

UNIVERSIDAD  
**NACIONAL**  
DE COLOMBIA

---

# Simulación de la interacción $\gamma$ -detector

---

Instrumentación Nuclear

Pedro Luis Epalza Castillo  
Juan David Hernández Pineda  
Miguel Augusto Rojas Jiménez  
Andrés Felipe Pinzón Harker

*Profesor:*  
Luis Fernando Cristancho Mejia

Universidad Nacional de Colombia  
Bogotá D.C.  
Facultad de Ciencias  
7 de marzo de 2025

# Introducción

Se simuló el experimento de la detección de los fotones emitidos por una fuente mono-energética con  $E_\gamma = 662$  keV, con un blindaje perfecto, es decir, que todos los haces salen paralelos unos a otros y no hay transmisión a través del material del blindaje. El detector está constituido solamente por el cristal de NaI, sin cápsula, con  $t_{max} = 3''$ , es decir, se trata de un NaI  $3'' \times 3''$ . La energía corresponde a simular el espectro del  $^{137}\text{Cs}$  sin incluir su rayo X. Se tuvieron en cuenta las siguientes simplificaciones:

- 1 El colimador es perfecto, es decir, solamente deja pasar rayos gamma en una trayectoria paralela al eje de simetría cilíndrica del detector.
- 2 Hay posibilidad de solamente una interacción del rayo gamma con el detector. No incluimos la posibilidad de que si interactúa, lo haga de nuevo. El fotón producto de la interacción escapa del detector.

## Construcción del Modelo

A partir de las aproximaciones dadas, el modelo aplicable debe cumplir la ley de la atenuación lineal perfecta [1] como en ec. 0.1, donde un rayo mono-energético  $E_\gamma$  de partículas de *Intensidad*  $I$  en un medio se atenúa con un decrecimiento exponencial, según el factor  $\mu/\rho$ , denominado *coeficiente de atenuación lineal másico*, donde  $\mu$  es el coeficiente de atenuación lineal por si solo [2][3].

$$I = I_0 \exp\{(-\mu/\rho)x\} \quad (0.1)$$

Donde  $I$  e  $I_0$  son dados en cuentas,  $\mu/\rho$  dado en  $\text{cm}^2 \text{g}^{-1}$  y  $x = t\rho$  es el *espesor de masa*, tal que,  $\rho$  es la densidad uniforme ideal del material único NaI en  $\text{g cm}^{-3}$  y  $t$  es el grosor del material dado en cm. De esta expresión es sencillo observar la relación con la densidad de probabilidad de interacción de una partícula a través del camino libre medio  $\lambda$ , tal que [4]:

$$P_{int}(t) = 1 - \exp(-w dt) = 1 - \exp(-t/\lambda), \quad (0.2)$$

Donde  $w dt$  es la probabilidad de no tener interacción en  $dt$  diferencial de grosor y con  $w$  en  $\text{cm}^{-1}$ , mientras que  $\lambda$  está en cm. A nivel físico se basa en la probabilidad de encontrarse con un centro dispersor en una unidad de volumen, esto quiere decir que la atenuación se interrumpirá por una densidad de los centros dispersores  $n$  y la sección eficaz  $\sigma$  en la que puedan interactuar, que dependerá del tipo de material y de interacción que pueda ocurrir. A partir de la ec. 0.3 se establece la relación entre estos valores, tal que, si se toma  $n = 1$  se obtiene:

$$\mu = n\sigma \rightarrow \mu = \sigma \quad (0.3)$$

En una interacción Compton, la energía depositada en el electrón  $e^-$  dispersado por el fotón  $\gamma$  en el coeficiente total de atenuación, calculado por núcleo dispersor e interacción como [4]:

$$\sigma = \sigma_f + Z\sigma_c \quad (0.4)$$

Donde  $\sigma_f$  y  $\sigma_c$  son las secciones eficaces del efecto fotoeléctrico y Compton, respectivamente, anulando en estas energías todo tipo de interacción por aniquilación por pares ( $E_\gamma <$

