89 axs[1].axvline(media, color='red', linestyle='--', lw = 2, label=f'Media = {media:.2f} mV')
90 axs[1].axvline(media - std, color='blue', linestyle='--', lw = 2, label=f'Media $\pm$ Desv. estándar')
91 axs[1].axvline(media + std, color='blue', linestyle='--', lw = 2)
92 axs[1].set_title("Histograma con anchura $\Delta V = 10$ mV", pad = 14, fontsize = 18)
93 axs[1].set_xlabel("mV", fontsize=16)
94 axs[1].legend()
95
96
97 plt.suptitle

```

---

## 4. Lecturas de Detector Geiger-Müller

Se tienen los datos de un detector Geiger-Müller con el cual se puede determinar el número de detecciones,  $d$ , de radiación ionizante en el tiempo que haya fijado. La tabla 2 muestra los resultados de 10 mediciones.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d (cuentas)	147	152	153	171	146	168	145	133	168	171

Tabla 2: Cuentas de radiación ionizante.

### 4.1. Valores de incertidumbre

De la tabla 2 se hallan las incertidumbres como se muestra en la ecuación 4.1, los valores se muestran en la tabla 3.

$$\sigma_i = \sqrt{d_i} \quad (4.1)$$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d (cuentas)	147	152	153	171	146	168	145	133	168	171
$\sigma$ (cuentas)	12.12	12.33	12.37	13.08	12.08	12.96	12.04	11.53	12.96	13.08

Tabla 3: Cuentas de radiación ionizante con su incertidumbre por medición.

## 4.2. Representación incertidumbre

Se representa gráficamente los datos obtenidos en la tabla 3 en la figura 5.

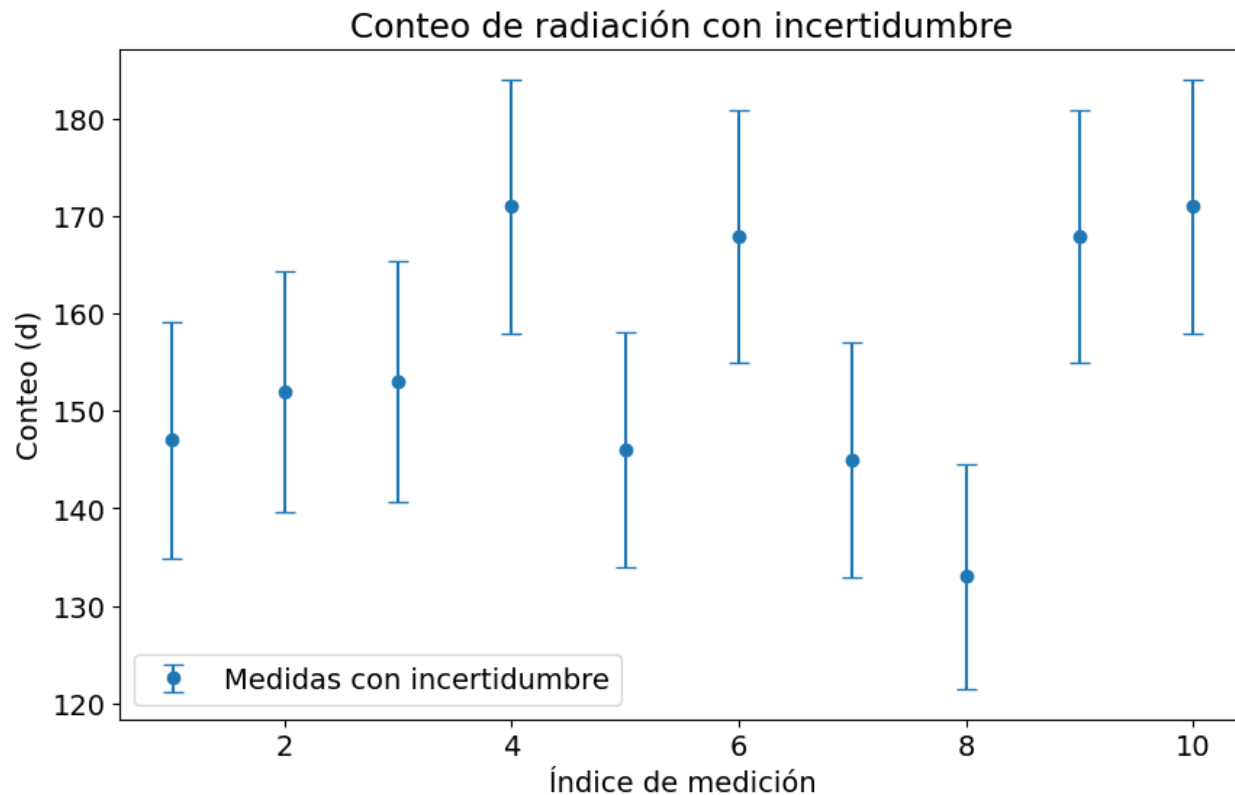


Figura 5: Cuentas de radiación ionizante con su incertidumbre respectiva.

