Instrumentación Nuclear (2020168) – Semestre II 2024

Problemas

Prof: Fernando Cristancho Mejía

Contenido

1. La distribución uniforme

Suponga que cierta cantidad aleatoria x sigue la distribución uniforme, es decir, su valor es M en el rango $x = [a, b]$, en notación matemática, con u la densidad de probabilidad,

$$u(x) = \begin{cases} c & a \leq x \leq b \\ 0 & x < a \\ 0 & x > b \end{cases} \tag{1}$$

Observación: En cada una de las respuestas a las siguientes preguntas muestre los cálculos que hace, sean de cálculo, de álgebra o de aritmética. Ejemplo, si quiere usar la propiedad de normalización de u, escriba

$$\int_a^b u\,dx = 1\,. \tag{2}$$

1. Cuál es el valor de c en las expresiones (1) si la distribución es normalizada?
2. Calcule el valor medio de la distribución uniforme, ec. (1).
3. Calcule la desviación estándar.
4. Qué porcentaje del área total bajo la curva es cubierta entre los límites
$$[\mu - \sigma, \mu + \sigma] \tag{3}$$
5. ¿Entre qué valores de la abscisa se encuentra el $68\,\%$ de la probabilidad total?
6. Haga una representación gráfica de la distribución uniforme en la cual indique:
   a) Los límites, $a,\ b$.
   b) μ
   c) σ
   d) Los límites, $\mu \pm s$, dentro de los cuales se encuentra $68\,\%$ de la probabilidad,

2. Los dados

Para la distribución de probabilidad de ambos dados, el cúbico y el piramidal, encuentre los tres primeros momentos de sus distribuciones de probabilidad.

1. valor medio
2. desviación estándar
3. asimetría

   Para los tres puntos anteriores use una de dos opciones:

   A. Use un lenguaje de programación. En este caso envíe con el documento en formato pdf de sus respuestas, el programa fuente.
   B. Cálculo "manual". En este caso muestre los cálculos de tal manera que se pueda verificar su corrección.

4. Haga una gráfica para cada dado mostrando:

   - densidad de probabilidad.
   - posición del valor medio.
   - tamaño de la desviación estándar alrededor del valor medio.
   - asimetría

3. Histogramas

La Tabla 1 muestra los valores de voltaje proporcionados por el amplificador de un sistema de detección de rayos gamma. El contenido de esta Tabla está en el archivo adjunto "`amplificador.dat`" en formato de una sola columna.

7521.2	7556.1	7478.0	7495.1	7487.3	7488.2	7508.6	7510.6	7488.1	7537.9
7452.8	7502.0	7487.7	7490.2	7515.8	7514.9	7501.4	7551.5	7502.7	7501.8
7492.2	7512.9	7494.7	7533.0	7501.3	7522.4	7480.9	7442.3	7530.9	7535.3
7545.7	7503.8	7511.2	7509.1	7517.9	7545.4	7516.0	7495.8	7496.9	7505.9
7507.1	7441.3	7478.9	7491.3	7506.7	7493.8	7510.7	7485.0	7481.0	7544.0
7559.7	7491.6	7503.0	7496.1	7460.5	7558.1	7508.5	7470.3	7500.8	7449.0
7511.5	7495.1	7504.3	7513.1	7499.9	7511.6	7486.0	7502.7	7490.2	7459.4
7551.9	7502.3	7485.4	7452.3	7459.1	7553.6	7495.6	7508.6	7500.8	7551.3
7502.1	7506.9	7510.6	7557.2	7512.8	7484.9	7506.3	7490.7	7500.5	7501.4
7461.8	7514.7	7456.0	7491.0	7462.5	7508.9	7480.2	7488.5	7506.8	7515.9
7457.8	7498.6	7478.0	7506.6	7448.3	7536.0	7508.2	7510.5	7496.0	7446.8
7489.9	7461.9	7498.4	7497.7	7528.4	7495.9	7511.6	7500.6	7507.1	7464.2
7494.0	7455.4	7480.4	7470.9	7499.7	7447.1	7497.7	7503.3	7504.1	7517.7
7515.7	7508.4	7518.7	7558.6	7509.3	7516.8	7487.6	7506.4	7505.1	7509.0
7493.3	7510.5	7499.6	7505.5	7496.2	7505.0	7514.4	7507.5	7554.4	7552.2
7472.6	7532.6	7557.1	7490.8	7458.7	7491.9	7516.0	7547.7	7510.6	7558.0
7491.0	7488.2	7449.5	7521.4	7472.4	7510.8	7466.0	7527.0	7491.1	7546.2
7507.6	7519.2	7507.1	7534.4	7487.1	7492.2	7542.2	7449.2	7498.6	7470.8
7550.7	7510.7	7506.7	7499.6	7479.7	7509.1	7507.2	7470.7	7545.4	7504.8
7483.4	7497.9	7483.6	7450.1	7517.2	7490.7	7544.2	7487.1	7455.1	7553.8