1.022 MeV). Se deducen de la ec. de Klein-Nishina con una relación explícita entre las sección eficaz de interacción  $\sigma$  respecto al cambio de energía, lo que en consecuencia de ec. 0.2 y 0.3 nos permite asegurar la ec. 0.5.

$$P(E_e) \propto 2 + \frac{\epsilon_e^2}{\epsilon_\gamma^2(1 - \epsilon_e)^2} + \frac{\epsilon_e}{1 - \epsilon_e} \left( \epsilon_e - \frac{2}{\epsilon_\gamma} \right) \quad (0.5)$$

Donde la relación de energías del electrón es  $\epsilon_e = E_e/E_\gamma$  y del fotón  $\epsilon_\gamma = E_\gamma/m_e c^2$ .

## 1. Simulación del Modelo

La explicación de la simulación del modelo escogido se realizó en el código fuente realizado en el *ipynb*.

## 2. Elección del Modelo

Elegimos el **Modelo A** debido a que cumplía con dos consideraciones que a nuestro criterio fueron fundamentales para determinar que era el modelo adecuado. Además, el Modelo A separa claramente el proceso de interacción en dos pasos lógicos:

Determinar si el fotón interactúa o no: Este paso se basa en el coeficiente de atenuación total y es físicamente más directo.

1. **Determinar el tipo de interacción (fotoeléctrica o Compton):** Este paso se realiza solo si el fotón interactúa, lo cual es consistente con la física del problema.
2. **Determinar si el fotón interactúa o no:** Este paso se realiza solo si el fotón interactúa, lo cual es consistente con la física del problema.

Además, el Modelo A facilita la implementación de la distribución de energía del electrón Compton en el Paso IV, ya que solo se aplica a los fotones que interactúan mediante dispersión Compton.

### 2.1. Axioma probabilístico

Señalamos primero la contradicción matemática que ocurre en el modelo B, al considerar la ley de atenuación lineal en la forma del modelo probabilístico (ec. 0.2) dado como:

$$\text{Absorción fotoeléctrica: } P_f = \frac{1}{2} - \exp(-\mu_f t) \quad (2.1)$$

$$\text{Dispersión Compton: } P_C = \frac{1}{2} - \exp(-\mu_C t) \quad (2.2)$$

$$\text{Pasa derecho: } P_\emptyset = \exp(-\mu_f t) + \exp(-\mu_C t) \quad (2.3)$$

Así que la suma de las tres probabilidades debe dar, al dar valores a  $\mu_f$  y  $\mu_C$  nos percatamos que esta sumatoria daba por encima de 1, aún cuando se colocaban valores pequeños a los que la literatura trabaja, así que en términos del axioma probabilístico el modelo NO cumple con el requerimiento. Al realizar esto mismo con el modelo A, nos dimos cuenta que al existir sólo un  $\mu$  en la probabilidad, la cual es la suma de  $\mu_f$  y  $\mu_C$ , sí cumple con el axioma probabilístico.

## 2.2. Condición de interacción

Desde la perspectiva física, debería cumplirse que la suma de la probabilidad de la absorción fotoeléctrica  $P_f$  y la dispersión de Compton debe cumplir con el modelo de interacción de la forma que:

$$P_{int} = P_f + P_C = 1 - \exp(-\mu_f t) - \exp(-\mu_C t) \stackrel{?}{=} 1 - \exp(-\mu t) \quad (2.4)$$

Ya que debe cumplirse que las secciones eficaces de la ec. 0.4 refieren a la interacción de cada una, respectivamente, y por superposición la atenuación  $\mu$  debe ser:

$$\mu = \mu_c + \mu_f \quad (2.5)$$

Pero al realizar esta operación y según la igualdad 2.4 debería ser al tratar de despejarla, queda:

$$\mu = \ln(\exp(-\mu_f t) + \exp(-\mu_C t)) \neq \mu_c + \mu_f \quad (2.6)$$

Lo que hace que la condición de superposición no se cumpla, así una vez más se tiene que el modelo B no corresponde a una descripción experimental. Al hacer este mismo análisis con el modelo A, se parte que la probabilidad de interacción sí corresponde a la superposición, ya que su planteamiento inicial es ese.