## 4.3. Valor medio

Para hallar el valor medio del conteo se usó la ecuación 4.2, luego en la figura 6 se muestra gráficamente los valores con sus incertidumbres y valor medio.

$$\mu = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N d_i \quad (4.2)$$

Donde  $N$  es la cantidad total de datos y  $d_i$  el número de detecciones en la medida  $i$ .

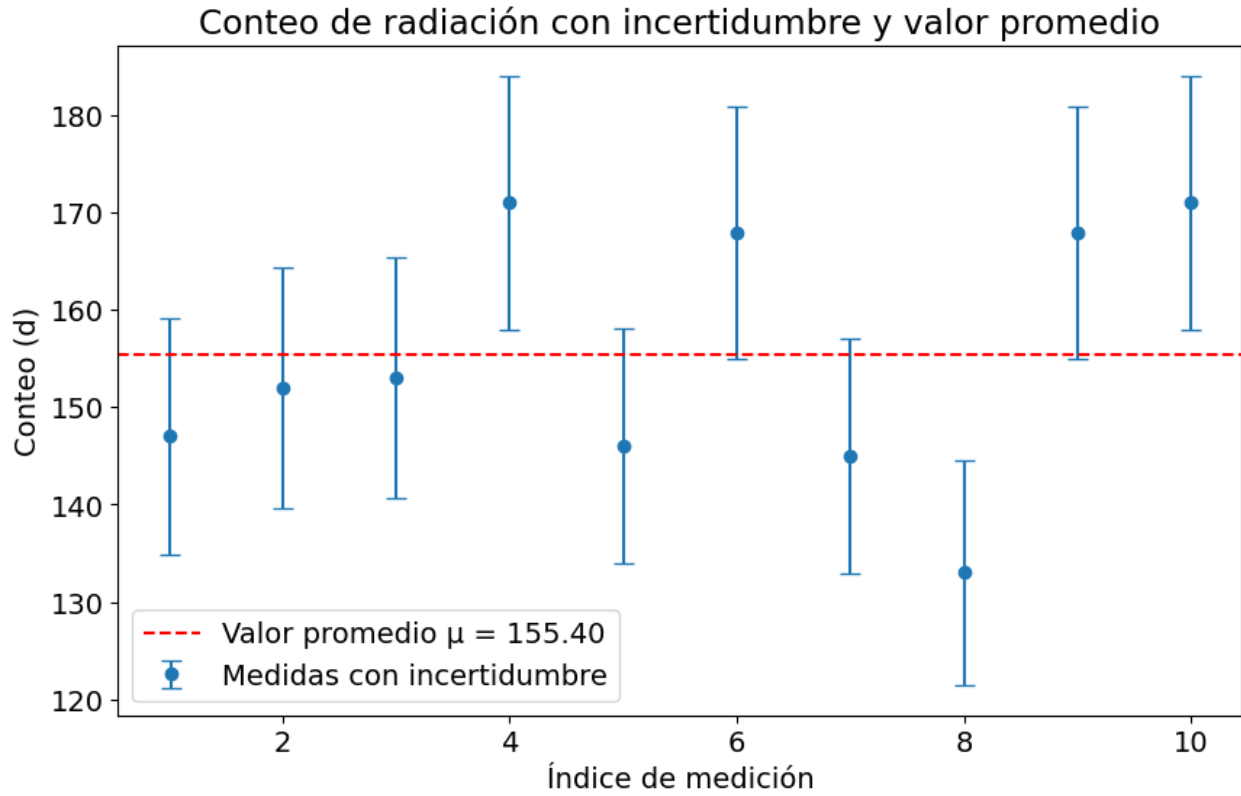


Figura 6: Cuentas de radiación ionizante con su incertidumbre respectiva y valor medio.

#### 4.4. Incertidumbre por valor medio

La incertidumbre hallada por el valor medio es justamente la desviación estándar, la cual se halla como se muestra en la ecuación 4.3, el valor obtenido fue de **13.29 cuentas** para los datos trabajados.

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (d_i - \mu_i)^2}{N - 1}} \quad (4.3)$$

#### 4.5. Incertidumbre propagada

Para hallar la incertidumbre del valor promedio por medio de la propagación de incertidumbres, se usó la ecuación 4.4, el valor obtenido fue de **12.47 cuentas**.

$$\sigma_p = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (\sigma_i)^2}{N}} \quad (4.4)$$

Los valores de  $\sigma$  y  $\sigma_p$  no deberían ser iguales, dado que se obtienen de formas diferentes, la primera depende de las diferencias entre los datos y su promedio, y la segunda depende de las incertidumbres individuales ( $\sigma_i$ ) asociadas a cada medición.

#### 4.6. Representación final

Con el valor de la incertidumbre por el valor medio, se puede representar gráficamente esta, se muestra en la figura 7. Se observa que hay 7 datos de 10 que están dentro de la incertidumbre

( $\sigma_{media}$ ), lo que demuestra una buena toma de datos, es decir no hay tanta dispersión y se puede tener confianza en los datos medidos.