Tabla 1: Secuencia de valores de voltaje en mV, $V_i,\ i = \{1, \ldots, 200\}$, a la salida del amplificador en un sistema de detección de rayos gamma.

1. A partir de los valores individuales en la Tabla 1, es decir, del archivo `amplificador.dat`:

   a) Calcule el valor medio del voltaje.

   $$\mu = \frac{1}{200} \sum_{i=1}^{200} V_i \tag{4}$$

   b) Calcule la desviación estándar.

   $$\sigma = \sqrt{\frac{1}{200} \sum_{i=1}^{200} (\mu - V_i)^2} \tag{5}$$

2. Clasifique los números de la Tabla 1 en intervalos o barras de histogramas.

   Haga dos gráficas (o una sola gráfica, con dos páneles) usando histogramas con dos diferentes valores del intervalo de voltaje, ΔV, valor que define la anchura de la barra del histograma:

   a) $\Delta V = 2.5$ mV

   b) $\Delta V = 10$ mV

- Haga la(s) gráfica(s) de tal manera que la abscisa (eje x) cubra los rangos mínimo y máximo de los voltajes en la Tabla 1, pero que no se extienda por más del $5\,\%$ de su diferencia $V_{\text{máx}} - V_{\text{mín}}$ hacia valores menores que $V_{\text{mín}}$, ni hacia valores mayores que $V_{\text{máx}}$.
- Rotule los ejes de la siguiente manera:

  ordenadas: frecuencia.

  abscisas: mV

3. Calcule para cada uno de los histogramas el valor medio y la desviación estándar del conjunto de números en la Tabla 1, ahora usando

$$\mu = \frac{1}{\sum f_j} \sum_{j=1}^{N} V_j\, f_j \tag{6}$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{\sum f_j} \sum_{j=1}^{N} (V_j - \mu)^2\, f_j \tag{7}$$

$$\begin{aligned} V_j &= \text{valor medio (en mV) de la barra } j \\ f_j &= \text{número de datos en la barra } j \\ j &= \text{número ordinal de las barras} = \{1,\, 2,\, \ldots\, N\} \end{aligned}$$

Ojo: en la igualdad (7), σ^2 es la varianza. Lo que se le pide reportar es la raíz cuadrada de esa cantidad, la desviación estándar, σ.

4. Reporte en una tabla, al estilo de la Tabla 2, los valores de μ y σ en los tres casos estudiados. Precisión de los valores reportados: 2 cifras decimales.

caso	μ (mV)	σ (mV)
valores originales	7501.80	
histograma $\Delta V = 2.5$ mV		
histograma $\Delta V = 10$ mV		

Tabla 2: Valor medio y desviación estándar de los voltajes de la Tabla 1 calculados de tres maneras diferentes.

5. Adjunte el código del programa que resuelve los anteriores puntos. Por favor coméntelo abreviadamente, en el mismo cuerpo del programa, no en texto aparte, para saber qué hace y en qué línea(s).

