

FISICA

Vol. II CAMPOS Y ONDAS

Autores:

MARCELO ALONSO

EDWARD J. FINN

Versión en español de:

CARLOS ALBERTO HERAS

JOSE A. BARRETO ARAUJO



FONDO EDUCATIVO INTERAMERICANO, S.A.

Versión en español de:

CARLOS ALBERTO HERAS

Coordinador Científico

Universidad de Oriente, Venezuela

y

JOSE A. BARRETO ARAUJO

Departamento de Física

Universidad de Oriente, Venezuela

Con la colaboración de:

ROMULO E. BALLESTERO

Facultad de Ciencias y Letras

Universidad de Costa Rica

FISICA

VOLUMEN II: CAMPOS Y ONDAS

FISICA

VOLUMEN II: CAMPOS Y ONDAS

MARCELO ALONSO

*Departamento de Física, Universidad de Georgetown
Washington, D. C.*

Departamento de Asuntos Científicos, Organización de los Estados Americanos

EDWARD J. FINN

*Departamento de Física, Universidad de Georgetown
Washington, D. C.*



FONDO EDUCATIVO INTERAMERICANO, S. A.

Bogotá - Caracas - México - Panamá - San Juan - Santiago - São Paulo

Versión en español de la obra inglesa titulada
Fundamental Physics in Physics, Volume I, Fields and Waves,
por Marcelo Alonso y Edward J. Purcell, edición de 1967,
publicada por Addison Wesley Publishing Company, Reading,
Mass., EE. UU. Esta edición en español es la única autorizada.

© 1970 por FONDO EDUCATIVO INTERAMERICANO, S. A.

Todos los derechos han sido reservados. Ni este libro ni parte de él pueden ser
reproducidos en forma alguna sin el permiso escrito de su editor. Printed in the
United States of America. Impreso en los E.U.A. Tarjeta del catálogo de la Biblio-
teca del Congreso de los EE. UU.: 74-123319.

PROLOGO A LA EDICION EN ESPAÑOL

Uno de nosotros (J. A. B.), aprovechando la flexibilidad proporcionada por el carácter experimental de la Universidad de Oriente, había comenzado a reestructurar el programa de física general y a experimentar con él a fin de hacerlo más moderno e interesante para los estudiantes. Este trabajo fue completado por ambos traductores a principios de 1967 con la colaboración de algunos colegas. Se iba a utilizar en cursos básicos comunes a todos los estudiantes de ingeniería y de ciencias (incluyendo los del área biológica). La dificultad para ponerlo en práctica era la falta de un texto apropiado, lo cual exigiría de los profesores del departamento un esfuerzo de asimilación de textos tales como *The Feynman Lectures on Physics*. Fue entonces cuando llegó a nuestras manos el volumen I y poco después el II de esta serie de física fundamental universitaria. La adoptamos como texto guía del curso de física general, conscientes de los inconvenientes pedagógicos que implica utilizar a este nivel un libro en otro idioma. Felizmente, el libro, particularmente este volumen II, resultó incitante no sólo para los estudiantes sino también para los profesores. El resultado fue un aumento sustancial en el rendimiento estudiantil, tradicionalmente bajo, especialmente en el primer semestre del curso.

Una de las ventajas que hemos encontrado en esta serie es que su nivel no es uniforme. Mediante una selección adecuada de temas, ejemplos y problemas, se puede conseguir diversos niveles efectivos. Entendemos que esto será de suma utilidad en la América latina, ya que se podrá adaptar el libro a los niveles de enseñanza tan disímiles en la región.

El volumen II es particularmente revolucionario, tanto por el enfoque como por el contenido: la reducción del espacio dedicado a los campos estáticos a sus justas proporciones, la posposición del estudio de circuitos a problemas (lo que realmente son), el tratamiento unificado de las ondas, que permite un estudio razonable de las ondas electromagnéticas (sobre las cuales se basa gran parte de las comodidades que la civilización actual ha puesto a nuestro alrededor). La introducción del concepto de fotón a esta altura nos parece sumamente útil, pues una vez que el estudiante se convence de que los rayos gamma, los X, la luz y las ondas de radio son de la misma naturaleza, la pregunta invariable es ¿por qué, entonces, algunas de estas ondas pueden ser dañinas y otras ni las sentimos?

El trabajo de traducción ha sido a la vez un placer y un estímulo. Un placer por la claridad y la concisión del lenguaje utilizado en el original — aparte de los hallazgos didácticos; sólo introdujimos algunos cambios menores respecto al original cuando consideramos que ello redundaba en mayor precisión o claridad. El lector sabrá disculpar los defectos idiomáticos que pueda hallar: consideramos que poner al alcance de los lectores de habla castellana un texto de alta calidad en la materia era más urgente que lograr un castellano perfecto. La traducción fue además estimulante, en primer lugar, porque dada el área de difusión que tendría la presente edición en castellano, debíamos evitar en lo posible el uso de

regionalismos; en segundo lugar, porque la terminología física castellana todavía no se ha asentado, en parte por la influencia variable que han tenido las terminologías francesa e italiana y la terminología inglesa y en parte por el insuficiente desarrollo de la física en los países de habla castellana. Creemos haber presentado una terminología de uso bastante general; no obstante, se puede tomar como una propuesta para que sea considerada dentro del programa de normalización de terminología que tiene el Centro Latinoamericano de Física. Queremos, sin embargo, insistir en dos casos: hemos usado *torque* para designar el momento de una fuerza porque es la palabra más simple para reemplazar los diversos nombres que se han usado para este concepto y porque contribuye a la internacionalización de la terminología. Otra innovación es *momentum*: los traductores franceses de Newton prefirieron la designación cartesiana de cantidad de movimiento, que también tuvo aceptación general en italiano y en castellano. Sin embargo, su uso resultó inconveniente por su longitud y porque en muchos tratamientos teóricos el concepto no está directamente relacionado con el movimiento. A fin de simplificar y contribuir a la internacionalización de la terminología hemos preferido *momentum*.

Estamos conscientes de haber logrado una traducción aceptable. Esto ha sido posible gracias a la colaboración de físicos de distintas procedencias que trabajan en el Departamento de Física de la Universidad de Oriente, a la de muchos físicos de diferentes partes de Latinoamérica que hemos consultado y a la del Dr. Marcelo Alonso. Queremos también manifestar nuestro agradecimiento a la esposa de uno de nosotros (C. A. H.) por su ayuda en innúmeras tareas secretariales y en la revisión de todo el manuscrito, lo cual redundó en una mejor presentación del texto, principalmente por la supresión de muchos anglicismos, galicismos y barbarismos.

Cumaná
junio de 1970

CARLOS ALBERTO HERAS
JOSÉ A. BARRETO ARAUJO

PROLOGO

La física es una ciencia fundamental que tiene profunda influencia en todas las otras ciencias. Por consiguiente, no sólo los estudiantes de física e ingeniería, sino todo aquel que piense seguir una carrera científica (biología, química y matemática) debe tener una completa comprensión de sus ideas fundamentales.

El propósito primario de un curso de física general (y quizá la única razón para que aparezca en el plan de estudios) es dar al estudiante una visión unificada de la física. Se debería hacer esto sin entrar en muchos detalles, analizando, sólo, los principios básicos, sus implicaciones y sus limitaciones. El estudiante aprenderá aplicaciones específicas en cursos más avanzados. Así, este libro presenta las ideas que creemos fundamentales y que constituyen el corazón de la física de hoy. Hemos tenido en cuenta cuidadosamente las recomendaciones de la *Comission on College Physics* (Comisión de Física para Universitarios) para escoger los temas y el método de presentación.

Hasta no hace mucho tiempo, la física se venía enseñando como si fuera un conglomerado de varias ciencias más o menos relacionadas, pero sin un punto de vista realmente unitario. La división tradicional (en "ciencias"): mecánica, calor, sonido, óptica, electromagnetismo y física moderna no se justifica al presente. Nos hemos apartado de este enfoque tradicional. En su lugar seguimos una presentación lógica unificada, haciendo énfasis en las leyes de conservación, en los conceptos de campos y de ondas y en el punto de vista atómico de la materia. La teoría de la relatividad especial se usa sistemáticamente en el texto como uno de los principios guía que debe satisfacer cualquier teoría física.

El curso se ha dividido en cinco partes: (1) Mecánica, (2) Interacciones y Campos, (3) Ondas, (4) Física cuántica y (5) Física estadística. Comenzamos por la mecánica con el fin de establecer los principios fundamentales necesarios para descubrir los movimientos que observamos a nuestro alrededor. Entonces, como todos los fenómenos naturales son el resultado de interacciones y éstas se analizan en función de campos, en la parte (2) consideramos las clases de interacciones que comprendemos mejor: la gravitacional y la electromagnética, responsables de muchos de los fenómenos macroscópicos que observamos. Estudiamos detalladamente el electromagnetismo, concluyendo con la formulación de las ecuaciones de Maxwell. En la parte (3) discutimos los fenómenos ondulatorios como consecuencia del concepto de campo. Es aquí donde incluimos gran parte del material que generalmente aparece bajo los títulos de óptica y de acústica. Sin embargo, se ha puesto énfasis en las ondas electromagnéticas como extensión lógica de las ecuaciones de Maxwell. En la parte (4) analizamos la estructura de la materia — átomos, moléculas, núcleos y partículas fundamentales —, análisis que está precedido de las bases necesarias de la mecánica cuántica. Finalmente, en la parte (5) hablamos de las propiedades de la materia en conjunto. Comenzamos presentando los principios de la mecánica estadística y los aplicamos a algunos casos simples pero fundamentales. Estudiamos

la termodinámica desde el punto de vista de la mecánica estadística y concluimos con un capítulo sobre las propiedades térmicas de la materia, demostrando cómo se aplican los principios de la mecánica estadística y de la termodinámica.

Este libro es novedoso no sólo en su enfoque sino también en su contenido, ya que hemos incluido algunos tópicos fundamentales que no se encuentran en la mayoría de los textos de física general y hemos dejado de lado otros que son tradicionales. La matemática usada se puede encontrar en cualquier libro de análisis matemático. Suponemos que los estudiantes poseen conocimientos mínimos de análisis matemático y están, a la vez, tomando un curso sobre este tema. Muchas aplicaciones de los principios fundamentales, así como también algunos tópicos un poco más avanzados, aparecen en forma de ejemplos resueltos. Según la conveniencia del profesor, éstos se pueden discutir o proponer conforme a cierta selección, lo cual permite una mayor flexibilidad en la organización del curso.

Los planes de estudios de todas las ciencias están sometidos a presiones para que incorporen nuevos tópicos que están cobrando mayor importancia. Esperamos que este libro alivie estas presiones, elevando en el estudiante el nivel de comprensión de los conceptos físicos y la habilidad para manipular las correspondientes relaciones matemáticas. Esto permitirá elevar el nivel de muchos de los cursos intermedios que se ofrecen en los planes de estudio de pregrado. Los cursos tradicionales de pregrado: mecánica, electromagnetismo y física moderna, son los que más se benefician con esta alza de nivel. Así, el estudiante terminará su carrera con conocimientos superiores a los de antes, beneficio muy importante para aquellos que finalicen sus estudios a esta altura. Además, habrá ahora más oportunidad para hacer cursos nuevos y más interesantes en el postgrado. Esta misma tendencia se encuentra en los textos básicos más recientes de otras ciencias para los primeros y segundos años universitarios.

El texto está concebido para un curso de tres semestres. También se puede usar en aquellas escuelas en las que se enseña un curso de física general de dos semestres seguido de un semestre de física moderna, ofreciendo así una presentación más unificada a lo largo de los tres semestres. Por conveniencia, el texto se ha dividido en tres volúmenes correspondiendo cada uno, *grasso modo*, a un semestre. El volumen I trata de la mecánica y la interacción gravitacional. El volumen II estudia las interacciones electromagnéticas y las ondas, cubriendo esencialmente los cursos de electromagnetismo y óptica. La física cuántica y la física estadística, incluyendo la termodinámica, se estudian en el volumen III. A pesar de que los tres volúmenes están estrechamente relacionados y forman un texto único, cada uno puede ser considerado en sí mismo como un texto introductorio. En particular los volúmenes I y II equivalen a un curso de física general de dos semestres que cubre la física no cuántica.

Esperamos que este texto ayude a los educadores progresistas, quienes constantemente se preocupan por mejorar los cursos que dictan; esperamos, también, que estimule a los estudiantes, quienes merecen una presentación de la física más madura que la de los cursos tradicionales.

Queremos expresar nuestra gratitud a todos aquellos que por su estímulo y ayuda hicieron posible la culminación de este trabajo. Nuestro reconocimiento a los distinguidos colegas, en particular, a los Profesores D. Lazarus y H. S. Robertson, quienes leyeron el manuscrito original; sus comentarios y críticas permitieron corregir y mejorar muchos aspectos del texto. Agradecemos, además, la aptitud y dedicación del personal de la editorial Addison-Wesley. Por último, pero no con menos calor, damos sinceramente las gracias a nuestras esposas, quienes nos han apoyado pacientemente.

ADVERTENCIA AL PROFESOR

Con el fin de ayudar al profesor a organizar su curso, presentamos una breve reseña de este volumen y algunas sugerencias sobre los conceptos importantes de cada capítulo. Como se dijo en el prólogo, este curso de física se ha desarrollado en forma integrada de modo que el estudiante pueda reconocer fácilmente las pocas ideas básicas en que se funda la física (por ejemplo, las leyes de conservación y el hecho de que es posible reducir los fenómenos físicos a interacciones entre partículas fundamentales). El estudiante debería darse cuenta de que para llegar a ser físico o ingeniero debe alcanzar una comprensión clara de estas ideas y desarrollar la habilidad para manejarlas.

Los temas básicos constituyen el cuerpo del texto. Muchos ejemplos han sido incluidos en cada capítulo; algunos son simples aplicaciones numéricas de la teoría que se está discutiendo, mientras que otros son realmente extensiones de la teoría o, deducciones matemáticas. Se recomienda aconsejar al estudiante que en la primera lectura de un capítulo omita *todos* los ejemplos. Luego, en una segunda lectura, que examine los ejemplos sugeridos por el profesor. De esta manera el estudiante comprenderá separadamente las ideas básicas y sus aplicaciones o extensiones.

Hay una sección de problemas al final de cada capítulo. Algunos son más difíciles que el término medio de los problemas de física general y otros son extremadamente simples. Están dispuestos en un orden que corresponde aproximadamente al de las secciones del capítulo, habiendo algunos problemas más difíciles al final. El gran número y la variedad de los problemas dan al instructor mayor libertad de elección en la adecuación de los problemas a las aptitudes de sus estudiantes.

Sugerimos al profesor que establezca una biblioteca de reserva basada en el material bibliográfico que se enumera al final de cada capítulo y que incite al estudiante a usarla para desarrollar el hábito de verificar las fuentes, con lo que obtendrá más de una interpretación de un tópico dado y adquirirá información histórica acerca de la física.

Este volumen está concebido para cubrir el segundo semestre. Como guía hemos sugerido, sobre la base de nuestra propia experiencia, el número de horas de clase que se necesita para cubrir comúnmente el material. El tiempo indicado (43 horas de clase) no incluye el destinado a discusiones, resolución de problemas y evaluación. Hacemos a continuación un breve comentario sobre cada capítulo.

PARTE 2. INTERACCIONES Y CAMPOS

La Parte 2 se ocupa de las interacciones electromagnéticas, que se desarrollan en los capítulos 14 a 17 (en el capítulo 13 del volumen I se presentó la interacción gravitacional). Estos cuatro capítulos constituyen una introducción al electromagnetismo, excluyendo las ondas electromagnéticas y la radiación, que se estudian en la Parte 3. En los capítulos 14 y 15 se introducen algunos conceptos cuánticos,

tales como la cuantificación de la energía y del momentum angular. En el volumen III estos tópicos serán discutidos más extensamente.

Capítulo 14. Interacción eléctrica (4 horas)

Este capítulo se concentra en la dinámica de una partícula sujeta a la interacción coulombiana y considera la naturaleza eléctrica de la materia. Se puede omitir la sección 14.12 (que trata de múltiples efectos de orden superior).

Capítulo 15. Interacción magnética (4 horas)

La primera parte de este capítulo introduce en forma dinámica el concepto de campo magnético y estudia el movimiento de una partícula cargada en un campo magnético. El punto culminante se alcanza hacia el final del capítulo con una discusión de la transformación de Lorentz del campo electromagnético y una revisión del principio de conservación del momentum. El profesor deberá hacer hincapié en esta parte del capítulo.

Capítulo 16. Campos electromagnéticos estáticos (5 horas)

En este capítulo se introducen varios conceptos importantes pero hay dos objetivos principales que el profesor debe tener presentes. Uno es comenzar un desarrollo de la teoría general del campo electromagnético (leyes de Gauss y de Ampère) y el otro es relacionar las propiedades electromagnéticas de la materia en conjunto con la estructura atómica de la misma. Se ha relegado a un plano secundario dentro del texto, temas tales como el de capacitores y circuitos CC, pero se les presta mayor atención en los problemas del final del capítulo.

Capítulo 17. Campos electromagnéticos dependientes del tiempo (4 horas)

La formulación de las ecuaciones de Maxwell es el tema principal de este capítulo. El tema de circuitos CA sólo se discute de paso en el texto, aunque hay muchos buenos ejemplos resueltos y problemas al final del capítulo para ayudar al estudiante a adquirir cierta habilidad para manejar dichos circuitos. Es importante que el estudiante se dé cuenta de que las ecuaciones de Maxwell proveen una descripción compacta del campo electromagnético y que ilustran la estrecha relación que existe entre las partes E y B de este campo.

PARTE 3. ONDAS

La Parte 1 dio al estudiante una descripción "particularia" de los fenómenos naturales. Ahora, presentamos en la Parte 3 la descripción "ondulatoria" complementaria de los mismos, basada en el concepto de campo, ya introducido en la Parte 2. Las ideas que habitualmente se estudian bajo los títulos de acústica y de óptica están considerados aquí en forma integrada.

Capítulo 18. Movimiento ondulatorio (5 horas)

Este capítulo considera el movimiento ondulatorio en general, determinando en cada caso sus propiedades específicas a partir de las ecuaciones de campo que describen una situación física determinada, de modo que no es necesario recurrir a la imagen mecánica de moléculas moviéndose hacia arriba y hacia abajo. Dos ideas son fundamentales: una es comprender la ecuación de onda; la otra es entender que una onda transporta tanto energía como momentum.

Capítulo 19. Ondas electromagnéticas (5 horas)

Presentamos aquí las ondas electromagnéticas predichas por las ecuaciones de Maxwell, por lo que el estudiante debe entender a fondo las secciones 19.2 y 19.3.

Este capítulo también considera los mecanismos de radiación y absorción. Introduce además el concepto importante de fotón como resultado natural del hecho de que las ondas electromagnéticas transportan energía y momentum y de que estas propiedades físicas están relacionadas por la ecuación $E = cp$. También se discute brevemente las transiciones radiativas entre estados estacionarios.

Capítulo 20. Reflexión, refracción, polarización (4 horas)

Los textos elementales recurren tradicionalmente al principio de Huygens para estudiar la reflexión y la refracción, aunque el principio que usan realmente es el teorema de Malus. Lo novedoso de este capítulo es que encara este hecho. Se puede omitir las secciones 20.8 a 20.13 sin perder la continuidad del desarrollo.

Capítulo 21. Geometría de las ondas (3 horas)

Se puede omitir totalmente este capítulo que en cierto sentido se ocupa realmente de la óptica geométrica. De todos modos, el profesor debe hacer resaltar que el material de este capítulo no sólo se aplica a ondas lumínicas sino también a ondas en general. La convención de signos adoptada es la misma que la de *Optics*, por Born y Wolf, Pergamon Press, 1965.

Capítulo 22. Interferencia (3 horas)

En este capítulo se usa sistemáticamente el método de los vectores rotantes. Puede resultar provechoso que el estudiante relea las secciones 12.7, 12.8 y 12.9 del volumen I. El concepto de guía de onda que aquí se da es tan importante que no se debe omitir.

Capítulo 23. Difracción (3 horas)

Este capítulo depende estrechamente del anterior por lo que el profesor debe considerarlos en conjunto. En este capítulo, como en el anterior, hemos tratado de separar los pasos algebraicos del resto del material para que el instructor pueda omitirlos si así lo desea.

Capítulo 24. Fenómenos de transporte (3 horas)

La importancia de los fenómenos de transporte está bien reconocida, ya que los mismos tienen muchas aplicaciones en física, química, biología e ingeniería. Este capítulo constituye una introducción breve y coordinada a estos fenómenos, dando también al estudiante una idea sobre otros tipos de propagación de campos. Si el profesor está presionado por el tiempo, puede encarar este capítulo como tarea solamente y omitir los ejemplos y problemas.

Este es el momento oportuno para concluir el segundo semestre. A esta altura el estudiante deberá tener una comprensión sólida de la física no cuántica, y además haber aprehendido las ideas de fotón y de cuantificación de la energía y del momentum angular. El tercer semestre estará dedicado a la física cuántica y a la física estadística, que se presentarán como refinamiento de los conceptos físicos al nivel de lo muy pequeño (o microscópico) y al nivel de lo muy grande (o macroscópico).

El apéndice matemático que se encuentra al final del libro suministra una referencia rápida a las fórmulas de uso más frecuentes en el texto y a algunas informaciones útiles. Por conveniencia, algunas fórmulas relacionadas con la transformación de Lorentz han sido agregadas. Las mismas fueron deducidas en el volumen I.

ADVERTENCIA AL ESTUDIANTE

Es este un libro sobre los fundamentos de la física para estudiantes que siguen carreras científicas o ingeniería. Los conceptos e ideas que aprenda en él entrará, muy probablemente, a formar parte de su vida profesional y de su modo de pensar. Cuanto mejor los comprenda tanto más fácil le resultará el resto de su educación superior.

En este curso debe estar preparado para abordar numerosos problemas arduos. El aprender las leyes y técnicas de la física puede ser, a veces, un proceso lento y doloroso. Antes de que entre en esas regiones de la física que excitan su imaginación, usted debe dominar otras menos llamativas pero muy fundamentales, sin las cuales no puede utilizar o comprender la física en forma apropiada.

Ud. deberá mantener dos objetivos principales al tomar este curso. Primero: familiarizarse completamente con el puñado de leyes y principios básicos que constituyen la columna vertebral de la física. Segundo: desarrollar la habilidad de manejar estas ideas y aplicarlas a situaciones concretas; en otras palabras, la habilidad de pensar y actuar como físico. El primer objetivo lo puede alcanzar principalmente leyendo y releyendo aquellas secciones impresas en cuero grande. Para ayudarlo a alcanzar el segundo objetivo hay a lo largo del texto, en letra pequeña, muchos ejemplos resueltos y están los problemas para resolver en casa al final de cada capítulo. Recomendamos encarecidamente que lea primero el texto principal y una vez familiarizado con él, prosegua con los ejemplos y problemas asignados por el profesor. En algunos casos los ejemplos ilustran una aplicación de la teoría a una situación concreta, en otros amplian la teoría considerando nuevos aspectos del problema en discusión; a veces suministran una justificación de la teoría.

Los problemas que están al final de cada capítulo tienen un grado variable de dificultad. Oscilan entre lo más simple y lo complejo. En general, es bueno tratar de resolver un problema primero en forma simbólica o algebraica, introduciendo al final los valores numéricos. Si el problema que le han asignado no puede resolverlo en un tiempo prudencial, póngalo a un lado e inténtelo más tarde. Para el caso de aquellos pocos problemas que se resisten a ser resueltos, deberá procurar ayuda. El libro *How to Solve It* (segunda edición), de G. Polya (Doubleday, Garden City, N. Y., 1957) es una fuente de autoayuda que le enseñará el método de resolución de problemas.

La física es una ciencia cuantitativa que necesita de la matemática para la expresión de sus ideas. Toda la matemática empleada en este libro se puede encontrar en cualquier texto corriente de análisis matemático y deberá consultarlo toda vez que no comprenda una deducción matemática. No deberá, de manera alguna, sentirse desalentado ante una dificultad matemática; en caso de dificultades matemáticas, consulte a su profesor o a un estudiante más avanzado. Para el científico y el ingeniero la matemática es una herramienta y tiene importancia secundaria en la comprensión de los conceptos físicos. Para su comodidad, se

enumera en un apéndice al final del libro algunas de las relaciones matemáticas más útiles.

Todos los cálculos de la física se deben llevar a cabo utilizando un sistema compatible de unidades. En este libro se emplea el sistema MKSC. Como difiere un poco del sistema práctico, podrá encontrarlo extraño al principio. No obstante, se requiere un mínimo esfuerzo para familiarizarse con él. Además, es el sistema oficialmente aprobado para el trabajo científico y en los Estados Unidos lo usa aún el *National Bureau of Standards* en sus publicaciones. Sea extremadamente cuidadoso en verificar la compatibilidad de las unidades en todos sus cálculos. Es además una buena idea utilizar la regla de cálculo desde el comienzo; la precisión a tres cifras significativas de la más simple de las reglas de cálculo le ahorrará muchas horas de trabajo numérico. Sin embargo, en algunos casos, puede que la regla de cálculo no le dé la precisión necesaria.

Al final de cada capítulo se da una lista bibliográfica seleccionada. Consultela tan a menudo como sea posible. Algunos trabajos ayudarán a entender la idea de la física como una ciencia en evolución, mientras que otros ampliarán el material del texto. En particular encontrará que el libro de Holton y Roller, *Foundations of Modern Physics* (Addison-Wesley, Reading, Mass., 1958) es particularmente útil por la información que trae sobre la evolución de ideas en la física.

AGRADECIMIENTOS

Queremos expresar nuestro reconocimiento a las siguientes personas y organizaciones por su amabilidad al permitirnos publicar material ilustrativo de su pertenencia: Brookhaven National Laboratory (figura 15-6); General Electric Company (figura 17-5b); Profesor Harvey Fletcher (figura 18-23); Educational Services, Incorporated (figura 18-37a); U. S. Naval Ordnance Laboratory, White Oak, Silver Spring, Md. (figura 18-37b); *Vibration and Sound*, por Philip M. Morse, McGraw-Hill Book Co., 1948 (figura 22-26); *Ripple Tank Studies of Wave Motion*, con autorización de W. Llowarch, The Clarendon Press, Oxford, Inglaterra (figura 23-2); *Principles of Optics*, por Hardy y Perrin, McGraw-Hill Book Co., 1932 (figuras 23-12 y 23-14b); y Profesor B. E. Warren, del M.I.T. (figura 23-42). Debemos especial agradecimiento a Educational Services, Incorporated y al Physical Science Study Committee, de cuyo libro *PSSC Physics*, D. C. Heath and Co., 1960, hemos tomado las siguientes figuras: 9-13a, 18-22, 18-28b, 20-6b, 20-10b, 20-11b, 20-16d y e, 22-1 y 22-15.

Contratapas delanteras

Tabla periódica de los elementos ; constantes fundamentales

Contratapas traseras

Unidades y símbolos ; factores de conversión

Capítulo 14 Interacción eléctrica

Introducción 457. Carga eléctrica 458. Ley de Coulomb 460. Campo eléctrico 462. La cuantización de la carga eléctrica 468. Estructura eléctrica de la materia 471. Estructura atómica 473. Potencial eléctrico 480. Relaciones energéticas en un campo eléctrico 484. Corriente eléctrica 489. Dipolo eléctrico 491. Multipolos eléctricos de orden superior 498.

Capítulo 15 Interacción magnética

Introducción 512. Fuerza magnética sobre una carga en movimiento 513. Movimiento de una carga en un campo magnético 516. Ejemplos de movimiento de partículas cargadas en un campo magnético 523. Fuerza magnética sobre una corriente eléctrica 530. Torque magnético sobre una corriente cerrada 538. Campo magnético de una corriente rectilínea 539. Fuerzas entre corrientes 541. Campo magnético de una corriente circular 544. Campo magnético de una carga en movimiento (no relativista) 549. Electromagnetismo y el principio de relatividad 551. Campo electromagnético de una carga en movimiento 555. Interacción electromagnética entre dos cargas en movimiento 560.

Capítulo 16 Campos electromagnéticos estáticos

Introducción 577. Flujo de un campo vectorial 577. Ley de Gauss para el campo eléctrico 579. Ley de Gauss en forma diferencial 584. Polarización de la materia 587. Desplazamiento eléctrico 591. Cálculo de la susceptibilidad eléctrica 593. Capacitancia ; capacitores 600. Energía del campo eléctrico 603. Conductividad eléctrica ; ley de Ohm 606. Fuerza electromotriz 612. Ley de Ampère para el campo magnético 616. Ley de Ampère en forma diferen-

cial 621. Flujo magnético 623. Magnetización de la materia 623. Campo magnetizante 625. Cálculo de la susceptibilidad magnética 628. Resumen de las leyes de los campos estáticos 633.

Capítulo 17 Campos electromagnéticos dependientes del tiempo

Introducción 645. Ley de Faraday-Henry 645. El betatrón 648. Inducción electromagnética debida al movimiento relativo de un conductor y un campo magnético 651. La inducción electromagnética y el principio de relatividad 654. Potencial eléctrico e inducción electromagnética 655. Ley de Faraday-Henry en forma diferencial 655. Autoinducción 657. Energía del campo magnético 661. Ondas eléctricas 664. Circuitos acoplados 670. Principio de conservación de la carga 674. Ley de Ampère-Maxwell 675. Ley de Ampère-Maxwell en forma diferencial 678. Ecuaciones de Maxwell 680.

PARTE 3 ONDAS

Capítulo 18 Movimiento ondulatorio

Introducción 694. Descripción matemática de la propagación 695. Análisis de Fourier del movimiento ondulatorio 699. Ecuación diferencial del movimiento ondulatorio 701. Ondas elásticas en una barra 703. Ondas de presión en una columna de gas 707. Ondas transversales en una cuerda 712. Ondas superficiales en un líquido 716. ¿Qué se propaga en un movimiento ondulatorio? 719. Ondas en dos y tres dimensiones 722. Ondas esféricas en un fluido 727. Velocidad de grupo 729. El efecto Doppler 731. Sonido ; acústica 735.

Capítulo 19 Ondas electromagnéticas

Introducción 744. Ondas electromagnéticas planas 744. Energía y momentum de una onda electromagnética 748. Radiación por un dipolo eléctrico oscilante 752. Radiación por un dipolo magnético oscilante 757. Radiación por multipolos oscilantes de orden superior 761. Radiación por una carga acelerada 761. Absorción de la radiación electromagnética 769. Difusión de ondas electromagnéticas por electrones ligados 770. Difusión de la radiación electromagnética por un electrón libre ; el efecto Compton 772. Fotones 776. Más sobre los fotones : el efecto fotoeléctrico 780. Propagación de ondas electromagnéticas en la materia ; dispersión 782. Efecto Doppler en las ondas electromagnéticas 786. Espectro de la radiación electromagnética 791.

Capítulo 20 Reflexión, refracción, polarización

Introducción 802. Principio de Huygens 802. Teorema de Malus 804. Reflexión y refracción de ondas planas 806. Reflexión y refracción de ondas esféricas 810. Más acerca de las leyes de la reflexión y de la refracción 812. Reflexión y refracción de ondas electromagnéticas 817. Propagación de ondas electromagnéticas en un medio anisótropo 820. Dicroísmo 826. Doble refracción 827. Actividad óptica 833. Reflexión y refracción en superficies metálicas 837. Propagación en un medio no homogéneo 838.

Capítulo 21 Geometría de las ondas

Introducción 846. Reflexión en una superficie esférica 847. Refracción en una superficie esférica 854. Lentes 858. Instrumentos ópticos 863. El prisma 867. Dispersión de un medio 869. Aberración cromática 872. Principio de Fermat del tiempo estacionario 875.

Capítulo 22 Interferencia

Introducción 887. Interferencia de ondas producidas por dos fuentes sincrónicas 887. Interferencia de ondas producidas por varias fuentes sincrónicas 893. Ondas estacionarias en una dimensión 899. Ondas estacionarias y la ecuación de onda 902. Ondas electromagnéticas estacionarias 907. Ondas estacionarias en dos dimensiones 910. Ondas estacionarias en tres dimensiones ; cavidades resonantes 915. Guías de onda 918.

Capítulo 23 Difracción

Introducción 932. Difracción de Fraunhofer por una rendija rectangular 933. Difracción de Fraunhofer por una abertura circular 939. Difracción de Fraunhofer por dos rendijas paralelas iguales 941. Redes de difracción 943. Difracción de Fresnel 947. Difusión de ondas 954. Difusión de rayos X por cristales 954.

Capítulo 24 Fenómenos de transporte

Introducción 967. Difusión molecular ; ley de Fick 967. Conducción térmica ; ley de Fourier 974. Transporte con producción y absorción 982. Viscosidad 984. Camino libre medio, frecuencia de colisión y sección eficaz de colisión 988. Teoría molecular de los fenómenos de transporte 992. Conclusión 995.

Apéndice : Relaciones matemáticas ; Tablas A-3

Respuestas a los problemas con número impar A-17

Indice alfabético A-29

PARTE 2

INTERACCIONES Y

CAMPOS

B. Electromagnetismo

Una vez entendidas las reglas generales que gobiernan el movimiento, el paso siguiente es investigar las interacciones responsables de dichos movimientos. Hay varios tipos de interacciones. Una es la *interacción gravitacional* que se manifiesta en el movimiento planetario y en el de la materia en conjunto. La gravitación, a pesar de ser la más débil de todas las interacciones conocidas, es la primera interacción estudiada cuidadosamente, debido al interés que el hombre ha tenido desde la antigüedad en la astronomía y porque la gravitación es responsable de muchos fenómenos que afectan directamente nuestra vida. Otra es la *interacción electromagnética*, la mejor comprendida y posiblemente la más importante desde el punto de vista de la vida diaria. La mayoría de los fenómenos que observamos a nuestro alrededor, incluyendo los procesos químicos y biológicos, son el resultado de interacciones electromagnéticas entre átomos y moléculas. Un tercer tipo es la *interacción fuerte o nuclear*, que es responsable de que los protones y los neutrones (conocidos como nucleones) se mantengan dentro del núcleo atómico, y de otros fenómenos relacionados. A pesar de la investigación intensiva realizada, nuestro conocimiento de esta interacción es aún incompleto. Un cuarto tipo es la *interacción débil*, responsable de ciertos procesos entre partículas fundamentales, tal como la desintegración beta. Nuestro conocimiento de esta interacción es aún muy escaso. La intensidad relativa de las interacciones nombradas es: fuerte, tomada como 1; electromagnética $\sim 10^{-2}$; débil $\sim 10^{-5}$; gravitacional $\sim 10^{-38}$. Uno de los problemas no resueltos de la física es por qué parece haber sólo cuatro interacciones y por qué hay una diferencia tan grande en sus intensidades.

Es interesante ver lo que Isaac Newton decía hace 200 años acerca de las interacciones:

¿No tienen acaso las pequeñas Partículas de los Cuerpos ciertos Poderes, o Fuerzas, por medio de los cuales actúan...unas sobre otras para producir gran Parte de los Fenómenos de la Naturaleza? Porque bien se sabe que los Cuerpos actúan unos sobre otros por medio de las Atracciones de la Gravedad, Magnetismo, y Electricidad....y no lo tengáis por improbable sino que puede haber más Poderes atractivos que éstos.... De cómo estas atracciones pueden ser realizadas, no lo considero aquí.... Las Atracciones de la Gravedad, del Magnetismo, y de la Electricidad, alcanzan distancias muy apreciables,...y puede que haya otras que alcancen distancias tan pequeñas que hasta ahora escapan a la observación;.... (*Opticks*, Libro III, Indagación 31)

Para describir estas interacciones introducimos el concepto de *campo*. Entendemos por campo una propiedad física extendida en una región del espacio y descrita por medio de una función de la posición y el tiempo. Suponemos que para cada interacción una partícula produce a su alrededor un campo correspondiente. Este campo actúa a su vez sobre una segunda partícula para producir la interacción necesaria. La segunda partícula produce su propio campo, el cual actúa sobre la primera dando como resultado una interacción mutua.

Aunque se puede describir las interacciones por medio de campos, no todos los campos corresponden a interacciones, hecho que está implícito en la definición de campo. Por ejemplo, un meteorólogo puede expresar la presión y la temperatura atmosféricas en función de la latitud y la longitud en la superficie terrestre y de la altura sobre ésta. Tenemos entonces dos campos escalares: el

campo de presiones y el campo de temperaturas. En el movimiento de un fluido su velocidad en cada punto constituye un campo vectorial. El concepto de campo es entonces de gran utilidad general en la física.

En el capítulo 13 del volumen I se estudió la interacción gravitacional y el campo gravitacional. En los capítulos 14 a 17 de este volumen, consideraremos las interacciones electromagnéticas. Hablaremos del resto de las interacciones en el volumen III.

INTERACCION ELECTRICA

- 14.1 *Introducción*
- 14.2 *Carga eléctrica*
- 14.3 *Ley de Coulomb*
- 14.4 *Campo eléctrico*
- 14.5 *La cuantización de la carga eléctrica*
- 14.6 *Estructura eléctrica de la materia*
- 14.7 *Estructura atómica*
- 14.8 *Potencial eléctrico*
- 14.9 *Relaciones energéticas en un campo eléctrico*
- 14.10 *Corriente eléctrica*
- 14.11 *Dipolo eléctrico*
- 14.12 *Multipolos eléctricos de orden superior*

14.1 Introducción

Consideremos un experimento muy simple. Supongamos que después de peinar nuestro cabello un día muy seco acercamos el peine a pedacitos ligeros de papel: observamos que el peine los atrae. Fenómeno similar ocurre si frotamos una varilla de vidrio con un paño de seda o una varilla de ámbar con un pedazo de piel. Podemos concluir que, como resultado del frotamiento, estos materiales adquieren una nueva propiedad que llamamos *electricidad* (del griego *elektron*, que significa ámbar), y que esta propiedad eléctrica da lugar a una interacción más fuerte que la gravitación. Hay, además, varias otras diferencias fundamentales entre las interacciones eléctrica y gravitacional.

En primer lugar, hay solamente una clase de interacción gravitacional, que da como resultado una atracción universal entre dos masas cualesquier; por el contrario, hay dos clases de interacciones eléctricas. Supongamos que acercamos una varilla de vidrio electrizada a una pequeña esfera de corcho suspendida de un hilo. Vemos que la varilla atrae la esfera. Si repetimos el experimento con una varilla de ámbar electrizada, observamos el mismo efecto de atracción. Sin embargo, si ambas varillas se acercan a la esfera simultáneamente, en lugar de una mayor atracción, observamos una fuerza de atracción menor o aún ninguna atracción de la esfera (fig. 14-1). Estos experimentos simples indican que, aunque ambas varillas electrizadas, la de vidrio y la de ámbar, atraen la bola de corcho, lo hacen debido a procesos físicos opuestos. Cuando ambas varillas actúan simultáneamente, sus acciones se contrarrestan produciendo un efecto menor o nulo. Concluimos, entonces, que hay dos clases de estados de electrización: uno que se manifiesta sobre el vidrio y el otro sobre el ámbar. Al primero le llamamos *positivo* y al otro *negativo*.

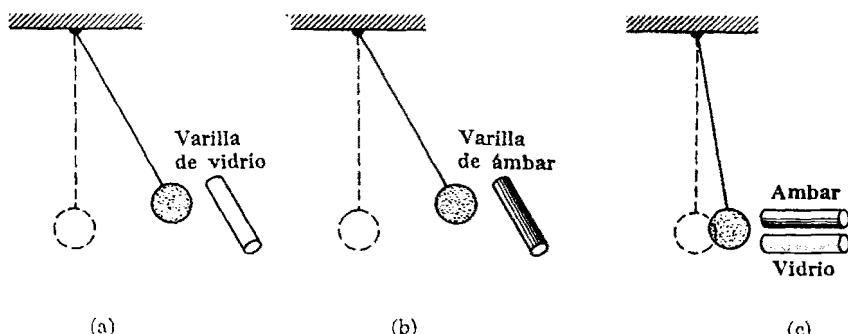


Fig. 14-1. Experimentos con varillas de vidrio y ámbar electrizadas.

Supongamos, ahora, que tocamos dos esferas de corcho con una varilla de vidrio electrizada. Podemos suponer que ambas se electrizan positivamente. Si las acercamos, observamos que se repelen (fig. 14-2a). El mismo resultado se obtiene cuando tocamos las esferas con la varilla de ámbar electrizada, de modo que ambas se electricen negativamente (fig. 14-2b). Sin embargo, si tocamos

una de ellas con la varilla de vidrio y la otra con la de ámbar, de modo que una adquiera electricidad positiva y la otra negativa, observamos que se atraen (fig. 14-2c).

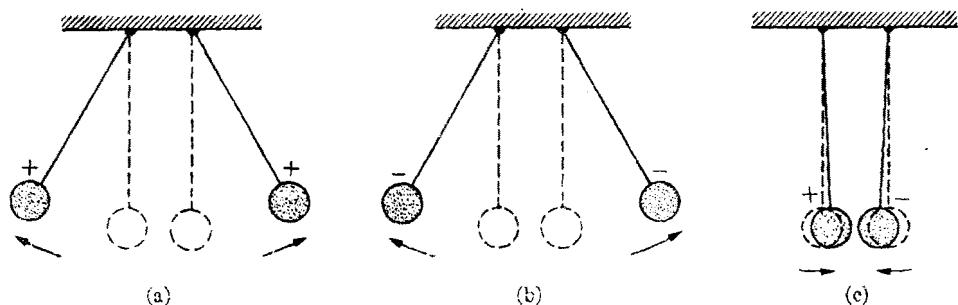


Fig. 14-2. Interacciones eléctricas entre cargas de igual y de diferente signo.

Por consiguiente, mientras que la interacción gravitacional es siempre atractiva, la interacción eléctrica puede ser atractiva o repulsiva.

Dos cuerpos con la misma clase de electrización (positiva o negativa) se repelen, pero si tienen diferentes clases de electrización (una positiva y la otra negativa), se atraen.

Este enunciado se ilustra esquemáticamente en la fig. 14-3. Si la interacción eléctrica hubiera sido sólo repulsiva o sólo atractiva, probablemente nunca hubiéramos observado la existencia de la gravitación porque la interacción eléctrica es más fuerte. Sin embargo, la mayoría de los cuerpos están compuestos de cantidades iguales de electricidad positiva y negativa, de modo que la interacción eléctrica entre dos cuerpos macroscópicos es muy pequeña o cero. De este modo, como resultado del efecto acumulativo de las masas, la interacción que aparece macroscópicamente como dominante, es la interacción gravitacional, aunque mucho más débil.

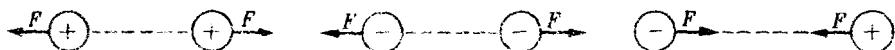


Fig. 14-3. Fuerzas entre cargas de igual y de diferente signo.

14.2 Carga eléctrica

Del mismo modo que caracterizamos la intensidad de la interacción gravitacional asignando a cada cuerpo una masa gravitacional, caracterizamos el estado de electrización de un cuerpo definiendo una *masa eléctrica*, más comúnmente llamada *carga eléctrica*, representada por el símbolo q . Así, cualquier porción de materia, o cualquier partícula, está caracterizada por dos propiedades independientes fundamentales: masa y carga.

Así como hay dos clases de electrización, hay también dos clases de carga eléctrica: positiva y negativa. Un cuerpo que presenta electrización positiva tiene una carga eléctrica positiva, y uno con electrización negativa tiene una carga eléctrica negativa. La carga eléctrica neta de un cuerpo es la suma algebraica de sus cargas positivas y negativas. Un cuerpo que tiene cantidades iguales de electricidad positiva y negativa (esto es, carga neta cero) se dice eléctricamente *neutral*. Por otra parte, un cuerpo que tiene carga neta diferente de cero, se llama a menudo *ión*. Como la materia en conjunto no presenta fuerzas eléctricas apreciables, debemos suponer que está compuesta de cantidades iguales de cargas positivas y negativas.

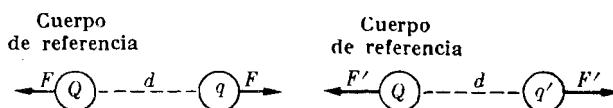


Fig. 14-4. Comparación de las cargas eléctricas q y q' , mediante sus interacciones eléctricas con una tercera carga Q .

Para definir operacionalmente la carga de un cuerpo electrizado adoptamos el siguiente procedimiento. Tomamos un cuerpo cargado arbitrario Q (fig. 14-4) y, a una distancia d de él, colocamos la carga q . Entonces medimos la fuerza F ejercida sobre q . Seguidamente, colocamos otra carga q' a la misma distancia d de Q y medimos la fuerza F' . Definimos los valores de las cargas q y q' como proporcionales a las fuerzas F y F' . Esto es

$$q/q' = F/F'. \quad (14.1)$$

Si arbitrariamente asignamos un valor unitario a la carga q' , tenemos un medio de obtener el valor de la carga q . Este método de comparación de cargas es muy similar al usado en la sección 13.3 para comparar las masas de dos cuerpos. Nuestra definición de carga implica que, siendo iguales todos los factores geométricos, la fuerza de la interacción eléctrica es proporcional a las cargas de las partículas.

Se ha encontrado que, en todos los procesos observados en la naturaleza, la carga neta de un sistema aislado permanece constante. En otras palabras,

en cualquier proceso que ocurra en un sistema aislado, la carga total o neta no cambia.

No se ha hallado excepción a esta regla, conocida como el *principio de conservación de la carga*. Tendremos ocasión de discutir este principio más adelante, cuando tratemos los procesos que involucran partículas fundamentales. El estudiante recordará que ya hemos aplicado este principio en el ejemplo 11.11, donde la reacción $p^+ + p^+ \rightarrow p^+ + p^+ + p^+ + p^-$ fue discutida. A la izquierda la carga total es dos veces la carga del protón y a la derecha los tres protones contribuyen tres veces la carga del protón, mientras que el antiproton contribuye la carga del protón negativa. De este modo se obtiene una carga neta igual a dos veces la carga del protón.

14.3 Ley de Coulomb

Consideremos la interacción eléctrica entre dos partículas cargadas, *en reposo*, en el sistema inercial de referencia del observador o, cuando más, moviéndose a una velocidad muy pequeña; el resultado de tal interacción constituye la *electrostática*. La interacción electrostática entre dos partículas cargadas está dada por la *ley de Coulomb*, llamada así en honor del ingeniero francés Charles A. de Coulomb (1736-1806) quien fue el primero en enunciarla, como sigue:

La interacción electrostática entre dos partículas cargadas es proporcional a sus cargas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellas y su dirección es según la recta que las une.

Esto puede expresarse matemáticamente por

$$F = K_e \frac{qq'}{r^2}, \quad (14.2)$$

donde r es la distancia entre las dos cargas q y q' , F es la fuerza que actúa sobre cada carga y K_e es una constante a determinar de acuerdo con nuestra elección de unidades. Esta ley es muy semejante a la ley de interacción gravitacional. Por consiguiente, podemos aplicar aquí muchos resultados matemáticos que demostramos en el capítulo 13 simplemente reemplazando $\gamma mm'$ por $K_e qq'$.

Podemos experimentalmente verificar la ley de la proporcionalidad inversa del cuadrado de la distancia midiendo las fuerzas entre dos cargas dadas colocadas a distancias distintas. Una posible disposición experimental se ha indicado en la fig. 14-5 parecida a la balanza de torsión de Cavendish de la figura 13-3. La fuerza F entre la carga en B y la carga en D se encuentra midiendo el ángulo θ según el cual la fibra OC rota para restablecer el equilibrio.

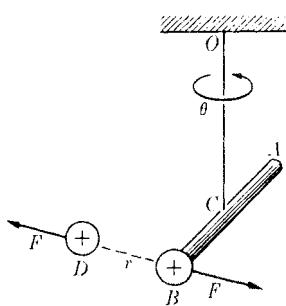


Fig. 14-5. Balanza de torsión de Cavendish para verificar la ley de la interacción eléctrica entre dos cargas.

La constante K_e en la ec. (14.2) es semejante a la constante γ en la ec. (13.1). Pero en el capítulo 13 las unidades de masa, distancia y fuerza estaban ya definidas y el valor de γ se determinó experimentalmente. En el presente caso, sin embargo, aunque las unidades de fuerza y distancia han sido ya definidas, la unidad de carga no se ha definido todavía (la definición dada en la sección 2.3 fue sólo preliminar). Si hacemos una proposición definida acerca de la unidad de carga, entonces podemos determinar K_e experimentalmente. Sin embargo, procederemos en sentido inverso y asignando a K_e un valor conveniente, fijamos, de este modo, la unidad de carga. Adoptaremos este segundo método y, usando el sistema MKSC establecemos el valor numérico de K_e .

igual a $10^{-7} c^2 = 8,9874 \times 10^9$, donde (como anteriormente) c es la velocidad de la luz en el vacío.* En la práctica, podemos tomar para K_e el valor 9×10^9 . Entonces, cuando la distancia se mide en metros y la fuerza en newtons, la ec. (14.2) se escribe

$$F = 9 \times 10^9 \frac{qq'}{r^2}. \quad (14.3)$$

Una vez que hemos decidido sobre el valor de K_e , la unidad de carga está fijada. Esta unidad se llama un coulomb, y se designa por el símbolo C. De aquí que podemos establecer la siguiente definición: *el coulomb es la carga que, colocada a un metro de otra carga igual en el vacío, la repele con una fuerza de $8,9874 \times 10^9$ newtons.* La fórmula (14.3) es válida solamente para dos partículas cargadas en el vacío; o sea, para dos partículas cargadas en ausencia de toda otra carga o materia (ver sección 16.6). Obsérvese que, de acuerdo con la ec. (14.2), expresamos K_e en $\text{N m}^2 \text{C}^{-2}$ ó $\text{m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2} \text{C}^{-2}$.

Por razones prácticas y de cálculo numérico es más conveniente expresar K_e en la forma

$$K_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}, \quad (14.4)$$

donde la nueva constante ϵ_0 se llama *permitividad del vacío*. De acuerdo con el valor asignado a K_e , su valor es

$$\epsilon_0 = \frac{10^7}{4\pi c^2} = 8,854 \times 10^{-12} \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-2} \text{ C}^2 \quad \text{o} \quad \text{m}^{-3} \text{ kg}^{-1} \text{ s}^2 \text{ C}^2. \quad (14.5)$$

Por lo tanto escribiremos la ec. (14.3) en la forma

$$F = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \quad (14.6)$$

Cuando usemos la ec. (14.6) debemos incluir los signos de las cargas q y q' . Un valor negativo para F corresponde a atracción y un valor positivo corresponde a repulsión.

EJEMPLO 14.1. Dada la disposición de cargas de la fig. 14-6, donde $q_1 = +1,5 \times 10^{-3}$ C, $q_2 = -0,50 \times 10^{-3}$ C, $q_3 = 0,20 \times 10^{-3}$ C, y $AC = 1,2$ m, $BC = 0,50$ m, hallar la fuerza resultante sobre la carga q_3 .

Solución: La fuerza F_1 entre q_1 y q_3 es de repulsión, mientras que la fuerza F_2 entre q_2 y q_3 es de atracción. Sus respectivos valores, usando la ec. (14.6), son

$$F_1 = \frac{q_1 q_3}{4\pi\epsilon_0 r_1^2} = 1,9 \times 10^3 \text{ N}, \quad F_2 = \frac{q_2 q_3}{4\pi\epsilon_0 r_2^2} = -3,6 \times 10^3 \text{ N}.$$

Luego la fuerza resultante es

$$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} = 4,06 \times 10^3 \text{ N}.$$

* La elección de este valor particular para K_e se explicará en la sección 15.9.

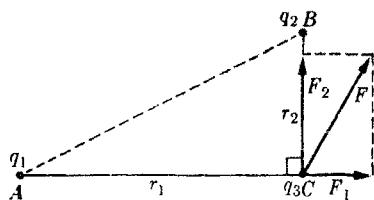


Fig. 14-6. Fuerza eléctrica resultante sobre q_3 debida a q_1 y a q_2 .

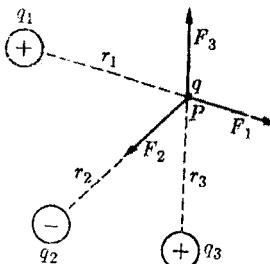


Fig. 14-7. Campo eléctrico resultante en el punto P , producido por varias cargas.

14.4 Campo eléctrico

Cualquier región del espacio en donde una carga eléctrica experimenta una fuerza se llama un *campo eléctrico*. La fuerza se debe a la presencia de otras cargas en aquella región. Por ejemplo, una carga q colocada en una región donde hayan otras cargas q_1, q_2, q_3, \dots (fig. 14-7) experimenta una fuerza $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \dots$, y decimos que está en un campo eléctrico producido por las cargas q_1, q_2, q_3, \dots (la carga q , por supuesto, también ejerce fuerzas sobre q_1, q_2, q_3, \dots pero por ahora no las tomaremos en cuenta). Como la fuerza que cada carga q_1, q_2, q_3, \dots ejerce sobre la carga q es proporcional a q , la fuerza resultante \mathbf{F} es proporcional a q . Así, la fuerza sobre una partícula cargada, colocada en un campo eléctrico, es proporcional a la carga de la partícula.

La intensidad de un campo eléctrico en un punto es igual a la fuerza por unidad de carga colocada en ese punto. El símbolo es \mathcal{E} . Por lo tanto

$$\mathcal{E} = \frac{\mathbf{F}}{q} \quad o \quad \mathbf{F} = q\mathcal{E}. \quad (14.7)$$

La intensidad de campo eléctrico \mathcal{E} se expresa en newton/coulomb o $N C^{-1}$, o, usando las unidades fundamentales, $m kg s^{-2} C^{-1}$.

Obsérvese que, atendiendo a la definición (14.7), si q es positiva, la fuerza \mathbf{F} que actúa sobre la carga tiene la misma dirección del campo \mathcal{E} pero si q es negativa, la fuerza \mathbf{F} tiene la dirección opuesta a \mathcal{E} (fig. 14-8). Por lo tanto, si aplicamos un campo eléctrico en una región donde haya iones positivos y negativos, el campo tenderá a mover los cuerpos cargados positivamente y negativamente en direcciones opuestas, lo cual da como resultado una separación de cargas, efecto éste llamado algunas veces *polarización*.

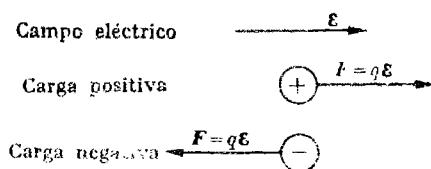


Fig. 14-8. Sentido de la fuerza producida por un campo eléctrico sobre una carga positiva y sobre una negativa.

Escribamos la ec. (14.6) en la forma $F = q'(q/4\pi\epsilon_0 r^2)$. Esto da la fuerza producida por la carga q sobre la carga q' colocada a una distancia r de q . Podríamos también decir, usando la ec. (14.7), que el campo eléctrico \mathcal{E} en el punto donde está colocada q' es tal que $F = q'\mathcal{E}$. Por consiguiente, comparando las dos expresiones de F , concluimos que el campo eléctrico a la distancia r de una carga puntual q es $\mathcal{E} = q/4\pi\epsilon_0 r^2$, o en forma vectorial

$$\mathcal{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{u}_r, \quad (14.8)$$

donde \mathbf{u}_r es el vedor en la dirección radial, alejándose de la carga q , ya que \mathbf{F} está según esta dirección. La expresión (14.8) es válida para cargas positivas y negativas, con el sentido de \mathcal{E} respecto a \mathbf{u}_r dado por el signo de q . De este modo \mathcal{E} está dirigido alejándose de una carga positiva y hacia una carga negativa. En la fórmula correspondiente para el campo gravitacional (ec. 13.15), el signo negativo se escribió explícitamente porque la interacción gravitacional es siempre de atracción. La fig. 14-9(a) representa el campo eléctrico en las vecindades de una carga positiva y la fig. 14-9(b) muestra el campo eléctrico en las cercanías de una carga negativa.

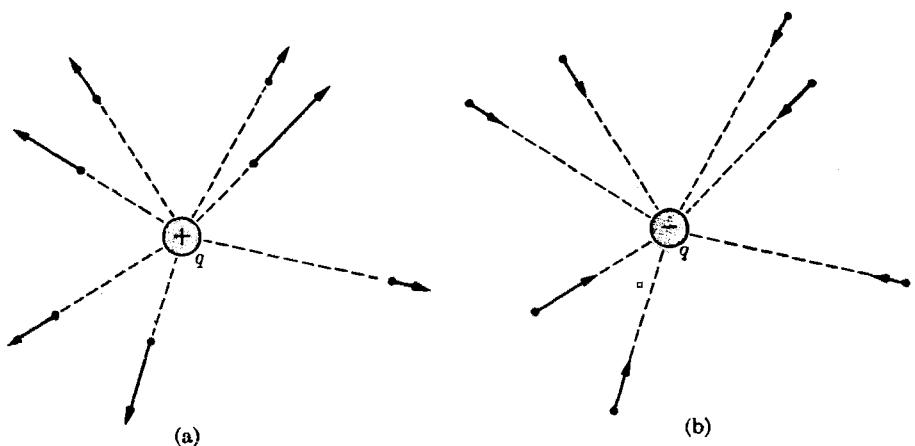


Fig. 14-9. Campo eléctrico producido por a) una carga positiva y b) por una negativa.

Igual que en el caso del campo gravitacional, un campo eléctrico puede representarse por líneas de fuerza, líneas que son tangentes a la dirección del campo en cada uno de sus puntos. Las líneas de fuerza en la fig. 14-10(a) representan el campo eléctrico de una carga positiva, y las de la fig. 14-10(b) muestran el campo eléctrico de una carga negativa. Estas líneas son rectas que pasan por la carga.

Cuando varias cargas están presentes, como en la fig. 14-7, el campo eléctrico resultante es la suma vectorial de los campos eléctricos producidos por cada carga. O sea,

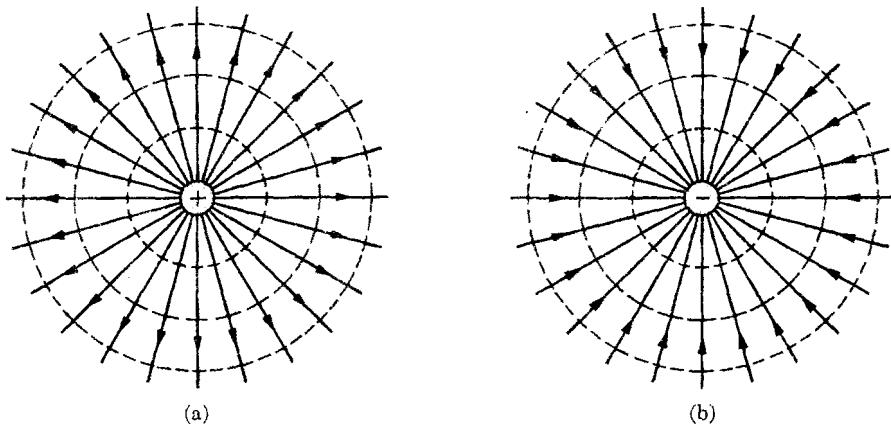


Fig. 14-10. Líneas de fuerza y superficies equipotenciales del campo eléctrico de una carga positiva y de una negativa.

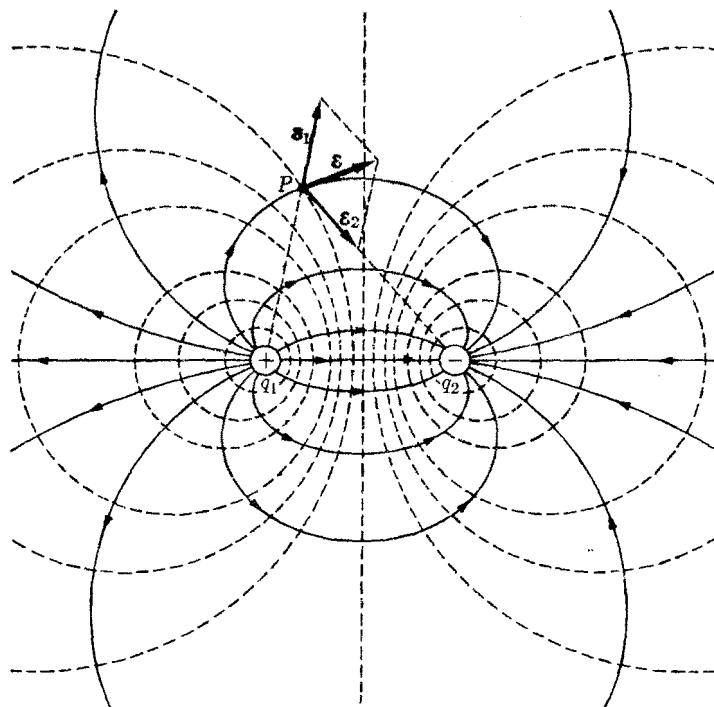


Fig. 14-11. Líneas de fuerza y superficies equipotenciales del campo eléctrico de dos cargas iguales y opuestas.

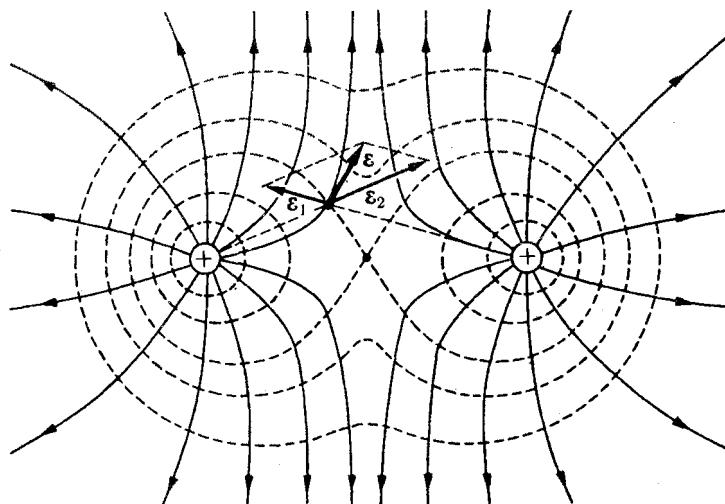


Fig. 14-12. Líneas de fuerza y superficies equipotenciales del campo eléctrico de dos cargas idénticas.

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3 + \dots = \sum_i \mathcal{E}_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i^2} \mathbf{u}_{ri}$$

La fig. 14-11 indica cómo obtener el campo eléctrico resultante en un punto P en el caso de dos cargas, una positiva y otra negativa de la misma magnitud, como es el caso de un protón y un electrón en un átomo de hidrógeno. La fig. 14-12 muestra las líneas de fuerza para dos cargas positivas iguales, tal como los dos protones en una molécula de hidrógeno. En ambas figuras también se han representado las líneas de fuerza del campo eléctrico resultante producido por las dos cargas.

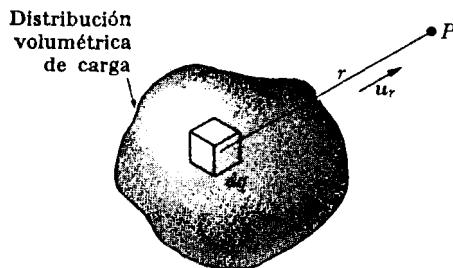


Fig. 14-13. Cálculo del campo eléctrico de una distribución continua de carga.

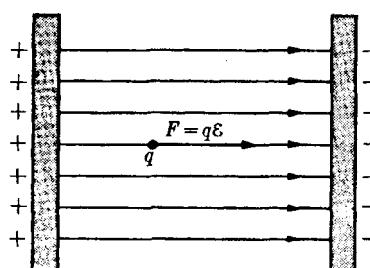


Fig. 14-14. Campo eléctrico uniforme.

Si tenemos una distribución continua de carga (fig. 14-13), la dividimos en elementos diferenciales de carga dq y reemplazamos la suma por una integral,

resultando

$$\mathcal{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r^2} u_r.$$

La integral debe extenderse a todo el espacio ocupado por las cargas.

Un campo eléctrico *uniforme* tiene la misma intensidad y dirección en todos sus puntos. Un campo uniforme está representado, evidentemente, por líneas de fuerza paralelas y equidistantes (fig. 14-14). El mejor modo de producir un campo eléctrico uniforme es cargando, con cargas iguales y opuestas, dos placas metálicas paralelas. La simetría indica que el campo es uniforme; más adelante, en la sección 16.3, verificaremos matemáticamente esta aserción. (Recordar el ejemplo 13.8 donde aparece un problema semejante relacionado con la interacción gravitacional).

EJEMPLO 14.2. Determinar el campo eléctrico producido por las cargas q_1 y q_2 en el punto C de la fig. 14-6; dichas cargas se han definido en el ejemplo 14.1.

Solución: Tenemos dos soluciones a escoger. Como hemos hallado en el ejemplo 14.1 la fuerza F sobre la carga q_3 colocada en el punto C , tenemos, usando la ec. (14.7), que

$$\mathcal{E} = \frac{F}{q_3} = 2,03 \times 10^7 \text{ N C}^{-1}.$$

Otro procedimiento es calcular primero el campo eléctrico producido en C (fig. 14-15) por cada una de las cargas, usando la ec. (14.8). Esto da

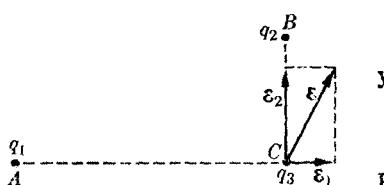


Fig. 14-15. Campo eléctrico resultante en C producido por q_1 y q_2 .

$$\mathcal{E}_1 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_1^2} = 9,37 \times 10^6 \text{ N C}^{-1}$$

$$\mathcal{E}_2 = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_2^2} = 18,0 \times 10^6 \text{ N C}^{-1}.$$

Por consiguiente, el campo eléctrico resultante es

$$\mathcal{E} = \sqrt{\mathcal{E}_1^2 + \mathcal{E}_2^2} = 2,03 \times 10^7 \text{ N C}^{-1}.$$

Los dos resultados son, evidentemente, idénticos.

EJEMPLO 14.3. Discusión del movimiento de una carga eléctrica en un campo uniforme.

Solución: La ecuación de movimiento de una carga eléctrica en un campo eléctrico uniforme está dada por la ecuación

$$ma = q\mathcal{E} \quad \text{o} \quad a = \frac{q}{m} \mathcal{E}.$$

La aceleración que adquiere un cuerpo en un campo eléctrico depende, por lo tanto, de la razón q/m . Como esta razón es en general diferente para diferentes partículas cargadas o iones, sus aceleraciones en un campo eléctrico serán también diferentes; es decir, que hay una clara distinción entre la aceleración de un cuerpo cargado que se mueve en un campo eléctrico, y la aceleración en un campo gravitacional, que es la misma para todos los cuerpos. Si el campo \mathcal{E} es uniforme, la aceleración a es constante y la trayectoria descrita por la carga eléctrica en su movimiento es una parábola, como se explicó en la sección 5.7.

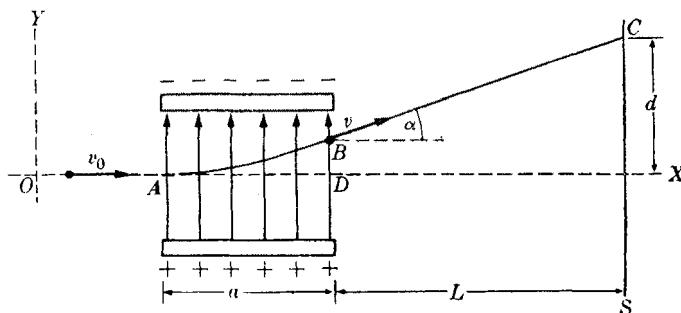


Fig. 14-16. Desviación de una carga positiva por un campo eléctrico uniforme.

Un caso interesante es el de una partícula cargada moviéndose a través de un campo eléctrico que ocupa una región limitada del espacio (fig. 14-16). Supongamos, para simplificar, que la velocidad inicial v_0 de la partícula cuando entra al campo eléctrico sea perpendicular a la dirección del campo eléctrico. Hemos colocado el eje X paralelo a la velocidad inicial de la partícula y el eje Y paralelo al campo. La trayectoria AB descrita por la partícula al moverse a través del campo es una parábola. Después de cruzar el campo la partícula readquiere el movimiento rectilíneo, pero con una velocidad v diferente en módulo y dirección. Decimos entonces que el campo eléctrico ha producido una desviación medida por el ángulo α .

Usando los resultados de la sección 5.7, encontramos que las coordenadas de la partícula mientras se mueve a través del campo con una aceleración $(q/m)\epsilon$, están dadas por

$$x = v_0 t, \quad y = \frac{1}{2}(q/m)\epsilon t^2.$$

Eliminando el tiempo t , obtenemos la ecuación de la trayectoria,

$$y = \frac{1}{2} \left(\frac{q}{m} \right) \left(\frac{\epsilon}{v_0^2} \right) x^2,$$

lo cual verifica que es una parábola. Obtenemos la desviación α calculando la pendiente dy/dx de la trayectoria para $x = a$. El resultado es

$$\tan \alpha = (dy/dx)_{x=a} = q\epsilon a / mv_0^2.$$

Si colocamos una pantalla S a la distancia L , la partícula con un q/m dado y velocidad v_0 , llegará a la pantalla en el punto C . Observando que $\tan \alpha$ es aproximadamente igual a d/L , ya que el desplazamiento vertical BD es pequeño comparado con d si L es grande, tenemos

$$\frac{q\epsilon a}{mv_0^2} = \frac{d}{L}. \quad (14.9)$$

Midiendo d , L , a y ϵ obtenemos la velocidad v_0 (o la energía cinética) si conocemos la razón q/m ; o recíprocamente, podemos obtener q/m si conocemos v_0 . Por lo tanto, cuando un haz de partículas con la misma relación q/m , pasa a través de un campo eléctrico, las mismas se deflectan de acuerdo con sus velocidades o energías.

Un aparato tal como el ilustrado en la fig. 14-16 puede usarse como un *analizador de energía*, el cual separa las partículas cargadas idénticas que se mueven con energías diferentes. Por ejemplo, los rayos β son electrones emitidos por algunos materiales radioactivos; si colocamos un emisor de rayos β en O , todos los electrones se concentrarán en el mismo punto de la pantalla si tienen la misma

energía. Pero si son emitidos con diferentes energías se dispersarán en una región de la pantalla. Es esta segunda posibilidad la que se encuentra experimentalmente, resultado de mucha importancia desde el punto de vista de la estructura nuclear.

Usando dos juegos de placas paralelas cargadas, podemos producir dos campos mutuamente perpendiculares, uno horizontal según HH' y otro vertical según VV' , como se muestra en la fig. 14-17. Ajustando la intensidad relativa de los dos campos, podemos obtener una desviación arbitraria del haz de electrones respecto a cualquier punto de referencia en la pantalla. Si los dos campos son variables, el punto luminoso de referencia sobre la pantalla describirá una cierta curva. Aplicaciones prácticas de este efecto se presentan en los tubos de televisión y en los osciloscopios. En particular, si los campos eléctricos varían en intensidad con movimiento armónico simple, se obtendrán las figuras de Lissajous (sección 12.9).

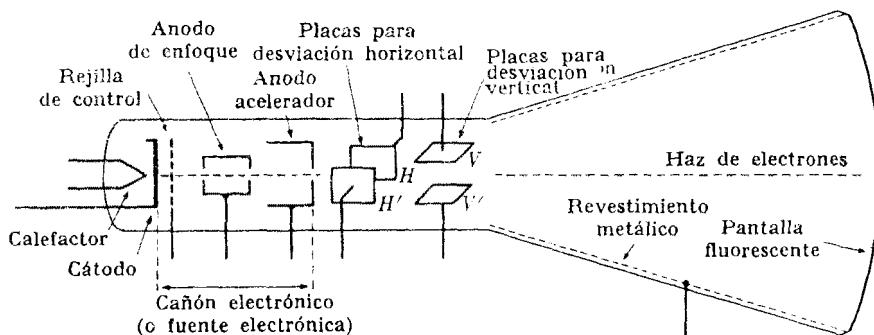


Fig. 14-17. Movimiento de una carga bajo la acción de campos eléctricos cruzados. Los electrones son emitidos por el cátodo y acelerados por un campo eléctrico intenso. Una ranura en el ánodo acelerador, permite a los electrones salir del cañón electrónico y pasar entre dos sistemas de placas deflectoras. El revestimiento metálico del interior del tubo, mantiene el extremo derecho libre de campos eléctricos, producidos por fuentes externas y permitiendo el movimiento libre a los electrones del haz.

14.5 Cuantización de la carga eléctrica

Un aspecto importante que debemos dilucidar antes de proseguir, es el hecho de que la carga eléctrica aparece no en cualquier cantidad, sino en múltiplos de una unidad fundamental o *cuento*.

De los muchos experimentos realizados para determinar esto, es clásico el del físico norteamericano Robert A. Millikan (1869-1953), quien, por varios años durante la primera parte de este siglo, llevó a efecto el experimento conocido hoy como el *experimento de la gota de aceite*. Millikan estableció, entre dos placas horizontales y paralelas A y B (fig. 14-18), un campo eléctrico vertical \mathcal{E} que podía ser eliminado o restablecido por medio de un interruptor. La placa superior tenía en su centro unas pocas perforaciones pequeñas a través de las cuales podían pasar gotas de aceite producidas por un atomizador. La mayoría de estas gotas se cargaban por fricción al pasar por la boquilla del atomizador.

Analicemos primero este experimento desde un punto de vista teórico. Llamarímos m a la masa y r al radio de la gota de aceite. Para esta gota, la ecuación

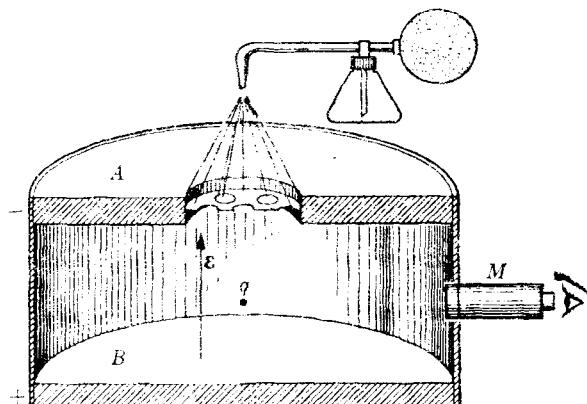


Fig. 14-18. Experimento de Millikan. El movimiento de la gota de aceite cargada q se observa a través del microscopio M .

del movimiento de caída libre sin el campo eléctrico \mathcal{E} es, usando la ec. (7.20) con K dado por la ec. (7.19), $ma = mg - 6\pi\eta r v$. La velocidad final v , de la gota, cuando $a = 0$, es

$$v_1 = \frac{mg}{6\pi\eta r} = \frac{2\rho r^2 g}{9\eta}, \quad (14.10)$$

donde ρ representa la densidad del aceite y hemos usado la relación $m = (\frac{4}{3}\pi r^3)\rho$. (Con el fin de ser precisos debemos también tomar en cuenta el empuje del aire escribiendo $\rho - \rho_a$ en lugar de ρ , siendo ρ_a la densidad del aire).

Suponiendo que la gota tiene carga positiva q , cuando aplicamos el campo eléctrico, la ecuación del movimiento en dirección vertical hacia arriba es

$$ma = q\mathcal{E} - mg - 6\pi\eta r v,$$

y la velocidad final v_2 de la gota, cuando $a = 0$, es

$$v_2 = \frac{q\mathcal{E} - mg}{6\pi\eta r}.$$

Despejando q , y usando la ec. (14.10) para eliminar mg , tenemos

$$q = \frac{6\pi\eta r(v_1 + v_2)}{\mathcal{E}}. \quad (14.11)$$

Podemos hallar el radio de la gota midiendo v_1 y despejando r de la ec. (14.10). Midiendo v_2 , obtenemos la carga q aplicando la ec. (14.11). Si la carga es negativa, el movimiento hacia arriba se produce aplicando el campo eléctrico hacia abajo.

En la práctica se sigue un procedimiento diferente. El movimiento hacia arriba y hacia abajo de la gota se observa varias veces, aplicando y suprimiendo el campo eléctrico sucesivamente. La velocidad v_1 permanece invariable, pero la velocidad v_2

ocasionalmente cambia sugiriendo un cambio en la carga de la gota. Estos cambios son debidos a la ionización ocasional del aire ambiente por rayos cósmicos. La gota puede tomar algunos de estos iones mientras se mueve a través del aire. Los cambios en la carga pueden inducirse también colocando cerca de las placas una fuente de rayos X o γ , los cuales aumentan la ionización del aire.

De acuerdo con la ec. (14.11), los cambios Δq y Δv_2 de la carga y de la velocidad hacia arriba están relacionados por

$$\Delta q = \frac{6\pi\eta r}{c} \Delta v_2 \quad (14.12)$$

Algunas veces Δq es positiva y otras veces negativa, según la naturaleza de la modificación de la carga. Repitiendo el experimento de la gota de aceite muchas veces con diferentes gotas, los físicos han concluido que los cambios Δq son siempre múltiplos de la carga fundamental e (esto es, $\Delta q = ne$), cuyo valor es

$$e = 1,6021 \times 10^{-19} \text{ C.} \quad (14.13)$$

La cantidad e se llama *carga elemental*. Todas las cargas que se observan en la naturaleza son iguales a, o múltiplos de, la carga elemental e ; hasta ahora no se han observado excepciones a esta regla. Parece ser, entonces, una ley fundamental de la naturaleza que la carga eléctrica está cuantizada. Hasta el presente, no se ha encontrado explicación a este hecho a partir de conceptos más fundamentales.

Un segundo aspecto importante de la carga eléctrica es que la carga elemental está siempre asociada con alguna masa determinada, dando lugar a lo que llamamos una *partícula fundamental*. [En el próximo capítulo (sección 15.4), explicaremos algunos métodos para medir la proporción q/m , de modo que si se conoce q , pueda obtenerse m ; de esta manera se han identificado varias partículas fundamentales.] Por el momento, podemos indicar que en la estructura del átomo entran tres partículas fundamentales: el *electrón*, el *protón* y el *neutrón*. Sus características se indican en el siguiente cuadro.

Partícula	Masa	Carga
electrón	$m_e = 9,1091 \times 10^{-31} \text{ kg}$	$-e$
protón	$m_p = 1,6725 \times 10^{-27} \text{ kg}$	$+e$
neutrón	$m_n = 1,6748 \times 10^{-27} \text{ kg}$	0

Obsérvese que el neutrón no tiene carga eléctrica; sin embargo posee otras propiedades eléctricas, que serán discutidas en el capítulo 15. El hecho de que la masa del protón sea cerca de 1840 veces mayor que la masa del electrón tiene gran influencia en muchos fenómenos físicos.

Retornemos ahora a la definición preliminar del coulomb dada en la sección 2.3, y verifiquemos que el número de electrones y protones necesarios para alcanzar una carga positiva o negativa igual a un coulomb es $1/1,6021 \times 10^{-19} = 6,2418 \times 10^{18}$ que es el número que aparece allí.

14.6 Estructura eléctrica de la materia

Hemos recordado al estudiante el hecho frecuentemente observado de que ciertos cuerpos pueden electrizarse frotándolos con tela o piel. Muchos otros experimentos de laboratorio señalan el hecho de que los constituyentes básicos de todos los átomos son partículas cargadas. Por ejemplo, cuando se calienta un filamento, éste emite electrones, tal como se evaporan las moléculas de un líquido al calentarse. Este fenómeno se llama emisión *termoiónica*.

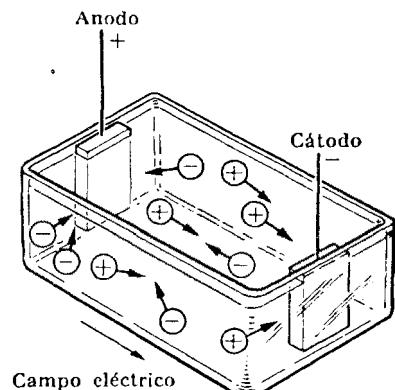


Fig. 14-19. Electrólisis. Los iones se mueven bajo la acción del campo eléctrico producido por los electrodos cargados.

Otro fenómeno interesante es el de la *electrólisis*. Supongamos que se establece un campo eléctrico \mathcal{E} (fig. 14-19) en una sal fundida (tal como KHF_2) o en una solución que contiene un ácido (tal como HCl), una base (tal como $NaOH$), o una sal ($NaCl$). Producimos este campo sumergiendo en la solución dos barras o placas opuestamente cargadas llamadas *electrodos*. Observamos que las cargas eléctricas fluyen y que ciertas clases de átomos cargados se mueven hacia el electrodo positivo o *ánodo*, y otras se mueven hacia el electrodo negativo o *cátodo*. Este fenómeno sugiere que las moléculas de la sustancia disuelta se han separado (o disociado) en dos partes diferentemente cargadas, o iones. Algunas están cargadas positivamente y se mueven en la dirección del campo eléctrico; otras están cargadas negativamente y se mueven en dirección opuesta a la del campo eléctrico. Por ejemplo, en el caso del $NaCl$, los átomos de Na se mueven hacia el cátodo y en consecuencia son iones positivos, llamados *cationes*, mientras que los átomos de Cl van al ánodo y son iones negativos, llamados *aniones*. La disociación puede escribirse en la forma



Como las moléculas normales de $NaCl$ no tienen carga eléctrica, suponemos que están formadas de cantidades iguales de cargas positivas y negativas. Cuando las moléculas de $NaCl$ se disocian, las cargas no se separan uniformemente. Una parte de las moléculas transporta un exceso de electricidad negativa y la otra un exceso de electricidad positiva. Cada una de estas partes es, por lo tanto, un ion. Hemos dicho que todas las cargas son múltiplos de la unidad fundamental

de carga e . Supongamos que los iones positivos transportan la carga $+ve$, y los iones negativos una carga $-ve$ donde v es un número entero que determinaremos más adelante. Cuando los iones llegan a cada electrodio, se neutralizan, intercambiando sus cargas con las cargas disponibles en los electrodos. Generalmente sigue una serie de reacciones químicas que no nos interesan ahora, pero que sirven para identificar la naturaleza de los iones que se mueven hacia cada electrodo.

Después de un cierto tiempo t , un número N de átomos ha ido a cada electrodo. La carga total Q transferida a cada electrodo es entonces, en valor absoluto, $Q = Nve$. Suponiendo que m sea la masa de cada molécula, la masa total M depositada en ambos electrodos es $M = Nm$. Dividiendo la primera relación por la segunda, tenemos

$$Q/M = ve/m. \quad (14.14)$$

Si N_A es la constante de Avogadro (el número de moléculas en un mol de cualquier sustancia), la masa de un mol de la sustancia es $M_A = N_A m$. En consecuencia, la ec. (14.14) puede escribirse en la forma

$$\frac{Q}{M} = \frac{ve}{m} = \frac{N_A ve}{N_A m} = \frac{Fv}{M_A}. \quad (14.15)$$

La cantidad

$$F = N_A e \quad (14.16)$$

es una constante universal llamada constante de Faraday. Esta representa la carga de un mol de iones que tiene $v = 1$. Su valor experimental es

$$F = 9,6487 \times 10^4 \text{ C mol}^{-1}. \quad (14.17)$$

De este valor y del hallado previamente para e , obtenemos para la constante de Avogadro

$$N_A = 6,0225 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}, \quad (14.18)$$

de acuerdo con otros cálculos de esta constante.

La ec. (14.15) ha sido verificada experimentalmente y se ha hallado que v es igual a la valencia química del ion correspondiente. El hecho de que v sea la valencia química sugiere que cuando dos átomos se unen para formar una molécula, intercambian la carga ve , convirtiéndose uno en un ion positivo y el otro en un ion negativo. La interacción eléctrica entre los dos iones los mantiene unidos. Podemos también suponer, con bastante confianza, que las partículas intercambiadas son los electrones, ya que se mueven más fácilmente por ser más ligeros que los protones. Esta imagen del enlace químico, llamado enlace iónico, debe considerarse sólo como una descripción preliminar sujeta a revisión y crítica ulteriores.

