2024-II Simulación #1

Modelo Climático a través de Método Montecarlo

Estudiantes: Andrés Felipe Pinzón Harker, apinzonh@unal.edu.co
Nicolás Coronado, mail@unal.edu.co

Esta es la solución propuesta para la clase de Instrumentación Nuclear a cargo del profesor L.F. Cristancho, respecto a la primera simulación del modelo climático propuesto a continuación:

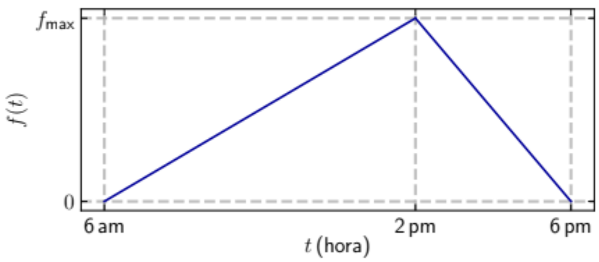


Figure 1: Función de densidad de probabilidad $f(t)$ del modelo climático propuesto.

Problem 1: Densidad de Probabilidad

El "experimento" que va a simular es: cada día observa entre qué horas llueve: [6 am, 7 am), [7 am, 8 am), $\cdots$, [5 pm, 6 pm]. Para ello tiene que definir la densidad de probabilidad (en realidad, frecuencia, pues es un caso de variables discretas) entre cada par consecutivo de horas pico. Hay por lo menos dos formas de evaluarla:

1. Para cada intervalo de tiempo, el valor medio de la función $f(t)$, es decir, el valor a las medias horas.

2. Un valor proporcional a la integral bajo la curva entre cada par de horas.

Haga el cálculo para cada uno de estos métodos. ¿Resultan iguales las probabilidades? Muestre cómo lo hace.

Al respecto del problema, requerimos en primer lugar analizar la función de densidad de probabilidad $f(t)$ para determinar cuál es el comportamiento real según los parámetros dados, poderlo transportar a código y generar las funciones requeridas al respecto

Solucionamos para ello el parámetro f_{max} con geometría convencional.

$$\text{area}_{\Delta} = \frac{12 f_{max}}{2} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad f_{max} = \frac{1}{6} \tag{1}$$

Luego, la función $f(t)$ queda descrita de la siguiente manera

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 6 \\ (1/48)\, t - (3/24) & \text{si} \quad 6 \leq x \leq 14 \\ -(1/24)\, x + (3/4) & \text{si} \quad 14 < x \leq 18 \\ 0 & \text{si} \quad x > 18 \end{cases} \tag{2}$$

Se define la clase `prob_lluvia(periodo)` para incluir los métodos y parámetros requeridos, tanto su *pdf* con `P(x)` (misma $f(t)$), las funciones que definen la probabilidad discretizada `.integral(hora)` y `.promedio(hora)`.

> **Problem 2: Obtener f_{max}**
>
> Para obtener valores numéricos tiene que decidir el valor de f_{max}. ¿Qué valor toma? ¿Qué criterio usa?

Cómo se indicó en el punto previo, se resolvió tomando geométricamente el área y resolviendo el punto máximo para que la función de probabilidad fuera normalizada a 1. Como se sugiere también, dado que f_{max} es el carácter que provee a la función la normalización, que se pueda generalizar como:

$$\text{area} = \frac{12 f_{max}}{2} = N \quad \Leftrightarrow \quad f_{max} = \frac{N}{6} \tag{3}$$

Luego, definimos esta función P de *pdf* como:

$$P(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < 6 \\ f_{max}((1/8)x - (3/4)) & si \quad 6 \leq x \leq 14 \\ f_{max}(-(1/4)x + (9/2)) & si \quad 14 < x \leq 18 \\ 0 & si \quad x > 18 \end{cases} \tag{4}$$

Podemos despejar la normalización para tenerla como parámetro en nuestro objeto `prob_lluvia` y de esa manera generalizarlo aún más.