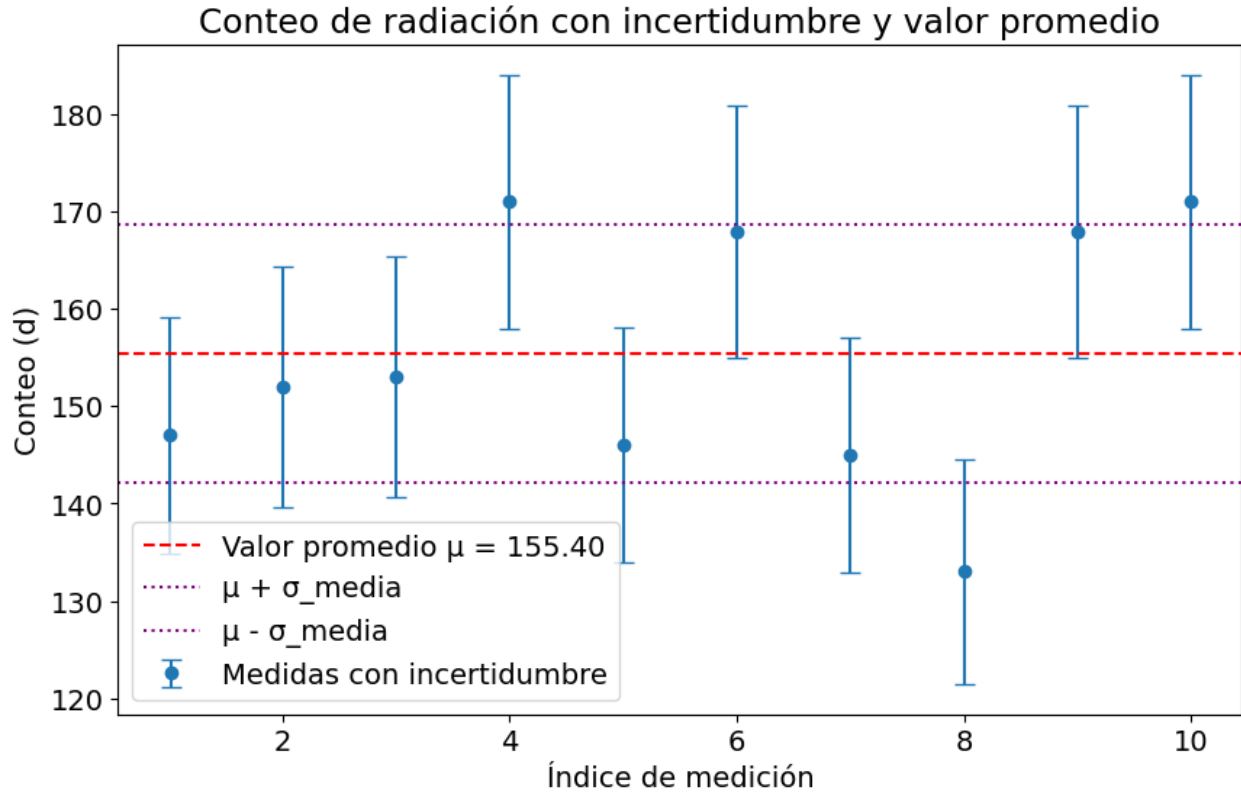


Figura 7: Cuentas de radiación ionizante con su incertidumbre respectiva, valor medio y su incertidumbre.

## 5. Ajustes y Chi Cuadrado

Los datos experimentales de tiempo  $t$  y desplazamiento  $x$  referentes a un objeto móvil son reportados en la siguiente Tabla:

$t(s)$	$x(cm)$	$\sigma(x)(cm)$
6.5	3.2	1.2
9.3	9.7	2.1
14.6	11.3	3.6

Teniendo presente la relación lineal entre  $x$  y  $t$  procedemos con la siguiente ecuación.

$$x(t) = a_0 + a_1 t$$

La idea ahora es encontrar los parametros de  $a_0, a_1$  considerando los siguientes casos

### 5.1. Caso A

Ajustando la línea recta de tal manera que pase exactamente por los dos primeros puntos.

$$t(s) = \{6.5, 9.3\}$$

## 5.2. Caso B

Ajustando la línea recta de tal manera que pase exactamente por el primero y el último punto.

$$t(s) = \{6.5, 14.6\}$$

## 5.3. Caso C

Ajustando la línea por minimización de  $\chi^2$ .