En la sección 13.9 indicamos que las fuerzas gravitacionales no eran suficientemente fuertes como para producir la atracción necesaria para mantener unidos dos átomos y formar una molécula, o dos moléculas y formar una porción de

materia, y que son 10^{25} veces menos intensas de lo necesario. Comparemos ahora el orden de magnitud de las fuerzas eléctricas y de las gravitacionales. Suponiendo que la distancia sea la misma, la intensidad de la interacción eléctrica está determinada por la constante de acoplamiento $q_1 q_2 / 4\pi\epsilon_0$, y la de la interacción gravitacional por $\gamma m_1 m_2$. Por lo tanto

$$\frac{\text{interacción eléctrica}}{\text{interacción gravitacional}} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 \gamma m_1 m_2}.$$

Para obtener el orden de magnitud, hagamos $q_1 = q_2 = e$ y $m_1 = m_2 = m_p$, de modo que para dos protones o dos iones de hidrógeno,

$$\frac{\text{interacción eléctrica}}{\text{interacción gravitacional}} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \gamma m_p^2} = 1,5 \times 10^{36}.$$

Este es, aproximadamente, el factor que le faltaría a la fuerza gravitacional para producir la interacción requerida. Para la interacción entre un protón y un electrón ($m_1 = m_p$, $m_2 = m_e$), la relación anterior resulta todavía mayor: $2,8 \times 10^{40}$. Por consiguiente concluimos que:

la interacción eléctrica es del orden de magnitud requerido para producir el enlace entre átomos para formar moléculas, o el enlace entre electrones y protones para formar átomos.

La conclusión es, entonces, obvia: los procesos químicos (en general el comportamiento de la materia en su totalidad) se deben a las interacciones eléctricas entre átomos y moléculas. Una comprensión completa de la estructura eléctrica de los átomos y moléculas es, pues, esencial para explicar los procesos químicos y, en general, para explicar todos los fenómenos que observamos corrientemente a nuestro alrededor, tanto en la materia inerte como en la viviente. El objetivo de la física es, como vimos en el capítulo 1, capacitarnos para comprender la estructura de los constituyentes fundamentales de la materia y explicar, en función de sus interacciones, el comportamiento de la materia como un todo. Para cumplir con este programa debemos comprender previamente las interacciones eléctricas. Por esta razón muchos de los capítulos siguientes estarán dedicados a los fenómenos eléctricos.

Dondequier que haya cuerpos cargados eléctricamente, las fuerzas gravitacionales son despreciables. Estas fuerzas son importantes sólo cuando estudiamos cuerpos de gran masa sin carga eléctrica, o cuando las cargas son pequeñas en comparación con sus masas. Este es el caso del movimiento planetario o del movimiento de cuerpos en la superficie terrestre.

14.7 Estructura atómica

Por lo dicho en la sección anterior, el estudiante se habrá dado cuenta que comprender la estructura atómica es uno de los problemas básicos de la física. Expongamos, por lo tanto, algunas ideas preliminares y desarrollemos un modelo satisfactorio del átomo. Sabemos que los átomos son eléctricamente neutros en su

estado normal, ya que en la materia en conjunto no se manifiestan fuerzas eléctricas grandes. Por consiguiente, los átomos deben contener cantidades iguales de electricidad positiva y negativa o, en otras palabras, igual número de protones y de electrones. El número igual de protones y electrones se llama *número atómico* y se designa por Z . El átomo consta entonces de una carga positiva $+Ze$ debida a los protones y de una carga negativa de igual magnitud debida a los electrones.

Acuden a nuestra mente dos posibles modelos para el átomo. En uno de ellos podemos suponer que los protones, como tienen mayor masa que los electrones, están agrupados alrededor del centro de masa del átomo, formando una especie de *núcleo* y los electrones giran a su alrededor, como en nuestro sistema planetario. En el otro modelo los protones podrían estar esparcidos en todo el volumen del átomo, con los electrones moviéndose entre ellos y formando algo así como una mezcla de gases con cargas positivas y negativas llamada *plasma*. El primer modelo es más llamativo dada nuestra familiaridad con el sistema solar. Sin embargo, entre las dificultades a que debemos hacer frente en este modelo, está la de explicar cómo los protones se mantienen unidos entre sí, en el núcleo, a pesar de la fuerte repulsión eléctrica entre ellos. Esta complicación requiere la existencia de otras interacciones, además de la interacción eléctrica.

Para dilucidar el problema de la distribución de electrones y protones en un átomo, debemos investigar el interior del átomo experimentalmente, lanzando un haz de partículas rápidas cargadas tales como iones de hidrógeno (es decir protones) o iones de helio (llamados *partículas alfa*), contra el átomo, y observar las interacciones producidas. Este es un experimento de *dispersión*, cuyo fundamento matemático se ha dado ya en el capítulo 7. La simetría sugiere que podemos considerar los átomos como esferas con un radio del orden de 10^{-10} m, como se ha indicado previamente. Debido a que la interacción eléctrica sigue la ley $1/r^2$, los resultados demostrados en la sección 13.7 para el campo gravitacional, son válidos también para el campo eléctrico. Sólo es necesario reemplazar $\gamma mm'$ por $qq'/4\pi\epsilon_0$. Por lo tanto, una esfera de radio a cargada con la carga Q uniformemente distribuida en su volumen, produce en todos los puntos externos ($r > a$) un campo eléctrico dado por

$$\mathcal{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad r > a, \quad (14.19)$$

y un campo eléctrico en todos los puntos interiores ($r < a$) dado por

$$\mathcal{E} = \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 a^3}, \quad r < a. \quad (14.20)$$

Este campo está representado en la fig. 14-20.

En el modelo de plasma, el radio a es el mismo que el radio del átomo y la carga efectiva Q es muy pequeña porque las cargas positivas de los protones y las cargas negativas de los electrones están mezcladas uniformemente. La desviación experimentada por la partícula de carga q al aproximarse al átomo, pero

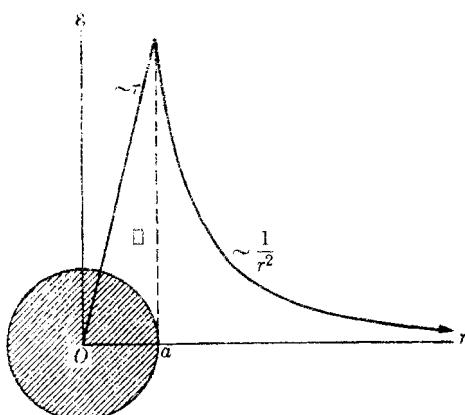


Fig. 14-20. Campo eléctrico de una esfera de radio a cargada.

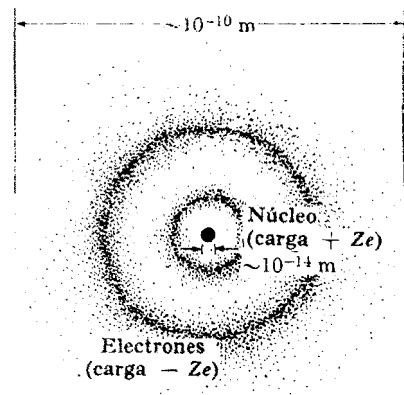


Fig. 14-21. Distribución de electrones en un átomo.

sin pasar a través de él, se calcula usando la ec. (7.42) con $k = Qq/4\pi\epsilon_0$; resulta

$$\cotg \frac{1}{2}\phi = -\frac{4\pi\epsilon_0 mv_0^2}{Qq} b. \quad (14.21)$$

En este caso el parámetro de impacto b debe ser mayor que el radio del átomo $a \sim 10^{-10}$ m. Suponiendo que la energía de las partículas es del orden de 1.6×10^{-13} J, o un MeV (que es el rango de energías proporcionado por los laboratorios en esta clase de experimentos), y que Q y q son del orden de e , encontramos que ϕ es menor que $30''$ de arco. Es decir que prácticamente no hay desviación. Para valores menores de b , si la partícula incidente tiene energía suficiente para penetrar al interior del átomo, inmediatamente actúa sobre ella un campo decreciente y la ec. (14.21) ya no es aplicable. Pero entonces, la desviación, en lugar de ser mayor, es de nuevo muy pequeña porque el campo es menor. En otras palabras, el modelo de plasma no puede explicar grandes desviaciones de las partículas que bombardean un átomo. Sin embargo, se ha encontrado experimentalmente que muchas partículas se desvian en ángulos grandes, en algunos casos hasta 180° . Por consiguiente debemos desechar el modelo de plasma basándonos en este experimento simple pero concluyente.

Consideremos ahora el modelo nuclear, en el cual los protones están agrupados en una pequeña región al centro del átomo (fig. 14-21). Entonces la ec. (14.21) se mantiene para valores de b mucho menores que el radio atómico, y son posibles desviaciones mayores. Aquí nos damos cuenta que los electrones en rápido movimiento forman una "pantalla" entre la carga nuclear positiva y cualquier partícula cargada que esté más allá del radio del átomo, reduciendo de este modo la carga efectiva del núcleo. El resultado es que, para valores de b mayores que 10^{-10} m del centro, el átomo nuclear y el átomo plasma son esencialmente lo mismo. Para pequeños valores de b , sin embargo, pueden ocurrir mayores desviaciones en el modelo nuclear, haciéndolo completamente diferente del modelo de plasma. Por ejemplo, para $b \sim 10^{-14}$ m y $Q \sim 10e$, usando el mismo valor de

energía que antes, obtenemos $\cot \frac{1}{2}\phi \sim 1$ ó $\phi \sim 90^\circ$. En el modelo nuclear, $Q = Ze$, y poniendo $q = ve$ para la partícula que bombardea ($v = 1$ para protones, $v = 2$ para partículas alfa), obtenemos de la ec. (14.21),

$$b = \frac{vZe^2}{4\pi\epsilon_0 mv_0^2} \cot \frac{1}{2}\phi.$$

En los experimentos se dirigen varias partículas contra una delgadísima lámina y se observan las deflecciones. Como b no puede controlarse porque es imposible apuntar a un átomo en particular, debemos hacer un análisis estadístico para interpretar los resultados experimentales.

Supongamos que tenemos una delgada lámina metálica de espesor t , que tiene n átomos por unidad de volumen. Si N partículas por unidad de área inciden en la lámina, algunas pasarán cerca de un átomo de la misma (parámetro de impacto pequeño), experimentando entonces una gran desviación; algunas pasarán a distancias relativamente grandes de los átomos de la lámina (parámetro de impacto grande) y experimentarán una pequeña desviación. El resultado del análisis estadístico (ver ejemplo 14.4) muestra que el número de partículas dN desviadas dentro del ángulo sólido $d\Omega$ (correspondiente a los ángulos de dispersión ϕ y $\phi + d\phi$ respecto a la dirección de incidencia) está dado por

$$\frac{dN}{d\Omega} = -\frac{Nnv^2Z^2e^4}{2(4\pi\epsilon_0)^2m^2v_0^4} \operatorname{cosec}^4 \frac{1}{2}\phi. \quad (14.22)$$

El signo negativo se debe a que dN representa las partículas sacadas del haz incidente como consecuencia de la dispersión, y esto corresponde a una disminución de N .

El resultado que predice la ec. (14.22) es que las partículas dispersadas por unidad de ángulo sólido, deben distribuirse estadísticamente según la ley $\operatorname{cosec}^4 \frac{1}{2}\phi$. Al verificar esta predicción para todos los ángulos, se prueba, indirectamente, que todas las cargas positivas se concentran cerca del centro del átomo. Esta prueba se obtuvo mediante experimentos ejecutados por primera vez durante el período 1911-1913 por H. Geiger y E. Marsden, bajo la dirección del físico británico Ernest Rutherford (1871-1937). Estos experimentos constituyeron el fundamento del modelo nuclear del átomo, que ha sido aceptado desde entonces como el correcto.

Para cada valor del parámetro de impacto b , existe una distancia de máximo acercamiento para la cual la partícula que bombardea está lo más cerca posible del centro. La distancia mínima ocurre para $b = 0$. El cálculo de esta distancia para diferentes condiciones experimentales, empleando métodos dinámicos (ver ejemplo 14.5) indica que esta distancia es del orden de 10^{-14} m para energías del orden de 10^{-13} J (o un MeV). Esta distancia da un límite superior para el radio del núcleo atómico. Por consiguiente concluimos que los protones se concentran en una región cuyas dimensiones son del orden de 10^{-14} m. Cuando consideramos el hecho de que el radio del átomo es del orden de 10^{-10} m, nos damos cuenta que la mayor parte del volumen del átomo está ocupado por los electrones en movimiento, y está en realidad vacío.

Para pequeños valores del parámetro de impacto y altas energías, cuando la partícula incidente llega muy cerca del núcleo, observamos que la ley cosec $\frac{1}{2}\phi$ no se cumple. Esto indica la presencia de otras interacciones, las *fuerzas nucleares*. Analizando las discrepancias con respecto a la dispersión puramente culombiana dada por la ec. (14.22), obtenemos información valiosa acerca de las fuerzas nucleares.

Los más simples y livianos de todos los átomos son los átomos de hidrógeno. Su masa es igual a la de un protón más la de un electrón. Por consiguiente concluimos que un átomo de hidrógeno está compuesto de un electrón girando alrededor de un solo protón. Entonces, $Z = 1$, y el núcleo de un átomo de hidrógeno es precisamente un protón (esto podría tomarse también como definición de protón). Como el electrón está sujeto a la fuerza de atracción $1/r^2$, deberíamos esperar, por las mismas razones dadas en el capítulo 13 para el movimiento planetario, que las órbitas fueran elipses con el protón en uno de los focos. Las órbitas electrónicas, sin embargo, requieren que dispongamos de técnicas especiales antes de poder discutirlas, porque ellas poseen características propias que las hacen diferentes de las órbitas planetarias. Estas técnicas corresponden a la mecánica cuántica. Sin embargo, podemos adelantar dos de los más importantes resultados de la mecánica cuántica.

(1) *La energía del movimiento electrónico está cuantizada.* Esto significa que la energía de los electrones puede tomar sólo ciertos valores $E_1, E_2, E_3, \dots, E_n, \dots$ Los estados correspondientes a estas energías se llaman *estados estacionarios*. El estado con la más baja energía posible es el *estado fundamental*. Determinar las energías de los estados estacionarios es una de las tareas de la mecánica cuántica. Como la energía (en un sentido clásico) determina el "tamaño" de la órbita, solamente ciertas regiones del espacio son posibles para el movimiento electrónico. Esto está indicado esquemáticamente por la región sombreada de la fig. 14-21.

(2) *El momentum angular del movimiento electrónico está cuantizado tanto en magnitud como en dirección.* Esto significa que el momentum angular de un electrón puede tener sólo valores discretos y que, como el momentum angular es un vector, puede orientarse sólo en ciertas direcciones. A esta última propiedad nos referimos cuando hablamos de *cuantización espacial*. Para usar terminología clásica de nuevo, podemos interpretar esta segunda propiedad como implicando que las órbitas del electrón sólo pueden tener ciertas "formas".

Para átomos más pesados que el hidrógeno, la masa es mayor que la masa de los Z protones que ellos contienen. La diferencia puede ser atribuida a la presencia de *neutrinos* en el núcleo. El número total de partículas en un núcleo se llama el *número másico*, y se designa por A . Por lo tanto, un átomo tiene Z electrones, Z protones y $A - Z$ neutrones. Los neutrones son necesarios, aparentemente, para estabilizar el núcleo. Si los protones estuvieran solamente sujetos a su propia interacción eléctrica, se repelerían entre sí, por estar cargados positivamente. El hecho de que pueden permanecer unidos en un núcleo indica que, además de las interacciones eléctricas, hay otras interacciones muy fuertes, correspondientes a las llamadas *fuerzas nucleares*, las cuales contrarrestan la repulsión eléctrica. Los neutrones contribuyen a crear las fuerzas nucleares sin añadir repulsión eléctrica, produciendo de este modo un efecto estabilizador.

En este punto debemos decir que nuestro conocimiento de las fuerzas nucleares no es tan completo como lo es el de las fuerzas eléctricas.

El comportamiento químico de un átomo, siendo un efecto eléctrico, está determinado por el número atómico Z . Sin embargo, para un valor de Z puede haber varios valores del número másico A . En otras palabras, a un número dado de protones en el núcleo puede corresponder diferente número de neutrones. Los átomos que tienen el mismo número atómico, pero diferente número másico, se llaman *isótopos*. Todos ellos corresponden al mismo elemento químico. Los diferentes isótopos de un elemento químico se designan por el símbolo del elemento químico (que también identifica el número atómico) con un índice colocado en la parte superior a la izquierda indicando el número másico. Por ejemplo, hidrógeno ($Z = 1$) tiene tres isótopos: ^1H , ^2H o deuterio, y ^3H o tritio. Analogamente, dos de los más importantes isótopos del carbono ($Z = 6$) son ^{12}C y ^{14}C . El isótopo ^{12}C es el que se usa para definir la unidad de masa atómica.

EJEMPLO 14.4. Obtener la ecuación (14.22) para la dispersión culombiana.

Solución: Sea n el número de átomos por unidad de volumen del dispersor. Entonces nt será el número de átomos dispersados por una lámina delgada de espesor t y área unidad. El número de átomos en un anillo de radio b y ancho db y por lo tanto de área $2\pi b db$ será $(nt)(2\pi b db)$, como se muestra en la fig. 14-22. Si N partículas inciden sobre la unidad de área de la lámina, el número de átomos cuyo parámetro de impacto está entre b y $b + db$ es $dN = N(nt)(2\pi b db)$. Diferenciando la expresión del parámetro de impacto dado anteriormente, se obtiene:

$$dN = - \frac{\pi N n v^2 Z^2 e^4 t}{(4\pi\epsilon_0)^2 m^2 v_0^4} 4 \cotg \frac{1}{2}\phi \cosec^2 \frac{1}{2}\phi d\phi. \quad (14.23)$$

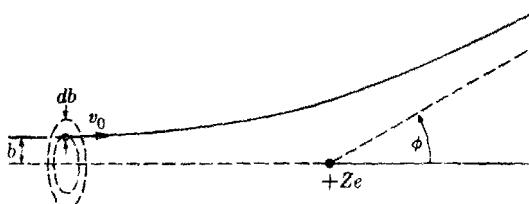


Fig. 14-22. Desviación de un ion positivo debido a la repulsión coulombiana del núcleo.

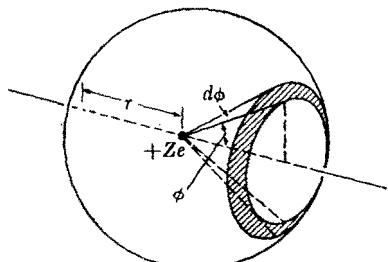


Figura 14-23

Para átomos livianos, debemos reemplazar la masa m de la partícula por la masa reducida del sistema de partículas.

Si trazamos dos conos de ángulos ϕ y $\phi + d\phi$ alrededor del átomo (fig. 14-23) todas las partículas dadas por la ec. (14.23) serán desviadas a través del ángulo sólido entre las dos superficies cónicas. El área sombreada es $(2\pi r \sen \phi) (r d\phi) = 2\pi r^2 \sen \phi d\phi$. Por consiguiente, en vista de la definición (2.7), el ángulo sólido es $d\Omega = 2\pi \sen \phi d\phi = 4\pi \sen \frac{1}{2}\phi \cos \frac{1}{2}\phi d\phi$, donde hemos usado la relación $\sen \phi = 2 \sen \frac{1}{2}\phi \cos \frac{1}{2}\phi$. La distribución angular está dada por el número de partículas

dispersadas por unidad de ángulo sólido. Entonces

$$\frac{dN}{d\Omega} = - \frac{N n v^2 Z^2 e^4 t}{2(4\pi\epsilon_0)^2 m^2 v_0^4} \operatorname{cosec}^4 \frac{1}{2}\phi,$$

que es la ec. (14.22).

Algunas veces los resultados de los experimentos de dispersión se expresan mejor usando el concepto de *sección eficaz*. La sección eficaz para un proceso está definida por

$$\sigma(\phi) = \frac{1}{Ntn} \left| \frac{dN}{d\Omega} \right|. \quad (14.24)$$

Las barras verticales están para indicar que usamos el valor absoluto de $dN/d\Omega$. La cantidad $\sigma(\phi)$ representa la probabilidad de que una partícula incidente se desvíe un ángulo entre ϕ y $\phi + d\phi$. Se expresa en unidades de área (m^2), ya que n es una densidad (m^{-3}) y t es una distancia (m); (obsérvese que las unidades de N se cancelan). Por lo tanto, sustituyendo la ec. (14.22) en la ec. (14.24), obtenemos la sección eficaz diferencial para la dispersión coulombiana,

$$\sigma(\phi) = \frac{v^2 Z^2 e^4}{2(4\pi\epsilon_0)^2 m^2 v_0^4} \operatorname{cosec}^4 \frac{1}{2}\phi. \quad (14.25)$$

EJEMPLO 14.5. Obtener la distancia de máximo acercamiento de una partícula de carga ve dirigida con velocidad v_0 contra un átomo de número atómico Z .

Solución: La fig. 14-24 muestra la geometría del problema. De acuerdo con la discusión hecha en la sección 13.5, la partícula describe una rama de hipérbola con el núcleo $+Ze$ en el foco más distante F' . La distancia de máximo acercamiento es $R = F'A$. Sea $b = F'D$ el parámetro de impacto. Demostraremos primero que b es igual al eje vertical OB de la hipérbola. El ángulo $\phi = POQ$, entre las dos asíntotas, es el ángulo de desviación de la partícula debido a la repulsión coulombiana del núcleo. La distancia $OA = OA' = a$ se mide en el eje horizontal, y de las propiedades de la hipérbola tenemos que $OF' = OC$. Por lo tanto, los triángulos $OF'D$ y OCA' son iguales, de modo que $b = F'D = CA' = OB$. En la geometría de la figura vemos que $OF' = b \operatorname{cosec} \alpha$ y $OA = a = b \operatorname{cotg} \alpha$. Por consiguiente $R = F'A = b(\operatorname{cosec} \alpha + \operatorname{cotg} \alpha)$. Pero $2\alpha + \phi = \pi$, de modo que $\alpha = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\phi$. Por lo tanto

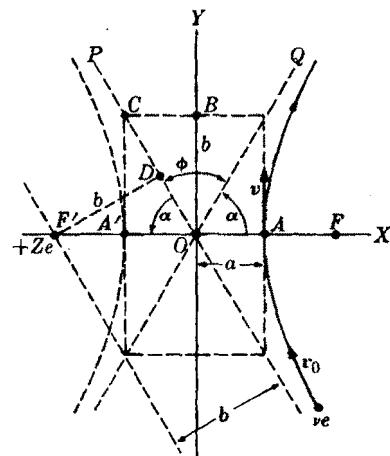


Figura 14-24

$$R = b(\sec \frac{1}{2}\phi + \operatorname{tg} \frac{1}{2}\phi) = \frac{b(1 + \operatorname{cosec} \frac{1}{2}\phi)}{\operatorname{cotg} \frac{1}{2}\phi}.$$

Usando el resultado (14.21), con $Q = Ze$ y $q = ve$, obtenemos

$$R = \frac{vZe^2}{4\pi\epsilon_0(mv_0^2)} (1 + \operatorname{cosec} \frac{1}{2}\phi),$$

que da la distancia de máximo acercamiento en función de la energía inicial de la partícula, $\frac{1}{2}mv^2$, y del ángulo de dispersión ϕ . Para un choque de frente, la partícula

rebota de modo que se dispersa en un ángulo igual a π , resultando $\text{cosec } \frac{1}{2}\phi = 1$ y

$$R = \frac{\sqrt{Z}e^2}{4\pi\epsilon_0(\frac{1}{2}mv_0^2)}.$$

Por ejemplo, sustituyendo valores numéricos con $v = 1$, $Z = 6$ (correspondiente al carbono) y $E = \frac{1}{2}mv_0^2 = 1,6 \times 10^{-18} \text{ J}$ ó 1 MeV, obtenemos $R \sim 10^{-14} \text{ m}$, que es el orden de magnitud señalado antes para las dimensiones nucleares.

14.8 Potencial eléctrico

Una carga eléctrica colocada en un campo eléctrico tiene energía potencial debido a su interacción con el campo. El *potencial eléctrico* en un punto se define como la energía potencial por unidad de carga colocada en dicho punto. Designando el potencial eléctrico por V y la energía potencial de una carga q por E_p , tenemos

$$V = \frac{E_p}{q} \quad \text{ó} \quad E_p = qV. \quad (14.26)$$

El potencial eléctrico se mide en joule/coulomb o J C^{-1} , unidad que recibe el nombre de *volt*, abreviado V, en honor del científico italiano Alejandro Volta (1745-1827). En función de las unidades fundamentales, $V = \text{m}^2 \text{ kg s}^{-2} \text{ C}^{-1}$.

Observemos que las definiciones de campo eléctrico y de potencial eléctrico son análogas a las de campo y de potencial gravitacional. Ellas se relacionan del mismo modo que en la ec. (13.21). O sea, las componentes cartesianas del campo eléctrico \mathcal{E} están dadas por

$$\mathcal{E}_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad \mathcal{E}_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad \mathcal{E}_z = -\frac{\partial V}{\partial z}. \quad (14.27)$$

En general, la componente según la dirección correspondiente a un desplazamiento ds es

$$\mathcal{E}_s = -\frac{\partial V}{\partial s}. \quad (14.28)$$

Esto puede escribirse en la forma compacta

$$\mathcal{E} = -\text{grad } V, \quad (14.29)$$

como se ha mostrado antes en los capítulos 8 y 13. Las ecuaciones (14.27) o (14.28) se usan para encontrar el potencial eléctrico V cuando se conoce el campo eléctrico \mathcal{E} , y reciprocamente.

Consideremos el caso simple de un campo eléctrico uniforme (fig. 14-25). La primera de las ecuaciones (14.27) da, para un campo paralelo al eje X , $\mathcal{E} = -dV/dx$. Como \mathcal{E} es constante y suponemos $V = 0$ para $x = 0$, tenemos, por integración,

$$\int_0^V dV = -\int_0^x \mathcal{E} dx = -\mathcal{E} \int_0^x dx \quad \text{ó} \quad V = -\mathcal{E}x. \quad (14.30)$$

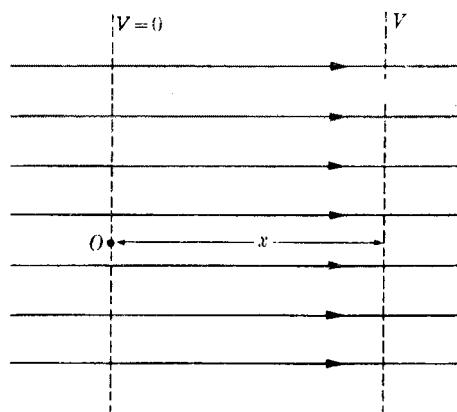
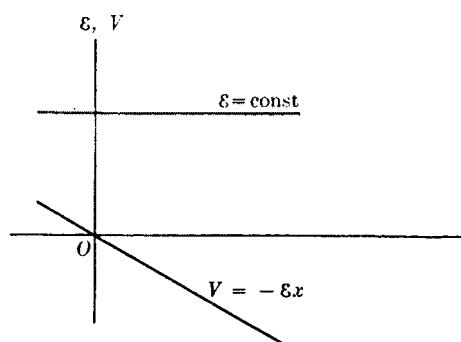


Fig. 14-25. Campo eléctrico uniforme.

Fig. 14-26. Variaciones de ϵ y V en un campo eléctrico uniforme.

Esta relación muy útil ha sido representada gráficamente en la fig. 14-26. Observemos que, debido al signo negativo en la ec. (14.29) o en la ec. (14.30), el campo eléctrico se orienta hacia los potenciales decrecientes. Cuando consideramos dos puntos x_1 y x_2 , la ec. (14.30) da $V_1 = -\epsilon x_1$ y $V_2 = -\epsilon x_2$. Restando, tenemos $V_2 - V_1 = -\epsilon(x_2 - x_1)$; o, haciendo $d = x_2 - x_1$, obtenemos

$$\epsilon = -\frac{V_2 - V_1}{d} = \frac{V_1 - V_2}{d}. \quad (14.31)$$

Aunque esta relación es válida solamente para campos eléctricos uniformes, puede usarse para *estimar* el campo eléctrico entre dos puntos separados por una distancia d , cuando se conoce la diferencia de potencial $V_1 - V_2$ entre ellos. Si la diferencia de potencial $V_1 - V_2$ es positiva el campo está dirigido de x_1 a x_2 , y si es negativa, está dirigido en sentido opuesto. La ecuación (14.31) [o de hecho también la ec. (14.27) o la ec. (14.28)] indica que el campo eléctrico se puede expresar también en volt/metro, unidad equivalente a newton/coulomb dada anteriormente. Esto puede verse del siguiente modo:

$$\frac{\text{volt}}{\text{metro}} = \frac{\text{joule}}{\text{coulomb-metro}} = \frac{\text{newton-metro}}{\text{coulomb-metro}} = \frac{\text{newton}}{\text{coulomb}}.$$

En la práctica se prefiere usar el término volt/metro, abreviado $V \text{ m}^{-1}$ en lugar de $N \text{ C}^{-1}$.

Para obtener el potencial eléctrico debido a una carga puntual, usamos la ec. (14.28), reemplazando s por la distancia r , ya que el campo eléctrico producido yace según el radio; esto es, $\epsilon = -\partial V / \partial r$. Recordando la ec. (14.8), podemos escribir

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} = -\frac{\partial V}{\partial r}.$$

Integrando, suponiendo $V = 0$ para $r = \infty$, como en el caso gravitacional, obtenemos

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad (14.32)$$

Esta expresión podría haberse obtenido también reemplazando en la ec. (13.18) γm por $q/4\pi\epsilon_0$. El potencial eléctrico V es positivo o negativo dependiendo del signo de la carga q que lo produce.

Si tenemos varias cargas q_1, q_2, q_3, \dots , el potencial eléctrico en un punto P (fig. 14-7) es la suma escalar de sus potenciales individuales. O sea,

$$V = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_1} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_2} + \frac{q_3}{4\pi\epsilon_0 r_3} + \dots = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i}. \quad (14.33)$$

En general es más fácil, por lo tanto, calcular el potencial resultante debido a una distribución de cargas y luego obtener el campo resultante, que proceder en el orden inverso. Para calcular el potencial debido a una distribución continua de cargas, dividimos ésta en cargas elementales dq y sustituimos la suma de la ec. (14.33) por la integral (recordar la fig. 14-13), obteniendo

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r}, \quad (14.34)$$

donde la integral se extiende a todo el espacio ocupado por las cargas.

Las superficies que tienen el mismo potencial eléctrico en todos sus puntos —o sea, $V = \text{constante}$ — se llaman *superficies equipotenciales*. La dirección del campo eléctrico es perpendicular a la superficie equipotencial en cada uno de sus puntos. (La justificación de esto se dio en la sección 13.6). Para un campo uniforme, deducimos de la ec. (14.30) que $V = \text{const.}$ implica $x = \text{const.}$, y que por lo tanto las superficies equipotenciales son planas, como se indica con las líneas de trazos en la fig. 14-25. La ec. (14.32) indica que para una carga puntual, las superficies equipotenciales son esferas $r = \text{const.}$, señaladas por las líneas de trazos en la fig. 14-10(a) y (b). Para varias cargas las superficies equipotenciales están dadas por $\sum_i (q_i/r_i) = \text{const.}$, de acuerdo con la ec. (14.33). Las superficies equipotenciales para dos cargas se han indicado con líneas de trazos en las figs. 14-11 y 14-12.

EJEMPLO 14.6. Calcular la energía potencial eléctrica de la carga q_3 del ejemplo 14.1.

Solución: Refrámonos a la fig. 14-6 y usemos la ec. (14.32). Los potenciales eléctricos producidos en C por las cargas q_1 y q_2 situadas en A y B , respectivamente, son

$$V_1 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_1} = 11,25 \times 10^6 \text{ V}, \quad V_2 = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_2} = -9 \times 10^6 \text{ V}.$$

Luego, el potencial eléctrico en el punto C es

$$V = V_1 + V_2 = 2,25 \times 10^6 \text{ V}.$$

La energía potencial de la carga q_3 es entonces

$$E_p = q_3 V = (0,2 \times 10^{-3} \text{ C}) (2,25 \times 10^6 \text{ V}) = 4,5 \times 10^2 \text{ J.}$$

Si comparamos este ejemplo con el 14.2, vemos la diferencia entre trabajar con el campo eléctrico y con el potencial eléctrico.

EJEMPLO 14.7. Calcular el campo eléctrico y el potencial eléctrico producidos por un filamento muy largo que porta la carga λ por unidad de longitud.

Solución: Dividamos el filamento en pequeñas porciones de longitud ds (fig. 14.27). La carga de cada una de estas porciones es $dq = \lambda ds$. La magnitud del campo eléctrico que cada elemento produce en P es

$$d\mathcal{E} = \frac{\lambda ds}{4\pi\epsilon_0 r^2},$$

dirigido según la línea AP . Pero, debido a la simetría del problema, a cada elemento ds , a la distancia s por encima de O , corresponde otro elemento a la misma distancia por debajo de O . Por lo tanto, debemos considerar solamente las componentes paralelas a OP , dadas por $d\mathcal{E} \cos \alpha$, y el campo eléctrico resultante según OP es

$$\mathcal{E} = \int d\mathcal{E} \cos \alpha = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{ds}{r^2} \cos \alpha.$$

De la figura se deduce que $r = R \sec \alpha$ y $s = R \operatorname{tg} \alpha$, luego, $ds = R \sec^2 \alpha d\alpha$. Haciendo estas sustituciones, integrando desde $\alpha = 0$ a $\alpha = \pi/2$, y multiplicando por dos (ya que las dos mitades del filamento dan la misma contribución), obtenemos

$$\mathcal{E} = \frac{2\lambda}{4\pi\epsilon_0 R} \int_0^{\pi/2} \cos \alpha d\alpha = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R}.$$

De modo que el campo eléctrico del filamento varía como R^{-1} . En forma vectorial,

$$\mathbf{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R} \mathbf{u}_R.$$

Para hallar el potencial eléctrico usamos la relación $\mathcal{E} = -\partial V / \partial R$, lo cual nos da

$$\frac{dV}{dR} = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R}.$$

La integración produce

$$V = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln R + C.$$

Se acostumbra en este caso asignar el valor cero al potencial en el punto donde $R = 1$, lo cual da $C = 0$. Luego el potencial eléctrico es

$$V = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln R.$$

Sugerimos al estudiante resolver este problema invirtiendo el orden, hallando primero el potencial y después el campo.

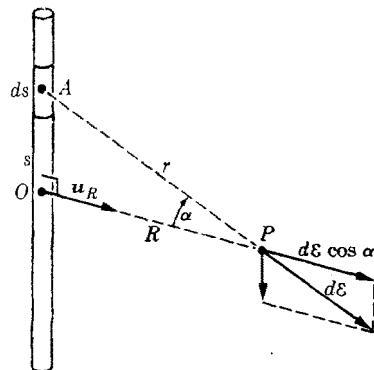


Fig. 14-27. Campo eléctrico producido por un filamento cargado.

14.9 Relaciones energéticas en un campo eléctrico

La energía total de una partícula cargada o de un ion de masa m y carga q moviéndose en un campo eléctrico es

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + qV. \quad (14.35)$$

Cuando el ion se mueve de la posición P_1 (donde el potencial eléctrico es V_1) a la posición P_2 (donde el potencial es V_2), la ec. (14.35) combinada con el principio de conservación de la energía, da

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + qV_1 = \frac{1}{2}mv_2^2 + qV_2. \quad (14.36)$$

O, recordando que según la ec. (8.11) $W = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$ es el trabajo hecho sobre la partícula cargada al moverse desde P_1 a P_2 , tenemos

$$W = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = q(V_1 - V_2). \quad (14.37)$$

Esta última ecuación nos permite dar una definición precisa del volt: es la diferencia de potencial a través de la cual la carga de un coulomb debe moverse, para ganar una cantidad de energía igual a un joule.

Obsérvese que según la ec. (14.37), una partícula cargada positivamente ($q > 0$) gana energía cinética cuando se mueve, desde puntos de mayor potencial, a puntos de menor potencial ($V_1 > V_2$), mientras que una partícula cargada negativamente ($q < 0$), para ganar energía, debe moverse desde puntos de menor potencial, a puntos de mayor potencial ($V_1 < V_2$).

Si escogemos el valor cero para el potencial eléctrico en P_2 ($V_2 = 0$) y disponemos nuestro experimento de modo que en P_1 los iones tengan velocidad cero ($V_1 = 0$), la ec. (14.36) se convierte (quitando los subíndices) en

$$\frac{1}{2}mv^2 = qV, \quad (14.38)$$

expresión que da la energía cinética adquirida por una partícula cuando se mueve a través de una diferencia de potencial V . Este es, por ejemplo, el principio aplicado en los *aceleradores electrostáticos*.

Un acelerador típico (fig. 14-28) consiste en un tubo al vacío a través del cual se aplica una diferencia de potencial entre sus extremos. En uno de sus extremos está una fuente de iones inyectando partículas cargadas dentro del tubo. Las partículas llegan al otro extremo con una energía dada por la ec. (14.38). Estos iones rápidos golpean un blanco T , construido de un material escogido según la naturaleza del experimento a ejecutar. El resultado de estas colisiones es algún tipo de reacción nuclear. La energía producida por el choque de los iones se transfiere al blanco, por lo cual éste debe ser constantemente enfriado, ya que de otro modo se fundiría o vaporizaria.

Hay varios tipos de aceleradores electrostáticos (Cockcroft-Walton, Van de Graaff, etc.). Cada uno de ellos produce la diferencia de potencial V por diferentes métodos. En cualquier caso, la energía de los aceleradores electrostáticos está limitada por la diferencia de potencial máxima que se les puede aplicar sin que salten chispas entre los materiales usados. Esta diferencia de potencial no excede de unos pocos millones de volts.

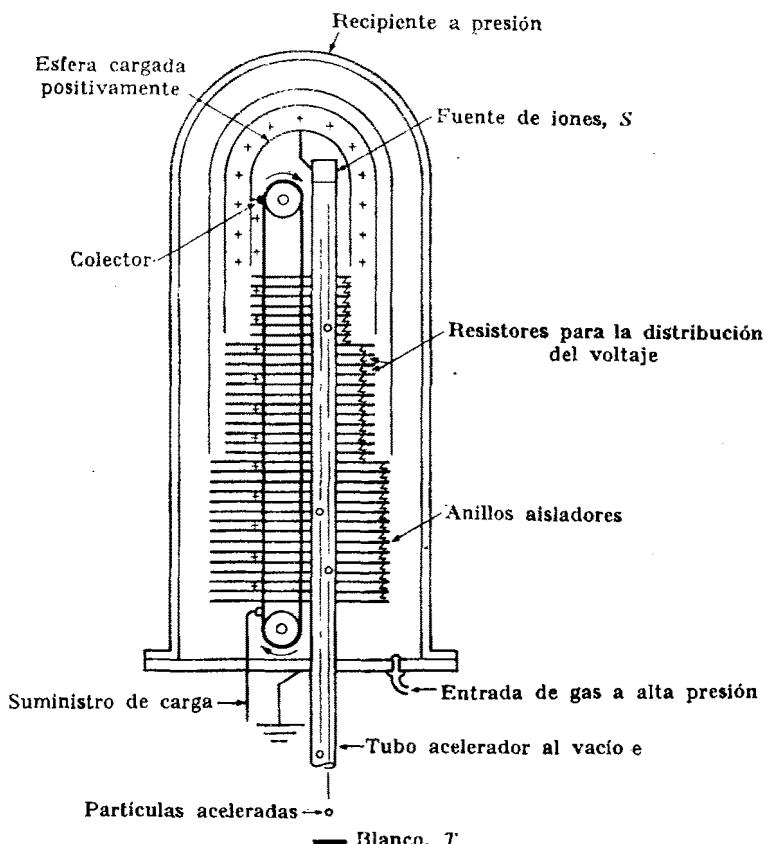


Fig. 14-28. Sección transversal simplificada de un acelerador electrostático de Van de Graaff. Un motor de alta velocidad transporta sobre dos poleas una correa hecha de un material aislador. La correa toma en su extremo inferior la carga eléctrica proveniente de una fuente de voltaje y la transporta hacia arriba. Un colector retira la carga y la coloca en la esfera metálica situada en la parte superior, la que adquiere un alto potencial eléctrico. En este extremo de alto voltaje se producen iones positivos que son acelerados hacia abajo por la diferencia de potencial entre la esfera cargada y el potencial de tierra al otro extremo.

Considerando que las partículas fundamentales y los núcleos tienen una carga que es igual a, o es un múltiplo de la carga fundamental e , la ec. (14.37) sugiere que definamos una nueva unidad de energía, llamada *electronvolt*, abreviado eV, que se introdujo por primera vez en la sección 8.5. Un electronvolt es la energía adquirida por una partícula de carga e al moverse a través de una diferencia de potencial de un volt. Así, usando el valor de e de la ec. (14.13), tenemos

$$\text{eV} = (1,6021 \times 10^{-19} \text{ C})(1 \text{ V}) = 1,6021 \times 10^{-19} \text{ J},$$

que es la equivalencia dada en la sección 8.5. Una partícula de carga e moviéndose a través de una diferencia de potencial ΔV gana la energía $e\Delta V$ eV. Múlti-

tipos convenientes del electronvolt son el *kiloelectronvolt* (keV) y el *megaelectronvolt* (MeV).

Es muy útil expresar la masa en reposo de las partículas fundamentales en esta unidad. Los resultados son:

$$E_e = m_e c^2 = 8,1867 \times 10^{-14} \text{ J} = 0,5110 \text{ MeV},$$

$$E_p = m_p c^2 = 1,5032 \times 10^{-10} \text{ J} = 938,26 \text{ MeV},$$

$$E_n = m_n c^2 = 1,5053 \times 10^{-10} \text{ J} = 939,55 \text{ MeV}.$$

EJEMPLO 14.8. Suponiendo que el movimiento de un electrón en un átomo pueda ser descrito por las leyes de la mecánica newtoniana, discutir las órbitas posibles de un electrón único alrededor de una carga nuclear Ze . El caso $Z = 1$ corresponde al átomo de hidrógeno, $Z = 2$ a un átomo de helio ionizado He^+ (es decir, un átomo de helio que ha perdido un electrón), $Z = 3$ a un átomo de litio doblemente ionizado Li^{++} (es decir, un átomo de litio que ha perdido dos electrones) y así sucesivamente.

Solución: La interacción eléctrica inversamente proporcional al cuadrado de la distancia, involucrada en el movimiento de un electrón alrededor de un núcleo, es dinámicamente idéntica a la interacción gravitacional involucrada en el movimiento de un planeta alrededor del sol, y por lo tanto los resultados obtenidos en el capítulo 13 son aplicables directamente si, en las expresiones correspondientes, reemplazamos $\gamma mm'$ por $Ze^2/4\pi\epsilon_0$. Por ejemplo, las órbitas serán elipses (o circunferencias) con el núcleo en uno de los focos. Sin embargo, para mayor claridad, retiremos algunos de los pasos.

Consideremos dos cargas, q_1 y q_2 , separadas a una distancia r y moviéndose con velocidades v_1 y v_2 . La energía potencial eléctrica del sistema es $E_p = q_1 q_2 / 4\pi\epsilon_0 r$, y la energía total es

$$E = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 + \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

En el caso de varias partículas cargadas, como en un átomo o en una molécula, la energía total es

$$E = \sum_{\text{todas las partículas}} \frac{1}{2}m_i v_i^2 + \sum_{\text{todos los pares}} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}}.$$

Como se explicó en el ejemplo 9.9, la energía, en el caso de dos partículas referidas a su centro de masa, puede escribirse de la forma

$$E = \frac{1}{2}\mu v^2 + \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r}, \quad (14.39)$$

donde μ es la masa reducida del sistema de dos partículas [ec. (9.17)] y v su velocidad relativa.

En el caso de un electrón moviéndose alrededor de un núcleo, $q_1 = -e$ y $q_2 = Ze$. Además, como la masa del núcleo es mayor que la masa del electrón, podemos reemplazar la masa reducida del sistema electrón-núcleo por la masa del electrón m_e . Solamente en los átomos muy ligeros tales como los de hidrógeno y helio, puede comprobarse el efecto de la masa reducida. Con esta aproximación tenemos para la energía total del átomo,

$$E = \frac{1}{2}m_e v^2 - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

Suponiendo que la órbita sea circular, la ecuación del movimiento del electrón es, según la ec. (7.28), $m_e v^2/r = F_N$, ó

$$\frac{m_e v^2}{r} = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r^2},$$

de donde, $m_e v^2 = Ze^2/4\pi\epsilon_0 r$. Substituyendo este valor en la expresión previa de la energía total, se obtiene

$$E = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0(2r)} = -9 \times 10^8 \frac{Ze^2}{2r}, \quad (14.40)$$

donde la constante eléctrica está expresada en el sistema MKSC de unidades. Con este valor, E se expresa en J cuando r está en m y e en C. Esta ecuación está de acuerdo con la ec. (13.6) para el caso gravitacional si reemplazamos $\gamma mm'$ por $Ze^2/4\pi\epsilon_0$.

La expresión (14.40) para la energía del sistema electrón-núcleo, será revisada más adelante para tomar en consideración los efectos relativista y magnético (ejemplos 14.10 y 15.15). Para el átomo de hidrógeno ($Z = 1$), E representa la energía requerida para separar el electrón del protón; o sea, la energía de ionización del átomo de hidrógeno. El valor experimental para esta energía de ionización es $2,177 \times 10^{-18}$ J ó 13,6 eV; con este valor encontramos que el radio de la órbita del electrón es $r = 0,53 \times 10^{-10}$ m. El hecho de que este radio sea del mismo orden de magnitud que el estimado para las dimensiones atómicas, nos proporciona una buena verificación de nuestro modelo del átomo.

En la sección 14.7 indicamos que la energía del movimiento electrónico en un átomo está cuantizada. En el caso de átomos con un solo electrón, las energías posibles de los estados estacionarios están dadas, según la mecánica cuántica, por la expresión

$$E_n = -\frac{mc^4 Z^2}{8\epsilon_0^2 h^2 n^2},$$

donde n es un número entero que puede tomar los valores 1, 2, 3, ... y $h = 2\pi\hbar = 6,6256 = 10^{-34}$ J s es la constante de Planck, que se introdujo en el ejemplo 7.15 en relación con el momento angular del electrón en el átomo de hidrógeno. Introduciendo valores numéricos, tenemos que

$$E_n = -\frac{2,177 \times 10^{-18} Z^2}{n^2} \text{ J} = -\frac{13,598 Z^2}{n^2} \text{ eV.}$$

El estado fundamental corresponde a $n = 1$, ya que ésta es la mínima energía posible para el átomo. Comparando la expresión anterior de E_n con la ec. (14.40), tenemos una estimación del tamaño de las correspondientes órbitas electrónicas permitidas. Este resultado es

$$r = -\frac{n^2 \hbar^2 \epsilon_0}{\pi Z e^2 m_e} = \frac{n^2 a_0}{Z},$$

donde

$$a_0 = \hbar^2 \epsilon_0 / \pi e^2 m_e = 5,292 \times 10^{-11} \text{ m}$$

se llama *radio de Bohr*. Corresponde al radio del átomo de hidrógeno en su estado fundamental. Hemos indicado previamente que el movimiento electrónico no corresponde a órbitas electrónicas bien definidas, como en el caso de los planetas. Por consiguiente, el valor de r no debe tomarse al pie de la letra. Antes bien, sirve sólo para dar una idea del orden de magnitud de la región en la cual es muy probable que se encuentre el electrón.

EJEMPLO 14.9. Usando el principio de conservación de la energía, calcular la distancia mínima de aproximación de una partícula cargada que choca de frente contra un núcleo atómico.

Solución: Si la carga del núcleo es Ze y la del proyectil es ve , que corresponden a q_1 y q_2 de la ec. (14.39), la energía total del sistema del proyectil más núcleo es

$$E = \frac{1}{2}\mu v^2 + \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r},$$

siendo μ la masa reducida del sistema. Si la masa del núcleo es mucho mayor que la del proyectil, o si el núcleo está alojado en un cristal, podemos reemplazar μ por la masa del proyectil m , resultando

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

Pero si, por ejemplo, dirigimos protones contra protones ($v = Z = 1$), debemos usar la masa reducida, que es $\mu = \frac{1}{2}m_p$ (recordar el ejemplo 9.3). Cuando la partícula está muy distante, toda su energía es cinética e igual a $\frac{1}{2}mv_0^2$. Llamamos v a su velocidad en el punto A de máximo acercamiento (fig. 14-24) cuando $r = R$. La conservación de la energía requiere que

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{1}{2}mv_0^2.$$

En el punto A de máxima aproximación, la velocidad es totalmente transversal, y por lo tanto el momentum angular es $L = mRv$. Como L es una constante del movimiento, podemos usar esta relación para eliminar la velocidad v en el punto A , obteniendo

$$\frac{L^2}{2mR^2} + \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{1}{2}mv_0^2.$$

Ecación de segundo grado en $1/R$ que permite obtener R en función de la energía y del momentum angular de la partícula. Para una colisión de frente, $L = 0$ y

$$R = \frac{vZe^2}{4\pi\epsilon_0 (\frac{1}{2}mv_0^2)},$$

lo cual está de acuerdo con el resultado previamente obtenido en el ejemplo 14.5. Obsérvese que para una colisión de frente, $v = 0$ en el punto de máxima aproximación y toda la energía cinética se ha transformado en potencial.

EJEMPLO 14.10. Estimar el orden de magnitud de la corrección debida a los efectos relativistas que hay que hacer a la energía de un electrón en un átomo.

Solución: En el capítulo 13 y en este capítulo, siempre que hemos tratado el movimiento regido por la ley de proporcionalidad inversa del cuadrado de la distancia, como se hizo en el ejemplo 14.8, hemos usado la mecánica newtoniana despreciando los efectos relativistas. El procedimiento es correcto para el movimiento planetario, pero cuando se trata del movimiento de electrones en un átomo no siempre se justifica. En un átomo, los electrones se mueven con velocidades suficientemente grandes de modo que la corrección relativista puede medirse experimentalmente. Estimemos el orden de magnitud de este efecto.

Usando la ec. (11.18), encontramos que la energía total de un electrón que se mueve con gran velocidad en un átomo (restando su energía en reposo) es

$$E = c \sqrt{m_e^2c^2 + p^2} + (-eV) - m_ec^2.$$

Suponiendo que el momentum p es menor que m_ec , podemos desarrollar el radical hasta términos de segundo orden, con lo que se obtiene

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2m_e} p^2 - \frac{1}{8m_e^2 c^2} p^4 + \dots + (-eV) = \\ &= \left[\frac{1}{2m_e} p^2 + (-eV) \right] - \frac{1}{8m_e^2 c^2} p^4 + \dots \end{aligned}$$

Los dos términos encerrados dentro del corchete dan la energía sin tomar en cuenta el efecto relativista, el cual, para órbitas circulares, está dado por la ec. (14.40). Por lo tanto, el último término es la corrección relativista de la energía total del electrón, con aproximación hasta del primer orden, que designaremos por ΔE_r . Luego

$$\Delta E_r = -\frac{1}{8m_e^2 c^2} p^4 = -\frac{1}{2m_e c^2} \left(\frac{p^2}{2m_e} \right) \left(\frac{p^2}{2m_e} \right).$$

Los dos términos encerrados en el paréntesis corresponden a la energía cinética no relativista del electrón. Entonces podemos escribir (con razonable aproximación) para el primero, usando el resultado del ejemplo 14.8,

$$\frac{p^2}{2m_e} = E - E_p = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0(2r)} + \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0(2r)} = -E.$$

El segundo puede escribirse $p^2/2m_e = \frac{1}{2}m_e v^2$. Por consiguiente

$$\Delta E_r = -\frac{1}{2m_e c^2} (-E)(\frac{1}{2}m_e v^2) = \frac{1}{4} \frac{v^2}{c^2} E.$$

Luego, la corrección relativista es del orden de $(v/c)^2$ veces la energía del electrón. En el átomo de hidrógeno, por ejemplo, (v/c) es del orden de 10^{-3} y por lo tanto $\Delta E_r \sim 10^{-6} E$, o cerca de 0,001% de E , una cantidad que puede ser fácilmente medida en el laboratorio con técnicas experimentales ahora en uso.

14.10 Corriente eléctrica

El ejemplo del acelerador electrostático con partículas cargadas aceleradas según la dirección del eje del tubo, dado en la sección 14.9, sugiere que introduzcamos ahora el concepto muy importante de *corriente eléctrica*. Una corriente eléctrica consiste en un chorro de partículas cargadas o iones. Esta definición es aplicable a los iones en un acelerador de cualquier clase, a los de una solución electrolítica, a los de un gas ionizado o plasma, o a los electrones en un conductor metálico. A fin de que se produzca una corriente eléctrica, debe aplicarse un campo eléctrico para mover las partículas cargadas en una dirección determinada.

La intensidad de una corriente eléctrica se define como la carga eléctrica que pasa por unidad de tiempo a través de una sección de la región donde ésta fluye, como, por ejemplo, la sección del tubo de un acelerador o de un alambre metálico. En consecuencia, si en el tiempo t , pasan N partículas, cada una con carga q , a través de una sección del medio conductor, la carga total Q que ha pasado es $Q = Nq$, y la intensidad de la corriente es

$$I = Nq/t = Q/t. \quad (14.41)$$

En realidad, la expresión anterior da la corriente media en el tiempo t ; la corriente instantánea es

$$I = dQ/dt. \quad (14.42)$$

La corriente eléctrica se expresa en coulomb/segundo o $s^{-1} C$, unidad llamada *ampere* (abreviado A) en honor del físico francés André M. Ampère (1775-1836). Un ampere es la intensidad de una corriente eléctrica que corresponde al paso de un coulomb a través de una sección del material en un segundo.

La dirección de una corriente eléctrica se supone que es la del movimiento de las partículas cargadas positivamente. Es la misma dirección del campo eléctrico aplicado o de la diferencia de potencial que produce el movimiento de las partículas cargadas (fig. 14-29a). De ahí que, si una corriente se debe al movi-

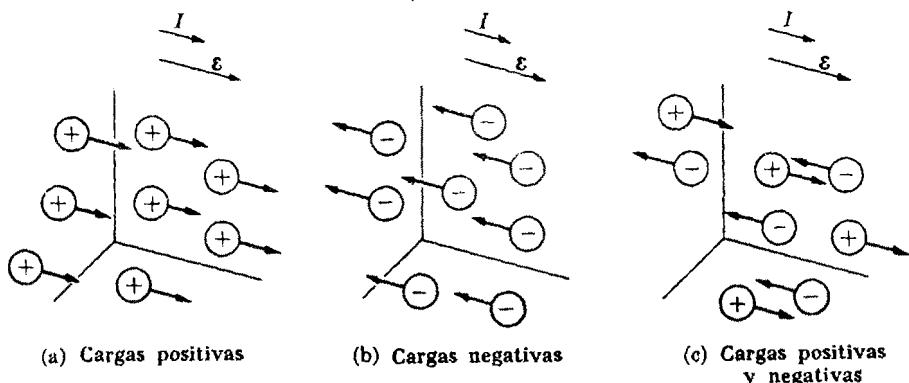


Fig. 14-29. Corriente eléctrica I resultante del movimiento de iones positivos y negativos producido por un campo eléctrico.

miento de partículas cargadas negativamente, tal como los electrones, el sentido de la corriente es opuesto al del movimiento real de los mismos (fig. 14-29b).

Mantener una corriente eléctrica requiere energía porque los iones son acelerados por el campo eléctrico. Supongamos que en el tiempo t haya N iones, cada uno con carga q , moviéndose a través de una diferencia de potencial V . Cada ion adquiere la energía qV , y la energía total adquirida es $NqV = QV$. La energía por unidad de tiempo, o la potencia requerida para mantener la corriente, es entonces

$$P = QV/t = VI. \quad (14.43)$$

Esta expresión da, por ejemplo, la potencia requerida para hacer funcionar el acelerador estudiado en la sección anterior. También da la rapidez con que se transfiere energía al blanco del acelerador, y por lo tanto la rapidez con la cual el sistema de enfriamiento del blanco debe sacar energía. Vemos así, que la expresión (14.43) tiene validez general y da la potencia necesaria para mantener una corriente eléctrica I a través de una diferencia de potencial V aplicada a dos puntos de cualquier medio conductor. Nótese que, según la ec. (14.43),

$$\text{volt} \times \text{ampere} = \frac{\text{joule}}{\text{coulomb}} \times \frac{\text{coulomb}}{\text{segundo}} = \frac{\text{joule}}{\text{segundo}} = \text{watt}$$

de modo que las unidades son compatibles.

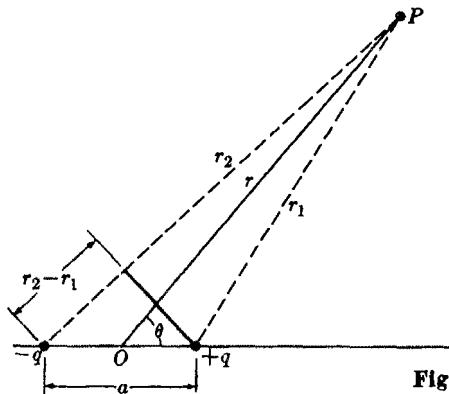


Figura 14-30

14.11 Dipolo eléctrico

Una disposición interesante de cargas es el dipolo eléctrico. Este consiste en dos cargas opuestas, $+q$ y $-q$, separadas por una distancia muy pequeña (fig. 14-30).

El momento dipolar eléctrico \mathbf{p}^* se define por

$$\mathbf{p} = q\mathbf{a}, \quad (14.44)$$

donde \mathbf{a} es el vector desplazamiento orientado de la carga negativa a la positiva. El potencial eléctrico en el punto P debido al dipolo eléctrico es, usando la ec. (14.33),

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{r_1} - \frac{q}{r_2} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q(r_2 - r_1)}{r_1 r_2}.$$

Si la distancia a es muy pequeña comparada con r , podemos poner

$$r_2 - r_1 = a \cos \theta \quad \text{y} \quad r_1 r_2 = r^2,$$

resultando

$$V = \frac{qa \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad \text{ó} \quad V = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \quad (14.45)$$

* Obsérvese que el símbolo convencional de momentum es el mismo que el de momento dipolar eléctrico.

Podemos expresar la ec. (14.45) en coordenadas rectangulares y usar la ec. (14.29) para obtener la intensidad del campo eléctrico (recordar el ejemplo 13.7). Dejamos esto como ejercicio al estudiante. En su lugar determinaremos las componentes de \mathcal{E} en coordenadas polares, usando la ec. (14.28). Para obtener la componente radial \mathcal{E}_r , observemos que $ds = dr$, entonces

$$\mathcal{E}_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{2p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}. \quad (14.46)$$

Para la componente transversal \mathcal{E}_θ , usamos $ds = r d\theta$, con lo cual se obtiene

$$\mathcal{E}_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{p \operatorname{sen} \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}. \quad (14.47)$$

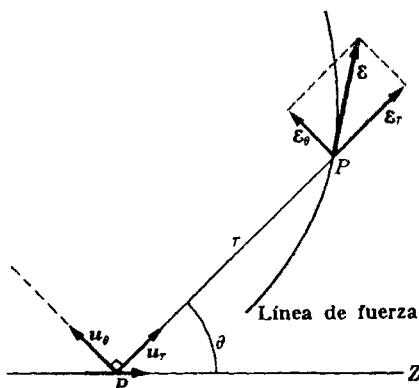


Figura 14-31

Estas dos componentes se ilustran en la figura 14-31. Las líneas de fuerzas están indicadas en la fig. 14-32. Aunque en un dipolo eléctrico, por ser las dos cargas iguales y opuestas, la carga neta es cero, el ligero desplazamiento que hay entre ellas es suficiente para producir un campo eléctrico diferente de cero.

En general, si tenemos varias cargas q_1, q_2, q_3, \dots en los puntos P_1, P_2, P_3, \dots , el momento dipolar eléctrico de la distribución de cargas es

$$\mathbf{p} = q_1 \mathbf{r}_1 + q_2 \mathbf{r}_2 + q_3 \mathbf{r}_3 + \dots = \sum_i q_i \mathbf{r}_i.$$

[Esta definición coincide con la ec. (14.44), porque, siendo dos cargas iguales y opuestas, el momento es $\mathbf{p} = qr_1 - qr_2 = q(r_1 - r_2) = q\mathbf{a}$.] Tomando el eje Z en la dirección de \mathbf{p} , la expresión anterior para el momento dipolar eléctrico de varias cargas es, en módulo

$$p = \sum_i q_i z_i = \sum_i q_i r_i \cos \theta_i, \quad (14.48)$$

siendo r la distancia de cada carga al origen, θ_i el ángulo que r_i forma con el eje Z y $z_i = r_i \cos \theta_i$.

En los átomos, el centro de masa de los electrones coincide con el núcleo, y por consiguiente, el promedio del momento dipolar eléctrico del átomo es cero (fig. 14-33a). Pero si se aplica un campo externo, el movimiento electrónico se perturba, lo que ocasiona que el centro de masa de los electrones se desplace una distancia x con respecto al núcleo (fig. 14-33b). Se dice que el átomo se ha polarizado convirtiéndose en un dipolo eléctrico de momento \mathbf{p} . Este momento es proporcional al campo eléctrico externo \mathcal{E} .

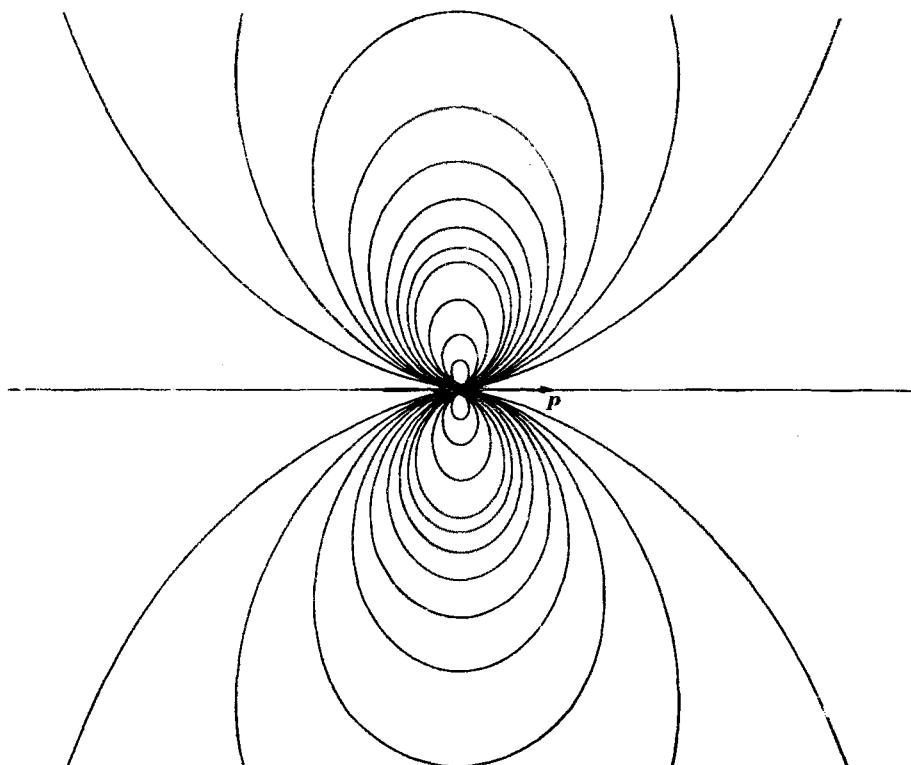


Fig. 14-32. Líneas de fuerza del campo eléctrico de un dipolo eléctrico.

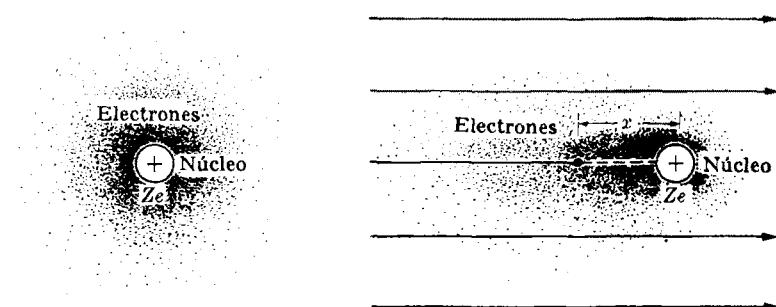


Fig. 14-33. Polarización de un átomo bajo la acción de un campo eléctrico externo.

Por otra parte, algunas moléculas pueden tener un momento dipolar eléctrico permanente. Tales moléculas se llaman *polares*. Por ejemplo, en la molécula de HCl (fig. 14-34), el electrón del átomo de H tarda más tiempo en su movimiento alrededor del átomo de Cl, que alrededor del átomo de H. En consecuencia, el centro de las cargas negativas no coincide con el de las cargas positivas,

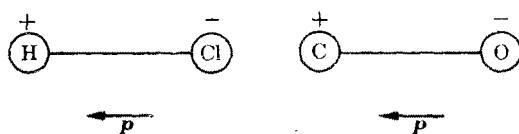
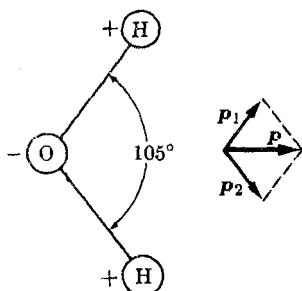
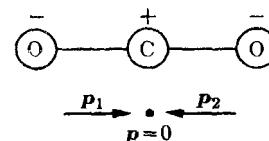


Fig. 14-34. Moléculas diatómicas polares.

y la molécula presenta un momento dipolar dirigido del átomo de Cl al átomo de H. O sea que podemos escribir H^+Cl^- . El momento dipolar eléctrico de la molécula de HCl es $p = 3.43 \times 10^{-30}$ C m. En la molécula de CO, la distribución de cargas es ligeramente asimétrica y el momento dipolar eléctrico es relativamente pequeño, aproximadamente igual a 0.4×10^{-30} C m, estando el átomo de carbono en el extremo positivo de la molécula y el de oxígeno en el negativo.

Fig. 14-35. Dipolo eléctrico de la molécula H_2O .Fig. 14-36. La molécula de CO_2 no tiene dipolo eléctrico.

En una molécula tal como H_2O , donde los enlaces H—O forman un ángulo un poco mayor de 90° (fig. 14-35), los electrones tratan de concentrarse alrededor del átomo de oxígeno, por lo cual éste parece ligeramente negativo respecto a los átomos de H. Cada enlace H—O contribuye de este modo al momento dipolar eléctrico resultante, el cual, debido a la simetría, yace según el eje de la molécula y tiene un valor igual a 6.2×10^{-30} C m. Pero en la molécula de CO_2 , todos los átomos están en línea recta (fig. 14-36), y el momento dipolar eléctrico resultante es igual a cero por simetría. Por lo tanto los momentos dipolares eléctricos suministran información útil acerca de la estructura de las moléculas. En la tabla 14-1 se dan valores de p para varias moléculas polares.

Cuando un dipolo eléctrico se coloca en un campo eléctrico, se produce una fuerza sobre cada carga del dipolo (fig. 14-37). La resultante de estas fuerzas es

$$\mathbf{F} = q\mathcal{E} - q\mathcal{E}' = q(\mathcal{E} - \mathcal{E}').$$

Consideremos el caso especial en que el campo eléctrico está dirigido según el eje X y el dipolo está orientado paralelamente al campo. Entonces, considerando sólo los módulos, $\mathcal{E} - \mathcal{E}' = (d\mathcal{E}/dx)a$, y por lo tanto $F = p(d\mathcal{E}/dx)$. Este resultado prueba que *un dipolo eléctrico paralelo al campo eléctrico tiende a moverse en la*

TABLA 14-1 Momentos dipolares eléctricos de algunas moléculas seleccionadas*

Molécula	p , m C
HCl	$3,43 \times 10^{-30}$
HBr	$2,60 \times 10^{-30}$
HI	$1,26 \times 10^{-30}$
CO	$0,40 \times 10^{-30}$
H_2O	$6,2 \times 10^{-30}$
H_2S	$5,3 \times 10^{-30}$
SO_2	$5,3 \times 10^{-30}$
NH_3	$5,0 \times 10^{-30}$
$\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}$	$3,66 \times 10^{-30}$

* Entre las moléculas con momento dipolar eléctrico igual a cero están: CO_2 , H_2 , CH_4 (metano), C_2H_6 (etano) y CCl_4 (tetracloruro de carbono).

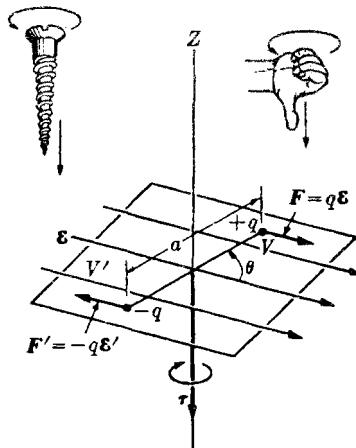


Fig. 14-37. Dipolo eléctrico en un campo eléctrico externo.

dirección en que el campo crece. Se obtiene un resultado contrario si el dipolo se orienta antiparalelamente al campo. El estudiante observará que si el campo eléctrico es uniforme, la fuerza resultante sobre el dipolo eléctrico es cero.

La energía potencial del dipolo es

$$E_p = qV - qV' = q(V - V') = -qa\left(-\frac{V - V'}{a}\right),$$

y usando la ec. (14.31), encontramos que si θ es el ángulo entre el dipolo y el campo eléctrico, el último factor es la componente $\mathcal{E}_a = \mathcal{E} \cos \theta$ del campo \mathcal{E} paralelo a a . Por lo cual $E_p = -qa\mathcal{E}_a$

$$E_p = -p\mathcal{E} \cos \theta = -\mathbf{p} \cdot \mathcal{E}. \quad (14.49)$$

La energía potencial tiene un valor mínimo cuando $\theta = 0$, lo que indica que el dipolo está en equilibrio cuando se orienta paralelamente al campo. Si despreciamos la pequeña diferencia entre \mathcal{E} y \mathcal{E}' las fuerzas $q\mathcal{E}$ y $-q\mathcal{E}'$ sobre las cargas que componen el dipolo forman un par cuyo torque, de acuerdo con la ec. (4.13), es

$$\tau = \mathbf{a} \times (q\mathcal{E}) = (qa) \times \mathcal{E} = \mathbf{p} \times \mathcal{E}. \quad (14.50)$$

De la expresión anterior, así como de la fig. 14-37, deducimos que el torque del campo eléctrico tiende a alinear el dipolo paralelamente al campo. El módulo del torque es $\tau = p\mathcal{E} \sin \theta$ y su dirección están indicados en la fig. 14-37. Si usamos la ec. (8.26), $\tau_z = -\partial E_p / \partial \theta$, podemos usar la ec. (14.49) para obtener $\tau_z = -p\mathcal{E} \sin \theta$. La diferencia de signo para τ se debe al hecho que τ da el módulo del torque, mientras que τ_z da la componente del torque según la dirección Z , perpendicular al plano en el cual se mide el ángulo θ , y orientada en el sentido en que avanza un tornillo de rosca derecha, que rota en el sentido en que θ crece.

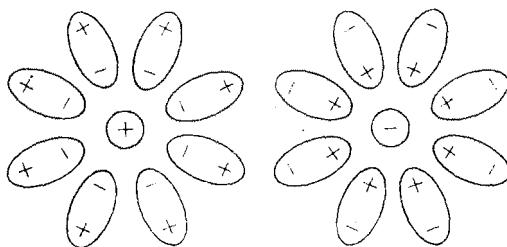


Fig. 14-38. Efectos de polarización de un ion en solución.

El signo negativo de τ_z confirma que el torque tiende a disminuir el ángulo θ .

Estas propiedades de un dipolo colocado en un campo eléctrico tienen importantes aplicaciones. Por ejemplo, como mencionamos en la discusión de la fig. 14.19 cuando hablamos acerca de la electrolisis, el campo eléctrico de un ion en solución, polariza las moléculas del solvente que rodea al ion, y entonces se orientan en la forma indicada en la fig. 14-38. Estas moléculas orientadas se ligan más o menos al ion, aumentando su masa efectiva y disminuyendo su carga efectiva, la cual queda parcialmente sin influencia externa, por la pantalla que forman las moléculas. El efecto neto es que la movilidad del ion en el campo externo disminuye. También, cuando un gas o un líquido cuyas moléculas forman dipolos permanentes, se coloca en un lugar donde existe un campo eléctrico, las moléculas, como resultado de los momentos debidos al campo eléctrico, tienden a alinearse con sus dipolos paralelos al campo. En este caso decimos que la sustancia ha sido *polarizada* (ver la sección 16.5).

EJEMPLO 14.11. Expresar el campo eléctrico de un dipolo en forma vectorial.

Solución: En la fig. 14-31 observamos que

$$\mathbf{E} = \mathbf{u}_r \epsilon_r + \mathbf{u}_\theta \epsilon_\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} (\mathbf{u}_r 2p \cos \theta + \mathbf{u}_\theta p \sin \theta).$$

De la misma figura obtenemos

$$\mathbf{p} = p(\mathbf{u}_r \cos \theta - \mathbf{u}_\theta \sin \theta).$$

Usando esta relación para eliminar $p \sin \theta$ en la expresión de \mathbf{E} obtenemos

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} (3\mathbf{u}_r p \cos \theta - \mathbf{p}).$$

Además, $p \cos \theta = \mathbf{u}_r \cdot \mathbf{p}$. Por consiguiente

$$\mathbf{E} = \frac{3\mathbf{u}_r (\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{p}) - \mathbf{p}}{4\pi\epsilon_0 r^3},$$

que da el campo del dipolo eléctrico en forma vectorial.

EJEMPLO 14.12. Obtener la energía de interacción entre dos dipolos eléctricos. Usar el resultado obtenido para estimar la energía de interacción entre dos moléculas de agua. Discutir además los efectos de orientación relativa.

Solución: En el ejemplo 14.11 obtuvimos el campo eléctrico producido por un dipolo a la distancia r . Llamando \mathbf{p}_1 su momento dipolar eléctrico, podemos escribir

$$\mathbf{E}_1 = \frac{3\mathbf{u}_r(\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{p}_1) - \mathbf{p}_1}{4\pi\epsilon_0 r^3}.$$

Designando por \mathbf{p}_2 el momento del segundo dipolo, y usando la ec. (14.49) encontramos que la energía de interacción entre los dos dipolos es

$$E_{p_{12}} = -\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{E}_1 = -\frac{3(\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{p}_1)(\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{p}_2) - \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2}{4\pi\epsilon_0 r^3}. \quad (14.51)$$

Importantes conclusiones pueden derivarse de este resultado. Una de ellas es que la energía de interacción $E_{p_{12}}$ es simétrica en los dos dipolos porque si intercambiamos \mathbf{p}_1 y \mathbf{p}_2 todo permanece igual. Este resultado era de esperarse. Otra es que la interacción entre los dos dipolos no es central porque depende de los ángulos que el vector de posición \mathbf{r} o el versor \mathbf{u}_r forma con \mathbf{p}_1 y \mathbf{p}_2 . Como consecuencia, en el movimiento debido a la interacción dipolo-dipolo, el momentum angular orbital de los dipolos no se conserva. Otra consecuencia es que la fuerza entre los dos dipolos no yace según la línea que los une (excepto para ciertas posiciones específicas). Una conclusión adicional es que, como la energía potencial entre dos dipolos eléctricos varía con la distancia de acuerdo a r^{-3} , la fuerza, que es el gradiente de la energía potencial, disminuye según r^{-4} , y por lo tanto la interacción entre dos dipolos eléctricos disminuye con la distancia más rápidamente que la interacción entre las cargas.

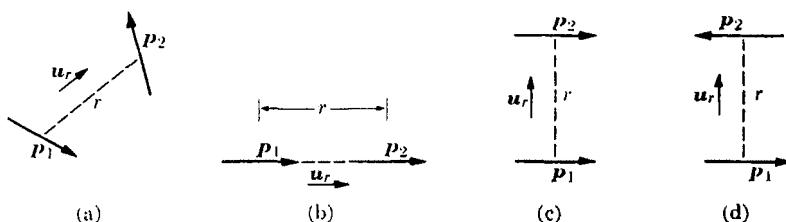


Fig. 14-39. Interacción entre dos dipolos eléctricos.

La geometría correspondiente a la ec. (14.51) se ilustra en la fig. 14-39, donde (a) corresponde al caso general. En (b) los dos dipolos están alineados según la recta que los une. De este modo $\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 = p_1 p_2$, $\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{p}_1 = p_1$ y $\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{p}_2 = p_2$, luego

$$E_{p_{12}} = -\frac{2p_1 p_2}{4\pi\epsilon_0 r^3},$$

resultando una atracción entre los dipolos ya que el signo es negativo. En (c) tenemos $\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 = p_1 p_2$, pero $\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{p}_1 = 0$ y $\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{p}_2 = 0$, de modo que

$$E_{p_{12}} = +\frac{p_1 p_2}{4\pi\epsilon_0 r^3}.$$

Como este valor es positivo, indica una repulsión entre los dos dipolos. Finalmente, en (d) tenemos $\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 = -p_1 p_2$ y entonces

$$E_{p_{12}} = -\frac{p_1 p_2}{4\pi\epsilon_0 r^3},$$

que significa que hay atracción de los dipolos. Estos resultados están evidentemente de acuerdo con la imagen física del problema.

La interacción entre dos dipolos eléctricos es de gran importancia porque las fuerzas moleculares se deben, en gran parte, a este tipo de interacción. Consideremos dos moléculas de agua en la posición relativa de la fig. 14-39b a distancia normal en la fase líquida de 3.1×10^{-10} m. Su momento dipolar eléctrico es 6.1×10^{-30} C m. Por lo tanto, la energía potencial de interacción es

$$E_{p,12} = \frac{9 \times 10^9 \times 2 \times (6.1 \times 10^{-30})^2}{(3.1 \times 10^{-10})^3} = 2.22 \times 10^{-20} \text{ J.}$$

Este resultado es diez veces mayor que la energía de interacción mencionada en la sección 13.9, que se estimó usando el valor del calor de vaporización. El estudiante comprenderá, sin embargo, que el presente resultado corresponde a la energía de interacción *instantánea* entre dos moléculas de agua en la posición relativa de la fig. 14-39b. Pero como las moléculas de agua están en continuo movimiento, su orientación relativa cambia continuamente. Por consiguiente, para obtener la energía $E_{p,12}$ debemos promediar los valores dados por la ec. (14.51) en todas las orientaciones relativas posibles. Así obtenemos resultados más concordantes.

Sugerimos que el estudiante compare el resultado anterior para la energía de interacción eléctrica $E_{p,12}$, entre dos moléculas de agua, con la correspondiente interacción gravitacional para la misma posición relativa.

14.12 Multipolos eléctricos de orden superior

Es posible definir momentos multipolares eléctricos de orden superior al segundo. Por ejemplo, una distribución de cargas como la indicada en la fig. 14-40 constituye un *cuadrupolo eléctrico*. Obsérvese que su carga total es cero y que su momento dipolar eléctrico es también cero, en virtud de la ec. (14.48). No es fácil dar aquí una definición general del *momento cuadrupolar eléctrico*, de un modo elemental. Sin embargo, podemos decir, que el momento cuadrupolar eléctrico de una distribución de cargas respecto a un eje de simetría, tal como el eje Z, se define por

$$Q = \frac{1}{2} \sum_i q_i r_i^2 (3 \cos^2 \theta_i - 1), \quad (14.52)$$

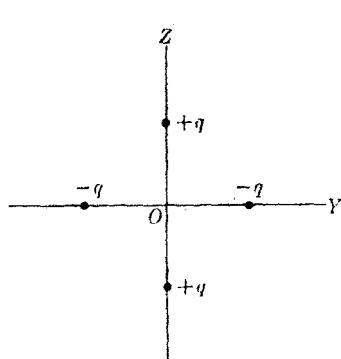


Fig. 14-40. Cuadrupolo eléctrico.

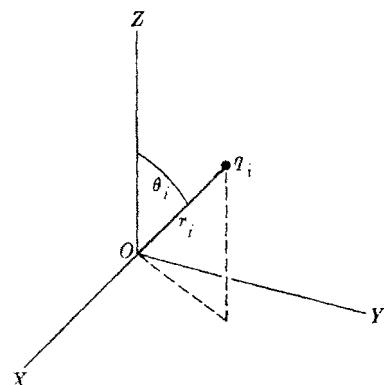


Figura 14-41

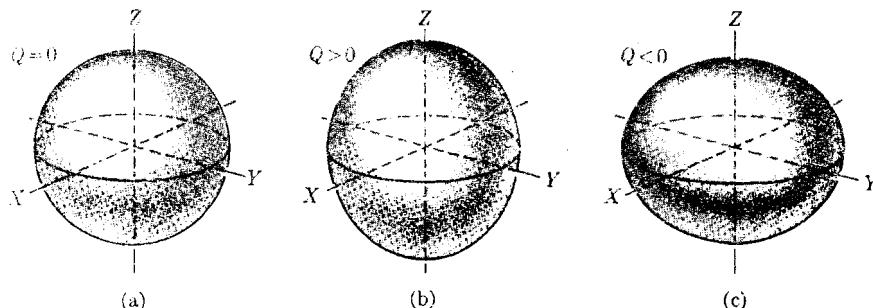


Fig. 14-42. Cuadrupolo eléctrico de distribuciones elipsoidales de carga.

donde r_i es la distancia desde la carga i al centro, y θ_i es el ángulo que \mathbf{r}_i forma con el eje (fig. 14-41). Observamos que $z_i = r_i \cos \theta_i$. Entonces podemos escribir la ec. (14.52) como

$$Q = \frac{1}{2} \sum_i q_i (3z_i^2 - r_i^2). \quad (14.53)$$

El momento cuadrupolar eléctrico es cero para una distribución esférica de cargas, positivo para una distribución de cargas alargada, y negativo para una distribución de cargas achatada (fig. 14-42). Por consiguiente el momento cuadrupolar eléctrico da el grado en que una distribución de cargas se aparta de la forma esférica. Por ejemplo, en la sección 14.7 sugerimos que los núcleos atómicos eran esféricos. Sin embargo, mediciones cuidadosas indican que ciertos núcleos tienen momentos cuadrupolares relativamente grandes, lo que se ha interpretado como indicación de que tales núcleos están muy deformados y en consecuencia el campo eléctrico que ellos producen difiere del de una carga puntual. Esto a su vez afecta a la energía del movimiento electrónico.

Debemos observar que el potencial de una carga puntual disminuye como r^{-1} y el campo como r^{-2} . Análogamente hemos visto (sección 14.11) que para un dipolo eléctrico el potencial disminuye como r^{-2} y el campo como r^{-3} . De un modo similar puede probarse que el potencial de un cuadrupolo eléctrico varía como r^{-3} y el campo como r^{-4} . Resultados similares se obtienen para multipolos de orden superior. Concluimos entonces que cuanto más alto sea el orden de multipolo, menor es el alcance dentro del cual el campo eléctrico tiene efectos observables.

EJEMPLO 14.13. Calcular el potencial eléctrico para la distribución de cargas de la fig. (14.13), llamada cuadrupolo eléctrico lineal.