4. Lecturas con un detector Geiger-Müller como ejemplo de estadística de Poisson

A usted lo comisionan para hacer el seguimiento del fondo de radiación en cierto lugar de cierto laboratorio. El equipo que va a usar es un detector Geiger-Müller con el cual puede determinar el número de detecciones, d, de radiación ionizante en el tiempo que haya fijado. La Tabla 3 muestra los resultados de 10 mediciones.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d (cuentas)	147	152	153	171	146	168	145	133	168	171

Tabla 3: La medición es hecha en el mismo sitio con el mismo instrumento en exactamente las mismas condiciones. El origen de las diferencias en las lecturas es únicamente estadístico.

1. Construya otra tabla agregando una hilera con los valores de la incertidumbre de cada medida con dos cifras decimales de precision.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d(cuentas)	147	152	153	171	146	168	145	133	168	171
σ (cuentas)	12.12									

Tabla 4: Conjunto completo de datos para analizar.

2. Usted quiere comparar visualmente el resultado de las diez medidas y de sus incertidumbres. Haga una gráfica con el valor de la lectura, d, en el eje y y con el ordinal de la medición en el eje x. Represente los valores con puntos y trace la barra de incertidumbre para cada punto.

3. Calcule el valor promedio del conteo y agregue esta información como una línea recta horizontal en su anterior gráfica.

   Escriba la expresión matemática que usa para calcular el valor medio.

$$\mu = \tag{8}$$

4. Use al valor promedio del conteo para calcular la incertidumbre. Escriba la expresión matemática que usa

$$\sigma = \tag{9}$$

5. Teniendo en cuenta la incertidumbre de cada punto, calcule la incertidumbre del valor medio propagando las incertidumbres. Puede ayudarse de la generalización a más de dos sumandos de la ecuación para la propagación de incertidumbres cuando la función depende de dos variables.

   Escriba la expresión matemática que usa.

$$\sigma = \tag{10}$$

   Compare el resultado el último resultado, (10) con el resultado (9). Deberían ser iguales. ¿Lo son?

6. Agregue a la gráfica la información de la incertidumbre trazando líneas paralelas a lado y lado de la que representa el valor medio a la manera como está ejemplificado en la Fig. 1.

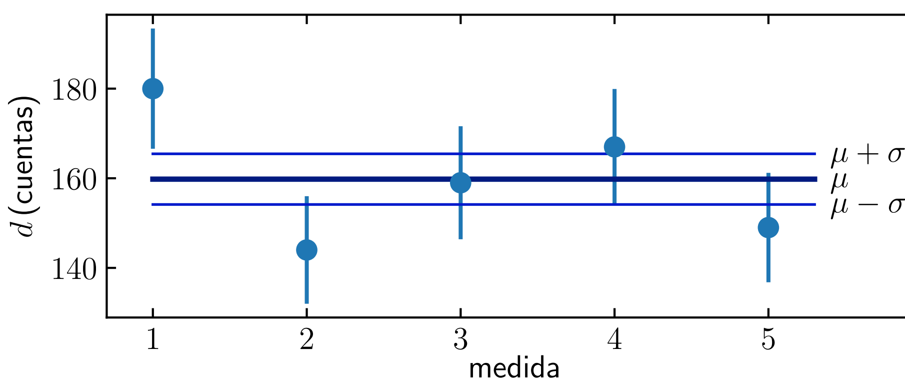

Figura 1: Figura de ejemplo. En este caso solamenente se hicieron 5 medidas. No necesita agregar los símbolos $\mu,\ \mu \pm \sigma$.

5. Ajuste + Chi cuadrado

Los datos experimentales de tiempo t y desplazamiento x referentes a un objeto móvil son reportados en la Tabla 5. Estos son los mismos cuyos ajustes se muestran en la Sec. 2.2.1 de `AnalisisDatos.pdf`.

t (s)	x (cm)	$\sigma(x)$ (cm)
6.5	3.2	1.2
9.3	9.7	2.1
14.6	11.3	3.6

Tabla 5: Un experimento sencillo: el desplazamiento, x para tres tiempos, t. $\sigma(x)$ es la incertidumbre en el desplazamiento.