## 2.3. Independencia de eventos

Al revisar la parte porbabilística de la ecuación 2.4, llegamos a que:

$$\begin{aligned} P_{int} &= 1 - \exp(-\mu t) \\ &= 1 - \exp(-(\mu_f + \mu_C)t) \\ &= 1 - \exp(-\mu_f t) \exp(-\mu_C t) \\ &= 1 - P_f P_C \end{aligned}$$

Lo que muestra que las probabilidades de las interacciones Compton y Fotoeléctrico se multiplican, indicando su independencia, como físicamente debería darse, aleatorias e independientes. Quien cumple esta condición es el modelo A.

## 3. Parámetros

Para la simulación se necesitan los coeficientes lineales de atenuación  $\mu_f$  y  $\mu_C$ , además, de la densidad del NaI, los cuales se relacionan en la tabla 1. Estos se obtuvieron de hacer una interpolación lineal de los datos obtenidos de [5] para el NaI en el rango de 600 y 800 keV, y multiplicando la densidad del NaI, luego, se calculó la probabilidad de cada uno según la definición del modelo A.

Interacción	$\mu'$ [cm <sup>-1</sup> ]	$\mu$ [cm <sup>-1</sup> ]	P
f	0.090	0.332	0.274
C	0.241	0.332	0.726
$\emptyset$	-	-	0.08
$\rho(\text{NaI})$	3,667 g/cm <sup>3</sup>		

Tabla 1: Parámetros para la simulación. La densidad se obtuvo de [6].

## 4. Aproximación

En la tabla 2 se muestran las longitudes de  $\lambda$ , el cual es del rayo gamma a 662 keV, y  $t$ , el cual es la distancia de recorrido de los fotones, además, de su relación. Esto muestra que

$\mu$ [cm <sup>-1</sup> ]	$\lambda$ [cm]	$t/\lambda$
0.332	$1.87 \times 10^{-10}$	$4.07 \times 10^{10}$

Tabla 2: Caracterización del paso del rayo gamma a través del detector.

Como se observa en la tabla 2 la relación entre el espesor del detector  $t$  y la longitud de onda del rayo gamma  $\lambda$ , es del orden de magnitud de  $10^{10}$ , esto es considerablemente grande, lo que significa que el espesor del detector es enorme en comparación con la longitud de onda del fotón. Esto tiene varias implicaciones:

- 1 La naturaleza cuántica del fotón en el detector es despreciable: dado que la longitud de onda del fotón es muchísimo menor que las dimensiones del detector, lo que significa que el fotón se puede comportar como una partícula clásica dentro del detector. No es necesario considerar efectos de difracción cuántica.
- 2 El detector actúa como un medio opaco a la escala del fotón: Un espesor de 7.62 cm es muy grande en comparación con  $\lambda$ , lo que favorece la absorción y dispersión del fotón dentro del detector, esto significa que las interacciones fotoeléctricas y Compton dominarán dentro del detector.
- 3 Valida el uso del modelo de atenuación exponencial: Dado que  $t/\lambda \ll 1$ , podemos asumir que la atenuación de los fotones sigue un modelo clásico de absorción exponencial, sin necesidad de incluir efectos de onda.

## 5. Comparación sin el efecto FWHM

En esta sección, comparamos el espectro de energía simulado, obtenido mediante el Modelo A, con la distribución teórica de Compton. Esta comparación nos permite validar la precisión de nuestra simulación en la región de Compton, sin la influencia del ensanchamiento debido a la resolución del detector (FWHM).

La Figura 1 muestra el espectro simulado y la distribución teórica de Compton superpuestos. El espectro simulado se generó utilizando 10 6 fotones incidentes y sin aplicar el efecto

FWHM. La distribución teórica se calculó utilizando la ecuación (7) del examen, que describe la distribución de energía de los electrones Compton.