Solución: La carga total del sistema es cero. También el momento dipolar eléctrico es cero porque, usando la ec. (14.48), tenemos $p = +q(+a) - 2q(0) + q(-a) = 0$. Sin embargo, el campo eléctrico no es idénticamente nulo. El potencial eléctrico en el punto P es

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{r_1} - \frac{2q}{r} + \frac{q}{r_2} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{2}{r} + \frac{1}{r_2} \right). \quad (14.54)$$

De la figura deducimos que

$$r_1 = (r^2 - 2ar \cos \theta + a^2)^{1/2}.$$

Suponiendo que a es muy pequeño comparado con r , podemos escribir

$$r_1 = r \left(1 - \frac{2a \cos \theta}{r} + \frac{a^2}{r^2} \right)^{1/2}$$

y

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{r} \left(1 - \frac{2a \cos \theta}{r} + \frac{a^2}{r^2} \right)^{-1/2} \quad (14.55)$$

Usando el desarrollo del binomio dado por la ec. (M. 22) hasta el tercer término con $n = -\frac{1}{2}$, obtenemos $(1 + x)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \dots$. En el presente caso, tenemos $x = -2a \cos \theta/r + a^2/r^2$. Luego

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_1} &= \frac{1}{r} \left[1 - \frac{1}{2} \left(-\frac{2a \cos \theta}{r} + \frac{a^2}{r^2} \right) + \frac{3}{8} \left(-\frac{2a \cos \theta}{r} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{a^2}{r^2} \right)^2 + \dots \right]. \end{aligned}$$

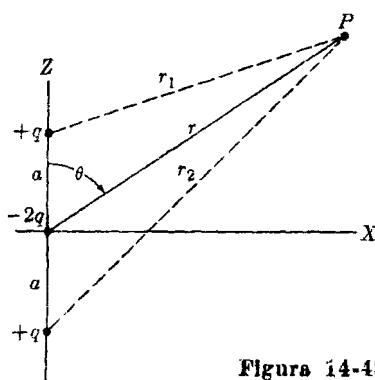


Figura 14-43

Desarrollando el corchete y dejando sólo los términos hasta el orden r^3 en el denominador, obtenemos

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{r} + \frac{a \cos \theta}{r^2} + \frac{a^2}{2r^3} (3 \cos^2 \theta - 1) + \dots \quad (14.56)$$

Análogamente, $r_2 = (r^2 + 2ar \cos \theta + a^2)^{1/2}$; por consiguiente

$$\frac{1}{r_2} = \frac{1}{r} - \frac{a \cos \theta}{r^2} + \frac{a^2}{2r^3} (3 \cos^2 \theta - 1) + \dots \quad (14.57)$$

Sustituyendo los resultados (14.56) y (14.57) en la ec. (14.54) y simplificando, obtenemos para el potencial

$$V = \frac{qa^2(3 \cos^2 \theta - 1)}{4\pi\epsilon_0 r^3}.$$

Aplicando la ec. (14.52), encontramos que el momento cuadrupolar eléctrico de la distribución de carga es

$$Q = \frac{1}{2}\{q(3a^2 - a^2) - 2q(0) + q[3(-a)^2 - a^2]\} = 2qa^2.$$

Por lo tanto

$$V = \frac{Q(3 \cos^2 \theta - 1)}{2(4\pi\epsilon_0)r^3}, \quad (14.58)$$

que da el potencial eléctrico de un cuadrupolo eléctrico lineal. Podemos obtener el campo eléctrico aplicando la ec. (14.28), como hicimos para el dipolo eléctrico.

Bibliografía

1. "Resource Letter ECAN-1 on the Electronic Charge and Avogadro's Number," D. L. Anderson, *Am. J. Phys.* **34**, 2 (1966)
2. "Nonuniform Electric Fields", H. Pohl; *Sci. Am.*, diciembre 1960, pág. 106
3. "Robert Andrews Millikan", E. Watson; *The Physics Teacher* **2**, 7 (1964)
4. "Rutherford and His α -Particles", T. Osgood y H. Hirst; *Am. J. Phys.* **32**, 681 (1964)
5. "The Birth of the Nuclear Atom", E. Da C. Andrade; *Sci. Am.*, noviembre 1965, pág. 93
6. "Discovery of the Electron", G. Thomson; *Physics Today*, agosto 1956, pág. 19
7. "Electron Theory: Description and Analogy", J. Oppenheimer; *Physics Today*, julio 1957, pág. 12
8. "Classical Description of Charged Particles", F. Rohrlich; *Physics Today*, marzo 1962, pág. 19
9. "The Linear Accelerator", W. Panofsky; *Sci. Am.*, octubre 1954, pág. 40
10. "The Two-Mile Electron Accelerator", E. Ginzton y W. Kirk; *Sci. Am.*, noviembre 1961, pág. 49
11. *The Development of the Concept of Electric Charge*, D. Roller y D. H. D. Roller. Harvard University Press, Cambridge, Mass., 1954
12. *The Discovery of the Electron*, D. Anderson. Momentum Books, D. Van Nostrand, Princeton, N.J., 1964
13. *Foundations of Electromagnetic Theory*, J. R. Reitz y F. J. Milford. Addison-Wesley, Reading, Mass., 1960, secs. 2.1 a 2.5, 2.8, 2.9, y 7.1
14. *Great Experiments in Physics*, Morris Shamos, editor. Holt, Rinehart and Winston, New York, 1959; cap. 5, C. Coulomb; cap. 10, M. Faraday; cap. 14, J. J. Thomson; cap. 18, R. A. Millikan
15. *The Feynman Lectures on Physics*, vol. II, R. Feynman, R. Leighton y M. Sands. Addison-Wesley, Reading, Mass., 1963, caps. 4, 6, 7 y 8
16. *Source Book in Physics*, W. F. Magie. Harvard University Press, Cambridge, Mass., 1963, pág. 97, Coulomb; pág. 387, Gilbert; pág. 408, Coulomb; pág. 420, Galvani; pág. 465, Ohm; pág. 583, Thomson
17. *Foundations of Modern Physical Science*, G. Holton y D. H. D. Roller. Addison-Wesley, Reading Mass., 1958, caps. 26, 27, 28 y 34

Problemas

14.1 Encontrar la fuerza eléctrica de repulsión entre dos protones en una molécula de hidrógeno, siendo la separación entre ellos de $0,74 \times 10^{-10}$ m. Compararla con la fuerza de atracción gravitacional correspondiente.

14.2 Encontrar la fuerza de atracción eléctrica entre el protón y el electrón de un átomo de hidrógeno, suponiendo que el electrón describa una órbita circular de $0,53 \times 10^{-10}$ m de radio. Compararla con su atracción gravitacional.

14.3 Comparar la repulsión electrostática entre dos electrones, con su atracción gravitacional a la misma distancia. Repetir para dos protones.

14.4 Dos esferas idénticas de corcho de masa m y carga q (fig. 14.44), están suspendidas del mismo punto por medio de dos cuerdas de longitud l . Encontrar el ángulo θ que las cuerdas forman con la vertical, una vez logrado el equilibrio.

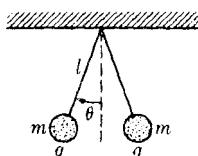


Figura 14-44

14.5 Repetir el problema 14.4, suponiendo que las cuerdas están unidas a puntos situados a la distancia d (fig. 14.45). ¿Cómo se podría usar esta disposición para verificar experimentalmente la ley de la proporcionalidad inversa del cuadrado de la distancia, variando la distancia d y observando el ángulo θ ?

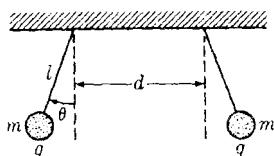


Figura 14-45

14.6 ¿Cuál debe ser la carga de una partícula de masa 2 g para que permanezca en reposo en el laboratorio al colocarse donde el campo eléctrico está dirigido hacia abajo y es de intensidad igual a 500 N C^{-1} ?

14.7 Entre las placas de deflección de un osciloscopio de rayos catódicos, existe un campo eléctrico de 30.000 N C^{-1} . ¿Qué fuerza se ejerce sobre un electrón colocado en esta región? (b) ¿Qué aceleración adquiere el electrón debido a esta fuerza? Compararla con la aceleración de la gravedad.

14.8 Una carga de $2,5 \times 10^{-8} \text{ C}$ se coloca en un campo eléctrico uniforme de intensidad $5,0 \times 10^4 \text{ N C}^{-1}$ dirigido hacia arriba. ¿Cuál es el trabajo que la fuerza eléctrica efectúa sobre la carga cuando ésta se mueve (a) 45 cm hacia la derecha? (b) 80 cm hacia abajo? (c) 260 cm a un ángulo de 45° por encima de la horizontal?

14.9 Entre dos placas planas y paralelas cargadas con cargas iguales y de signos opuestos existe un campo eléctrico uniforme. Se libera un electrón de la superficie de la placa negativa y choca en la superficie de la placa opuesta, distante 2,0 cm de la primera, en un intervalo de $1,5 \times 10^{-8}$ segundos. (a) Calcular el campo eléctrico; (b) calcular la velocidad del electrón al chocar con la placa.

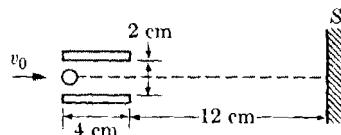


Figura 14-46

14.10 En la figura 14-46 se lanza un electrón con una velocidad inicial de $2 \times 10^7 \text{ m s}^{-1}$ en la dirección de un eje equidistante de las placas de un tubo de rayos catódicos. El campo eléctrico uniforme entre las placas, tiene una intensidad de 20.000 N C^{-1} y está dirigido hacia arriba. (a) ¿Qué distancia perpendicular al eje ha recorrido el electrón cuando pasa por el extremo de las placas? (b) ¿Qué ángulo con el eje forma su velocidad cuando abandona las placas? (c) ¿A qué distancia por debajo del eje choca con la pantalla fluorescente S ?

14.11 Se lanza un electrón en un campo eléctrico uniforme de intensidad 5000 N C^{-1} dirigido verticalmente hacia abajo. La velocidad inicial del electrón es de 10^7 m s^{-1} y forma un ángulo de 30° por encima de la horizontal. (a) Calcular el tiempo requerido para que el electrón alcance su altura máxima. (b) Calcular la elevación máxima que alcanza a partir de su posición inicial. (c) ¿Qué distancia horizontal recorre el electrón para alcanzar su nivel inicial? (d) Dibujar la trayectoria del electrón.

14.12 Una gota de aceite de masa $3,0 \times 10^{-14} \text{ kg}$ y de radio $2,0 \times 10^{-6} \text{ m}$ transporta 10 electrones en exceso. ¿Cuál es su velocidad final (a) cuando cae en una región donde no hay campo eléctrico? (b) cuando cae en un campo eléctrico de intensidad $3,0 \times 10^5 \text{ N C}^{-1}$ dirigido hacia abajo? La viscosidad del aire es $1,8 \times 10^{-5} \text{ N s m}^{-2}$. Despreciar el empuje del aire.

14.13 En un aparato de Millikan se observa que una gota de aceite cargada cae a través de una distancia de 1 mm en 27,4 seg, en ausencia de un campo eléctrico externo. La misma gota permanece estacionaria en un campo de $2,37 \times 10^4 \text{ N C}^{-1}$. ¿Cuántos electrones en exceso ha adquirido la gota? La viscosidad del aire es de $1,80 \times 10^{-5} \text{ N s m}^{-2}$. La densidad del aceite es 800 kg m^{-3} y la densidad del aire es $1,30 \text{ kg m}^{-3}$.

14.14 Una gota de aceite cargada cae en el aire 4,00 mm en 16,0 seg a velocidad constante, en ausencia de un campo eléctrico. La densidad del aceite es 800 kg m^{-3} , la del aire es $1,30 \text{ kg m}^{-3}$ y el coeficiente de viscosidad del aire $1,80 \times 10^{-5} \text{ N s m}^{-2}$. (a) Calcular el radio y la masa de la gota. (b) Si la gota lleva una unidad fundamental de carga y está en un campo eléctrico de $2,00 \times 10^5 \text{ N C}^{-1}$, ¿cuál es el cociente entre la fuerza eléctrica sobre la gota y su peso?

14.15 Cuando la gota de aceite del problema 14.14 se encuentra en un campo eléctrico constante de $2,00 \times 10^5 \text{ N C}^{-1}$, se observaron varios tiempos diferentes en que la gota asciende la distancia de 4,00 mm. Los tiempos medidos fueron 40,65; 25,46; 18,53; 12,00 y 7,85 seg. Calcular (a) la velocidad de caída libre, (b) la velocidad de ascensión en cada

caso, y (c) la suma de la velocidad en la parte (a) y cada una de las velocidades en la parte (b). (d) Verificar que las sumas en la parte (c) son múltiplos enteros de algún número, e interpretar este resultado. (e) Calcular el valor de la carga fundamental a partir de estos datos.

14.16 Se tienen dos cargas puntuales, $5\mu\text{C}$ y $-10\mu\text{C}$, distantes 1 m. (a) Encontrar el módulo y la dirección del campo eléctrico en un punto situado a 0,6 m de la primera carga y a 0,8 m de la segunda. (b) Hallar el punto donde el campo eléctrico de estas dos cargas es cero.

14.17 En un aparato para medir la carga eléctrica e por el método de Millikan se requiere un campo eléctrico de intensidad $6,34 \times 10^4 \text{ V m}^{-1}$ para mantener en reposo una gota de aceite cargada. Si la distancia entre placas es 1,50 cm, ¿cuál es la diferencia de potencial entre ellas?

14.18 Tres cargas positivas de $2 \times 10^{-7} \text{ C}$, $1 \times 10^{-7} \text{ C}$ y $3 \times 10^{-7} \text{ C}$ están en línea recta, con la segunda carga en el centro, de modo que la separación entre dos cargas adyacentes es 0,1 m. Calcular (a) la fuerza resultante sobre cada carga debida a las otras, (b) la energía potencial de cada carga debida a las otras, (c) la energía potencial interna del sistema. Comparar (c) con la suma de los resultados obtenidos en (b) y explicar.

14.19 Resolver el problema precedente en el caso de que la segunda carga sea negativa.

14.20 En una fisión de un núcleo de uranio, los dos fragmentos son ^{96}Y y ^{141}I , con masas prácticamente iguales a 95 uma y 141 uma, respectivamente. Sus radios pueden calcularse por medio de la expresión $R = 1,2 \times 10^{-15} A^{1/3} \text{ m}$, donde A es el número mísico. Suponiendo que los fragmentos están inicialmente en reposo y tangentes uno al otro, encontrar (a) la fuerza y la energía potencial iniciales, (b) su velocidad relativa final, (c) la velocidad final de cada fragmento con respecto al centro de masa.

14.21 Cuando un núcleo de uranio se desintegra emitiendo una partícula alfa (o sea un núcleo de helio, $Z = 2$), el

núcleo resultante es el torio ($Z = 90$). Suponiendo que la partícula alfa está inicialmente en reposo, a una distancia de $8,5 \times 10^{-15}$ m del centro del núcleo de uranio, calcular (a) la aceleración inicial y la energía de la partícula, (b) la energía y la velocidad de la partícula cuando se encuentra a gran distancia del núcleo.

14.22 En los vértices de un cuadrado de lado 2×10^{-9} m se colocan cuatro protones. Otro protón está inicialmente sobre la perpendicular al cuadrado por su centro, a una distancia de 2×10^{-9} m del mismo. Calcular (a) la velocidad inicial mínima que este último protón necesita para llegar al centro del cuadrado, (b) sus aceleraciones inicial y final. (c) Hacer un gráfico de la energía potencial del protón en función de su distancia al centro del cuadrado. Describir su movimiento en el caso de que la energía inicial sea menor o mayor que la encontrada en (a).

14.23 El potencial a una cierta distancia de una carga puntual es 600 V y el campo eléctrico es 200 N C^{-1} . ¿Cuál es la distancia a la carga puntual? (b) ¿Cuál es la magnitud de la carga?

14.24 La máxima carga que puede retener uno de los terminales esféricos de un generador de Van de Graaff es cerca de 10^{-3} C. Supóngase una carga positiva de esta magnitud, distribuida uniformemente sobre la superficie de una esfera situada en el vacío. (a) Calcular el módulo de la intensidad del campo eléctrico en un punto fuera de la esfera, a 5 m de su centro. (b) Si se liberara un electrón en este punto, ¿cuál sería el módulo y la dirección de su aceleración inicial? ¿Cuál sería su velocidad al llegar a la esfera?

14.25 Una pequeña esfera de 0,2 g cuelga por medio de una cuerda entre dos placas paralelas separadas 5 cm. La carga sobre la esfera es de 6×10^{-9} C. ¿Cuál es la diferencia de potencial entre las placas si el hilo forma un ángulo de 10° con la vertical?

14.26 Dos cargas puntuales de 2×10^{-7} C y 3×10^{-7} C están separadas por una distancia de 0,1 m. Calcular el campo y el potencial eléctrico resultantes (a) en el punto medio de la distancia entre ellas, (b) en un punto situado a 0,04 m

de la primera, sobre la recta que pasa por ellas, pero fuera del segmento que las une, (d) en un punto situado a 0,1 m de cada carga. (e) ¿En qué punto el campo eléctrico es cero?

14.27 Resolver el problema anterior para el caso en que la segunda carga sea negativa.

14.28 Refiriéndonos de nuevo al problema 14.26, calcular el trabajo requerido para mover una carga de 4×10^{-7} C desde el punto indicado en (c) al punto indicado en (d). ¿Es necesario especificar la trayectoria?

14.29 Dos cargas positivas puntuales, cada una de magnitud q , están fijas sobre el eje Y en los puntos $y = +a$, $y = -a$. (a) Trazar un diagrama mostrando las posiciones de las cargas. (b) ¿Cuál es el potencial en el origen? (c) Probar que el potencial en cualquier punto sobre el eje X es

$$V = 2q/4\pi\epsilon_0 \sqrt{a^2 + x^2}.$$

(d) Hacer un gráfico del potencial sobre el eje X en función de x en el intervalo $-5a$, $+5a$. (e) ¿Para qué valor de x el potencial tiene la mitad de su valor en el origen? A partir de (c) obtener el campo eléctrico sobre el eje X.

14.30 Con referencia al problema anterior, supongamos que una partícula de carga $+q$ y masa m se separa ligeramente del origen en la dirección del eje X, y entonces se suelta. (a) ¿Cuál es su velocidad a distancia infinita? (b) Hacer un gráfico de la velocidad de la partícula en función de x . (c) Si la partícula se lanza hacia la izquierda según el eje X desde un punto situado a gran distancia a la derecha del origen con la mitad de la velocidad adquirida en la parte (a), ¿a qué distancia del origen queda en reposo? (d) Si una partícula cargada negativamente fuera liberada a partir del reposo sobre el eje X, a gran distancia a la izquierda del origen, ¿cuál sería su velocidad al pasar por el origen?

14.31 Refiriéndose de nuevo a las cargas descritas en el problema 14.29, hacer un gráfico de la variación del potencial según el eje Y. Comparar con el gráfico de la parte (d) del problema 14.29. ¿Es el potencial mínimo en el origen?

14.32 Una vez más considerar las cargas del problema 14.29. (a) Supongamos que se coloca una partícula de carga $+q'$ en el origen, y se la deja libre. ¿Qué sucede? (b) ¿Qué sucedería si la carga a que nos referimos en la parte (a) se separara del origen ligeramente en la dirección del eje Y? (c) ¿Qué sucedería si se separara del origen en la dirección del eje X?

14.33 En un sistema de coordenadas rectangulares una carga de 25×10^{-9} C se coloca en el origen y otra carga de -25×10^{-9} C se coloca en el punto $x = 6$ m, $y = 0$. ¿Cuál es el campo eléctrico (a) en $x = 3$ m, $y = 0$?, (b) en $x = 3$ m, $y = 4$ m?

14.34 Cargas eléctricas iguales a 1 C cada una se colocan en los vértices de un triángulo equilátero de 10 cm de lado. Calcular (a) la fuerza sobre cada carga y la energía potencial de cada una de ellas como resultado de las interacciones con las otras, (b) el campo y el potencial eléctrico resultantes en el centro del triángulo, (c) la energía potencial interna del sistema.

14.35 Refiriéndose al problema anterior, dibujar las líneas de fuerza del campo eléctrico producido por las tres cargas. Dibujar también las superficies equipotenciales.

14.36 Demostrar que las componentes cartesianas del campo eléctrico producido por una carga q a la distancia r son

$$Ex = qx/4\pi\epsilon_0 r^3,$$

etc.

14.37 En un átomo de hidrógeno en su estado de menor energía (también llamado estado fundamental) el electrón se mueve alrededor del protón en lo que se puede considerar una órbita circular de radio $0,53 \times 10^{-10}$ m. Calcular (a) la energía potencial, (b) la energía cinética, (c) la energía total, (d) la frecuencia del movimiento. (A modo de comparación, la frecuencia de radiación emitida por el átomo de hidrógeno es del orden de 10^{18} Hz).

14.38 Usando el teorema virial para una partícula, determinar la energía de un electrón (carga $-e$) que gira alrededor de un núcleo de carga $+Ze$ a una distancia r . Aplicarlos al átomo de hi-

drógeno ($r \sim 0,53 \times 10^{-10}$ m) y comparar el resultado con el obtenido en (c) del problema 14.37.

14.39 Escribir la expresión que da la energía potencial eléctrica interna total (a) de un átomo de helio, (b) de una molécula de hidrógeno.

14.40 ¿Qué energía cinética, en joules, y qué velocidad, en m s^{-1} , tiene un núcleo de carbono (carga $+6e$) después de haber sido acelerado por una diferencia de potencial de 10^7 V?

14.41 Establecer una relación numérica que dé la velocidad (en m s^{-1}) de un electrón y un protón en función de la diferencia de potencial (en volts) a través de la cual se mueven, suponiendo que estaban inicialmente en reposo.

14.42 (a) ¿Cuál es la diferencia de potencial máxima a través de la cual un electrón puede ser acelerado si su masa no debe exceder en más del 1% a su masa en reposo? (b) ¿Cuál es la velocidad de tal electrón, expresada como fracción de la velocidad de la luz c ? (c) Hacer los mismos cálculos para un protón.

14.43 Calcular, usando la relatividad, la diferencia de potencial requerida (a) para que un electrón alcance la velocidad de $0,4c$ a partir del reposo (b) para aumentar su velocidad de $0,4c$ hasta $0,8c$ y (c) para aumentar su velocidad desde $0,8c$ hasta $0,95c$. Repetir los cálculos para un protón.

14.44 Una cierta máquina de alta energía acelera electrones a través de una diferencia de potencial de $6,5 \times 10^6$ V. (a) ¿Cuál es la relación entre la masa m del electrón y su masa m_0 en reposo, cuando sale del acelerador? (b) ¿Cuál es el cociente entre su velocidad y la de la luz? (c) ¿Cuál sería la velocidad calculada con los principios de la mecánica clásica?

14.45 ¿Cuál es la velocidad final de un electrón acelerado a través de una diferencia de potencial de 12.000 volts si tiene una velocidad inicial de 10^7 m s^{-1} ?

14.46 En un cierto tubo de rayos X se acelera un electrón inicialmente en reposo al pasar desde el cátodo al ánodo a través de una diferencia de potencial de 180.000 V. Al llegar al ánodo, ¿cuál

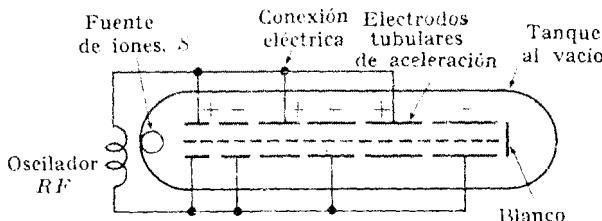


Figura 14-47

es (a) su energía cinética en eV, (b) su masa, (c) su velocidad.

14.47 En un acelerador lineal, como el ilustrado en la fig. 14-47, las secciones alternas del tubo se conectan entre sí y se aplica una diferencia de potencial oscilante entre los dos conjuntos. (a) Demostrar que, a fin de que un ion este en fase con el potencial oscilante cuando cruza desde un tubo al otro (siendo las energías no relativistas), las longitudes de los tubos sucesivos debe ser $L_1 + n$, donde L_1 es la longitud del primer tubo. (b) Hallar L_1 si el voltaje acelerador es V_0 y su frecuencia es v . (c) Calcular la energía del ion que emerge del enésimo tubo. (d) ¿Cuáles deben ser las longitudes de los tubos sucesivos después que el ion alcanza energías relativistas?

14.48 Supongamos que la diferencia de potencial entre el terminal esférico de un generador de Van de Graaff y el punto en el cual las cargas son esparcidas sobre la correa en su movimiento hacia arriba sea de 2×10^6 V. Si la correa entrega carga negativa a la esfera a razón de 2×10^{-3} C s⁻¹ y toma carga positiva con la misma rapidez, ¿qué potencia se necesita para mover la correa contra las fuerzas eléctricas?

14.49 La separación media entre los protones en un núcleo atómico es del orden de 10^{-15} m. Estimar en J y en MeV el orden de magnitud de la energía potencial eléctrica entre dos protones del núcleo.

14.50 Suponiendo que los protones en un núcleo atómico de radio R estén uniformemente distribuidos, la energía potencial eléctrica interna puede calcularse con la expresión $\frac{2}{3}Z(Z-1)e^2/4\pi\epsilon_0 R$ (ver el problema 14.80 y el ejemplo 16.13). El radio nuclear se puede a su vez calcular por $R = 1.2 \times 10^{-15} A^{1/3}$ m. Escribir las expresiones que dan la energía

potencial eléctrica nuclear en J y en MeV en función de Z y A .

14.51 Usando los resultados del problema 14.50, calcular la energía potencial eléctrica total y la energía por protón para los siguientes núcleos: ¹⁶O ($Z = 8$), ⁴⁰Ca ($Z = 20$), ⁹²Zr ($Z = 40$), ¹⁴⁴Nd ($Z = 60$), ²⁰⁰Hg ($Z = 80$) y ²³⁸U ($Z = 92$). ¿Qué le dicen sus resultados acerca del efecto de la interacción eléctrica entre protones sobre la estabilidad del núcleo? Usando sus datos, haga el gráfico de la energía potencial en función del número másico.

14.52 Un protón producido en un acelerador de Van de Graaff de 1 MeV se hace incidir sobre una lámina de oro. Calcular la distancia de máxima aproximación (a) para un choque de frente, (b) para choques con parámetros de impacto de 10^{-15} m y 10^{-14} m. ¿Cuál es la desflección del protón en cada caso?

14.53 Una partícula alfa con una energía cinética de 4 MeV se lanza en línea recta hacia el núcleo de un átomo de mercurio. El número atómico del mercurio es 80, y por lo tanto el núcleo tiene una carga positiva igual a 80 cargas electrónicas. (a) Hallar la distancia de máxima aproximación de la partícula alfa al núcleo. (b) Comparar el resultado con el radio nuclear, $\sim 10^{-14}$ m.

14.54 Protones acelerados por un voltaje de 8×10^5 V inciden sobre una lámina de oro ($Z = 79$). Calcular la sección eficaz diferencial para dispersión coulombiana en intervalos de 20° para ϕ comprendido entre 20° y 180° . Hacer un gráfico, utilizando coordenadas polares, de $\sigma(\phi)$. [Observación: la ec. (14.25) se hace infinita para $\phi = 0$. Esto se debe a que hemos supuesto que el núcleo dispersor es una carga puntual. Cuando se toma en consideración el tamaño finito del núcleo esta anomalía desaparece.]

14.55 La diferencia de potencial entre las dos placas paralelas de la fig. 14.48 es de 100 V, la separación entre ellas es de 1 cm, y su longitud es 2 cm. Se lanza un electrón con una velocidad de 10^7 m s^{-1} en dirección perpendicular al campo. (a) Hallar su desviación transversal y su velocidad transversal cuando emerge de las placas. (b) Si se coloca una pantalla a 0,50 m a la derecha del extremo de las placas, ¿a qué posición sobre la pantalla llega el electrón?

14.56 Se establece una diferencia de potencial de 1600 V entre dos placas paralelas separadas 4 cm. Un electrón se libera de la placa negativa en el mismo instante en que un protón se libera de la placa positiva. (a) ¿A qué distancia de la placa positiva se cruzan? (b) Comparar sus velocidades cuando inciden sobre las placas opuestas. (c) Comparar sus energías al incidir sobre las placas.

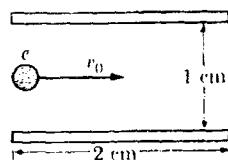


Figura 14-48

14.57 Un triodo consiste fundamentalmente en los siguientes elementos: una superficie plana (el cátodo) que emite electrones con velocidades iniciales despreciables; paralela al cátodo y a 3 mm de distancia está la rejilla de alambre fino y a una diferencia de potencial de 18 V con respecto al cátodo. La estructura de la rejilla es tal que permite que los electrones pasen libremente. Una segunda superficie plana (el ánodo) está 12 mm más allá de la rejilla y a un potencial de 15 V con respecto al cátodo. Supongamos que el campo eléctrico entre el cátodo y la rejilla, y entre la rejilla y el ánodo, sea uniforme. (a) Trazar un diagrama del potencial en función de la distancia, a lo largo de la línea entre el cátodo y el ánodo. (b) ¿Con qué velocidad cruzan la rejilla los electrones? (c) ¿Con qué velocidad llegan al ánodo? Determinar el módulo y la dirección del campo eléctrico entre el cátodo y la rejilla, y entre la rejilla y el ánodo.

(e) Calcular el módulo y la dirección de la aceleración del electrón en cada región.

14.58 Un acelerador lineal con un voltaje de 800 kV produce un haz de protones equivalente a una corriente de 1 mA. Calcular (a) el número de protones por segundo que inciden en el blanco, (b) la potencia requerida para acelerar los protones, (c) la velocidad de los protones al incidir sobre el blanco. (d) Suponiendo que los protones pierdan el 80% de su energía en el blanco, calcular la rapidez, expresada en cal s^{-1} , con la cual se debe remover energía del blanco.

14.59 Un electrón, después de haber sido acelerado por una diferencia de potencial de 565 V, entra a un campo eléctrico uniforme de 3500 V m^{-1} a un ángulo de 60° con la dirección del campo. Despues de $5 \times 10^{-8} \text{ s}$, ¿cuáles son (a) las componentes de su velocidad paralela y perpendicular al campo, (b) la magnitud y dirección de su velocidad, (c) sus coordenadas respecto al punto de entrada? (d) ¿Cuál es su energía total?

14.60 Dos placas metálicas grandes y planas, montadas verticalmente y separadas 4 cm, están cargadas a una diferencia de potencial de 200 V. (a) ¿Con qué velocidad debe lanzarse un electrón horizontalmente desde la placa positiva para que llegue a la placa negativa con la velocidad de 10^7 m s^{-1} ? (b) ¿Con qué velocidad debe lanzarse desde la placa positiva a un ángulo de 37° por encima de la horizontal para que, cuando llegue a la placa negativa, la componente horizontal de su velocidad sea 10^7 m s^{-1} ? (c) ¿Cuál es la magnitud de la componente vertical de la velocidad cuando el electrón llega a la placa negativa? (d) ¿Cuánto tarda el electrón en ir de una placa a la otra en cada caso? (e) ¿Con qué velocidad llegaría el electrón a la placa negativa si se lanza horizontalmente desde la placa positiva con la velocidad de 10^6 m s^{-1} ?

14.61 Un electrón se encuentra entre dos placas separadas 2 cm y cargadas a una diferencia de potencial de 2000 V. Comparar la fuerza eléctrica que se ejerce sobre el electrón con la fuerza gravitacional sobre el mismo. Repetir para un protón. ¿Justifican estos resul-

tados el haber ignorado los efectos gravitacionales en este capítulo?

14.62 Adaptar el resultado del ejemplo 13.8 al caso de un plano con una densidad de carga σ para probar que el campo y el potencial eléctricos son $E = \sigma/2\epsilon_0$ y $V = -\sigma z/2\epsilon_0$.

14.63 Una carga $-q$ de masa m se coloca a una distancia z de un plano cargado positivamente con una densidad de carga uniforme σ . La carga se libera. Calcular su aceleración, la velocidad con la cual incidirá en el plano y el tiempo necesario para llegar a él.

14.64 Suponiendo que a la carga del problema 14.63 se le dé una velocidad inicial v_0 paralela al plano. Determinar (a) la trayectoria que sigue, (b) el tiempo que transcurre hasta que incide en el plano, (c) la distancia que recorre paralelamente al plano antes de regresar al mismo.

14.65 Refiriéndonos de nuevo al problema 14.63, suponer que la carga sea inicialmente en $z = 0$ y que sea lanzada a una velocidad v_0 a un ángulo α con el plano. Determinar (a) la trayectoria que sigue, (b) su separación máxima del plano, (c) la distancia que recorre paralelamente al plano antes de regresar al mismo.

14.66 Se disponen en forma alternada un infinito número de cargas positivas y negativas $\pm q$ sobre una línea recta. La separación entre las cargas adyacentes es la misma e igual, r (fig. 14-49). Demostrar que la energía potencial de una carga es $(-q^2/2\pi\epsilon_0 r) \ln 2$. [Sugerencia: usar la ec. (M. 24).]

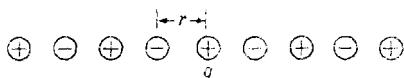


Figura 14-49

14.67 Una disposición plana regular de cargas de igual magnitud, positivas y negativas alternadas, se obtiene colocando las cargas en los centros de cuadrados de lado a (fig. 14-50). Encontrar la energía potencial de una carga tal como la A .

14.68 Un anillo de radio a transporta

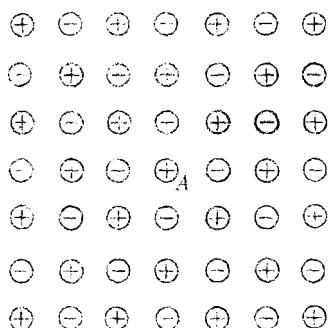


Figura 14-50

una carga q . Calcular el potencial y el campo eléctrico en puntos situados sobre el eje perpendicular al plano del anillo.

14.69 Hallar el potencial y el campo eléctrico en puntos situados sobre el eje de un disco de radio R que contiene una carga σ por unidad de área. [Sugerencia: dividir el disco en anillos y sumar las contribuciones de todos ellos.]

14.70 Refiriéndose al problema 14.69 obtener el campo y el potencial eléctrico de una distribución de cargas sobre un plano que tiene la misma densidad de carga que el disco. [Sugerencia: Hacer R muy grande y mantener sólo el término predominante.]

14.71 Se tiene un alambre de longitud L con una densidad lineal de carga λ (fig. 14-51) (a) Probar que el campo

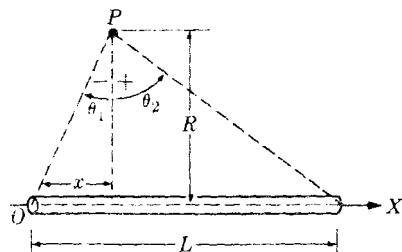


Figura 14-51

eléctrico en un punto a una distancia R del alambre está dado por

$$\begin{aligned} E_{\perp} &= (\lambda/4\pi\epsilon_0 R)(\operatorname{sen} \theta_2 - \operatorname{sen} \theta_1) \\ y \quad E_{||} &= -(\lambda/4\pi\epsilon_0 R)(\cos \theta_2 - \cos \theta_1), \end{aligned}$$

donde ϵ_{\perp} y $\epsilon_{||}$ son las componentes de ϵ perpendicular y paralela al alambre y θ_1 y θ_2 son los ángulos que forman las líneas trazadas desde el punto a los extremos del alambre con la perpendicular desde el punto al alambre. (b) Hallar el campo en un punto equidistante de los extremos. (Los signos de los ángulos θ_1 y θ_2 se indican en la figura).

14.72 Con un alambre de carga λ por unidad de longitud se forma un cuadrado de lado L . Calcular el campo y el potencial eléctricos en puntos situados sobre la perpendicular al cuadrado por su centro.

14.73 Obtener las expresiones para el campo y el potencial eléctricos producidos por un plano con una distribución uniforme de carga σ por unidad de área, suponiendo que el plano está formado por una serie de filamentos de longitud infinita y de ancho dx .

14.74 ¿Qué masa de cobre (bivalente) deposita sobre un electrodo una corriente de 2 A durante una hora? ¿Cuántos átomos se han depositado?

14.75 Estimar el promedio de las fuerzas eléctricas de atracción entre dos moléculas de agua en la fase gaseosa en condiciones normales, debidas a sus momentos dipolares. Considerar varias orientaciones posibles de sus dipolos eléctricos. Comparar con su atracción gravitacional.

14.76 Adaptar los resultados del problema 13.81 al caso de la distribución de cargas eléctricas que definen los mo-

mentos dipolar y cuadrupolar para las direcciones consideradas.

14.77 Hallar los momentos dipolar y cuadrupolar con respecto al eje Z de la distribución de cargas mostrada en la fig. 14-52. Hallar el potencial y el campo en los puntos del eje Z , suponiendo que z es muy grande comparado con a . Repetir los cálculos para los puntos del eje Y .

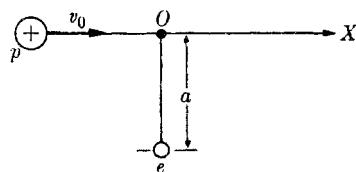


Figura 14-53

14.78 Repetir el problema 14.77, suponiendo que todas las cargas son positivas.

14.79 Un protón muy rápido con velocidad v_0 pasa a la distancia a de un electrón inicialmente en reposo (fig. 14-53). Suponiendo que el movimiento del protón no se perturba debido a su gran masa respecto a la del protón, (a) hacer el gráfico en función de x de la componente de la fuerza perpendicular a v_0 que el protón ejerce sobre el electrón. (b) Demostrar que el momentum transferido al electrón es

$$(e^2/4\pi\epsilon_0)(2/v_0a)$$

en dirección perpendicular a v_0 . (c) Estimar la desviación del protón en función de su velocidad. Este ejemplo sirve de base para analizar el movimiento de partículas cargadas que pasan a través de la materia. [Sugerencia: Suponiendo que el electrón permanece prácticamente en su posición inicial mientras el protón pasa, el momentum transferido al electrón está dado por $\Delta p = \int F dt$ y solamente la componente perpendicular a v_0 tiene que ser calculada. En vista de la simetría de la fuerza, en lugar de integrar desde $-\infty$ a $+\infty$, integrar desde 0 a ∞ y multiplicar por 2.]

14.80 Demostrar que la energía potencial eléctrica interna de un sistema de cargas puede escribirse en cualesquiera

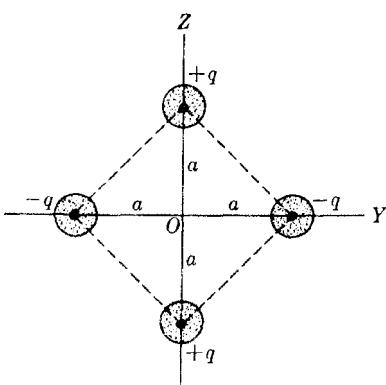


Figura 14-52

de las formas:

$$(a) E_p = \sum_{\substack{\text{todos} \\ \text{los pares}}} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}},$$

$$(b) E_p = \frac{1}{2} \sum_{\substack{\text{todas} \\ \text{las cargas}}} q_i V_i,$$

donde V_i es el potencial producido en q_i por las otras cargas. (c) Usando el resultado hallado en (b), probar que la energía eléctrica de una distribución continua de cargas de densidad ρ es $E_p = \frac{1}{2} \int \rho V dr$. (d) Usar esta expresión para demostrar que la energía de un conductor esférico con una carga Q distribuida uniformemente sobre su volumen es $\frac{1}{2} Q^2 / 4\pi\epsilon_0 R$. (e) Aplicar el último resultado al caso de un núcleo de número atómico Z .

14.81 Probar que las ecuaciones diferenciales para las líneas de fuerza son $dx/\epsilon_x = dy/\epsilon_y = dz/\epsilon_z$, donde dx , dy y dz corresponden a la separación entre dos puntos muy cercanos de la línea de fuerza. Aplicar estas ecuaciones para obtener la ecuación de las líneas de fuerza de un dipolo eléctrico. [Sugerencia: Obsérvese que, como en este caso las líneas de fuerza son curvas planas, la componente ϵ_z es nula. Expressar ϵ_x y ϵ_y de un dipolo eléctrico en coordenadas rectangulares.]

14.82 Probar que en coordenadas polares la ecuación diferencial de las líneas de fuerza es $dr/\epsilon_r = r d\theta/\epsilon_\theta$. Usar este resultado para obtener la ecuación de las líneas de fuerza de un dipolo eléctrico en coordenadas polares. Verificar con el resultado del problema 14.81.

14.83 El statcoulomb (stC) es una unidad de carga que se define como la carga que, colocada a 1 cm de otra carga igual en el vacío, la repele con una fuerza de 1 dina. (a) Probar que un statcoulomb es $\frac{1}{10} c$ C (donde c es la velocidad de la luz), o aproximadamente 3×10^{-9} C. (b) Expressar la carga elemental e en statcoulomb. (c) Calcular el valor de la constante K_e y ϵ_0 cuando la carga se expresa en statcoulombs, la fuerza en dinas, y la distancia en centímetros. (d) Hallar la relación entre las unidades

dina/statcoulomb y N C⁻¹ para medir el campo eléctrico.

14.84 ¿Cuántos electrones equivalen a un statcoulomb?

14.85 El abcoulomb es una unidad de carga equivalente a 10 C. Hallar el valor de las constantes K_e y ϵ_0 cuando la carga se expresa en abcoulombs, la fuerza en dinas y la distancia en centímetros. ¿Cuál es la relación entre el abcoulomb y el statcoulomb?

14.86 El statvolt (stV) es la diferencia de potencial que debe existir entre dos puntos para que al mover una carga de un statcoulomb de un punto al otro se efectúe el trabajo de un erg. (a) Probar que un statvolt es igual a $c/10^6$ ó aproximadamente 300 V. (b) Hallar la relación entre el stV cm⁻¹ y el V m⁻¹ como unidades para medir el campo eléctrico. Comparar con el resultado (d) del problema 14.83.

14.87 Escribir la expresión para el potencial creado por una carga q a la distancia r cuando el potencial se mide en stV, la carga en stC, y la distancia en cm. Repetir para un campo eléctrico medido en stV cm⁻¹.

14.88 Se acostumbra escribir la expresión para la energía del estado estacionario de los átomos con un electrón en la forma $E_n = -R Z h^2 c/n^2$, donde R es la llamada constante de Rydberg. Usando la expresión dada en el ejemplo 14.8 para E_n probar que R es igual a $1,0974 \times 10^7$ m⁻¹.

14.89 Calcular la energía de los cuatro primeros estados estacionarios del H y del He⁺. Hallar, en cada caso, la energía requerida para elevar el sistema, desde el estado fundamental, al primer estado excitado. Representar las energías sobre una escala por medio de líneas horizontales adecuadamente espaciadas. Obsérvese que algunas energías coinciden. ¿Es posible deducir una regla general?

14.90 Usando el resultado del problema 14.37, estimar la velocidad del electrón en un átomo de hidrógeno en su estado fundamental y verificar los cálculos hechos al final del ejemplo 14.10.

INTERACCION MAGNETICA

15.1 Introducción

- 15.2 Fuerza magnética sobre una carga en movimiento
- 15.3 Movimiento de una carga en un campo magnético
- 15.4 Ejemplos de movimiento de partículas cargadas en un campo magnético
- 15.5 Fuerza magnética sobre una corriente eléctrica
- 15.6 Torque magnético sobre una corriente eléctrica
- 15.7 Campo magnético producido por una corriente cerrada
- 15.8 Campo magnético de una corriente rectilínea
- 15.9 Fuerzas entre corrientes
- 15.10 Campo magnético de una corriente circular
- 15.11 Campo magnético de una carga en movimiento (no relativista)
- 15.12 Electromagnetismo y el principio de relatividad
- 15.13 Campo electromagnético de una carga en movimiento
- 15.14 Interacción electromagnética entre dos cargas en movimiento

15.1 Introducción

La *interacción magnética* es otro tipo de interacción que se observa en la naturaleza. Varios siglos antes de Cristo, el hombre observó que ciertos minerales de hierro, como la piedra imán (variedad de la magnetita), tenían la propiedad de atraer pequeños trozos de hierro. La misma propiedad tienen el hierro, el cobalto y el manganeso en su estado natural, y muchos compuestos de estos metales. Esta propiedad, aparentemente específica, no está relacionada con la gravedad puesto que no sólo no la tienen naturalmente *todos* los cuerpos, sino que aparece concentrada en ciertos lugares del mineral de hierro. Aparentemente, tampoco está relacionada con la interacción eléctrica porque estos minerales no atraen bolitas de corcho o pedazos de papel. En consecuencia, se le dio a esta propiedad física un nuevo nombre: *magnetismo**. Las regiones de un cuerpo en las cuales el magnetismo aparece concentrado se denominan *polos magnéticos*. Un cuerpo magnetizado se denomina *imán*.

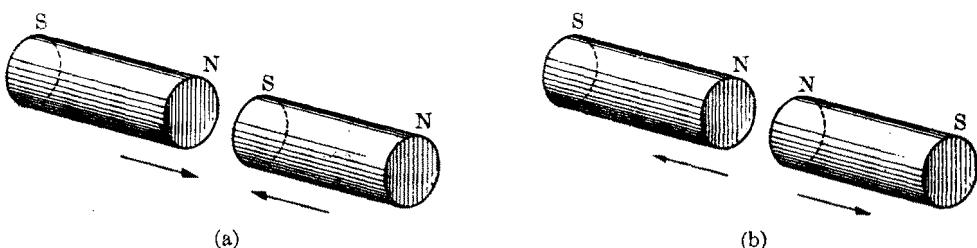


Fig. 15-1. Interacción entre dos barras magnetizadas. (a) Los polos de distinto nombre se atraen. (b) Los polos del mismo nombre se repelen.

La tierra misma es un inmenso imán. Por ejemplo, si suspendemos una varilla magnetizada en cualquier punto de la superficie terrestre y la dejamos mover libremente alrededor de la vertical, la varilla se orienta de modo que siempre el mismo extremo apunta hacia el polo norte geográfico. Este resultado demuestra que la tierra ejerce una fuerza adicional sobre la varilla magnetizada, fuerza que no experimentan varillas no magnetizadas.

Este experimento sugiere también que hay dos clases de polos magnéticos que podemos designar con los signos + y —, o por las letras N y S correspondientes, respectivamente, a los polos que apuntan hacia el norte y hacia el sur. Si tomamos dos varillas magnetizadas y las colocamos como se muestra en la fig. 15-1, las mismas se repelen o se atraen según enfrentemos polos del mismo o de diferente nombre. Concluimos entonces de nuestro experimento que

la interacción entre polos magnéticos del mismo nombre es repulsiva y la interacción entre polos de distinto nombre es atractiva.

* El nombre magnetismo proviene de una antigua ciudad del Asia Menor llamada Magnesia, donde, de acuerdo con la tradición, se observó por primera vez el fenómeno.

A continuación, podríamos intentar medir la intensidad de un polo magnético definiendo una *carga o masa magnética*, e investigar cómo depende la interacción magnética de la distancia entre los polos. Esto es perfectamente posible, y de hecho, antes que los físicos comprendieran claramente la naturaleza del magnetismo, aquél fue el método de estudio adoptado. Sin embargo, cuando se intentaron estas mediciones, apareció una dificultad fundamental: aunque ha sido posible aislar cargas eléctricas positivas y negativas y asociar una carga eléctrica definida con las partículas fundamentales que constituyen todos los átomos, no ha sido posible aislar un polo magnético o identificar una partícula fundamental que tenga solamente una clase de magnetismo, sea el N o el S. Los cuerpos magnetizados siempre presentan pares de polos iguales y opuestos. Por otra parte, se ha encontrado que las nociones de polo magnético y masa magnética no son necesarias para describir el magnetismo. Las interacciones eléctrica y magnética están íntimamente relacionadas, siendo en realidad sólo dos aspectos diferentes de una propiedad de la materia: su carga eléctrica; *el magnetismo es un efecto del movimiento de las cargas eléctricas*. Las interacciones eléctrica y magnética deben considerarse conjuntamente bajo la designación más general de *interacción electromagnética*.

15.2 Fuerza magnética sobre una carga en movimiento

Puesto que observamos interacciones entre cuerpos magnetizados, podemos decir, por analogía con los casos gravitacional y eléctrico, que un cuerpo magnetizado produce un *campo magnético* en el espacio que lo rodea. Cuando colocamos una carga eléctrica *en reposo* en un campo magnético, no se observa la misma fuerza o interacción especial alguna; pero cuando una carga eléctrica *se mueve* en una región donde hay un campo magnético, se observa una nueva fuerza sobre la carga además de las debidas a sus interacciones gravitacional y eléctrica.

Midiendo en el mismo punto de un campo magnético, la fuerza que experimentan diferentes cargas moviéndose de diferentes maneras, podemos obtener una relación entre la fuerza, la carga y su velocidad. De este modo encontramos que

la fuerza ejercida por un campo magnético sobre una carga en movimiento es proporcional a la carga eléctrica y a su velocidad, y la dirección de la fuerza es perpendicular a la velocidad de la carga.

Podemos avanzar un paso más y, recordando la definición de producto vectorial, escribir tentativamente la fuerza \mathbf{F} sobre una carga q que se mueve con velocidad \mathbf{v} en un campo magnético, en la forma

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathcal{B}, \quad (15.1)$$

la cual satisface los requisitos experimentales mencionados más arriba. En esta ecuación, \mathcal{B} es un vector que se determina en cada punto comparando el valor observado de \mathbf{F} en ese punto con los valores de q y \mathbf{v} . Este modo de proceder ha demostrado tener éxito. El vector \mathcal{B} puede variar de punto a punto en un

campo magnético, pero en cada punto se encuentra experimentalmente que es el mismo para todas las cargas y velocidades. Por lo tanto describe una propiedad que es característica del campo magnético y podemos llamarla *intensidad de campo magnético*; otro nombre, impuesto por el uso, es *inducción magnética*. En este texto usaremos solamente la primera designación.

Cuando la partícula se mueve en una región donde hay un campo eléctrico y uno magnético, la fuerza total es la suma de la fuerza eléctrica $q\mathcal{E}$ y la fuerza magnética $qv \times \mathcal{B}$, es decir,

$$\mathbf{F} = q(\mathcal{E} + \mathbf{v} \times \mathcal{B}). \quad (15.2)$$

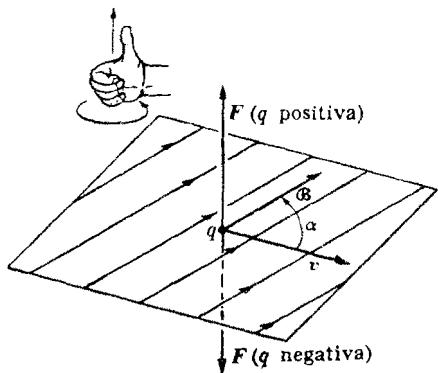


Fig. 15-2. Relación vectorial entre la fuerza magnética, el campo magnético y la velocidad de la carga. La fuerza es perpendicular al plano que contiene a \mathcal{B} y a \mathbf{v} .

figura muestra la regla para determinar el módulo de \mathbf{F} es

Si α es el ángulo entre \mathbf{v} y \mathcal{B} , el módulo de \mathbf{F} es

$$F = qv\mathcal{B} \operatorname{sen} \alpha. \quad (15.3)$$

El máximo de intensidad de la fuerza ocurre cuando $\alpha = \pi/2$ o sea cuando \mathbf{v} es perpendicular a \mathcal{B} , resultando

$$F = qv\mathcal{B}. \quad (15.4)$$

El mínimo de la fuerza, cero, ocurre cuando $\alpha = 0$ o sea cuando \mathbf{v} es paralela a \mathcal{B} , como se dijo antes.

A partir de la ec. (15.1), podemos definir la unidad de campo magnético como N/C m s^{-1} o sea $\text{kg s}^{-1} \text{C}^{-1}$. Esta unidad se denomina *tesla* en honor del ingeniero norteamericano nacido en Yugoslavia Nicholas Tesla (1856-1943). Se abrevia T, por lo que $T = \text{kg s}^{-1} \text{C}^{-1}$. Un tesla corresponde al campo magnético que produce una fuerza de un newton sobre una carga de un coulomb que se mueve perpendicularmente al campo a razón de un metro por segundo.

Esta expresión se denomina *fuerza de Lorentz*.

La ec. (15.1) da, por la definición de producto vectorial, una fuerza no sólo perpendicular a la velocidad \mathbf{v} , como se indicó anteriormente, sino también al campo magnético \mathcal{B} . La ec. (15.1) implica también que cuando \mathbf{v} es paralela a \mathcal{B} , la fuerza \mathbf{F} es cero; de hecho, se observa que en cada punto de todo campo magnético hay una cierta dirección de movimiento para la cual no se ejerce fuerza alguna sobre la carga en movimiento. Esta dirección define la dirección del campo magnético en el punto. En la fig. 15-2 se ha ilustrado la relación entre los tres vectores \mathbf{v} , \mathcal{B} y \mathbf{F} , tanto para una carga positiva como para una negativa. La

Como la fuerza magnética $F = qv \times \mathcal{B}$ es perpendicular a la velocidad, su trabajo es cero y por lo tanto no produce cambio alguno en la energía cinética de la partícula, definida por la ec. (8.11). Aunque la fuerza magnética no es conservativa en el sentido definido en el capítulo 8, cuando una partícula se mueve en campos magnético y eléctrico superpuestos, su energía total permanece constante. (Por energía total entendemos la energía cinética más la energía potencial de las diferentes interacciones).

EJEMPLO 15.1. Un protón de los rayos cósmicos entra con una velocidad de 10^7 m s^{-1} en el campo magnético de la tierra, en dirección perpendicular al mismo. Estimar la fuerza que se ejerce sobre el protón.

Solución: La intensidad del campo magnético cerca de la superficie terrestre en el ecuador es de alrededor de $\mathcal{B} = 1,3 \times 10^{-7} \text{ T}$. La carga eléctrica del protón es $q = +e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$. Por lo tanto, usando la ec. (15.4), la fuerza sobre el protón es

$$F = qv\mathcal{B} = 2,08 \times 10^{-19} \text{ N},$$

que es cerca de diez millones de veces mayor que la fuerza debida a la gravedad $m_p g = 1,6 \times 10^{-26} \text{ N}$. Siendo $m_p = 1,7 \times 10^{-27} \text{ kg}$, la aceleración debida a esta fuerza es $a = F/m_p = 1,2 \times 10^8 \text{ m s}^{-2}$; la aceleración del protón es pues muy grande comparada con la aceleración de la gravedad.

EJEMPLO 15.2. Discusión del efecto Hall. En 1879 el físico norteamericano E. C. Hall (1855-1929) descubrió que cuando una placa metálica por la que pasa una corriente I se coloca en un campo magnético perpendicular a ella, aparece una diferencia de potencial entre puntos opuestos en los bordes de la placa. Este fenómeno se denomina efecto Hall.

Solución: Se trata de una aplicación típica de la ec. (15.1). Supongamos primero que los portadores de corriente eléctrica en la placa metálica son electrones, los cuales tienen una carga negativa $q = -e$. Considerando la fig. (15-3(a)), donde se ha dibujado el eje Z paralelo a la corriente I , vemos que el movimiento de las cargas es en el sentido de $-Z$ con velocidad v_- . Cuando se aplica el campo mag-

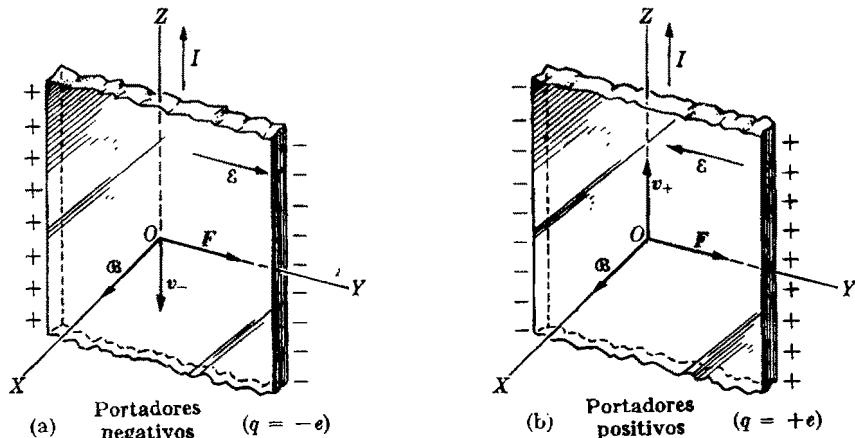


Fig. 15-3. El efecto Hall.

nético \mathcal{B} perpendicularmente a la placa, en el sentido del eje X , los electrones están sujetos a una fuerza $\mathbf{F} = (-e)\mathbf{v}_\perp \times \mathcal{B}$. El producto vectorial $\mathbf{v}_\perp \times \mathcal{B}$ tiene el sentido de $-Y$, pero como está multiplicado por $-e$, el resultado es un vector \mathbf{F} en el sentido de $+Y$. En consecuencia, los electrones derivan hacia el lado derecho de la placa, la cual se carga negativamente. El lado izquierdo se carga positivamente porque tiene una deficiencia en el número normal de electrones. Como resultado, aparece un campo eléctrico E paralelo al eje $+Y$. La fuerza sobre los electrones debida a este campo eléctrico es $(-e)E$; como está dirigida hacia la izquierda llega un momento en que contrarresta la fuerza hacia la derecha debida al campo magnético \mathcal{B} , produciéndose el equilibrio. Esto a su vez da origen a una diferencia de potencial transversal entre los bordes opuestos del conductor, siendo el lado izquierdo el que está a potencial más alto, el valor de la diferencia de potencial es proporcional al campo magnético. Este es el efecto Hall normal o "negativo" que presentan la mayoría de los metales, como el oro, la plata, el platino, el cobre, etc. Sin embargo en ciertos metales — como el cobalto, el zinc y el hierro y otros materiales como los semiconductores, se produce un efecto Hall opuesto o "positivo".

Para explicar el efecto Hall positivo, supongámonos que los portadores de corriente, en vez de ser los electrones cargados negativamente, son partículas de carga positiva $+e = +4e$. Por lo tanto deben moverse en el mismo sentido que la corriente, de modo que si velocidad v , está según el eje $-Z$ como en la fig. 15-30). La fuerza magnética sobre las cargas en movimiento es $\mathbf{F} = (+e)\mathbf{v}_\perp \times \mathcal{B}$ y está dirigida según el eje $+Y$; como las cargas son positivas, el borde derecho de la placa se carga positivamente y el izquierdo negativamente, produciendo un campo eléctrico transversal en el sentido de $-Y$. Por lo tanto la diferencia de potencial es opuesta a la que aparece en el caso de portadores negativos, resultando un efecto Hall positivo.

Cuando se descubrieron los dos tipos de efecto Hall, los físicos quedaron muy intrigados porque en aquella época se creía que los únicos portadores de corriente eléctrica en un conductor sólido eran los electrones cargados negativamente. Sin embargo, en ciertas circunstancias podemos decir que los portadores de corriente eléctrica en un sólido son partículas con carga positiva. En estos materiales hay lugares en donde normalmente debiera haber un electrón, pero debido a algún defecto en la estructura del sólido, falta el electrón; decimos que hay un *hueco electrónico*. Cuando por alguna razón un electrón cercano se mueve para llenar el hueco, deja evidentemente un hueco en el lugar donde estaba. Por lo tanto los huecos electrónicos se mueven en sentido exactamente opuesto al de los electrones negativos bajo la acción de un campo eléctrico aplicado. Podemos decir que los huecos electrónicos se comportan como si fueran partículas positivas. Por lo tanto, el efecto Hall constituye un método muy útil para determinar el signo de las cargas de los portadores de corriente eléctrica en un conductor.

15.3 Movimiento de una carga en un campo magnético

Consideremos primeramente el movimiento de una partícula cargada en un campo magnético uniforme, es decir, un campo magnético que tiene la misma intensidad y dirección en todos sus puntos. Para simplificar, consideraremos primero el caso de una partícula que se mueve perpendicularmente al campo magnético (fig. 15-4); la fuerza está dada entonces por la ec. (15.4). Como la fuerza es perpendicular a la velocidad, su efecto es cambiar la dirección de la velocidad sin cambiar su módulo, resultando un movimiento circular uniforme. La aceleración es por lo tanto centrípeta y usando la ecuación de movimiento (7.28), tenemos

$F = mv^2/r$, donde F está dada por la ec. (15.4). Escribimos por lo tanto

$$\frac{mv^2}{r} = qv\mathcal{B}$$

o sea

$$r = \frac{mv}{q\mathcal{B}}, \quad (15.5)$$

la cual da el radio de la circunferencia descrita por la partícula. Por ejemplo, usando los datos del ejemplo 15.1, vemos que los protones describirían una circunferencia de radio 8×10^5 m si el campo fuera uniforme. Escribiendo $v = \omega r$, donde ω es la velocidad angular, tenemos entonces

$$\omega = \frac{q}{m} \mathcal{B}. \quad (15.6)$$

Por lo tanto la velocidad angular es independiente de la velocidad lineal v y depende solamente del cociente q/m y del campo \mathcal{B} . La expresión (15.6) da el módulo de ω pero no su dirección. En la ec. (5.58) indicamos que la aceleración en un movimiento circular uniforme se puede escribir en forma vectorial como $\mathbf{a} = \omega \times \mathbf{v}$. Por lo tanto, la ecuación de movimiento $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ es

$$m\omega \times \mathbf{v} = q\mathbf{v} \times \mathcal{B}$$

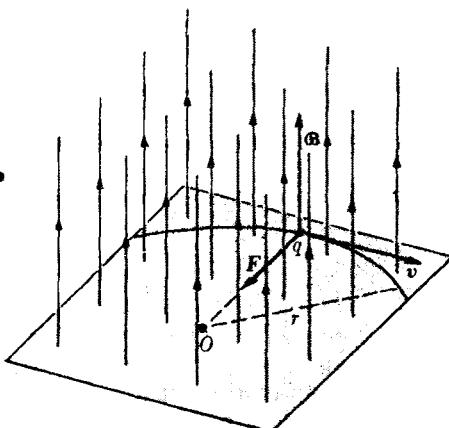


Fig. 15-4. Una carga que se mueve perpendicularmente a un campo magnético uniforme sigue una trayectoria circular.

o, invirtiendo el producto vectorial en el primer miembro y dividiendo por m ,

$$\omega \times \mathbf{v} = -(q/m) \mathcal{B} \times \mathbf{v},$$

lo cual implica que

$$\omega = -(q/m) \mathcal{B}, \quad (15.7)$$

la cual da ω tanto en módulo como en dirección y sentido.* El signo menos indica que ω tiene dirección opuesta a la de \mathcal{B} para una carga positiva y la misma dirección para una carga negativa. Llamaremos a ω *frecuencia ciclotrónica* por razones que se explicarán en la sección 15.4(c) cuando tratemos el ciclotrón.

Es costumbre representar un campo perpendicular al papel por un punto (·) si está dirigido hacia el lector y por una cruz (×) si está dirigido hacia la página.

* En rigor, tendríamos que haber escrito $\omega = -(q/m)\mathcal{B} + \lambda\mathbf{v}$, donde λ es una constante arbitraria; sin embargo la ec. (15.6) indica que debemos poner $\lambda = 0$.

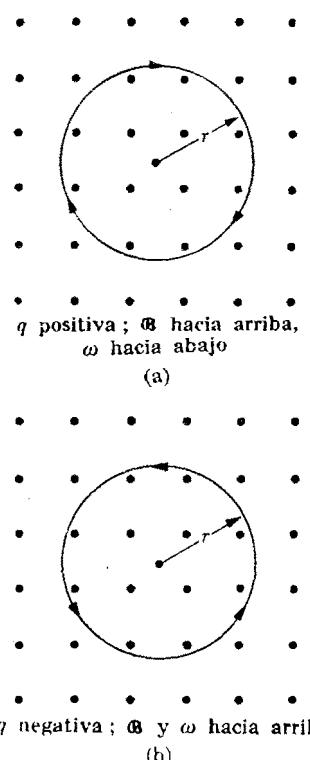


Fig. 15-5. Trayectorias circulares positivas y negativas en un campo magnético uniforme.

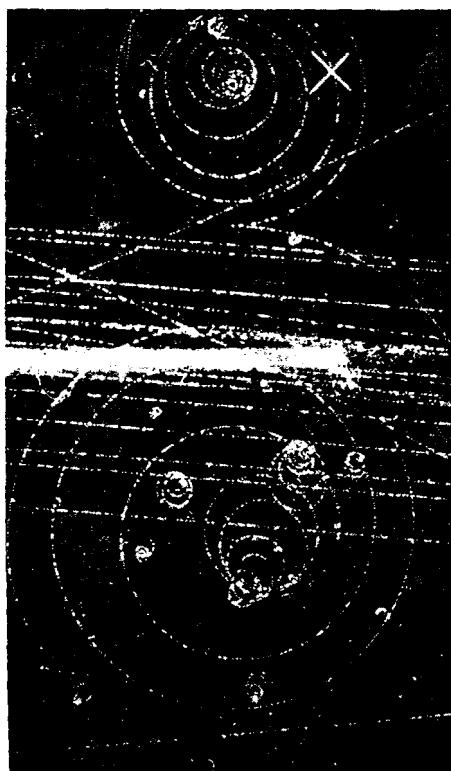


Fig. 15-6. Fotografía, tomada en una cámara de niebla, de trayectorias de partículas cargadas en un campo magnético uniforme dirigido hacia la página. ¿Puede el estudiante identificar cuáles son las cargas positivas y cuáles las negativas?

La fig. 15-5 representa la trayectoria de una carga positiva (a) y una negativa (b) moviéndose perpendicularmente a un campo perpendicular a la página. En (a) ω está dirigida hacia la página y en (b) hacia el lector.

La curvatura de la trayectoria de un ion en un campo magnético constituye un método para determinar si su carga es negativa o positiva, si sabemos cuál es el sentido de su movimiento. La fig. 15-6 muestra las trayectorias de varias partículas cargadas que se han hecho visibles mediante una cámara de niebla* colocada en un campo magnético. El campo magnético aplicado es varias veces más intenso que el de la tierra, de modo que el radio de la trayectoria es del orden de las dimensiones de la cámara de niebla. Nótese que las trayectorias se curvan

* La cámara de niebla es un dispositivo que contiene una mezcla de gas y vapor en la cual la trayectoria de una partícula cargada se hace visible condensando el vapor sobre iones del gas. Los iones son producidos por la interacción entre las partículas cargadas y las moléculas del gas. La condensación se logra enfriando la mezcla mediante una expansión rápida (adiabática). La mezcla puede ser aire y vapor de agua.

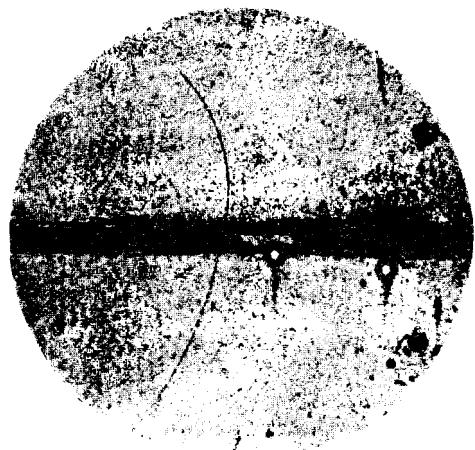


Fig. 15-7. Fotografía de la trayectoria de un positrón (electrón positivo) en un campo magnético dirigido hacia la página, tomada por Anderson en una cámara de niebla. Esta fotografía constituyó la primera (1932) evidencia experimental de la existencia de los positrones, que habían sido predichos teóricamente por Dirac.

en sentidos opuestos, lo cual indica que algunas partículas son positivas y otras negativas. Puede observarse que algunas de las partículas describen una espiral de radio decreciente; esto indica que la partícula está siendo frenada por colisiones con las moléculas del gas. Esta disminución de la velocidad ocasiona, según la ec. (15.5), una disminución del radio de la órbita.

La ec. (15.5) nos dice también que la curvatura de la trayectoria de una partícula cargada en un campo magnético depende de la energía de la partícula; cuanto mayor es la energía (o el momentum $p = mv$), mayor es el radio de la trayectoria y menor la curvatura. La aplicación de este principio condujo en 1932 al descubrimiento del *positrón* en los rayos cósmicos. El positrón es una partícula fundamental que tiene la misma masa m_e que el electrón pero una carga *positiva* $+e$; su descubrimiento fue fruto de los trabajos del físico norteamericano Carl D. Anderson (1905-).* Fue Anderson el que obtuvo en una cámara de niebla la fotografía de la fig. 15-7. La banda horizontal que se ve en la figura es una plancha de plomo de 0,6 cm de espesor que se ha colocado dentro de la cámara de niebla y a través de la cual ha pasado la partícula. La parte inferior de la trayectoria de la partícula está menos curvada que la superior, lo cual indica que por encima de la plancha la partícula tiene menor velocidad y energía que por debajo; en consecuencia la partícula se mueve hacia arriba ya que debe perder energía al pasar a través de la plancha. La curvatura de la trayectoria de la partícula y el sentido del movimiento con respecto al campo magnético indican que la partícula es positiva. La trayectoria se parece mucho a la de un electrón —pero de un electrón positivo. Usando la ec. (15.5) podemos escribir $p = mv = qBr$; por lo tanto, si en la fotografía medimos r y suponemos que $q = e$, podemos calcular p ; el resultado de este cálculo es que p tiene un orden de magnitud correspondiente a una partícula que tiene la misma masa que el electrón. Un aná-

* Sin embargo, la existencia de esta partícula había sido predicha unos años antes de su descubrimiento, por el físico británico Paul A. M. Dirac (1902-).

lisis más detallado nos permite encontrar la velocidad de la partícula y por lo tanto determinar su masa, obteniendo un acuerdo total con la masa del electrón.

Si una partícula cargada se mueve inicialmente en una dirección que no es perpendicular al campo magnético, podemos descomponer la velocidad en sus componentes paralela y perpendicular al campo magnético. La componente paralela permanece constante y la perpendicular cambia continuamente de dirección pero no de magnitud. El movimiento es entonces el resultante de un movimiento uniforme en la dirección del campo y un movimiento circular alrededor del campo con velocidad angular dada por la ec. (15.6). La trayectoria es una hélice, como se muestra en la fig. 15-8 para el caso de un ion positivo.

Otro hecho más que se deduce de la ec. (15.5) es que cuanto mayor es el campo magnético, menor es el radio de la trayectoria de la partícula cargada. Por lo tanto si el campo magnético no es uniforme, la trayectoria no es circular. La fig. 15-9 muestra un campo magnético dirigido de izquierda a derecha con su intensidad aumentando en la misma dirección; por lo tanto una partícula inyectada por el sistema indicado del campo, describe una hélice cuyo radio decrece lentamente. Una explicación detallada, que debemos omitir aquí, mostraría que la componente de la velocidad paralela al campo no permanece constante (en que disminuye) por lo tanto el radio de la hélice también disminuye) a medida que la partícula se move en el sentido en que crece la intensidad del campo. Eventualmente la velocidad paralela se anula, siempre que el campo magnético sea suficientemente largo, y la partícula es forzada a volver o sea a moverse antiparalelamente al campo magnético. Por lo tanto, a medida que un campo magnético aumenta en intensidad comienza a actuar como reflector de partículas cargadas o, como se dice comúnmente, como un *espejo magnético*. Este efecto se usa ampliamente para contener gases ionizados o plasmas.

En la fig. 15-10 se ha representado otra situación, en la que un campo magnético perpendicular a la página aumenta de intensidad de derecha a izquierda. También se ha indicado la trayectoria de un ion positivo inyectado perpendicularmente al campo; esta trayectoria está más curvada a la izquierda, donde el campo es más fuerte, que a la derecha, donde es más débil. La trayectoria no es cerrada y la partícula avanza a través del campo perpendicularmente a la dirección en que éste aumenta.

Un ejemplo interesante del movimiento de iones en un campo magnético es el caso de las partículas cargadas que inciden sobre la tierra provenientes del espacio exterior, las cuales constituyen parte de lo que se denomina *rayos cósmicos*. La fig. 15-11 muestra las líneas de fuerza del campo magnético terrestre.* Las partículas que inciden según el eje magnético de la tierra no sufren desviación alguna y llegan a la tierra aunque tengan energía muy pequeña. Las partículas que caen oblicuamente con respecto al eje magnético de la tierra, describen una trayectoria helicoidal, que puede ser tan curvada si las partículas se mueven muy lentamente, que las mismas no llegan a la superficie terrestre. Las que llegan

* En realidad, el campo magnético que rodea la tierra presenta varias anomalías locales y una distorsión global en dirección opuesta al sol, las cuales no se ven en la representación esquemática de la fig. 15-11.

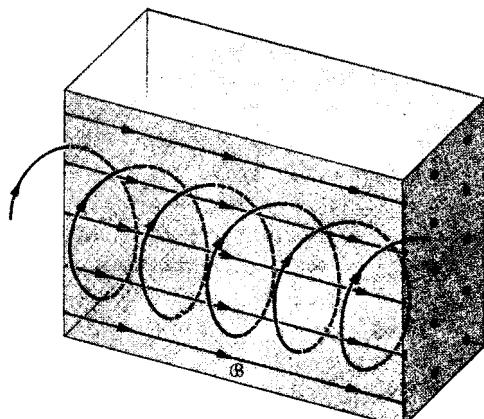


Fig. 15-8. Trayectoria helicoidal de un ion positivo que se mueve oblicuamente respecto a un campo magnético uniforme.

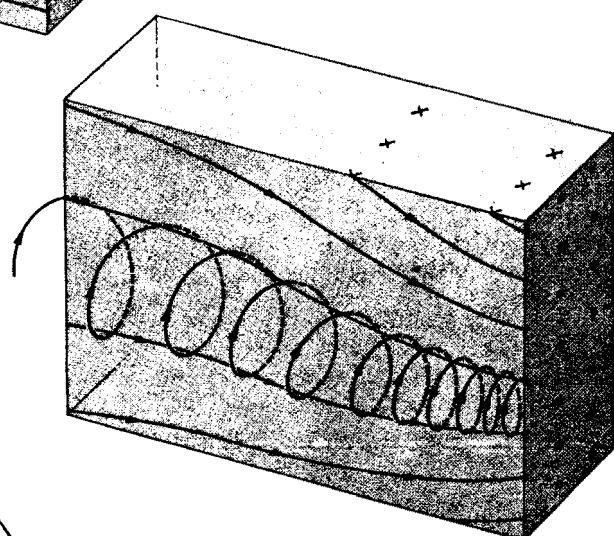


Fig. 15-9. Trayectoria de un ion positivo en un campo magnético no uniforme.

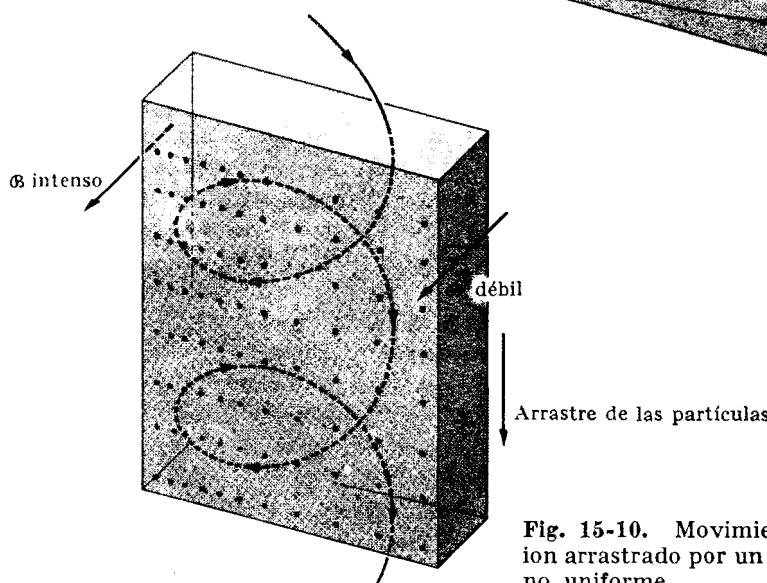


Fig. 15-10. Movimiento plano de un ion arrastrado por un campo magnético no uniforme.

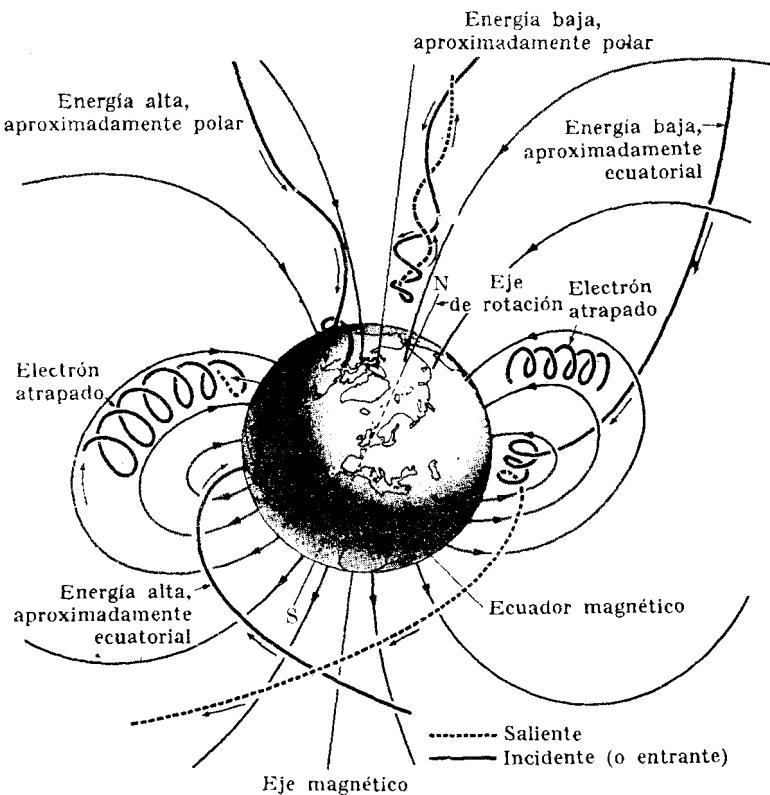


Fig. 15-11. Movimiento de partículas cargadas de los rayos cósmicos en el campo magnético terrestre.

sobre el ecuador magnético experimentan la mayor desviación porque se mueven en un plano perpendicular al campo magnético; en consecuencia sólo las partículas que tienen mayor energía pueden alcanzar la superficie terrestre. En otras palabras: la energía mínima que una partícula cósmica cargada debe tener para llegar a la superficie de la tierra, aumenta a medida que se va del eje magnético terrestre al ecuador magnético.

Otro efecto debido al campo magnético terrestre es la *asimetría este-oeste* de la radiación cósmica. No se conoce con certeza si las partículas cósmicas cargadas son preponderantemente positivas o negativas; sin embargo sabemos, sí, que las partículas de cargas opuestas son desviadas en sentidos opuestos por el campo magnético terrestre. Si en los rayos cósmicos el número de partículas positivas que llegan a la tierra es diferente del de partículas negativas, debemos observar que los rayos cósmicos que llegan a un lugar dado de la superficie terrestre en dirección este del cenit, tienen una intensidad diferente a la de los que llegan en dirección oeste del cenit. Los resultados experimentales están ampliamente a favor de una mayoría de partículas cargadas positivamente.

Los cinturones de radiación de Van Allen son otro ejemplo de la interacción de partículas cósmicas cargadas, con el campo magnético terrestre. Estos cinturones están compuestos de partículas cargadas rápidas, principalmente electrones y protones, atrapados en el campo magnético terrestre. El primer cinturón se extiende aproximadamente entre los 800 y los 4000 km de la superficie de la tierra, mientras que el segundo se extiende a unos 60.000 km de la tierra.* Fueron descubiertos en 1958 por medio de aparatos que llevaba un satélite norteamericano Explorer e investigados por la sonda lunar Pioneer III. Para comprender mejor cómo las partículas cargadas son atrapadas en los cinturones de Van Allen, consideremos, por ejemplo, un electrón libre producido por la colisión entre un átomo y una partícula cósmica a muchos kilómetros de la superficie terrestre; la componente de la velocidad perpendicular al campo magnético terrestre hace que el electrón viaje en una trayectoria curvada. Sin embargo, la intensidad del campo es mayor más cerca de la tierra. El resultado es un movimiento similar al mostrado en la fig. 15-10, desviándose el electrón hacia el este debido a su carga negativa (para cargas positivas la desviación es hacia el oeste). La componente de la velocidad paralela al campo magnético terrestre da lugar a un efecto adicional, que hace que las partículas avancen en espiral hacia uno de los polos siguiendo las líneas de fuerza magnéticas, en forma similar a la mostrada en la fig. 15-8. Debido al aumento de la intensidad del campo magnético hacia el norte o hacia el sur, el radio de giro se hace cada vez menor, disminuyendo al mismo tiempo la componente paralela de la velocidad, como se explicó en relación con el efecto de espejo magnético de la fig. 15-9. Cada electrón alcanza una latitud norte o sur determinada para la cual se anula la componente paralela de la velocidad; latitud que depende de la velocidad inicial de inyección. El electrón retrocede entonces hacia el polo opuesto. El movimiento resultante es por lo tanto un cambio de longitud hacia el este y una oscilación norte-sur en latitud. El movimiento se repite continuamente, quizás durante varias semanas, hasta que el electrón es expulsado del cinturón de Van Allen por una colisión que termina con su condición de prisionero. Con los protones atrapados ocurre una situación similar.

15.4 Ejemplos de movimiento de partículas cargadas en un campo magnético

En esta sección ilustraremos varias situaciones concretas en las cuales un ion se mueve en un campo magnético.

(a) *Espectrómetro de masas.* Consideremos el dispositivo ilustrado en la fig. 15.12. Allí I es una fuente de iones (para electrones puede ser simplemente un filamento

* Hay bastante evidencia de que el cinturón interno está compuesto por protones y electrones provenientes de la desintegración de neutrones que han sido producidos por la interacción de los rayos cósmicos con la atmósfera terrestre. El cinturón externo consiste principalmente en partículas cargadas emitidas por el sol. La actividad solar está asociada con un aumento de estas partículas, y su desaparición del cinturón de radiación es la causa de la actividad auroral y del emudecimiento de las radiotransmisiones.

caliente) y S_1 y S_2 son dos rendijas estrechas a través de las cuales pasan los iones siendo acelerados por la diferencia de potencial V aplicada entre ambas. La velocidad de salida de los iones se calcula a partir de la ec. (14.38), la cual da

$$v^2 = 2 \left(\frac{q}{m} \right) V. \quad (15.8)$$

En la región que está por debajo de las rendijas hay un campo magnético uniforme dirigido hacia el lector. El ion describirá entonces una órbita circular, curvada en un sentido o en otro según sea el signo de su carga q . Después de describir una semicircunferencia los iones inciden sobre una placa fotográfica P , dejando una marca. El radio r de la órbita está dado por la ec. (15.5), de la cual,

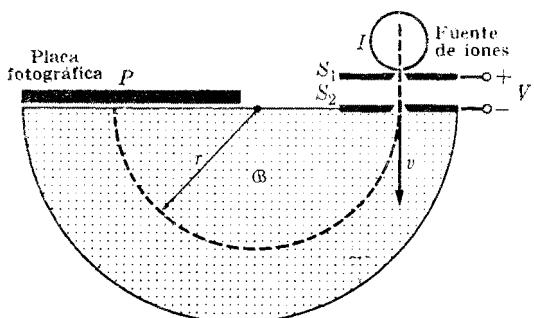


Fig. 15-12. Espectrómetro de masas de Dempster. I es una fuente de iones. Las rendijas S_1 y S_2 sirven de colimadores del haz de iones. V es la diferencia de potencial aceleradora aplicada entre S_1 y S_2 . P es una placa fotográfica que registra la llegada de los iones.

despejando la velocidad v , obtenemos

$$v = \frac{q}{m} \mathcal{B} r. \quad (15.9)$$

Combinando las ecs. (15.8) y (15.9) para eliminar v , obtenemos

$$\frac{q}{m} = \frac{2V}{\mathcal{B}^2 r^2}, \quad (15.10)$$

que da la razón q/m en función de tres cantidades (V , \mathcal{B} , y r) que pueden medirse fácilmente. Podemos aplicar esta técnica a electrones, protones y cualquier otra partícula, átomo o molécula cargada. Midiendo la carga q independientemente, podemos obtener la masa de la partícula. Estos son los métodos que se mencionaron anteriormente en la sección 14.5.