> **Problem 3: Gráficas y Función Acumulativa**
>
> Tome la densidad de probabilidad que haya decidido en el punto anterior.
>
> (a) Grafíquela.
>
> (b) Calcule la función acumulativa. Grafíquela.

Se generan las gráficas comparadas de las funciones de densidad de probabilidad continua y discretizadas en la fig. 2.

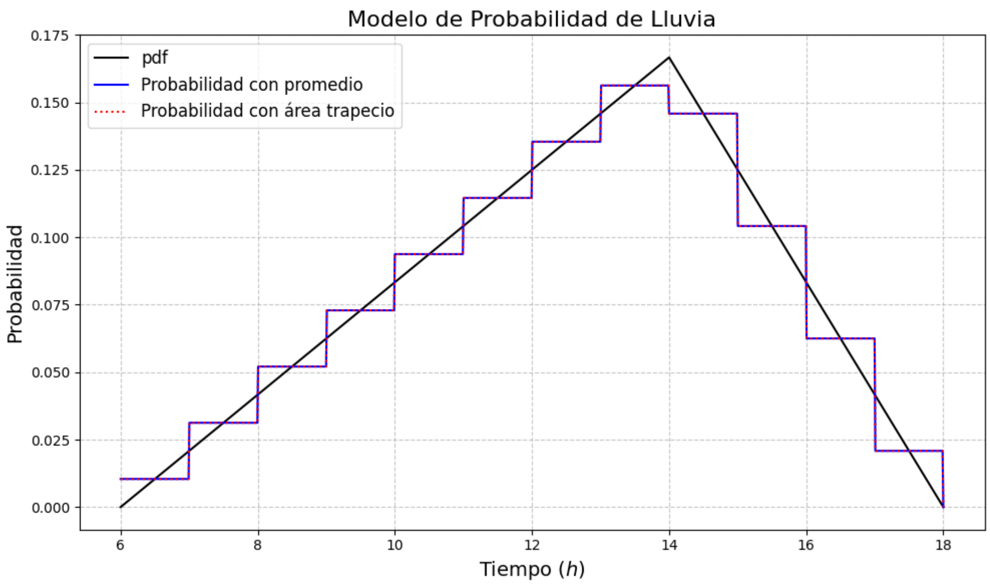


Figure 2: Funciones de densidad de probabilidad comparadas según los métodos probados.

Se genera la función acumulativa F y se grafica (véase fig. 3).