## 5.4. caso D

Se considera  $\sigma(x = 11.3s) = 30.0cm$  en el ultimo dato ( $t=14.6s$ )

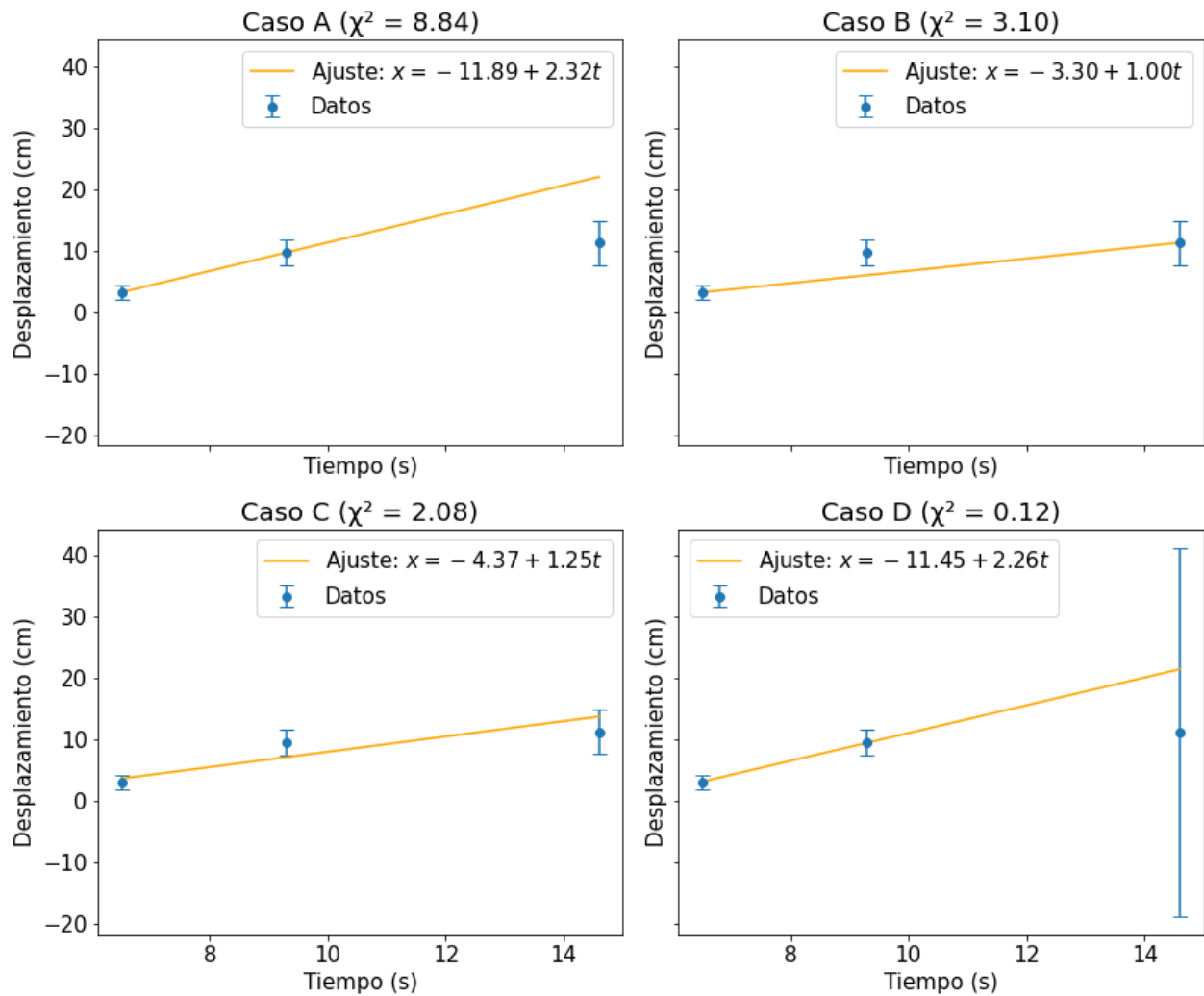


Figura 8: Casos de estudio

Para los respectivos cálculos de las variables anteriormente mencionadas se hace lo siguiente:

- para  $a_1$

$$a_1 = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$



- para  $a_0$

$$a_0 = x_1 - a_1 t_1$$

- para  $\chi^2$

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \hat{x}_i)^2}{\sigma_{x_i}^2}$$

Cuyos resultados podemos observar en la siguiente tabla (Nota: en el caso C se hace un ajuste de mínimos cuadrados y en el caso de D se considera  $\sigma(x = 11.3s) = 30.0cm$  en el ultimo dato ( $t=14.6s$ ) los cuales tambien fueron ajustados) :

Caso	$a_0(cm)$	$a_1(cm/sg)$	$\chi^2$
A	-11.89	2.32	8.84
B	-3.30	1.00	3.10
C	-4.37	1.25	2.08
D	-11.45	2.26	0.12

En el caso de C se realiza con mínimos cuadrados ponderados, que la incertidumbre se ve limitada por el ajuste. En el caso D al aumentar la incertidumbre en 30 cm, el cual al ponderar produce a su vez menos incertidumbre.

En conclusión la calidad del ajuste se ve al aumentar la incertidumbre y con ello su impacto en el ajuste disminuye.