El dispositivo de la fig. 15-12 constituye un *espectrómetro de masas*, porque separa los iones que tienen la misma carga q pero diferente masa m ya que de acuerdo con la ec. (15.10), el radio de la trayectoria de cada ion cambia según el valor de q/m del mismo. Este espectrómetro particular se denomina espectrómetro de masas de *Dempster*. Se han desarrollado otros tipos de espectrómetros de masas, todos basados en el mismo principio. Los científicos que usaban esta técnica, descubrieron en la década del 20 que átomos del mismo elemento químico

no tienen necesariamente la misma masa. Como se indicó en la sección 14.7, las diferentes variedades de átomos de un elemento químico, variedades que difieren en la masa, se denominan *isótopos*.

El dispositivo experimental de la fig. 15-12 puede usarse también para obtener el cociente q/m para una partícula que se mueve con velocidades diferentes. Se ha encontrado que q/m depende de v como si q permaneciera constante y m variara con la velocidad en la forma indicada en la ec. (11.7), es decir, $m=m_0/\sqrt{1-v^2/c^2}$. Por lo tanto concluimos que

la carga eléctrica es un invariante, siendo la misma para todos los observadores en movimiento relativo uniforme.

(b) *Los experimentos de Thomson.* Durante la última parte del siglo diecinueve, hubo una gran cantidad de trabajos experimentales sobre descargas eléctricas. Estos experimentos consistían en producir una descarga eléctrica a través de un gas a baja presión colocando dentro del mismo dos electrodos y aplicándoles una elevada diferencia de potencial. Se observaron varios efectos luminosos según fuera la presión del gas dentro del tubo. Cuando se mantenía el gas dentro del tubo a una presión menor que un milésimo de atmósfera, dejaban de observarse efectos visibles dentro del tubo, pero se observaba una mancha luminosa en la pared del mismo en el punto O directamente opuesto al cátodo C (fig. 15-13). Por lo tanto se hizo la hipótesis de que alguna radiación era emitida por el cátodo, la cual se movía en línea recta hacia O ; de acuerdo con esto la radiación fue llamada *rayos catódicos*.

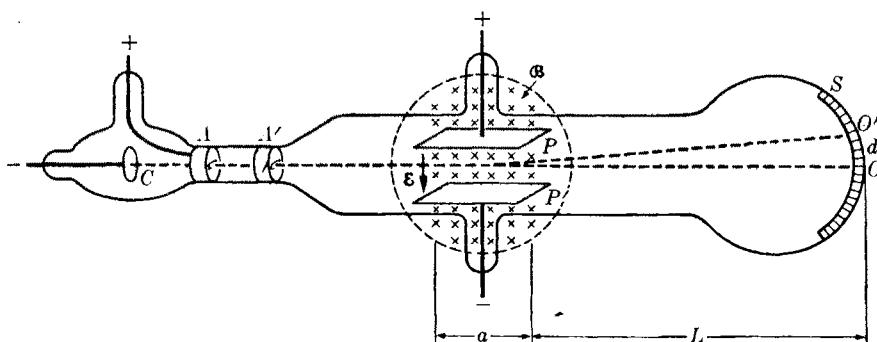


Fig. 15-18. Experimento de Thomson para medir q/m . Los rayos catódicos (electrones) emitidos por C y colimados por A y A' llegan a la pantalla S después de atravesar una región en donde se aplica un campo eléctrico y uno magnético.

Los experimentadores añadieron dos placas paralelas P y P' dentro del tubo y aplicaron una diferencia de potencial, produciéndose un campo eléctrico E dirigido de P a P' . El resultado de aplicar este campo eléctrico fue que la mancha luminosa se movió de O a O' , o sea en el sentido correspondiente a una carga eléctrica negativa. Esto sugirió que los rayos catódicos son simplemente una

corriente de partículas cargadas negativamente. Si q es la carga de cada partícula y v su velocidad, la desviación $d = OO'$ puede calcularse aplicando la ec. (14.9): $q\mathcal{E}a/mv^2 = d/L$.

La fuerza eléctrica sobre la partícula es $q\mathcal{E}$ y está dirigida hacia arriba. Supongamos que a continuación aplicamos, en la misma región donde está \mathcal{E} , un campo magnético dirigido hacia el papel. La fuerza magnética es, según la ec. (15.4), $qv\mathcal{B}$ y está dirigida hacia abajo porque q es una carga negativa. Ajustando \mathcal{B} en forma apropiada, podemos hacer que la fuerza magnética sea igual a la eléctrica; esto da una resultante nula y la mancha luminosa vuelve de O' a O , es decir que no hay desviación de los rayos catódicos. Entonces $q\mathcal{E} = qv\mathcal{B}$ ó $v = \mathcal{E}/\mathcal{B}$. Esto permite medir la velocidad de la partícula cargada. Sustituyendo este valor de v en la ec. (14.9), obtenemos la razón q/m de las partículas que constituyen los rayos catódicos,

$$q/m = \mathcal{E}d/\mathcal{B}^2La.$$

Este fue uno de los primeros experimentos dignos de confianza para medir q/m y proporcionó indirectamente una prueba de que los rayos catódicos consisten en partículas cargadas negativamente, llamadas *electrones* desde entonces.

Estos y otros experimentos similares fueron publicados en 1897 por el físico británico Sir J. J. Thomson (1856-1940), que invirtió muchos esfuerzos y tiempo tratando de descubrir la naturaleza de los rayos catódicos. Hoy en día sabemos que los electrones libres presentes en el metal que constituye el cátodo C son arrancados o evaporados del cátodo como resultado del fuerte campo eléctrico aplicado entre C y A , y son acelerados a lo largo del tubo por el mismo campo.

(c) *El ciclotrón.* El hecho de que la trayectoria de una partícula cargada en un campo magnético sea circular, ha permitido el diseño de aceleradores de partículas que funcionan cíclicamente. Una dificultad con los aceleradores electrostáticos (descritos en la sección 14.9) es que la aceleración depende de la diferencia total de potencial V . Como el campo eléctrico dentro del acelerador es $\mathcal{E} = V/d$, si V es muy grande, la longitud d del tubo del acelerador también debe ser muy grande para impedir la formación de campos eléctricos intensos que producirían el salto de chispas entre los materiales del tubo de aceleración. Un tubo de aceleración muy largo presenta, además, varias dificultades técnicas. Por el contrario, en un acelerador cíclico una carga eléctrica puede recibir una serie de aceleraciones pasando muchas veces a través de una diferencia de potencial relativamente pequeña. El primer instrumento que trabajó según este principio fue el *ciclotrón*, diseñado por el físico norteamericano E. O. Lawrence. El primer ciclotrón práctico comenzó a funcionar en 1932. Desde entonces numerosos ciclotrones han sido construidos en todo el mundo, teniendo sucesivamente cada uno mayor energía y mejor diseño.

Un ciclotrón (fig. 15-14) consiste esencialmente en una cavidad cilíndrica dividida en dos mitades D_1 y D_2 (cada una llamada "de" por su forma), la cual se coloca en un campo magnético uniforme paralelo a su eje. Las dos cavidades están aisladas eléctricamente una de otra. En el centro del espacio entre las "des" se coloca una fuente de iones S y se aplica entre las mismas una diferencia de

potencial alterna del orden de 10^4 V. Cuando los iones son positivos, son acelerados hacia la “de” negativa. Una vez que el ion penetra en una “de”, no experimenta fuerza eléctrica alguna, porque el campo eléctrico es nulo en el interior de un conductor. Sin embargo, el campo magnético obliga a los iones a describir una órbita circular con un radio dado por la ec. (15.5), $r = mv/q\beta$, y una velocidad angular igual a la frecuencia ciclotrónica de las partículas, dada por la ec. (15.6), $\omega = q\beta/m$. La diferencia de potencial entre las “des” oscila con una frecuencia igual a ω . De esta manera la diferencia de potencial entre las “des” está en resonancia con el movimiento circular de los iones.

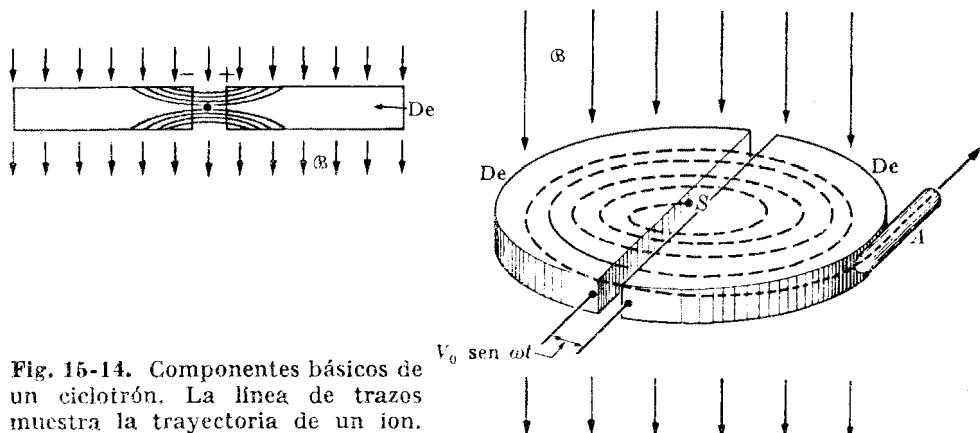


Fig. 15-14. Componentes básicos de un ciclotrón. La línea de trazos muestra la trayectoria de un ion.

Después que la partícula ha descrito media revolución, se invierte la polaridad de las “des” y cuando el ion cruza el espacio entre ellas, recibe otra pequeña aceleración. La semicircunferencia que describe a continuación tiene entonces un radio mayor, pero la misma velocidad angular. El proceso se repite varias veces hasta que el radio alcanza el valor máximo R que es prácticamente igual al radio de las “des”. El campo magnético disminuye abruptamente en el borde de las “des” y la partícula se mueve tangencialmente, escapando a través de una abertura conveniente. La máxima velocidad v_{\max} está relacionada con el radio R por la ec. (15.5), es decir,

$$R = \frac{mv_{\max}}{q\beta}$$

o

$$v_{\max} = \left(\frac{q}{m} \right) \beta R.$$

La energía cinética de las partículas que emergen de A es entonces

$$E_k = \frac{1}{2}mv_{\max}^2 = \frac{1}{2}q \left(\frac{q}{m} \right) \beta^2 R^2, \quad (15.11)$$

y está determinada por las características de la partícula, la intensidad del campo magnético y el radio del ciclotrón, pero es independiente del potencial acelerador. Cuando la diferencia de potencial es pequeña, la partícula tiene que dar muchas vueltas hasta adquirir la energía final; cuando es grande sólo se requieren unas pocas vueltas para adquirir la misma energía.

La intensidad del campo magnético está limitada por factores tecnológicos, tales como la disponibilidad de materiales con las propiedades requeridas, pero en principio, podemos acelerar la partícula hasta cualquier energía, construyendo imanes de radio suficientemente grande. Sin embargo, cuanto mayor es el imán, mayor es el peso y el costo. Además, a medida que la energía aumenta, también aumenta la velocidad del ion, con lo que cambia la masa de acuerdo con la ec. (11.7), $m = m_0/\sqrt{1 - v^2/c^2}$. Cuando la energía es muy grande, la variación de masa es suficiente como para que cambie apreciablemente la frecuencia ciclotrónica del ion. En consecuencia, a no ser que se cambie la frecuencia del potencial eléctrico, la órbita de la partícula ya no estará en fase con el potencial oscilante y no será acelerada. Es por esto que en el ciclotrón la energía está limitada por el efecto relativista sobre la masa.

EJEMPLO 15.3. El ciclotrón de la Universidad de Michigan tiene piezas polares con un diámetro de 2,1 m y un radio de extracción de 0,92 m. El campo magnético máximo es $B = 1,5 \text{ T}$ y la máxima frecuencia alcanzable por el potencial acelerador oscilante es $15 \times 10^6 \text{ Hz}$. Calcular la energía de los protones y de las partículas α que se producen, y la frecuencia ciclotrónica de las mismas. Teniendo en cuenta la variación relativista de la masa, ¿cuál es la diferencia porcentual entre las frecuencias ciclotrónicas en el centro y en el borde?

Solución: Usando la ec. (15.11) con los valores de la carga y de la masa correspondientes a los protones y a las partículas alfa, encontramos que las energías cinéticas de ambos están dadas por

$$E_k = 1,46 \times 10^{-11} \text{ J} = 91 \text{ MeV}.$$

La frecuencia ciclotrónica de la partícula alfa es $\omega_\alpha = 7,2 \times 10^7 \text{ s}^{-1}$, que corresponde a una frecuencia $v_\alpha = \omega_\alpha/2\pi = 11,5 \times 10^6 \text{ Hz}$, que está dentro del alcance de la frecuencia máxima de la máquina. Para los protones encontramos el doble de esta frecuencia: $22 \times 10^6 \text{ Hz}$. Esta es la frecuencia con que el potencial aplicado a las "des" debe variar; pero como la máxima frecuencia del ciclotrón es, por construcción, $15 \times 10^6 \text{ Hz}$, esta máquina no puede acelerar protones hasta la energía teórica de 91 MeV. Tomando la máxima frecuencia osculatoria, tenemos que $\omega_p = 9,4 \times 10^7 \text{ s}^{-1}$. El campo magnético correspondiente a la resonancia ciclotrónica es 0,98 T y encontramos que la energía cinética de los protones está limitada por la frecuencia a

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2R^2 = 0,63 \times 10^{-11} \text{ J} = 39 \text{ MeV}.$$

A una energía $E = m_0c^2 + E_k$, la masa de la partícula es

$$m = E/c^2 = m_0 + E_k/c^2,$$

de modo que E_k/c^2 es la variación de masa. De la ec. (15.6) deducimos que la frecuencia ciclotrónica es inversamente proporcional a la masa, por lo que, si ω y ω_0 son las frecuencias correspondientes a las masas m y m_0 de la misma partícula, podemos escribir $\omega/\omega_0 = m_0/m$, ó

$$\frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} = -\frac{m - m_0}{m} = -\frac{E_k/c^2}{m_0 + E_k/c^2} = -\frac{E_k}{m_0c^2 + E_k}.$$

El primer miembro da el cambio porcentual de la frecuencia ciclotrónica y el segundo el de la masa. Para energías relativamente bajas podemos despreciar en el denominador la energía cinética E_k frente a m_0c^2 ; poniendo $\Delta\omega = \omega - \omega_0$, obtenemos

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = -\frac{E_k}{m_0c^2}.$$

Por lo tanto, mientras la energía cinética de las partículas sea pequeña comparada con su energía en reposo, la variación de frecuencia será muy pequeña. En nuestro caso tenemos: para partículas alfa, $\Delta\omega/\omega = -0,024 = 2,4\%$, y para protones, $\Delta\omega/\omega = -0,042 = 4,2\%$.

Los resultados obtenidos en este ejemplo indican también que, como los electrones tienen una masa en reposo alrededor de 1/1840 la del protón (sección 14.5), la energía cinética hasta la cual se pueden acelerar (sin apartarse apreciablemente de su frecuencia ciclotrónica) es también 1/1840 la de los protones. Es por esta razón que no se usan ciclotrones para acelerar electrones.

El efecto relativista sobre la masa puede corregirse, sea cambiando el campo magnético de modo que a cada radio el valor de ω permanezca constante a pesar de la variación de la masa, o cambiando la frecuencia del potencial aplicado a las "des" y manteniendo el campo magnético constante mientras la partícula gira en espiral, de modo que en cada instante haya resonancia entre el movimiento de la partícula y el potencial aplicado. El primer diseño se denomina *sincrotrón* y el segundo *sincrociclotrón*. Un sincrotrón puede funcionar continuamente, mientras que un sincrociclotrón funciona a chorros por la necesidad de ajustar la frecuencia. Algunas veces, como en el *sincrotrón protónico*, se varían tanto la frecuencia como el campo magnético para mantener constante el radio de la órbita.

EJEMPLO 15.4. Estudiar el movimiento de una partícula cargada en campos magnético y eléctrico cruzados.

Solución: En los ejemplos dados anteriormente en este capítulo, hemos considerado solamente el movimiento de una partícula en un campo magnético. Examinaremos ahora el caso de que haya también un campo eléctrico, por lo que debe usarse la ec. (15.2). Consideraremos sin embargo una situación especial: cuando los campos eléctrico y magnético son perpendiculares, como se muestra en la fig. 15-15. La ecuación de movimiento de la partícula es

$$m \frac{dv}{dt} = q(\mathcal{E} + v \times \mathcal{B}).$$

Hagamos una transformación de Galileo del sistema XYZ a otro sistema $X'Y'Z'$ que se mueve con respecto al anterior con velocidad relativa

$$v_0 = \frac{\mathcal{E} \times \mathcal{B}}{\mathcal{B}^2} = u_x \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{B}}.$$

Luego, si v' es la velocidad de la partícula respecto a $X'Y'Z'$, podemos escribir $v = v' + v_0$ y $dv/dt = dv'/dt$. Por lo tanto la ecuación de movimiento puede escribirse como

$$m \frac{dv'}{dt} = q(\mathcal{E} + v' \times \mathcal{B} + v_0 \times \mathcal{B}).$$

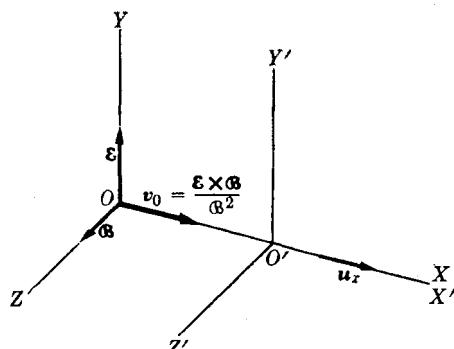


Figura 15-15

Pero $\mathbf{v}_0 \times \mathcal{B} = (u_x c / \beta) \times u_z \mathcal{B} = -u_y c = -\mathbf{c}$. Entonces, el primero y el último de la ecuación precedente se cancelan y la ecuación de movimiento en el sistema $X'Y'Z'$ es

$$m \frac{d\mathbf{v}'}{dt} = q\mathbf{v}' \times \mathcal{B}.$$

Vemos entonces que, con respecto a $X'Y'Z'$, el movimiento es como si no hubiera campo eléctrico. Si la partícula se mueve inicialmente en el plano XY , su movimiento en el sistema $X'Y'Z'$ es una circunferencia de radio $r = mv_0/q\mathcal{B}$, descrita con velocidad angular $\omega = -q\mathcal{B}/m$. Con respecto a XYZ , esta circunferencia avanza según el eje X con velocidad v_0 , resultando alguna de las trayectorias que se muestran en la fig. 15-16. El proceso se repite en una distancia $v_0 P = 2\pi v_0/\omega$. Si $2\pi v_0/\omega = 2\pi r$, o sea si $r = v_0/\omega$, la trayectoria es la cicloide normal, señalada (1). Pero si $2\pi v_0/\omega \leq 2\pi r$, o sea si $r \geq v_0/\omega$, se obtienen las trayectorias (2) o (3) correspondientes a cicloides largas o cortas. Si la partícula cargada tiene inicialmente una componente de la velocidad paralela al eje Z , las trayectorias representadas en la fig. 15-16 se alejan del plano XY a velocidad constante.

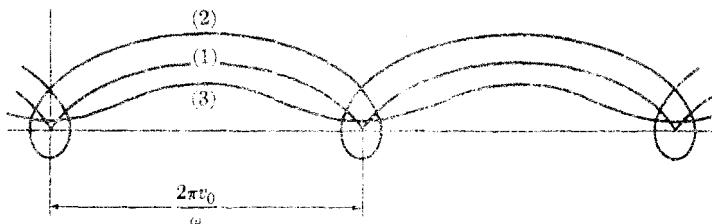


Fig. 15-16. Trayectorias cicloidales de una partícula respecto al observador O . (1) $r = v_0/\omega$, (2) $r < v_0/\omega$, (3) $r > v_0/\omega$.

Este ejemplo revela un aspecto interesante: mientras que el observador que usa el sistema XYZ observa tanto un campo eléctrico como uno magnético, el observador que usa el sistema $X'Y'Z'$ que se mueve respecto a XYZ , observa el movimiento de la partícula cargada correspondiente a un campo magnético solo. Esto sugiere que los campos eléctrico y magnético dependen del movimiento relativo del observador. Es esta una cuestión muy importante que se considerará con mayor detalle en la sección 15.12.

15.5 Fuerza magnética sobre una corriente eléctrica

Como se explicó en la sección 14.10, una corriente eléctrica es un chorro de cargas eléctricas que se mueven en el vacío o a través de un medio conductor. La intensidad de la corriente eléctrica se ha definido como la carga que pasa por unidad de tiempo a través de una sección del conductor. Consideremos una sección transversal de un conductor a través de la cual se están moviendo partículas con carga q y velocidad \mathbf{v} . Si hay n partículas por unidad de volumen, el número total de partículas que pasan por la unidad de área en la unidad de tiempo es $n\mathbf{v}$, y la *densidad de corriente*, definida como la carga que pasa a través de la unidad de área en la unidad de tiempo, es el vector

$$\mathbf{j} = nq\mathbf{v}.$$

Si S es el área de la sección del conductor perpendicular a \mathbf{j} , la corriente es el escalar

$$I = jS = nqvS. \quad (15.13)$$

Supongamos ahora que el conductor está en un campo magnético. La fuerza sobre cada carga está dada por la ec. (15.1) y, como hay n partículas por unidad de volumen, la fuerza f por unidad de volumen es

$$\mathbf{f} = nqv \times \mathcal{B} = \mathbf{j} \times \mathcal{B}. \quad (15.14)$$

La fuerza total sobre un pequeño volumen dV del medio es $d\mathbf{F} = f dV = \mathbf{j} \times \mathcal{B} dV$, y la fuerza total sobre un volumen finito se obtiene integrando esta expresión sobre todo ese volumen; es decir

$$\mathbf{F} = \int_{\text{vol}} \mathbf{j} \times \mathcal{B} dV. \quad (15.15)$$

Consideremos ahora el caso de una corriente en un alambre o filamento. El elemento de volumen dV es (fig. 15-17) $S dl$ por lo que la ec. (15.15) da

$$\mathbf{F} = \int_{\text{Filamento}} \mathbf{j} \times \mathcal{B} S dl.$$

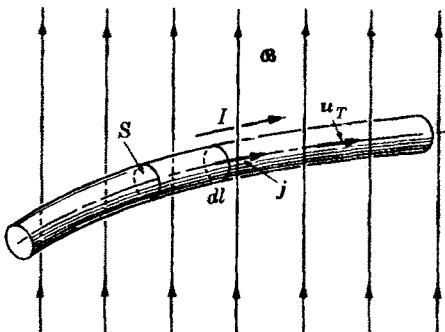


Figura 15-17

Ahora bien, $\mathbf{j} = ju_T$, donde u_T es el vector tangente al eje del filamento. Se tiene entonces

$$\mathbf{F} = \int (ju_T) \times \mathcal{B} S dl = \int (jS) u_T \times \mathcal{B} dl. \quad (15.16)$$

Pero $jS = I$, y la intensidad de corriente I en el alambre es la misma en todos sus puntos por la ley de conservación de la carga eléctrica. Por lo tanto la fuerza magnética sobre un conductor por el que circula una corriente es

$$\mathbf{F} = I \int u_T \times \mathcal{B} dl. \quad (15.17)$$

Como ejemplo, consideremos el caso de un conductor rectilíneo colocado en un campo magnético uniforme \mathcal{B} (fig. 15-18). Como tanto u_T como \mathcal{B} son constantes, podemos escribir

$$\mathbf{F} = Iu_T \times \mathcal{B} \int dl,$$

o sea, si $L = dl$ es la longitud del conductor rectilíneo,

$$\mathbf{F} = ILu_T \times \mathcal{B}.$$

El conductor está sujeto a una fuerza perpendicular a él y al campo magnético. Este es el principio sobre el que se basa el funcionamiento de los motores eléctricos.

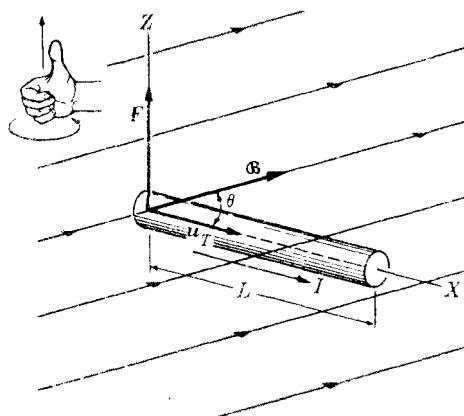


Fig. 15-18. Relación vectorial entre la fuerza magnética sobre un conductor por el que circula una corriente, el campo magnético y la corriente. La fuerza es perpendicular al plano que contiene \mathbf{u}_T y \mathcal{B} .

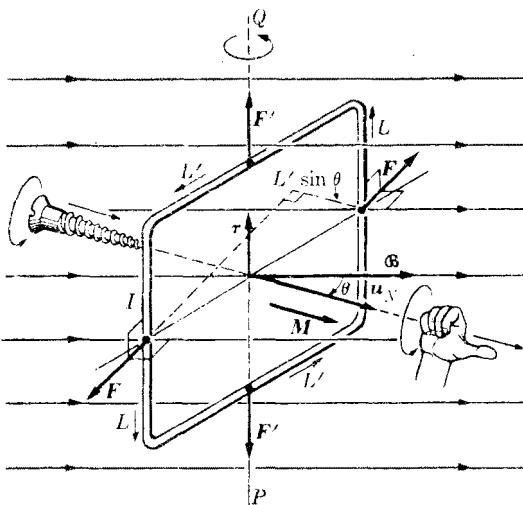


Fig. 15-19. Torque magnético sobre un circuito eléctrico rectangular colocado en un campo magnético. El torque es cero cuando el plano del circuito es perpendicular al campo magnético.

tricos. Si θ es el ángulo entre el conductor y el campo magnético, el módulo de la fuerza \mathbf{F} es

$$F = IL\mathcal{B} \sin \theta. \quad (15.18)$$

La fuerza es cero si el conductor es paralelo al campo ($\theta = 0$) y máxima si es perpendicular a él ($\theta = \pi/2$). El sentido de la fuerza se encuentra aplicando la regla de la mano derecha, como se muestra en la fig. 15.18.

15.6 Torque magnético sobre una corriente eléctrica

Podemos aplicar la ec. (15.18) para calcular el torque debido a la fuerza que un campo magnético ejerce sobre un circuito eléctrico. Para simplificar, consideremos en primer lugar un circuito rectangular con una corriente I , colocado de modo que la normal \mathbf{u}_N al plano que lo contiene (orientada en el sentido que avanza un tornillo derecho rotando en el sentido de la corriente), forma un ángulo θ con el campo \mathcal{B} , y dos lados del circuito son perpendiculares al campo (fig. 15-19). Las fuerzas \mathbf{F}' que actúan sobre los lados L' son de igual módulo pero direcciones opuestas; tienden a deformar el circuito pero no dan lugar a un torque. Las fuerzas \mathbf{F} sobre los lados L tienen módulo $F = I\mathcal{B}L$ y constituyen un par cuyo brazo es $L' \sin \theta$. Producen pues sobre el circuito un torque de

módulo

$$\tau = (I\beta L)(L' \operatorname{sen} \theta).$$

Siendo $LL' = S$, donde S es el área del circuito, se tiene $\tau = (IS)\beta \operatorname{sen} \theta$. La dirección del torque, siendo perpendicular al plano del par, es según la recta PQ . Si definimos un vector

$$\mathbf{M} = IS\mathbf{u}_N \quad (15.19)$$

normal al plano del circuito, podemos escribir el torque τ en la forma

$$\tau = M\beta \operatorname{sen} \theta, \quad (15.20)$$

o, en forma vectorial,

$$\tau = \mathbf{M} \times \mathbf{B}. \quad (15.21)$$

Este resultado es matemáticamente similar a la ec. (14.50), que da el torque sobre un dipolo eléctrico, debido a un campo eléctrico externo. Por ello, la cantidad \mathbf{M} definida en la ec. (15.9), que es equivalente a \mathbf{p} definido en la ec. (15.49), se denomina *momento dipolar magnético* de la corriente. Notemos que según la ec. (15.19), el sentido de \mathbf{M} es el de avance de un tornillo derecho que gira en el mismo sentido de la corriente, o sea el sentido que da la regla de la mano derecha como se muestra en la fig. 15-19.

Para obtener la energía de una corriente en un campo magnético, aplicamos el razonamiento inverso al usado en la sección 14.11 para pasar de la ec. (14.49) a la (14.50), encontrando que la energía potencial de la corriente colocada en el campo magnético \mathbf{B} es

$$E_p = -M\beta \cos \theta = -\mathbf{M} \cdot \mathbf{B}. \quad (15.22)$$

Aunque las ecs. (15.21) y (15.22) se han obtenido para un circuito rectangular con una orientación particular en un campo magnético uniforme, una discusión matemática más elaborada demuestra que son de validez general. Supongamos, por ejemplo, que tenemos un circuito *pequeño* de *cualquier* forma, cuya área es S (fig. 15-20). El momento dipolar magnético \mathbf{M} del circuito está aún dado por la ec. (15.19), y el torque y la energía potencial cuando se coloca el circuito en un campo magnético están dados por las ecs. (15.21) y (15.22).

Usando la ec. (15.22), la unidad de momento magnético se expresa normalmente en joules/tesla ó J T^{-1} . En función de las unidades fundamentales es $\text{m}^2 \text{s}^{-1} \text{C}$, de acuerdo con la definición (15.19).

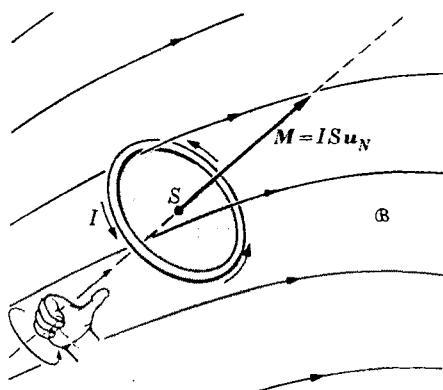


Fig. 15-20. Relación entre el momento dipolar magnético de una corriente eléctrica y el sentido de la misma.

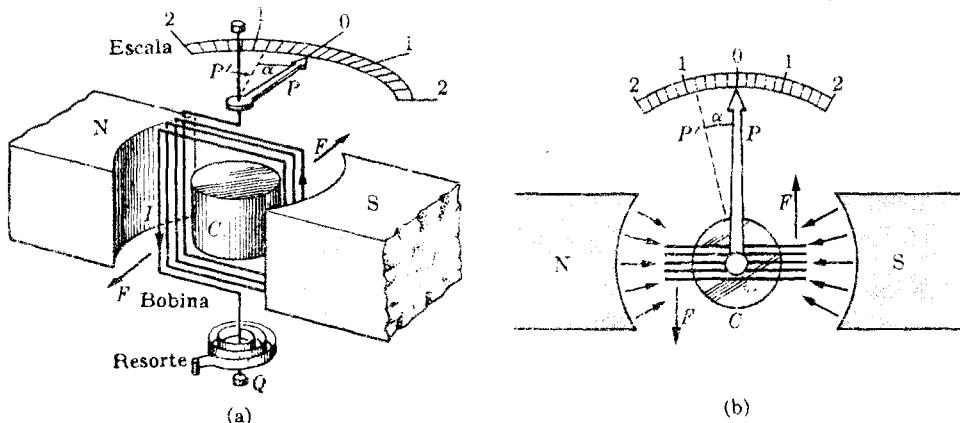


Fig. 15-21. (a) Componentes básicos de un galvanómetro de bobina móvil. (b) Vista superior del galvanómetro mostrado en (a).

EJEMPLO 15.5. Discusión de los instrumentos de medición de corriente tales como los *galvanómetros*. En la fig. 15-21 se ilustra un diseño simple. La corriente a medir pasa por una bobina suspendida entre los polos de un imán. En algunos casos la bobina se enrolla sobre un cilindro de hierro *C*. El campo magnético produce un torque sobre la bobina rotándola un cierto ángulo. Establecer la relación entre este ángulo y la corriente que pasa por la bobina.

Solución: Sea *S* el área efectiva de la bobina (número de vueltas \times sección de la bobina). El torque producido por el campo magnético, ec. (15.21), tiende a colocar la bobina perpendicularmente al campo, retorciendo el resorte *Q*. La bobina adopta una posición de equilibrio rotada un ángulo α cuando el torque magnético es compensado por el torque elástico $k\alpha$ del resorte, donde k es la constante elástica de éste. Una aguja fija a la bobina indica el ángulo α . Las piezas polares tienen la forma que se ilustra en la figura, para que el campo magnético entre ellas y el cilindro de hierro *C* sea radial, como se muestra en la vista superior del instrumento, fig. 15-21b. De este modo el campo \mathcal{B} está siempre en el plano del circuito y en la ec. (15.20) 0 es $\pi/2$ o sea $\sin \theta = 1$. El torque es entonces $\tau = IS\mathcal{B}$, ya que $M = IS$. En el equilibrio, cuando el torque debido al campo magnético es compensado por el torque debido al resorte, se tiene $IS\mathcal{B} = k\alpha$, de donde $I = k\alpha/S\mathcal{B}$. Si se conocen k , *S* y \mathcal{B} , esta ecuación da el valor de la corriente en función del ángulo α . Normalmente la escala se calibra de modo que pueda leerse *I* en alguna unidad conveniente.

EJEMPLO 15.6. Momento magnético correspondiente al movimiento orbital de una partícula cargada, tal como un electrón girando alrededor de un núcleo atómico.

Solución: Consideremos una carga *q* que describe una órbita cerrada la cual, para simplificar, podemos suponer circular. Si $v = \omega/2\pi$ es la frecuencia de su movimiento, la corriente en cada punto de su trayectoria es $I = qv$, puesto que siendo v el número de veces por segundo que la carga *q* pasa por el mismo punto, qv es la carga total que pasa por el punto en la unidad de tiempo. La corriente tiene el mismo sentido de la velocidad o el opuesto, según *q* sea positiva o negativa. Aplicando entonces la ec. (15.19), encontramos que el momento magnético orbital de la carga es

$$M = (qv)(\pi r^2) = \left(\frac{q\omega}{2\pi}\right)(\pi r^2) = \frac{1}{2}q\omega r^2. \quad (15.23)$$

De acuerdo con la regla dada anteriormente, su dirección, que depende del signo de q , es la que se indica en la fig. 15-22. Por otro lado, si m es la masa de la partícula, su momentum angular orbital es, según la ec. (7.33),

$$L = mvr = m\omega r^2. \quad (15.24)$$

Comparando las ecs. (15.23) y (15.24), encontramos que

$$M = \frac{q}{2m} L. \quad (15.25)$$

O, en forma vectorial,

$$\mathbf{M} = \frac{q}{2m} \mathbf{L}. \quad (15.26)$$

En consecuencia \mathbf{M} y \mathbf{L} tienen el mismo sentido o sentidos opuestos, según que la carga q sea positiva o negativa. Un electrón tiene $q = -e$ y $m = m_e$, resultando

$$\mathbf{M}_e = -\frac{e}{2m_e} \mathbf{L}. \quad (15.27)$$

Un protón tiene $q = +e$ y $m = m_p$, por lo que

$$\mathbf{M}_p = \frac{e}{2m_p} \mathbf{L}. \quad (15.28)$$

Si suponemos que la carga eléctrica está girando sobre sí misma alrededor de un diámetro del mismo modo que la tierra gira alrededor de su eje, tiene, además de su momentum angular orbital \mathbf{L} , un momentum angular interno \mathbf{S} , llamado *espín*. Debe haber un momento magnético asociado con el espín \mathbf{S} , ya que cada elemento de volumen de la carga que gira se comporta de la misma manera que la carga q en la fig. 15-22. Sin embargo, la relación entre el momento magnético y el espín no es la misma que la relación (15.26), porque el coeficiente por el que hay que multiplicar el momentum angular de espín \mathbf{S} para obtener el momento magnético correspondiente depende de la estructura interna de la partícula. Es útil escribir el momento magnético debido al espín en la forma

$$\mathbf{M}_s = \gamma \frac{e}{2m} \mathbf{S}, \quad (15.29)$$

donde el coeficiente γ , llamado *factor giromagnético*, depende de la estructura de la partícula y del signo de su carga. Combinando las ecs. (15.26) y (15.29), obtenemos el momento magnético total de una partícula de carga $\pm e$ que recorre una órbita y gira sobre sí misma,

$$\mathbf{M} = \frac{e}{2m} (\pm \mathbf{L} + \gamma \mathbf{S}). \quad (15.30)$$

El signo más (menos) delante de \mathbf{L} corresponde a una partícula cargada positivamente (negativamente). Aunque el neutrón no tiene carga eléctrica y por lo tanto no origina un momento magnético orbital de acuerdo con la ec. (15.26), tiene un

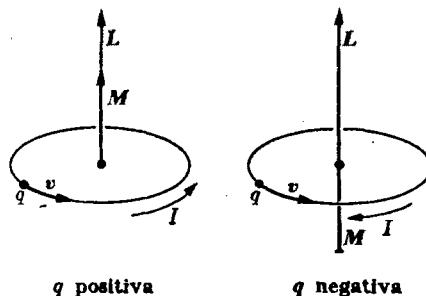


Fig. 15-22. Relación vectorial entre el momento dipolar magnético y el momentum angular de una carga describiendo una órbita cerrada.

momento magnético de espín que es opuesto al espín S . En la tabla que sigue se da el valor de γ para el electrón, el protón y el neutrón.

Partícula	γ
electrón	1,7924
protón	5,5851
neutrón	3,8256

El momento magnético total del neutrón no está dado ni la ec. (15.30) sino por la (15.29). El valor nulo de M_S sugiere que el neutrón tiene una estructura interna compleja. Análogamente, el hecho de que la γ del protón sea diferente a la del electrón indica que la estructura interna del protón es diferente a la del electrón.

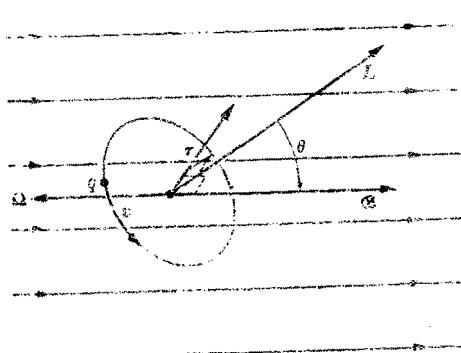
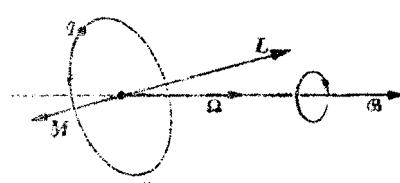


Fig. 15-23. El torque magnético τ sobre una partícula cargada en movimiento es perpendicular al momentum angular L de la partícula y al campo magnético B .



(a) q positiva



(b) q negativa

Fig. 15-24. Precesión del momentum angular de una partícula cargada alrededor del campo magnético.

EJEMPLO 15.7. Torque y energía de una partícula cargada que se mueve en una región donde hay un campo magnético.

Solución: Supongamos que se coloca la partícula del ejemplo anterior en un campo magnético uniforme (fig. 15-23). Empleando las ecs. (15.21) y (15.26) encontramos que el torque ejercido sobre la partícula es

$$\tau = \frac{q}{2m} \cdot L \times B = -\frac{q}{2m} \cdot B \times L \quad (15.31)$$

en dirección perpendicular a L y a B . Este torque tiende a cambiar el momentum angular orbital L de la partícula de acuerdo con la ec. (7.38), $dL/dt = \tau$. Definiendo $\Omega = -(q/2m)B$, que es la mitad de la frecuencia ciclotrónica dada por la ec. (15.7), tenemos para el torque dado por la ec. (15.31),

$$\tau = \Omega \times L. \quad (15.32)$$

Esta ecuación es similar a la ec. (10.29) correspondiente al movimiento del giroscopio, por lo que en este caso se tiene el mismo tipo de precesión allí estudiado. En el capítulo 10 la precesión se debía al torque producido por la interacción gravitacional; aquí se debe al torque producido por la interacción magnética. La precesión de \mathbf{L} alrededor de \mathbf{B} produce una rotación de la órbita de la partícula. En la fig. 15-24 se ha indicado la dirección de Ω y el sentido de precesión para una carga positiva y para una negativa.

La expresión (15.32) es válida solamente para una partícula sin espín. Si la partícula tiene espín, el análisis es algo más complicado, por lo que lo omitiremos.

Podemos obtener la energía de una partícula que se mueve en una órbita dentro de un campo magnético combinando las ecs. (15.22) y (15.26); resulta

$$E_p = -\frac{q}{2m} \mathbf{L} \cdot \vec{\mathbf{B}} = \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{L}. \quad (15.33)$$

Si la partícula tiene espín, usamos para el momento magnético la ec. (15.30), obteniendo

$$E_p = -\frac{e}{2m} (\pm \mathbf{L} + \gamma \mathbf{S}) \cdot \mathbf{B}. \quad (15.34)$$

Estos resultados son muy importantes para ayudar a comprender el comportamiento de un átomo o de una molécula en un campo magnético externo, tema de interés tanto desde el punto de vista teórico como del experimental. Por ejemplo, cuando se coloca un átomo en un campo magnético externo, se perturba el movimiento de los electrones y la energía varía de acuerdo con la ec. (15.34). Cuando se compara este valor teórico de E_p con los resultados experimentales, se encuentra que las componentes Z de los momentos angulares orbital y de espín están cuantizados; es decir, L_z y S_z pueden tomar sólo ciertos valores que se expresan en la forma

$$L_z = m_l \hbar, \quad S_z = m_s \hbar,$$

donde la constante $\hbar = h/2\pi = 1,05 \times 10^{-34}$ J s. Esta constante fue introducida en la sección 14.9 al discutir el movimiento orbital de los electrones, y \hbar es la constante de Planck. Los valores posibles de m_l son $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$, mientras que m_s puede tomar solamente dos valores, $+\frac{1}{2}$ ó $-\frac{1}{2}$. El número m_l se denomina *número cuántico magnético* del electrón, mientras que m_s es el *número cuántico de espín*. Para los neutrones y los protones se obtiene un resultado análogo. Por esa razón se dice que *el electrón, el protón y el neutrón tienen espín $\frac{1}{2}$* .

Por otro lado, *el momentum angular orbital L también está cuantizado*, pudiendo tomar solamente los valores dados por

$$L = \sqrt{l(l+1)} \hbar,$$

donde $l = 0, 1, 2, 3, \dots$ es un número natural que se denomina *número cuántico del momentum angular*. Como L_z no puede ser mayor que L , concluimos que los valores de m_l no pueden pasar de l , es decir

$$m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm (l-1), \pm l.$$

Por lo tanto, para $l = 0$ sólo es posible $m_l = 0$. Para $l = 1$, podemos tener $m_l = 0, \pm 1$, y así sucesivamente. Por otra parte, como el número cuántico de espín tiene solamente un valor, hay un único valor para el momentum angular de espín $S = \sqrt{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1)} \hbar = (\sqrt{3}/2) \hbar$.

El hecho de que para un valor dado de L sólo ciertos valores de L_z son posibles implica que L puede tener solamente ciertas direcciones en el espacio (fig. 15-25a). En la sección 14.7 esto se denominó cuantización espacial. En el caso del espín, como m_s tiene sólo dos valores posibles ($\pm \frac{1}{2}$), concluimos que S puede únicamente

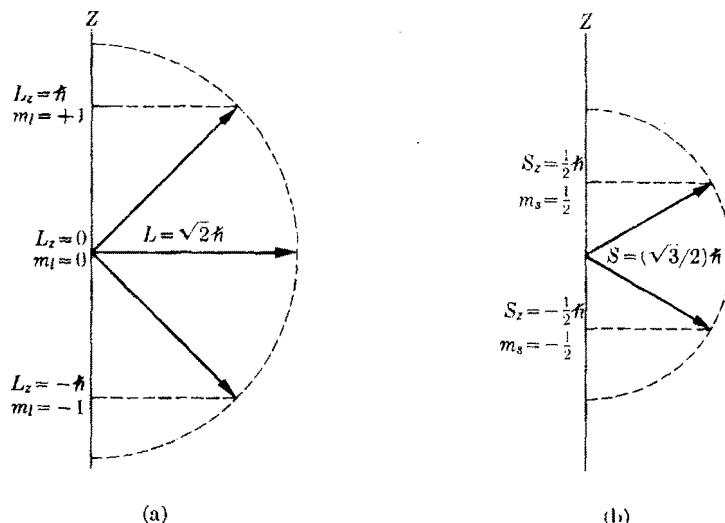


Fig. 15-25. Posibles orientaciones (a) del momentum angular correspondiente a $l = 1$, $L = \sqrt{2}\hbar$, y (b) del espín $s = \frac{1}{2}$, $S = (\sqrt{3}/2)\hbar$.

estar en dos direcciones respecto al eje Z , que generalmente se denominan hacia arriba (\uparrow) y hacia abajo (\downarrow). En la fig. 15-25b se muestran las orientaciones permitidas del espín.

15.7 Campo magnético producido por una corriente cerrada

Hasta ahora hemos dicho que nos damos cuenta de la presencia de un campo magnético por la fuerza que produce en una carga en movimiento. También hemos nombrado ciertas sustancias que en su estado natural, producen un campo magnético. Examinemos ahora con mayor detalle cómo se produce un campo magnético. En 1820, el físico danés Hans C. Oersted (1777-1851), notando la desviación de la aguja de una brújula colocada cerca de un conductor por el que pasaba una corriente, fue el primero en observar que *una corriente eléctrica produce un campo magnético* en el espacio que la rodea.

Después de muchos experimentos que varios físicos hicieron a través de los años usando circuitos de formas diferentes, se ha obtenido una expresión general para calcular el campo magnético producido por una corriente *cerrada* de cualquier forma. Esta expresión, llamada ley de Ampère-Laplace, es

$$\mathcal{B} = K_m I \oint \frac{\mathbf{u}_T \times \mathbf{u}_r}{r^2} dl, \quad (15.35)$$

donde el significado de todos los símbolos está indicado en la fig. 15-26, y la integral se extiende a todo el circuito cerrado (es por eso que se usa el símbolo \oint). En la expresión anterior, K_m es una constante que depende de las unidades que

se elijan. En el sistema MKSC se ha acordado (ver nota después de la sección 15.9) que $K_m = 10^{-7} \text{ T m/A}$ ó m kg C^{-2} . Debemos notar que la integral de la ec. (15.35) se expresa en m^{-1} cuando r y l están en metros. En consecuencia

$$\mathcal{B} = 10^{-7} I \oint \frac{\mathbf{u}_T \times \mathbf{u}_r}{r^2} dl. \quad (15.36)$$

Es costumbre escribir $K_m = \mu_0/4\pi$, donde μ_0 es una nueva constante llamada *permeabilidad magnética del vacío*. La expresión (15.35) de la ley de Ampère-Laplace se escribe entonces

$$\mathcal{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint \frac{\mathbf{u}_T \times \mathbf{u}_r}{r^2} dl, \quad (15.37)$$

y en el sistema MKSC de unidades

$$\begin{aligned} \mu_0 &= 4\pi \times 10^{-7} \text{ m kg C}^{-2} = \\ &= 1,3566 \times 10^{-6} \text{ m kg C}^{-2}. \end{aligned} \quad (15.38)$$

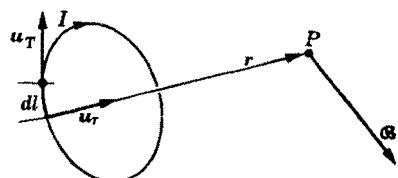


Fig. 15-26. Campo magnético producido en un punto P por una corriente eléctrica.

Como una corriente eléctrica es simplemente un chorro de partículas cargadas que se mueven en la misma dirección, llegamos a la siguiente importante conclusión que sigue:

el campo magnético, y por lo tanto la interacción magnética, es producido por cargas eléctricas en movimiento.

Para ilustrar el empleo de la ec. (15.37), la aplicaremos al cálculo del campo magnético producido por corrientes de formas simples.

15.8 Campo magnético de una corriente rectilínea

Consideremos una corriente rectilínea muy larga y delgada, como en la fig. 15-27. Para cualquier punto P y cualquier elemento de corriente dl , el vector $\mathbf{u}_T \times \mathbf{u}_r$ es perpendicular al plano determinado por P y la corriente, por lo que es paralelo al versor \mathbf{u}_θ . El campo magnético producido por dl en P es entonces tangente a la circunferencia de radio R que pasa por P , tiene su centro en la corriente y está en un plano perpendicular a la corriente. Por lo tanto, cuando realizamos la integración indicada en la ec. (15.37), todas las contribuciones del integral tienen la misma dirección que \mathbf{u}_θ y el campo magnético resultante es también tangente a la circunferencia. Se necesita entonces solamente calcular el módulo de \mathcal{B} . El módulo de $\mathbf{u}_T \times \mathbf{u}_r$ es $\sin \theta$ por ser \mathbf{u}_T y \mathbf{u}_r versores. En resumen, para una corriente rectilínea podemos escribir el módulo de la ec. (15.37) en la forma

$$\mathcal{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \theta}{r^2} dl. \quad (15.39)$$

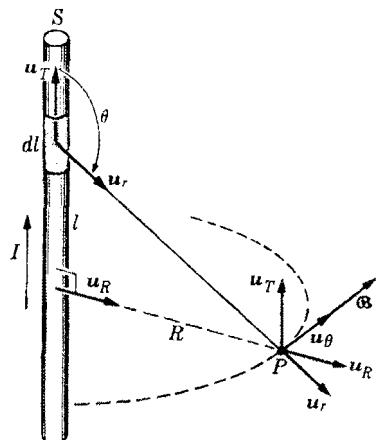


Fig. 15-27. Campo magnético producido en un punto P por una corriente rectilínea.

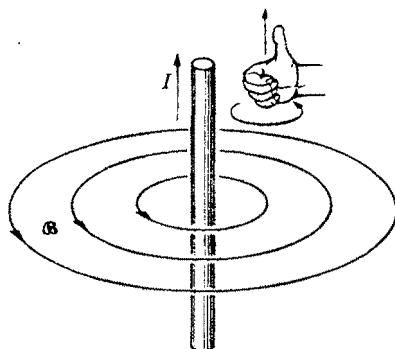


Fig. 15-28. Líneas de fuerza magnéticas alrededor de una corriente rectilínea.

De la figura se deduce que $r = R \operatorname{cosec} \theta$ y $l = -R \cotg \theta$, de donde $dl = R \operatorname{cosec}^2 \theta d\theta$. Sustituyendo en la ec. (15.39) resulta

$$\mathcal{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_0^\pi \frac{\operatorname{sen} \theta}{R^2 \operatorname{cosec}^2 \theta} (R \operatorname{cosec}^2 \theta d\theta) = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \int_0^\pi \operatorname{sen} \theta d\theta,$$

donde $l = -\infty$ corresponde a $\theta = 0$ y $l = +\infty$ a $\theta = \pi$. Luego,

$$\mathcal{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}. \quad (15.40)$$

o, en forma vectorial,

$$\mathcal{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \mathbf{u}_\theta. \quad (15.41)$$

El campo magnético es inversamente proporcional a la distancia R y las líneas de fuerza son circunferencias con centro en la corriente y perpendiculares a la misma, como se muestra en la fig. 15.28. En esta figura se indica también la regla de la mano derecha para determinar el sentido del campo magnético con respecto a la corriente. El resultado (15.41) se denomina *fórmula de Biot-Savart*.

En el caso de una corriente rectilínea circulando por un alambre observamos el campo magnético pero ningún campo eléctrico; esto se debe a que, además de los electrones en movimiento que producen el campo magnético, están los iones positivos del metal, que no contribuyen al campo magnético porque están en reposo con respecto al observador, pero que producen un campo eléctrico igual y opuesto al de los electrones. Es por ello que el campo eléctrico total es nulo. Por el contrario, para iones moviéndose según el eje de un acelerador lineal,

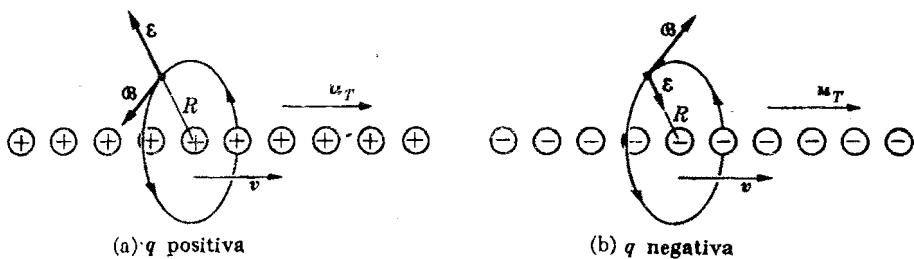


Fig. 15-29. Relación entre los campos eléctrico y magnético producidos por una corriente de iones positivos (negativos) que se mueven en línea recta.

tenemos un campo magnético y un campo eléctrico. El campo eléctrico corresponde al valor dado en el ejemplo 14.7 para el campo eléctrico de un filamento cargado, $E = u_r/2\pi\epsilon_0 R$. Comparando este valor con la ec. (15.41), vemos que los dos campos están relacionados por

$$^c\mathcal{B} = \frac{\mu_0 \epsilon_0 I}{\lambda} \mathbf{u}_T \times \mathcal{E}. \quad (15.42)$$

15.9 Fuerzas entre corrientes

Aplicaremos ahora las ecs. (15.41) y (15.16) conjuntamente para obtener la interacción entre dos corrientes eléctricas. Para simplificar, consideremos en primer lugar dos corrientes paralelas I e I' (fig. 15-30), en el mismo sentido y separadas una distancia R . En cualquier punto de I' el campo magnético \mathcal{B} debido a I está dado por la ec. (15.41) y tiene la dirección indicada. La fuerza \mathbf{F}' sobre I' es,

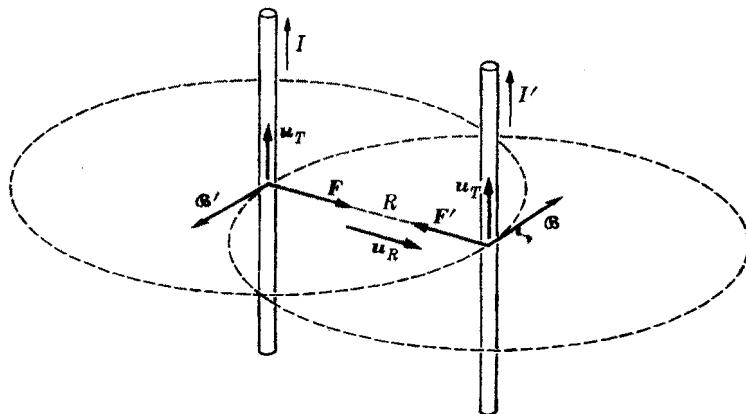


Fig. 15-80. Interacción magnética entre dos corrientes rectilíneas.

usando la ec. (15.17),

$$\mathbf{F}' = I' \int \mathbf{u}_T' \times \mathcal{B} dl'.$$

Ahora bien, $\mathbf{u}_T' \times \mathcal{B} = -\mathbf{u}_R \hat{\imath}$, donde \mathbf{u}_R es el versor de I a I' . Por lo tanto usando la expresión (15.41) para \mathcal{B} , tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{F}' &= I' \int \left(-\mathbf{u}_R \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \right) dl' = -\mathbf{u}_R \left(\frac{\mu_0 I I'}{2\pi R} \right) \int dl' \\ &= -\mathbf{u}_R \frac{\mu_0 I I'}{2\pi R} L'. \end{aligned} \quad (15.43)$$

Este resultado indica que la corriente I *aatrae* a la corriente I' . Un cálculo análogo de la fuerza que I' ejerce sobre I da el mismo resultado pero con signo más, de modo que está dirigida según \mathbf{u}_R y también representa una atracción. En resumen: *dos corrientes paralelas en el mismo sentido se atraen con fuerzas iguales* como resultado de su interacción magnética. Dejamos al estudiante la tarea de verificar que *si corrientes paralelas tienen sentidos opuestos, se repelen*.

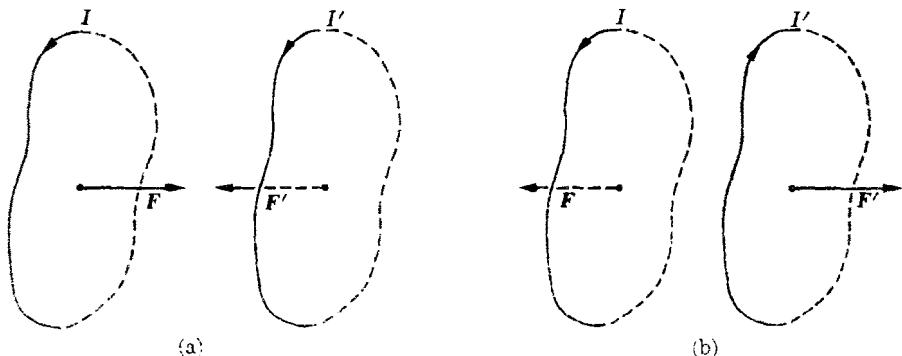


Fig. 15-31. Atracción y repulsión entre dos corrientes.

Este resultado puede extenderse a corrientes de cualquier forma. El estudiante puede verificar que las corrientes de la fig. 15-31(a) se atraen, mientras que las de la fig. 15-31(b) se repelen. Estas interacciones entre corrientes son de gran importancia práctica en los motores eléctricos y otras aplicaciones tecnológicas.

Nota sobre unidades: Al discutir las unidades fundamentales en la sección 2.3, indicamos que el sistema de unidades aprobado internacionalmente es el sistema MKSA y no el sistema MKSC, aunque en la práctica no hay diferencia entre ambos. Tenemos dos leyes para elegir la cuarta unidad básica a incorporar además de las de longitud, masa y tiempo. Ellas son: la ley de Coulomb para la interacción electrostática entre dos cargas, dada por la ec. (14.2),

$$F = K_e \frac{qq'}{r^2},$$

y la ley de interacción entre dos corrientes rectilíneas, dada por la ec. (15.43) con la constante magnética K_m en vez de $\mu_0/4\pi$,

$$F' = K_m \frac{2I'I}{R}$$

Aunque tenemos dos constantes, K_e y K_m , correspondientes a las fuerzas eléctrica y magnética, hay sólo un grado de libertad porque hay solamente una nueva cantidad física, la carga eléctrica, estando la corriente relacionada a ella por la ecuación $carga/tiempo$. En consecuencia, podemos asignar un valor arbitrario sólo a una de las constantes. La Undécima Conferencia General sobre Pesas y Medidas que tuvo lugar en 1960, decidió adoptar $K_m = 10^{-7}$ y escoger el ampere como nueva unidad fundamental. El ampere se define como la corriente que, circulando por dos conductores paralelos separados una distancia de un metro, produce sobre cada conductor una fuerza de 2×10^{-7} N por metro de longitud de cada conductor. (15.33). Una vez definido el ampere de esta manera, el coulomb es la cantidad de carga que pasa a través de cualquier sección de un conductor en un segundo cuando la corriente es de un ampere.

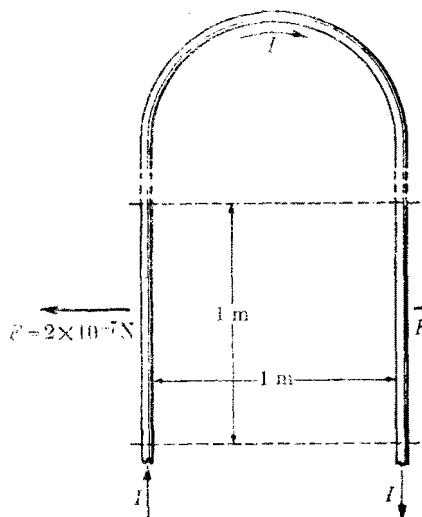


Fig. 15-32. Aparato para definir el ampere experimentalmente.

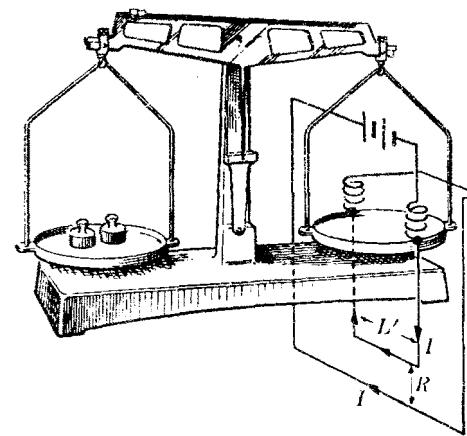


Fig. 15-33. Balanza de corrientes para medir una corriente en función de la fuerza magnética entre dos conductores paralelos.

En la fig. 15-33 se muestra una disposición experimental para medir la fuerza entre dos conductores paralelos. Constituye una *balanza de corrientes*. La misma corriente pasa por los dos conductores, de modo que $F = 2 \times 10^{-7} I^2 L'/R$. Primero se equilibra la balanza cuando no hay corrientes en el circuito. Cuando por éste circula corriente, es necesario agregar pesos en el plátillo izquierdo para equilibrar nuevamente la balanza. Usando los valores conocidos de F , L' y R , podemos encontrar el valor de I . En la práctica se usan dos bobinas circulares paralelas. La expresión de la fuerza entre bobinas es diferente.

Como en función de las constantes auxiliares ϵ_0 y μ_0 , tenemos $K_e = 1/4\pi\epsilon_0$ y $K_m = \mu_0/4\pi$, se deduce que el cociente entre estas dos constantes es

$$\frac{K_e}{K_m} = \frac{1}{\epsilon_0\mu_0} = c^2,$$

donde $c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$. Esta constante es igual a la velocidad de la luz (o de cualquier señal electromagnética) en el vacío, como se demostrará en el capítulo 19. La constante c ha sido medida experimentalmente con gran precisión. En función de ella tenemos que $K_e = K_m c^2 = 10^7 \text{ C}^2$, que es el valor de K_e dado en la sección 14.3. Esto explica nuestra elección anterior para K_e , elección que entonces pudo parecer algo arbitraria.

Una de las razones por las cuales la Undécima Conferencia recomendó el uso del amperio como la cuarta unidad fundamental es que es más fácil preparar un patrón de corriente y medir la fuerza entre dos corrientes, que construir un patrón de carga y medir la fuerza entre dos cargas. Sin embargo, desde el punto de vista físico, el concepto de carga es más fundamental que el de corriente. De todos modos, tanto en el aspecto práctico como en el teórico, los sistemas MKSG y MKSA son equivalentes.

15.10 Campo magnético de una corriente circular

Consideremos ahora una corriente circular de radio a (fig. 15-34). El cálculo del campo magnético en un punto arbitrario es un problema matemático algo complicado; pero en puntos sobre el eje de la corriente, dicho cálculo es una tarea bastante fácil. Veamos primero que la ec. (15.37) puede interpretarse matemáticamente diciendo que el campo magnético resultante \mathcal{B} producido por la corriente en P es la suma de un gran número de contribuciones elementales $d\mathcal{B}$ de cada uno de los elementos de longitud dl que componen el circuito. Cada contribución elemental es

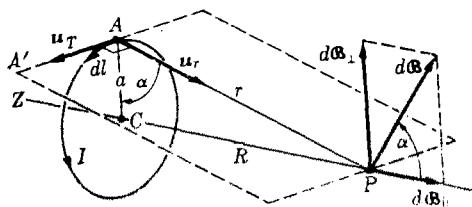


Fig. 15-34. Cálculo del campo magnético a lo largo del eje de una corriente circular.

Sin embargo, esta ecuación debe considerarse sólo en relación con la ec. (15.37) y no como un enunciado independiente.

$$d\mathcal{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{\mathbf{u}_T \times \mathbf{u}_r}{r^2} dl.$$

En el caso de una corriente circular, el producto vectorial $\mathbf{u}_T \times \mathbf{u}_r$ de la fig. 15-34 es perpendicular al plano PAA' y tiene módulo unidad porque los dos versores son perpendiculares. Por lo tanto, el campo $d\mathcal{B}$ producido por el elemento de

longitud dl en P tiene el módulo

$$d\mathcal{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{dl}{r^2},$$

y es perpendicular al plano PAA' , siendo entonces oblicuo respecto al eje Z. Descomponiendo $d\mathcal{B}$ en una componente $d\mathcal{B}_{||}$ paralela al eje y otra $d\mathcal{B}_{\perp}$ perpendicular a él, vemos que, cuando integramos a lo largo de la circunferencia, para cada $d\mathcal{B}_{\perp}$ hay otro en sentido contrario proveniente del elemento de longitud directamente opuesto a dl ; la resultante de todos los vectores $d\mathcal{B}_{\perp}$ es entonces nula. La resultante \mathcal{B} será la suma de todos los $d\mathcal{B}_{||}$, siendo en consecuencia paralela al eje. Ahora bien, como $\cos \alpha = a/r$,

$$d\mathcal{B}_{||} = (d\mathcal{B}) \cos \alpha = \frac{a}{r} d\mathcal{B} = \frac{\mu_0 I a}{4\pi r^3} dl.$$

La distancia r permanece constante cuando integramos a lo largo de la circunferencia. Luego, siendo $\oint dl = 2\pi a$, obtenemos para el módulo del campo magnético resultante

$$\mathcal{B} = \oint d\mathcal{B}_{||} = \frac{\mu_0 I a}{4\pi r^3} \oint dl = \frac{\mu_0 I a^2}{2r^3}.$$

Teniendo en cuenta que $r = (a^2 + R^2)^{1/2}$, podemos escribir el campo magnético en los puntos que están sobre el eje de una corriente circular en la forma

$$\mathcal{B} = \frac{\mu_0 I a^2}{2(a^2 + R^2)^{3/2}}. \quad (15.44)$$

El momento dipolar magnético del circuito es, usando la definición (15.19),

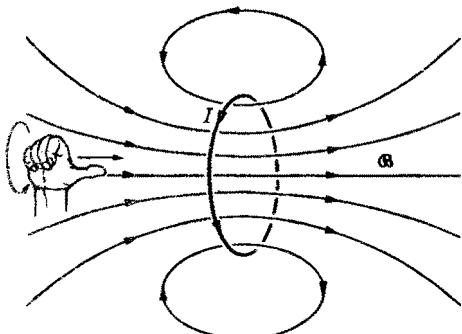


Fig. 15-35. Líneas de fuerza magnéticas debidas a una corriente circular.

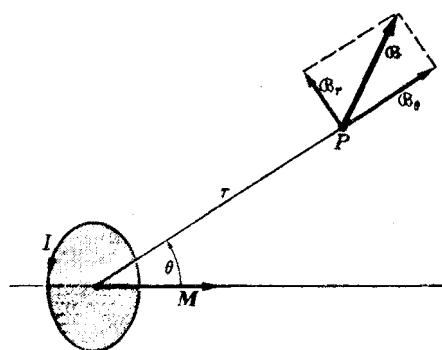


Fig. 15-36. Campo magnético producido en el punto P por una corriente dipolar magnética.

$M = I(\pi a^2)$; luego

$$\mathcal{B} = \frac{\mu_0 M}{2\pi(a^2 + R^2)^{3/2}}. \quad (15.45)$$

En la fig. 15-35 se ha representado el campo magnético de una corriente circular.

Ocurre un caso muy interesante cuando el circuito es tan pequeño que el radio a puede despreciarse frente a la distancia R . La ec. (15.45) se reduce entonces a

$$\mathcal{B} = \frac{\mu_0 M}{2\pi R^3} = \frac{\mu_0(2M)}{4\pi R^3}. \quad (15.46)$$

Cuando comparamos la ec. (15.46) con la ec. (14.46) con $\theta = 0$, es decir, $\mathcal{E}_r = (1/4\pi\epsilon_0)(2p/r^3)$, vemos que el módulo del campo magnético a lo largo del eje de la pequeña corriente es idéntico al campo eléctrico a lo largo del eje de un dipolo eléctrico si hacemos corresponder $(\mu_0/4\pi)M$ a $p/4\pi\epsilon_0$. Por esa razón el circuito se denomina *dipolo magnético*. En consecuencia, podemos aplicar a un dipolo magnético las ecs. (14.46) y (14.47) correspondientes a un dipolo eléctrico, resultando para el campo magnético fuera del eje (fig. 15-36),

$$\mathcal{B}_r = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2M \cos \theta}{r^3}, \quad \mathcal{B}_\theta = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{M \sin \theta}{r^3}. \quad (15.47)$$

En el capítulo 14 vimos que las líneas de fuerza de un campo eléctrico van de las cargas negativas a las positivas o, en algunos casos, desde o hacia el infinito. Por el contrario, podemos ver en las figs. 15-28 y 15-35 que las líneas de fuerza de un campo magnético son *cerradas* enlazando la corriente. La razón de esto es que el campo magnético no se origina en polos magnéticos. Un campo de este tipo, que no tiene fuentes puntuales, se denomina *solenoidal*.

EJEMPLO 15.8. Estudiar el galvanómetro de tangentes.

Solución: Un galvanómetro de tangentes consiste en una bobina circular (fig. 15-37) que tiene N vueltas y por la cual circula una corriente I . Se coloca en una región

donde hay un campo magnético \mathcal{B} de manera que un diámetro de la bobina sea paralelo a \mathcal{B} . La corriente I produce en el centro de la bobina, un campo magnético dado por la ec. (15.44) con $R = 0$; es decir, $\mu_0 I/2a$. Y por tener N vueltas, el campo magnético total producido en el centro es $\mathcal{B}_c = \mu_0 I N / 2a$. Por consiguiente el campo magnético resultante \mathcal{B}' en el centro de la bobina forma con el eje de la bobina un ángulo θ dado por

$$\tan \theta = \mathcal{B}/\mathcal{B}_c = 2a\mathcal{B}/\mu_0 I N.$$

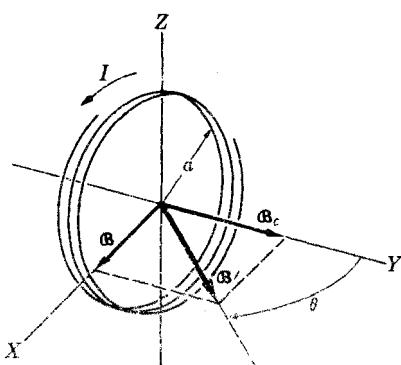


Fig. 15-37. Galvanómetro de tangentes.

Si se coloca una pequeña aguja magnética en el centro de la bobina, girará y quedará en equilibrio formando un ángulo θ con el eje. Esto nos permite medir el campo externo \mathcal{B} si conocemos la corriente I o, inversamente, medir la corriente I si conocemos el campo \mathcal{B} . Normalmente,

Es el campo magnético terrestre. Para mediciones de precisión debe corregirse la fórmula para tener en cuenta la longitud finita de la aguja, ya que el campo que actúa sobre ella no es exactamente el campo en el centro. El nombre "galvanómetro de tangentes" se deriva de la función trigonométrica que aparece arriba.

EJEMPLO 15.9. Estudiar el campo magnético de una corriente solenoidal.

Solución: Una corriente solenoidal, o simplemente un solenoide, es una corriente compuesta de varias espiras coaxiales y del mismo radio, todas con la

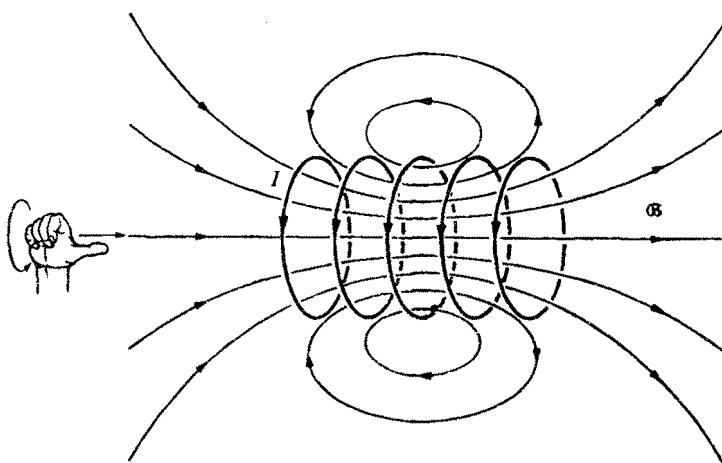


Fig. 15-38. Líneas de fuerza magnéticas debidas a una corriente solenoidal.

misma corriente (fig. 15-38). Obtenemos su campo magnético sumando los de cada una de las corrientes circulares correspondientes. En la figura se ha indicado el campo por medio de líneas de fuerza, suprimiendo algunas fluctuaciones en el espacio entre espiras. Calcularemos el campo del solenoide únicamente en puntos que están sobre su eje.

En la fig. 15-39 tenemos un corte longitudinal del solenoide. Si L es la longitud y N el número de espiras, el número de espiras por unidad de longitud es N/L y el número de espiras en una sección de longitud dR es $(N/L)dR$. Podemos calcular el campo de cada espira en un punto P del eje usando la ec. (15.44); el campo debido

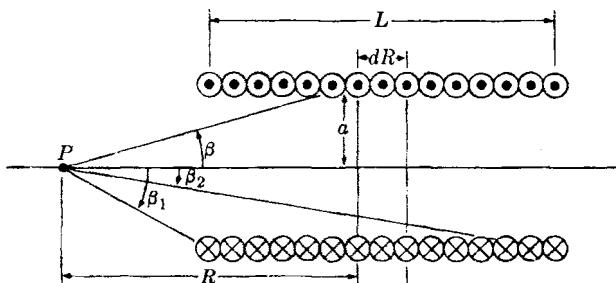


Fig. 15-39. Cálculo del campo magnético en un punto P situado sobre el eje de una corriente solenoidal.

a las espiras contenidas en la sección dR puede calcularse en la siguiente forma:

$$d\mathcal{B} = \left| \frac{\mu_0 I a^2}{2(a^2 + R^2)^{3/2}} \right| \frac{N}{L} dR = \frac{\mu_0 I N}{2L} \frac{a^2 dR}{(a^2 + R^2)^{3/2}}. \quad (15.48)$$

De la figura inferimos que $R = a \operatorname{csc} \beta$, $dR = -a \operatorname{cosec}^2 \beta d\beta$, y $a^2 + R^2 = a^2 \operatorname{cosec}^2 \beta$. Sustituyendo en la ec. (15.48), tenemos

$$d\mathcal{B} = \frac{\mu_0 I N}{2L} (-\operatorname{sen} \beta d\beta).$$

Para obtener el campo resultante, debemos integrar desde un extremo del solenoide hasta el otro. Es decir, calculamos el campo resultante como sigue:

$$\mathcal{B} = \frac{\mu_0 I N}{2L} \int_{\beta_1}^{\beta_2} -\operatorname{sen} \beta d\beta = \frac{\mu_0 I N}{2L} (\cos \beta_2 - \cos \beta_1). \quad (15.49)$$

Si el solenoide es muy largo con respecto al radio, tenemos para puntos cerca del centro que $\beta_1 \approx \pi$ y $\beta_2 \approx 0$, de donde

$$\mathcal{B} = \frac{\mu_0 I N}{L}. \quad (15.50)$$

Para un punto en uno de sus extremos, $\beta_1 = \pi/2$ y $\beta_2 \approx 0$, o $\beta_1 \approx \pi$ y $\beta_2 = \pi/2$. En cualquiera de los dos casos

$$\mathcal{B} = \frac{\mu_0 I N}{2L}, \quad (15.51)$$

o sea la mitad del valor en el centro. Los solenoides largos se usan para producir campos magnéticos bastante uniformes en regiones limitadas cerca del centro.

EJEMPLO 15.10. Estudiar el campo magnético del sistema cuadrupolar de corrientes ilustrado en la fig. 15-40.

Solución: El sistema de corrientes de la fig. 15-40 está compuesto por dos pequeños circuitos iguales separados una distancia $2a$, por los que circulan corrientes iguales I pero de sentidos opuestos. Cada circuito es entonces un dipolo magnético; pero como las corrientes circulan en sentidos opuestos, los momentos dipolares son opuestos, dando un momento dipolar magnético total nulo.

Sin embargo, el campo magnético resultante no es cero debido a la separación de los circuitos y el sistema constituye por lo tanto un cuadrupolo magnético. Debe notarse que la situación es matemáticamente muy similar a la del ejemplo 14.13.

Teniendo en cuenta la analogía entre la ec. (15.47) para un dipolo magnético y las ecs. (14.46) y (14.47) para un dipolo eléctrico, podemos definir un potencial "magnético" V_m asociado con el campo magnético de un dipolo magnético dado por la ec. (14.45) con $\mu_0 M/4\pi$ en vez de $n/4\pi\epsilon_0$. Se tiene

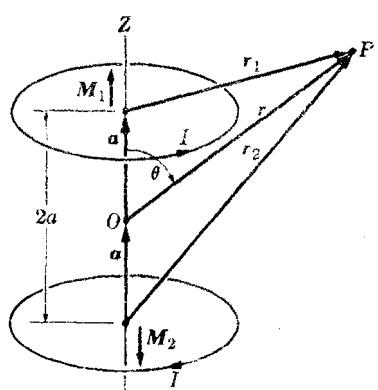


Fig. 15-40. Cuadrupolo magnético.

$$V_m = \frac{\mu_0 M \cos \theta}{4\pi r^2} = \frac{\mu_0 M \cdot r}{4\pi r^3}.$$

Luego, el potencial "magnético" resultante en P es, teniendo en cuenta que $\mathbf{M}_1 = -\mathbf{M}_2 = \mathbf{M}$,

$$V_m = \frac{\mu_0 \mathbf{M}_1 \cdot \mathbf{r}_1}{4\pi r_1^3} + \frac{\mu_0 \mathbf{M}_2 \cdot \mathbf{r}_2}{4\pi r_2^3} = \frac{\mu_0 \mathbf{M}}{4\pi} \cdot \left(\frac{\mathbf{r}_1}{r_1^3} - \frac{\mathbf{r}_2}{r_2^3} \right).$$

En la fig. 15-40 observamos que $\mathbf{r}_1 = -\mathbf{a} + \mathbf{r}$ y $\mathbf{r}_2 = \mathbf{a} + \mathbf{r}$, por lo que

$$r_1^2 = r^2 + a^2 - 2ar \cos \theta,$$

$$r_2^2 = r^2 + a^2 + 2ar \cos \theta.$$

Usando el desarrollo binomial hasta el primer orden en a/r , tenemos

$$\frac{1}{r_1^3} = \frac{1}{r^3} \left(1 - \frac{2a \cos \theta}{r} + \frac{a^2}{r^2} \right)^{-3/2} = \frac{1}{r^3} \left(1 + \frac{3a \cos \theta}{r} + \dots \right),$$

y análogamente,

$$\frac{1}{r_2^3} = \frac{1}{r^3} \left(1 - \frac{3a \cos \theta}{r} + \dots \right).$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{r}_1}{r_1^3} - \frac{\mathbf{r}_2}{r_2^3} &= \frac{-\mathbf{a} + \mathbf{r}}{r^3} \left(1 + \frac{3a \cos \theta}{r} + \dots \right) - \\ &- \frac{\mathbf{a} + \mathbf{r}}{r^3} \left(1 - \frac{3a \cos \theta}{r} + \dots \right) = \frac{-2\mathbf{a}}{r^3} + \frac{6ra \cos \theta}{r^4} + \dots \end{aligned}$$

Sustituyendo este valor en la expresión de V_m , obtenemos

$$V_m = \frac{2\mu_0}{4\pi r^3} \left(-\mathbf{M} \cdot \mathbf{a} + \frac{3\mathbf{M} \cdot \mathbf{r} a \cos \theta}{r} \right).$$

Pero $\mathbf{M} \cdot \mathbf{a} = Ma$ y $\mathbf{M} \cdot \mathbf{r} = Mr \cos \theta$; luego

$$V_m = \frac{\mu_0 M (2a) (3 \cos^2 \theta - 1)}{4\pi r^3},$$

cuya dependencia angular y radial es similar a la de la ec. (14.58), confirmando el hecho de que estamos tratando con un cuadrupolo magnético. El momento cuadrupolar magnético es $M(2a)$. El campo magnético del cuadrupolo magnético tiene las siguientes componentes radial y tangencial

$$B_r = -\frac{\partial V_m}{\partial r} = \frac{3\mu_0 M (2a) (3 \cos^2 \theta - 1)}{4\pi r^4},$$

$$B_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial V_m}{\partial \theta} = \frac{6\mu_0 M (2a) \sin \theta \cos \theta}{4\pi r^4}.$$

Advertimos al estudiante que el potencial "magnético" que hemos introducido es simplemente un artificio matemático para calcular el campo magnético, y que no está relacionado con una energía potencial en la misma forma que lo está el potencial eléctrico.

15.11 Campo magnético de una carga en movimiento (no relativista)

El hecho de que una corriente eléctrica (es decir, un chorro de cargas en movimiento produce un campo magnético, sugiere que una sola carga en movimiento debe producir también un campo magnético. Trataremos de determinar este

campo magnético perdiendo así resultado conocido para el campo magnético de una corriente eléctrica. El campo magnético producido por una corriente es, según la ec. (15.37),

$$\mathcal{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint \frac{\mathbf{u}_T \times \mathbf{u}_r}{r^2} \cdot d\mathbf{l} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{(I d\mathbf{l}) \times \mathbf{u}_r}{r^2}.$$

Pero recordando las ecs. (15.12) y (15.13) y el hecho de que $dV = S d\mathbf{l}$, tenemos $\mathbf{j} = j\mathbf{u}_T$ y $\mathbf{j} = nq\mathbf{v}$, lo cual da

$$I d\mathbf{l} \mathbf{u}_T = (jS) d\mathbf{l} \mathbf{u}_T = \mathbf{j} dV = nq\mathbf{v} dV.$$

Por lo tanto

$$\mathcal{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{q\mathbf{v} \times \mathbf{u}_r}{r^2} n dV. \quad (15.52)$$

Como $n dV$ es el número de partículas en el volumen dV , podemos interpretar el resultado anterior diciendo que cada partícula cargada produce en el punto A (fig. 15-41) un campo magnético dado por

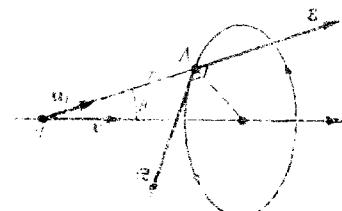


Fig. 15-41. Campos eléctrico y magnético producidos por una carga en movimiento.

$$\mathcal{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{qv \times u_r}{r^2}, \quad (15.53)$$

El módulo de \mathcal{B} es

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{qv \sin \theta}{r^2},$$

y su dirección es perpendicular a \mathbf{r} y a \mathbf{v} . Las líneas magnéticas de fuerza son entonces circunferencias, como se muestra en la figura. Obsérvese que el módulo del campo magnético es cero en la línea del movimiento y es máximo sobre el plano perpendicular a la misma, que pasa por la carga.

El campo eléctrico E promovido por la carga q es, teniendo en cuenta que no lo afecta el movimiento de la carga,

$$E = \frac{q\mathbf{u}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

En consecuencia podemos escribir la ec. (15.53) en la forma

$$\mathcal{B} = \mu_0 \epsilon_0 \mathbf{v} \times \mathbf{E} = \frac{1}{4\pi} \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{E}}{r^2}, \quad (15.54)$$

la cual establece una estrecha relación entre los campos eléctrico y magnético producidos por una carga en movimiento. La expresión anterior hemos puesto

$$\frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} = 10^{-7} \text{ N/A}^2 = 10^7 \text{ Vs/C}^2. \quad (15.55)$$

que, como señalamos anteriormente y demostraremos más adelante, es la velocidad de la luz o de cualquier señal electromagnética en el vacío. En números redondos, $c = 3,0 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$.

En conclusión: aunque una carga en reposo produce únicamente un campo eléctrico, una carga en movimiento produce tanto un campo eléctrico como uno magnético, relacionados por la ec. (15.54). Los campos eléctrico y magnético son entonces simplemente dos aspectos de una propiedad fundamental de la materia, siendo más apropiado emplear el término *campo electromagnético* para describir la situación física que involucra cargas en movimiento.