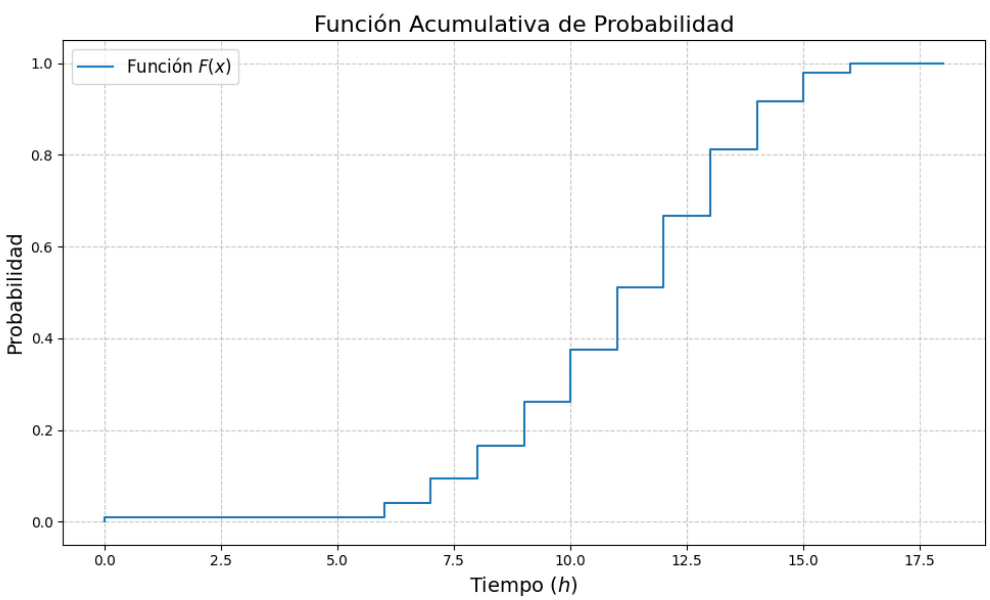


Figure 3: Función acumulativa de probabilidad discretizada utilizando "integral" (método 2)

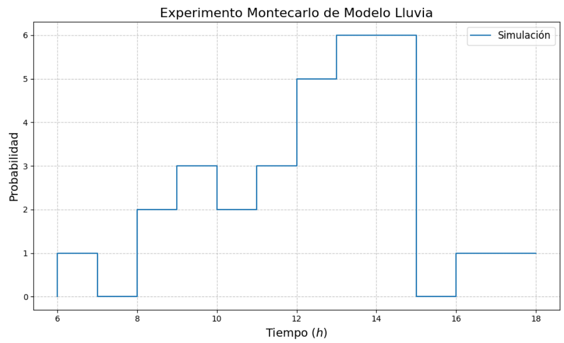
Problem 4

Haga el "experimento" de determinar "a qué hora llueve" durante los siguientes números de días y haga un histograma que muestre el resultado en cada caso.

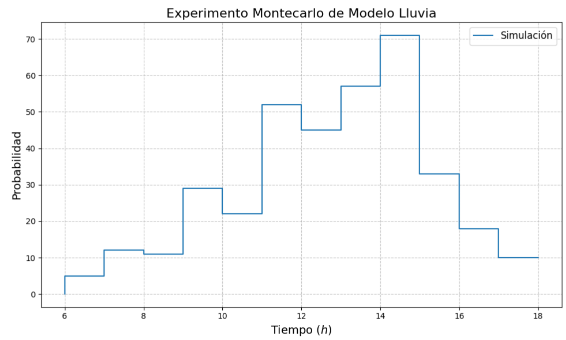
(a) 30 (b) 365 (c) 1000 (d) 10^6

Se genera el experimento a través del Método Montecarlo aplicando proceso semejante al dado en guía de autoría del profesor Cristancho, tan solo se genera como una función que recoge el objeto modelo y el número de historias como `experimento(pl, historias)`. A continuación, se prueban los valores requeridos de `historias` como días.

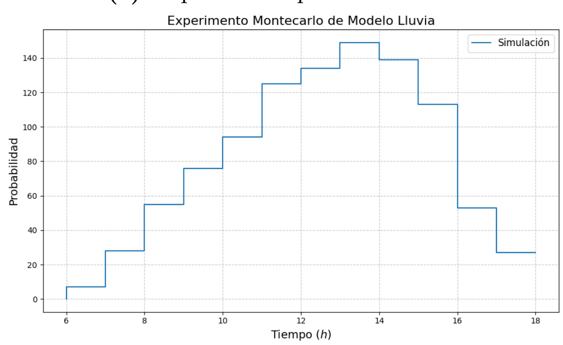
(a) Experimento para 30 días.



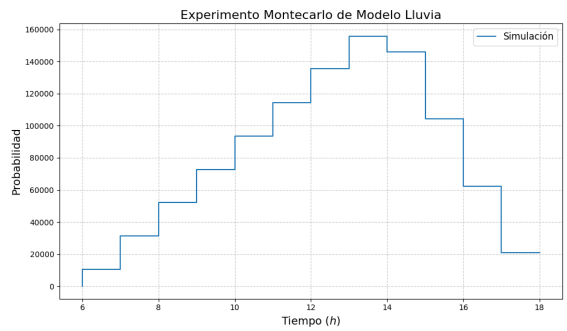
(b) Experimento para 365 días.