## 6. Decaimiento del Cesio

### 6.1. Decaimiento a rayos gamma

Al decaer  $N = 10^3$  núcleos de  $^{137}\text{Cs}$ , según el diagrama fig. 2 de la referencia [2], notamos que solo 94.4 %, es decir, alrededor de 944 núcleos se desintegran a un estado excitado ( $11/2^-$ ) del  $^{137}_{56}\text{Ba}$ .

A partir de este punto solo 85.1 % se producen rayos  $\gamma$ , a lo cual

$$944 \times 85.1 \% \approx 803, \quad (6.1)$$

donde alrededor de 803 núcleos producen rayos  $\gamma$

### 6.2. Decaimiento por Conversión Interna (CI)

El restante de los núcleos se des-excitan por conversión interna a través del efecto de interacción del núcleo con las cáps del átomo emitiendo un  $e^-$ , este restante es

$$944 - 803 \approx 141 e^- \quad (6.2)$$

### 6.3. Emisión rayos X

Dado que la emisión de cada electrón  $e^-$  emitido por conversión interna produce un rayo X de 33 keV, el número de estos rayos es el mismo que en el caso anterior

$$141 \text{ rayos X} \quad (6.3)$$

## 6.4. Actividad

La unidad estandarizada internacional para la actividad  $A_c$  de una fuente es el *Bequerelio* (Bq), siendo esta las actividades por segundo que tenga una fuente. La relación con el sistema de *Curios* (Ci) es la siguiente

$$1 \text{ Ci} = 37 \text{ GBq} = 37 \times 10^9 \text{ Bq} \quad (6.4)$$

Se estudia una fuente típica de actividad  $A = 1 \text{ }\mu\text{Ci}$ , equivalente a  $A = 37 \times 10^3 \text{ Bq}$ . Conocemos que solo un porcentaje de esa actividad emite rayos  $\gamma$  como fue mostrado, dado que no hay otro camino para que emita rayos gamma que no sean de energía  $E = 661.7 \text{ keV}$ .

Para determinar la equivalencia, se toma la actividad y el porcentaje concatenado

$$A_\gamma = 37 \times 10^3 \text{ Bq} \times 94.4 \% \times 85.1 \% = 29.7 \times 10^3 \text{ Bq} \quad (6.5)$$

Finalmente, la actividad  $\gamma$  en curies es  $A_\gamma = 0.803 \text{ }\mu\text{Ci}$ .

## 7. Flujo de Agua a Través de Capilares

La descripción física del sistema del problema 7, descrita por los parámetros de altura instantánea  $h$ , radio del capilar  $r$  y largo del capilar  $L$  se encuentra descrita por la *ley de Poiseuille* a continuación

$$Q = \frac{\pi \rho g h r^4}{8 \mu L}, \quad (7.1)$$

con la aceleración de la gravedad  $g$ , densidad  $\rho$ , viscosidad del agua  $\eta$  y  $Q$  cambio de volumen por unidad de tiempo. Se asume que el esquema es estático, luego  $r, L \sim cte$

### 7.1. Ecuación Diferencial

Se puede explicar esta relación partiendo de la definición del cambio de volumen  $Q$  [3], tal como

$$Q = \frac{dV}{dt}, \quad (7.2)$$

valida para fluido incompresible y asumiendo  $\mu, g, \rho, r \sim cte$  dado que el enfoque es el estudio de este sistema bajo condiciones ideales.

Dado lo anterior, también se puede asumir la relación  $\rho = m/V$  con  $m$  siendo la masa del liquido instantánea, obtenemos la relación

$$\rho = m/V \quad \Longleftrightarrow \quad \rho dV = dm \quad (7.3)$$

Además, el factor restante de la altura  $h(t) \equiv h$  dependiente del tiempo, se puede dar en términos de la masa a través de la relación previa ec. 7.3 con la geometría del cilindro como

$$m = V\rho = h\mathcal{A}\rho \quad \Longleftrightarrow \quad h = \frac{m}{\mathcal{A}\rho}, \quad (7.4)$$

donde  $\mathcal{A}$  es el área seccional del cilindro.

A partir de la relación entre masa y volumen ec. 7.3 y las relaciones ec. 7.1 y 7.4 obtenemos la descripción de la masa respecto el tiempo

$$\begin{aligned}
 \frac{dm}{dt} &= \rho \frac{dV}{dt} = \rho \frac{\pi \rho g h r^4}{8 \mu L} \\
 &= \frac{m}{A \rho} \frac{\pi \rho^2 g r^4}{8 \mu L} \\
 &= - \left( - \frac{\pi \rho g r^4}{8 \mathcal{A} \mu L} \right) m \\
 &= -\Gamma m
 \end{aligned} \tag{7.5}$$

Así, lo hemos reducido a la forma requerida.