Debemos señalar aquí que el pasaje de la ec. (15.52) a la ec. (15.53) no constituye un procedimiento matemático único ya que, si agregamos por ejemplo a la ec. (15.53) un término cuya integral a lo largo de un camino cerrado sea cero, la ec. (15.52) no cambia. En realidad, la ec. (15.53) no es completamente correcta. Se ha encontrado experimentalmente que da resultados aceptables sólo cuando la velocidad de la partícula es pequeña con respecto a c . En la sección 15.13 deduciremos la expresión correcta de \mathcal{B} que será válida para todas las velocidades. Por otra parte la ec. (15.52) es válida para todas las velocidades.

EJEMPLO 15.11. Verificar que el resultado (15.42) para el campo magnético de una corriente rectilínea es compatible con la ec. (15.54).

Solución: El campo magnético producido por una corriente rectilínea es el resultante de los campos individuales producidos por todas las cargas que se mueven a lo largo del conductor. De acuerdo con la ec. (15.13), si S es la sección transversal del conductor, $I = nqSv$, donde v es la velocidad de las cargas. Pero nq es la carga por unidad de volumen y por lo tanto la carga por unidad de longitud en un conductor de sección S es $nqS = \lambda$; de donde $I = \lambda v$. Haciendo sustituciones en la ec. (15.42) y teniendo en cuenta que $v = v_{UT}$, tenemos

$$\mathcal{B} = \frac{\mu_0 \epsilon_0 (\lambda v)}{\lambda} \mathbf{u}_T \times \mathbf{E} = \mu_0 \epsilon_0 v \times \mathbf{E},$$

que es precisamente la ec. (15.54).

15.12 Electromagnetismo y el principio de relatividad

En el capítulo 11 establecimos como principio general el requisito de que todas las leyes de la naturaleza deben ser idénticas para todos los observadores inertiales. En consecuencia, debemos ahora obtener la relación entre los campos eléctricos y magnéticos medidos por dos observadores en movimiento relativo uniforme, de modo que se satisfaga el principio de relatividad.

Supongamos que tenemos dos observadores O y O' (fig. 15-42) en movimiento relativo con velocidad v , y que hay dos cargas q y Q en reposo respecto a O' ; las dos cargas están por lo tanto en movimiento con respecto a O . Los valores de ambas cargas son los mismos para los dos observadores O y O' , como ya se señaló en la sección 15.4. Para el observador O' hay solamente una interacción eléctrica entre Q y q y la fuerza que mide sobre q es $\mathbf{F}' = q\mathbf{E}'$, donde \mathbf{E}' es el campo eléctrico producido por Q en q de acuerdo con lo que mide O' .

Por otro lado, O' ve la carga Q en movimiento, y observa que produce un campo eléctrico \mathcal{E}' y un campo magnético \mathcal{B}' ; como O' observa que también q está en movimiento con velocidad v , la fuerza ejercida por Q que O' mide sobre q es $\mathbf{F}' = q(\mathcal{E}' + \mathbf{v} \times \mathcal{B}')$.

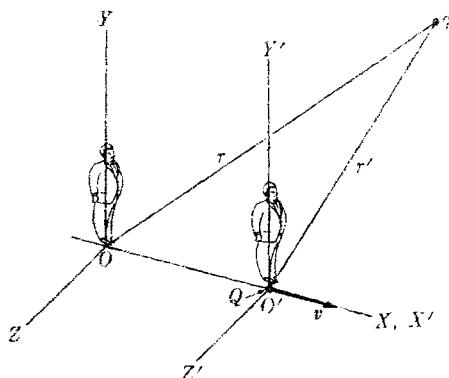


Fig. 15-42. Comparación de las medidas electromagnéticas hechas por dos observadores en movimiento relativo.

Elijiendo el sistema de coordenadas tal que los ejes X y X' coincidan con la dirección de la velocidad relativa de los observadores, tenemos que $\mathbf{v} = \mathbf{u}_x v$ y que $\mathbf{v} \times \mathcal{B} = -u_y v \mathcal{B}_z + u_z v \mathcal{B}_y$; por lo tanto las componentes de \mathbf{F} en el sistema XYZ son

$$F_x = q\mathcal{E}_x, \quad F_y = q(\mathcal{E}_y - v\mathcal{B}_z), \quad F_z = q(\mathcal{E}_z + v\mathcal{B}_y). \quad (15.56)$$

Las componentes de \mathbf{F}' en el sistema $X'Y'Z'$ son

$$F'_x = q\mathcal{E}'_x, \quad F'_y = q\mathcal{E}'_y, \quad F'_z = q\mathcal{E}'_z. \quad (15.57)$$

Como q está en reposo respecto a O' , la relación entre las componentes de \mathbf{F} y de \mathbf{F}' está dada por las ecs. (11.32), (11.33) y (11.34); es decir,

$$F'_x = F_x, \quad F'_y = \frac{F_y}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad F'_z = \frac{F_z}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Reemplazando los valores de las componentes por los dados en las ecs. (15.56) y (15.57), y cancelando el factor común q , obtenemos

$$\mathcal{E}'_x = \mathcal{E}_x, \quad \mathcal{E}'_y = \frac{\mathcal{E}_y - v\mathcal{B}_z}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad \mathcal{E}'_z = \frac{\mathcal{E}_z + v\mathcal{B}_y}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (15.58)$$

Estas expresiones relacionan, de acuerdo con la teoría de la relatividad especial, el campo eléctrico medido por el observador O' con los campos eléctrico y magnético medidos por el observador O . Las tres ecuaciones inversas de las ecs. (15.58) se obtienen intercambiando los campos e intercambiando el signo de v , ya que el sistema $X'Y'Z'$ se mueve con velocidad $-v$ respecto a XYZ . Así, si el obser-

vador O' mide un campo eléctrico \mathcal{E}' y un campo magnético \mathcal{B}' , el campo eléctrico que mide O está dado por

$$\mathcal{E}_x = \mathcal{E}'_x, \quad \mathcal{E}_y = \frac{\mathcal{E}'_y + v\mathcal{B}'_z}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad \mathcal{E}_z = \frac{\mathcal{E}'_z - v\mathcal{B}'_y}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (15.59)$$

Si la carga Q , en vez de estar en reposo con respecto a O' , está también en movimiento respecto a él, el observador O' observa un campo magnético \mathcal{B}' además del campo eléctrico \mathcal{E}' . Un cálculo similar pero más trabajoso* da en ese caso

$$\mathcal{B}'_x = \mathcal{B}_x, \quad \mathcal{B}'_y = \frac{\mathcal{B}_y + v\mathcal{E}_z/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad \mathcal{B}'_z = \frac{\mathcal{B}_z - v\mathcal{E}_y/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (15.60)$$

Aquí también, como lo hicimos en la ec. (15.58), podemos obtener la transformación inversa de la (15.60) intercambiando los campos y reemplazando v por $-v$; resulta

$$\mathcal{B}_x = \mathcal{B}'_x, \quad \mathcal{B}_y = \frac{\mathcal{B}'_y - v\mathcal{E}'_z/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad \mathcal{B}_z = \frac{\mathcal{B}'_z + v\mathcal{E}'_y/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (15.61)$$

Las ecs. (15.58) y (15.60), o sus inversas, las ecs. (15.59) y (15.61), constituyen la transformación de Lorentz para el campo electromagnético. Estas ecuaciones demuestran una vez más que los campos eléctrico y magnético no son entes separados, sino que forman un único ente físico llamado el campo *electromagnético*. La separación de un campo electromagnético en sus componentes eléctrico y magnético no es un procedimiento absoluto sino que depende del movimiento de las cargas respecto al observador. En consecuencia repetimos que no debemos hablar de las interacciones eléctrica y magnética como procesos separados, sino como de dos aspectos de la *interacción electromagnética*.

EJEMPLO 15.12. Reconsiderar la situación discutida en el ejemplo 15.4 usando la transformación de Lorentz para el campo electromagnético, para relacionar los campos medidos por ambos observadores.

Solución: Recordemos que en el ejemplo 15.4 había un campo eléctrico según el eje Y y un campo magnético según el eje Z . Haciendo una transformación cinemática a un sistema de ejes $X'Y'Z'$ moviéndose en la dirección X con velocidad $v = \mathcal{E}/\mathcal{B}$, redujimos el movimiento al de una partícula en un campo magnético solo. Vayamos un paso más adelante en este análisis y veamos las implicaciones de este ejemplo dentro del marco de la teoría de la relatividad. En el sistema XYZ tenemos $\mathcal{E}_x = 0$, $\mathcal{E}_y = \mathcal{E}$ y $\mathcal{E}_z = 0$ para el campo eléctrico, y $\mathcal{B}_x = \mathcal{B}_y = 0$, $\mathcal{B}_z = \mathcal{B}$ para el campo magnético. Luego, usando las ecs. (15.58) y (15.60), encontramos que los campos que se observan en el sistema de referencia $X'Y'Z'$ son

$$\mathcal{E}'_x = 0, \quad \mathcal{E}'_y = \frac{\mathcal{E} - v\mathcal{B}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad \mathcal{E}'_z = 0,$$

$$\mathcal{B}'_x = 0, \quad \mathcal{B}'_y = 0, \quad \mathcal{B}'_z = \frac{\mathcal{B} - v\mathcal{E}/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

* Por ejemplo, si el estudiante desea obtener la segunda y tercera ecuaciones en ec. (15.60), sugerimos que use la ec. (15.58) para eliminar \mathcal{E}'_y y \mathcal{E}'_z de la transformación inversa (15.59), y luego despeje \mathcal{B}'_y y \mathcal{B}'_z .

Poniendo $v = \epsilon/B$, concluimos que $\epsilon'_y = 0$ por lo que $\epsilon' = 0$, mientras que

$$\epsilon' = B' = \sqrt{1 - v^2/c^2} B.$$

Por lo tanto la teoría de la relatividad predice que un observador O' moviéndose con velocidad $v = \epsilon/B$ con respecto a otro observador O , no medirá campo eléctrico alguno y medirá un campo magnético menor que el que mide O , aunque en la misma dirección.

EJEMPLO 15.13. Obtener el campo magnético de una corriente rectilínea usando la transformación relativista del campo electromagnético.

Solución: Consideremos una fila infinita de cargas igualmente espaciadas que se mueven según el eje X con velocidad v respecto al observador O (fig. 15-43) y que constituyen por lo tanto una corriente eléctrica rectilínea. Si λ es la carga eléctrica por unidad de longitud, la corriente eléctrica que mide O es $I = \lambda v$. Consideremos ahora un observador O' que se mueve según el eje X con velocidad v . Las cargas están en reposo respecto a O' y éste mide solamente un campo eléctrico. Por el contrario, O registra un campo eléctrico y un campo magnético.

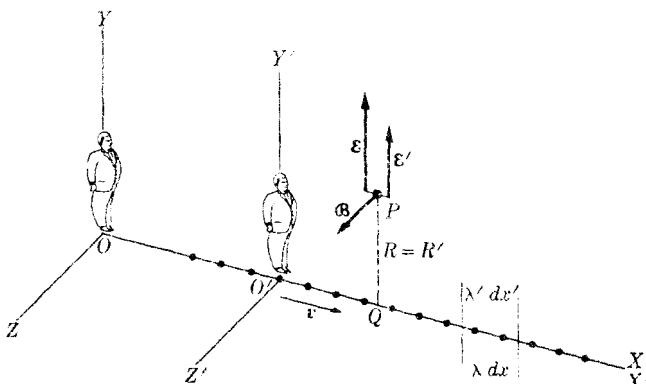


Fig. 15-43. Campo electromagnético producido por un chorro de cargas que se mueven según el eje X tal como lo observan dos observadores en movimiento relativo.

La carga medida por O en un segmento dx es $dq = \lambda dx$. El observador O' mide la misma carga pero debido a la contracción de Lorentz, el segmento parece tener una longitud dx' tal que $dx = \sqrt{1 - v^2/c^2} dx'$. Por lo tanto O' mide una carga por unidad de longitud λ' diferente, dada por

$$\lambda' = \frac{dq}{dx'} = \lambda \frac{dx}{dx'} = \sqrt{1 - v^2/c^2} \lambda.$$

El campo eléctrico medido por O' es transversal. En un punto P está dado por el resultado del ejemplo 14.7, es decir, por $\epsilon' = \lambda'/2\pi\epsilon_0 R'$. Colocando el eje Y paralelo a la línea PQ y teniendo en cuenta que $R = R'$ porque es una longitud transversal, podemos escribir

$$\epsilon'_x = 0, \quad \epsilon'_y = \frac{\lambda'}{2\pi\epsilon_0 R}, \quad \epsilon'_z = 0.$$

Luego, usando las ecs. (15.59) con $\mathcal{W}' = 0$, podemos escribir las componentes del

campo eléctrico con respecto a O en la forma

$$\mathcal{E}_x = \mathcal{E}_z = 0, \quad \mathcal{E}_y = \frac{\mathcal{E}'_y}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{\lambda'}{2\pi\epsilon_0 R \sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R}.$$

Análogamente, las ecs. (15.61) dan las siguientes componentes del campo magnético respecto a O :

$$\mathcal{B}_x = \mathcal{B}_y = 0, \quad \mathcal{B}_z = \frac{v\mathcal{E}'_y/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{\lambda'v/c^2}{2\pi\epsilon_0 R \sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R},$$

donde hemos usado la relación $\epsilon_0\mu_0 = 1/c^2$. En consecuencia, no sólo obtenemos correctamente el campo eléctrico en el sistema $X'Y'Z'$ de una distribución rectilínea de carga, sino que también, usando la ec. (15.37) como punto de partida, hemos encontrado la expresión correcta para el campo magnético producido por una corriente rectilínea, que había sido obtenido previamente [ec. (15.41)]. Podemos confiar entonces en que la ley de Ampère-Laplace (15.37) es compatible con los requisitos del principio de relatividad y que da por lo tanto el campo magnético correcto asociado con una corriente eléctrica *cerrada*.

15.13 Campo electromagnético de una carga en movimiento

En el capítulo 14 vimos que una carga en reposo produce un campo eléctrico $\mathcal{E} = (q/4\pi\epsilon_0 r^2)\mathbf{u}_r$, y en la sección 15.11 señalamos que cuando una carga está en movimiento, produce, además, un campo magnético cuya expresión sugerimos que sería $\mathcal{B} = (\mu_0/4\pi)qv \times \mathbf{u}_r/r^2$. Sin embargo, de acuerdo con la sección precedente, los campos \mathcal{E} y \mathcal{B} deben estar relacionados por las ecs. (15.58) y (15.60). En consecuencia debemos empezar, desde el principio, con un cálculo relativista para obtener las expresiones correctas de \mathcal{E} y \mathcal{B} para una carga en movimiento.

Consideremos una carga q en reposo con respecto al sistema de referencia $X'Y'Z'$, y que se está moviendo con respecto a $X'Y'Z'$ con velocidad v paralela al eje X común. El observador O' no mide campo magnético alguno, sino simplemente un campo eléctrico, como se señaló anteriormente; por lo tanto $\mathcal{B}'_x = \mathcal{B}'_y = \mathcal{B}'_z = 0$, o sea $\mathcal{B}' = 0$. Luego, las transformaciones (15.59) para el campo eléctrico dan

$$\mathcal{E}_x = \mathcal{E}'_x, \quad \mathcal{E}_y = \frac{\mathcal{E}'_y}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad \mathcal{E}_z = \frac{\mathcal{E}'_z}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (15.62)$$

Las ecs. (15.62) indican que cuando los observadores O , que ve moverse la carga, y O' , que la ve en reposo, comparan sus medidas del campo eléctrico de la carga, obtienen la misma componente del campo paralela a la dirección del movimiento, pero O obtiene una mayor componente perpendicular a la dirección del movimiento. Análogamente, las transformaciones (15.61) para el campo magnético dan, si usamos las ecs. (15.62) para escribir las componentes del campo eléctrico respecto a O ,

$$\mathcal{B}'_x = 0, \quad \mathcal{B}'_y = -\frac{v\mathcal{E}'_z}{c^2}, \quad \mathcal{B}'_z = \frac{v\mathcal{E}'_y}{c^2}, \quad (15.63)$$

las cuales son equivalentes a $\mathcal{B} = \mathbf{v} \times \mathbf{E}/c^2$. Esta relación es idéntica a la ec. (15.54) que, como se señaló anteriormente, es la relación entre los campos eléctrico y magnético de una carga moviéndose con velocidad constante \mathbf{v} , relación que es válida para todas las velocidades.

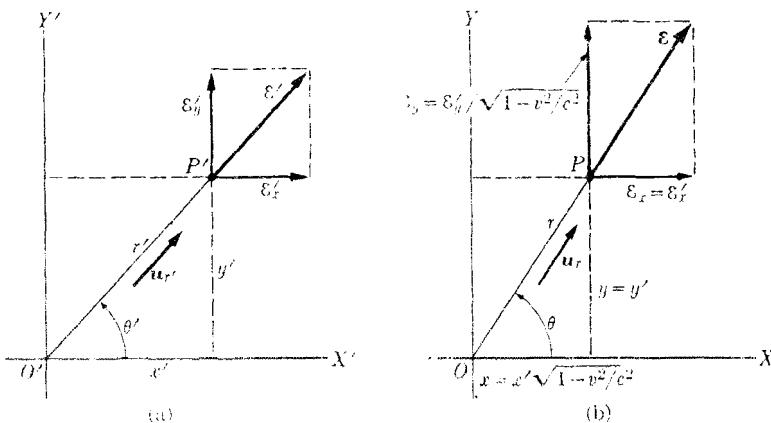


Fig. 15-44. Transformación relativista de las componentes del campo eléctrico producido por una carga q en reposo respecto a O' y situada en O' .

Las observaciones de O y de O' se comparan en la fig. 15-44. Si la carga está en O' , el observador O' mide en P' (sobre el plano $X'Y'$) un campo eléctrico dado por

$$\mathcal{E}' = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r'^2} \mathbf{u}_{r'} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r'^3} \mathbf{r}'.$$

El observador O ve el mismo punto en el plano XY pero, debido a la contracción de Lorentz, la coordenada X del punto parece acortada en el factor $\sqrt{1 - v^2/c^2}$, mientras que la coordenada Y permanece igual. Es decir, $x = x' \sqrt{1 - v^2/c^2}$, $y = y'$. Luego, el ángulo θ que OP forma con OX es diferente del ángulo θ' que $O'P'$ forma con $O'X'$ (fig. 15-44). Empleando las ecs. (15.62), vemos que el campo \mathcal{E} que O mide en P tiene una componente X igual a la medida por O' , pero la componente Y es mayor en un factor $1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$. El resultado es que \mathcal{E} forma con el eje X el mismo ángulo θ que \mathbf{r} . Por lo tanto, respecto al observador O , el campo eléctrico yace también en la dirección radial. Sin embargo, el campo ya no es esféricamente simétrico con respecto a O . Un cálculo simple y directo (ver el ejemplo 15.14) muestra que

$$\mathcal{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{1 - v^2/c^2}{[(1 - v^2/c^2) \sin^2 \theta]^{3/2}} \mathbf{u}_r. \quad (15.64)$$

El factor que contiene $\sin \theta$ hace que el campo eléctrico dependa de la dirección del vector de posición \mathbf{r} . Así, a distancias iguales de la carga, el campo eléctrico es más fuerte en el plano ecuatorial ($\theta = \pi/2$), perpendicular a la dirección del

movimiento, que según la dirección del mismo ($\theta = 0$). Esto contrasta con el campo eléctrico producido por una carga en reposo, el cual es esféricamente simétrico. Esta situación se ha ilustrado en la fig. 15-45(a) y (b), donde el espaciamiento de las líneas indica la intensidad del campo.

Usando la relación $\mathcal{B} = \mathbf{v} \times \mathcal{E}/c^2$ que, según hemos demostrado, tiene validez general, y empleando la ec. (15.64) para \mathcal{E} , encontramos que el campo magnético de una carga en movimiento es

$$\mathcal{B} = \frac{\mu_0 q}{4\pi r^2} \frac{1 - v^2/c^2}{[1 - (v^2/c^2) \operatorname{sen}^2 \theta]^{3/2}} \mathbf{v} \times \mathbf{u}_r. \quad (15.65)$$

Esta expresión se reduce a la no relativista, ec. (15.53), cuando v es muy pequeña con respecto a c . Se debe tener en cuenta que las ecs. (15.64) y (15.65) son válidas solamente para una carga en movimiento uniforme. Si la carga está acelerada, el campo eléctrico tiene una forma similar a la mostrada en la fig. 15-45(c) y las expresiones matemáticas son más complejas.

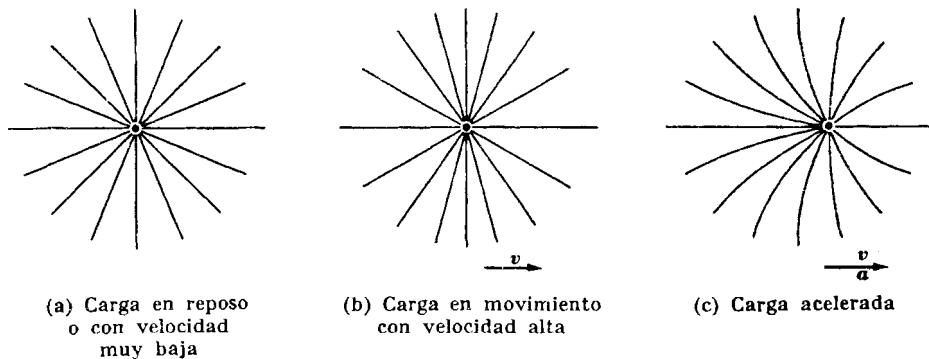


Fig. 15-45. Líneas de fuerza eléctricas de una carga en reposo y en movimiento.

El hecho de que la ec. (15.65) sea diferente de la ec. (15.53), que se derivó de la ley de Ampere-Laplace (15.37), puede hacer pensar al estudiante que la ec. (15.37) es a su vez una aproximación no relativista a una ley más general. Sin embargo, esta impresión es errónea ya que, como se señaló en la sección 15.11, la ec. (15.37) tiene validez general. La dificultad aparente se debe a que el camino seguido para ir de la ec. (15.37) a la ec. (15.55) usando la ec. (15.52), no es único. Esto se debe al hecho de que una sola carga en movimiento no constituye una corriente cerrada, mientras que la ec. (15.37) es aplicable sólo a corrientes cerradas. Por ejemplo, si usamos la expresión (15.65) en la ec. (15.52) correspondiente a un chorro de partículas cargadas moviéndose en línea recta, obtenemos la expresión (15.41) para el campo de una corriente rectilínea. Este cálculo, que omitimos, muestra la compatibilidad de la teoría.

EJEMPLO 15.14. Deducir la ec. (15.64) para el campo eléctrico de una carga en movimiento uniforme.

Solución: Notando en la fig. 15.44(a) que ϵ' forma un ángulo θ' con $O'X'$ y que $\cos \theta' = x'/r'$, $\sin \theta' = y'/r'$, tenemos que las componentes de ϵ' son

$$\epsilon'_x = \epsilon' \cos \theta' = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x'}{r'^3}, \quad \epsilon'_y = \epsilon' \sin \theta' = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{y'}{r'^3}. \quad (15.66)$$

Teniendo en cuenta la ec. (15.62) y que, según la transformación de Lorentz, $x = x' \sqrt{1 - v^2/c^2}$ e $y = y'$, podemos escribir las componentes del campo ϵ observado por O en la forma

$$\begin{aligned}\epsilon_x &= \epsilon'_x = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{\sqrt{1 - v^2/c^2} r'^3}, \\ \epsilon_y &= \frac{\epsilon'_y}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{y}{\sqrt{1 - v^2/c^2} r'^3}.\end{aligned}$$

Es decir, en forma vectorial,

$$\epsilon = \frac{qr}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{1 - v^2/c^2} r'^3}, \quad (15.67)$$

la cual muestra que el campo ϵ es radial en el sistema de referencia $X Y Z$. Ahora bien

$$r'^2 = x'^2 + y'^2 = \frac{x^2}{1 - v^2/c^2} + y^2 = \frac{r^2 - (v^2/c^2)y^2}{1 - v^2/c^2}$$

y además $y^2 = r^2 \sin^2 \theta$. Por lo tanto

$$r' = \frac{r[1 - (v^2/c^2) \sin^2 \theta]^{1/2}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Usando esta relación para eliminar r' en la ec. (15.67), obtenemos finalmente

$$\epsilon = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \frac{(1 - v^2/c^2)r}{[1 - (v^2/c^2) \sin^2 \theta]^{3/2}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{1 - v^2/c^2}{[1 - (v^2/c^2) \sin^2 \theta]^{3/2}} u_r,$$

que es precisamente el resultado obtenido anteriormente.

EJEMPLO 15.15. Discutir la posible interacción magnética entre un electrón orbital y el núcleo de un átomo.

Solución: Consideremos (fig. 15.46) un electrón cuya carga es $-e$ girando con velocidad v alrededor de un núcleo de carga $+Ze$. Su trayectoria con respecto al núcleo es la curva ilimitada que, para simplificar, suponemos que es una circunferencia. Pero si referimos los movimientos a un sistema de coordenadas fijo al electrón, éste estará en reposo y el núcleo parecerá estar describiendo la trayectoria de trazos, también una circunferencia, con velocidad $-v$. Despreciando la aceleración del electrón (el estudiante deberá ser capaz de calcularla y juzgar lo razonable que es esta suposición), podemos considerar que este nuevo sistema es inercial. El núcleo produce, pues, con respecto al electrón, un campo eléctrico cuya expresión no relativista es $\epsilon = (Ze/4\pi\epsilon_0 r^2)u_r$, y un campo magnético relacionado con ϵ por la ec. (15.54)

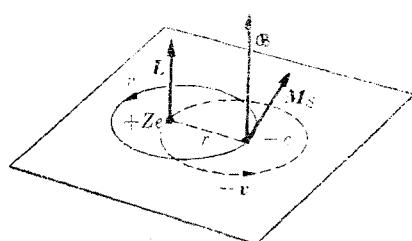


Fig. 15.46. Interacción espín-órbita de un electrón que se mueve alrededor de un núcleo positivo.

con $-\mathbf{v}$ en vez de \mathbf{v} . Es decir,

$$\mathcal{B} = \frac{1}{c^2} (-\mathbf{v}) \times \mathcal{E} = \frac{1}{c^2} \mathcal{E} \times \mathbf{v} = \frac{Ze}{4\pi\epsilon_0 c^2 r^3} \mathbf{u}_r \times \mathbf{v}.$$

Pero el momentum angular del electrón respecto al núcleo es $\mathbf{L} = m\mathbf{r} \times \mathbf{v} = m\mathbf{r}\mathbf{u}_r \times \mathbf{v}$. Despejando $\mathbf{u}_r \times \mathbf{v}$ y reemplazando en la expresión de \mathcal{B} y \mathbf{L} , obtenemos

$$\mathcal{B} = \frac{Ze}{4\pi\epsilon_0 c^2 m r^3} \mathbf{L}.$$

En consecuencia el campo magnético producido por el movimiento relativo del núcleo es proporcional y paralelo al momentum angular del electrón, como se indica en la figura.

Como \mathcal{B} es un campo magnético referido a un sistema en el cual el electrón está en reposo, no da origen a ninguna interacción con el movimiento orbital del electrón. Pero el electrón tiene un momento magnético \mathbf{M}_s debido a su espín, de modo que la interacción magnética del electrón con el campo magnético nuclear es, empleando las ecs. (15.22) y (15.29),

$$\begin{aligned} E_p &= -\mathbf{M}_s \cdot \mathcal{B} = -\left(\gamma \frac{e}{2m} \mathbf{S}\right) \cdot \left(\frac{Ze}{4\pi\epsilon_0 c^2 m r^3} \mathbf{L}\right) = - \\ &= -\frac{\gamma Ze^2}{8\pi\epsilon_0 c^2 m^2 r^3} \mathbf{S} \cdot \mathbf{L}. \end{aligned}$$

El aspecto más importante de este resultado es que la interacción magnética depende de la orientación relativa del espín \mathbf{S} y el momentum angular orbital \mathbf{L} del electrón. Es por esa razón que se denomina *interacción espín-órbita* y se designa a menudo por $E_{p,SL}$. Un cálculo relativista más detallado indica que el valor de $E_{p,SL}$ es la mitad del valor obtenido más arriba.

Estimaremos a continuación su orden de magnitud. Recordemos que según la tabla del ejemplo 15.6 se tiene que para el electrón, γ es aproximadamente -2 . Además, según la ec. (14.40), la energía del electrón en una órbita circular es, en la aproximación de orden cero, $E = -Ze^2/4\pi\epsilon_0(2r)$. Por lo tanto, después de corregir $E_{p,SL}$ con el factor un medio mencionado antes, podemos escribir

$$E_{p,SL} \approx \frac{E}{c^2 m^2 r^3} \mathbf{S} \cdot \mathbf{L}.$$

Pero el módulo de \mathbf{L} es mrv y podemos suponer que el de \mathbf{S} es del mismo orden de magnitud. Luego, $\mathbf{S} \cdot \mathbf{L}$ es aproximadamente $(mrv)^2$. Haciendo la sustitución, obtenemos

$$E_{p,SL} \approx \frac{v^2}{c^2} |\mathbf{E}|.$$

Comparado este valor con el resultado del ejemplo 14.10, concluimos que la interacción espín-órbita de un electrón orbital es del mismo orden de magnitud que la corrección relativista a su energía. Sin embargo, la interacción espín-órbita tiene la particularidad de que presenta un efecto direccional nítido a causa del factor $\mathbf{S} \cdot \mathbf{L}$, que depende de la orientación relativa de \mathbf{L} y \mathbf{S} .

Un análisis cuidadoso de los niveles de energía de un electrón en un átomo muestra que \mathbf{S} puede tener sólo dos orientaciones respecto a \mathbf{L} , paralelo o antiparalelo, lo cual está de acuerdo con la discusión que hicimos al final del ejemplo 15.7. En consecuencia, la interacción espín-órbita desdobra cada nivel de energía de un electrón en pares (o dobletes) de niveles muy cercanos.

15.14 Interacción electromagnética entre dos cargas en movimiento

Podemos notar a esta altura que en nuestro estudio de las interacciones magnéticas nos hemos apartado del procedimiento seguido en los capítulos 13 y 14 para las interacciones gravitacional y eléctrica. En aquellos capítulos comenzamos estudiando la interacción entre dos partículas, introduciendo luego el concepto de campo. En este capítulo, en cambio, introdujimos primero el concepto de campo magnético en forma operacional, hablando de la fuerza (15.1) que se ejerce sobre una carga en movimiento. Luego calculamos los campos magnéticos producidos por *corrientes cerradas*. Hicimos esto por medio de la ec. (15.37), de la cual [si usamos también la ec. (15.1)] podemos obtener la fuerza magnética que una corriente eléctrica produce sobre otra o sobre una carga en movimiento. Pero hasta ahora no hemos dado ninguna expresión para la interacción electromagnética entre dos cargas en movimiento. Una de las razones de esta diferencia de procedimiento es la siguiente: las interacciones gravitacional y eléctrica estudiadas en los capítulos 13 y 14, respectivamente, dependen exclusivamente de la distancia entre las dos partículas que interactúan; es decir, son *fuerzas estáticas*. La interacción puede existir entre partículas en reposo y la situación física se puede entonces discutir en condiciones estacionarias o *independientes del tiempo*. Por el contrario, la interacción magnética depende del movimiento de las partículas en interacción, o sea que es una *fuerza dependiente de la velocidad*. En un punto dado, el campo magnético de una carga que se mueve respecto al observador depende de la velocidad de la carga además de depender de la distancia entre la misma y el observador. Pero la distancia está cambiando, puesto que la carga se mueve, y en consecuencia el campo magnético (así como el campo eléctrico) en un punto dado está variando en el tiempo; es decir, respecto al observador, el campo magnético de la carga en movimiento es *dependiente del tiempo*.

Un nuevo elemento entra entonces en la imagen física: la *velocidad de propagación de una interacción*. Un modo posible de encarar el problema es suponer

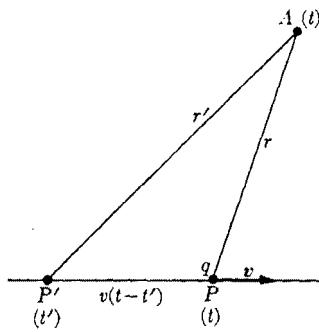


Fig. 15-47. Efecto de retardo debido a la velocidad finita de propagación de los campos electromagnéticos.

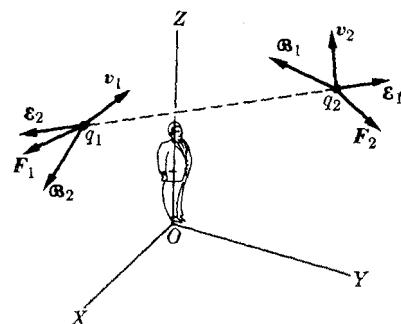


Fig. 15-48. Interacción electromagnética entre dos cargas en movimiento.

que las partículas *interactúan a distancia*; es decir, si la carga q (fig. 15.47) se mueve con velocidad v , el campo electromagnético que q produce en A al tiempo t es el resultado de la situación física en el espacio circundante debida a la presencia de la carga en la posición P al tiempo t , *simultáneamente con la observación en A*. En otras palabras, podemos suponer que la interacción electromagnética *se propaga instantáneamente* o con velocidad infinita.

Otra suposición razonable es que la interacción electromagnética es el resultado de ciertas "señales" intercambiadas por las partículas interactantes, y que la "señal" *se propaga con velocidad finita c*, lo cual requiere un cierto tiempo para alcanzar un punto dado en el espacio. Si la carga está en reposo, la velocidad finita de propagación de la "señal" no tiene importancia ya que las circunstancias físicas no están variando en el tiempo. Pero para una carga en movimiento la situación es diferente y el campo que se observa en el punto A al tiempo t no corresponde a la posición simultánea de la carga en P , sino a una posición anterior, o *retardada*, P' al tiempo t' , tal que $t - t'$ es el tiempo que tarda la señal en ir de P' a A con velocidad c . Evidentemente $P'P = v(t - t')$.

Como veremos en el capítulo 19 y lo mencionamos ya en varias ocasiones, las interacciones electromagnéticas se propagan con la velocidad finita c dada por la ec. (15.55). Esto elimina la acción a distancia, por lo que el análisis del campo electromagnético producido por una carga en movimiento requiere el segundo de los enfoques dados más arriba. Como c tiene un valor tan grande, el efecto de retardo es despreciable a no ser que la partícula se mueva muy rápidamente. Es por esta razón que no se consideró el retardo cuando en el capítulo 14 estudiamos el movimiento de partículas cargadas. Se supuso que las cargas se movían muy lentamente, de modo que PP' fuera muy pequeño comparado con PA . Un efecto similar de retardo debiera existir para la interacción gravitacional entre masas en movimiento relativo; sin embargo, aún no se ha determinado la velocidad de propagación de señales gravitacionales.

Al escribir la ec. (15.35) no tuvimos en cuenta los efectos de retardo porque una corriente eléctrica cerrada produce un campo magnético estacionario o independiente del tiempo. La razón de esto es que una corriente constante y cerrada es un chorro de partículas cargadas, y si éstas están espaciadas uniformemente y se mueven con la misma velocidad, la situación física que se observa es independiente del tiempo. Por otro lado, se puede verificar que las expresiones relativistas (15.58) y (15.60) para los campos eléctrico y magnético de una carga en movimiento, ya incluyen el efecto de retardo.

Consideremos ahora dos cargas q_1 y q_2 que se mueven con velocidades \mathbf{v}_1 y \mathbf{v}_2 respecto a un observador inercial O (fig. 15.48). La fuerza que la carga q_1 ejerce sobre q_2 es, de acuerdo con lo que O mide, $\mathbf{F}_2 = q_2(\mathcal{E}_1 + \mathbf{v}_2 \times \mathcal{B}_1)$, donde \mathcal{E}_1 y \mathcal{B}_1 son los campos eléctrico y magnético debidos a q_1 que O mide en la posición ocupada por q_2 . Por otra parte, la fuerza que la carga q_2 ejerce sobre q_1 es, según las medidas de O , $\mathbf{F}_1 = q_1(\mathcal{E}_2 + \mathbf{v}_1 \times \mathcal{B}_2)$. Comparemos primeramente las partes magnéticas de \mathbf{F}_1 y \mathbf{F}_2 . El término $\mathbf{v}_2 \times \mathcal{B}_1$ es perpendicular al plano determinado por \mathbf{v}_2 y \mathcal{B}_1 , mientras que $\mathbf{v}_1 \times \mathcal{B}_2$ es perpendicular al plano de \mathbf{v}_1 y \mathcal{B}_2 . En consecuencia, estos términos tienen en general dirección y módulo diferentes. En vista de la ec. (15.64), las partes eléctricas de \mathbf{F}_1 y de \mathbf{F}_2 tienen también diferente

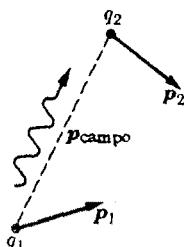
módulo y, si las cargas están aceleradas, direcciones diferentes. Concluimos por lo tanto que

las fuerzas entre dos cargas en movimiento no son iguales en módulo ni actúan en direcciones opuestas.

En otras palabras: la ley de acción y reacción no es válida en presencia de interacciones magnéticas. Esto implica a su vez la conservación del momentum, del momentum angular y de la energía no serían válidos para un sistema de dos partículas en movimiento. Este fracaso *aparente* de leyes tan importantes se debe al hecho siguiente: cuando en el capítulo 7 escribimos la ley de conservación del momentum en la forma $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \text{const.}$, estábamos considerando que O media *simultáneamente* \mathbf{p}_1 y \mathbf{p}_2 ; sin embargo, en presencia de una interacción que se propaga con velocidad finita, el efecto de retardo requiere que la rapidez con que cambia el momentum de una partícula en un instante dado no esté relacionada con la del momentum de la otra partícula en el mismo instante, sino con la *correspondiente a un instante anterior*, e inversamente. No podemos esperar, entonces, que $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$ sea constante si los momenta se determinan al mismo tiempo.

El estudiante recordará que, según la sección 7.4, podemos describir el resultado de una interacción como un intercambio de momentum entre las dos partículas.

Para restaurar la ley de conservación del momentum, debemos incluir el momentum que se está intercambiando entre las dos partículas y que, en un instante dado, está viajando entre ellas con una velocidad finita. Esto es, tenemos que tener en cuenta el momentum "en vuelo". Decimos que el campo electromagnético transporta este momentum y lo designamos con $\mathbf{p}_{\text{campo}}$ (fig. 15-49). Por lo tanto la ley de conservación del momentum requiere que



$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_{\text{campo}} = \text{const.} \quad (15.68)$$

Figura 15-49

Análogamente, debemos atribuir un cierto momentum angular y una cierta energía al campo electromagnético a fin de restaurar los dos principios de conservación correspondientes. Pospondremos hasta el capítulo 19 la discusión de cómo se obtienen el momentum, el momentum angular y la energía asociados con el campo electromagnético.

El estudiante recordará que en la sección 7.7, cuando presentamos una apreciación crítica del concepto de fuerza, señalamos que la ec. (7.5) se debía considerar sólo como preliminar, sujeta a una consideración ulterior de la mecánica de la interacción. Esta revisión se ha incorporado ahora en la ec. (15.68). Es por esto que el concepto de fuerza adquiere importancia secundaria y es necesario desarrollar técnicas especiales para analizar el movimiento de dos partículas en interacción.

EJEMPLO 15.16. Comparar la interacción magnética entre dos cargas con la interacción eléctrica entre las mismas.

Solución: Como queremos sólo órdenes de magnitud, simplificaremos la escritura de las fórmulas. Luego, dadas las cargas q y q' , podemos decir que la fuerza eléctrica ejercida por q' sobre q es qc^2 . El campo magnético producido por q' en q es, si empleamos la ec. (15.54), del orden de magnitud de $v'c/c^2$. La fuerza magnética sobre la carga q es, usando la ec. (15.1), del orden de magnitud de $qv(v'c/c^2) = (vv'/c^2)qc^2$. Por lo tanto

$$\frac{\text{fuerza magnética}}{\text{fuerza eléctrica}} \approx \frac{vv'}{c^2}.$$

Así, si las velocidades son pequeñas respecto a la velocidad c de la luz, la fuerza magnética es despreciable frente a la fuerza eléctrica y se puede ignorar en muchos casos. En cierto modo, podemos decir que el magnetismo es una consecuencia de la velocidad finita de propagación de las interacciones electromagnéticas. Por ejemplo, si las cargas tienen una velocidad del orden de 10^8 m s^{-1} , que corresponde a la velocidad orbital de los electrones en los átomos, tenemos que

$$\frac{\text{fuerza magnética}}{\text{fuerza eléctrica}} \approx 10^{-4}.$$

A pesar de su valor pequeño respecto al de la fuerza eléctrica, la fuerza magnética es la que se usa en los motores eléctricos y otras aplicaciones tecnológicas, por la siguiente razón. La materia es normalmente neutra eléctricamente por lo que la fuerza eléctrica neta entre dos cuerpos es cero. Por ejemplo, cuando se ponen dos alambres juntos la fuerza eléctrica resultante entre ellos es nula. Si se mueven los alambres, las cargas positivas y negativas se mueven en el mismo sentido, por lo que la corriente total en cada uno es cero, siendo entonces cero la fuerza magnética resultante también. No hay por lo tanto ninguna fuerza entre los alambres. Pero si se aplica una diferencia de potencial a los alambres, lo cual origina un movimiento de las cargas negativas respecto a las positivas, se produce una corriente neta en cada alambre que da como resultado un campo magnético. Como el número de electrones libres en un conductor es muy grande, su efecto acumulado produce, aunque sus velocidades sean pequeñas, un gran campo magnético que da como resultado una fuerza magnética apreciable entre los alambres.

Aunque la fuerza magnética es débil comparada con la eléctrica, es todavía muy fuerte comparada con la gravitacional. Recordando la discusión que hicimos en la sección 14.6, podemos decir que

$$\frac{\text{interacción magnética}}{\text{interacción gravitacional}} \approx 10^{36} \frac{vv'}{c^2}.$$

Para velocidades comparables a las de los electrones orbitales, este cociente es del orden de 10^{32} .

Bibliografía

1. "Radiation Belts Around the Earth", J. Van Allen; *Sci. Am.*, marzo 1959, pág. 39
2. "Radiation Belts", B. O'Brien; *Sci. Am.*, mayo 1963, pág. 84
3. "The Mass Spectrometer", A. Nier; *Sci. Am.*, marzo 1953, pág. 68
4. "200 Man-Years of Life; The Story of E. O. Lawrence", D. Wilkes; *The Physics Teacher* 3, 247 (1965)
5. "Particle Accelerators", R. Wilson; *Sci. Am.*, marzo 1958, pág. 64

6. "Early History of the Cyclotron", M. S. Livingston y A. E. McMillan; *Physics Today*, octubre 1959, pág. 18
7. "Strong Magnetic Fields", H. Furth, et al.; *Sci. Am.*, febrero 1958, pág. 28
8. "The Magnetism of the Sun", H. Babcock; *Sci. Am.*, febrero 1960, pág. 52
9. "Magnetic Monopoles", R. Ford; *Sci. Am.*, diciembre 1963, pág. 122
10. "Resource Letter FC-1 on the Evolution of the Electromagnetic Field Concept", W. Scott; *Am. J. Phys.* 31, 819 (1963)
11. *The Discovery of the Electron*, D. Anderson. Van Nostrand, Momentum Books, Princeton, N. J., 1964
12. *Foundations of Electromagnetic Theory*, J. R. Reitz y F. J. Milford. Addison-Wesley, Reading Mass., 1960, secs. 8.1 a 8.4
13. *Great Experiments in Physics*, Morris Shamos, editor. Holt, Rinehart and Winston, New York, 1959, cap. 5, Coulomb; cap. 9, Oersted
14. *The Feynman Lectures on Physics*, R. Feynman, R. Leighton y M. Sands. Addison-Wesley, Reading, Mass., 1963, vol. I, cap. 39; vol. II, caps. 1, 13, 26, 27 y 29
15. *Source Book in Physics*, W. F. Magie. Harvard University Press, Cambridge, Mass., 1963, pág. 387, Gilbert; pág. 408, Coulomb; pág. 436, Oersted; pág. 541, Hall
16. *Foundations of Modern Physical Science*, G. Holton y D. H. D. Roller. Addison-Wesley, Reading Mass., 1958, secs. 28.4 a 28.7

Problemas

- 15.1 Un electrón con una velocidad de 10^6 m s^{-1} entra a una región donde hay un campo magnético. Encontrar la intensidad del campo magnético si el electrón describe una trayectoria de radio 0,1 m. Encontrar también la velocidad angular del electrón.
- 15.2 Se aceleran protones a través de una diferencia de potencial de 10^6 V partiendo del reposo. Luego se los inyecta en una región donde hay un campo magnético uniforme de 2 T, con la trayectoria perpendicular al campo. ¿Cuál será el radio de la trayectoria y la velocidad angular de los protones?
- 15.3 Un protón se mueve en un campo magnético a un ángulo de 30° respecto al campo. La velocidad es 10^7 m s^{-1} y la intensidad del campo es 1,5 T. Calcular (a) el radio de la hélice descrita, (b) la distancia que avanza por revolución, o paso de la hélice, y (c) la frecuencia de rotación en el campo.
- 15.4 Un deuterón (isótopo del hidrógeno de masa muy cercana a 2 umas) describe una órbita circular de 40 cm de radio en un campo magnético de 1,5 T.
- (a) Calcular la velocidad del deuterón.
 (b) Determinar el tiempo que tarda en dar media revolución. (c) ¿A través de qué diferencia de potencial se debería acelerar el deuterón para que adquiera la velocidad de la parte (a)?
- 15.5 Un protón que tiene una energía cinética de (a) 30 MeV, (b) 30 GeV se mueve perpendicularmente a un campo magnético de 1,5 T. Determinar en cada caso el radio de la trayectoria y el periodo de revolución. Notar que en (a) el protón se puede tratar clásicamente y en (b) se debe tratar en forma relativista.
- 15.6 ¿Cuál es el campo magnético que se requiere para que un protón de 30 GeV describa una trayectoria de 100 m de radio? Encontrar también la velocidad angular. Notar que el cálculo debe ser relativista.
- 15.7 Un ion de ${}^7\text{Li}$ con carga $+e$ tiene una masa de $1,2 \times 10^{-26} \text{ kg}$. Se lo acelera a través de una diferencia de potencial de 500 V y entra luego en un campo

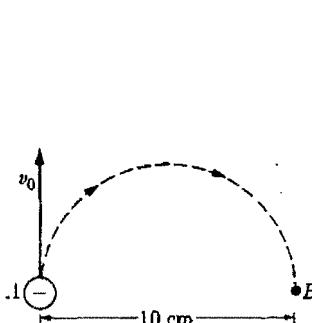


Figura 15-50

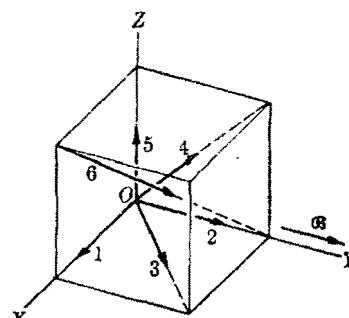


Figura 15-51

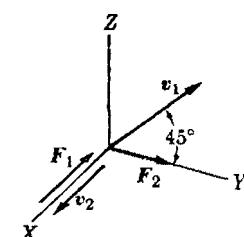


Figura 15-52

magnético de 0,40 T moviéndose perpendicularmente al mismo. ¿Cuál es el radio de su trayectoria en el campo magnético?

15.8 Un electrón en el punto *A* de la fig. 15-50 tiene una velocidad v_0 de 10^7 m s^{-1} . Calcular (a) el módulo y la dirección del campo magnético que hará que el electrón siga el camino semicircular de *A* a *B*, (b) el tiempo que tarda el electrón en moverse de *A* a *B*.

15.9 Uno de los procesos para separar los isótopos ^{236}U y ^{238}U se basa en la diferencia en el radio de sus trayectorias en un campo magnético. Suponer que átomos de U simplemente ionizados parten de una fuente común y se mueven perpendicularmente a un campo magnético uniforme. Encontrar la máxima separación de los haces cuando el radio de curvatura del haz de ^{238}U es 0,50 m en un campo de 1,5 T, (a) si las energías son las mismas, (b) si las velocidades son las mismas. El superíndice a la izquierda del símbolo químico es el número másico que a los fines de este problema, se puede identificar con la masa del átomo en una.

15.10 Una tira delgada de cobre de 1,50 cm de ancho y 1,25 mm de espesor se coloca perpendicularmente a un campo magnético de 1,75 T. A lo largo de la tira hay una corriente de 100 A. Encontrar (a) el campo eléctrico transversal debido al efecto Hall, (b) la velocidad de arrastre de los electrones, (c) la fuerza transversal sobre los electrones. Suponer que cada átomo de cobre contribuye con un electrón.

15.11 Un campo magnético uniforme \mathbf{B} está en la dirección OY , como se muestra en la fig. 15-51. Encontrar el módulo y la dirección de la fuerza que experimenta una carga q , cuya velocidad instantánea es \mathbf{v} , para cada una de las direcciones que se muestran en la figura. (La figura es un cubo).

15.12 Una partícula de masa m y carga q se mueve con velocidad v_0 perpendicularmente a un campo magnético uniforme. Expresar, en función del tiempo, las componentes de la velocidad y las coordenadas de la partícula referidas al centro de la trayectoria. Repetir el problema para una partícula cuya velocidad forma un ángulo α con el campo magnético.

15.13 Una partícula tiene una carga de $4 \times 10^{-8} \text{ C}$. Cuando se mueve con una velocidad v_1 de $3 \times 10^4 \text{ m s}^{-1}$ a 45° por encima del eje Y en el plano YZ , un campo magnético uniforme ejerce una fuerza F_1 según el eje X . Cuando la partícula se mueve con una velocidad v_2 de $2 \times 10^4 \text{ m s}^{-1}$ según el eje X , se ejerce sobre ella una fuerza F_2 de $4 \times 10^{-5} \text{ N}$ según el eje Y . ¿Cuáles son el módulo y la dirección del campo magnético? (Ver fig. 15-52.)

15.14 Se disparan partículas cargadas dentro de una región donde hay un campo eléctrico y uno magnético cruzados. La velocidad de las partículas incidentes es normal al plano de los dos campos y éstos son perpendiculares entre sí. La intensidad del campo magnético es 0,1 T. El campo eléctrico está generado por un par de placas paralelas

iguales y de carga opuesta, colocadas a 2 cm una de otra. Cuando la diferencia de potencial entre las placas es 300 V, no hay desviación de las partículas. ¿Cuál es la velocidad de las partículas?

15.15 (a) ¿Cuál es la velocidad de un haz de electrones cuando la influencia simultánea de un campo eléctrico de intensidad $3,4 \times 10^5 \text{ V m}^{-1}$ y de un campo magnético de 2,0 T perpendicular a él y al haz, no produce desviación alguna de los electrones? (b) Mostrar en un diagrama la orientación relativa de los vectores e , \mathcal{E} y B . (c) ¿Cuál es el radio de la órbita electrónica cuando se suprime el campo eléctrico?

15.16 Una partícula de masa $5,0 \times 10^{-26} \text{ kg}$ tiene una carga de $2,5 \times 10^{-8} \text{ C}$. Se le imprime una velocidad inicial horizontal de $6,0 \times 10^4 \text{ m s}^{-1}$. ¿Cuáles son el módulo y la dirección del campo magnético mínimo que inantendrá la partícula moviéndose en una dirección horizontal, equilibrando la fuerza gravitacional de la tierra?

15.17 En un espectrómetro de masas tal como el que se ilustra en la fig. 15-12, una diferencia de potencial de 1000 V hace que iones de ^{24}Mg con carga $+e$ describan una trayectoria de radio R . (a) ¿Cuál será el radio de la trayectoria describida por los iones de ^{25}Mg si se les acelera a través del mismo potencial? (b) ¿Qué diferencia de potencial haría que los iones de ^{25}Mg describieran una trayectoria del mismo radio R ? (Suponer que las masas son, en una, iguales al número másico indicado como superíndice a la izquierda del símbolo químico.)

15.18 Un espectrómetro de masas tiene un voltaje acelerador de 5 KV y un campo magnético de 10^{-2} T . Encontrar la distancia entre los dos isótopos ^{66}Zn y ^{70}Zn del zinc. Por distancia entendemos la separación de las dos manchas que aparecen en la emulsión de la placa fotográfica después que los iones de ^{66}Zn y ^{70}Zn con carga $+e$ son acelerados primero y luego obligados a describir una semicircunferencia. Ver fig. 15-12. [Sugerencia: no calcular cada uno de los radios sino obtener una ecuación que dé directamente la separación. (c) Calcular la velocidad de los iones para ver si

será necesario hacer una corrección relativista.]

15.19 El espectrómetro de masas de Dempster, ilustrado en la fig. 15-12, emplea un campo magnético para separar iones que tienen masas diferentes pero la misma energía. El *espectrómetro de masas de Bainbridge* (fig. 15-53) es otro dispositivo posible que separa iones que tienen la misma velocidad. Después de atravesar las rendijas, los iones pasan por un selector de velocidades compuesto de un campo eléctrico \mathcal{E} producido por las placas cargadas P y P' , y de un campo magnético B perpendicular al campo eléctrico. Los iones que pasan a través de los campos cruzados sin desviarse, entran en una región donde hay un segundo campo magnético B' describiendo órbitas semicirculares. Una placa fotográfica F registra su llegada. Demostrar que $q/m = \mathcal{E}/rBB'$.

15.20 El campo eléctrico entre las placas del selector de velocidades de un espectrómetro de masas de Bainbridge es $1,2 \times 10^5 \text{ V m}^{-1}$ y ambos campos magnéticos son de 0,60 T. Un haz de iones de neón con carga $+e$ se mueve

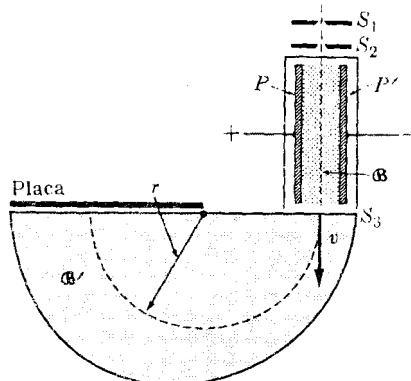


Figura 15-53

en una trayectoria circular de 7,4 cm de radio en el campo magnético. Determinar la masa del isótopo de neón.

15.21 Suponer que la intensidad eléctrica entre las placas P y P' de la fig. 15-53 es $1,5 \times 10^4 \text{ V m}^{-1}$ y que ambos campos magnéticos son de 0,50 T. Si la fuente contiene los tres isótopos

^{24}Mg , ^{25}Mg y ^{26}Mg del magnesio y los iones tienen carga $+e$, encontrar la distancia entre las líneas formadas por los tres isótopos sobre la placa fotográfica. Suponer que las masas atómicas de los isótopos son, en una, iguales a sus números másicos indicados a la izquierda del símbolo químico.

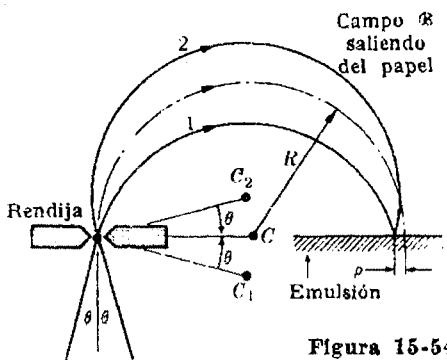


Figura 15-54

15.22 En un espectrómetro de masas tal como el que se muestra en la fig. 15-54, es difícil asegurar que todas las partículas llegan perpendicularmente a la rendija. Si R es el radio de la trayectoria, demostrar que las partículas que llegan a la rendija formando un pequeño ángulo θ con la normal llegarán a la placa fotográfica a una distancia r (aproximadamente igual a $R\theta^2$) de las que inciden perpendicularmente. ¿Cuál es el valor de θ para el cual esta separación es menor que 0,1% de $2R$? (La situación descrita en este problema se denomina *enfoque magnético*.)

15.23 En el espectrómetro de masas de la fig. 15-55, los iones acelerados por una diferencia de potencial entre S y A entran en el campo magnético que cubre un sector de 60° y son enviados a una emulsión fotográfica. Demostrar que $q/m = 32 \text{ V}/\theta^2 D^2$. Estudiar los cambios de posición de C para pequeñas desviaciones de la dirección de incidencia.

15.24 En determinado ciclotrón, los protones describen una circunferencia de 0,40 m de radio poco antes de emerger. La frecuencia del potencial alterno entre las des es 10^7 Hz. Despreciando efectos relativistas, calcular (a) el campo magnético, (b) la velocidad de los pro-

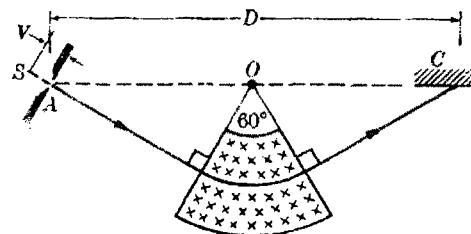


Figura 15-55

tones, (c) la energía de los protones en J y en MeV, (d) el número mínimo de vueltas completas de los protones si el valor máximo del potencial entre las des es 20 000 V.

15.25 Repetir el problema precedente para un deuterón y para una partícula alfa (núcleo de helio). Sus masas son 2,014 una y 4,003 una, respectivamente.

15.26 El campo magnético de un ciclotrón que acelera protones es 1,5 T. (a) ¿Cuántas veces por segundo se debe invertir el potencial entre las des? (b) El radio máximo del ciclotrón es 0,35 m. ¿Cuál es la velocidad máxima del protón? (c) ¿A través de qué diferencia de potencial se tendría que acelerar el protón para imprimirle la velocidad máxima que da el ciclotrón?

15.27 En un ciclotrón, los deuterones describen una circunferencia de 32,0 cm de radio inmediatamente antes deemerger de las des. La frecuencia del voltaje alterno aplicado es 10^7 Hz. Hallar, (a) el campo magnético, (b) la energía y velocidad de los deuterones alemerger. La masa de un deuterón es 2,014 una.

15.28 Un tubo de rayos catódicos se coloca en un campo magnético uniforme \mathcal{B} de modo que el eje del tubo sea paralelo a las líneas de fuerza. Si los electrones que emergen del cañón con una velocidad v forman un ángulo θ con el eje cuando pasan por el origen O , de modo que su trayectoria sea una hélice, demostrar (a) que tocarán nuevamente el eje al tiempo $t = 2\pi m/Bq$, (b) que la coordenada del punto de intersección es $x = 2\pi mv \cos \theta/Bq$, y (c) que para pequeños valores de θ la coordenada del punto de intersección con el eje es independiente de θ . (d) El dispositivo de este

problema se denomina *lente magnética*: ¿por qué? (e) ¿En qué difieren las trayectorias de los electrones que pasan por el origen formando un ángulo θ por encima del eje y las de los que pasan formando el mismo ángulo por debajo del eje?

15.29 Se inyectan protones de 3 MeV de energía a un cierto ángulo con respecto a un campo magnético uniforme de 1 T. ¿A qué distancia volverán las partículas a un punto común de intersección con el eje?

15.30 Una partícula de carga q y velocidad v_0 (según el eje X) entra en una región donde hay un campo magnético (según el eje Y). Mostrar que, si la velocidad v_0 es suficientemente grande como para que el cambio de dirección sea despreciable y la fuerza magnética se pueda considerar constante y paralela al eje Z , la ecuación de la trayectoria de la partícula es $z = (q\beta/2v_0m)x^2$.

15.31 Una partícula de carga q y velocidad v_0 (según el eje X) entra en una región (fig. 15-56) donde hay un campo eléctrico y uno magnético uniformes en la misma dirección (según el eje Y). Demostrar que si la velocidad v_0 es suficientemente grande como para que el cambio en su dirección sea despreciable y la

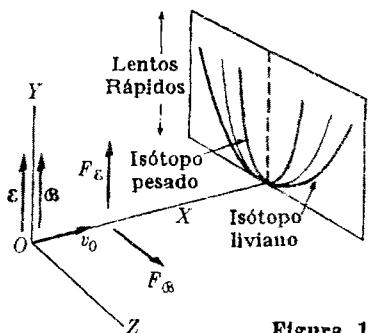


Figura 15-56

fuerza magnética se pueda considerar constante y paralela al eje Z , (a) las coordenadas al tiempo t son $x = v_0t$, $y = \frac{1}{2}(q\epsilon/m)t^2$ y $z = \frac{1}{2}(qv_0\beta/m)t^2$. (b) Eliminando t y v_0 de estas ecuaciones, obtener la relación $z^2/y = \frac{1}{2}(\beta^2/\epsilon)(q/m)^2x^2$. El resultado tiene aplicación en uno de los primeros espectrógrafos de masas que fueron diseñados, porque si pone-

mos una pantalla perpendicular al eje X , todas las partículas que tengan el mismo cociente q/m incidirán a lo largo de una parábola dada, independientemente de su velocidad inicial. Por lo tanto habrá una parábola para cada isótopo presente en el haz incidente.

15.32 Una partícula de carga q y masa m se mueve entre dos placas paralelas cargadas y separadas a una distancia h . Se aplica un campo magnético uniforme paralelo a las placas y dirigido como se indica en la fig. 15-57. Inicialmente la partícula está en reposo sobre la placa inferior. (a) Escribir las ecuaciones de

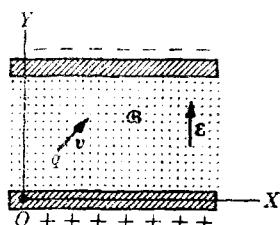


Figura 15-57

movimiento de la partícula. (b) Demostrar que a una distancia y de la placa inferior, $v_z = (q/m)\beta y$. (c) Demostrar que el módulo de la velocidad está dado por $v^2 = 2(q/m)\epsilon y$. (d) Con los dos resultados precedentes mostrar que $v_y = (q/m)^{1/2}[2\epsilon y - (q/m)\beta^2 y^2]^{1/2}$, y que la partícula pasará rasando la placa superior si $\epsilon = \frac{1}{2}(q/m)\beta^2 h$.

15.33 En una región donde hay un campo eléctrico y uno magnético uniformes y en la misma dirección, se inyecta una partícula de carga q y masa m con una velocidad v_0 en dirección perpendicular a la dirección común de los dos campos. (a) Escribir la ecuación de movimiento en coordenadas cartesianas. (b) Mostrar por sustitución directa en la ecuación de movimiento que las componentes de la velocidad al tiempo t son $v_x = v_0 \cos(q\beta/m)t$, $v_y = (q\epsilon/m)t$ y $v_z = \sin(q\beta/m)t$. (c) Del resultado precedente, obtener las coordenadas de la partícula al tiempo t . (d) Hacer un gráfico de la trayectoria. (e) ¿Cuál sería el movimiento de la partícula si la velocidad inicial de la misma fuera paralela a los campos? [Sugerencia: Para las respuestas dadas, el eje X está en la direc-

ción de v_0 y el eje Y está en la dirección común a los dos campos (fig. 15-58).]

15.34 En una cierta región hay un campo eléctrico y uno magnético uniformes y perpendiculares entre sí. Se inyecta una partícula con velocidad v_0 paralela al campo magnético. (a) Escribir la ecuación de movimiento de la partícula en coordenadas cartesianas.

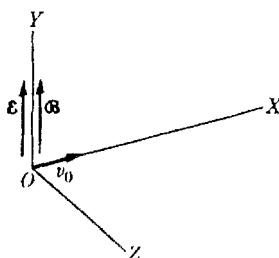


Figura 15-58

(b) Mostrar, por sustitución directa, que las componentes de la velocidad al tiempo t son $v_x = v_0$,

$$v_y = (\mathcal{E}/B) \operatorname{sen}(qB/m)t,$$

y

$$v_z = -(\mathcal{E}/B)[1 - \cos(qB/m)t].$$

(c) Del resultado precedente, obtener las coordenadas de la partícula al tiempo t .

(d) Hacer un gráfico de la trayectoria. [Sugerencia: El campo magnético está en la dirección del eje X y el eléctrico en la del eje Y .]

15.35 Resolver el problema 15.34 para una partícula cuya velocidad inicial es paralela al campo eléctrico. Verificar que las componentes de la velocidad son $v_x = 0$,

$$v_y = v_0 \cos(qB/m)t + (\mathcal{E}/B) \operatorname{sen}(qB/m)t,$$

y

$$v_z = -(\mathcal{E}/B)[1 - \cos(qB/m)t] - v_0 \operatorname{sen}(qB/m)t.$$

15.36 Resolver el problema 15.34 para una partícula cuya velocidad inicial es perpendicular a ambos campos. Verificar que las componentes de la velocidad son $v_x = 0$,

$$v_y = (\mathcal{E}/B + v_0) \operatorname{sen}(qB/m)t,$$

y

$$v_z = -(\mathcal{E}/B) + (\mathcal{E}/B + v_0) \cos(qB/m)t.$$

Demostrar que para que la partícula se mueva a través del campo sin desviarse, es necesario que $v_0 = -\mathcal{E}/B$. Comparar el resultado con lo dicho en la sección 15.4

15.37 Con referencia al problema 15.34, verificar que cuando la velocidad tiene una dirección inicial arbitraria, las componentes de la velocidad al tiempo t son $v_x = v_{0x}$,

$$v_y = (\mathcal{E}/B + v_{0y}) \operatorname{sen}(qB/m)t + v_{0y} \operatorname{cos}(qB/m)t,$$

y

$$v_z = -\mathcal{E}/B + (\mathcal{E}/B + v_{0z}) \cos(qB/m)t - v_{0z} \operatorname{sen}(qB/m)t.$$

Obtener (por integración) las coordenadas de la partícula y discutir la trayectoria. Comparar con los resultados de los problemas 15.35 y 15.36.

15.38 Con referencia al problema 15.33, (a) demostrar que cuando $(qB/m)t \ll 1$, las coordenadas de la partícula se pueden expresar en la forma $x = v_0 t$, $y = (q\mathcal{E}/2m)t^2$ y $z = (v_0 q B / 2m)t^3$, lo cual coincide con el resultado del problema 15.31.

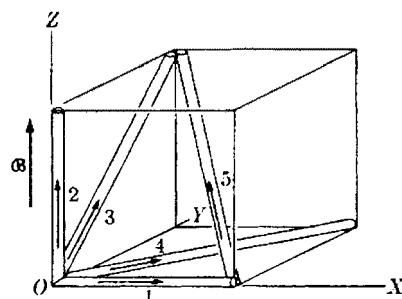


Figura 15-59

15.39 Encontrar la densidad de corriente (supuesta uniforme) que se requiere en un alambre horizontal de aluminio para hacerlo "flotar" en el campo magnético terrestre en el ecuador. La densidad del Al es $2.7 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$. Suponer que el campo magnético terrestre es de alrededor de $7 \times 10^{-5} \text{ T}$ y que

el alambre está orientado en la dirección este-oeste.

15.40 Encontrar la fuerza sobre cada uno de los segmentos de alambre que se muestran en la fig. 15-59 si el campo $B = 1,5 \text{ T}$ es paralelo a OZ e $I = 2,0 \text{ A}$. La arista del cubo mide 0,10 m.

15.41 El plano de una espira rectangular de alambre de $5,0 \text{ cm} \times 8,0 \text{ cm}$ es paralelo a un campo magnético de $0,15 \text{ T}$. (a) Si una corriente de 10 A circula por la espira, ¿qué torque actúa sobre ella? (b) ¿Cuál es el momento magnético de la espira? (c) ¿Cuál es el torque máximo que se puede obtener con esa corriente circulando por la misma longitud de alambre en este campo magnético?

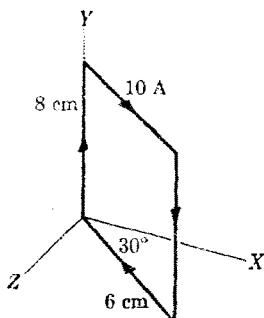


Figura 15-60

15.42 La espira rectangular de la fig. 15-60 puede girar alrededor del eje Y y lleva una corriente de 10 A en el sentido indicado. (a) Si la espira está en un campo magnético uniforme de $0,2 \text{ T}$ paralelo al eje X , calcular la fuerza en N sobre cada lado de la espira y el torque en N m requerido para mantener la espira en la posición que se muestra. (b) Lo mismo que en (a), excepto que la espira está en un campo paralelo al eje Z . (c) ¿Qué torque se requeriría si la espira pudiera girar alrededor de un eje paralelo al eje Y que pase por su centro?

15.43 La espira rectangular de alambre mostrada en la fig. 15-61 tiene una masa de $0,1 \text{ g}$ por centímetro de longitud y puede girar sin roce alrededor del lado AB . Por el alambre circula una corriente de 10 A en el sentido indicado. (a) Calcular el módulo y el sentido del campo magnético paralelo al eje Y , que hará que la espira gire hasta que su plano

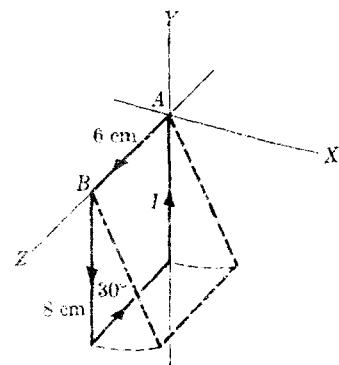


Figura 15-61

forme un ángulo de 30° con el plano YZ .

(b) Hacer el estudio para el caso en que el campo es paralelo al eje X .

15.44 ¿Cuál es el torque máximo sobre una bobina de $5 \text{ cm} \times 12 \text{ cm}$ compuesta de 600 vueltas cuando lleva una corriente de 10^{-5} A en un campo uniforme de $0,1 \text{ T}$?

15.45 La bobina de un galvanómetro de bobina móvil tiene 50 vueltas y encierra un área de 6 cm^2 . El campo magnético en la región en la cual se mueve la bobina es de $0,01 \text{ T}$ y es radial. La constante de torsión de la suspensión es $k = 10^{-6} \text{ N m/grado}$. Encontrar la desviación angular de la bobina para una corriente de 1 mA .

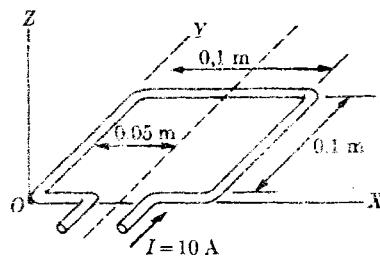


Figura 15-62

15.46 Una espira de alambre en forma de cuadrado de $0,1 \text{ m}$ de lado, yace sobre el plano XY , como se muestra en la fig. 15-62. En la espira hay una corriente de 10 A en el sentido indicado. Si se aplica un campo magnético paralelo al eje Z y de intensidad $B = 0,1x \text{ T}$ (donde x está en m), calcular (a) la fuerza re-

sultante sobre la espira y (b) el torque resultante respecto a O .

15.47 Repetir el problema precedente cuando se aplica el campo magnético según el eje X .

15.48 Una espira circular de radio a y corriente I está centrada en el eje Z y es perpendicular a él. Se produce un campo magnético con simetría axial alrededor del eje Z que forma un ángulo θ con el eje Z en puntos sobre la espira (fig. 15-63). (a) Encontrar, para cada uno de los sentidos posibles de la corriente, el módulo y la dirección de la fuerza. (b) Suponer que el circuito es tan pequeño que se puede considerar como un dipolo magnético y que el campo magnético sigue la ley de la inversa del cuadrado de la distancia ($B = k/r^2$). Demostrar que la fuerza sobre el circuito es $F = \pm M(d\beta/dr)$, donde M es su momento dipolar magnético que está orientado según el eje Z . Este resultado es general y muestra que un dipolo se moverá en la dirección en que el campo crece cuando está orientado según el campo y en sentido contrario cuando está orientado en sentido opuesto al del campo. (Comparar con el resultado similar encontrado para un dipolo eléctrico, sección 14.11.)

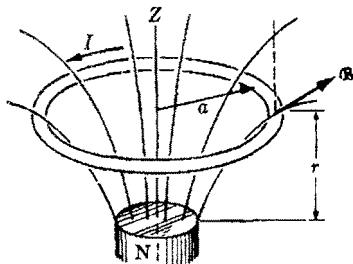


Figura 15-63

15.49 (a) Calcular la velocidad angular de precesión del espín de un electrón en un campo magnético de 0,5 T. (b) Calcular la misma cantidad para un protón en el mismo campo, suponiendo que el espín de un protón es igual al de un electrón. [Sugerencia: Usar los valores de γ que se dan en la página 536.]

15.50 Calcular el momento dipolar

magnético de un electrón en un átomo de hidrógeno, suponiendo que describe una órbita circular a una distancia de 0.53×10^{-10} m del protón. Calcular la velocidad angular de precesión del electrón si está en un campo magnético de 10^{-6} T que forma un ángulo de 30° con el momentum angular orbital.

15.51 Calcular el factor giromagnético γ para un disco rotante de radio R que tiene una carga q distribuida uniformemente sobre su superficie.

15.52 Repetir el problema 15.51 para una esfera cargada uniformemente en todo su volumen. [Sugerencia: Dividir la esfera en discos perpendiculares al eje de rotación.] Del resultado de este problema, ¿qué puede Ud. concluir acerca de la estructura del electrón?

15.53 El gauss es una unidad frecuentemente usada hasta hace poco para medir el campo magnético. La relación entre el gauss y el tesla es $1 \text{ T} = 10^4 \text{ gauss}$. Mostrar que cuando se mide la fuerza en dinas, la carga en stC, el campo magnético en gauss y la velocidad en cm s^{-1} , la fuerza magnética está dada por $F = \frac{1}{2} \times 10^{-10} qv \times B$.

15.54 Encontrar la fuerza sobre la porción circular del conductor de la fig. 15-64 si la corriente es I y el campo magnético uniforme B está dirigido hacia arriba. Demostrar que es la misma que si el conductor fuera recto entre P y Q .

15.55 Demostrar que la fuerza sobre una porción PQ de un alambre conductor (fig. 15-65) que lleva una corriente I y está colocado en un campo magnético uniforme B , es $I(PQ) \times B$, siendo por lo tanto independiente de la forma del conductor. Aplicar al problema precedente. Concluir de esto que la fuerza sobre una corriente cerrada colocada en un campo magnético uniforme es nula.

15.56 Considerar una espira cuadrada de alambre, de 6 cm de lado, cuando por ella circula una corriente constante de 0,1 A y está en un campo magnético uniforme de 10^{-4} T. (a) Si el plano de la espira está inicialmente paralelo al campo magnético, ¿se ejerce algún torque sobre la espira? (b) Contestar (a) cuando la espira está inicialmente perpendicular al campo magnético. (c) Expresar el torque

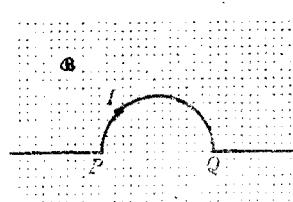


Figura 15-64

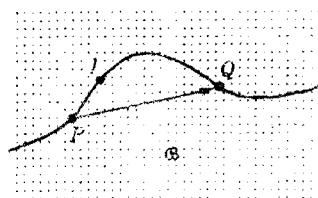


Figura 15-65

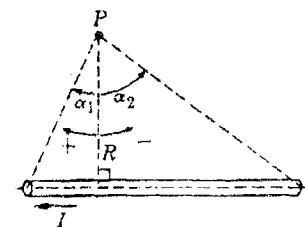


Figura 15-66

en función del ángulo que la normal a la espira forma con el campo magnético. Representar gráficamente el torque para el ángulo variando entre 0 y 2π . (d) Si en la posición en que el torque sobre la espira es nulo, la espira tiene una velocidad angular, ¿qué ocurre?

15.57 Si la situación es como está establecida en (d) del problema precedente, pero se invierte instantáneamente el sentido de la corriente, ¿qué ocurre? ¿Cómo cambiaría Ud. el sentido de la corriente en la forma que se menciona en la primera parte de este problema? ¿De qué utilidad sería este cambio?

15.58 Por un alambre infinitamente largo circula una corriente eléctrica de 1 A; calcular la intensidad del campo magnético producido a una distancia de $6,53 \times 10^{-10}$ m y a 1 m. Calcular también el campo eléctrico en estos puntos.

15.59 Por un alambre recto y largo circula una corriente de 1,5 A. Un electrón viaja con una velocidad de 5×10^4 m s⁻¹ paralelamente al alambre y con el mismo sentido de la corriente, a 0,1 m del alambre. ¿Qué fuerza ejerce el campo magnético de la corriente sobre el electrón en movimiento?

15.60 Demostrar, usando la ec. (15.65), que el campo magnético de una corriente rectilínea está dado por la ec. (15.41).

15.61 Demostrar que el campo magnético producido por una corriente rectilínea I de longitud finita es $(\mu_0 I / 2\pi R) (\sin \alpha_1 - \sin \alpha_2)$, donde R es la distancia (perpendicular) del punto al alambre, y α_1 y α_2 son los ángulos entre la perpendicular a la corriente y los segmentos que unen el punto con los extremos de la misma (ver fig. 15-66). Aplicar este resultado para obtener el campo magnético en el centro de un circuito cuadrado de

lado L . [Fijarse en los signos de los ángulos.]

15.62 Por un alambre recto y largo circula una corriente de 10 A en el sentido del eje Y . Hay un campo magnético uniforme B de intensidad 10^{-6} T y dirigido según el eje X . ¿Cuál es el campo magnético resultante en los siguientes puntos: (a) $x = 0, z = 2$, (b) $x = 2$ m, $z = 0$, (c) $x = 0, z = -0,5$ m?

15.63 Dos largos alambres rectos y paralelos están separados por una distancia $2a$. Si por los alambres circulan corrientes iguales en sentidos opuestos, ¿cuál es el campo magnético del plano de los alambres en un punto (a) equidistante de ambos y (b) a una distancia a de uno y $3a$ del otro? (c) Contestar (a) y (b) cuando por los alambres circulan corrientes iguales en el mismo sentido.

15.64 Dos largos alambres rectos y paralelos están a 100 cm uno de otro, como se muestra en la fig. 15-67. Por el alambre superior circula una corriente I_1 de 6 A hacia el plano del papel. (a) ¿Cuál debe ser la intensidad y el sentido de la corriente I_2 para que el campo resultante en P sea nulo? (b) ¿Cuál es entonces el campo resultante en Q ? (c) ¿Y en S ?

15.65 La fig. 15-68 es una vista frontal de dos largos alambres paralelos perpendiculares al plano XY , por los que circula la misma corriente I pero en sentidos opuestos. (a) Mostrar con vectores, el campo magnético de cada alambre y el campo resultante en el punto P . (b) Obtener la expresión del módulo de B en cualquier punto del eje X en función de la coordenada x del punto. (c) Hacer un gráfico del módulo de B en cualquier punto del eje X . (d) ¿Para qué valor de x es el valor de B máximo? Repetir para los puntos del eje Y .

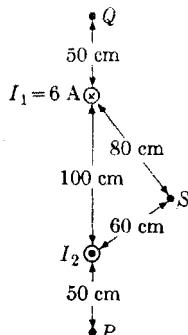


Figura 15-67

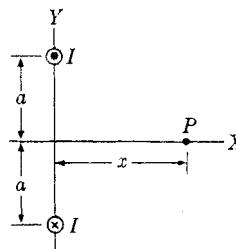


Figura 15-68

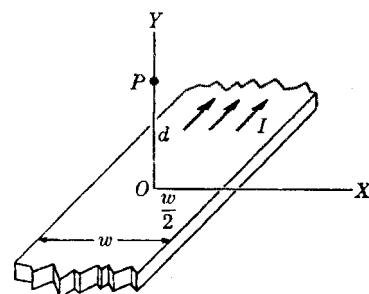


Figura 15-69

15.66 Repetir el problema 15.65 cuando las corrientes están en el mismo sentido.

15.67 Una corriente de 2,5 A circula por una bobina de vueltas muy juntas que tiene un diámetro de 0,4 m. ¿Cuántas vueltas debe tener para que el campo magnético en su centro sea $1,272 \times 10^{-4}$ T?

15.68 Un solenoide de 0,3 m de longitud está constituido por dos capas de alambre. La capa interna tiene 300 vueltas y la externa 250 vueltas. Por ambas capas circula una corriente de 3 A en el mismo sentido. ¿Cuál es el campo magnético en un punto cercano al centro del solenoide?

15.69 Una lámina conductora de gran longitud y ancho w tiene una densidad uniforme de corriente j por unidad de ancho; es decir, $I_{\text{total}} = jw$ (fig. 15-69). (a) Calcular el campo magnético en un punto P a una distancia (perpendicular) d por encima del centro de la tira, como se muestra. [Sugerencia: La expresión del campo debido a una tira recta y larga de ancho dw es la misma que la de un alambre recto y largo.] (b) ¿Cuál es el campo si $d \ll w$, es decir, si la tira se hace un plano infinito?

15.70 Dos corrientes circulares de la misma intensidad I y el mismo radio a están separadas por una distancia $2b$, como se muestra en la fig. 15.70. (a) Probar que el campo magnético sobre el eje está dado por

$$\mathcal{B} = \frac{\mu_0 I a^2}{(a^2 + b^2)^{3/2}} \left[1 + \frac{3}{2} \frac{(4b^2 - a^2)}{(a^2 + b^2)^2} x^2 + \frac{15}{8} \frac{(8b^4 - 12a^2b^2 + a^4)}{(a^2 + b^2)^4} x^4 + \dots \right],$$

donde x se mide a partir del punto medio entre las dos corrientes. (b) Verificar que para $a = 2b$, el campo en el centro es independiente de x hasta la tercera potencia. (Esta disposición se denomina *bobinas de Helmholtz* y se usa mucho en el laboratorio para producir un campo magnético uniforme en pequeñas regiones del espacio.) (c) Suponiendo que se satisface la condición señalada en (b), encontrar el valor de x (en función de a) para el cual el campo difiere en 1% del campo en el punto medio.

15.71 Un alambre largo horizontal AB (fig. 15-71) reposa sobre la superficie de una mesa. Otro alambre CD , situado directamente encima del primero, tiene 1,0 m de longitud y se puede deslizar hacia arriba y hacia abajo por las guías metálicas verticales C y D . Los dos alambres están conectados mediante los dos contactos corredizos y por ellos circula una corriente de 50 A. La densidad lineal del alambre CD es $5,0 \times 10^{-3}$ kg m $^{-1}$. ¿A qué altura quedará en equilibrio el alambre CD a causa de la fuerza magnética debida a la corriente que circula por el alambre AB ?

15.72 Un largo alambre recto y una espira rectangular de alambre yacen sobre una mesa (fig. 15-72). El lado de la espira paralelo al alambre tiene 30 cm de longitud y el lado perpendicular 50 cm. Las corrientes son $I_1 = 10$ A e $I_2 = 20$ A. (a) ¿Cuál es la fuerza sobre la espira? (b) ¿Cuál es el torque sobre la espira con respecto al alambre recto? (c) Encontrar el torque después que la

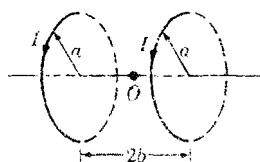


Figura 15-70

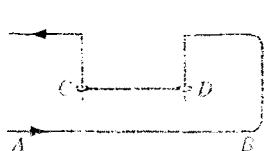


Figura 15-71

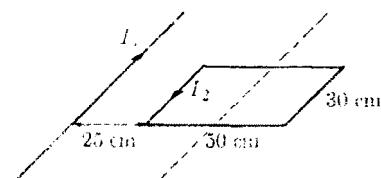


Figura 15-72

espira ha rotado 45° alrededor de la línea de trazo.