(c) Experimento para 1000 días.



(d) Experimento para 10^6 días.



Problem 5: Verificación

Verifique en cada caso que el experimento sí siguió la distribución predefinida.

(a) Es decir, **trace sobre los mismos ejes el resultado de la simulación y el resultado predicho por la distribución original.**

(b) Describa brevemente: ¿Cómo hace para comparar la función densidad de probabilidad, cuyos valores (cuando está normalizada) son todos menores que 1, con el resultado de la simulación, cuyos valores diferentes de cero son todos mayores que 1?

La verificación del apartado (a) se concibe en la fig. 5, donde los resultados previos se comparan basado en la normalización (este caso $N = 1000$).

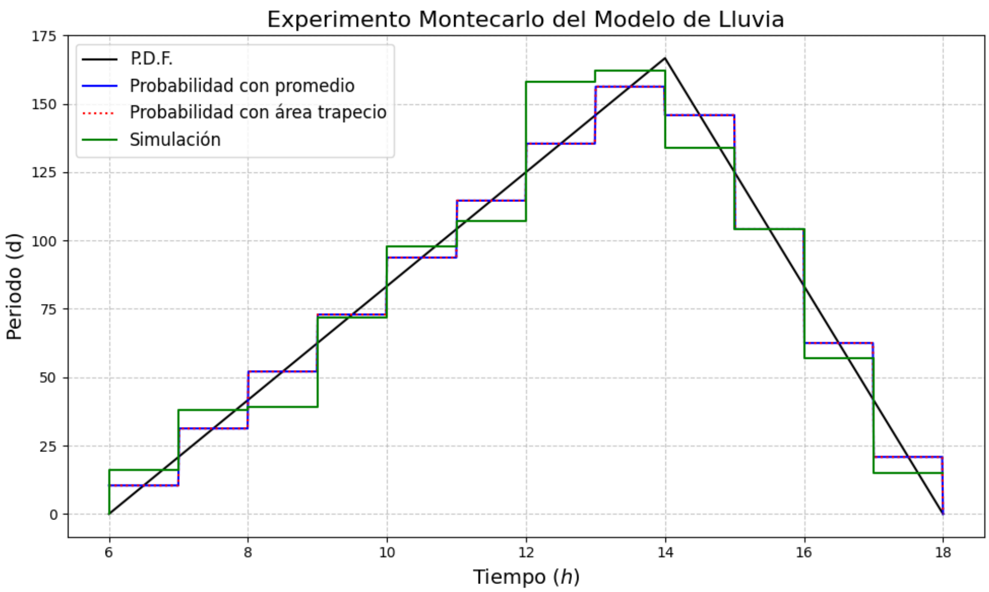


Figure 5: Funciones de probabilidad normalizadas al valor de días (1000 eventos).

Para el apartado (b), comparando los resultados, se escala proporcional el número de eventos se prueben, dado que la probabilidad toma en cuenta la proporción de la población que se va a medir tan solo hace falta multiplicarlos como `pl.promedio(horas) * eventos` (eq. 5) visto anteriormente en el código.

$$P'(x) = P(x) * N \tag{5}$$

> **Problem 6: ¿Y si puede no llover?**
>
> Incluya en el modelo la probabilidad de que no llueva. Suponga que en cada día hay una probabilidad del 70% de que sí llueva.

Suponiendo que en cada día hay una probabilidad del 70% de que sí llueva, equivalente a `p_lluvia = 0.7`. Se simula a través del código con la sentencia `if` como fue sugerido por el borrador del profesor Cristancho.

Se verifica el comportamiento con el resultado del código:

Listing 1: Resultado en consola

```
(array([ 6.,  7.,  8.,  9., 10., 11., 12., 13., 14., 15., 16., 17., 18.]),
 array([ 0,  1,  0,  7, 13,  8, 15, 13, 16,  2,  0,  0,  0]),
 [75, 25])
```

Siendo el "array" superior la división en horas, la inferior el histograma generado y el último, los días que llovieron y los que no.