## 7.2. Tiempo de desocupación

Dado que la relación de los parámetros de un decaimiento exponencial es bien estudiado [2], reconocemos que el factor de *vida media*  $\tau$  está relacionado con  $\Gamma$  como

$$\tau = \frac{1}{\Gamma} = - \frac{8 \mathcal{A} \mu L}{\pi \rho g r^4} \tag{7.6}$$

Suponiendo:

- Radio del capilar  $r = 0.1 \text{ cm} = 10^{-3} \text{ m}$ .
- Largo del capilar  $L = 10 \text{ cm} = 10^{-1} \text{ m}$
- Área seccional del recipiente  $A = 10 \text{ cm}^2 = 10^{-3} \text{ m}^2$
- Viscosidad  $\mu = 10^{-3} \text{ Pa s}$
- Aceleración de la gravedad  $g = -9.8 \text{ m s}^{-2}$
- Densidad del agua  $\rho = 997 \text{ kg m}^{-3}$

El cálculo explícito resulta

$$\tau = - \frac{8(10^{-3} \text{ m})(10^{-3} \text{ Pa s})(10^{-1} \text{ m})}{\pi(997 \text{ kg m}^{-3})(-9.8 \text{ m s}^{-2})(10^{-3} \text{ m})^4} \approx 26.1 \text{ s} \tag{7.7}$$

## 7.3. Reducido a la mitad

El contenido total se reduce a la mitad en un tiempo de *semi-vida*  $T_{1/2}$ , este se deduce de la siguiente manera: se calcula la mitad del contenido inicial en base a la solución a la ec. 7.5 diferencial

$$m(t) = M_0 \exp -\gamma t \implies 1/2 M_0 = M_0 \exp (-T_{1/2}/\tau) \tag{7.8}$$

$$\ln 1/2 = - \frac{T_{1/2}}{\tau} \tag{7.9}$$

$$T_{1/2} = \tau \ln 2 \tag{7.10}$$

$$= \ln 2(26.1 \text{ s}) \approx 18.1 \text{ s} \tag{7.11}$$

Luego, en aproximadamente 18.1 s se reduce a la mitad la masa inicial  $M_0$ , y de manera proporcional, la mitad del volumen.

## 7.4. Problema

Dado un recipiente con contiene agua y en él dos orificios capilares, el cambio de la masa dado este otro orificio es la suma de los cambios tal como

$$\frac{dm}{dt} = -\Gamma_1 m - \Gamma_3 m = -(\Gamma_1 + \Gamma_3)m = -\Gamma_2 m, \quad (7.12)$$

dado  $\Gamma_3$  la proporción en que cambia la rata de cambio de masa del sistema solamente con el orificio desconocido de radio  $r_3$ .

Dado que tengo  $\tau_1$  del ejercicio anterior y  $\tau_2$  por suposición, basta determinar  $\tau_3$  para poder despejar  $r_3$  en la ec. 7.6. La relación explicita

$$\Gamma_1 + \Gamma_3 = \Gamma_2$$

Permite asegurar que

$$1/\tau_1 + 1/\tau_3 = 1/\tau_2,$$

gracias a la ec. 7.6. Luego de aquí concluimos que

$$\tau_3 = \frac{\tau_1 \tau_2}{\tau_2 - \tau_1} = \frac{(26.1 \text{ s})(10 \text{ s})}{26.1 \text{ s} - 10 \text{ s}} \approx 16.2 \text{ s} \quad (7.13)$$

A partir del resultado ec. 7.13, además de que las propiedades del líquido (viscosidad, etc.) y del contenedor son las mismas, obtenemos

$$\tau_3 = -\frac{8A\mu L}{\pi\rho g r^4} \iff r = \sqrt[4]{-\frac{8A\mu L}{\pi\rho g \tau_3}} \approx 1.13 \times 10^{-3} \text{ m}$$

O lo que es lo mismo, el radio del otro orificio  $r_3$  será entonces

$$r_3 = 0.113 \text{ cm} \quad (7.14)$$

## 8. La distribución exponencial

### 8.1. Demostración

La probabilidad de que un núcleo no haya decaído en el tiempo  $t$  está dada por la función exponencial decreciente:

$$S(t) = \exp(-\Gamma t) \quad (8.1)$$

Donde  $\Gamma$ , medida en tiempo<sup>-1</sup>, es la tasa de decaimiento, o probabilidad por unidad de tiempo de que ocurra el decaimiento. La densidad de probabilidad  $P(t)$  de que el núcleo decaiga en un pequeño intervalo  $dt$  después de haber sobrevivido hasta el tiempo  $t$  está dada por:

$$P(t) = (\text{Probabilidad de decaer en } dt) \times (\text{Probabilidad de haber sobrevivido hasta } t)$$

La probabilidad de haber sobrevivido hasta  $t$  es  $S(t)$  y la probabilidad de decaer en el intervalo  $dt$  es proporcional a  $\Gamma dt$ . Entonces, se puede expresar como:

$$P(t)dt = \Gamma dt S(t) \quad (8.2)$$

Simplificando el  $dt$  y reemplazando a  $S(t)$ , la densidad de probabilidad finalmente queda como:

$$P(t) = \Gamma \exp(-\Gamma t) \quad (8.3)$$

## 8.2. Normalización

Para demostrar que la densidad de probabilidad 8.3 está normalizada, se realiza la integral 8.4.