15.73 Dos alambres largos paralelos están colgados de un eje común por medio de 12 m de 1 mm^2 de sección. Los alambres tienen una masa por unidad de longitud de $6 \times 10^{-3}\text{ kg/m}^2$ y una resistencia de la misma corriente pero sin bobinas apiladas apuestas. ¿Cuál es la corriente si los hilos caigan formando un ángulo de 60° con la vertical?

15.74 En la fig. 15-68, un tercero alambre recto y largo, paralelo a los otros dos, pasa por el punto P . Por cada alambre fluye a una corriente $I = 20\text{ A}$. Sean $y = 0,30\text{ m}$ y $x = 0,40\text{ m}$. Encuentrar el signo y la dirección de la fuerza perpendicular de longitud sobre el tercero alambre, (a) si la corriente que circula por él sale del plato del papel, (b) si la corriente entra en el plato del papel.

15.75 El observador O' se mueve perpendicular al observador O con velocidad v hacia el eje X común. Dos cargas q_1 y q_2 , en reposo respecto a O' , están sobre el eje X a una distancia r' simétrica para O' . Encuentrar las fuerzas sobre cada carga de acuerdo con las medidas de O' si $v = 1,5$ veces la velocidad cónica. Suponer que $v \ll c$. (Ver fig. 15-65)

15.76 Con referencia a la eq. (15-65) que da el campo eléctrico de una carga puntual en movimiento, calcular el efecto del campo eléctrico para dos puntos a la misma distancia de la carga pero situados respectivamente en un plano que pasa por la carga perpendicular a la dirección del movimiento y sobre el eje en la dirección del movimiento. Considerar valores de v/c iguales a 0; 0,1; 0,5 y 0,9.

15.77 Calcular el cociente entre los valores relativista y no relativista del campo eléctrico producido por una carga en movimiento en un punto del plano

que pasa por la carga perpendicular a la dirección del movimiento. Considerar valores de v/c iguales 0; 0,1; 0,5 y 0,9.

15.78 Calcular el cociente entre los valores relativista y no relativista del campo magnético producido por una carga en movimiento en un punto del plano perpendicular a la dirección del movimiento que pasa por la carga. Considerar valores de v/c iguales a 0; 0,1; 0,5 y 0,9.

15.79 Dos electrones se mueven en trayectorias rectilíneas paralelas separadas 0,1 mm. (a) Si se mueven uno frente al otro a una velocidad de 10^6 m/s^2 , encontrar las fuerzas eléctrica y magnética entre ellos que mide un observador fijo al laboratorio (suponiendo que 10^6 m/s^2 se puede considerar una velocidad no relativista). (b) ¿Cuál es la fuerza según un observador que se mueve con los electrones? (c) Repetir lo anterior para el caso de una velocidad de $2,4 \times 10^8\text{ m/s}^2$, que es relativista.

15.80 Un protón de 30 GeV de energía pasa a una distancia de 10^{-7} m de un ion. Como el protón se debe considerar en forma relativista, (a) encontrar el ángulo α para el cual el campo eléctrico en el ion es 50%, del tamaño correspondiente a cuando el protón está a la distancia de máxima aproximación al ion. (b) Hallar la dirección de la fuerza a que está sometido el ion y la variación del momentum, considerando que es esencialmente el resultado del campo dentro del ángulo encontrado en (a). (c) Repetir cuando la partícula que pasa es un electrón de la misma energía, en vez de un protón. (Ver fig. 15-73.)

15.81 Usando la expresión relativista (15-65) para el campo magnético de una carga en movimiento, obtener la expresión para el campo magnético de una corriente rectilínea.

- 15.82 Usando la regla general para la transformación relativista de una fuerza (problema 11.29), obtener las transformaciones relativistas del campo electromagnético, ecs. (15.58) y (15.60).

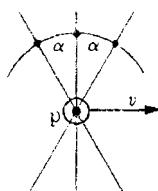


Figura 15-73

- 15.83 Usando las ecs. (15.58) y (15.60), probar que las cantidades $\epsilon \cdot \mathcal{B}$ y $\epsilon^2 - \mathcal{B}^2$ son invariantes respecto a la transformación de Lorentz.

- 15.84 Una partícula de carga q y masa

m se mueve en una región donde hay un campo eléctrico ϵ y un campo magnético \mathcal{B} . Demostrar que si el movimiento de la partícula se refiere a un sistema de coordenadas que rota con la frecuencia de Larmor de la partícula, $\omega_L = -q\mathcal{B}/2m$ [ver ec. (15.7)], su ecuación de movimiento se transforma en $ma' = q[\epsilon + (m/q)\omega_L \times (\omega_L \times r)]$. Estimar el valor de ω_L para un electrón y verificar que el último término es despreciable. En esta aproximación, la ecuación de movimiento de la partícula en el sistema rotante de ejes es $ma' = qf$. La comparación de este resultado con el ejemplo 15.4 nos muestra cómo eliminar el efecto de un campo magnético. [Sugerencia: Emplear las fórmulas de la sección 6.4 para expresar la velocidad y la aceleración de la partícula respecto al sistema rotante de ejes.]

CAMPOS ELECTROMAGNETICOS ESTATICOS

- 16.1 *Introducción*
- 16.2 *Flujo de un campo vectorial*
- 16.3 *Ley de Gauss para el campo eléctrico*
- 16.4 *Ley de Gauss en forma diferencial*
- 16.5 *Polarización de la materia*
- 16.6 *Desplazamiento eléctrico*
- 16.7 *Cálculo de la susceptibilidad eléctrica*
- 16.8 *Capacitancia; capacitores*
- 16.9 *Energía del campo eléctrico*
- 16.10 *Conductividad eléctrica; ley de Ohm*
- 16.11 *Fuerza electromotriz*
- 16.12 *Ley de Ampère para el campo magnético*
- 16.13 *Ley de Ampère en forma diferencial*
- 16.14 *Flujo magnético*
- 16.15 *Magnetización de la materia*
- 16.16 *Campo magnetizante*
- 16.17 *Cálculo de la susceptibilidad magnética*
- 16.18 *Resumen de las leyes de los campos estáticos*

16.1 Introducción

En los dos capítulos precedentes estudiamos las interacciones electromagnéticas y el movimiento de partículas cargadas como consecuencia de estas interacciones. Al analizar las interacciones electromagnéticas introdujimos el concepto de campo electromagnético. En este capítulo y en el próximo, estudiaremos en detalle las características del campo electromagnético mismo, considerándolo como una entidad independiente. En este capítulo examinaremos el campo electromagnético estático o independiente del tiempo. En el capítulo 17 consideraremos el campo electromagnético dependiente del tiempo.

16.2 Flujo de un campo vectorial

Introdujamos primero el *flujo de un campo vectorial*. Este es un concepto de gran utilidad en muchos problemas físicos y aparecerá muchas veces en este capítulo y en los siguientes. Consideremos una superficie S colocada en una región donde hay un campo vectorial \mathbf{V} (fig. 16.1). Dividamos la superficie en pequeñas (elementales) superficies de áreas dS_1, dS_2, dS_3, \dots . Podemos trazar los versores $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \dots$ perpendiculares a las superficies en uno de sus puntos. Los versores se orientan en el sentido en que avanza un tornillo de rosca derecha cuando rota en el sentido en que hemos decidido orientar la periferia de la superficie según la convención establecida en la sección 3.10. Si la superficie es cerrada, los versores \mathbf{u}_N apuntan hacia afuera. Sean $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots$ los ángulos entre los vectores normales $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \dots$ y los vectores de campo $\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \mathbf{V}_3, \dots$ en cada punto de la superficie. Entonces, por definición, el flujo Φ del vector \mathbf{V} a través de la superficie es

$$\begin{aligned}\Phi &= V_1 dS_1 \cos \theta_1 + V_2 dS_2 \cos \theta_2 + V_3 dS_3 \cos \theta_3 + \dots \\ &= \mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{u}_1 dS_1 + \mathbf{V}_2 \cdot \mathbf{u}_2 dS_2 + \mathbf{V}_3 \cdot \mathbf{u}_3 dS_3 + \dots,\end{aligned}$$

ó

$$\Phi = \int_S \mathbf{V} \cos \theta dS = \int_S \mathbf{V} \cdot \mathbf{u}_N dS, \quad (16.1)$$

donde la integral se extiende a toda la superficie, lo cual se indica con el subíndice S . Por esta razón una expresión como la ec. (16.1) se llama integral de superficie. Debido al factor $\cos \theta$ en la ec. (16.1), el flujo a través de la superficie elemental dS puede ser positivo o negativo, según θ sea menor o mayor que $\pi/2$. Si el campo \mathbf{V} es paralelo o tangente al elemento de dS , el ángulo θ es $\pi/2$ y $\cos \theta = 0$, resultando un flujo nulo a través de la superficie dS . El flujo total puede ser positivo, negativo o nulo. Si es positivo, se denomina "saliente", y si es negativo, "entrante". Si la superficie es cerrada como una esfera o un elipsoide, se escribe un círculo sobre el signo integral; de este modo la ec. (16.1) se convierte en

$$\Phi = \oint_S \mathbf{V} \cos \theta dS = \oint_S \mathbf{V} \cdot \mathbf{u}_N dS. \quad (16.2)$$

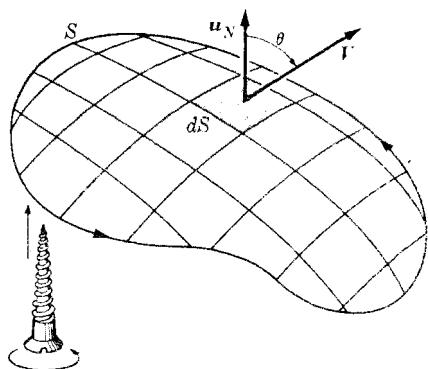


Fig. 16-1. Flujo de un campo vectorial a través de una superficie.

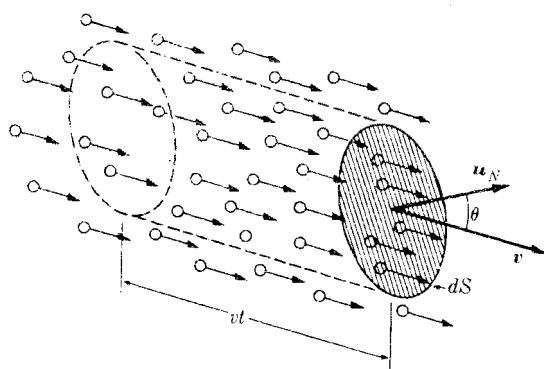


Fig. 16-2. Flujo de partículas a través de un área.

El nombre de flujo dado a la integral de la ec. (16.1) se debe a su aplicación al estudio de los fluidos. Supongamos que tenemos un chorro de partículas, todas moviéndose hacia la derecha con velocidad \mathbf{v} . Aquellas partículas que atraviesan la superficie dS en el tiempo t estarían contenidas en un cilindro de base dS , generatriz paralela a \mathbf{v} y longitud vt . Este volumen es $vt dS \cos \theta$. Suponiendo que haya n partículas por unidad de volumen, el número total de partículas que pasa a través de la superficie dS en el tiempo t es $nvt dS \cos \theta$ y el número que pasa por unidad de tiempo, o *flujo de partículas*, es $n\mathbf{v} dS \cos \theta = n\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_N dS$. El flujo total de partículas a través de la superficie S es

$$\Phi = \int_S n\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_N dS.$$

Esta es una expresión similar a la ec. (16.1), con el vector de campo \mathbf{V} igual a $n\mathbf{v}$. Se comprenderá, sin embargo, que el nombre de "flujo" dado a la ec. (16.1) no significa, en general, movimiento real de algo a través de la superficie.

EJEMPLO 16.1. Expresar la corriente eléctrica a través de una superficie como un flujo de densidad de corriente.

Solución: Hemos visto que $n\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_N dS$ expresa el número de partículas que pasa a través de la superficie dS por unidad de tiempo. Si cada partícula lleva una carga q , la carga que pasa a través de la superficie dS por unidad de tiempo es

$$qn\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_N dS = \mathbf{j} \cdot \mathbf{u}_N dS,$$

donde $\mathbf{j} = nqv$ es la densidad de corriente definida en la ec. (15.12). Por consiguiente, la carga total que pasa a través de la superficie S por unidad de tiempo (esto es, la corriente eléctrica a través de la superficie) es

$$I = \int_S \mathbf{j} \cdot \mathbf{u}_N dS.$$

En otras palabras, la corriente eléctrica a través de una superficie es igual al flujo de la densidad de corriente a través de la superficie. Si la densidad de corriente es uniforme y la superficie es plana, la ecuación se reduce a

$$I = \mathbf{j} \cdot \mathbf{u}_N S = jS \cos \theta.$$

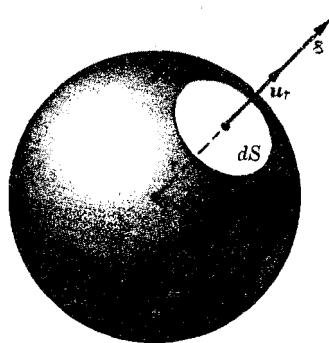


Fig. 16-3. Flujo eléctrico de una carga puntual a través de una esfera.

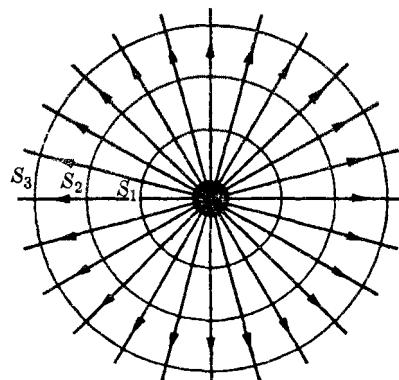


Fig. 16-4. El flujo eléctrico a través de esferas concéntricas que rodean a la misma carga es el mismo.

I. EL CAMPO ELECTRICO

16.3 Ley de Gauss para el campo eléctrico

Consideremos ahora una carga puntual q (fig. 16-3) y calculemos el flujo de su campo eléctrico \mathcal{E} a través de una superficie esférica con centro en la carga. Si r es el radio de la esfera, el campo eléctrico producido por la carga en un punto de la superficie esférica es

$$\mathcal{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} u_r.$$

El versor normal a la esfera coincide con el versor u_r según la dirección radial. Luego el ángulo θ entre el campo eléctrico \mathcal{E} y el versor u_r es cero, y $\cos \theta = 1$. Obsérvese que el campo eléctrico tiene la misma magnitud en todos los puntos de la superficie esférica y que el área de la esfera es $4\pi r^2$; por lo tanto la ec. (16.2) da para el flujo eléctrico

$$\Phi_E = \oint_S \mathcal{E} dS = \mathcal{E} \oint_S dS = \mathcal{E} S = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} (4\pi r^2) = \frac{q}{\epsilon_0}.$$

Entonces, el flujo eléctrico a través de la esfera es proporcional a la carga e independiente del radio de la superficie. Por lo tanto si trazamos varias superficies concéntricas S_1, S_2, S_3, \dots (fig. 16-4) con centro en la carga q , el flujo eléctrico a través de todas ellas es el mismo e igual a q/ϵ_0 . Este resultado se debe a que el campo depende de $1/r^2$, y se aplica también al campo gravitacional de una masa dado por la ec. (13.15). El flujo del campo gravitacional se encuentra reemplazando $q/4\pi\epsilon_0$ por γm , donde m es la masa encerrada por la superficie. Esta sustitución da

$$\Phi_g = 4\pi\gamma m.$$

Consideremos una carga q en el interior de una superficie arbitraria cerrada S (fig. 16-5). El flujo total a través de S del campo eléctrico producido por la carga q está dado por

$$\Phi_S = \oint_S \mathcal{E} \cos \theta dS = \oint_S \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos \theta dS = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{dS \cos \theta}{r^2}.$$

Pero $dS \cos \theta/r^2$ es el ángulo sólido subtendido por el elemento de superficie dS visto desde la carga q [recordar la ec. (2.8).] Como el ángulo sólido total alrededor de un punto es 4π , vemos que

$$\Phi_S = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oint d\Omega = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} (4\pi) = \frac{q}{\epsilon_0}.$$

Este resultado es el mismo que el encontrado previamente para una superficie esférica con centro en la carga, por lo cual es válido para cualquier superficie cerrada, independientemente de la posición de la carga dentro de la superficie. Si una carga tal como q' está *fuera* de la superficie cerrada, el flujo eléctrico es cero, porque el flujo entrante es igual al saliente; luego, el flujo neto es nulo. Por ejemplo, el flujo eléctrico de q' a través de dS' es igual en magnitud, pero de signo opuesto, al flujo eléctrico a través de dS'' , y por consiguiente su suma es cero.

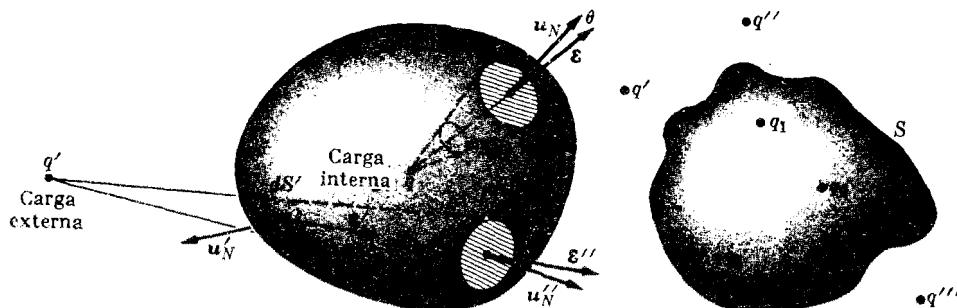


Fig. 16-5. El flujo eléctrico a través de una superficie cerrada que encierra una carga es independiente de la forma de la superficie.

Fig. 16-6. El flujo eléctrico a través de cualquier superficie cerrada es proporcional a la carga neta contenida dentro de la superficie.

Si hay varias cargas q_1, q_2, q_3, \dots en el interior de la superficie arbitraria S (fig. 16-6), el flujo eléctrico total será la suma de los flujos producidos por cada carga. Podemos pues establecer la *ley de Gauss*:

El flujo eléctrico a través de una superficie cerrada que encierra las cargas q_1, q_2, q_3, \dots es

$$\Phi_S = \oint_S \mathcal{E} \cdot u_N dS = \frac{q}{\epsilon_0}, \quad (16.3)$$

donde $q = q_1 + q_2 + q_3 + \dots$ es la carga total en el interior de la superficie.

Si no hay cargas en el interior de la superficie cerrada, o si la carga neta es cero, el flujo eléctrico total a través de ella es cero. Las cargas que están fuera de la superficie cerrada no contribuyen al flujo total.

La ley de Gauss es particularmente útil cuando queremos calcular el campo eléctrico producido por distribuciones de carga que presentan ciertas simetrías, como se muestra en los siguientes ejemplos.

EJEMPLO 16.2. Usando la ley de Gauss, hallar el campo eléctrico producido por (a) una carga distribuida uniformemente sobre un plano, (b) dos planos paralelos con cargas iguales y opuestas.

Solución: (a) Supongamos que el plano de la fig. 16-7 contiene una carga σ por unidad de área. De la simetría del problema se deduce que las líneas de fuerza son perpendiculares al plano, orientadas como se indica en la figura si la carga es positiva. Tomando como superficie cerrada el cilindro ilustrado en la figura, podemos separar el flujo eléctrico Φ_S en tres términos: el flujo a través de S_1 que es $+\epsilon S$, siendo S el área de la base del cilindro; el flujo a través de S_2 , que es también $+\epsilon S$

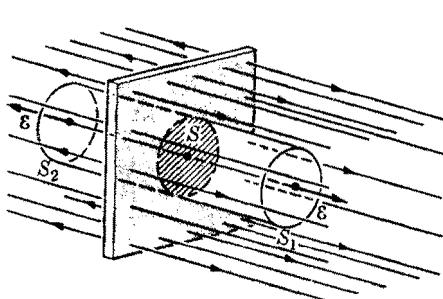


Fig. 16-7. Campo eléctrico de una superficie plana cargada uniformemente.

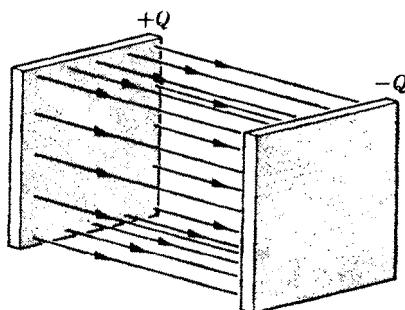


Fig. 16-8. Campo eléctrico en el espacio comprendido entre dos superficies planas y paralelas que contienen cargas iguales y opuestas.

ya que, por simetría, el campo eléctrico debe ser el mismo en módulo y dirección pero de sentido opuesto en puntos situados a la misma distancia a ambos lados del plano; y el flujo a través de la superficie lateral del cilindro, que es nulo porque el campo eléctrico es paralelo a la superficie. En consecuencia tenemos $\Phi_S = 2\epsilon S$. La carga en el interior de la superficie es la correspondiente al área sombreada y es igual a $q = \sigma S$. Por consiguiente, aplicando la ley de Gauss, ec. (16.3), tenemos $2\epsilon S = \sigma S / \epsilon_0$ o sea

$$\epsilon = \frac{\sigma}{2\epsilon_0},$$

lo cual indica que el campo eléctrico es independiente de la distancia al plano y es por lo tanto uniforme. El potencial eléctrico es, usando la relación $\epsilon = -dV/dx$

y suponiendo que el potencial en el plano es cero,

$$V = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}x.$$

Estos resultados son idénticos a los del ejemplo 13.8 para el caso gravitacional si se reemplaza γ por $(4\pi\epsilon_0)^{-1}$ (ver además el problema 14.62). El estudiante apreciará que la técnica usada ahora es más simple debido a la simetría del problema.

(b) La fig. 16-8 muestra dos planos paralelos con cargas iguales y opuestas. Observamos que en la región fuera de los dos planos hay campos eléctricos iguales en módulo y dirección pero de direcciones opuestas, los cuales dan un campo resultante nulo. Pero en la región entre los planos, los campos tienen la misma dirección, y el campo resultante es dos veces mayor que el de un solo plano, o sea $\mathcal{E} = \sigma/\epsilon_0$. Por lo tanto, dos planos paralelos con cargas iguales y opuestas producen un campo uniforme en el espacio entre ellos.

EJEMPLO 16.3. Usando el teorema de Gauss, hallar el campo eléctrico creado por una distribución esférica de carga.

Solución: Este problema ha sido estudiado en la sección 13.7, aunque de un modo diferente, para el campo gravitacional producido por un cuerpo esférico. Consideremos una esfera de radio a y carga Q (fig. 16-9). La simetría del problema sugiere

que el campo en cada punto debe ser radial y depender sólo de la distancia r del punto al centro de la esfera. Entonces tracemos una superficie esférica de radio r concéntrica con la esfera cargada. Encontramos que el flujo eléctrico a través de ella es

$$\Phi_S = \oint_S \mathcal{E} dS = \mathcal{E} \oint_S dS = \mathcal{E}(4\pi r^2).$$

Supongamos primero $r > a$; encontramos que la carga en el interior de la superficie S es la carga total Q de la esfera. Luego, aplicando la ley de Gauss, ec. (16.3), obtenemos $\mathcal{E}(4\pi r^2) = Q/\epsilon_0$

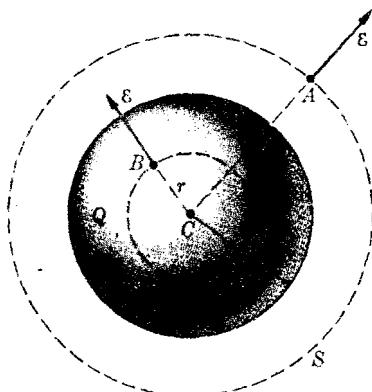
$$\mathcal{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

Figura 16-9

Este resultado es el mismo que el obtenido para una carga puntual. Por consiguiente el campo eléctrico producido por una esfera cargada en puntos fuera de ella es igual al que produciría si toda su carga estuviera concentrada en su centro.

Consideremos a continuación, $r < a$; tenemos dos posibilidades. Si toda la carga está en la superficie de la esfera, la carga en el interior de la superficie S' es cero, y la ley de Gauss da $\mathcal{E}(4\pi r^2) = 0$, ó $\mathcal{E} = 0$. De este modo, cuando la carga está distribuida en la superficie de la esfera el campo eléctrico en los puntos internos de la esfera es nulo. Pero si la carga está distribuida uniformemente en todo su volumen y es Q' la carga en el interior de la superficie S ; tenemos

$$Q' = \frac{Q}{4\pi a^3/3} (4\pi r^3/3) = \frac{Qr^3}{a^3}.$$



El teorema de Gauss da entonces $\mathcal{E}(4\pi r^2) = Q'/\epsilon_0 = Qr^2/\epsilon_0 a^3$ ó

$$\mathcal{E} = \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 a^3},$$

demostrando así que el campo eléctrico en los puntos internos de una esfera uniformemente cargada es directamente proporcional a la distancia del punto al centro de la misma. Estos resultados están conforme a los de la sección 13.7 para el caso gravitacional, si se reemplaza gm por $Q/4\pi\epsilon_0$.

EJEMPLO 16.4. Usando el teorema de Gauss, hallar el campo eléctrico creado por una distribución cilíndrica de carga de longitud infinita.

Solución: Consideremos una longitud L del cilindro C , de radio a (fig. 16-10). Si λ es la carga por unidad de longitud, la carga total en esa porción de cilindro es $q = \lambda L$. La simetría del problema indica que el campo eléctrico en un punto depende solamente de su distancia al eje del cilindro y está dirigido radialmente. Tomemos como superficie cerrada de integración una superficie cilíndrica de radio r , coaxial con la distribución de carga. Entonces el flujo eléctrico a través de la superficie tiene tres términos. Dos de ellos representan el flujo a través de cada base; éstos son nulos porque el campo eléctrico es tangente a cada superficie basal. Por lo cual sólo queda el flujo a través de la superficie lateral. Este es $\mathcal{E}(2\pi r L)$. O sea,

$$\Phi_{\mathcal{E}} = 2\pi r L \mathcal{E}.$$

Considerando $r > a$, la carga total dentro de la superficie cilíndrica S es $q = \lambda L$, y la ley de Gauss, ec. (16.3), da $2\pi r L \mathcal{E} = \lambda L / \epsilon_0$ ó

$$\mathcal{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}.$$

El resultado del ejemplo 14.7 para el campo eléctrico de un filamento cargado está de acuerdo con éste. Por consiguiente, el campo eléctrico en puntos externos a una distribución cilíndrica de carga de longitud infinita es el mismo que si toda la carga estuviera distribuida a lo largo de su eje.

Para $r < a$, tenemos de nuevo dos posibilidades. Si la carga está distribuida en la superficie del cilindro, no hay carga en el interior de la superficie S' , y por

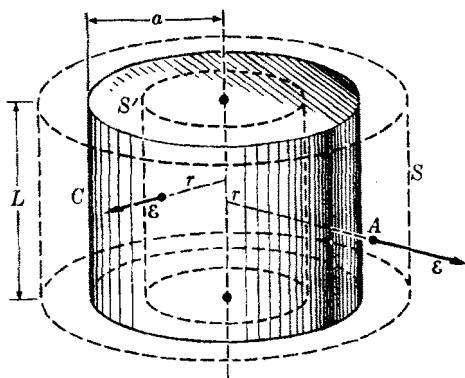


Figura 16-10

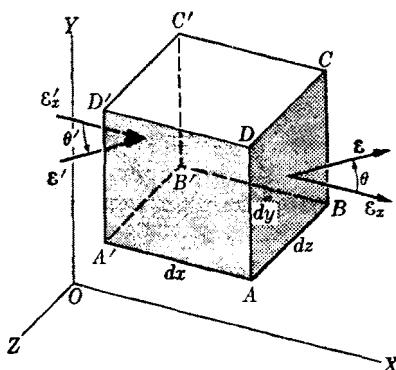


Fig. 16-11. Elemento de volumen para establecer la ley de Gauss en forma diferencial.

la ley de Gauss se obtiene $2\pi r L \epsilon = 0$, ó $\epsilon = 0$. En consecuencia, cuando la carga está distribuida sobre la superficie de un cilindro, el campo eléctrico en sus puntos interiores es nulo. Pero si la carga está distribuida uniformemente sobre todo el volumen del cilindro C , encontramos que la carga dentro de la superficie S' es $q' = \lambda L r^2 / a^2$, y la ley de Gauss da $2\pi r L \epsilon = q'$

$$\epsilon = \frac{\lambda r}{2\pi \epsilon_0 a^2}.$$

De este modo el campo eléctrico en un punto interior a un cilindro cargado de longitud infinita es proporcional a la distancia del punto al eje.

16.4 Ley de Gauss en forma diferencial

Hemos visto que la ley de Gauss puede aplicarse a superficies de cualquier forma. Vamos a aplicarla a la superficie que rodea a un volumen infinitesimal de aristas paralelas a los ejes X , Y y Z , como se ilustra en la fig. 16-11. Los lados del elemento de volumen elemental son dx , dy y dz . El área de la superficie $ABCD$ es $dy dz$, y el flujo eléctrico a través de ella es

$$\epsilon dS \cos \theta = (\epsilon \cos \theta) dy dz = \epsilon_x dy dz,$$

ya que $\epsilon_x = \epsilon \cos \theta$. El flujo a través de la cara $A'B'C'D'$ tiene una expresión similar pero es negativo porque el campo está dirigido hacia el interior del volumen, o sea $-\epsilon'_x dy dz$. El flujo total a través de estas dos superficies es la suma

$$\epsilon_x dy dz + (-\epsilon'_x dy dz) = (\epsilon_x - \epsilon'_x) dy dz.$$

Pero como la distancia $A'A = dx$ entre las dos superficies es muy pequeña, la cantidad $\epsilon_x - \epsilon'_x$ es también muy pequeña y podemos escribir

$$\epsilon_x - \epsilon'_x = d\epsilon_x = \frac{\partial \epsilon_x}{\partial x} dx,$$

lo cual permite expresar el flujo total en la dirección X como

$$\frac{\partial \epsilon_x}{\partial x} dx dy dz = \frac{\partial \epsilon_x}{\partial x} dv.$$

La cantidad $dv = dx dy dz$ es el volumen de la caja. Como se obtienen resultados análogos para el flujo a través de las cuatro caras restantes del volumen elemental, el flujo total a través del mismo es

$$\Phi_\epsilon = \frac{\partial \epsilon_x}{\partial x} dv + \frac{\partial \epsilon_y}{\partial y} dv + \frac{\partial \epsilon_z}{\partial z} dv = \left(\frac{\partial \epsilon_x}{\partial x} + \frac{\partial \epsilon_y}{\partial y} + \frac{\partial \epsilon_z}{\partial z} \right) dv.$$

Si dq es la carga eléctrica dentro del elemento de volumen, la ley de Gauss da

$$\left(\frac{\partial \epsilon_x}{\partial x} + \frac{\partial \epsilon_y}{\partial y} + \frac{\partial \epsilon_z}{\partial z} \right) dv = \frac{dq}{\epsilon_0}.$$

Escribiendo $dq = \rho dv$ en la expresión anterior, donde ρ es la densidad de carga eléctrica (o carga por unidad de volumen), y cancelando el factor común dv , obtenemos

$$\frac{\partial \epsilon_x}{\partial x} + \frac{\partial \epsilon_y}{\partial y} + \frac{\partial \epsilon_z}{\partial z} = \frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (16.4)$$

Esta es la ley de Gauss expresada en forma diferencial. La expresión en el primer miembro de la ec. (16.4) se llama la *divergencia de* ϵ , abreviado $\operatorname{div} \epsilon$, de modo que la ley de Gauss se puede escribir en la forma compacta

$$\operatorname{div} \epsilon = \frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (16.5)$$

El significado físico de la ley de Gauss en su forma diferencial es que relaciona el campo eléctrico ϵ en un punto del espacio con la distribución de carga, expresada por ρ , en el mismo punto; o sea que expresa una relación *local* entre dos cantidades físicas. De este modo podemos decir que las cargas eléctricas son las *fuentes* del campo eléctrico, y que su distribución y magnitud determinan el campo eléctrico en cada punto del espacio.

EJEMPLO 16.5. Expresar la ley de Gauss en función del potencial eléctrico.

Solución: Recordando que las componentes del campo eléctrico ϵ se expresan en función del potencial eléctrico V por $\epsilon_x = -\partial V / \partial x$ y con expresiones similares para ϵ_y y ϵ_z (ver ec. 14.27), podemos escribir

$$\frac{\partial \epsilon_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial V}{\partial x} \right) = -\frac{\partial^2 V}{\partial x^2},$$

con resultados análogos para ϵ_y y ϵ_z . Haciendo la sustitución en la ec. (16.4) obtenemos otra expresión para la ley de Gauss:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (16.6)$$

expresión llamada *ecuación de Poisson*. Podemos usar la ec. (16.6) para obtener el potencial eléctrico cuando conocemos la distribución de cargas, y recíprocamente, siempre que la distribución de cargas sea independiente del tiempo. En el espacio libre, donde no hay cargas ($\rho = 0$), la ec. (16.5) se convierte en $\operatorname{div} \epsilon = 0$ y la ec. (16.6) nos da

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0. \quad (16.7)$$

Esta ecuación se llama *ecuación de Laplace*. Es una de las ecuaciones más importantes de la física matemática, y aparece en muchos problemas no incluidos en la teoría del campo electromagnético, tales como en el movimiento de fluidos y en la elasticidad.

La expresión que aparece a la izquierda de las ecs. (16.6) y (16.7) recibe el nombre de *laplaciano de* V .

EJEMPLO 16.6. Verificar que el potencial de una carga satisface la ecuación de Laplace, ec. (16.7), en todos los puntos excepto en el origen donde la carga está situada.

Solución: El potencial de una carga puntual es $V = q/4\pi\epsilon_0 r$, según la ec. (14.32). Pero $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, de modo que derivando respecto a x , tenemos

$$2r \frac{\partial r}{\partial x} = 2x \quad \text{ó} \quad \frac{\partial r}{\partial x} = x/r.$$

Por consiguiente

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{x}{r^3}$$

y

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{x}{r^3} \right) = -\frac{1}{r^3} + \frac{3x}{r^4} \frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3x^2}{r^5}.$$

Entonces

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{3}{r^3} + \frac{3(x^2 + y^2 + z^2)}{r^5} = 0.$$

Multiplicando el resultado anterior por $q/4\pi\epsilon_0$, obtenemos la ec. (16.7). Nuestro método matemático no es válido para $r = 0$ porque la función $1/r$ tiende a infinito cuando r tiende a cero. En consecuencia, el origen debe excluirse de los cálculos. Además, la ec. (16.7) no es aplicable a puntos ocupados por cargas.

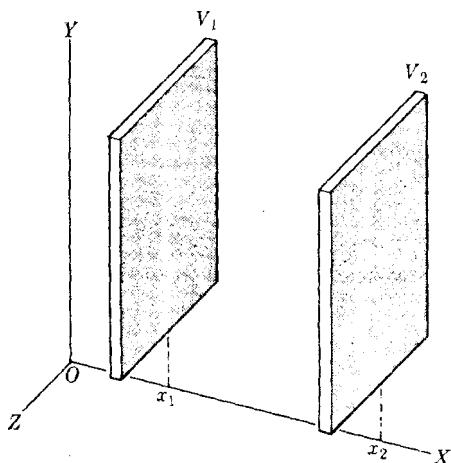


Figura 16-12

planos es constante. Integrando la expresión que ϵ es constante, obtenemos la siguiente ecuación

$$\int_{V_1}^V dV = - \int_{x_1}^x \epsilon dx = -\epsilon \int_{x_1}^x dx,$$

de la cual resulta $V - V_1 = -\epsilon(x - x_1)$ ó $V = V_1 - \epsilon(x - x_1)$. Esto demuestra que el potencial eléctrico varía linealmente con la distancia x . Haciendo $x = x_2$, tenemos $V = V_2$. Por lo tanto

$$\epsilon = -\frac{V_2 - V_1}{x_2 - x_1} = -\frac{V_2 - V_1}{d},$$

EJEMPLO 16.7. Usando la ecuación de Laplace, obtener el potencial eléctrico y el campo eléctrico en la región vacía comprendida entre dos planos paralelos, cargados a los potenciales V_1 y V_2 .

Solución: La simetría del problema sugiere que el campo debe depender sólo de la coordenada x (fig. 16-12). Por consiguiente, como no hay cargas en el espacio entre los planos, debemos aplicar la ecuación de Laplace, ec. (16.7), la cual da $d^2V/dx^2 = 0$. Obsérvese que no usamos los símbolos de derivación parcial porque sólo hay una variable independiente, x . Integrando, tenemos $dV/dx = \text{const}$. Pero el campo eléctrico es $\mathcal{E} = -dV/dx$. Concluimos entonces que el campo eléctrico entre los

donde $d = x_2 - x_1$. Estos resultados están de acuerdo con nuestra discusión hecha en la sección 14.8, que condujo a la ec. (14.31).

EJEMPLO 16.8. Resolver el mismo problema del ejemplo 16.7, suponiendo que haya una distribución uniforme de carga entre los planos. Esta situación puede encontrarse, por ejemplo, entre las placas de un tubo electrónico.

Solución: Ahora debemos aplicar la ecuación de Poisson, ec. (16.6). Debido a la simetría del problema, el potencial depende solamente de la coordenada x , y podemos escribir $d^2V/dx^2 = -\rho/\epsilon_0$, con $\rho = \text{const}$. Integrando, tenemos

$$\int_{x_1}^x \frac{d^2V}{dx^2} dx = -\frac{1}{\epsilon_0} \int_{x_1}^x \rho dx = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \int_{x_1}^x dx,$$

lo cual da

$$\frac{dV}{dx} - \left(\frac{dV}{dx} \right)_{x=x_1} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} (x - x_1)$$

o sea

$$\frac{dV}{dx} = -\mathcal{E}_1 - \frac{\rho}{\epsilon_0} (x - x_1), \quad (16.8)$$

donde $\mathcal{E}_1 = -(dV/dx)_{x=x_1}$ es el campo eléctrico en el punto $x = x_1$. Como $\mathcal{E} = -dV/dx$, el campo entre los planos es

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 + \frac{\rho}{\epsilon_0} (x - x_1),$$

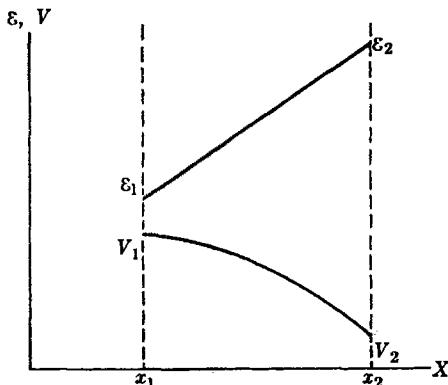


Figura 16-13

lo cual demuestra que el campo eléctrico varía linealmente con x , como se ilustra en la fig. 16-13. Integrando de nuevo la ec. 16.8, el potencial eléctrico en función de x es

$$\int_{V_1}^V dV = - \int_{x_1}^x \mathcal{E}_1 dx - \frac{\rho}{\epsilon_0} \int_{x_1}^x (x - x_1) dx \quad (16.9)$$

o sea

$$V = V_1 - \mathcal{E}_1(x - x_1) - \frac{\rho}{2\epsilon_0} (x - x_1)^2,$$

Ahora el potencial eléctrico varía con el cuadrado de x , como se muestra en la figura 16-13. La cantidad \mathcal{E}_1 puede determinarse haciendo $x = x_2$; se tiene

$$V_2 = V_1 - \mathcal{E}_1(x_2 - x_1) - (\rho/2\epsilon_0)(x_2 - x_1)^2,$$

de donde se despeja \mathcal{E}_1 .

16.5 Polarización de la materia

En esta sección vamos a discutir el efecto que un campo eléctrico produce sobre una porción de materia. Recordemos que los átomos no tienen momentos dipolares eléctricos permanentes debido a su simetría esférica, pero cuando se colocan

en un campo eléctrico se polarizan, adquiriendo momentos dipolares eléctricos inducidos en la dirección del campo. Esto es una consecuencia de la perturbación del movimiento de los electrones producida por el campo eléctrico aplicado (ver sección 14.11).

Por otra parte, muchas moléculas presentan momentos dipolares eléctricos permanentes. Cuando una molécula tiene un momento dipolar eléctrico permanente, tiende a orientarse paralelamente al campo aplicado, porque sobre ella se ejerce un torque (dado por la ec. 14.50). Como consecuencia de estos dos efectos, una porción de material colocada en un campo eléctrico se *polariza*. Es decir, sus

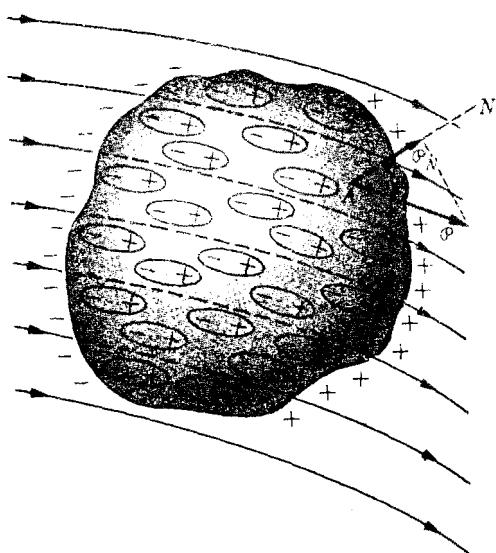


Fig. 16-14. Polarización de la materia por un campo eléctrico.

moléculas o átomos se convierten en dipolos eléctricos orientados en la dirección del campo eléctrico local (fig. 16-14), sea debido a la distorsión del movimiento electrónico, sea a la orientación de sus dipolos permanentes. Un medio que puede polarizarse en un campo eléctrico se llama *dieléctrico*. La polarización da lugar a una carga neta positiva sobre un lado de la porción de materia y a una carga neta negativa sobre el lado opuesto. De este modo la porción de materia se convierte en un gran dipolo eléctrico que *tiende* a moverse en la dirección en que el campo aumenta, como se estudió en la sección 14.11. Esto explica el fenómeno descrito en la sección 14.1 por el cual una varilla de vidrio electrizada o un peineatraen pequeños pedazos de papel o esferitas de corcho.

La *polarización* \mathcal{P} de un material se define como el momento dipolar eléctrico del medio por unidad de volumen. Por lo tanto, si \mathbf{p} es el momento dipolar inducido en cada átomo o molécula y n es el número de átomos o moléculas por unidad de volumen, la polarización es $\mathcal{P} = np$. En general, \mathcal{P} es proporcional al

campo eléctrico aplicado \mathcal{E} . Como \mathcal{P} se mide en $(\text{C m}) \text{ m}^{-3} = \text{C m}^{-2}$, o carga por unidad de área, y de la ec. (14.8), $\epsilon_0 \mathcal{E}$ se mide también en C m^{-2} , es costumbre escribir

$$\mathcal{P} = \chi_e \epsilon_0 \mathcal{E}. \quad (16.10)$$

La cantidad χ_e se llama *susceptibilidad eléctrica* del material. Este es un número puro. Para la mayoría de las sustancias, esta cantidad es positiva.

Consideremos ahora una porción de material de espesor l y superficie S colocada perpendicularmente a un campo uniforme (fig. 16-15). La polarización \mathcal{P} , siendo paralela a \mathcal{E} , es también perpendicular a S . El volumen de la rebanada es lS , y por consiguiente su momento dipolar eléctrico es $\mathcal{P}(lS) = (\mathcal{P}S)l$. Pero l es precisamente la separación entre las cargas positivas y negativas que aparecen sobre

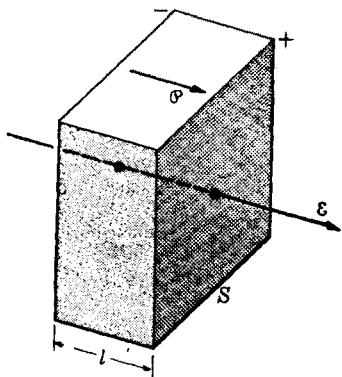


Fig. 16-15. Porción de material polarizado.

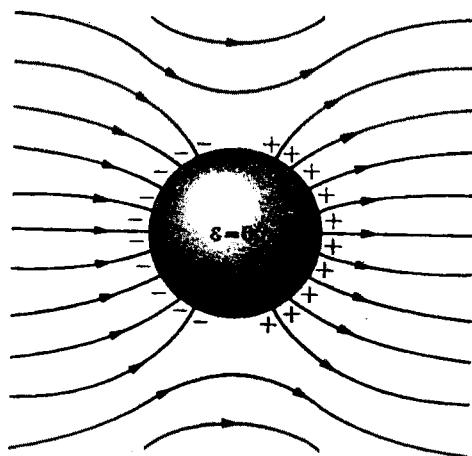


Fig. 16-16. El campo eléctrico dentro de un conductor es nulo.

las dos superficies. Como por definición el momento dipolar eléctrico es igual a la carga multiplicada por la distancia, concluimos que la carga eléctrica que aparece sobre cada superficie es $\mathcal{P}S$ y por consiguiente, la carga por unidad de área σ_φ sobre las caras del material polarizado es \mathcal{P} , ó $\sigma_\varphi = \mathcal{P}$. Aunque este resultado se ha obtenido para una disposición geométrica particular, tiene validez general, y

la carga por unidad de área sobre la superficie de una porción de materia polarizada es igual a la componente de la polarización \mathcal{P} en la dirección de la normal a la superficie del cuerpo.

Así, en la fig. 16-14, la carga por unidad de área sobre la superficie en A es $\mathcal{P}_N = \mathcal{P} \cos \theta$.

Algunos materiales, como la mayoría de los metales, contienen partículas cargadas que pueden moverse más o menos libremente a través del medio. Estos materiales reciben el nombre de *conductores*. En presencia de un campo eléctrico

éstos también se polarizan, pero de un modo que difiere esencialmente de los dieléctricos. A menos que se saquen en forma apropiada, las cargas móviles en un conductor se acumulan sobre la superficie hasta que el campo que producen iguala completamente al campo externo aplicado dentro del conductor, produciendo por lo tanto equilibrio (fig. 16-16). Concluimos, entonces, que *en el interior de un conductor que está en equilibrio eléctrico, el campo eléctrico es nulo*. Por la misma razón, *el campo eléctrico en la superficie debe ser normal*, ya que si tuviera una componente paralela, las cargas se moverían sobre la superficie del conductor. Además, debido a que el campo en el interior del conductor es cero, *todos los puntos de un conductor en equilibrio eléctrico deben estar al mismo potencial*.

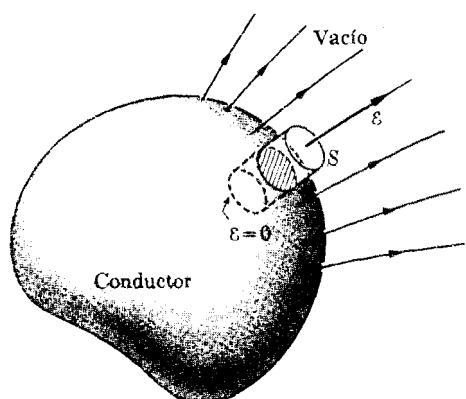


Fig. 16-17. El campo eléctrico en la superficie de un conductor es normal a la superficie.

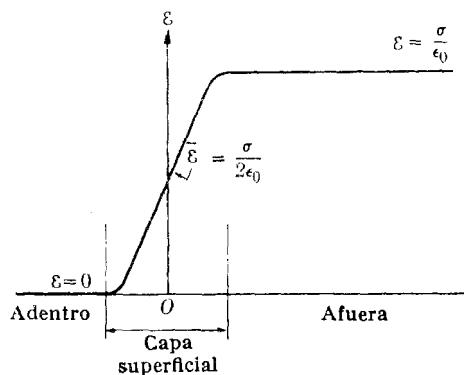


Fig. 16-18. Variación del campo eléctrico al cruzar la superficie de un conductor.

Si el campo eléctrico en el interior de un conductor es nulo, tenemos también que $\text{div } \mathcal{E} = 0$, y por lo tanto la ley de Gauss en su forma diferencial, ec. (16.5) da $\rho = 0$; en consecuencia la densidad de carga en el volumen del conductor es cero. Esto significa que toda la *carga eléctrica de un conductor en equilibrio está sobre su superficie*. Con esta proposición queremos significar que la carga neta está distribuida sobre una superficie con un espesor de varias capas atómicas, no sobre una superficie geométrica.

EJEMPLO 16.9. Relacionar el campo eléctrico en un punto de la superficie de un conductor con la carga eléctrica en la superficie.

Solución: Consideremos un conductor de forma arbitraria, como el de la fig. 16-17. Para hallar el campo eléctrico en un punto inmediatamente fuera de la superficie del conductor, construimos una superficie cilíndrica plana semejante a una caja de píldoras, con una base inmediatamente fuera de la superficie y la otra a una profundidad tal que toda la carga de la superficie quede dentro del cilindro y podamos decir que el campo eléctrico en un punto de esa base es cero. El flujo eléctrico a través de la superficie consta de tres términos. El flujo a través de la base que está dentro del conductor es cero porque el campo es cero. El flujo a través de la superficie lateral es nulo porque el campo es tangente a esta superficie. En consecuencia resta

sólo el flujo a través de la base externa. Si S es el área de esa base, tenemos $\Phi\epsilon = \epsilon S$. Por otra parte, si σ es la densidad de carga del conductor, la carga dentro del cilindro es $q = \sigma S$. Por consiguiente, aplicando la ley de Gauss, $\epsilon S = \sigma S/\epsilon_0$ o

$$\epsilon = \sigma/\epsilon_0. \quad (16.11)$$

Esto da el campo eléctrico en un punto inmediatamente fuera de la superficie de un conductor cargado, mientras que el campo eléctrico en el interior es nulo. Por lo tanto, al atravesar la superficie de un conductor cargado, el campo eléctrico varía del modo ilustrado en la fig. 16-18.

EJEMPLO 16.10. Hallar la fuerza por unidad de área ejercida sobre las cargas de la superficie de un conductor.

Solución: Las cargas en la superficie de un conductor están sometidas a una fuerza repulsiva debido a las otras cargas. La fuerza por unidad de área o esfuerzo eléctrico, puede calcularse multiplicando el valor promedio del campo eléctrico por la carga por unidad de área. El campo promedio es, según la fig. 16-18, $\bar{\epsilon} = \sigma/2\epsilon_0$. Luego el esfuerzo eléctrico es

$$F_s = \sigma\bar{\epsilon} = \sigma^2/2\epsilon_0$$

cantidad siempre positiva, ya que depende de σ^2 y por lo tanto corresponde a una fuerza que impulsa a las cargas fuera del conductor.

16.6 Desplazamiento eléctrico

En la sección precedente vimos que un dieléctrico polarizado tiene ciertas cargas sobre su superficie (y también, a menos que su polarización sea uniforme, en todo su volumen). Estas cargas de polarización, sin embargo, están "congeladas" en el sentido que están ligadas a átomos o moléculas determinadas y no son libres de moverse a través del dieléctrico. En otros materiales tales como un metal o un gas ionizado, puede haber cargas eléctricas capaces de moverse a través del material, por lo cual las llamaremos cargas *libres*. En muchas circunstancias, como en esta sección, tendremos que distinguir claramente entre cargas libres y cargas de polarización.

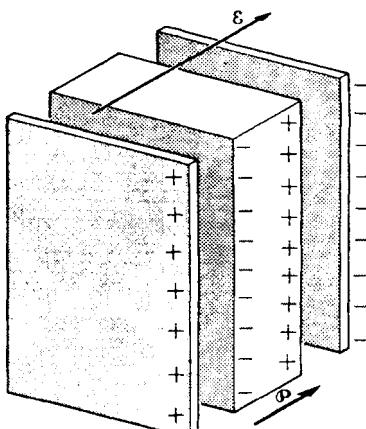


Fig. 16-19. Dieléctrico colocado entre placas con cargas opuestas. Las cargas de las placas son cargas libres y las cargas de la superficie del dieléctrico son cargas de polarización.

Consideremos de nuevo una porción de un material dieléctrico colocado entre dos placas conductoras paralelas (fig. 16-19), conteniendo cargas libres iguales y opuestas. La densidad de carga superficial sobre la placa izquierda es $+\sigma_{\text{libre}}$ y sobre la placa de la derecha es $-\sigma_{\text{libre}}$. Estas cargas producen un campo eléctrico que polariza el material de modo que aparecen cargas de polarización sobre cada superficie del mismo. Estas cargas de polarización tienen signos opuestos a los de las cargas sobre las placas. Por consiguiente las cargas de polarización sobre las caras del dieléctrico equilibran parcialmente a las cargas libres de las placas conductoras. Siendo \mathcal{P} el módulo de la polarización en el material, la densidad superficial de carga sobre la cara izquierda del mismo es $-\mathcal{P}$, mientras que sobre la cara de la derecha es $+\mathcal{P}$. La densidad de carga superficial efectiva o neta a la izquierda es $\sigma = \sigma_{\text{libre}} - \mathcal{P}$, con un resultado igual y opuesto a la derecha. Estas cargas superficiales netas dan lugar a un campo eléctrico uniforme que, en conformidad con la ec. (16.11), está dado por $\mathcal{E} = \sigma/\epsilon_0$. De este modo, usando el valor efectivo de σ , tenemos

$$\mathcal{E} = \frac{1}{\epsilon_0} (\sigma_{\text{libre}} - \mathcal{P}) \quad \text{y} \quad \sigma_{\text{libre}} = \epsilon_0 \mathcal{E} + \mathcal{P},$$

expresión que da las cargas libres sobre la superficie de un conductor rodeado por un dieléctrico en función del campo eléctrico en el dieléctrico y de la polarización del mismo. Cuando observamos que, en el caso que estamos estudiando, \mathcal{E} y \mathcal{P} son vectores en la misma dirección, los resultados anteriores sugieren la conveniencia de introducir un nuevo vector, llamado *desplazamiento eléctrico*, definido por

$$\mathcal{D} = \epsilon_0 \mathcal{E} + \mathcal{P}. \quad (16.12)$$

Obviamente, \mathcal{D} se expresa en $C\ m^{-2}$, ya que éstas son las unidades de las cantidades que aparecen en el segundo miembro de la ec. (16.12). Para el caso especial que estamos considerando, encontramos que $\sigma_{\text{libre}} = \mathcal{D}$; o sea que las cargas libres por unidad de área en la superficie del conductor son iguales al desplazamiento eléctrico en el dieléctrico. Este resultado tiene validez general y puede extenderse a conductores de cualquier forma. Por consiguiente *la componente de \mathcal{D} según la normal a la superficie de un conductor sumergido en un dieléctrico da la densidad de carga superficial en el conductor*. Esto es

$$\sigma_{\text{libre}} = \mathcal{D} \cdot \mathbf{u}_N,$$

mientras que la componente normal de $\epsilon_0 \mathcal{E}$ da la carga efectiva o neta, tomando en consideración la compensación debida a las cargas en la superficie del dieléctrico; o sea: $\sigma = \epsilon_0 \mathcal{E} \cdot \mathbf{u}_N$. La carga libre total en el conductor es entonces

$$q_{\text{libre}} = \oint_S \sigma_{\text{libre}} dS = \oint_S \mathcal{D} \cdot \mathbf{u}_N dS = \Phi_{\mathcal{D}}. \quad (16.13)$$

Un análisis más detallado, que omitiremos, indica que *el flujo de \mathcal{D} a través de cualquier superficie cerrada es igual a la carga total "libre" en el interior de la su-*

perficie, excluyendo todas las cargas debidas a la polarización del medio. Por lo tanto la ec. (16.13) es válida en general para cualquier superficie cerrada.

Para casos en los cuales la ec. (16.10) es válida, podemos escribir

$$\mathcal{D} = \epsilon_0 \mathcal{E} + \epsilon_0 \chi_e \mathcal{E} = (1 + \chi_e) \epsilon_0 \mathcal{E} = \epsilon \mathcal{E}, \quad (16.14)$$

donde el coeficiente

$$\epsilon = \frac{\mathcal{D}}{\mathcal{E}} = (1 + \chi_e) \epsilon_0 \quad (16.15)$$

se llama *permitividad* del medio, y se expresa en las mismas unidades que ϵ_0 ; esto es, $\text{m}^{-3} \text{ kg}^{-1} \text{ s}^2 \text{ C}^2$. La *permitividad relativa* se define como

$$\epsilon_r = \epsilon / \epsilon_0 = 1 + \chi_e. \quad (16.16)$$

y es un número puro, independiente del sistema de unidades. La permitividad relativa se llama *constante dieléctrica*. Para la mayoría de las sustancias es mayor que la unidad.

Cuando la relación $\mathcal{D} = \epsilon \mathcal{E}$ vale para un medio, podemos escribir la ec. (16.13) como $q_{\text{libre}} = \oint_S \epsilon \mathcal{E} \cdot u_N dS$ y, si el medio es homogéneo de modo que ϵ sea constante,

$$\Phi_E = \oint \mathcal{E} \cdot u_N dS = q_{\text{libre}} / \epsilon. \quad (16.17)$$

Comparando la ec. (16.17) con la ec. (16.3) vemos que el efecto del dieléctrico sobre el campo eléctrico \mathcal{E} es reemplazar ϵ_0 por ϵ si sólo se consideran las cargas libres. Por consiguiente el campo y el potencial eléctricos producidos por una carga puntual inmersa en un dieléctrico son

$$\mathcal{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon r^2} u_r \quad \text{y} \quad V = \frac{q}{4\pi\epsilon r}. \quad (16.18)$$

El módulo de la fuerza de interacción entre dos cargas puntuales inmersas en un dieléctrico es entonces

$$F = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon r^2}. \quad (16.19)$$

Como ϵ es en general mayor que ϵ_0 , la presencia del dieléctrico produce una reducción efectiva de la interacción porque la polarización de las moléculas del dieléctrico hace de pantalla.

16.7 Cálculo de la susceptibilidad eléctrica

La susceptibilidad eléctrica χ_e , que describe la respuesta de un medio a la acción de un campo eléctrico externo, está evidentemente relacionada con las propiedades de los átomos y moléculas del medio. En esta sección describiremos bre-

vemente cómo esta cantidad, de carácter macroscópico, está relacionada con las propiedades atómicas del medio.

Hemos explicado previamente que un átomo colocado en un campo eléctrico se polariza debido al desplazamiento relativo de las cargas positivas y negativas. Si \mathbf{p} es el momento dipolar eléctrico inducido en el átomo por un campo externo \mathcal{E} , podemos suponer que \mathbf{p} es proporcional a \mathcal{E} , resultado confirmado por experimentos, y escribir

$$\mathbf{p} = \alpha \epsilon_0 \mathcal{E}, \quad (16.20)$$

donde α es una constante característica de cada átomo, llamada *polarizabilidad*; se expresa en m^3 . La constante ϵ_0 se escribe en la ecuación explícitamente por conveniencia. Si hay n átomos o moléculas por unidad de volumen, la polarización del medio es $\rho = np = n\alpha\epsilon_0\mathcal{E}$. Esta ecuación, comparada con la ec. (16.10), da para la susceptibilidad eléctrica del material* $\chi_e = n\alpha$.

De este modo el cálculo de la susceptibilidad eléctrica se reduce al cálculo de la polarizabilidad de los átomos (o moléculas) de la sustancia. Esto conduce a determinar el efecto de un campo externo sobre el movimiento de los electrones en el átomo. Pero eso a su vez requiere que tengamos información detallada acerca del movimiento electrónico en un átomo. Este movimiento sigue las leyes de la mecánica cuántica y el cálculo del efecto perturbador del campo eléctrico externo está fuera del objeto de este libro. Por ello presentaremos solamente los resultados más importantes, distinguiendo el efecto sobre las sustancias no polares de las sustancias polares.

(a) *Efecto de distorsión.* Cuando las moléculas de una sustancia no tienen momento dipolar eléctrico permanente, la polarización proviene enteramente del efecto de distorsión producido por el campo eléctrico sobre las órbitas electrónicas. Podemos describir este efecto como un desplazamiento del centro de la distribución de cargas electrónicas con respecto al núcleo. Esto da como resultado un dipolo eléctrico inducido que, en átomos y en muchas moléculas, es paralelo al campo eléctrico aplicado.

Cada átomo o molécula tiene una serie de frecuencias características $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots$ que corresponden a las frecuencias de la radiación electromagnética que la sustancia puede absorber o emitir. Estas frecuencias constituyen el espectro electromagnético de la sustancia. Cuando el campo eléctrico es constante, la polarizabilidad atómica se llama *polarizabilidad estática* y está dada por la expresión

$$\alpha = \frac{e^2}{\epsilon_0 m_e} \sum_i \frac{f_i}{\omega_i^2}, \quad (16.21)$$

* Rigurosamente hablando, cuando se escribe la ec. (16.20) para un átomo o molécula que está inmerso en un medio material y no aislado, el campo eléctrico que aparece en el segundo miembro de la ecuación debe ser el campo eléctrico resultante en el medio menos el campo eléctrico producido por el mismo átomo. Cuando se incluye esta corrección, la relación entre χ_e y α se convierte en $\chi_e = n\alpha/(1 - n\alpha/3)$. Sin embargo, para la mayoría de los materiales (principalmente gases), la relación $\chi_e = n\alpha$ es una buena aproximación.

donde ω_i representa cualquier frecuencia del espectro electromagnético y la suma se extiende a todas las frecuencias. Las cantidades simbolizadas por f_i se llaman *intensidades de oscilación* de la sustancia. Todas ellas son positivas y menores que uno, y representan la proporción relativa con que cada una de las frecuencias del espectro contribuye a la polarizabilidad del átomo. Ellas satisfacen la relación $\sum f_i = 1$. Las otras cantidades de la ec. (16.21) tienen sus significados usuales.

Puede constituir un enigma para el estudiante el hecho de que una frecuencia ω_i esté asociada con un efecto producido por un campo estático. Su presencia puede, sin embargo, justificarse usando un modelo fenomenológico muy simple, como se indica en el ejemplo 16.11.

Usando la relación $\chi_e = n\alpha$, encontramos que la susceptibilidad eléctrica estática es

$$\chi_e = \frac{ne^2}{\epsilon_0 m_e} \sum_i \frac{f_i}{\omega_i^2} = 3,19 \times 10^3 n \sum_i \frac{f_i}{\omega_i^2}. \quad (16.22)$$

Esta expresión relaciona una propiedad macroscópica, χ_e , con las propiedades atómicas n , ω_i y f_i , de la sustancia. Veamos hasta dónde nuestros resultados están de acuerdo con los experimentos. Si la radiación del átomo está en la región visible, las frecuencias ω_i son del orden de $5 \times 10^{15} \text{ s}^{-1}$, de modo que la sumatoria que aparece en la ec. (16.22) es del orden de 4×10^{-32} . Además, n es del orden de 10^{28} átomos por metro cúbico para la mayoría de los sólidos y líquidos y cerca de 10^{25} átomos/m³ para gases en condiciones normales. Por consiguiente la ec. (16.22) muestra que la susceptibilidad eléctrica estática χ_e de materiales no polares que radian en la región visible es del orden de 10^0 (o uno) para sólidos y 10^{-3} para gases. Como nuestras estimaciones no han sido cuidadosas, no podemos esperar una reproducción precisa de los resultados experimentales. Sin embargo, la comparación con los valores experimentales de la susceptibilidad eléctrica para unos pocos materiales, como los dados en la tabla 16-1, muestra conformidad en cuanto al orden de magnitud.

TABLA 16-1 Susceptibilidades eléctricas a temperatura ambiente

Sustancia	χ_e	Sustancia	χ_e
<i>Sólidos</i>		<i>Gases*</i>	
mica	5	hidrógeno	$5,0 \times 10^{-4}$
porcelana	6	helio	$0,6 \times 10^{-4}$
vidrio	8	nitrógeno	$5,5 \times 10^{-4}$
baquelita	4,7	oxígeno	$5,0 \times 10^{-4}$
		argón	$5,2 \times 10^{-4}$
<i>Líquidos</i>		óxido de carbono	$9,2 \times 10^{-4}$
aceite	1,1	vapor de agua	$7,0 \times 10^{-3}$
trementina	1,2	aire	$5,4 \times 10^{-4}$
benceno	1,84	aire (100 atm)	$5,5 \times 10^{-2}$
alcohol (etílico)	24		
agua	78		

*A 1 atm y 20°C

La discusión previa tiene valor sólo para campos estacionarios. Si un campo depende del tiempo, debemos esperar un resultado diferente para la polarizabilidad atómica, llamada en este caso *polarizabilidad dinámica*, porque la distorsión del movimiento electrónico bajo un campo dependiente del tiempo será obviamente diferente de la producida por campos estacionarios. Supongamos que el campo oscila con una frecuencia definida ω . Este campo oscilatorio superpondrá una perturbación osculatoria al movimiento natural de los electrones que es análoga a la oscilación forzada estudiada en la sección 12.13. Cuando no se toma en cuenta el amortiguamiento, el resultado del cálculo, usando las técnicas de la mecánica cuántica, da para la susceptibilidad dinámica

$$\chi_e = \frac{ne^2}{\epsilon_0 m_e} \sum_i \frac{f_i}{\omega_i^2 - \omega^2}, \quad (16.23)$$

donde todas las cantidades tienen el significado ya establecido. Una justificación fenomenológica simple de este resultado se da en el ejemplo 16.11. Obsérvese que el resultado dinámico (16.23), se reduce al caso estacionario, ec. (16.22), si $\omega = 0$.

La constante dieléctrica o permitividad relativa del medio es, usando la ec. (16.23) para el caso dinámico,

$$\epsilon_r = 1 + \chi_e = 1 + \frac{ne^2}{\epsilon_0 m_e} \sum_i \frac{f_i}{\omega_i^2 - \omega^2}. \quad (16.24)$$

Si hiciéramos el grafico de ϵ_r en función de ω , hallaríamos que ϵ_r es infinita para ω igual a cada una de las frecuencias características ω_i , en contradicción con lo que se observa. Este resultado no es físico y se origina en el hecho de que hemos excluido el amortiguamiento al hacer los cálculos de la susceptibilidad dinámica.

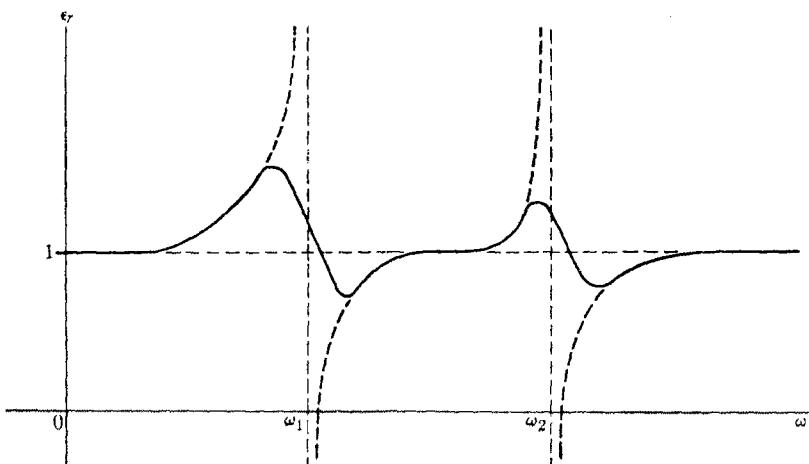


Fig. 16-20. Variación de la permitividad relativa en función de la frecuencia del campo eléctrico.

Este amortiguamiento no se debe al movimiento del electrón en un fluido viscoso, sino que tiene un origen diferente. Corresponde a la energía que el electrón pierde por radiación como consecuencia de las oscilaciones forzadas. (Esto se explicará en la sección 19.4).

La variación observada de ϵ_r en función de ω se ilustra en la fig. 16-20. El diagrama se repite para las frecuencias características $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots$ de cada sustancia. Esta variación tiene gran influencia en el comportamiento óptico y eléctrico de la sustancia.

(b) *Moléculas con momento dipolar permanente.* Las polarizabilidades obtenidas con las ecs. (16.22) y (16.23) son "inducidas" porque resultan de la distorsión del movimiento electrónico por un campo externo. Sin embargo, cuando existe un dipolo eléctrico permanente, entra en juego otro efecto. Consideremos un gas polar cuyas moléculas tienen un momento dipolar permanente p_0 . En ausencia

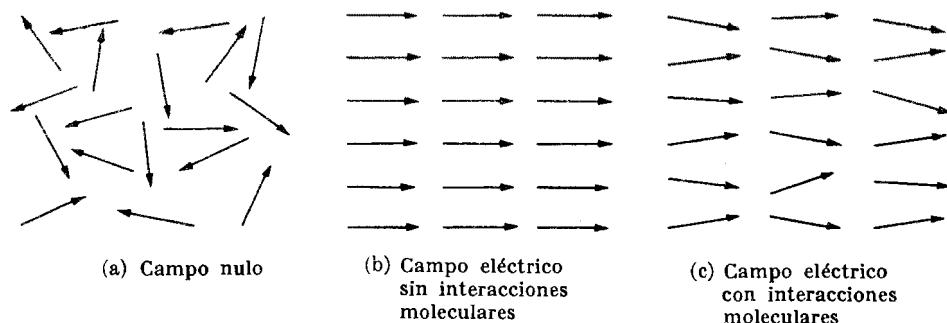


Fig. 16-21. Orientación de los dipolos eléctricos en un campo eléctrico.

de un campo eléctrico externo, estos momentos dipolares se orientan al azar y no se observa un momento dipolar colectivo o macroscópico (fig. 16-21). Pero cuando se aplica un campo eléctrico estacionario, éste tiende a orientar todos los dipolos eléctricos en la dirección del campo. Este alineamiento sería perfecto en ausencia de las interacciones moleculares (fig. 16.21b); pero las colisiones entre las moléculas tienden a desordenar los dipolos eléctricos. El desorden no es completo porque el campo eléctrico aplicado hace que los dipolos tiendan a orientarse predominantemente en la dirección del campo (fig. 16.21c). Como resultado, el valor medio de la componente paralela al campo eléctrico del momento dipolar de una molécula está dado por

$$\bar{p} = \frac{p_0^2}{3kT} \epsilon, \quad (16.25)$$

donde k es la constante de Boltzmann, definida por la ec. (9.60), y T es la temperatura absoluta del gas. Obsérvese que \bar{p} disminuye cuando la temperatura aumenta. Esta dependencia de la temperatura se debe a que la agitación molecular aumenta con la temperatura; cuanto más rápido se mueven las moléculas

más efectivamente vencen el efecto de alineamiento del campo eléctrico aplicado. Esto ocasiona una disminución en el promedio del momento dipolar según la dirección del campo.

Comparando la ec. (16.25) con la ec. (16.20), obtenemos el promedio o polarizabilidad efectiva de una molécula como $\alpha = p_0^2/3\epsilon_0 kT$ y, si hay n moléculas por unidad de volumen, la susceptibilidad efectiva $\chi_e = n\alpha$ es

$$\chi_e = \frac{np_0^2}{3\epsilon_0 kT}, \quad (16.26)$$

resultado conocido como *fórmula de Langevin*. Los momentos dipolares eléctricos de las moléculas son del orden de magnitud de la carga electrónica (1.6×10^{-19} C) multiplicada por la dimensión de la molécula (10^{-10} m) o cerca de 10^{-30} C m (recordar la tabla 14-1). Introduciendo los valores de las otras constantes en la ec. (16.26), tenemos que, a temperatura ambiente ($T = 298^\circ\text{K}$), la susceptibilidad eléctrica de una sustancia compuesta de moléculas polares es también del orden de 10^9 (o uno) para los sólidos y 10^{-3} para los gases, lo cual está en conformidad con los valores de muchos gases polares.

Dehcemos observar que la susceptibilidad eléctrica debida a la orientación de moléculas con momentos dipolares permanentes es inversamente proporcional a la temperatura absoluta, mientras que la susceptibilidad eléctrica inducida debida a la distorsión del movimiento electrónico en átomos e moléculas, ec. (16.22), es fundamentalmente independiente de la temperatura, exceptuando que n varía con la misma debido a la expansión térmica. Esto ofrece un medio de separar los dos efectos experimentalmente. Midiendo χ_e a temperaturas diferentes obtendremos una dependencia de la temperatura de la forma

$$\chi_e = A + \frac{B}{T}.$$

Un resultado más complejo se obtiene cuando el campo eléctrico depende del tiempo.

Una clase especial de sustancias llamadas *ferroeléctricas* presenta una polarización permanente en ausencia de un campo eléctrico externo; esto sugiere que los dipolos permanentes de sus moléculas tienen una tendencia natural a alinearse. Este alineamiento probablemente resulta de las interacciones mutuas de las moléculas, las cuales producen intensos campos locales que lo favorecen. Entre estas sustancias mencionaremos BaTiO_3 , KNHO_3 y LiTaO_3 . Una de las sustancias ferroeléctricas más antiguaamente conocida es la sal de Rochelle: $\text{NaK}(\text{C}_4\text{H}_4\text{O}_6) \cdot 4\text{H}_2\text{O}$.

EJEMPLO 16.11. Discutir la polarización de un átomo en un campo eléctrico externo.

Solución: En este ejemplo intentaremos, usando un modelo muy simplificado y fenomenológico, determinar el efecto que un campo eléctrico externo produce sobre el movimiento de los electrones en los átomos.

Supongamos que, cuando el centro del movimiento electrónico se desplaza una distancia x con respecto al núcleo, una fuerza media $-kx$ actúa sobre el electrón,

la cual tiende a restaurarlo a su posición normal; el equilibrio requiere que esta fuerza sea igual a la fuerza $-ex$ debida al campo eléctrico aplicado. Luego $-kx - ex = 0 \Rightarrow x = -e\epsilon/k$. El signo menos indica que la órbita del electrón se desplaza en sentido opuesto al del campo eléctrico. El momento eléctrico inducido en el átomo por la perturbación del movimiento electrónico es $p = -ex = (e^2/k)\epsilon$, y de esta manera tiene la misma dirección que el campo eléctrico. Podemos expresar esta relación de una manera ligeramente diferente asociando una frecuencia ω_0 con la constante k , tal como aparece en la ec. (12.6); esto es $k = m_e\omega_0^2$. Entonces en forma vectorial

$$\mathbf{p} = \frac{e^2}{m_e\omega_0^2} \mathbf{\epsilon}.$$

Comparando este resultado con la definición dada en la ec. (16.20), tenemos que la polarizabilidad atómica para este modelo simple es

$$\alpha = \frac{e^2}{\epsilon_0 m_e \omega_0^2}.$$

Usando la relación $\chi_e = n\alpha$, encontramos que la polarizabilidad eléctrica estática es

$$\chi_e = \frac{ne^2}{\epsilon_0 m_e \omega_0^2} = (3,19 \times 10^3) \frac{n}{\omega_0^2}. \quad (16.27)$$

Para que nuestro modelo tenga significado físico, debemos identificar la frecuencia ω_0 con alguna propiedad atómica. Si el campo ϵ se elimina, podemos decir que, usando las ideas expuestas en el capítulo 12, la fuerza restauradora $-kx$ superpone sobre el movimiento natural del electrón, una oscilación de frecuencia ω_0 . Más adelante, en el capítulo 19, probaremos que una carga oscilante radia energía. Así, podemos identificar ω_0 con la frecuencia de la radiación emitida por el átomo. Por lo tanto, si el espectro de la sustancia contiene sólo una frecuencia ω_0 , nuestro modelo coincide básicamente con la ec. (16.21).

Consideremos ahora el caso en el cual el campo eléctrico aplicado varía con el tiempo según $\epsilon = \epsilon_0 \cos \omega t$. Entonces es razonable suponer que hay una perturbación oscilatoria superpuesta al movimiento natural del electrón, resultando la siguiente ecuación de movimiento:

$$m_e \frac{d^2x}{dt^2} = -kx - e\epsilon_0 \cos \omega t, \quad (16.28)$$

donde el último término corresponde a la fuerza debida al campo oscilante. Haciendo $k = m_e\omega_0^2$ podemos escribir la ecuación anterior en la forma

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = -\frac{e\epsilon_0}{m_e} \cos \omega t. \quad (16.29)$$

Esta ecuación es similar a la ec. (12.56) para las oscilaciones forzadas de un oscilador amortiguado. La principal diferencia está, sin embargo, en que en la ec. (16.29) no hay término de amortiguación. Debemos suponer una solución de la forma $x = A \cos \omega t$, la cual, cuando se sustituye en la ec. (16.29), da $A = -e\epsilon_0 / (\omega_0^2 - \omega^2)$. Por consiguiente

$$x = -\frac{e}{m_e(\omega_0^2 - \omega^2)} \epsilon_0 \cos \omega t = -\frac{e}{m_e(\omega_0^2 - \omega^2)} \epsilon,$$

ya que $\epsilon = \epsilon_0 \cos \omega t$. El dipolo eléctrico inducido es

$$p = -ex = \frac{e^2}{m_e(\omega_0^2 - \omega^2)} \epsilon,$$

de donde obtenemos la polarizabilidad dinámica del átomo como

$$\alpha = \frac{e^2}{\epsilon_0 m_e (\omega_0^2 - \omega^2)}. \quad (16.30)$$

Para obtener la susceptibilidad dinámica, usamos de nuevo la relación $\chi_e = n\alpha$, y encontramos que

$$\chi_{e(\text{dinámica})} = \frac{n e^2}{\epsilon_0 m_e (\omega_0^2 - \omega^2)}, \quad (16.31)$$

que es esencialmente idéntica a la ec. (16.23) si hay sólo la frecuencia ω_0 en el espectro electromagnético de la sustancia. Una vez más observamos que nuestro burdo modelo fenomenológico no puede dar resultados precisos. Una de las razones es que, como en el caso estático, estamos suponiendo una frecuencia única ω_0 . Otra razón es que estamos ignorando el hecho de que el movimiento del electrón sigue las leyes de la mecánica cuántica y no las de la mecánica newtoniana.

16.8 Capacitancia ; capacitores

Hemos probado (sección 14.8) que el potencial eléctrico en la superficie de una esfera de radio R y carga Q es $V = Q/4\pi\epsilon_0 R$. Si la esfera está rodeada por un dieléctrico, tendremos en su lugar, reemplazando ϵ_0 por ϵ ,

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon R}.$$

La relación Q/V para la esfera es entonces $4\pi\epsilon R$, que es una cantidad constante independiente de la carga Q . Esto es comprensible porque si el potencial es proporcional a la carga que lo produce, la razón de las dos debe ser una constante. Esta última proposición es válida para todo conductor cargado cualquiera que sea su forma geométrica. En consecuencia, la *capacitancia* de un conductor aislado se define como el cociente entre su carga y su potencial,

$$C = \frac{Q}{V}. \quad (16.32)$$

La capacitancia de un conductor esférico es, como hemos indicado,

$$C = \frac{Q}{V} = 4\pi\epsilon R.$$

Si la esfera está rodeada por el vacío en lugar de un dieléctrico, tenemos para su capacitancia $C = 4\pi\epsilon_0 R$. Por consiguiente, rodear una esfera, y en general cualquier conductor, con un dieléctrico, aumenta su capacitancia en el factor ϵ/ϵ_0 . Esto se debe al efecto de pantalla que hacen las cargas opuestas que se han inducido sobre la superficie del dieléctrico adyacente al conductor. Estas cargas reducen la carga efectiva del conductor disminuyendo su potencial en el mismo factor.

La capacitancia de un conductor se expresa en $C\text{ V}^{-1}$, unidad llamada *farad* (abreviado F) en honor de Michael Faraday. El farad se define como la capacitancia de un conductor aislado cuyo potencial eléctrico, después de recibir una carga de un coulomb, es de un volt. En función de las unidades fundamentales, tenemos que $F = C\text{ V}^{-1} = m^2 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^2 \text{ C}^2$.

El concepto de capacitancia puede extenderse a un sistema de conductores. Consideremos el caso de dos conductores con cargas Q y $-Q$ (fig. 16-22). Si V_1 y V_2 son sus potenciales respectivos, de modo que $V = V_1 - V_2$ sea su *diferencia de potencial*, la capacitancia del sistema se define como

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2} = \frac{Q}{V}. \quad (16.33)$$

Esta disposición constituye lo que se llama un *capacitor*. Los capacitores tienen amplia aplicación en circuitos eléctricos. Un capacitor típico está formado por dos conductores planos y paralelos separados por una distancia d , con el espacio

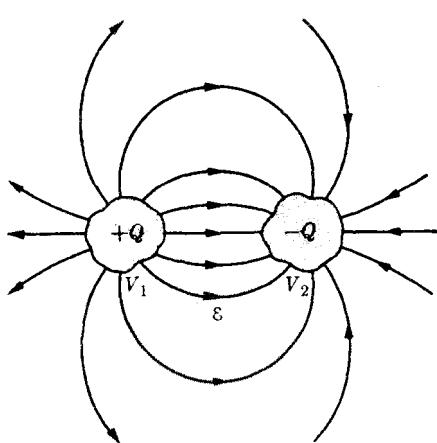


Fig. 16-22. Sistema de dos conductores con cargas iguales y opuestas.

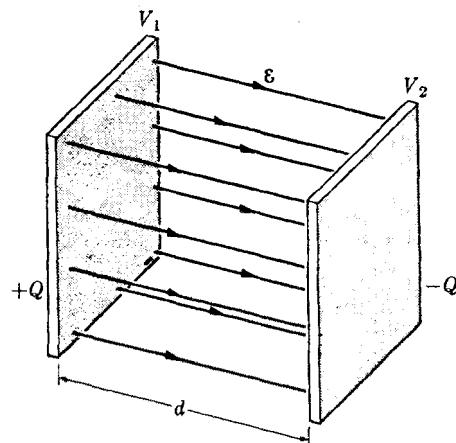


Fig. 16-23. Capacitor de placas paralelas.

entre ellos ocupado por un dieléctrico (fig. 16-23). El campo eléctrico en el espacio entre los conductores es uniforme, y está dado por $\mathcal{E} = (V_1 - V_2)d$ conforme a la ec. (14.31). Pero si σ es la densidad superficial de carga, la intensidad de campo eléctrico en el espacio entre las placas es, según el ejemplo 16.2, $\mathcal{E} = \sigma/\epsilon_0$, donde ϵ_0 se ha reemplazado por ϵ debido a la presencia de un dieléctrico. Por lo tanto

$$V_1 - V_2 = \mathcal{E}d = \sigma d / S\epsilon.$$

Por otra parte, si S es el área de las placas metálicas, debemos tener $Q = \sigma S$. Luego, haciendo la sustitución en la ec. (16.33), obtenemos para la capacitancia

del sistema,

$$C = \epsilon S/d. \quad (16.34)$$

Esto sugiere un medio práctico para medir la permitividad o constante dieléctrica de un material. Primero medimos la capacitancia de un capacitor sin material entre las placas, resultando

$$C_0 = \epsilon_0 S/d.$$

Luego llenamos el espacio entre las placas con el material que se está investigando y medimos la nueva capacitancia, dada por la ec. (16.34). Entonces tenemos

$$\frac{C}{C_0} = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} = \epsilon_r.$$

Por consiguiente el cociente entre las dos capacitancias da la permitividad relativa o constante dieléctrica del material colocado entre las placas.

EJEMPLO 16.12. Estudiar la combinación de capacitores.

Solución: Los capacitores pueden combinarse en dos formas: en serie y en paralelo. En la combinación en serie (ver fig. 16-24a), la placa negativa de un capacitor se conecta a la positiva del próximo, y así sucesivamente. En consecuencia todos los capacitores tienen la misma carga, positiva o negativa, sobre sus placas.

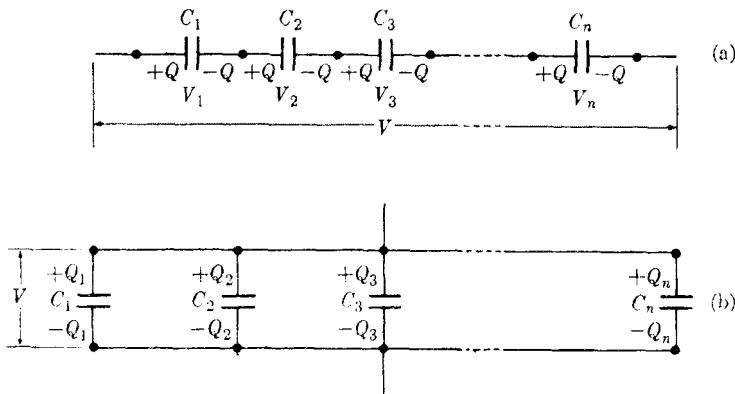


Fig. 16-24. Combinación de capacitores en serie y en paralelo.