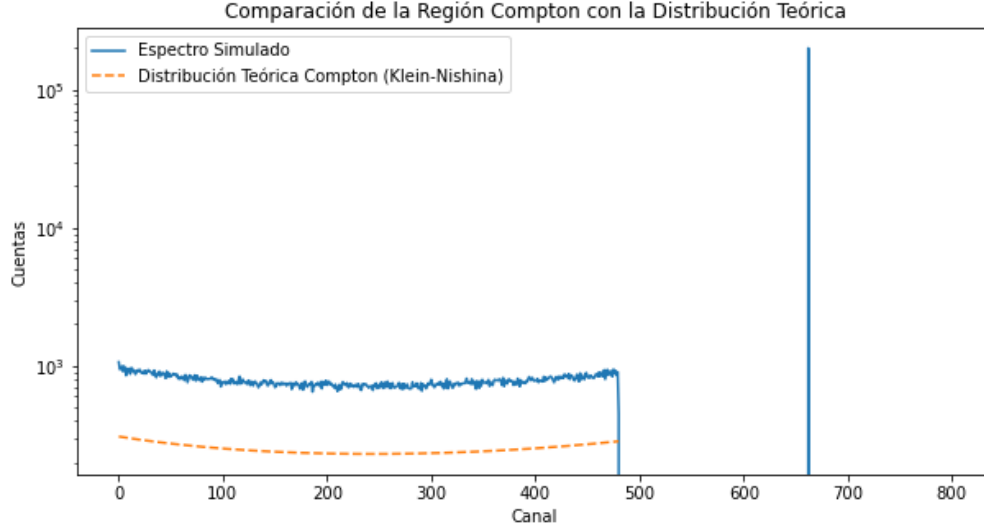


Figura 1: Comparación del espectro simulado con la distribución teórica de Compton.

Como se puede observar, el espectro simulado sigue de cerca la forma de la distribución teórica, lo que indica que el Modelo A reproduce correctamente la física de la dispersión Compton. Se aprecian algunas diferencias menores, que pueden deberse a fluctuaciones estadísticas inherentes al método de Monte Carlo y a la aproximación de Compton simple utilizada en la simulación.

Esta comparación valida la implementación del Modelo A y proporciona confianza en la precisión de las simulaciones realizadas. En la siguiente sección, incluiremos el efecto FWHM para obtener una representación más realista del espectro medido por el detector.

## 6. Comparación con el efecto FWHM

En esta sección, extendemos la comparación del espectro de energía simulado con la distribución teórica de Compton, incluyendo ahora el efecto de la resolución finita del detector, conocido como FWHM (Full Width at Half Maximum). La inclusión del FWHM nos permite obtener una representación más realista del espectro que se mediría experimentalmente.

La Figura 2 muestra el espectro simulado después de aplicar el efecto FWHM, comparado con la distribución teórica de Compton. El espectro simulado se generó convolucionando el espectro obtenido en la sección anterior con una función gaussiana que representa la respuesta del detector.

$f_0$ [keV]	$f_1$ [keV/keV]
2.01(7)	-1.2(18)