$$\int_0^{\infty} P(t) dt = 1 \quad (8.4)$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} P(t) dt &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \Gamma \exp(-\Gamma t) dt \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{\Gamma \exp(-\Gamma t)}{-\Gamma} \Big|_0^b \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} -[\exp(-\Gamma b) - \exp(0)] \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} -\exp(-\Gamma b) + 1 = 1 \end{aligned} \quad (8.5)$$

Con el resultado obtenido en 8.5 queda demostrado que la densidad de probabilidad está normalizada.

## 8.3. Valor medio del tiempo de decaimiento

Para hallar el valor medio de decaimiento  $\langle t \rangle$ , es hallar el valor esperado de  $t$  [4] mostrado en 8.6.

$$\langle t \rangle = \int_0^{\infty} t P(t) dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \Gamma \int_0^b t \exp(-\Gamma t) dt \quad (8.6)$$

La integral se puede resolver usando integración por partes, tomando  $u = \Gamma t$ ,  $du = \Gamma dt$ ,  $dv = e^{-\Gamma t} dt$  y  $v = -e^{-\Gamma t} / \Gamma$ , al sustituir queda:

$$\begin{aligned} \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ -t \exp(-\Gamma t) \Big|_0^b + \int_0^b \exp(-\Gamma t) dt \right] &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ -(be^{-bt} - 0) - \frac{e^{-\Gamma t}}{\Gamma} \Big|_0^b \right] \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ -be^{-bt} - \frac{e^{-bt}}{\Gamma} + \frac{e^0}{\Gamma} \right] \\ \langle t \rangle &= \frac{1}{\Gamma} \end{aligned} \quad (8.7)$$

## 8.4. Función acumulativa

Para poder hallar la función acumulativa se plantea como:

$$\begin{aligned} F(t_1 < t < t_2) &= \int_{t_1}^{t_2} P(t) dt \\ &= \Gamma \int_{t_1}^{t_2} \exp(-\Gamma t) dt \\ &= -e^{-\Gamma t} \Big|_{t_1}^{t_2} \\ &= e^{-\Gamma t_1} - e^{-\Gamma t_2} \end{aligned} \quad (8.8)$$

Ya que se calcula la densidad de probabilidad entre el intervalo definido.

## 8.5. Probabilidades

Se hallan las probabilidades, sabiendo que  $T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\Gamma}$ , y  $\tau = \frac{1}{\Gamma}$ .

$$F(0 < t < T_{1/2}) = e^0 - e^{-\Gamma T_{1/2}} = 1 - e^{-\ln 2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$F(T_{1/2} < t < \infty) = e^{-\Gamma T_{1/2}} - 0 = e^{-\ln 2} = \frac{1}{2}$$

$$F(0 < t < \tau) = e^0 - e^{-\Gamma/\Gamma} = 1 - e^{-1} = 0.63$$

$$F(\tau < t < \infty) = e^{-\Gamma/\Gamma} - 0 = e^{-1} = 0.37$$

Se observa que las dos primeras probabilidades acumulativas son complementarias, al igual que las dos últimas, significa que tiene sentido que mientras se vaya de 0 hasta un tiempo  $t$ , si luego se toma  $t$  hasta  $\infty$ , debe dar el resultado de  $1 - P(t)$ .

## 8.6. Núcleo de Co

Para el núcleo de  $^{60}\text{Co}$  se sabe que  $T_{1/2} = 5.3 \text{ a}^{-1}$ , y  $\Gamma = 0.13 \text{ a}^{-1}$ . Se plantea que para  $t = 1$  a, la probabilidad de decaimiento es de 0.13. Comprobando este resultado con la ecuación 8.8, se obtendría que:

$$F(0 < t < 1) = e^0 - e^{-\Gamma} = 1 - e^{-0.13} = 0.12$$

Así que la diferencia porcentual sería:

$$\frac{0.13 - 0.12}{0.13} \times 100\% = 7.69\%$$

Ahora, si se toma a  $\Gamma$  en días, esta tendría un valor de  $3.561 \times 10^{-4}$  días, la probabilidad sería ese mismo valor. Comparando con la ecuación 8.8, se obtendría que:

$$F(0 < t < 1) = e^0 - e^{-\Gamma} = 1 - e^{-3.561 \times 10^{-4}} = 3.560 \times 10^{-4}$$

Así que la diferencia porcentual sería:

$$\frac{3.561 \times 10^{-4} - 3.560 \times 10^{-4}}{3.561 \times 10^{-4}} \times 100\% = 0.028\%$$

Con este resultado se observa que al disminuir la unidad de medida la diferencia porcentual se reduce drásticamente, entre hallar la probabilidad de la unidad de tiempo y la ecuación 8.8.