> **Problem 7: Simular si no llueve**
>
> Con la probabilidad adicional de que llueva, simule la determinación de la hora a la que llueve tomando datos durante el siguiente número de días:
> (a) 30 (b) 100

> Haga un histograma con la estadística hora por hora tal como lo hizo en el caso $p = 1.0$ en los puntos 1-5.

Se generan las simulaciones para los días correspondientes (véase figs. 6 y 7).

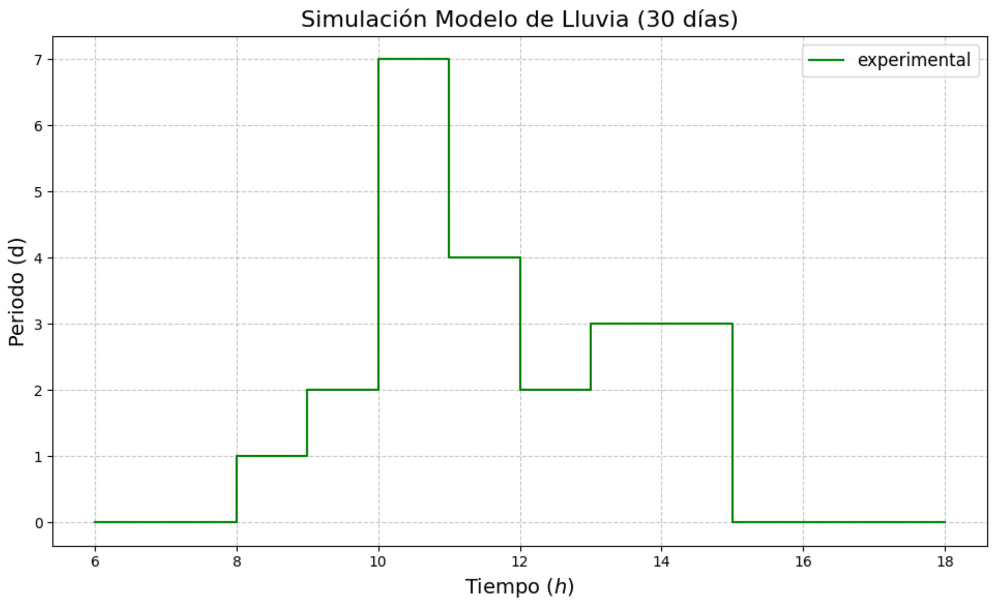


Figure 6: Simulación cuando la probabilidad de lluvia es 70% para 30 días.