Proponemos una relación lineal entre x y t,

$$x(t) = a_0 + a_1 t. \tag{11}$$

Vamos a encontrar los parámetros $a_0,\ a_1$ de varias maneras y vamos a comparar la calidad del ajuste entre los diferentes casos:

A. Ajustando la línea recta de tal manera que pase exactamente por los dos primeros puntos,

$$t(\mathsf{s}) = \{6.5,\, 9.3\}$$

.

B. Ajustando la línea recta de tal manera que pase exactamente por el primero y el último punto,

$$t(\mathsf{s}) = \{6.5,\, 14.6\}$$

.

C. Ajustando la línea por minimización de χ^2.

1. En una gráfica con tres páneles, uno por caso, muestre los datos (puntos con barras de incertidumbre) y los ajustes (líneas continuas).

2. ¿Cuáles son los valores de a_0, a_1, χ^2, de las gráficas correspondientes a los casos A y B?

    1. Muestre el álgebra para el cálculo de $a_0,\ a_1$. Observe:
        - Puesto que se trata de unir dos puntos, no necesita programa de ajuste alguno.
        - En estos casos los coeficientes no tienen incertidumbres.
    2. Muestre el álgebra que necesita para el cálculo de χ^2.
    3. Anote $a_0,\ a_1,\ \chi^2$ caso por caso en una tabla. No olvide las unidades.

3. Ajuste los parámetros a_0, a_1 usando su programa preferido para producir la figura que muestre la solución al caso C. ¿Cuáles son ahora los valores de a_0, a_1, χ^2? Agregue los resultados a la Tabla.

4. Caso D: Suponga que la incertidumbre de la distancia para el último dato, $t = 14.6\,\mathsf{s}$ es

    $$\sigma(x = 11.3\,\mathsf{s}) = 30.0\,\mathsf{cm}.$$

    Vuelva a ajustar los datos. Cuáles son los nuevos valores de a_0, a_1, χ^2? Agréguelos a la Tabla.

5. Usando los mismos ejes (mismo panel o figura) muestre los datos del caso D (con nuevo valor de incertidumbre) y los ajustes para dos útimos casos, C y D.

6. Verbalice, es decir escriba algunas líneas explicando por qué surge la diferencia entre los dos últimos ajustes, C y D.

6. Decaimiento del ^{137}Cs

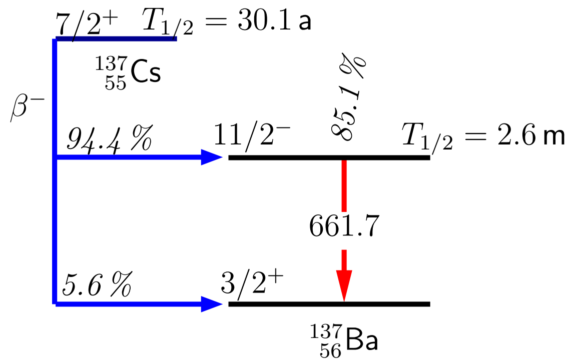

Figura 2: Decaimiento del ^{137}Cs [Firestone and Shirley, 1996, p. 4727]. El porcentaje indicado en la raíz de la flecha roja, la transición gamma de 661.7 keV, afirma que de cada 1000 decaimientos del estado $11/2^-$ solamente 851 decaimientos suceden emitiendo rayos γ. El porcentaje restante lo hace por Conversión Interna.

1. 10^3 núcleos de ^{137}Cs decaen en cierto lapso de tiempo. ¿Cuántos rayos gamma de 661.7 keV son emitidos?
2. Cuántos electrones de Conversión Interna son emitidos?
3. Si por cada electrón emitido por el átomo de Ba se emite un rayo X de 33 keV, ¿Cuántos rayos X son emitidos?
4. La actividad típica de fuentes de ^{137}Cs comercialmente obtenibles es de $1\,\mu$Ci. Esta es la cantidad típica para uso como fuentes de calibración de detectores de rayos gamma. En ésta área de trabajo una cantidad que se maneja es la "Actividad Gamma", la cual es el número de decaimientos por segundo que producen emisión de rayos gamma. Cuál es la actividad gamma de la fuente mencionada?