## 8.7. Cambio de unidad de tiempo

Como se plantea que la probabilidad es  $P(t) = \Gamma \times (\text{unidad de tiempo})$ , dependiendo del valor de  $\Gamma$  esta probabilidad va a tener sentido si es menor a 1 y otro si es mayor, es decir, para la unidad de tiempo en segundos, la probabilidad de decaimiento es de  $4.1 \times 10^{-9}$ , lo que indica que es prácticamente de 0% que el  $^{60}\text{Co}$  decaiga en un segundo, un 13% que decaiga en el primer año y del 100% que decaiga en el primer siglo.

## 9. Klein-Nishina

Se representa gráficamente la fórmula de la sección eficaz diferencial de Klein-Nishina en unidades de  $r_e^2$ , para los valores de energía del fotón incidente en la figura 9. Lo anterior considerando la siguiente ecuación:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta, \epsilon) = \frac{r_e^2}{2[1 + \epsilon(1 - \cos\theta)]^2} \left[ 1 + \cos^2\theta + \frac{\epsilon^2(1 - \cos\theta)^2}{1 + \epsilon(1 - \cos\theta)} \right]$$

Los datos correspondientes son los siguientes:

$$E_1 = \{10, 100, 511, 1333\} \text{ keV}$$

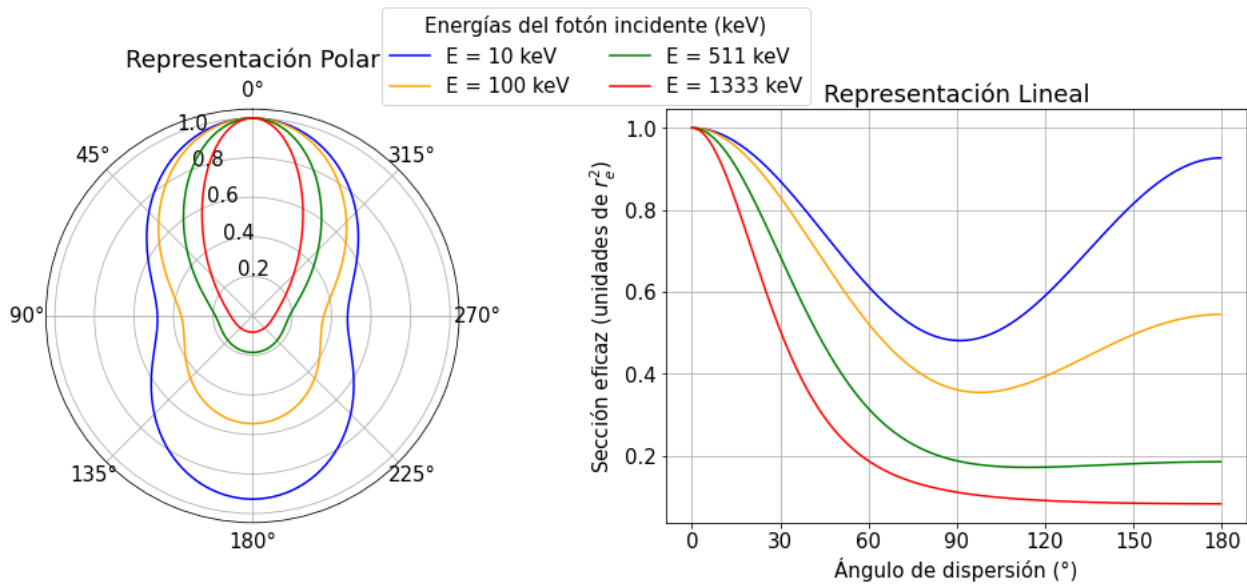


Figura 9: Klein-Nishina para valores energéticos de fotón incidente

Frases sobre la dispersión de los fotones como función del ángulo y la energía:

1. A medida que el ángulo de dispersión se acerca a  $180^\circ$  los fotones se ven mas dispersos.
2. A medida de que sea mas baja energía tendrá mayor dispersión.

Con respecto a una ventaja y desventaja de cada una de las gráficas son:

- **Gráfico polar:**

- **Ventaja:** Muestra de forma clara como varia la sección eficaz con el ángulo, en especial cuando tiene una distribución que es simétrica.
- **Desventaja:** Se ve limitada por la lectura de la sección eficaz en función del ángulo por ello se debe hacer una lectura mas cuidadosa.

- **Gráfico cartesiano:**

- **Ventaja:** Se hace mas fácil interpretar los valores numéricos.
- **Desventaja:** Es menos útil para determinar patrones en el comportamiento de datos.

## Referencias

- [1] B. C. Liliana, “Probabilidad,” 2004.
- [2] F. C. Mejía, “Análisis de datos experimentales. notas de clase,” 11 2024.
- [3] J. J. T. Agudo, “Dinámica de fluidos.”
- [4] M. Olmo, “Promedio de vida en el decaimiento de partículas,” S.F.