Llámemos $V_1, V_2, V_3, \dots, V_n$ a las diferencias de potencial en los capacitores. Si C_1, C_2, \dots, C_n son sus respectivas capacitancias tenemos que $V_1 = Q/C_1, V_2 = Q/C_2, \dots, V_n = Q/C_n$. Por lo tanto la diferencia de potencial total es

$$V = V_1 + V_2 + \dots + V_n = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n} \right) Q.$$

El sistema se puede sustituir por un solo capacitor cuya capacitancia C satisface

la relación $V = Q/C$. Por consiguiente

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n}, \quad (16.35)$$

da la capacitancia resultante para una disposición de capacitores en serie.

En la asociación en paralelo (fig. 16-24b), todas las placas positivas se conectan a un punto común, y las negativas también a otro punto común, de modo que la diferencia de potencial es la misma para todos los capacitores. En consecuencia, si las cargas son Q_1, Q_2, \dots, Q_n , debemos tener $Q_1 = C_1 V, Q_2 = C_2 V, \dots, Q_n = C_n V$. La carga total del sistema es

$$Q = Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n = (C_1 + C_2 + \dots + C_n) V.$$

El sistema puede reemplazarse por un capacitor único cuya capacitancia C satisface la relación $Q = CV$. Luego

$$C = C_1 + C_2 + \dots + C_n \quad (16.36)$$

da la capacitancia resultante de una disposición de capacitores en paralelo.

16.9 Energía del campo eléctrico

Para cargar un conductor es necesario gastar energía porque, para suministrársela más carga, debe realizarse trabajo para vencer la repulsión de las cargas ya presentes. Este trabajo ocasiona un aumento en la energía del conductor. Por ejemplo, consideremos un conductor de capacitancia C con una carga q . Su potencial es $V = q/C$. Si añadimos una carga dq al conductor, trayéndola desde el infinito, el trabajo hecho es, según la ec. (14.37), $dW = V dq$. Este trabajo es igual al incremento dE_E en la energía del conductor. Por consiguiente, usando el valor de V , tenemos

$$dE_E = \frac{q dq}{C}.$$

El aumento total de la energía del conductor cuando su carga se incrementa desde cero hasta el valor Q (lo que es igual al trabajo hecho durante el proceso) es

$$E_E = \frac{1}{C} \int_0^Q q dq = \frac{Q^2}{2C}. \quad (16.37)$$

Para el caso de un conductor esférico, $C = 4\pi\epsilon R$, y la energía es

$$E_E = \frac{1}{2} \left(\frac{Q^2}{4\pi\epsilon R} \right). \quad (16.38)$$

Esta expresión se puede relacionar de un modo muy interesante con el campo eléctrico producido por la esfera. El campo eléctrico creado por un conductor esférico a una distancia r mayor que su radio, es

$$\mathcal{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2}.$$

Calculemos la integral de ϵ^2 extendida al volumen externo a la esfera. Para obtener el volumen elemental de integración, dividamos el espacio exterior en capas esféricas delgadas de radio r y espesor dr (fig. 16-25). El área de cada capa es $4\pi r^2$, y en consecuencia su volumen es $dv = \text{área} \times \text{espesor} = 4\pi r^2 dr$. Por lo tanto tenemos

$$\int_R^\infty \epsilon^2 dv = \int_R^\infty \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} \right)^2 (4\pi r^2 dr) = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon^2} \int_R^\infty \frac{dr}{r^2} = \\ = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon^2 R}.$$

Comparando este resultado con la ec. (16.38), podemos escribir la energía de un conductor esférico cargado en la forma

$$E_E = \frac{1}{2} \epsilon \int_R^\infty \epsilon^2 dv.$$

Un tratamiento matemático más riguroso indica que este resultado tiene validez general, y la energía requerida para disponer un sistema de cargas puede expresarse en la forma

$$E_E = \frac{1}{2} \epsilon \int_{\text{todo el espacio}} \epsilon^2 dv. \quad (16.39)$$

A esta expresión puede dársele una interpretación física importante. Podemos decir que la energía utilizada en disponer las cargas se ha almacenado en el es-

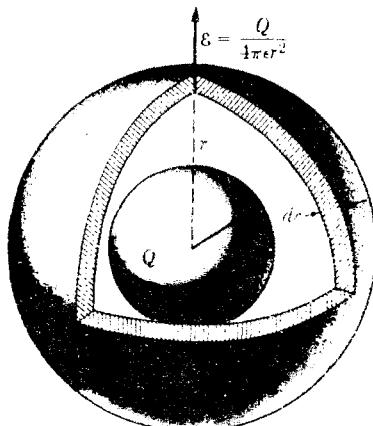


Figura 16-25

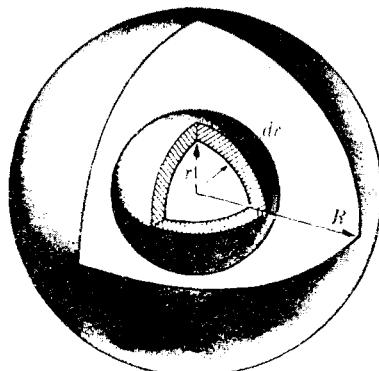


Figura 16-26

pacio que las rodea, de modo que al volumen dv corresponde la energía $\frac{1}{2}\epsilon\epsilon^2 dv$. Por consiguiente la energía por unidad de volumen, o densidad de energía e_E "almacenada" en el campo eléctrico es

$$e_E = \frac{1}{2}\epsilon\epsilon^2. \quad (16.40)$$

Esta interpretación de la energía de un sistema de partículas cargadas distribuidas en todo el espacio donde existe el campo eléctrico es muy útil en la discusión de muchos procesos.

EJEMPLO 16.13. Calcular la energía necesaria para formar una esfera de cargas distribuidas uniformemente en todo su volumen (fig. 16.26).

Solución: Llamemos R al radio de la esfera y Q a la carga distribuida uniformemente en su volumen (fig. 16.26). Dividamos el volumen de la esfera en una serie de capas esféricas delgadas de radios crecientes desde cero hasta R . Podemos imaginar que la distribución ha sido construida superponiendo capas esféricas hasta alcanzar una esfera de radio R , en forma parecida a como está formada una cebolla. Para calcular la energía de la distribución esférica de cargas, debemos sumar las energías empleadas en la superposición de cada capa.

La densidad de carga en el volumen de la esfera es

$$\rho = \frac{Q}{4\pi R^3/3}.$$

Si el radio de la esfera es r , la carga q contenida en ella es

$$q = \rho(\frac{4}{3}\pi r^3) = \frac{Qr^3}{R^3} \quad (16.41)$$

y el potencial eléctrico en la superficie es

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{Qr^2}{4\pi\epsilon_0 R^3}.$$

Al incrementar el radio en la cantidad dr con la superposición de una nueva capa, añadimos una carga dq obtenida diferenciando la ec. (16.41), de donde

$$dq = \frac{3Qr^2}{R^3} dr.$$

La energía necesaria para agregar esta carga a la esfera es

$$dE_\varepsilon = V dq = \frac{3Q^2r^4}{4\pi\epsilon_0 R^6} dr.$$

La energía total necesaria para obtener el valor final de la carga es entonces

$$E_\varepsilon = \int_0^R V dq = \int_0^R \frac{3Q^2r^4}{4\pi\epsilon_0 R^6} dr = \frac{3Q^2}{4\pi\epsilon_0 R^6} \int_0^R r^4 dr.$$

Efectuando la integración, obtenemos

$$E_\varepsilon = \frac{3}{5} \left(\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 R} \right), \quad (16.42)$$

resultado que difiere de la ec. (16.37). La razón está en que para obtener la ec. (16.37) supusimos una esfera de radio constante con cargas distribuidas sobre su superficie mientras que para la ec. (16.42) la carga está distribuida en todo su volumen y se ha formado por adición sucesiva de capas hasta obtener el tamaño final. Dejamos al estudiante la tarea de verificar que en este caso la relación (16.39) sigue siendo válida siempre que se incluya la energía asociada con el campo eléctrico en el interior de la esfera.

Una aplicación interesante de la ec. (16.42) es estimar la energía eléctrica o coulombiana de un núcleo cuya carga es $Q = Ze$. Tenemos

$$E_E = \frac{3}{5} \frac{Z^2 e^2}{4\pi\epsilon_0 R}. \quad (16.43)$$

Sin embargo, en el caso de un núcleo compuesto de protones y neutrones, no hay una distribución uniforme de carga en todo el volumen de la esfera. La carga está concentrada sobre los protones, y un análisis más cuidadoso da un resultado ligeramente diferente, en el cual Z^2 está reemplazado por $Z(Z - 1)$.

EJEMPLO 16.14. Estimar el “radio” del electrón.

Solución: Es muy poco lo que conocemos acerca de la forma geométrica del electrón. Todo lo que podemos decir con certeza es que un electrón es una partícula cargada negativamente con una carga $-e$. Estamos interesados en estimar el tamaño de la región donde esa carga está concentrada. Para simplificar nuestros cálculos, consideremos que el electrón es una esfera de radio R . Podemos calcular su energía eléctrica usando el método anterior y después hacer algunas suposiciones acerca de cómo se distribuye la carga en el volumen del electrón. Si suponemos, por ejemplo, que el electrón es semejante a una esfera sólida de radio R y carga $-e$, su energía será

$$E_E = \frac{3}{5} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R}.$$

Podemos igualar esta energía con la energía m_ec^2 del electrón en reposo, con lo cual resulta

$$m_ec^2 = \frac{3}{5} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R} \quad 6 \quad R = \frac{3}{5} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right) \frac{e^2}{m_ec^2}. \quad (16.44)$$

Esta expresión da el radio del electrón conforme al modelo escogido. Si suponemos que el electrón, en lugar de estar cargado uniformemente, lo está sólo en la superficie, debemos usar la ec. (16.38) para la energía. La expresión que obtenemos para el radio es similar a la ec. (16.44), pero con el factor $\frac{1}{2}$ en lugar del factor $\frac{3}{5}$. Como el electrón probablemente no corresponde a ninguno de estos modelos, se acostumbra adoptar como definición del radio del electrón la cantidad

$$r_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{m_ec^2} = 2,8178 \times 10^{-15} \text{ m.} \quad (16.45)$$

Repetimos que este radio no puede considerarse en un sentido estrictamente geométrico, sino principalmente como una estimación del tamaño de la región donde el electrón está “concentrado”.

16.10 Conductividad eléctrica; ley de Ohm

En las tres últimas secciones hemos discutido ciertos aspectos del comportamiento de una sustancia bajo la influencia de un campo eléctrico. Este comportamiento se ha representado por la susceptibilidad eléctrica del material. Existe otra propiedad importante relacionada con el campo eléctrico externo. Esta propiedad se llama *conductividad eléctrica*, y se estudiará en esta sección en relación con la conducción eléctrica en un metal.

Cuando se aplica un campo eléctrico a un dieléctrico, éste se polariza. Pero si el campo se aplica en una región donde hay cargas libres, éstas se ponen en

movimiento resultando una corriente eléctrica en lugar de la polarización del medio. El campo acelera las cargas, que de este modo ganan energía. (Esta situación se consideró en la sección 14.9).

Cuando en el interior de un cuerpo existen cargas libres, tales como electrones en un metal, sus movimientos son obstaculizados por la interacción con los iones positivos que forman la red cristalina del metal. Consideremos, por ejemplo, un metal con los iones positivos regularmente dispuestos en tres dimensiones, como en la fig. 16-27. Los electrones libres se mueven en un campo eléctrico que muestra

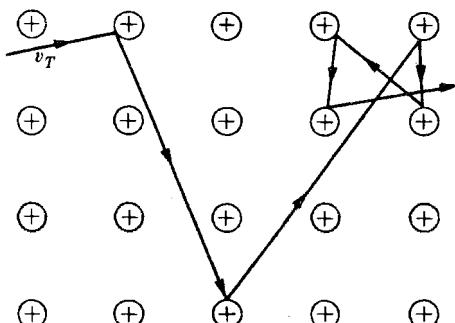


Fig. 16-27. Movimiento de electrones a través de la red cristalina de un metal. En la figura, v_T es la velocidad térmica de los electrones.

la misma periodicidad que la red, y durante sus movimientos son frecuentemente dispersados por el campo. Para describir este tipo de movimiento electrónico debemos utilizar los métodos de la mecánica cuántica. Debido a que los electrones se mueven en todas direcciones, no hay un transporte neto de cargas o sea no hay corriente eléctrica. Sin embargo, si se aplica un campo eléctrico, un movimiento de arrastre se superpone al movimiento natural al azar de los electrones, resultando una corriente eléctrica. Parece natural suponer que la intensidad de la corriente debe estar relacionada con la intensidad del campo eléctrico, y que esta relación es una consecuencia directa de la estructura interna del metal.

Como guía para obtener esta relación, vamos a remitirnos primero a los resultados experimentales. Una de las leyes físicas que es quizás más familiar al estudiante es la *ley de Ohm*, la cual establece que, *en un conductor metálico a temperatura constante, la razón de la diferencia de potencial V entre dos puntos a la corriente eléctrica I es constante*. Esta constante se llama *resistencia eléctrica R* entre los dos puntos del conductor. Por lo tanto podemos expresar la ley de Ohm por

$$V/I = R \quad ó \quad V = RI. \quad (16.46)$$

Esta ley, formulada por el físico alemán Georg Ohm (1787-1854), la siguen con sorprendente precisión muchos conductores en un amplio intervalo de valores de V , de I y de temperatura del conductor. Sin embargo, muchas sustancias, especialmente los semiconductores, no la obedecen.

En la ec. (16.46), vemos que R se expresa en volt/ampere ó $\text{m}^2 \text{ kg s}^{-1} \text{ C}^{-2}$, unidad llamada *ohm*, abreviado Ω . Así, un ohm es la resistencia de un conductor por el cual pasa una corriente de un ampere cuando se establece entre sus extremos una diferencia de potencial igual a un volt.

TABLA 16-2 Conductividades eléctricas a temperatura ambiente

Sustancia	$\sigma, \Omega^{-1} m^{-1}$	Sustancia	$\sigma, \Omega^{-1} m^{-1}$
Metales		Semicongductores	
cobre	$5,81 \times 10^7$	carbono	$2,8 \times 10^4$
plata	$6,14 \times 10^7$	germanio	$2,2 \times 10^{-2}$
aluminio	$3,54 \times 10^7$	silicio	$1,6 \times 10^{-5}$
hierro	$1,53 \times 10^7$		
tungsteno	$1,82 \times 10^7$		
Aleaciones		Aisladores	
manganina	$2,27 \times 10^6$	vidrio	$10^{-10} \text{ a } 10^{-14}$
constantán	$2,04 \times 10^6$	lucita	$< 10^{-13}$
nicromo	$1,0 \times 10^6$	mica	$10^{-11} \text{ a } 10^{-15}$
		cuarzo	$1,33 \times 10^{-18}$
		teflon	$< 10^{-13}$
		parafina	$3,37 \times 10^{-17}$

Consideremos ahora un conductor cilíndrico de longitud l y sección transversal S (fig. 16-28). La corriente puede expresarse como $I = jS$, donde j es la densidad de corriente. El campo eléctrico a lo largo del conductor es $\mathcal{E} = V/l$. (Recordar la ec. 14.30). Por consiguiente podemos escribir la ec. (14.46) en la forma $\mathcal{E}l = RjS$ ó

$$j = \left(\frac{l}{RS} \right) \mathcal{E} = \sigma \mathcal{E}, \quad (16.47)$$

donde $\sigma = l/RS$ es una nueva constante llamada *conductividad eléctrica* del material. Se expresa en $\Omega^{-1} m^{-1}$ ó $m^{-3} kg^{-1} s C^2$. La relación entre σ y R se escribe más frecuentemente en la forma

$$R = l/\sigma S. \quad (16.48)$$

La tabla 16-2 da la conductividad eléctrica de varios materiales.

La ecuación (16.47) es una relación entre los módulos de los vectores j y \mathcal{E} . Si suponemos que tienen la misma dirección, situación que se da en la mayoría de las sustancias, podemos reemplazar la ec. (16.47) por la ecuación vectorial

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{\mathcal{E}}, \quad (16.49)$$

que es simplemente otro modo de escribir la ley de Ohm. Recordando la ec. (15.12), con $q = -e$, $\mathbf{j} = -en\mathbf{v}_s$, donde n es el número de electrones por unidad de volumen y \mathbf{v}_s es la velocidad de arrastre debida al campo eléctrico aplicado \mathcal{E} , tenemos que

$$\mathbf{v}_s = -\frac{\sigma}{en} \mathcal{E}. \quad (16.50)$$

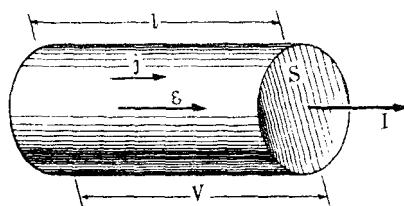


Figura 16-28

Esta ecuación muestra que los electrones libres del metal adquieren una velocidad de arrastre constante como consecuencia del campo eléctrico externo aplicado. Llegamos aquí a una conclusión algo diferente de la obtenida en nuestra discusión del movimiento de un ion a lo largo del tubo al vacío de un acelerador (sección 14.9). Allí encontramos que la aceleración es $a = -(e/m)\mathcal{E}$, la cual da lugar a una velocidad $v = -(e/m)\mathcal{E}t$, que aumenta continuamente con el tiempo.

Sin embargo, no es la primera vez que encontramos una situación como ésta. Sabemos que un cuerpo cayendo libremente en el vacío tiene una velocidad $v = gt$ que aumenta continuamente con el tiempo. Pero si el cuerpo cae en un medio viscoso su movimiento llega a ser uniforme alcanzando una velocidad límite constante, tal como se estudió en la sección 7.10. Por analogía, podemos decir que el efecto de la red cristalina se puede representar por una fuerza "viscosa", que actúa sobre los electrones de conducción cuando su movimiento natural se perturba al aplicar un campo eléctrico. La naturaleza exacta de esta fuerza "viscosa" depende de la dinámica del movimiento electrónico a través de la red cristalina; discutiremos esto con más detalle en el ejemplo 16.15.

Mantener una corriente en un conductor requiere un gasto de energía. También se debe gastar energía para acelerar un ion en un acelerador o en un tubo electrónico (sección 14.9), pero hay una diferencia. En el acelerador toda la energía se emplea en aumentar la velocidad de los iones. En un conductor, debido a la interacción entre los electrones y los iones positivos de la red cristalina, la energía de los electrones se transfiere a la red, aumentando su energía vibracional. Esto conduce a un aumento en la temperatura del material, y constituye el bien conocido efecto calórico de una corriente, llamada *efecto Joule*.

Podemos estimar fácilmente la rapidez con la cual se transfiere energía a la red cristalina. El trabajo hecho por unidad de tiempo sobre un electrón es $\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}_E = -e\mathcal{E} \cdot \mathbf{v}_E$ (recordar la ec. 8.10) y el trabajo hecho por unidad de tiempo y por unidad de volumen (o potencia por unidad de volumen) es $p = n(-e\mathcal{E} \cdot \mathbf{v}_E)$. Usando las ecs. (16.47) y (16.50) para eliminar \mathbf{v}_E , obtenemos

$$p = \sigma\mathcal{E}^2 = j\mathcal{E}. \quad (16.51)$$

Consideremos nuevamente el conductor cilíndrico de la fig. (16-28), cuyo volumen es Sl . La potencia necesaria para mantener la corriente en él es

$$P = (Sl)p = (Sl)(j\mathcal{E}) = (jS)(\mathcal{E}l).$$

Pero $jS = I$ y $\mathcal{E}l = V$. Por consiguiente la potencia necesaria para mantener la corriente en el conductor es

$$P = VI. \quad (16.52)$$

Esta ecuación es idéntica a la ec. (14.43), la cual se obtuvo de un modo más general, y es independiente de la naturaleza del proceso de conducción. Para aquellos conductores que siguen la ley de Ohm, $V = RI$, la ec. (16.52) puede escribirse también en la forma

$$P = RI^2. \quad (16.53)$$

Sin embargo, algunos materiales no obedecen la ley de Ohm y para ellos la ec. (16.53) no es correcta, aunque la ec. (16.52) sigue siendo válida. Un conductor con resistencia, también llamado un resistor, se representa con el símbolo mostrado en la fig. 16-29.



Fig. 16-29. Símbolo para representar un resistor.

EJEMPLO 16.15. Estudiar el movimiento de los electrones de conducción en un metal.

Solución: Hemos indicado que podemos representar fenomenológicamente el efecto de la interacción entre la red cristalina y los electrones de conducción de un metal por una fuerza "viscosa". Suponiendo que esta fuerza es de la misma forma que la considerada en el caso del movimiento de un fluido (sección 7.10), esto es, $-kv$, escribimos la ecuación de movimiento de un electrón en un metal en la forma

$$m_e \frac{dv}{dt} = -eE - kv. \quad (16.54)$$

De este modo la velocidad límite de arrastre, obtenida haciendo $dv/dt = 0$, es $v_E = -eE/k$. Si comparamos este resultado con la ec. (16.50), la conductividad eléctrica es $\sigma = ne^2/k$.

Podemos expresar este resultado de un modo diferente introduciendo una cantidad llamada *tiempo de relajamiento*. Supongamos que el campo eléctrico se interrumpe de pronto después que se ha alcanzado la velocidad límite de arrastre. La ecuación de movimiento para el electrón es entonces

$$m_e \frac{dv}{dt} = -kv,$$

cuya solución es $v = v_E e^{-(k/m)t}$. El estudiante puede verificar este resultado bien por sustitución directa, bien refiriéndose al problema 7.82. Entonces el tiempo necesario para que la velocidad de arrastre disminuya en el factor e es $\tau = m/k$. Este es el tiempo de relajamiento del movimiento del electrón, similar al que se introdujo en el ejemplo 7.8 para el movimiento de un cuerpo a través de un fluido viscoso. Luego, obtenemos para la conductividad la relación

$$\sigma = \frac{ne^2\tau}{m_e}. \quad (16.55)$$

Si se conoce σ , se puede calcular τ y recíprocamente, ya que n , e y m_e son cantidades conocidas. Suponiendo que cada átomo contribuye con un electrón, podemos estimar que n es cerca de 10^{28} electrones por m^{-3} en la mayoría de los metales. Usando los valores de e y m_e , encontramos que, con σ del orden de $10^7 \Omega^{-1} \text{m}^{-1}$, el tiempo de relajamiento τ es del orden de 10^{-14}s .

Se debe comprender que todo lo que hemos hecho es idear un modelo fenomenológico por medio del cual se obtienen los resultados requeridos por la ley de Ohm; pero esto nos ha conducido a introducir una nueva cantidad τ . Para "explicar" la ley de Ohm y la conductividad eléctrica en los metales, debemos relacionar τ con la dinámica del movimiento electrónico. Pero, como hemos indicado anteriormente, este movimiento tiene lugar según las leyes de la mecánica cuántica, por lo cual una discusión más detallada de la ec. (16.55) debe postponerse. (Ver el volumen III, capítulo 4).

Podemos, sin embargo, estimar la bondad de nuestro modelo verificando los órdenes de magnitud de las cantidades involucradas. Es razonable suponer que el tiempo de relajamiento es del mismo orden de magnitud que el tiempo que tarda el electrón en realizar dos colisiones sucesivas con los iones de la red cristalina. Pero si l es la separación media entre iones y v es la velocidad media de los electrones, el tiempo de colisión puede estimarse por el cociente l/v . Para la mayoría de los sólidos l es del orden de 5×10^{-9} m. Para obtener v , supongamos que podemos usar la relación (9.59) propuesta para las moléculas de gas. De este modo, a temperatura ambiente, v es del orden de 10^5 m s $^{-1}$. Concluimos entonces que τ es cerca de 5×10^{-14} s. Este resultado concuerda con la estimación hecha previamente, usando la ec. (16.55) y los valores experimentales de σ .

EJEMPLO 16.16. Combinación de resistores.

Solución: Los resistores pueden combinarse en dos tipos de disposición, similares a los discutidos en el ejemplo 16.12 para los capacitores: *serie* y *paralelo*. En la combinación en serie (fig. 16-30a), los resistores se conectan de tal modo que la misma corriente pasa a lo largo de ellos. La caída de potencial a través de cada resistor es, según la ley de Ohm, $V_1 = R_1 I$, $V_2 = R_2 I$, ..., $V_n = R_n I$. Por lo tanto la diferencia de potencial total es

$$V = V_1 + V_2 + \cdots + V_n = (R_1 + R_2 + \cdots + R_n)I.$$

El sistema puede reducirse efectivamente a un resistor único R que satisface la relación $V = RI$. Luego

$$R = R_1 + R_2 + \cdots + R_n \quad (16.56)$$

da la resistencia resultante para una disposición de resistores en serie.

En la combinación en paralelo (fig. 16-30b), los resistores se conectan de tal modo que la diferencia de potencial V sea la misma para todos ellos. La corriente a través

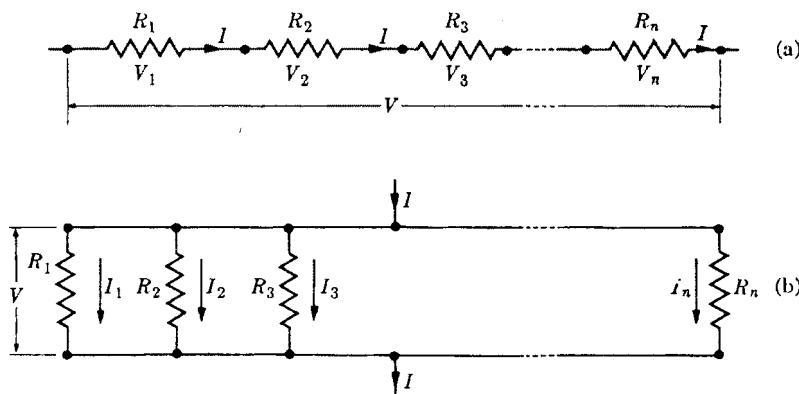


Fig. 16-30. Combinación de resistores en serie y en paralelo.

de cada resistor es, según la ley de Ohm, $I_1 = V/R_1$, $I_2 = V/R_2$, ..., $I_n = V/R_n$. La corriente total I suministrada al sistema es

$$I = I_1 + I_2 + \cdots + I_n = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_n} \right) V.$$

El sistema puede reducirse efectivamente a un resistor único que satisface la ecuación $I = V/R$. Por consiguiente

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_n} \quad (16.57)$$

da la resistencia resultante para una combinación de resistores en paralelo.

16.11 Fuerza electromotriz

Supongamos que una partícula se mueve de A a B según una trayectoria L bajo la acción de una fuerza \mathbf{F} . En el capítulo 8 hemos explicado que en este caso el trabajo hecho por la fuerza es $W = \int_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$, donde el subíndice L significa que la integral se efectúa a lo largo de la trayectoria y $d\mathbf{l}$ es un elemento lineal de la misma. Hemos probado además que cuando la fuerza es conservativa (esto es, la fuerza está relacionada con la energía potencial por $\mathbf{F} = -\text{grad } E_p$), el trabajo es independiente de la trayectoria; luego $\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = E_{p,A} - E_{p,B}$. Una consecuencia importante, también establecida en el capítulo 8, es que cuando la trayectoria es cerrada, el trabajo de una fuerza conservativa es cero, ya que los puntos A y B coinciden y por lo tanto $E_{p,A} = E_{p,B}$.

Estos resultados se pueden extender a cualquier campo vectorial, tales como los campos eléctrico o magnético. Designemos el vector de campo por \mathbf{V} . La integral curvilinea del campo vectorial \mathbf{V} desde el punto A hasta el punto B a lo largo de la trayectoria L se define como

$$\text{Integral curvilinea de } \mathbf{V} = \int_L \mathbf{V} \cdot d\mathbf{l}. \quad (16.58)$$

En general la integral curvilinea depende de la trayectoria. Si la trayectoria a lo largo de la cual se calcula la integral curvilinea es cerrada, ésta se llama circulación vectorial. Se indica por medio de una circunferencia colocada sobre el signo integral:

$$\text{Circulación de } \mathbf{V} = \oint \mathbf{V} \cdot d\mathbf{l}. \quad (16.59)$$

Un caso importante es aquél en el cual el campo \mathbf{V} se puede expresar como el gradiente de una función. Esta es la misma situación encontrada en el caso de fuerzas conservativas y por lo tanto podemos decir que

cuando un campo vectorial se puede expresar como el gradiente de una función, la integral curvilinea del campo entre dos puntos es independiente de la trayectoria que une estos puntos y la circulación alrededor de una trayectoria arbitraria cerrada es nula.

A medida que avancemos en este texto, el estudiante descubrirá que los conceptos de integral curvilinea y de circulación de un campo vectorial son muy útiles para formular las leyes del electromagnetismo. Aplicaremos ahora estas dos nuevas definiciones al campo eléctrico.

Como el campo eléctrico es igual a la fuerza por unidad de carga, la integral curvilinea del campo eléctrico, $\int_L \mathcal{E} \cdot d\mathbf{l}$, es igual al trabajo hecho al mover una unidad de carga a lo largo de la trayectoria L . Si la trayectoria es cerrada (fig. 16-31), la integral curvilinea se convierte en la circulación del campo eléctrico y se denomina *fuerza electromotriz* (fem) aplicada a la trayectoria cerrada. Designándola por V_E , tenemos que

$$\text{fem} = V_E = \oint_L \mathcal{E} \cdot d\mathbf{l}. \quad (16.60)$$

Por consiguiente *la fuerza electromotriz aplicada a una trayectoria cerrada es igual al trabajo hecho al mover una unidad de carga alrededor de la misma*. (La palabra "fuerza" no está correctamente usada porque nos estamos refiriendo a "energía", no obstante, es aceptada por el uso general). Naturalmente, la fem se expresa en volts.

Consideremos ahora el caso especial de un campo eléctrico *estacionario*. Recordando que el campo eléctrico estacionario se relaciona con el potencial eléctrico por $\mathcal{E} = -\text{grad } V$, podemos escribir

$$\int_L \mathcal{E} \cdot d\mathbf{l} = V_A - V_B, \quad (16.61)$$

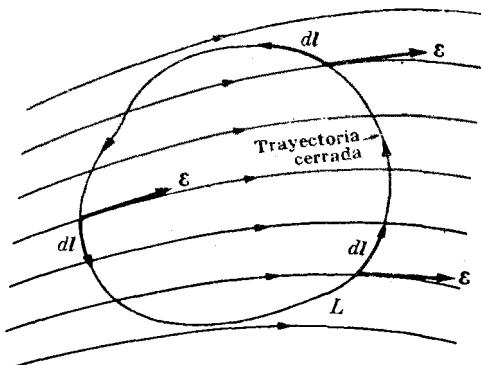


Figura 16-31

donde A y B son puntos unidos por la trayectoria L . De este modo la integral curvilinea entre dos puntos de un campo eléctrico estacionario es igual a la diferencia de potencial entre esos dos puntos. Si el camino es cerrado, los puntos A y B coinciden, y la ec. (16.61) da

$$V_E = \oint_L \mathcal{E} \cdot d\mathbf{l} = 0. \quad (16.62)$$

Expresándolo en palabras, podemos decir que

la fem, o circulación, de un campo eléctrico estacionario alrededor de un camino cerrado arbitrario es nula.

Esta proposición significa que el trabajo hecho por un campo eléctrico estacionario al mover una carga en una trayectoria cerrada es cero.

Si el campo eléctrico se aplica a un conductor, podemos combinar la ec. (16.61) con la ley de Ohm y escribir la ec. (16.46) en la forma

$$\int_L \mathcal{E} \cdot d\mathbf{l} = RI, \quad (16.63)$$

donde L es un camino a lo largo del conductor y R es la resistencia eléctrica entre los puntos del conductor unidos por el camino L .

Como hemos dicho previamente, mantener una corriente entre dos puntos de un conductor implica que debe suministrarse energía al sistema por medio de la fuente de diferencia de potencial. El problema que ahora se presenta es si una corriente se puede o no mantener en un conductor *cerrado* o *circuito eléctrico*. Cuando se aplica la ec. (16.63), que esencialmente no es otra cosa que la conservación de la energía en el conductor, a un conductor cerrado, da

$$\int_L \mathcal{E} \cdot dl = RI. \quad (16.64)$$

El primer miembro de esta ecuación es la fem aplicada al circuito y R es la resistencia total del mismo.

Si el conductor se coloca en un campo eléctrico *estacionario*, entonces, según la ec. (16.62), tenemos que la fem es cero ($V_S = 0$) y la ec. (16.64) da $I = 0$. En otras palabras,

un campo eléctrico estacionario no puede mantener una corriente en un circuito cerrado.

La razón de esto es que un campo eléctrico estacionario es conservativo y la energía total neta suministrada a una carga que describe un camino cerrado es nula. Sin embargo, una carga moviéndose en el interior de un conductor transfiere la energía recibida del campo eléctrico a la red cristalina y este proceso

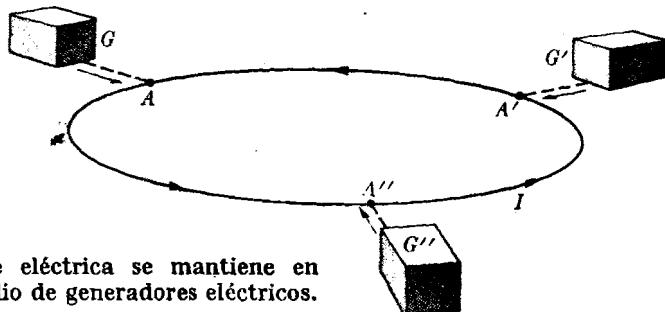


Fig. 16-32. Una corriente eléctrica se mantiene en un circuito cerrado por medio de generadores eléctricos.

es irreversible; es decir, la red no retorna la energía a los electrones. Por lo tanto, a menos que se suministre una cantidad neta de energía a los electrones, éstos no se podrán mover uniformemente en un circuito cerrado.

En consecuencia, para mantener una corriente en un circuito cerrado es necesario proveer energía al circuito en ciertos puntos A, A', A'', \dots (fig. 16-32). A los dispositivos que suplen energía los llamamos *generadores eléctricos* G, G', G'', \dots , y podemos decir que constituyen las fuentes de fem. Luego el campo eléctrico \mathcal{E} que aparece en la ec. (16.64) no es estacionario, y a los puntos A, A', A'', \dots , corresponden campos localizados producidos por los generadores G, G', G'', \dots

Hay muchas maneras de generar una fuerza electromotriz. Un método común es por medio de una reacción química, tal como en una pila seca o en una batería, en las cuales la energía interna liberada en la reacción química se transfiere a

los electrones. Otro método importante es por medio del fenómeno de la inducción electromagnética, que se estudiará en el próximo capítulo.

Una fuente de fem se representa esquemáticamente como se indica en la fig. 16-33, donde el sentido de la corriente que se produce en el circuito *externo a la fuente de fem* es desde el segmento largo, e polo positivo, al segmento corto o polo negativo.

Cuando aplicamos la ley de Ohm [ec. (16.46)] a un circuito simple como el de la fig. 16-33, debemos tener en cuenta que la resistencia total R es la suma de la resistencia interna R_i de la fuente de fem y la resistencia externa R_e del conductor conectado al generador (o batería). Así $R = R_i + R_e$, y la ley de Ohm se convierte en

$$V_s = (R_e + R_i)I. \quad (16.65)$$

Esta ecuación puede también escribirse en la forma $V - R_i I = R_e I$. Cada miembro de la ecuación da la diferencia de potencial entre los polos del generador (o batería). Podemos observar que esta diferencia de potencial es menor que la fem.

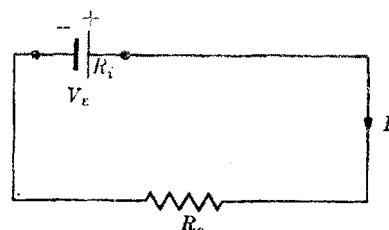


Fig. 16-33. Representación en símbolos de un circuito con una fuerza electromotriz.

EJEMPLO 16.17. Métodos para calcular las corrientes que existen en una red eléctrica.

Solución: Una red eléctrica es una combinación de conductores y fuerzas electromotrices, tal como la ilustrada en la fig. 16-34. Consideraremos por ahora sólo el caso en que las fem son constantes y en la red se ha alcanzado un régimen estacionario, de modo que las corrientes son también constantes. Usualmente el problema consiste en encontrar las intensidades de corriente en función de las fem y de las resistencias. Las reglas para resolver este tipo de problema, reglas conocidas como *leyes de Kirchhoff*, expresan simplemente la conservación de la carga eléctrica y de la energía. Las leyes de Kirchhoff se pueden enunciar como sigue:

- (1) *En un nudo de una red la suma de las intensidades es cero.*
- (2) *La suma de las caídas de potencial a lo largo de cualquier camino cerrado en una red es nula.*

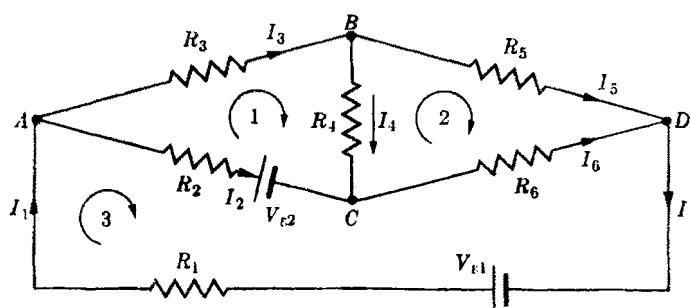


Fig. 16-34. Red eléctrica.

Al escribir la primera ley, debemos considerar aquellas corrientes que salen de un nudo como positivas y las que llegan como negativas. La primera ley expresa la conservación de la carga porque, como las cargas no se acumulan en un nudo, el número de cargas que llegan a un nudo en un cierto tiempo debe ser igual al número de cargas que salen en el mismo tiempo.

Al aplicar la segunda ley debemos tomar en cuenta las siguientes reglas. Una caída de potencial a través de una resistencia es positiva o negativa según que recorramos el circuito en el sentido de la corriente o en sentido opuesto. Cuando pasamos a través de una fem, tomamos la diferencia de potencial como negativa o positiva dependiendo de que la atravesemos en el sentido en que actúa la fem (aumento de potencial) o en sentido opuesto (disminución de potencial). La segunda ley expresa la conservación de la energía, ya que la variación neta de energía de una carga después de haber recorrido un camino cerrado debe ser cero. En la ec. (16.65) escrita en la forma $RJ - V_8 = 0$, donde $R = R_1 + R_2$, hemos satisfecho ya ese requisito.

Ilustraremos ahora el uso de las leyes de Kirchhoff aplicándolas a la red de la fig. 16-34. La primera ley aplicada a los nudos A, B y C da:

$$\text{Nudo } A: \quad -I_1 + I_2 + I_3 = 0,$$

$$\text{Nudo } B: \quad -I_3 + I_4 + I_5 = 0,$$

$$\text{Nudo } C: \quad -I_2 - I_4 + I_6 = 0.$$

La segunda ley aplicada a los recorridos 1, 2 y 3 da:

$$\text{Recorrido 1:} \quad -R_2 I_2 + R_3 I_3 + R_4 I_4 - V_{82} = 0,$$

$$\text{Recorrido 2:} \quad R_5 I_5 - R_6 I_6 - R_4 I_4 = 0,$$

$$\text{Recorrido 3:} \quad R_1 I_1 + R_2 I_2 + R_6 I_6 - V_{81} + V_{82} = 0.$$

Estas seis ecuaciones son suficientes para determinar las seis corrientes en la red.

Una regla práctica a seguir para encontrar las corrientes en una red con n nudos es aplicar la primera ley a $n - 1$ nudos solamente, porque si la ley se satisface para $n - 1$ nudos, se satisface automáticamente para el restante. (El estudiante deberá verificar esta aserción en la red de la fig. 16-34). La segunda ley se debe aplicar a tantos recorridos cerrados cuantos se requieran a fin de que cada conductor sea parte de un recorrido al menos una vez.

II. EL CAMPO MAGNETICO

16.12 Ley de Ampère para el campo magnético

Estudiaremos ahora algunas de las propiedades de los campos magnéticos estacionarios, o independientes del tiempo. Consideraremos primero una corriente I rectilínea indefinida (fig. 16-35). El campo magnético \mathcal{B} en un punto A es perpendicular a OA y está dado por la ec. (15.41), o sea

$$\mathcal{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} u_\theta.$$

Calculemos la circulación de \mathcal{B} alrededor de una trayectoria circular de radio r . El campo magnético \mathcal{B} es tangente a la trayectoria, de modo que $\mathcal{B} \cdot dl = \mathcal{B} dl$, y de módulo constante. Por lo tanto la circulación magnética (que designamos por Λ_B) es

$$\Lambda_B = \oint_L \mathcal{B} \cdot dl = \oint_L \mathcal{B} dl = \mathcal{B} \oint_L dl = \mathcal{B} L = \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi r} \right) (2\pi r)$$

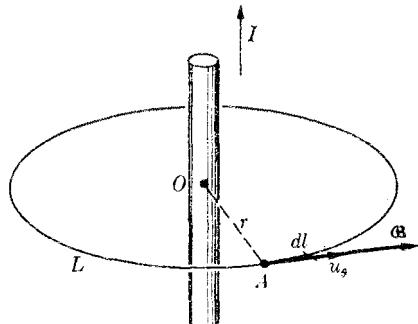


Fig. 16-35. Campo magnético de una corriente rectilínea.

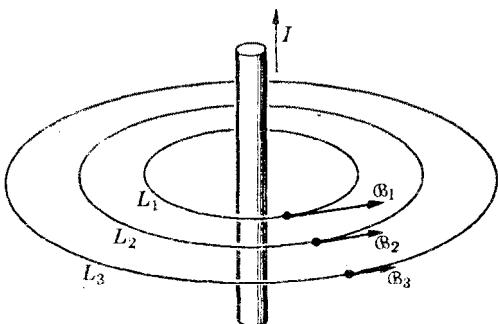


Fig. 16-36. La circulación magnética a lo largo de todas las trayectorias circulares concéntricas alrededor de una corriente rectilínea es la misma e igual a $\mu_0 I$.

porque $L = 2\pi r$. De este modo

$$\Lambda_B = \mu_0 I. \quad (16.66)$$

La circulación magnética es entonces proporcional a la corriente eléctrica I , y es independiente del radio de la trayectoria. Por consiguiente, si trazamos varias circunferencias L_1, L_2, L_3, \dots , (fig. 16-36) alrededor de la corriente I , la circulación magnética en todas ellas es la misma e igual a $\mu_0 I$, conforme a la ec. (16.66).

Consideremos a continuación una camino arbitrario L rodeando la corriente I (fig. 16-37). La circulación magnética a lo largo de L es

$$\Lambda_B = \oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \oint_L \frac{\mathbf{u}_\theta \cdot d\mathbf{l}}{r}.$$

Pero $\mathbf{u}_\theta \cdot d\mathbf{l}$ es la componente de $d\mathbf{l}$ en la dirección del vector \mathbf{u}_θ , y por lo tanto es igual a $r d\theta$. Por consiguiente

$$\Lambda_B = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \oint_L d\theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi} (2\pi) = \mu_0 I,$$

ya que el ángulo plano total alrededor de un punto es 2π . Este es nuevamente nuestro resultado anterior (16.66), el cual es por lo tanto válido para cualquier camino que encierre a la corriente rectilínea, independientemente de la posición de la misma con respecto al camino.

Un análisis más riguroso, que omitiremos, indica que la ec. (16.66) es correcta *cualquiera sea la forma de la corriente*, y no sólo para una corriente rectilínea. Si tenemos varias corrientes I_1, I_2, I_3, \dots , enlazadas por una línea L (fig. 16-38), cada corriente da una contribución a la circulación del campo magnético a lo largo de L . Podemos establecer entonces la ley de Ampère en la forma

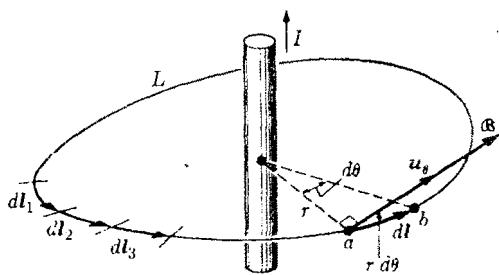


Figura 16-37

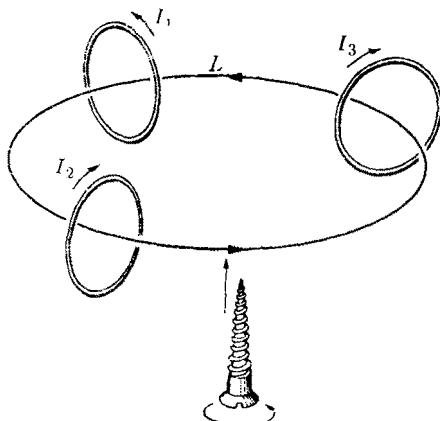


Fig. 16-38. La circulación magnética a lo largo de cualquier camino cerrado es proporcional a la corriente neta encerrada por el camino.

la circulación de un campo magnético a lo largo de una línea cerrada que enlaza las corrientes I_1, I_2, I_3, \dots , es

$$\Delta_{\mathcal{B}} = \oint \mathcal{B} \cdot d\ell = \mu_0 I, \quad (16.67)$$

donde $I = I_1 + I_2 + I_3 + \dots$ representa la corriente total concatenada por la trayectoria L .

Cuando aplicamos la ec. (16.67) tomamos como positiva la corriente que atraviesa L en el sentido en que avanza un tornillo de rosca derecha al rotarlo en el sentido en que está orientada L , y negativa si el sentido es opuesto. Así, en la fig. 16-38, las corrientes I_1 e I_3 se consideran positivas y la I_2 negativa.

Cuando recordamos que según el ejemplo 16.1 la corriente eléctrica puede expresarse como el flujo de densidad de corriente (esto es, $I = \int_S \mathbf{j} \cdot \mathbf{u}_N dS$), podemos expresar la ley de Ampère, ec. (16.67), también en la forma

$$\Delta_{\mathcal{B}} = \int_L \mathcal{B} \cdot d\ell = \mu_0 \int_S \mathbf{j} \cdot \mathbf{u}_N dS, \quad (16.68)$$

donde S es cualquier superficie limitada por L .

El hecho de que la circulación del campo magnético no sea generalmente nula indica que el campo magnético no tiene un potencial magnético en el mismo sentido que el campo eléctrico tiene potencial eléctrico. La Ley de Ampère es particularmente útil cuando deseamos calcular el campo magnético producido por distribuciones de corriente que tienen ciertas simetrías geométricas, como se muestra en los siguientes ejemplos.

EJEMPLO 16.18. Usando la ley de Ampère, estudiar el campo magnético producido por una corriente que pasa a lo largo de un cilindro recto de longitud infinita.

Solución: Consideremos la corriente I que pasa a lo largo de un cilindro de radio a (fig. 16-39). La simetría del problema sugiere claramente que las líneas de fuerza del campo magnético son circunferencias con sus centros situados a lo largo del eje del cilindro, y que el módulo \mathcal{B} del campo magnético en un punto depende sólo de la distancia del punto al eje. Por consiguiente, cuando escogemos una circunferencia de radio r con el centro sobre la corriente como nuestra trayectoria L , la circulación magnética es

$$\Lambda \mathcal{B} = \oint_L \mathcal{B} dl = \mathcal{B} \oint_L dl = \mathcal{B} L = 2\pi r \mathcal{B}.$$

Si el radio r es mayor que el radio del cilindro a , toda la corriente I queda en el interior de la circunferencia. Por lo cual, aplicando la ec. (16.67), tenemos

$$2\pi r \mathcal{B} = \mu_0 I \quad \text{o} \quad \mathcal{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}, \quad (16.69)$$

que es precisamente el resultado encontrado en el capítulo 15 para la corriente en un filamento. Por consiguiente, *en puntos fuera de una corriente cilíndrica, el campo magnético es el mismo que si la corriente estuviera a lo largo del eje*.

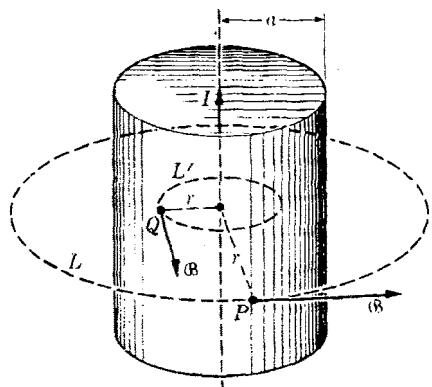


Figura 16-39

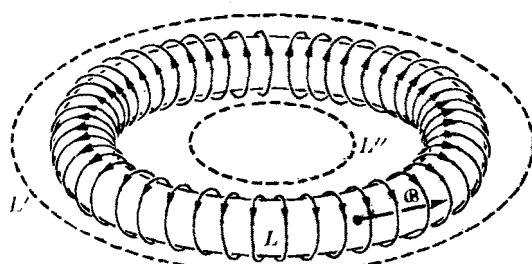


Fig. 16-40. Bobina toroidal.

Pero si r es menor que a , tenemos dos posibilidades. Si la corriente circula sólo a lo largo de la superficie del cilindro (como puede ocurrir si el conductor es una hoja cilíndrica de metal) la corriente encerrada por L' es cero y la ley de Ampère da $2\pi r \mathcal{B} = 0$ ó $\mathcal{B} = 0$. Luego, *el campo magnético en los puntos interiores de un cilindro que transporta una corriente sobre su superficie es cero*. Pero si la corriente está uniformemente distribuida a través de toda la sección transversal del conductor, la corriente en el interior de L' es

$$I' = \frac{I}{\pi a^2} (\pi r^2) = \frac{Ir^2}{a^2}.$$

En consecuencia, aplicando la ley de Ampère, obtenemos $2\pi r \mathcal{B} = \mu_0 I' = \mu_0 Ir^2/a^2$ ó

$$\mathcal{B} = \frac{\mu_0 Ir}{2\pi r a^2}. \quad (16.70)$$

Por lo tanto *el campo magnético en un punto interior de un cilindro que transporta una corriente uniformemente distribuida a través de su sección transversal es proporcional a la distancia del punto al eje del cilindro*.

EJEMPLO 16.19. Usando la ley de Ampère, discutir el campo magnético producido por una bobina toroidal.

Solución: Una bobina toroidal consiste en un alambre uniformemente arrollado en un toro o superficie anular, como en la fig. 16-40. Sea N el número de vueltas, todas igualmente espaciadas, e I la intensidad de la corriente que por ellas circula. La simetría del problema sugiere que las líneas de fuerza del campo magnético son circunferencias concéntricas con el toro. Tomemos primero como nuestro camino de integración una circunferencia dentro del toro. La circulación magnética es entonces $\Lambda_B = \mathcal{B}L$. El camino L concatena todas las vueltas alrededor del toro, y por lo tanto la corriente total que fluye a través de él es NI . Luego, aplicando la ley de Ampère, obtenemos $\mathcal{B}L = \mu_0 NI$ ó

$$\mathcal{B} = \mu_0 NI/L.$$

Si el radio de la sección transversal del toro es pequeño comparado con su radio, podemos suponer que L es prácticamente la misma para todos los puntos interiores del anillo. Dado que $n = N/L$ es el número de vueltas por unidad de longitud, concluimos que el campo magnético en el interior del toro es uniforme y tiene el valor constante

$$\mathcal{B} = \mu_0 nI. \quad (16.71)$$

Para cualquier camino fuera del toro, tal como L' o L'' , la corriente total concatenada por él es cero, por lo que $\mathcal{B} = 0$. En otras palabras, el campo magnético de una bobina toroidal está enteramente confinado en su interior. Esta situación es aplicable sólo a bobinas toroidales cuyas espiras están muy juntas.

EJEMPLO 16.20. Usando la ley de Ampère hallar el campo magnético en el centro de un solenoide muy largo.

Solución: Consideremos el solenoide de la fig. 16.41, que tiene n espiras por unidad de longitud cada una conduciendo una corriente I . Si las espiras están muy cerca unas de otras y el solenoide es muy largo, podemos considerar que el campo magnético está confinado enteramente en su interior y es uniforme, como se indica con las líneas de fuerza en la figura. Escojamos como camino de integración el rectángulo $PQRS$.

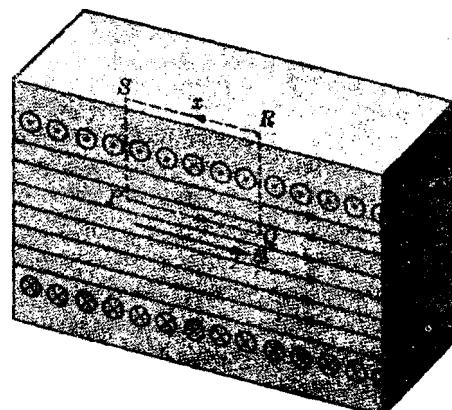


Fig. 16-41. Solenoide.

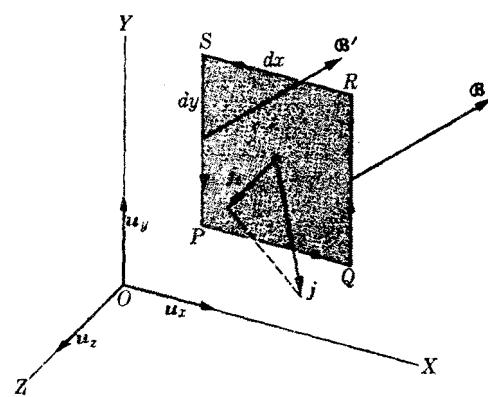


Fig. 16-42. Camino elemental para establecer la ley de Ampère en forma diferencial.

La contribución de los lados QR y SP a la circulación magnética es cero porque el campo es perpendicular a ellos; también la contribución del lado RS es cero porque allí no hay campo. Por consiguiente sólo el lado PQ contribuye en la cantidad \mathcal{B}_x de modo que $\Lambda\mathcal{B} = \mathcal{B}_x$. La corriente total concatenada por el camino de integración es nxI , ya que nx da el número de espiras. Por consiguiente la ley de Ampère da $\mathcal{B}_x = \mu_0 nx I$ ó $\mathcal{B} = \mu_0 n I$, conforme a nuestros resultados del ejemplo 15.9 para el campo en el centro de un solenoide largo.

El estudiante habrá comprendido con estos ejemplos la utilidad práctica de la ley de Ampère para calcular campos magnéticos que tienen ciertas simetrías.

16.13 Ley de Ampère en forma diferencial

Como sabemos que la ley de Ampère se puede aplicar a trayectorias de cualquier forma, aplíquemósela a una trayectoria rectangular muy pequeña o infinitesimal $PQRS$ del plano XY , de lados dx y dy y área $dx dy$ (fig. 16-42). El sentido de la circulación alrededor de $PQRS$ se indica con las flechas. La circulación consta de cuatro términos, uno para cada lado; esto es,

$$\Lambda\mathcal{B} = \oint_{PQRS} \mathcal{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_{PQ} + \int_{QR} + \int_{RS} + \int_{SP}. \quad (16.72)$$

Ahora bien, a lo largo del camino QR , cuya orientación es paralela a la dirección positiva del eje Y , $d\mathbf{l} = \mathbf{u}_y dy$ y

$$\int_{QR} \mathcal{B} \cdot d\mathbf{l} = \mathcal{B} \cdot \mathbf{u}_y dy = \mathcal{B}_y dy.$$

Análogamente, para el lado SP , que está orientado en la dirección negativa del eje Y , $d\mathbf{l} = -\mathbf{u}_y dy$, y así

$$\int_{SP} \mathcal{B} \cdot d\mathbf{l} = -\mathcal{B}' \cdot \mathbf{u}_y dy = -\mathcal{B}'_y dy,$$

de modo que

$$\int_{QR} + \int_{SP} = (\mathcal{B}_y - \mathcal{B}'_y) dy.$$

Pero, como $PQ = dx$, $\mathcal{B}_y - \mathcal{B}'_y = d\mathcal{B}_y = (\partial\mathcal{B}_y/\partial x) dx$, se tiene

$$\int_{QR} + \int_{SP} = \frac{\partial\mathcal{B}_y}{\partial x} dx dy.$$

Por un razonamiento análogo, los restantes dos integrales de la ec. (16.72) son

$$\int_{PQ} + \int_{RS} = -\frac{\partial\mathcal{B}_x}{\partial y} dx dy.$$

Sumando los dos resultados, obtenemos finalmente

$$\Lambda\mathcal{B} = \oint_{PQRS} \mathcal{B} \cdot d\mathbf{l} = \left(\frac{\partial\mathcal{B}_y}{\partial x} - \frac{\partial\mathcal{B}_x}{\partial y} \right) dx dy. \quad (16.73)$$

Dado que dI es la corriente que pasa a través de $PQRS$, podemos relacionarla con la densidad de corriente \mathbf{j} escribiendo

$$dI = j_z dS = j_z dx dy. \quad (16.74)$$

Escribimos j_z porque ésta es la única componente de la densidad de corriente \mathbf{j} que contribuye a la corriente dI a través de $PQRS$. Las componentes j_x y j_y corresponden a movimientos paralelos a la superficie y no a través de ella. Sustituyendo las ecs. (16.73) y (16.74) en la ley de Ampère, ec. (16.67), podemos escribir

$$\left(\frac{\partial \mathcal{B}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathcal{B}_x}{\partial y} \right) dx dy = \mu_0 dI = \mu_0 j_z dx dy.$$

Cancelando el factor común $dx dy$ en ambos miembros, obtenemos la ley de Ampère en su forma diferencial,

$$\frac{\partial \mathcal{B}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathcal{B}_x}{\partial y} = \mu_0 j_z. \quad (16.75)$$

Podemos ahora colocar nuestra superficie $PQRS$ en los planos YZ o ZX , resultando las expresiones equivalentes

$$\frac{\partial \mathcal{B}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathcal{B}_y}{\partial z} = \mu_0 j_x \quad (16.76)$$

$$\frac{\partial \mathcal{B}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathcal{B}_z}{\partial x} = \mu_0 j_y \quad (16.77)$$

Las tres ecs. (16.75), (16.76) y (16.77) pueden combinarse en una sola ecuación vectorial. Obsérvese que los segundos miembros son las componentes del vector \mathbf{j} , la densidad de corriente, multiplicada por μ_0 . Análogamente, los primeros miembros pueden considerarse como las componentes de un vector obtenidas a partir de \mathcal{B} combinando las derivadas en la forma indicada; ese vector se llama el *rotacional* de \mathcal{B} y se escribe $\text{rot } \mathcal{B}$. Entonces las tres ecuaciones se pueden resumir en la ecuación vectorial

$$\text{rot } \mathcal{B} = \mu_0 \mathbf{j}. \quad (16.78)$$

Esta es la expresión de la ley de Ampère en forma diferencial. Podemos usar la ec. (16.78) para obtener el campo magnético cuando conocemos la distribución de corriente, y reciprocamente. En una región donde no haya corriente eléctrica, $\text{rot } \mathcal{B} = 0$.

La ley de Ampère en forma diferencial establece una relación *local* entre el campo magnético \mathcal{B} en un punto y la densidad \mathbf{j} de corriente en el mismo punto del espacio, de un modo similar a como la ley de Gauss relaciona el campo eléctrico y las cargas en el mismo punto del espacio. Podemos de este modo decir que las corrientes eléctricas son las fuentes del campo magnético.

La expresión equivalente a la ec. (16.78) para un campo eléctrico estacionario es

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0, \quad (16.79)$$

ya que hemos probado [ec. (16.62)] que para tal campo la circulación es cero ($\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$).

16.14 Flujo magnético

El flujo magnético a través de cualquier superficie, cerrada o no, colocada en un campo magnético es

$$\Phi_B = \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}_N \, dS. \quad (16.80)$$

El concepto de flujo magnético a través de una superficie es de gran importancia, especialmente cuando la superficie no es cerrada, como veremos en el capítulo 17. Por ello es conveniente definir una unidad de flujo magnético. Evidentemente, como el flujo magnético es igual al campo magnético multiplicado por el área, se expresa en T m², unidad llamada weber en honor del físico alemán Wilhelm E. Weber (1804-1891). Se abrevia Wb. Obsérvese que como $T = \text{kg s}^{-1} \text{C}^{-1}$, $\text{Wb} = \text{T m}^2 = \text{m}^2 \text{ kg s}^{-1} \text{ C}^{-1}$. Muchos textos expresan el campo magnético en Wb m⁻² en lugar de T.

Como no hay masas magnéticas o polos (o al menos no han sido observados), las líneas de fuerza del campo magnético \mathbf{B} son cerradas, como se indica en el ejemplo discutido en el capítulo 15. Concluimos que

el flujo magnético a través de una superficie cerrada es siempre nulo.

Esto es, el flujo entrante a través de cualquier superficie cerrada es igual al flujo saliente. Luego

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}_N \, dS = 0, \quad (16.81)$$

resultado que se puede demostrar matemáticamente partiendo de la expresión general para \mathbf{B} dado en la ec. (15.35). La comprobación será omitida. Este resultado constituye la *ley de Gauss para el campo magnético*. En forma diferencial tenemos, por analogía con la ec. (16.4) para el campo eléctrico,

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \quad \text{o} \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (16.82)$$

16.15 Magnetización de la materia

En la sección 15.10 indicamos que una pequeña corriente, tal como la debida a los electrones en un átomo, constituye un dipolo magnético. Los átomos pueden o no presentar un momento dipolar magnético neto, dependiendo de la simetría o

de la orientación relativa de sus órbitas electrónicas. Como la mayoría de las moléculas no presentan simetría esférica, pueden tener un momento dipolar magnético permanente debido a orientación especial de las órbitas electrónicas. Por ejemplo, las moléculas diatómicas tienen simetría axial, y pueden poseer un momento dipolar magnético paralelo al eje molecular. Una porción de materia, con la excepción de los materiales ferromagnéticos, no presenta momento magnético neto, debido a la orientación al azar de las moléculas, situación similar a la encontrada en la polarización eléctrica de la materia. Sin embargo, la presencia de un campo magnético externo distorsiona el movimiento electrónico dando lugar a una polarización magnética neta o *magnetización* del material. Lo que

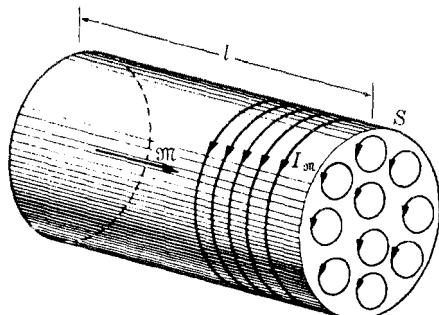


Fig. 16-43. Corriente superficial de magnetización en un cilindro magnetizado.

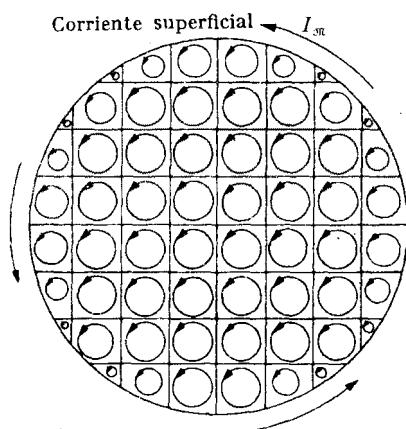


Fig. 16-44. Corrientes elementales en un cilindro magnetizado.

sucede esencialmente, es que el campo magnético produce sobre los electrones un movimiento de precesión o de rotación en torno a la dirección del campo magnético local, como se explicó en la sección 15.6. Cada electrón contribuye con un momento dipolar magnético dado por la ec. (15.27).

Consideremos, por simplicidad, una sustancia en forma de cilindro que está magnetizada en dirección paralela al eje del mismo (fig. 16-43). Esto significa que los dipolos magnéticos moleculares están orientados paralelamente al eje del cilindro, y por lo tanto las corrientes electrónicas moleculares están orientadas perpendicularmente al eje del cilindro. Podemos ver en la fig. 16-43 (y con más detalle en la vista de frente que se muestra en la fig. 16-44), que las corrientes internas tienden a cancelarse debido a los efectos contrarios de las corrientes adyacentes, de modo que no se observa corriente neta en el interior de la sustancia. Sin embargo, la magnetización da lugar a una corriente neta I_m sobre la superficie del material, que actúa como un solenoide.

El vector *magnetización* \mathcal{M} de un material se define como el momento magnético del medio por unidad de volumen. Si m es el momento dipolar magnético de cada

átomo o molécula y n es el número de átomos o moléculas por unidad de volumen, la magnetización es $\mathcal{M} = nm$. El momento magnético de una corriente elemental se expresa en $A\ m^2$, y por consiguiente la magnetización \mathcal{M} se expresa en $A\ m^2/m^3 = A\ m^{-1}$ ó $m^{-1}\ s^{-1}\ C$, y es equivalente a corriente por unidad de longitud.

Existe una relación muy importante entre la corriente sobre la superficie del cuerpo magnetizado y la magnetización \mathcal{M} . Observamos en la fig. 16-43 que I_m fluye en dirección perpendicular a \mathcal{M} . El cilindro mismo se comporta como un gran dipolo magnético resultante de la superposición de todos los dipolos individuales. Si S es el área de la sección transversal del cilindro y l su longitud, su volumen es lS , y por consiguiente su momento dipolar magnético total es $\mathcal{M}(lS) = (\mathcal{M}l)S$. Pero S es precisamente el área de la sección transversal del circuito formado por la corriente superficial. Como momento dipolar magnético = corriente multiplicada por área, concluimos que la corriente total de magnetización que aparece sobre la superficie del cilindro es $\mathcal{M}l$ y en consecuencia la corriente por unidad de longitud I_m sobre la superficie del cilindro magnetizado es \mathcal{M} , ó $I_m = \mathcal{M}$. Aunque este resultado se ha obtenido para una disposición geométrica particular, es de validez general. De este modo podemos decir que

la corriente por unidad de longitud sobre la superficie de una porción de materia magnetizada es igual a la componente del vector magnetización \mathcal{M} paralela al plano tangente a la superficie del cuerpo, y tiene dirección perpendicular a \mathcal{M} .

16.16 Campo magnetizante

En la sección precedente vimos que una sustancia magnetizada tiene ciertas corrientes sobre su superficie (y dentro de ella si la magnetización no es uniforme). Estas corrientes de magnetización, sin embargo, están "congeladas" en el sentido de que se deben a electrones ligados a átomos o moléculas determinadas y no son libres de moverse a través de la sustancia. Por otra parte, en algunas sustancias tales como los metales, hay cargas eléctricas capaces de moverse a través de la sustancia. Llamaremos corriente libre a la corriente eléctrica debida a estas

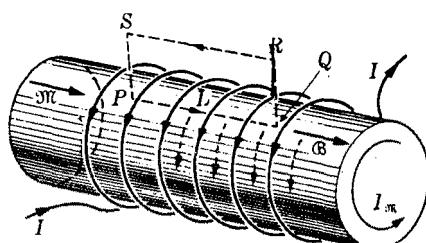


Figura 16-45

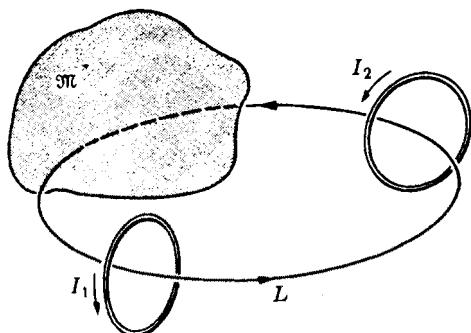


Figura 16-46

cargas libres. En muchos casos se necesita distinguir explícitamente entre corrientes libres y corrientes de magnetización, como haremos en esta sección.

Consideremos de nuevo una porción cilíndrica de materia colocada en el interior de un solenoide largo por el que circula una corriente I (fig. 16-45). Esta corriente produce un campo magnético que magnetiza el cilindro y da lugar a una corriente de magnetización sobre la superficie del mismo en igual sentido que I . La corriente superficial de magnetización por unidad de longitud es igual a \mathcal{M} . Si el solenoide tiene n espiras por unidad de longitud, el sistema solenoide más el cilindro magnetizado es equivalente a un solo solenoide que transporta una corriente por unidad de longitud igual a $nI + \mathcal{M}$. Esta corriente solenoidal efectiva da lugar a un campo magnético resultante \mathcal{B} paralelo al eje del cilindro, campo cuyo módulo está dado por la ec. (16.71), con nI reemplazado por la corriente total por unidad de longitud $nI + \mathcal{M}$. Esto es, $\mathcal{B} = \mu_0(nI + \mathcal{M})$ ó

$$\frac{1}{\mu_0} \mathcal{B} - \mathcal{M} = nI.$$

Esta expresión da las corrientes libres o de conducción por unidad de longitud, nI , sobre la superficie del cilindro, en función del campo magnético \mathcal{B} en el medio y la magnetización \mathcal{M} del mismo medio. Si observamos que \mathcal{B} y \mathcal{M} son vectores en la misma dirección, el resultado anterior sugiere la introducción de un nuevo campo vectorial, llamado *campo magnetizante*, definido por

$$\mathcal{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathcal{B} - \mathcal{M}. \quad (16.83)$$

Se expresa en A m^{-1} o $\text{m}^{-1} \text{s}^{-1} \text{C}$, que son las unidades de los dos términos que aparecen en el segundo miembro.

En nuestro ejemplo particular, tenemos $\mathcal{H} = nI$, que relaciona \mathcal{H} con la corriente libre o de conducción por unidad de longitud del solenoide. Cuando consideramos una longitud $PQ = L$ a lo largo de la superficie, tenemos entonces

$$\mathcal{H}L = LnI = I_{\text{libre}}, \quad (16.84)$$

dónde $I_{\text{libre}} = LnI$ es la corriente libre total del solenoide correspondiente a la longitud L . Calculando la circulación de \mathcal{H} alrededor del rectángulo $PQRS$, tenemos que $\Lambda_{\mathcal{H}} = \mathcal{H}L$, ya que \mathcal{H} es cero fuera del solenoide (\mathcal{B} y \mathcal{M} lo son) y los lados QR y SP no contribuyen a la circulación, porque son perpendiculares al campo magnético. De este modo la ec. (16.48) puede escribirse en la forma $\Lambda_{\mathcal{H}} = I_{\text{libre}}$, donde I_{libre} es la corriente libre total a través del rectángulo $PQRS$. Este resultado tiene validez más general de lo que nuestro análisis simplificado puede sugerir. En efecto, puede verificarse que *la circulación del campo magnetizante a lo largo de una linea cerrada es igual a la corriente libre total a través de la trayectoria*. Esto es,

$$\Lambda_{\mathcal{H}} = \oint_L \mathcal{H} \cdot d\ell = I_{\text{libre}}, \quad (16.85)$$

dónde I_{libre} es la corriente total encerrada por la trayectoria L debida a las cargas libres que fluyen en el medio o en un circuito eléctrico, pero excluyendo las co-

rientes debidas a la magnetización de la materia. Por ejemplo, si la trayectoria L (fig. 16-46) enlaza a los circuitos I_1 , I_2 y a un cuerpo con magnetización \mathcal{M} , debemos incluir en la ec. (16.85) solamente las corrientes I_1 e I_2 , mientras que en la ley de Ampère, ec. (16.67), para el campo magnético \mathcal{B} , debemos incluir todas las corrientes, esto es, a I_1 e I_2 , debidas a las cargas que se mueven libremente, así como también las debidas a la magnetización \mathcal{M} del cuerpo proveniente de los electrones ligados.

Escribamos la ec. (16.83) en la forma

$$\mathcal{B} = \mu_0(\mathcal{H} + \mathcal{M}). \quad (16.86)$$

Como la magnetización \mathcal{M} del cuerpo está físicamente relacionada con la resultante del campo magnético \mathcal{B} , podríamos introducir una relación entre \mathcal{M} y \mathcal{B} similar a la relación, en el caso eléctrico, entre \mathcal{P} y \mathcal{E} , dada en la ec. (16.10). Sin embargo, por razones históricas se acostumbra a proceder de manera diferente, y relacionar, en su lugar, \mathcal{M} y \mathcal{H} , escribiendo

$$\mathcal{M} = \chi_m \mathcal{H}. \quad (16.87)$$

La cantidad χ_m se llama *susceptibilidad magnética* del material, y es un número puro independiente de las unidades escogidas para \mathcal{M} y \mathcal{H} . Sustituyendo la ec. (16.87) en la ec. (16.86), podemos escribir

$$\mathcal{B} = \mu_0(\mathcal{H} + \chi_m \mathcal{H}) = \mu_0(1 + \chi_m) \mathcal{H} = \mu \mathcal{H}, \quad (16.88)$$

donde

$$\mu = \mathcal{B}/\mathcal{H} = \mu_0(1 + \chi_m) \quad (16.89)$$

se llama la *permeabilidad* del medio y se expresa en las mismas unidades que μ_0 , es decir, en $\text{m kg}^{-2} \text{ C}$. La permeabilidad relativa se define por

$$\mu_r = \mu/\mu_0 = 1 + \chi_m, \quad (16.90)$$

y es un número puro independiente del sistema de unidades.

Cuando vale la relación $\mathcal{B} = \mu \mathcal{H}$ podemos escribir, en lugar de la ec. (16.85),

$$\oint_L \frac{1}{\mu} \cdot \mathcal{B} \cdot d\mathbf{l} = I_{\text{libre}}.$$

Si el medio es homogéneo, de modo que μ es constante, la circulación del campo magnético es

$$\Lambda_{\mathcal{B}} = \oint_L \mathcal{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu I_{\text{libre}}. \quad (16.91)$$

Este resultado es similar a la ley de Ampère, ec. (16.67), pero con la corriente total reemplazada por la corriente libre y μ en lugar de μ_0 . Podemos entonces concluir que el efecto de la materia magnetizada sobre el campo magnético \mathcal{B} es reemplazar μ_0 por μ . Por ejemplo, el campo magnético de una corriente rec-

tilínea I dentro de un medio magnetizado es

$$\gamma_B = \frac{\mu I}{2\pi r} \quad (16.92)$$

en lugar del valor dado por la ec. (15.41).

16.17 Cálculo de la susceptibilidad magnética

Como la susceptibilidad magnética χ_m , análogamente a la susceptibilidad eléctrica χ_e , expresa la respuesta de un medio al campo magnético externo, está relacionada con las propiedades de los átomos y moléculas del medio. En el fenómeno de la magnetización de la materia por un campo magnético externo entran dos efectos. Uno es una *distorsión* del movimiento electrónico debido al campo magnético. El otro es un *efecto de orientación* cuando el átomo o molécula tiene un momento magnético permanente. Ambos efectos contribuyen al valor de χ_m y serán discutidos separadamente.

(a) *Efecto de distorsión*. Sabemos que un campo magnético ejerce una fuerza sobre una carga en movimiento. Por consiguiente, si se aplica un campo magnético a una sustancia, los electrones que se mueven en los átomos o moléculas están sujetos a una fuerza adicional debido al campo magnético aplicado. Esto ocasiona una perturbación del movimiento electrónico. Si fuéramos a evaluar esta perturbación de un modo preciso, tendríamos que usar los métodos de la mecánica cuántica. Por lo tanto nos limitaremos a establecer los principales resultados, haciendo una ilustración simplificada en el ejemplo 16.21.

El efecto de un campo magnético sobre el movimiento electrónico en un átomo es equivalente a una corriente adicional inducida en el átomo. Esta corriente está orientada en un sentido tal que el momento dipolar magnético, a ella asociado, tiene sentido opuesto al del campo magnético. Como este efecto es independiente de la orientación del átomo y es el mismo para todos los átomos, concluimos que la *sustancia ha adquirido una magnetización M opuesta al campo magnético*, resultado que contrasta con el encontrado en el caso del campo eléctrico. Este comportamiento, llamado *diamagnetismo*, es común a todas las sustancias,

TABLA 16-3 Susceptibilidad magnética a temperatura ambiente

Sustancias diamagnéticas	χ_m	Sustancias paramagnéticas	χ_m
hidrógeno (1 atm)	$-2,1 \times 10^{-9}$	oxígeno (1 atm)	$2,1 \times 10^{-6}$
nitrógeno (1 atm)	$-5,0 \times 10^{-9}$	magnesio	$1,2 \times 10^{-5}$
sodio	$-2,4 \times 10^{-6}$	aluminio	$2,3 \times 10^{-6}$
cobre	$-1,0 \times 10^{-5}$	tungsteno	$6,8 \times 10^{-6}$
bismuto	$-1,7 \times 10^{-5}$	titánio	$7,1 \times 10^{-5}$
diamante	$-2,2 \times 10^{-5}$	platino	$3,0 \times 10^{-4}$
mercurio	$-3,2 \times 10^{-5}$	cloruro de gadolinio ($GdCl_3$)	$2,8 \times 10^{-3}$

aunque en muchas de ellas no se observa a causa del efecto paramagnético que se describe más adelante. La magnetización resultante está dada por

$$\mathcal{M} = -\frac{ne^2 \mu_0}{6m_e} \left(\sum_i r_i^2 \right) \mathcal{H}, \quad (16.93)$$

donde \mathcal{H} es el campo magnetizante en la sustancia, n es el número de átomos por unidad de volumen y r_i es la distancia del electrón i -ésimo al núcleo de un átomo. La suma se extiende a todos los electrones del átomo y el valor medio debe calcularse de acuerdo a las prescripciones de la mecánica cuántica. Las otras cantidades tienen el significado usual. El signo menos se debe al hecho de que \mathcal{M} es opuesto a \mathcal{H} . Entonces, conforme a la ec. (16.87), la susceptibilidad magnética es

$$\chi_m = -\frac{ne^2 \mu_0}{6m_e} \left(\sum_i r_i^2 \right) \quad (16.94)$$

y, como es negativa, la permeabilidad relativa $\mu_r = 1 + \chi_m$ es menor que uno. Si introducimos el valor conocido de las constantes, suponemos que n es aproximadamente 10^{28} átomos por m^3 en un sólido y estimamos que r_i es cerca de 10^{-10} m (que es el orden de magnitud de la órbita electrónica), entonces tenemos que χ_m es del orden de magnitud de 10^{-5} para los sólidos, de conformidad con los valores que aparecen en la tabla 16-3. El resultado (16.94) es el equivalente magnético de la susceptibilidad eléctrica estacionaria, dada por la ec. (16.22).

(b) *Efecto de orientación.* A continuación veamos el efecto de orientación. Como se indicó en el ejemplo 15.6, un átomo o molécula puede tener un momento dipolar magnético permanente, asociado al momentum angular de sus electrones. En este caso la presencia de un campo magnético externo produce un torque que tiende a alinear todos los dipolos magnéticos según el campo magnético, con lo cual resulta una magnetización adicional llamada *paramagnetismo*. El magnetismo adquirido por una sustancia paramagnética tiene, por consiguiente, la misma dirección del campo magnético. Este efecto es mucho más intenso que el diamagnetismo y, en el caso de sustancias paramagnéticas, los efectos diamagnéticos están completamente compensados por los efectos paramagnéticos.

La *susceptibilidad paramagnética* de los gases está dada, aproximadamente, por una expresión similar a la ec. (16.26) para la susceptibilidad eléctrica debida a las moléculas polares,

$$\chi_m = \frac{nm_0^2 \mu_0}{3kT}, \quad (16.95)$$

donde m_0 es el momento magnético permanente atómico o molecular, T es la temperatura absoluta de la sustancia y k es la constante de Boltzmann. Como en el caso eléctrico, χ_m disminuye si la temperatura de la sustancia aumenta. Esta dependencia de la temperatura se debe al movimiento molecular, el cual aumenta con la temperatura y por consiguiente tiende a compensar el efecto de

alineamiento del campo magnético. Ahora bien, del resultado del problema 15.50, sabemos que el orden de magnitud del momento atómico es $10^{-23} \text{ J T}^{-1}$. De este modo al introducir los valores de las otras constantes, la ec. (16.95) da para la susceptibilidad paramagnética a temperatura ambiente (298 K) un orden de magnitud de 10^{-4} para sólidos y 10^{-7} para gases en condiciones normales. Este resultado concuerda satisfactoriamente con los valores dados en la tabla 16-3 para las sustancias paramagnéticas.

Una conclusión importante es que, tanto para las sustancias paramagnéticas como para las diamagnéticas, χ_m es muy pequeña comparada con la unidad, y en muchos casos puede reemplazarse $\mu_r = 1 + \chi_m$ por la unidad.

(c) *Otras efectos* Una tercera clase de sustancias magnéticas son las llamadas *ferromagnéticas*. La principal característica de estas sustancias es que presentan una magnetización permanente, que sugiere una tendencia natural de los momentos magnéticos de sus átomos o moléculas a alinearse debido a sus interacciones mutuas. La magnetita y otros minerales naturales mencionados al principio del capítulo 15 son ejemplos de sustancias ferromagnéticas. El ferromagnetismo es entonces similar a la ferroelectricidad en su comportamiento general, aunque su origen es diferente. Está asociado con la interacción entre los espines S_1 y S_2 de dos electrones, que fundamentalmente es de la forma $-JS_1 \cdot S_2$, donde la cantidad J , llamada *integral de intercambio*, depende de la distancia entre los electrones. Cuando J es positiva, el equilibrio se obtiene si S_1 y S_2 son paralelos,

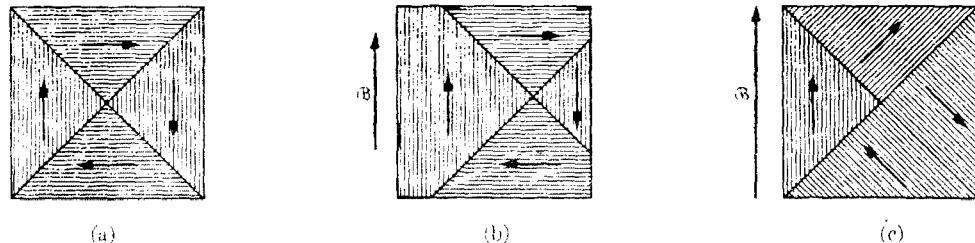


Fig. 16-47. Dominios magnéticos. (a) Sustancias no magnetizadas, (b) magnetización por crecimiento de dominios, (c) magnetización por orientación de dominios.

resultando una orientación de los espines electrónicos en regiones microscópicas llamadas *dominios* (figs. 16.47a y 16.48a), cuyas dimensiones son del orden de 10^{-8} a 10^{-12} m^3 y que contienen de 10^{21} a 10^{17} átomos. La dirección de magnetización de un dominio depende de la estructura cristalina de la sustancia. Por ejemplo en el hierro, cuyos cristales tienen estructura cúbica, las direcciones de fácil magnetización están a lo largo de los tres ejes del cubo. En una porción de materia los dominios mismos pueden estar orientados en diferentes direcciones, dando un efecto neto, o macroscópico, que puede ser nulo o despreciable. En presencia de un campo magnético externo, los dominios experimentan dos efectos: aquellos dominios orientados favorablemente con respecto al campo magnético crecen a expensas de los orientados menos favorablemente (fig. 16.47b); a medida que la intensidad del campo magnético externo aumenta, la magnetización

de los dominios tiende a alinearse en la dirección del campo (fig. 16-47c); y la porción de materia se convierte en un *imán*. El ferromagnetismo es una propiedad que depende de la temperatura, y para cada sustancia ferromagnética existe una temperatura, llamada *temperatura de Curie*, por encima de la cual la sustancia se hace paramagnética. Este fenómeno ocurre cuando el movimiento térmico es suficientemente grande para vencer las fuerzas de alineación. Las sustancias que son ferromagnéticas a temperatura ambiente son: hierro, níquel, cobalto y gadolinio. Sus temperaturas de Curie son 770°C, 365°C, 1075°C y 15°C, respectivamente.