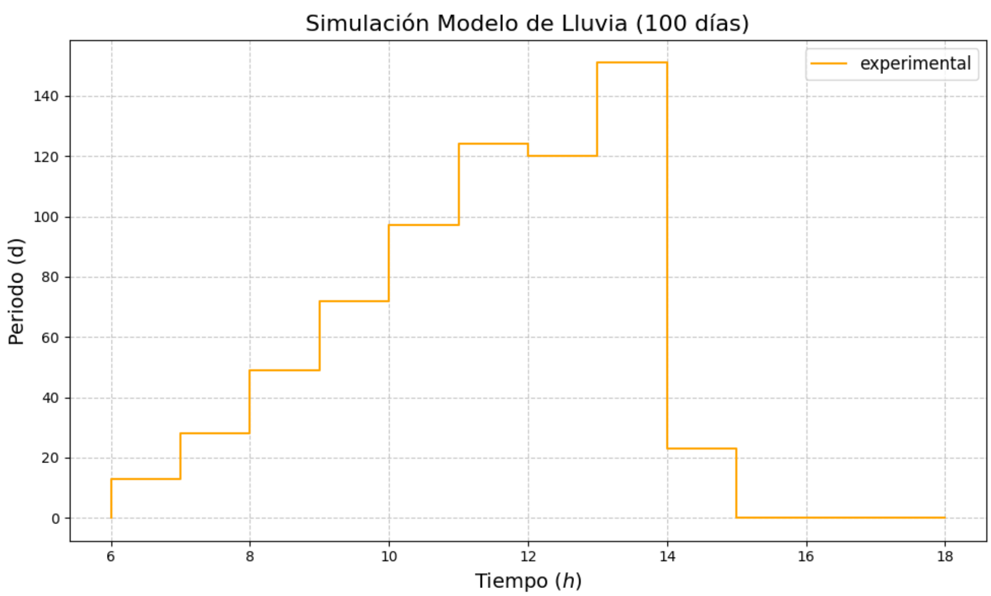


Figure 7: Simulación cuando la probabilidad de lluvia es 70% para 100 días.

Problem 8: Verificar (con p = 0.7)

Reporte en cada caso en cuántos días sí llovió y verifique que la suma con el número en los que no llovió es el total, 30 o 100 según el caso.

Nos aseguramos que los días totales sean los requeridos a través de la consulta de la cantidad de días de los contadores respectivos y al sumar con varias posibles cantidades de días podemos asegurar que se cumple con lo requerido viendo el ejemplo a continuación:

Listing 2: Resultado en consola

```
Si llovio: 78
No llovio: 22
Total = 100
```

Problem 9: Comparación Gráfica

Verifique en cada caso que el experimento sí siguió la distribución predefinida.
Es decir, **trace sobre los mismos ejes el resultado de la simulación y el resultado predicho por la distribución original**, tal como lo hizo en el punto 5.

Generamos la comparación final, nuevamente haciendo la normalización de las gráficas continuas y discretas de la función de densidad de probabilidad respecto a nuestro modelo con probabilidad de lluvia $p = 70\%$ a continuación:

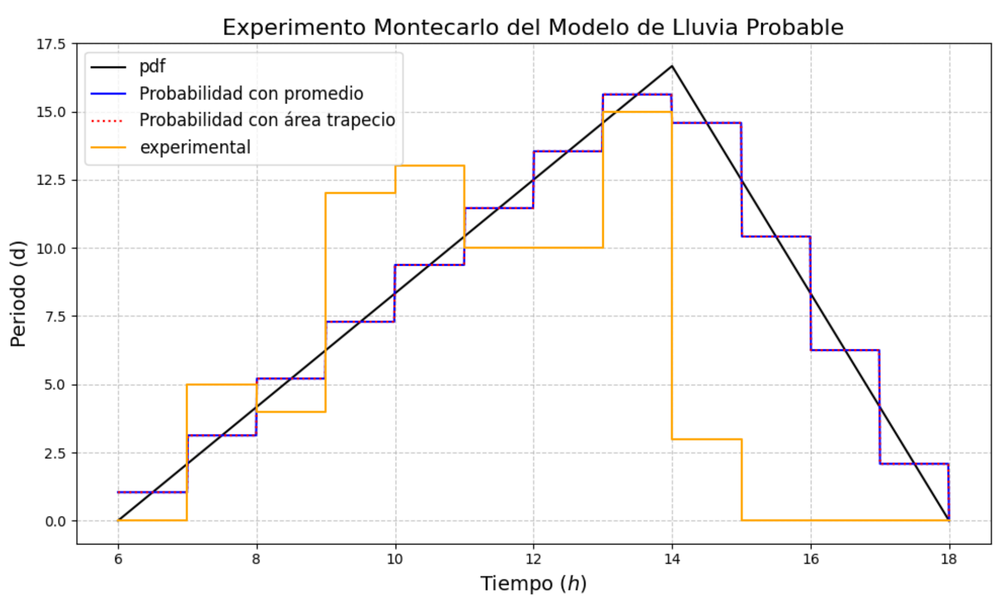


Figure 8: Comparación del modelo con probabilidad de lluvia $p = 0.7$ para 100 días.