   Anote el resultado en Ci y en Bq.

7. Flujo de agua a través de capilares

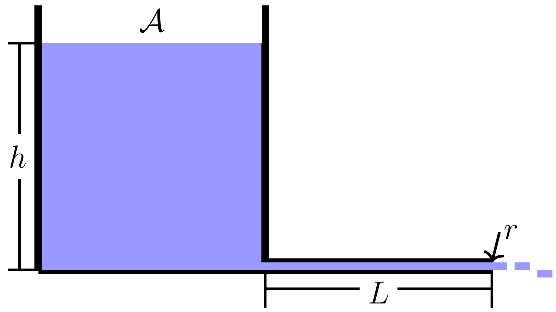

Figura 3: La figura representa un recipiente del cual fluye agua a través de un tubo capilar. $\mathcal{A} =$ área seccional del recipiente; $L =$ longitud del capilar; $r =$ radio de la sección del capilar; $h =$ altura instantánea del contenido de agua.

Para un sistema como el de la Fig. 3, la aplicación de la ley de Poiseuille dice que el **volumen de agua por unidad de tiempo** Q, que sale a través del capilar es

$$Q = \frac{\pi \rho g h r^4}{8 \mu L}, \tag{12}$$

con g, ρ y η la aceleración de la gravedad, la densidad y la viscosidad del agua respectivamente.

1. (Usando la ley de Poiseuille) exprese la cantidad de agua que sale por unidad de tiempo como

$$\frac{dm}{dt} = -\Gamma\, m \tag{13}$$

   con m la masa de agua instantánea en el recipiente. Explique brevemente cada paso que da para llegar a la ecuación (13).

2. Defina "tiempo de desocupación" τ como el tiempo necesario para que el volumen de agua en el recipiente se reduzca a $1/e$ del inicial. ¿Cuál es τ del recipiente con agua? Suponga $r = 0.1$ cm, $L = 10$ cm, $A = 10$ cm^2, $\mu = 10^{-3}$ Pa·s (Pascal·segundo)

3. En cuánto tiempo se reduce el volumen de agua a la mitad? Escriba la deducción que hace.

4. Suponga que de cierto recipiente se escapa el agua por dos capilares. Uno de ellos tiene las dimensiones dadas en el punto 2. Del otro, además de ser inaccesible, se sabe que está a la misma altura y que tiene la misma longitud. Usted hace un experimento en el que determina m como función del tiempo y concluye que el tiempo de desocupación de tal recipiente es $\tau_2 = 10$ s. ¿Cuál es el radio del otro capilar?

8. La distribución exponencial

Preparación para su simulación, versión 1

1. Demuestre que la densidad probabilidad de que un núcleo decaiga durante el intervalo de tiempo dt después de haber "sobrevivido" (no haber decaido durante) el tiempo t es

$$P(t) = \Gamma \exp(-\Gamma t) \tag{14}$$

   Guía: Defina

$$\begin{aligned} S(t) = &\text{ probabilidad de } \textbf{no decaer} \text{ desde 0 a } t \\ \Gamma\, dt = &\text{ probabilidad de decaer en un lapso de tiempo } dt \end{aligned}$$

   Siga luego las deducciones hechas para el cálculo de camino libre medio cambiando el concepto de *"no interactuar"* por el de *"no decaer"*.