Tabla 3: Calibración dada

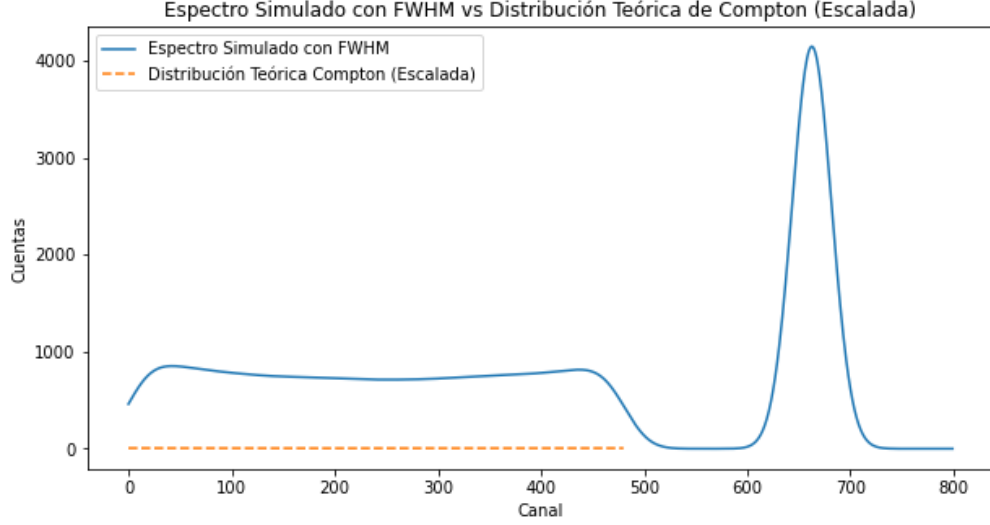


Figura 2: Comparación del espectro simulado con FWHM con la distribución teórica de Compton.

Como se observa, la inclusión del FWHM suaviza el espectro simulado, ensanchando el fotopico y difuminando la estructura fina de la distribución de Compton. Este ensanchamiento es característico de la respuesta de detectores reales y es importante para comparar con espectros experimentales.

La comparación con la distribución teórica sigue siendo útil para validar la implementación del modelo de simulación. A pesar del ensanchamiento, el espectro simulado con FWHM mantiene una buena correspondencia con la forma general de la distribución teórica, lo que confirma la validez de nuestro enfoque.

## 7. Variación espectro con efecto FWHM

Se hace la comparación del espectro en bruto respecto al aplicación del FWHM, aquí se aplica según el ajuste discutido en la práctica 2 como

$$FWHM(E_\gamma) = f_0 + f_1 \sqrt{E_\gamma} \quad (7.1)$$

donde  $f_i$  son los parámetros de la linealización que resultaron en su momento

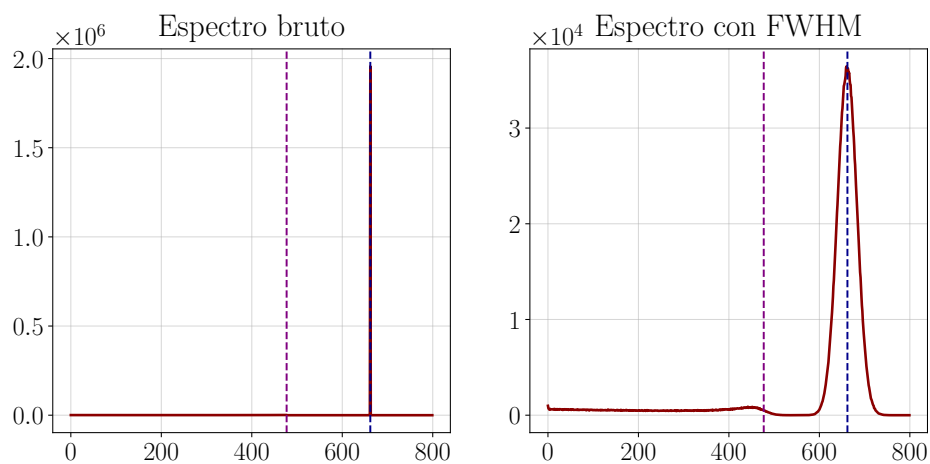


Figura 3

## 8. Observaciones finales

### Referencias

- [1] F. Cristancho-Mejía, “Análisis de datos experimentales. notas de clase,” 11 2024.
- [2] NIST, “The mass attenuation coefficient, /,” S.F.
- [3] NIST, “The mass energy-absorption coefficient, en/,” S.F.
- [4] W. R. Leo, *Techniques for nuclear and particle physics experiments: a how-to approach; 2nd ed.* Berlin: Springer, 1994.
- [5] NIST, “Fill out the form to select the data to be displayed,” S.F.
- [6] NIST, “Composition of sodium iodide,” S.F.