2. Demuestre que la densidad de probabilidad $P(t)$ está normalizada... es decir hay certeza de que un núcleo "decaiga algún día". Matemáticamente:

$$\int_0^\infty P(t)\, dt = 1.$$

3. Calcule el valor medio del tiempo de decaimiento $\langle t \rangle$.

4. ¿Cuál es expresión general para la probabilidad de que un núcleo decaiga en cualquier momento entre dos tiempos arbitrarios t_1 y t_2? Observe que esta cantidad no es $P(t)$ ni $S(t)$, sino una función acumulativa entre dos tiempos,

$$F(t_1 < t < t_2) = \tag{15}$$

5. Use la expresión que encontró en el punto anterior para calcular las siguientes probabilidades:

$$\begin{aligned} F(0 < t < T_{1/2}) = &\text{ probabilidad de decaer antes de } t = T_{1/2} \\ F(T_{1/2} < t < \infty) = &\text{ probabilidad de decaer después de } t = T_{1/2} \\ F(0 < t < \tau) = &\text{ probabilidad de decaer antes de } t = \tau \\ F(\tau < t < \infty) = &\text{ probabilidad de decaer después de } t = \tau \end{aligned}$$

   Ojo: Dé un valor numérico. No vale dar tan sólo la expresión!

6. Siguiendo las mismas ideas del punto anterior... el núcleo ^{60}Co tiene un tiempo de semivida $T_{1/2} = 5.3$ años.

   a) Es decir,

$$\Gamma = \frac{\ln 2}{5.3 \text{ a}} = 0.13 \text{ a}^{-1}. \tag{16}$$

   Para calcular Γ hemos usado como "unidad de tiempo" el año, que es, también para el ^{60}Co, un tiempo bastante largo. Según la anterior igualdad, la probabilidad de decaimiento en un año sería 0.13.

   b) Calcule la diferencia porcentual entre el valor en la igualdad (16) y el resultado según su ecuación (15).

   c) Seamos más consecuentes. ¿Cuánto es Γ si tomamos como unidad de tiempo un día... y cuánto resulta ahora la diferencia porcentual, con $F(0 < t < \text{un día})$ calculada según la ec. (15)?

7. Después de todo el trabajo en este punto, comente el siguiente párrafo:

Se puede usar cualquier tiempo como unidad de tiempo, por lo tanto, para el ^{60}Co puedo dar la constante de decaimiento de las siguiente maneras equivalentes:

$$\Gamma = 4.1 \cdot 10^{-9}\ \mathsf{s}^{-1} = 0.13\ \mathsf{a}^{-1} = 13\ \mathsf{siglo}^{-1}$$

Ahora, puesto que $\Gamma\times$(unidad de tiempo) da la probabilidad de que ^{60}Co decaiga durante esa unidad de tiempo, se concluye que las respectivas probabilidades para decaer en cada unidad de tiempo son

$$P(\text{unidad de tiempo}) = 4.1 \cdot 10^{-9}; \qquad 0.13; \qquad 13$$

respectivamente.

9. Klein-Nishina

Represente gráficamente la fórmula de la sección eficaz diferencial de Klein-Nishina en unidades de r_e^2, para los valores de energía del fotón incidente

$$E_1 = \{10,\ 100,\ 511,\ 1333\}\ \text{keV}.$$

siguiendo las siguientes reglas:

1. Haga una gráfica con dos páneles. En uno de los páneles la representación polar y en el otro la representación lineal.
2. En cada panel haga la correspondiente representación para las cuatro energías listadas más arriba
3. Observe que el ángulo sigue la convención de las coordenadas polares, varía en el rango $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$. Rotule ejes angulares en la gráfica polara en este rango empezando en 0°, cada 30°.
4. Use los mismos rótulos para el eje de las abscisas en la gráfica lineal.
5. Para poder comparar las gráficas en los dos páneles, use los mismos colores para representar las mismas energías.

Ahora, usando las gráficas que hizo,

6. Escriba dos frases (numérelas) resumiendo lo que observa en las figuras respecto a la dispersión de los fotones como función simultánea del ángulo y la energía.
7. Escriba dos frases respecto a cada representación mencionando una ventaja y una desventaja.

Referencias

Richard B. Firestone and Virginia S. Shirley, editors. *Table of Isotopes*. John Wiley and Sons, Inc., 1996.