Sin embargo, es posible también que para algunas sustancias J sea negativa. Entonces, el equilibrio se obtiene si los espines electrónicos son antiparalelos,

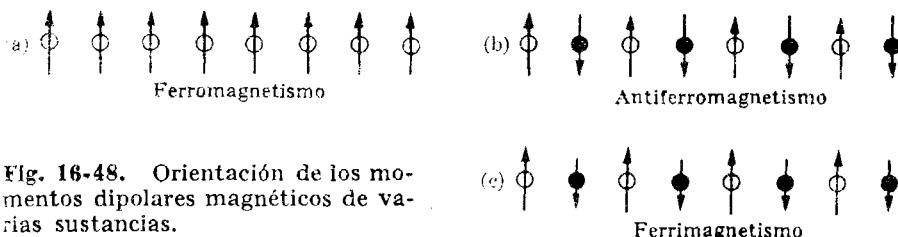


Fig. 16-48. Orientación de los momentos dipolares magnéticos de varias sustancias.

resultando una magnetización neta nula (fig. 16-48b). En este caso la sustancia se llama *antiferromagnética*. Algunas sustancias antiferromagnéticas son MnO, FeO, CoO y NiO.

Otro tipo de magnetización es el llamado *ferrimagnetismo*. Es similar al antiferromagnetismo, pero los momentos magnéticos atómicos o iónicos orientados en un sentido son diferentes de los orientados en sentido opuesto, resultando una magnetización neta (fig. 16-48c). Estas sustancias son llamadas *ferritas*, y se representan generalmente por la fórmula química $M\text{OFe}_2\text{O}_4$, donde M representa Mn, Co, Ni, Cu, Mg, Zn, Cd, etc.; Obsérvese que si M es Fe resulta el compuesto Fe_3O_4 , o magnetita.

EJEMPLO 16.21. Calcular el momento magnético atómico inducido por un campo magnético externo.

Solución: Hemos indicado que un campo magnético externo produce en un átomo un momento magnético en la dirección opuesta al campo. Esto se puede justificar por medio de un modelo muy simple. Consideremos un electrón cuya carga es $-e$, moviéndose alrededor de un núcleo N , en una órbita que por simplicidad supondremos circular, de radio ρ y en el plano $X Y$. Si ω_0 es la velocidad angular del electrón y F la fuerza sobre el mismo debida al núcleo, la ecuación de movimiento del electrón es entonces

$$m_e \omega_0^2 \rho = F.$$

Si ahora se aplica un campo magnético B según el eje Z (esto es, perpendicular al plano de la órbita), se ejerce sobre el electrón una fuerza adicional $F' = -ev \times B$. Esta fuerza estará en la misma dirección que F o en la opuesta, dependiendo de la orientación relativa de ω_0 y B , como se indica en la fig. 16.49. Como la fuerza radial sobre el electrón varía, la frecuencia angular (suponiendo que el radio permanezca

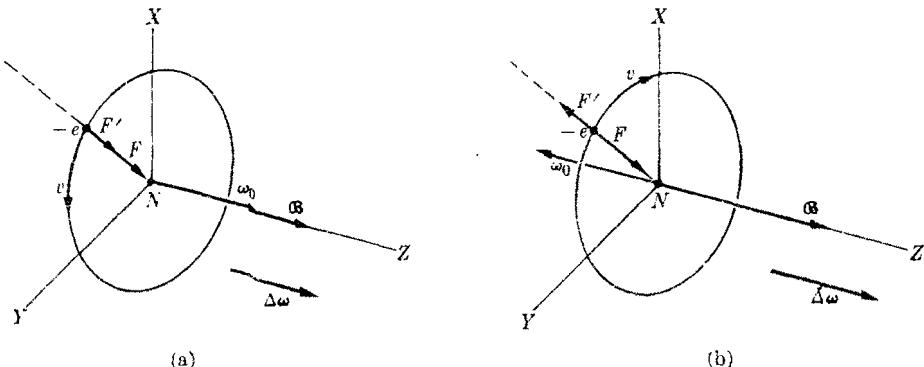


Fig. 16-49. Explicación del diamagnetismo.

constante) también varía, y se hace igual a ω . La ecuación de movimiento del electrón es ahora usando $v = \omega r$ y el hecho de que el módulo de F' es $e v B'$,

$$m_e \omega^2 r = F \pm e \omega B,$$

donde se toma el signo más para el caso (a) de la fig. (16-49) y el menos para el caso (b). Restando ambas ecuaciones de movimiento para eliminar F , encontramos

$$m_e (\omega^2 - \omega_0^2) r = \pm e \omega B \quad \text{y} \quad m_e (\omega + \omega_0) (\omega - \omega_0) = \pm e \omega B.$$

Ahora bien, el cambio de frecuencia, $\Delta\omega = \omega - \omega_0$, es muy pequeño y podemos reemplazar $\omega + \omega_0$ por 2ω sin gran error. Entonces tenemos

$$2m_e \Delta\omega = \pm e B \quad \text{y} \quad \Delta\omega = \pm \frac{e}{2m_e} B,$$

de modo que el cambio de frecuencia es igual a la frecuencia de Larmor Ω_L , que definimos en el ejemplo 15.7. El signo más, que corresponde al caso (a), significa un aumento de ω_0 , y $\Delta\omega$ está entonces dirigido hacia la derecha. El signo menos, que corresponde al caso (b), significa una disminución de ω_0 , y $\Delta\omega$ está entonces también dirigida hacia la derecha. De modo que en ambos casos podemos escribir la relación vectorial

$$\Delta\omega = \frac{e}{2m_e} B.$$

El cambio en la frecuencia del movimiento electrónico produce una corriente neta $-e(\Delta\omega/2\pi)$ y por consiguiente, usando la definición (15.19), un momento magnético

$$\mathbf{m} = -e \left(\frac{\Delta\omega}{2\pi} \right) (\pi r^2) = -\frac{e^2 r^2}{4m_e} B.$$

Por lo tanto el momento magnético del átomo está dirigido en sentido opuesto al campo magnético B , y la sustancia como un todo adquirirá una magnetización opuesta al campo magnético aplicado. Como nuestros cálculos han sido muy simplificados, si queremos obtener un resultado más general debemos tomar en consideración la distribución al azar en el espacio de las órbitas electrónicas y analizar en detalle la naturaleza del campo magnético local B que actúa sobre el electrón. En cualquier caso, nuestros cálculos fundamentalmente coinciden con el resultado señalado en la ec. (16.93).

16.18 Resumen de las leyes de los campos estáticos

En este capítulo hemos discutido los campos eléctrico y magnético estáticos como dos entidades separadas, sin relación alguna entre ellas, excepto que las fuentes del campo eléctrico son las cargas eléctricas y las del campo magnético son las corrientes eléctricas. En consecuencia hemos obtenido dos conjuntos de ecuaciones separadas, las cuales aparecen en la tabla 16-4 en ambas formas, integral y diferencial. Estas ecuaciones permiten calcular el campo eléctrico \mathcal{E} y el campo magnético \mathcal{B} si se conocen las cargas y las corrientes, y recíprocamente. De este modo parece como si los campos eléctrico y magnético se pudieran considerar como dos campos independientes. Sabemos, sin embargo, que esto no es cierto, ya que en el capítulo 15 hemos deducido reglas que relacionan los campos eléctrico y magnético, tal como los miden dos observadores en movimiento relativo uniforme, usando la transformación de Lorentz, y notamos que \mathcal{E} y \mathcal{B} están intimamente relacionados. De este modo podemos esperar que en los casos que dependen del tiempo las ecuaciones precedentes requerirán algunas modificaciones. Aprender cómo hacer estas modificaciones es la tarea del próximo capítulo, donde obtendremos un nuevo conjunto de ecuaciones basadas en evidencias experimentales y que son extensiones de las ecuaciones precedentes.

TABLA 16-4 Ecuaciones del campo electromagnético estacionario

Ley	Forma integral	Forma diferencial
I. Ley de Gauss para el campo eléctrico [Ecs. (16.3) y (16.5)]	$\oint_S \mathcal{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$	$\text{div } \mathcal{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$
II. Ley de Gauss para el campo magnético [Ecs. (16.81) y (16.82)]	$\oint_S \mathcal{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$	$\text{div } \mathcal{B} = 0$
III. Circulación del campo eléctrico. [Ecs. (16.62) y (16.79)]	$\oint_L \mathcal{E} \cdot dl = 0$	$\text{rot } \mathcal{E} = 0$
IV. Circulación del campo magnético (Ley de Ampère) [Ecs. (16.67) y (16.78)]	$\oint_L \mathcal{B} \cdot dl = \mu_0 I$	$\text{rot } \mathcal{B} = \mu_0 \mathbf{j}$

Bibliografía

1. "Nonuniform Electric Fields", H. Pohl, *Sci. Am.*, diciembre 1960, pág. 106
2. "Equipment for the Determination of Magnetic Susceptibilities", J. A. McMillan, *Am. J. Phys.* 27, 352 (1959)
3. "Resource Letter FC-1 on the Evolution of the Electromagnetic Field Concept", W. Scott, *Am. J. Phys.* 31, 819 (1963)
4. *Foundations of Electromagnetic Theory*, J. R. Reitz y F. J. Milford. Addison-Wesley, Reading, Mass., 1960

5. *The Feynman Lectures on Physics*, vol. II, R. Feynman, R. Leighton y M. L. Sands. Addison-Wesley, Reading, Mass., 1963, caps. 2, 3, 10 a 14, y 34 a 37
6. *Source Book in Physics*, W. F. Magie. Harvard University Press, Cambridge, Mass., 1963, pág. 431 (Volta); pág. 446 (Ampère); pág. 465 (Ohm); pág. 519 (Gauss)

Problemas

16.1 Una esfera de radio R_1 tiene una cavidad central de radio R_2 . Una carga q está uniformemente distribuida en su volumen. (a) Hallar el campo eléctrico y el potencial en puntos fuera de la esfera, en el interior de la esfera y en la cavidad central. (b) Hacer los gráficos del campo y del potencial eléctricos en función de la distancia al centro.

16.2 Una esfera conductora de radio R_1 tiene una cavidad central de radio R_2 . En el centro de la cavidad hay una carga q . (a) Entonrar la carga sobre las superficies interna y externa del conductor. (b) Calcular el campo y el potencial eléctricos en puntos fuera de la esfera, en el interior de la esfera y en la cavidad. (c) Hacer los gráficos del campo y del potencial en función de la distancia al centro. [Sugerencia: Recurar que el campo en el interior de un conductor es nulo.]

16.3 El electrón en un átomo de hidrógeno se puede suponer "disperso" en todo el volumen atómico con una densidad $\rho = Ce^{-r/a_0}$, donde $a_0 = 0,53 \times 10^{-10}$ m. (a) Hallar la constante C de modo que la carga total sea $-e$. (b) Determinar la carga total dentro de una esfera de radio a_0 , que corresponde al radio de la órbita del electrón. (c) Obtener el campo eléctrico en función de r . (d) ¿A qué distancia el campo eléctrico difiere de $-e/4\pi\epsilon_0 r^2$ en 1%? [Sugerencia: Para la parte (a), dividir el espacio en capas esféricas, cada una de volumen $4\pi r^2 dr$.]

16.4 Considerar la superficie cúbica cerrada de lado a que se muestra en la fig. 16-50. Esta superficie está colocada en una región donde hay un campo eléctrico paralelo al eje X . Hallar el flujo eléctrico a través de la superficie y la carga total en su interior si el campo

eléctrico es (a) uniforme, (b) varía según $E = Cx$.

16.5 Hallar el flujo eléctrico y la carga total en el interior del cubo de lado a (fig. 16-50) si éste está colocado en una región donde el campo eléctrico es (a) $E = u_z x^2$, (b) $E = c(u_z y + u_y x)$. Hallar también, en cada caso, la densidad de carga.

16.6 Dos esferas conductoras de radios 0,10 cm y 0,15 cm tienen cargas de 10^{-7} C y 2×10^{-7} C, respectivamente. Se ponen en contacto y luego se separan. Calcular la carga de cada esfera.

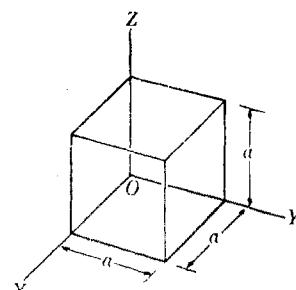


Figura 16-50

16.7 Una esfera metálica de radio 1 m tiene una carga eléctrica neta de 10^{-8} C. Se conecta mediante un alambre conductor a una esfera de radio 0,30 cm inicialmente descargada (muy lejos de la esfera mayor) de modo que ambas tienan el mismo potencial. (a) ¿Cuál será la carga de equilibrio en cada esfera después de hacer la conexión? (b) ¿Cuál es la energía de la esfera cargada antes de hacer la conexión? (c) ¿Cuál es la energía del sistema después de unir las esferas? Si hay alguna pérdida, explicar dónde se encuentra esa energía perdida. (d) Mostrar que la carga se distribuye en las esferas de radios R_1 y R_2 unidas eléctrica-

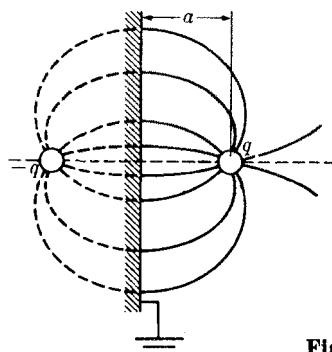
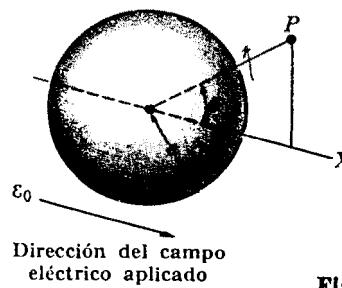


Figura 16-51

mente de modo que $\sigma_1/\sigma_2 = R_1/R_2$, donde σ es la densidad superficial de carga eléctrica. (e) Demostrar, entonces, que el valor del campo eléctrico en la superficie de cada esfera es tal que $\epsilon_1, \text{superficie}/\epsilon_2, \text{superficie} = R_2/R_1$. Para resolver este problema, ignorar el efecto del alambre.

16.8 Se coloca una carga q a una distancia a de un plano conductor infinito mantenido a potencial cero. Se puede demostrar que el campo eléctrico resultante en un punto situado frente al plano es el mismo que el que se obtiene al reemplazar el plano por una carga eléctrica negativa $-q$ situado a una distancia $-a$ (ver la fig. 16-51). Esta segunda carga se llama *imagen* de la primera. (a) Demostrar que el potencial del plano es cero y que el campo es perpendicular al plano. (b) Probar que la densidad de carga sobre el plano es qa/r^2 . (c) Verificar que la carga total sobre el plano es igual a $-q$.

16.9 Se coloca una esfera conductora de radio a en un campo eléctrico uniforme ϵ_0 como se muestra en la fig. 16-52. Como la esfera debe estar a un potencial constante, le asignaremos el valor cero. El campo eléctrico actuando sobre las cargas libres de la esfera hace que éstas se muevan hacia la superficie hasta que el campo eléctrico en su interior es nulo. La esfera se polariza distorsionando el campo eléctrico a su alrededor, aunque a grandes distancias el campo permanece esencialmente uniforme. Puede demostrarse que la solución de la ecuación de Laplace para el potencial eléctrico que satisface las condiciones de este problema es $V = -\epsilon_0 r \cos \theta (1 - a^3/r^3)$.



Dirección del campo eléctrico aplicado

Figura 16-52

(a) Verificar que el potencial de la esfera es cero. (b) Demostrar que a distancias muy grandes el potencial corresponde al de un campo uniforme. (c) Notar que el potencial V es la suma del potencial correspondiente a un campo uniforme y el correspondiente a un dipolo eléctrico. Obtener el momento dipolar eléctrico de la esfera. (d) Obtener las componentes radial y transversal del campo eléctrico. (e) Verificar que el campo eléctrico en la superficie del conductor es perpendicular al mismo. (f) Hacer el gráfico de las líneas de fuerza del campo eléctrico resultante. (g) Hallar la densidad superficial de carga. Discutir su variación sobre la superficie de la esfera. (h) Verificar que la carga total sobre la esfera es cero. (i) Mostrar que el campo eléctrico en el centro de la esfera producido por la carga superficial es $-\epsilon_0$. Lo mismo ocurre para cualquier punto interior de la esfera. ¿Era de esperarse este resultado?

16.10 Como resultado de las ecs. (16.16) y (16.17), puede probarse que en la superficie de separación de dos dieléctricos, la componente tangencial del campo eléctrico y la componente normal del desplazamiento eléctrico son continuas es decir que tienen el mismo valor a ambos lados de la superficie. (La segunda proposición vale sólo si la superficie está descargada). Mostrar entonces que los ángulos que las líneas de fuerza forman con la normal a la superficie satisfacen la relación $\operatorname{tg} \theta_1 / \operatorname{tg} \theta_2 = \epsilon_1 / \epsilon_2$.

16.11 La permitividad del diamante es $1,46 \times 10^{-10} \text{ C}^2 \text{ m}^{-2} \text{ N}^{-1}$. (a) ¿Cuál es la constante dieléctrica del diamante? (b)

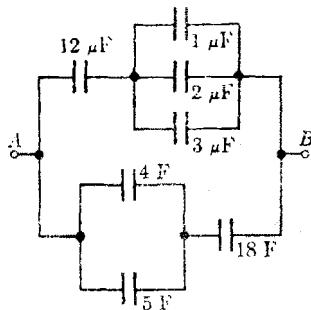


Figura 16-58

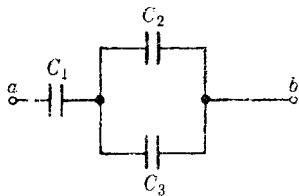


Figura 16-54

¿Cuál es la susceptibilidad eléctrica del diamante?

16.12 El statfarad es la unidad de capacitancia que se define como la capacitancia de un conductor que adquiere el potencial de un estatvoltio cuando se carga con un statcoulomb. Probar que un statfarad es igual a $9 \times 10^{11} \text{ F}$. Otras unidades útiles son el microfarad (μF), igual a 10^{-6} F , y el picofarad (pF), igual a 10^{-12} F .

16.13 Demostrar que la energía eléctrica de un conductor aislado es $\frac{1}{2} CV^2$. Probar también que el mismo resultado es válido para un capacitor de placas planas y paralelas y, en general, para cualquier capacitor.

16.14 Un capacitor que consta de dos placas paralelas muy cerca una de otra tiene en el aire una capacitancia de 1000 pF . La carga sobre cada placa es de 1 C . (a) ¿Cuál es la diferencia de potencial entre las placas? (b) Suponiendo que la carga se mantiene constante, ¿cuál será la diferencia de potencial entre las placas si la separación entre las mismas se duplica? (c) ¿Qué trabajo es necesario para duplicar la separación entre las placas?

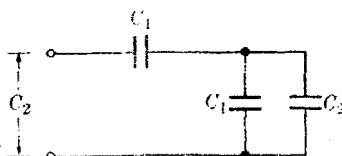


Figura 16-55

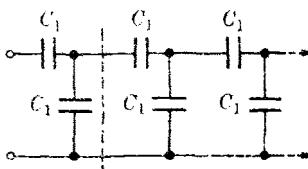


Figura 16-56

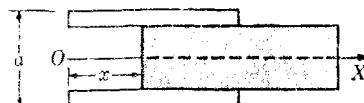


Figura 16-57

16.15 Se desea construir un capacitor intercalando una hoja de papel de $0,004 \text{ cm}$ de espesor entre hojas de estaño. El papel tiene una constante dieléctrica relativa de $2,8$ y conducirá la electricidad si está en un campo eléctrico de intensidad $5 \times 10^7 \text{ V m}^{-1}$ (o mayor). Esto es, la tensión de ruptura del papel es 50 MV m^{-1} . (a) Determinar el área de placa que se necesita para que un capacitor de este tipo tenga una capacitancia de $0,3 \mu\text{F}$. (b) ¿Cuál es el potencial máximo que se puede aplicar si el campo eléctrico en el papel no debe exceder la mitad de la tensión de ruptura?

16.16 Se desea construir un capacitor de placas paralelas usando goma como dieléctrico. Esta goma tiene una constante dieléctrica de 3 y una tensión de ruptura de 20 MV m^{-1} . El capacitor debe tener una capacitancia de $0,15 \mu\text{F}$ y debe soportar una diferencia de potencial máxima de 6000 V . ¿Cuál es el área mínima que deben tener las placas del capacitor?

16.17 La capacitancia de un capacitor variable de radio se puede variar entre 50 pF y 950 pF girando el dial de 0° a 180° . Con el dial en 180° , se conecta

el capacitor a una batería de 400 V. Una vez cargado, el capacitor se desconecta de la batería y se lleva el dial a 0° . (a) ¿Cuál es la carga del capacitor? (b) ¿Cuál es la diferencia de potencial en el capacitor cuando el dial marca 0° ? (c) ¿Cuál es la energía del capacitor en esta posición? (d) Despreciando el roce, determinar la cantidad de trabajo necesario para girar el dial.

16.18 Se carga un capacitor de $20\text{-}\mu\text{F}$ a una diferencia de potencial de 1000 V. Luego se conectan los terminales del capacitor cargado a los de un capacitor descargado de $5\text{-}\mu\text{F}$. Calcular (a) la carga original en el sistema, (b) la diferencia de potencial final en cada capacitor, (c) la energía final del sistema, (d) la disminución de energía cuando se conectan los capacitores.

16.19 (a) Demostrar que la capacitancia de un capacitor esférico de radios a y b es $1,11 \times 10^{-10} \epsilon_0 ab/(a - b)$. (b) Demostrar que la capacitancia de un capacitor cilíndrico de longitud l y radios a y b es $1,11 \times 10^{-10} \epsilon_0 l/2 \ln(b/a)$.

16.20 Un cierto capacitor está hecho de 25 hojas delgadas de metal, cada una de 600 cm^2 de área, separadas entre sí por papel parafinado (permitividad relativa igual 2,6). Hallar la capacitancia del sistema.

16.21 Tres capacitores de $1,5 \text{ }\mu\text{F}$, $2 \text{ }\mu\text{F}$ y $3 \text{ }\mu\text{F}$ se conectan (1) en serie, (2) en paralelo y se les aplica una diferencia de potencial de 20 V. Determinar en cada caso (a) la capacitancia del sistema, (b) la carga y la diferencia de potencial de cada capacitor, (c) la energía del sistema.

16.22 Determinar la capacitancia de la disposición de capacitores que se ilustra en la fig. 16-53. Si el voltaje aplicado es de 120 V, hallar la carga y la diferencia de potencial en cada capacitor así como la energía del sistema.

16.23 En la disposición de capacitores de la fig. 16-54, $C_1 = 3 \text{ }\mu\text{F}$, $C_2 = 2 \text{ }\mu\text{F}$ y $C_3 = 4 \text{ }\mu\text{F}$. El voltaje aplicado entre los puntos a y b es 300 V. Hallar (a) la carga y la diferencia de potencial de cada capacitor, (b) la energía del sistema. Usar dos métodos diferentes para el cálculo de (b).

16.24 Dada la combinación de capacitores que se muestra en la fig. 16-55, probar que la relación entre C_1 y C_2 debe ser $C_2 = 0,618 C_1$ para que la capacitancia del sistema sea igual a C_4 .

16.25 Usando el resultado del problema anterior, mostrar que la capacitancia del sistema de la fig. 16-55 es $0,618 C_1$. [Sugerencia: Observar que, si el sistema se corta según la línea de trazos, la sección de la derecha sigue siendo igual al sistema original porque éste se compone de un número infinito de capacitores.]

16.26 Un trozo de dieléctrico se introduce parcialmente entre las dos placas de un capacitor de placas paralelas, como se muestra en la fig. 16-57. Calcular, en función de x , (a) la capacitancia del sistema, (b) la energía del sistema y (c) la fuerza sobre el trozo. Suponer que el potencial aplicado al capacitor es constante. [Sugerencia: Se puede considerar el sistema como dos capacitores en paralelo.]

16.27 Las placas paralelas de un capacitor en el vacío tienen cargas $+Q$ y $-Q$ y la distancia entre las mismas es x . Las placas se desconectan de la fuente de voltaje que las carga y se apartan

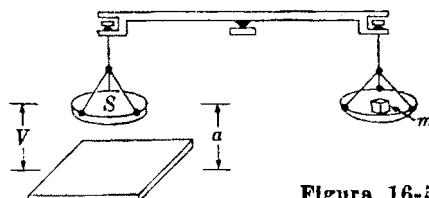


Figura 16-58

una pequeña distancia dx . (a) ¿Cuál es la variación dC en la capacitancia del capacitor? (b) ¿Cuál es la variación dE_e en su energía? (c) Igualar el trabajo $F dx$ al incremento de energía dE_e y hallar la fuerza de atracción F entre las placas. (d) Explicar por qué F no es igual a $Q\epsilon$ siendo ϵ la intensidad de campo eléctrico entre las placas. Rehacer el problema para el caso en que V se mantiene constante.

16.28 Un electrómetro, cuyo diagrama se muestra en la fig. 16-58, se usa para determinar diferencias de potencial. Con-

siste en una balanza cuyo platillo izquierdo es un disco de área S colocado a una distancia a de un plano horizontal, formando así un capacitor. Cuando se aplica una diferencia de potencial entre el disco y el plano, se produce una fuerza hacia abajo sobre el disco. Para restaurar el equilibrio de la balanza, se coloca una masa m sobre el otro platillo. Demostrar que $V = a\sqrt{2mg/\epsilon_0 S}$. [Observación: En el instrumento real el disco está rodeado por un anillo mantenido al mismo potencial para asegurar que el campo sea uniforme en todo el disco.]

16.29 Cuatro capacitores están dispuestos como se muestra en la fig. 16-59. Se aplica una diferencia de potencial V

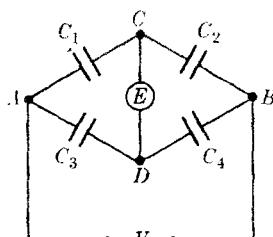


Figura 16-59

entre los terminales A y B y se conecta un electrómetro E entre C y D para determinar la diferencia de potencial entre ellos. Probar que el electrómetro marca cero si $C_1/C_2 = C_3/C_4$. Esta es una disposición en puente que permite determinar la capacitancia de un capacitor

en función de un capacitor patrón y del cociente entre dos capacitancias.

16.30 En un medio ionizado (tal como un gas o un electrolito) hay iones positivos y negativos. Demostrar que si cada ion lleva una carga $\pm ve$ la densidad de corriente es $j = ve(n_+v_+ - n_-v_-)$, donde n_+ y n_- son el número de iones de cada clase por unidad de volumen.

16.31 Se ha estimado que el cobre tiene cerca de 10^{29} electrones libres por metro cúbico. Usando el valor de la conductividad del cobre dado en la tabla 16-2, estimar el tiempo de relajamiento para un electrón del cobre.

16.32 La corriente en un conductor está dada por $I = 4 + 2t^2$, donde I está en amperes y t en segundos. Hallar el valor medio y el valor medio cuadrático de la corriente entre $t = 0$ y $t = 10$ s.

16.33 Determinar la resistencia total en cada una de las combinaciones que se muestran en la fig. 16-60. Determinar además la corriente y la diferencia de potencial entre los extremos de cada resistor.

16.34 (a) Calcular la resistencia equivalente entre x e y del circuito de la fig. 16-61. (b) ¿Cuál es la diferencia de potencial entre x y a si la corriente en el resistor de 8 ohms es de 0,5 amperes?

16.35 (a) El resistor largo entre a y b de la fig. 16-62 tiene una resistencia de 300 ohms y derivaciones a un tercio de su longitud. ¿Cuál es la resistencia equivalente entre x e y ? (b) La diferencia

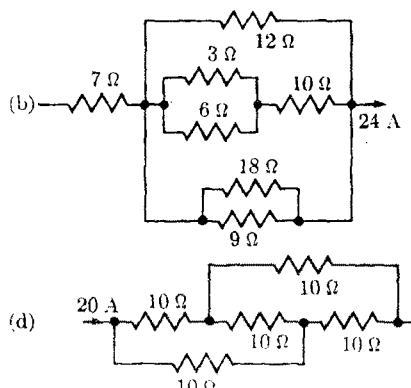
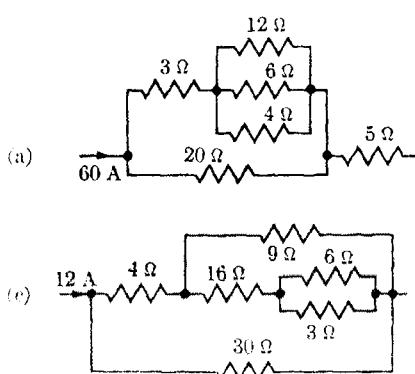


Figura 16-60

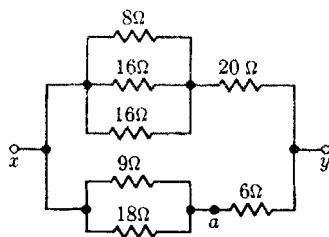


Figura 16-61

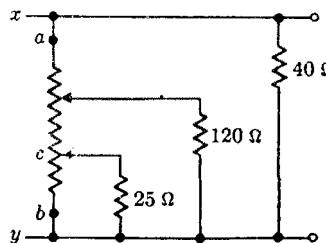


Figura 16-62

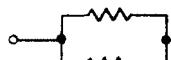


Figura 16-63

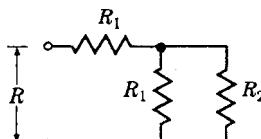


Figura 16-64

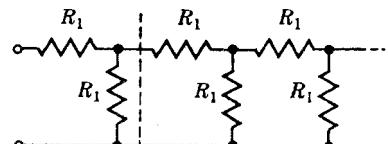


Figura 16-65

de potencial entre x y y es 320 V. ¿Cuál es la diferencia de potencial entre b y c ?

16.36 Cada uno de los tres resistores de la fig. 16-63 tiene una resistencia de 2 ohms y puede disipar un máximo de 18 watts sin calentarse excesivamente. ¿Cuál es la potencia máxima que el circuito puede disipar?

16.37 Tres resistores iguales se conectan en serie. Cuando se aplica una cierta diferencia de potencial a la combinación, ésta consume una potencia total de 10 watts. ¿Qué potencia consumirá si los tres resistores se conectan en paralelo a la misma diferencia de potencial?

16.38 Dada la disposición de resistores que se muestra en la fig. 16-64, probar que la relación entre R_1 y R_2 es $R_2 = 1,618R_1$. [Sugerencia: Observar que si el sistema se corta a través de la línea de trazos, la sección de la derecha es aún igual al sistema original porque éste está compuesto de un número infinito de resistores.]

16.40 La corriente máxima permisible en la bobina de un instrumento eléctrico es 2,5 A. Su resistencia es 20 Ω. ¿Qué debe hacerse para insertarla (a) en una línea eléctrica que conduce una corriente de 15 A, (b) entre dos puntos que tienen una diferencia de potencial de 110 V?

16.41 ¿Cómo varía la resistencia de un alambre cuando (a) se duplica su lon-

gitud, (b) se duplica su sección transversal, (c) se duplica su radio?

16.42 Discutir los errores cometidos en la medida de una resistencia usando un voltímetro y un amperímetro como se muestra en la fig. 16-66 cuando las resistencias R_V y R_A de los instrumentos se desprecian. ¿Cuál método da el menor error cuando R es (a) grande, (b) pequeño? Observar que, en general, R_V es muy grande y R_A es muy pequeño.

16.43 Las medidas que aparecen en la tabla 16-5 corresponden a la corriente y a la diferencia de potencial entre los extremos de un alambre de cierto material. (a) Hacer el gráfico de V en función de I . ¿Sigue el material la ley de Ohm? Estimar en el gráfico la resistencia del material cuando la corriente es de 1,5 A. Esta resistencia se define como el cociente $\Delta V/\Delta I$ cuando las variaciones son pequeñas y se obtiene trazando la tangente a la curva en el punto dado. (c) Comparar sus resultados con la resistencia media entre 1,0 A y 2,0 A.

16.44 El gráfico de la fig. 16-67 ilustra la variación del voltaje con la corriente (sobre una escala logarítmica), para diferentes temperaturas de un semiconductor. (a) Estimar la resistencia del semiconductor a las temperaturas indicadas y hacer el gráfico de la resistencia en función de la temperatura en escala semi-

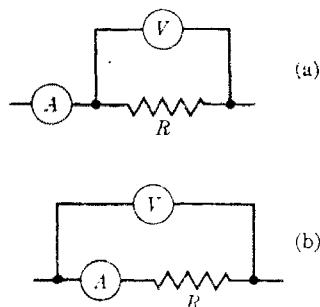


Figura 16-66

logarítmica. (b) Suponiendo que la variación en la resistencia se debe totalmente a la variación en el número de cargas por unidad de volumen, estimar el cociente entre su valor a 300°C y su valor a 100°C .

TABLA 16-5

I , amp	V , volts
0,5	4,75
1,0	5,81
2,0	7,05
4,0	8,56

16.45 El circuito de la fig. 16-68 se llama *ponte de Wheatstone*. Se usa para medir resistencias. Demostrar que cuando la corriente a través del galvanómetro G es cero (de modo que los puntos D y C están al mismo potencial), se cumple $R_1/R_2 = R_3/R_4$. Así, si se conocen R_2 y el cociente R_3/R_4 , podemos obtener la resistencia R_1 .

16.46 La fig. 16-69 muestra un *potenciómetro* usado para medir la fem V_x de una pila x ; B es una batería y S_t es una pila patrón de fem V_{st} . Cuando el conmutador se coloca en 1 ó en 2, se mueve la derivación b hasta que el galvanómetro G marque cero. Demostrar que si l_1 y l_2 son las distancias correspondientes desde b hasta a , entonces $V_x = V_{st}(l_1/l_2)$.

16.47 Volviendo al potenciómetro de la fig. 16-69, la fem de B es aproximadamente 3 V y su resistencia interna es desconocida; S_t es una pila patrón cuya fem es 1,0183 V. Se pone el conmutador

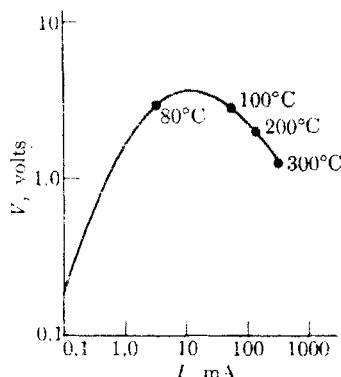


Figura 16-67

en el punto 2, colocando así la pila patrón en el circuito del galvanómetro. Cuando la derivación b está a 0,36 de la distancia entre a y c , en el galvanómetro se lee cero. (a) ¿Cuál es la diferencia de potencial entre los extremos del resistor ac ? (b) Se pone el conmutador en el punto 1 y se lee nuevamente cero en el galvanómetro cuando b está a 0,47 de la distancia entre a y c . ¿Cuál es la fem de la pila x ?

16.48 La diferencia de potencial entre los terminales de una batería es de 8,5 V cuando por ella pasa una corriente de 3 A desde el terminal negativo al positivo. Cuando la corriente es de 2 A en sentido contrario, la diferencia de potencial se

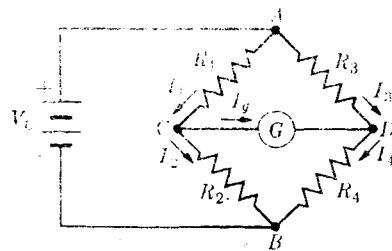


Figura 16-68

hace igual a 11 V. (a) ¿Cuál es la resistencia interna de la batería? (b) ¿Cuál es su fem?

16.49 En el circuito de la fig. 16-70, determinar (a) la corriente en la batería, (b) la diferencia de potencial entre sus

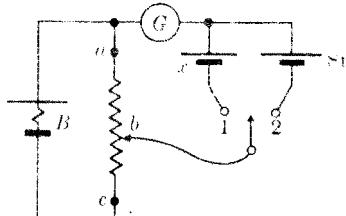


Figura 16-69

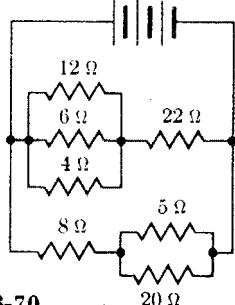
3V, $\frac{1}{3}\Omega$ cada pila

Figura 16-70

20 Ω

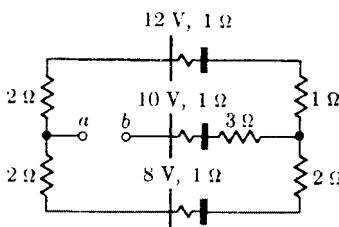


Figura 16-72

terminales y (c) la corriente en cada conductor.

16.50 Determinar la corriente en cada conductor de la red que se muestra en la fig. 16-71.

16.51 (a) Determinar la diferencia de potencial entre los puntos *a* y *b* de la fig. 16-72. (b) Suponiendo que *a* y *b* estén conectados, calcular la corriente en la pila de 12 V.

16.52 (a) En la fig. 16-73a, ¿cuál es la diferencia de potencial V_{ab} cuando el interruptor *S* está abierto? (b) ¿Cuál es la corriente a través del interruptor *S* cuando éste se cierra? (c) En la fig. 16-73b, ¿cuál es la diferencia de potencial V_{ab} cuando el interruptor *S* está

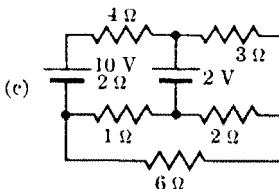
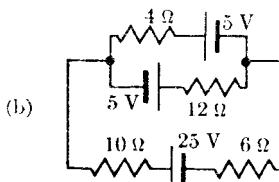
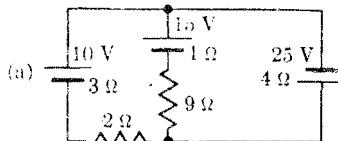


Figura 16-71

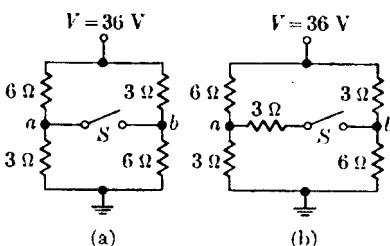


Figura 16-73

abierto? (d) ¿Cuál es la corriente a través del interruptor *S* cuando éste está cerrado? ¿Cuál es la resistencia equivalente del circuito de la fig. 16-73, (e) cuando el interruptor *S* está abierto?, (f) ¿cuándo está cerrado?

16.53 Un conductor cilíndrico hueco, de longitud *L*, tiene radios R_1 y R_2 . Se aplica una diferencia de potencial entre sus extremos de tal modo que una corriente *I* fluye paralelamente a su eje. Demostrar que, si σ es la conductividad del material, la resistencia del conductor es

$$\frac{L}{\pi\sigma}(R_2^2 - R_1^2)$$

16.54 Un conductor cilíndrico hueco de longitud *L* tiene radios R_1 y R_2 .

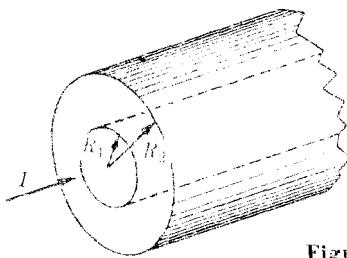


Figura 16-74

Se aplica una diferencia de potencial entre las superficies interior y exterior de modo que la corriente I fluya en dirección radial hacia afuera. Demostrar que, si σ es la conductividad del material, la resistencia es $\ln(R_2/R_1)/2\pi\sigma L$.

16.55 La aguja de un galvanómetro se desvía completamente sobre su escala (50 divisiones) cuando la corriente es de $0,1 \text{ mA}$. La resistencia del galvanómetro es 50Ω . ¿Qué debe hacerse para transformarlo (a) en un amperímetro en el cual cada división corresponda a $0,2 \text{ A}$, (b) en un voltímetro en el cual cada división corresponda a $0,5 \text{ V}$?

16.56 El *sstatampere* (stA) es una unidad de corriente eléctrica correspondiente a un stC por segundo. Evidentemente $1 \text{ A} = 3 \times 10^9 \text{ stA}$. Demostrar que cuando el campo magnético se expresa en gauss (ver problema 15.53) la corriente en stA, la distancia en cm y la densidad de corriente en stA cm^{-2} , la ec. (16.67) se convierte en $\oint \mathcal{B} \cdot d\ell = \frac{1}{3} \times 10^{-10} I$ y la ec. (16.78) es $\text{rot } \mathcal{B} = \frac{1}{3} \times 10^{-10} j$.

16.57 Una unidad para el campo magnetizante es el *oersted*. Se define como el campo magnetizante producido por una corriente rectilínea de $3 \times 10^{10} \text{ stA}$ en un punto situado a 2 cm de la corriente. (a) Probar que 1 A m^{-1} es igual a 4×10^{-3} oersted. (b) Demostrar que el campo magnetizante de una corriente rectilínea es $\mathcal{H} = 2I/3 \times 10^{10} r$, cuando \mathcal{H} se mide en oersted, I en stA y r en cm. (c) Probar que, en función de las mismas unidades, la ec. (16.85) se convierte en $\oint \mathcal{H} \cdot d\ell = 4\pi I/3 \times 10^{10}$.

16.58 El cilindro hueco conductor de la fig. 16-74, de radios R_1 y R_2 , conduce una corriente I uniformemente distribuida en su sección transversal. Usando la ley de Ampère, probar que el campo

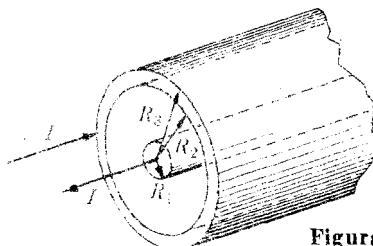


Figura 16-75

magnético a distancias $r > R_2$ es $B = \mu_0 I/2\pi r$, que el campo para $R_1 < r < R_2$ es

$$\mu_0 I(r^2 - R_1^2)/2\pi(R_2^2 - R_1^2)r,$$

y que es cero para $r < R_1$.

16.59 Un cable coaxial se forma rodeando un conductor cilíndrico sólido de radio R_1 con un cilindro conductor coaxial de radio interno R_2 y radio externo R_3 (fig. 16-75). En la práctica usual se envía una corriente por el cable interior que regresa por la capa exterior. Usando la ley de Ampère, determinar el campo magnético en puntos en las distintas regiones dentro y fuera del cable. Hacer el gráfico de B en función de r . Suponer que la densidad de corriente es uniforme.

16.60 La tabla 16-6 da medidas experimentales de la susceptibilidad magnética del alumbre de amonio hierro. Hacer un gráfico de $1/\chi_m$ en función de la temperatura absoluta y determinar si vale la ley de Curie. En caso afirmativo, ¿cuál es la constante de Curie?

TABLA 16-6

$t, ^\circ\text{C}$	χ_m
-258	$75,4 \times 10^{-4}$
-173	$11,3 \times 10^{-4}$
-73	$5,65 \times 10^{-4}$
27	$3,77 \times 10^{-4}$

16.61 Usando el operador $\nabla = u_x(\partial/\partial x) + u_y(\partial/\partial y) + u_z(\partial/\partial z)$ definido en la sección 8.7, demostrar que se verifican las siguientes identidades: $\text{div } \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A}$, $\text{rot } \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A}$.

16.62 Usando el operador ∇ , reescribir las ecuaciones diferenciales del campo

electromagnético que aparecen en la tabla 16-4.

16.63 Usando el resultado del problema 16.61, probar que $\text{rot grad } V = \nabla \times (\nabla V) = 0$ y que $\text{div rot } A = \nabla \cdot (\nabla \times A) = 0$. Dos resultados importantes se deducen de estas identidades: uno es que, como para el campo electrostático $\mathcal{E} = -\text{grad } V$, entonces $\text{rot } \mathcal{E} = \nabla \times \mathcal{E} = 0$;

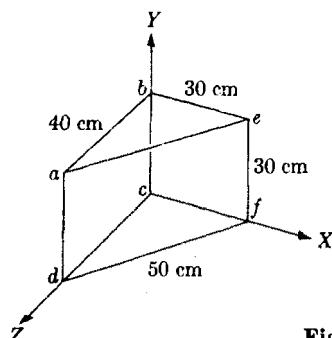


Figura 16-76

este resultado se estableció en la ec. (16.79). La otra es que como para el campo magnético $\text{div } \mathcal{B} = \nabla \cdot \mathcal{B} = 0$, entonces existe un campo vectorial \mathcal{A} tal que $\mathcal{B} = \nabla \times \mathcal{A}$. El vector de campo \mathcal{A} se llama potencial vectorial del campo electromagnético.

16.64 Demostrar que el potencial vectorial de un campo magnético uniforme es $\mathcal{A} = \frac{1}{2} \mathcal{B} \times \mathbf{r}$. [Sugerencia: Suponer que \mathcal{B} está según el eje Z. Obtener las componentes cartesianas de \mathcal{A} y luego hallar $\nabla \times \mathcal{A}$.]

16.65 Probar que en un medio en el cual existe una corriente eléctrica uniforme de densidad constante, el campo magnético es $\mathcal{B} = \frac{1}{2} \mu_0 j \times \mathbf{r}$. [Sugerencia:

Verificar que vale la relación $\text{rot } \mathcal{B} = \nabla \times \mathcal{B} = \mu_0 j$.]

16.66 Escribir el operador $\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$. Luego demostrar que la ecuación de Laplace (16.7) y la ecuación de Poisson (16.6) se pueden escribir, respectivamente como $\nabla^2 V = 0$ y $\nabla^2 V = -\rho/\epsilon_0$.

16.67 En una cierta región el módulo del campo magnético \mathcal{B} es 2 T y su dirección la del eje positivo X de la fig. 16-76. (a) ¿Cuál es el flujo magnético a través de la superficie abed de la figura? (b) ¿Cuál es el flujo magnético a través de la superficie befc? (c) ¿Cuál es el flujo magnético a través de la superficie aefd?

16.68 Determinar el flujo magnético a través del circuito rectangular de la figura 16-77 cuando por el alambre recto fluye una corriente I .

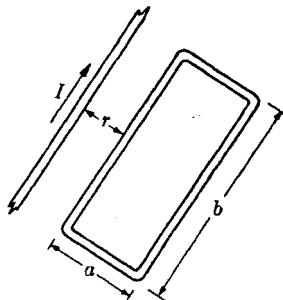


Figura 16-77

16.69 Introduciendo en la ec. (16.78) el valor de \mathcal{M} dado por la ec. (16.83) probar que $\text{rot } \mathcal{H} = \mu_0 j_{\text{libre}} + \text{rot } \mathcal{M}$. Interpretar este resultado como indicación de que el efecto de la magnetización del medio es equivalente a la adición de una densidad de corriente de magnetización $j_{\mathcal{M}} = \text{rot } \mathcal{M}$, a la densidad de corriente libre.

CAMPOS ELECTROMAGNETICOS DEPENDIENTES DEL TIEMPO

- 17.1 *Introducción*
- 17.2 *Ley de Faraday-Henry*
- 17.3 *El betatrón*
- 17.4 *Inducción electromagnética debida al movimiento relativo de un conductor y un campo magnético*
- 17.5 *Inducción electromagnética y el principio de relatividad*
- 17.6 *Potencial eléctrico e inducción electromagnética*
- 17.7 *Ley de Faraday-Henry en forma diferencial*
- 17.8 *Autoinducción*
- 17.9 *Energía del campo magnético*
- 17.10 *Oscilaciones eléctricas*
- 17.11 *Circuitos acoplados*
- 17.12 *Principio de conservación de la carga*
- 17.13 *Ley de Ampère-Maxwell*
- 17.14 *Ley de Ampère-Maxwell en forma diferencial*
- 17.15 *Ecuaciones de Maxwell*

17.1 Introducción

En el capítulo anterior consideramos campos eléctricos y magnéticos independientes del tiempo o, en otras palabras, estáticos. En este capítulo consideraremos campos que dependen del tiempo, es decir, que varían en el tiempo. Podemos esperar que existan nuevas relaciones en este caso. En la sección 15.12 vimos la íntima relación entre las partes eléctrica y magnética de un campo electromagnético, especialmente en lo que se refiere a las propiedades de transformación del campo electromagnético exigidas por el principio de relatividad. En este capítulo veremos que un campo magnético variable exige la presencia de un campo eléctrico, e inversamente: que un campo eléctrico variable exige un campo magnético, y que esto es también un requisito del principio de relatividad. Las leyes que describen estas dos situaciones se denominan *ley de Faraday-Henry* y *ley de Ampère-Maxwell*.

17.2 Ley de Faraday-Henry

Uno de los muchos fenómenos electromagnéticos con los cuales el estudiante está familiarizado es la inducción electromagnética, que fue descubierta casi simultáneamente hacia 1830 por Michael Faraday y Joseph Henry, aunque estaban trabajando independientemente. La inducción electromagnética es el principio sobre el que se basa el funcionamiento del generador eléctrico, el transformador y muchos otros dispositivos de uso diario. Supongamos que se coloca un conductor eléctrico en forma de circuito dentro de una región en la que hay un campo magnético. Si el flujo magnético Φ_B a través del conductor cerrado *varía en el tiempo*, se puede observar una corriente en el circuito (mientras el flujo está variando). La presencia de una corriente eléctrica indica la existencia o inducción de una fem actuando en el circuito. Midiendo esta fem inducida se encuentra que depende de la rapidez de variación $d\Phi_B/dt$ del flujo magnético. Por ejemplo, si se coloca un imán cerca de un conductor cerrado, aparece una fem en el circuito cuando el imán (o el circuito) se mueve de tal modo que cambia el flujo mag-

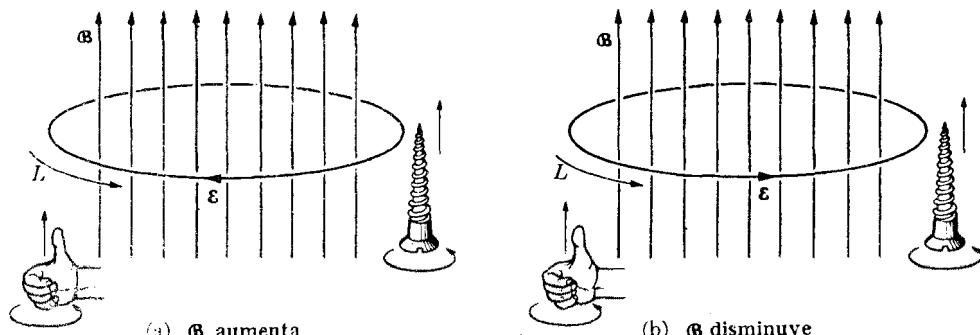


Fig. 17-1. Campo eléctrico producido por un campo magnético dependiente del tiempo: (a) $d\Phi_B/dt$ positiva, V_E negativa; (b) $d\Phi_B/dt$ negativa, V_E positiva.

nético a través del circuito. El valor absoluto de la fem inducida depende de si el imán (o el circuito) se mueve rápida o lentamente. Cuanto mayor sea la rapidez de variación del flujo, mayor será la fem inducida. El sentido en que actúa la fem inducida cambia según que el campo magnético aumente o disminuya.

Para ser más precisos, referímonos a la fig. 17-1, donde se ha orientado la curva L de acuerdo con la regla de la sección 3.10, es decir, en el sentido de un corchito de rosca derecha que avanza en la dirección del campo magnético B . Cuando el flujo magnético aumenta (esta es, $d\Phi_B/dt$ es positiva), la fem inducida V_E actúa en sentido negativo, mientras que cuando el flujo magnético disminuye (esta es, $d\Phi_B/dt$ es negativa), V_E actúa en sentido positivo. Por lo tanto el signo

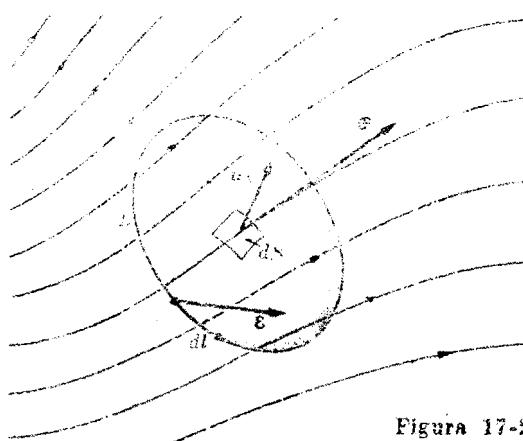


Figura 17-2

de la fem inducida V_E siempre es opuesto al de $d\Phi_B/dt$. Medidas más exactas revelan que el valor de la fem inducida es, cuando se expresa en volts, igual a la derivada del flujo magnético con respecto al tiempo, expresada en Wb s^{-1} . En consecuencia podemos escribir

$$V_E = -\frac{d\Phi_B}{dt}, \quad (17.1)$$

que expresa la ley de Faraday-Henry para la inducción electromagnética. En palabras la podemos establecer así:

en un campo magnético variable se induce una fem en cualquier circuito cerrado, la cual es igual a menos la derivada con respecto al tiempo del flujo magnético a través del circuito.

Es importante verificar que la ec. (17.1) es compatible en cuanto a unidades. Sabemos que V_E se expresa en V ó $\text{m}^2 \text{kg s}^{-2} \text{C}^{-1}$. Recordemos de la sección 16.14 que Φ_B se expresa en Wb o sea $\text{m}^2 \text{kg s}^{-1} \text{C}^{-3}$ por lo que $d\Phi_B/dt$ se debe expresar en Wb s^{-1} o sea $\text{m}^2 \text{kg s}^{-2} \text{C}^{-3}$. Por lo tanto, ambos miembros de la ec. (17.1) están expresados en las mismas unidades.

Refiriéndonos a la fig. 17-2, si dividimos la superficie limitada por L en elementos infinitesimales de área, cada uno orientado de acuerdo con la regla establecida en la sección 3.10, el flujo magnético a través de L es $\Phi_B = \int_S \mathcal{B} \cdot u_N dS$, conforme a la sección 16.14. Además, la fem V_E implica la existencia de un campo eléctrico \mathcal{E} tal que $V_E = \oint_L \mathcal{E} \cdot dl$, según la ec. (16.60). Podemos por lo tanto escribir la ec. (17.1) en la forma equivalente

$$\oint_L \mathcal{E} \cdot dl = - \frac{d}{dt} \int_S \mathcal{B} \cdot u_N dS. \quad (17.2)$$

Olvídemos ahora que el camino L coincide con un conductor eléctrico tal como un alambre cerrado y consideremos en cambio una región del espacio en que existe un campo magnético variable en el tiempo. Entonces la ec. (17.2) es equivalente a decir:

un campo magnético dependiente del tiempo implica la existencia de un campo eléctrico tal que su circulación a lo largo de un camino arbitrario cerrado es igual a menos la derivada con respecto al tiempo del flujo magnético a través de una superficie limitada por el camino.

Esta es otra manera de expresar la ley de Faraday-Henry para la inducción electromagnética. Da una visión más profunda del contenido físico del fenómeno de inducción electromagnética, es decir, del hecho de que siempre debe haber un campo eléctrico cuando un campo magnético está variando en el tiempo, estando los dos campos relacionados por la ec. (17.2). El campo eléctrico se puede determinar midiendo la fuerza que actúa sobre una carga en reposo en la región donde el campo magnético está variando. De esta manera se ha confirmado experimentalmente nuestra interpretación de la ec. (17.2).

EJEMPLO 17.1. Se coloca un circuito plano de N vueltas, cada una de área S , perpendicularmente a un campo magnético uniforme que varía en el tiempo en forma alterna. La ecuación del campo es $\mathcal{B} = \mathcal{B}_0 \operatorname{sen} \omega t$. Calcular la fem inducida en el circuito.

Solución: El flujo a través de una vuelta del circuito es $\Phi_B = S\mathcal{B} = S\mathcal{B}_0 \operatorname{sen} \omega t$ y el flujo total a través de las N vueltas es

$$\Phi_B = NS\mathcal{B}_0 \operatorname{sen} \omega t.$$

Aplicando la ec. (17.1) obtenemos entonces para la fem inducida

$$V_E = - \frac{d\Phi_B}{dt} = - NS\mathcal{B}_0 \omega \operatorname{cos} \omega t, \quad (17.3)$$

la cual indica que la fem inducida es oscilatoria o alterna con la misma frecuencia que el campo magnético.

EJEMPLO 17.2. En una región del espacio hay un campo magnético que es paralelo al eje Z y tiene simetría axial, es decir, que en cada punto su módulo depende sólo de la distancia r al eje Z . El módulo también varía en el tiempo. Determinar el campo eléctrico \mathcal{E} en cada punto del espacio.

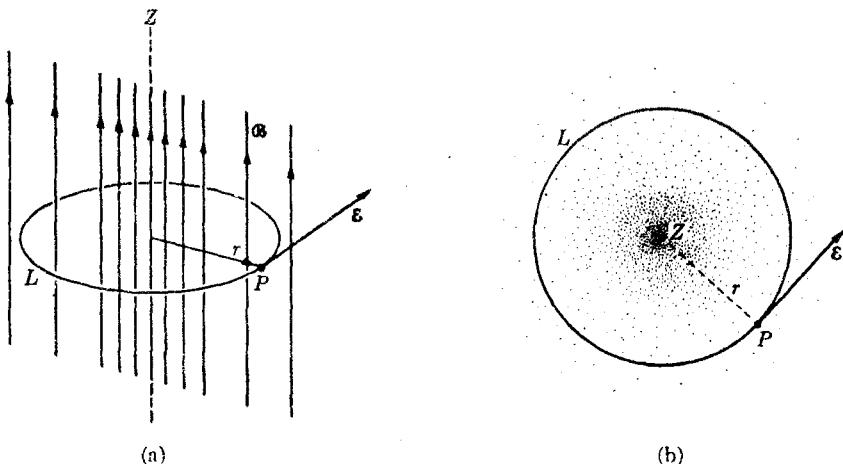


Fig. 17-3. Campo eléctrico producido por un campo magnético dependiente del tiempo que tiene simetría axial; (a) vista lateral, (b) corte transversal.

Solución: Supongamos que el campo magnético decrece alejándose del eje Z. La fig. 17-3(a) muestra una vista lateral del campo y la fig. 17-3(b) una sección transversal.

La simetría del problema sugiere que el campo eléctrico ϵ debe depender de r solamente, y que debe ser perpendicular al campo magnético y al radio vector r . En otras palabras: las líneas de fuerza del campo eléctrico ϵ son circunferencias con centro en el eje Z. Eligiendo una de estas circunferencias como nuestro camino L para la ec. (17.2), tenemos

$$V\epsilon = \oint_L \epsilon \cdot d\mathbf{l} = \epsilon(2\pi r).$$

Por lo tanto, usando la ec. (17.1), obtenemos

$$\epsilon(2\pi r) = - \frac{d\Phi_B}{dt}. \quad (17.4)$$

El campo magnético promedio \bar{B} en una región que cubre un área S se define como $\bar{B} = \Phi_B/S$ o sea $\Phi_B = \bar{B}S$. En nuestro caso $S = \pi r^2$, de modo que $\Phi_B = \bar{B}(\pi r^2)$. Entonces la ec. (17.4) nos da para el campo eléctrico a una distancia r del eje

$$\epsilon = - \frac{1}{2} r \left(\frac{d\bar{B}}{dt} \right). \quad (17.5)$$

Si el campo magnético es uniforme, $\bar{B} = B$.

17.3 El betatrón

Los resultados del ejemplo 17.2 se han usado para diseñar un acelerador de electrones llamado *betatrón*, inventado en 1941 por el físico norteamericano D. Kerst. La idea es muy simple en principio. Si se inyecta un electrón (o cualquier partícula cargada) en una región donde hay un campo magnético variable que tiene simetría axial, el electrón se acelera. Esto se debe a que el campo magnético varía con el tiempo, creando un campo eléctrico que apunta hacia el eje Z. El electrón sigue una trayectoria circular en el campo magnético, y el campo eléctrico lo acelera cada vez que pasa por el mismo. De esta manera, el electrón adquiere una gran velocidad.

tria axial, el electrón será acelerado por el campo eléctrico asociado \mathcal{E} dado por la ec. (17.2) o la ec. (17.5). A medida que el electrón gane velocidad, el campo magnético \mathcal{B} curvará su trayectoria. Si se ajustan los campos eléctrico y magnético en forma apropiada, la órbita del electrón será una circunferencia. En cada revolución el electrón gana energía, por lo que después de describir varias revoluciones se ha acelerado adquiriendo una energía determinada; cuanto mayor sea el número de revoluciones, mayor será la energía.

Para ver el problema con más detalle consideremos el electrón en el punto P (fig. 17.3). Si las cosas se arreglan de modo tal que el electrón describa una circunferencia de radio r , el campo eléctrico producirá un movimiento tangencial que se determina usando $dp/dt = F_T$ (ver sección 7.12) con una fuerza tangencial $F_T = -e\mathcal{E}$, de modo que

$$\frac{dp}{dt} = -e\mathcal{E} = \frac{1}{2}er \left(\frac{d\mathcal{B}}{dt} \right). \quad (17.6)$$

Para generar un movimiento circular, el campo magnético debe producir la aceleración centrípeta necesaria. El módulo de la fuerza centrípeta es, según la ec. (15.1), $F_N = ev^2\mathcal{B}$. Usando $pv/r = F_N$ (ver sección 7.12), obtenemos

$$pv/r = ev^2\mathcal{B} \quad \text{o} \quad p = er^2\mathcal{B}, \quad (17.7)$$

y derivando respecto al tiempo, teniendo en cuenta que r es constante porque la trayectoria es una circunferencia, tenemos

$$\frac{dp}{dt} = er \frac{d^2\mathcal{B}}{dt^2}.$$

Si comparamos ésta con la ec. (17.6), concluimos que la condición necesaria para que el electrón describa una órbita circular bajo la acción combinada de los campos eléctrico y magnético es que, a cualquier distancia r , el campo magnético debe ser

$$\mathcal{B} = \frac{1}{2}\bar{\mathcal{B}} \quad (17.8)$$

donde $\bar{\mathcal{B}}$ es el valor promedio de \mathcal{B} en la región entre Z y L . Esto impone ciertos requisitos en la manera cómo el campo magnético \mathcal{B} puede variar en función de la distancia radial r al eje. La variación exacta de \mathcal{B} con r se determina por el hecho de que es necesaria cierta estabilidad del movimiento orbital. Esto es, dado el radio de la órbita deseada, las fuerzas que actúan sobre el electrón deben ser tales que si se perturba ligeramente el movimiento del electrón (es decir, si se le empuja hacia un lado o hacia otro de la órbita), las fuerzas eléctrica y magnética que actúan sobre el electrón tiendan a colocarlo nuevamente en la órbita correcta.

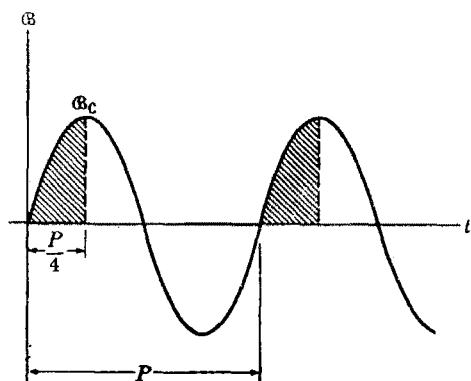
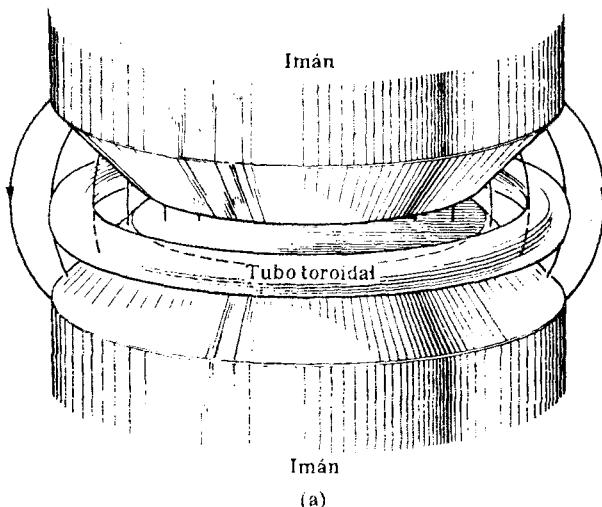
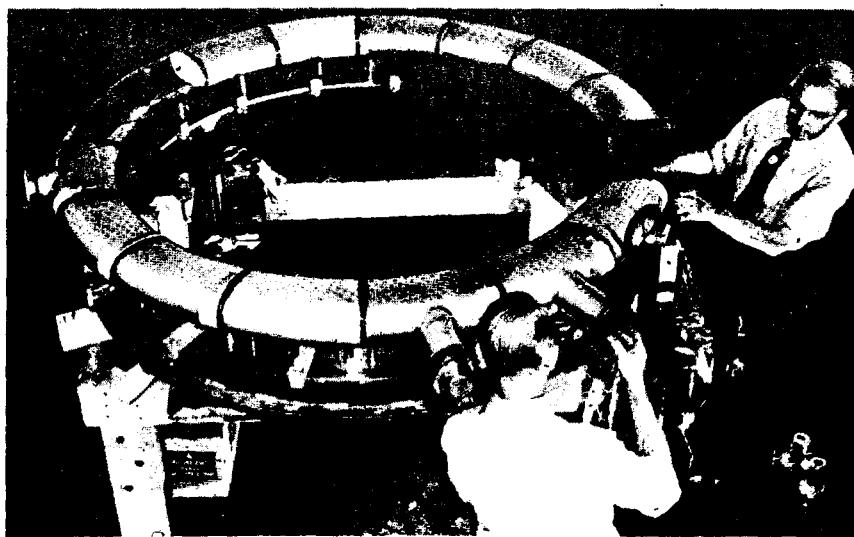


Fig. 17.4. Tiempo de aceleración en un betatrón.



(a)



(b)

Fig. 17-5. (a) Vista del tubo de aceleración y de las piezas polares de un betatrón.
 (b) Ensamblando el tubo de aceleración en un betatrón.

En general, el campo magnético \mathcal{B} es oscilatorio con una frecuencia angular ω . Ahora bien, de acuerdo con las ecs. (17.6) y (17.7), el electrón se acelera solamente cuando el campo magnético está aumentando. Por otra parte, como en la práctica se inyectan los electrones con momentum muy pequeño, se debe hacerlo cuando el campo magnético es cero. Esto significa que sólo un cuarto del período de variación del campo magnético sirve para acelerar los electrones. Los tiempos de aceleración están indicados por las áreas sombreadas en la fig. 17.4.

El momentum máximo que ganan los electrones es, según la ec. (17.7), $p_{\max} = e\beta_0 r \beta_0$, y en consecuencia la energía cinética máxima de los electrones acelerados es

$$E_{k,\max} = \frac{1}{2m_e} p_{\max}^2 = \frac{e^2 r^2 \beta_0^2}{2m_e}$$

si no se los acelera a energías altas con respecto a la energía en reposo $m_e c^2$. Pero cuando la energía es bastante grande, comparable o mayor que la energía en reposo $m_e c^2$ del electrón, debemos usar las ecs. (11.18) y (11.20), con lo que resulta

$$E_{k,\max} = c \sqrt{m_e^2 c^4 + e^2 r^2 \beta_0^2} - m_e c^2.$$

Los betatrones consisten en un tubo toroidal (fig. 17-5) colocado en el campo magnético producido por un imán a cuyas piezas polares se les ha dado una forma tal que se produzca la variación correcta del campo magnético \mathcal{B} con r conforme a la ec. (17.8) y se satisfagan las condiciones de estabilidad. Los electrones se inyectan al comienzo del periodo de aceleración y se los deflecta al final del mismo de modo que puedan incidir sobre un blanco situado convenientemente. La energía cinética de los electrones se disipa como energía de radiación (capítulo 19) y/o como energía interna del blanco que se calienta. Los betatrones se han construido para energías de hasta 350 MeV. Se usan para estudiar ciertos tipos de reacciones nucleares y como fuentes de radiación para el tratamiento del cáncer.

17.4 Inducción electromagnética debida al movimiento relativo de un conductor y un campo magnético

La ley de la inducción electromagnética, expresada por la ec. (17.2), implica la existencia de un campo eléctrico local siempre que el campo magnético en ese punto esté variando en el tiempo. Si se la expresa por la ec. (17.1), implica la existencia de una fem cuando el flujo magnético a través del circuito varía en el tiempo. Es importante descubrir si se obtienen los mismos resultados cuando el cambio de flujo se debe a un movimiento o a una deformación del camino L sin que necesariamente \mathcal{B} varíe en el tiempo. Consideraremos dos casos simples.

Consideraremos la disposición de conductores ilustrada en la fig. 17-6, donde el conductor PQ se puede mover paralelamente a sí mismo con velocidad v manteniendo contacto con los conductores RT y SU . El sistema $PQRS$ forma un circuito cerrado. Supongamos también que hay un campo magnético uniforme \mathcal{B} perpendicular al plano del sistema.

Cada carga q del conductor móvil PQ está sujeta a una fuerza $qv \times \mathcal{B}$ que actúa, de acuerdo con la ec. (15.1), según QP . Ahora bien, la misma fuerza sobre la carga se podría suponer debida a un campo eléctrico "equivalente" \mathcal{E}_{eq} dado por

$$q\mathcal{E}_{\text{eq}} = qv \times \mathcal{B}$$

$$\mathcal{E}_{\text{eq}} = v \times \mathcal{B}.$$

Como \mathbf{v} y \mathbf{B} son perpendiculares, la relación entre los módulos es

$$\mathcal{E}_{\text{eq}} = v \mathcal{B}. \quad (17.9)$$

Si $PQ = l$, hay entre P y Q una diferencia de potencial $V = \mathcal{E}_{\text{eq}}l = \mathcal{B}vl$. Sobre las secciones QR , RS y SP no se ejercen fuerzas porque no se mueven. En consecuencia la circulación de \mathcal{E}_{eq} a lo largo del circuito $PQRS$ (o sea la fem) es simplemente $V_{\delta} = V$ en la dirección de $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$, es decir

$$V_{\delta} = \mathcal{B}vl.$$

Por otra parte, si llamamos x al segmento SP , el área de $PQRS$ es lx y el flujo

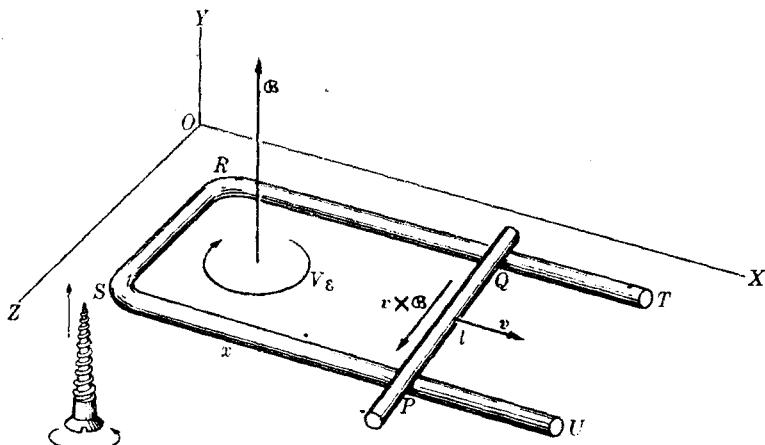


Fig. 17-6. Fem inducida en un conductor que se mueve en un campo magnético.

magnético a través de $PQRS$ es

$$\Phi_{\mathbf{B}} = \int_{PQRS} \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}_N dS = \mathcal{B}lx.$$

La variación de flujo por unidad de tiempo es entonces

$$\frac{d\Phi_{\mathbf{B}}}{dt} = \frac{d}{dt} (\mathcal{B}lx) = \mathcal{B}l \frac{dx}{dt}.$$

Pero $dx/dt = v$; por lo tanto

$$\frac{d\Phi_{\mathbf{B}}}{dt} = \mathcal{B}lv = V_{\delta}.$$

En otras palabras: obtenemos la ec. (17.1). El signo menos no aparece porque sólo estamos considerando la relación entre módulos. Sin embargo, la ec. (17.1)

sigue siendo válida en cuanto a signo, ya que el flujo Φ_B está aumentando y el signo de V_E es el de $v \times B$, de modo que concuerda con la fig. 17.1.

Como segundo ejemplo, consideremos un circuito rectangular rotando con velocidad angular ω en un campo magnético uniforme B (fig. 17-7). Cuando la normal u_N al circuito forma un ángulo $\theta = \omega t$ con el campo magnético B , todos los puntos de PQ se están moviendo con una velocidad v tal que el campo eléctrico "equivalente" $E_{eq} = v \times B$ está dirigido de Q a P y su módulo es $E_{eq} = vB \sin \theta$. Análogamente, para los puntos que están sobre RS , el sentido de $v \times B$ es de S a R y su módulo es el mismo. En cuanto a los lados RQ y PS vemos que $v \times B$ es perpendicular a ellos no habiendo diferencia de potencial entre S y P y entre R y Q . Luego, si $PQ = RS = l$, la circulación del campo eléctrico equivalente E_{eq} alrededor de $PQRS$, o sea la fem aplicada, es

$$V_E = \oint_L E \cdot dl = E_{eq}(PQ + SR) = \\ = 2lbB \sin \theta.$$

Los lados PS y RQ no contribuyen a V_E porque en ellos E_{eq} es perpendicular a dl como ya se dijo. Si $x = SP$, el radio de la circunferencia descrita por las cargas que están sobre PQ y SR es $\frac{1}{2}x$, por lo que $v = \omega(\frac{1}{2}x) = \frac{1}{2}\omega x$. Luego, como $S = lx$ es el área del circuito y $\theta = \omega t$, podemos escribir

$$V_E = 2l(\frac{1}{2}\omega x)B \sin \omega t = \omega B(lx) \sin \omega t = \omega BS \sin \omega t$$

para la fem inducida en el circuito como resultado de su rotación en el campo magnético. Por otra parte, el flujo magnético a través del circuito es

$$\Phi_B = B \cdot u_N S = B S \cos \theta = B S \cos \omega t.$$

Luego

$$-\frac{d\Phi_B}{dt} = \omega B S \sin \omega t = V_E.$$

Verificamos entonces nuevamente que la fem inducida resultante del movimiento del conductor también se puede calcular aplicando la ec. (17.1) o la (17.2) en vez de las ecs. (15.1) y (16.60).

Aunque nuestro estudio ha tratado sólo circuitos de formas especiales, un cálculo matemático más detallado indica que para cualquier circuito

la ley de la inducción electromagnética $V_E = -d\Phi_B/dt$ se puede aplicar bien cuando la variación del flujo magnético Φ_B se debe a

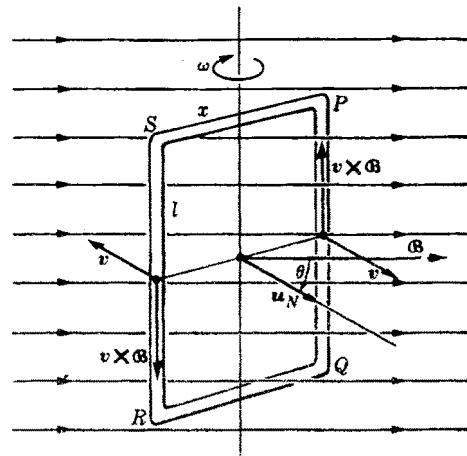


Fig. 17-7. Fem inducida en una espira rotante colocada en un campo magnético.

una variación del campo magnético \mathcal{B} , bien cuando se debe al movimiento o a la deformación del circuito a lo largo del cual se calcula la fem, o cuando se debe a ambos.

La fem inducida en el segundo caso se suele denominar *fem de movimiento*.

17.5 Inducción electromagnética y el principio de relatividad

A pesar de que, como se indicó en el párrafo anterior, la ley de la inducción electromagnética expresada por las ecs. (17.1) y (17.2) es válida cualquiera sea el origen de la variación del flujo magnético, hay una profunda diferencia entre las situaciones físicas correspondientes a las dos posibilidades. Cuando el observador ve que el cambio de flujo magnético a través de un circuito estacionario en su propio sistema de referencia se debe a una variación del campo magnético \mathcal{B} , mide al mismo tiempo un campo eléctrico \mathcal{E} relacionado con \mathcal{B} en la forma indicada por la ec. (17.2), y reconoce la presencia del campo eléctrico midiendo la fuerza que se ejerce sobre una carga *en reposo* en su sistema de referencia. Pero

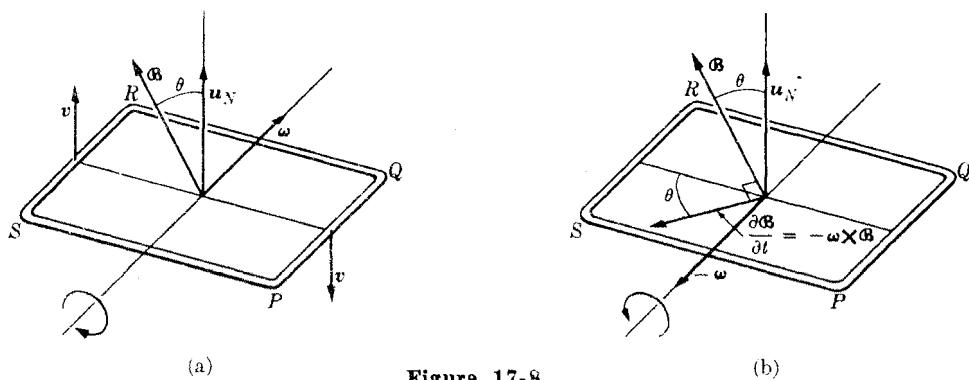


Figura 17-8

cuando el observador ve que el cambio de flujo magnético se debe a un movimiento del conductor respecto a su sistema de referencia, no observa campo eléctrico alguno y atribuye la fem que mide la fuerza $qv \times \mathcal{B}$ ejercida por el campo magnético sobre las cargas del conductor móvil, de conformidad con la ec. (15.1).

¿Cómo puede ser que dos situaciones diferentes y aparentemente sin relación tengan una descripción común? No es cuestión de coincidencia sino estrictamente consecuencia del principio de relatividad. No podemos entrar aquí en un análisis matemático completo; en su lugar, examinaremos la situación desde un punto de vista intuitivo. Consideremos el caso del circuito rotante estudiado en conexión con la fig. 17-7. En un sistema de referencia en el cual el campo magnético \mathcal{B} es constante (fig. 17-8a) y el circuito está rotando, no se observa campo eléctrico

alguno y la fuerza que se ejerce sobre los electrones del circuito se debe a la ec. (15.1). Pero un observador fijo a un sistema que se mueve con el circuito ve un conductor en reposo y un campo magnético \mathcal{B} cuya dirección rota en el espacio (fig. 17-8b). Relaciona entonces las fuerzas que actúan sobre los electrones del circuito con el campo eléctrico \mathcal{E} asociado con el campo magnético variable, conforme a la ley de la inducción electromagnética según la expresa la ec. (17.2). (El análisis matemático de este caso es algo complicado porque involucra un sistema de referencia rotante; por ello será omitido).

Concluimos entonces que la verificación experimental de la ley de la inducción electromagnética para campos magnéticos variables es simplemente una reafirmación de la validez general del principio de relatividad.

17.6 Potencial eléctrico e inducción electromagnética

En los capítulos 14 y 16 indicamos que un campo eléctrico \mathcal{E} está asociado con un potencial eléctrico V de tal modo que las componentes de \mathcal{E} según los ejes X, Y y Z son las derivadas de V respecto a x , y y z con signo negativo. Esto es, $E_x = -\partial V / \partial x$, etc.; o simplemente: el campo eléctrico es menos el gradiente del potencial eléctrico. Una consecuencia de esto es que la circulación del campo eléctrico estático a lo largo de cualquier camino (cerrado) es cero, propiedad que se expresa matemáticamente mediante la ec. (16.62) o

$$\oint_L \mathcal{E} \cdot d\ell = 0.$$

Sin embargo, cuando el campo electromagnético depende del tiempo, hemos visto que la ecuación anterior ya no es válida; en su lugar tenemos la ec. (17.2)

$$\oint_L \mathcal{E} \cdot d\ell = -\frac{d}{dt} \int_S \mathcal{B} \cdot u_N dS.$$

Concluimos entonces que en un campo electromagnético dependiente del tiempo la circulación del campo eléctrico no es nula, por lo que dicho campo no se puede expresar como menos el gradiente del potencial eléctrico. Esto no significa que el concepto de potencial es completamente inaplicable en este caso, sino solamente que se debe usar en forma diferente. De hecho se necesitan dos potenciales; uno se llama *potencial escalar*, similar al usado en el caso estático, y el otro *potencial vectorial*. No tendremos ocasión de usar estos potenciales en este texto; los mencionamos aquí sólo para señalar al estudiante que cuando pase de los campos estáticos a los dependientes del tiempo debe tener mucho cuidado acerca de cuáles conceptos correspondientes al campo estático puede continuar usando.

17.7 Ley de Faraday-Henry en forma diferencial

La ley de la inducción electromagnética, en la forma expresada en la ec. (17.2) se puede aplicar a caminos de cualquier forma. La aplicaremos ahora a un camino rectangular infinitesimal $PQRS$ colocado en el plano XY y de lados dx y dy

(fig. 17-9). Debemos calcular primeramente la circulación del campo eléctrico \mathcal{E} . El procedimiento es similar al que seguimos en la sección 16.13 cuando estudiamos la ley de Ampère en forma diferencial; los detalles los encontrará el estudiante en aquella sección. Para la superficie infinitesimal $PQRS$ en el plano XY podemos escribir

$$\oint_{PQRS} \mathcal{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_{PQ} + \int_{QR} + \int_{RS} + \int_{SP} \mathcal{E} \cdot d\mathbf{l}.$$

Ahora bien, $\int_{QR} \mathcal{E} \cdot d\mathbf{l} = \mathcal{E}_y dy$ y $\int_{SP} \mathcal{E} \cdot d\mathbf{l} = -\mathcal{E}'_y dy$, de modo que

$$\int_{QR} + \int_{SP} \mathcal{E} \cdot d\mathbf{l} = (\mathcal{E}_y - \mathcal{E}'_y) dy = d\mathcal{E}_y dy = \frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial x} dx dy.$$

Esto es así porque $d\mathcal{E}_y = (\partial \mathcal{E}_y / \partial x) dx$, ya que $d\mathcal{E}_y$ es el incremento de \mathcal{E}_y correspondiente a dos puntos separados por la distancia dx y que tienen los mismos y y z . Podemos escribir análogamente

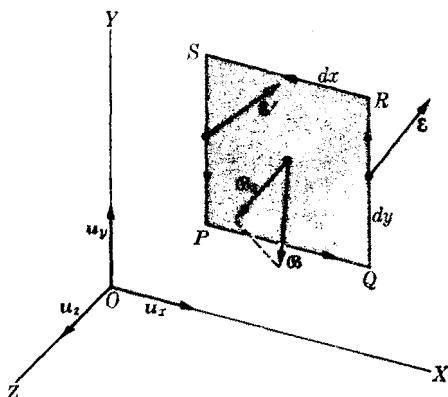


Fig. 17-9. Circuito elemental para deducir la forma diferencial de la ley de Faraday-Henry.

$$\int_{PQ} + \int_{RS} \mathcal{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial y} dx dy.$$

Sumando los dos resultados, obtenemos

$$\oint_{PQRS} \mathcal{E} \cdot d\mathbf{l} = \left(\frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial y} \right) dx dy. \quad (17.10)$$

A continuación debemos calcular el flujo magnético a través de la superficie. Como la superficie $PQRS$ está en el plano XY , su versor normal \mathbf{u}_N es simplemente \mathbf{u}_z y $\mathbf{B} \cdot \mathbf{u}_N = \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}_z = \mathcal{B}_z$. En consecuencia el flujo magnético es

$$\int_{PQRS} \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}_N dS = \mathcal{B}_z dx dy, \quad (17.11)$$

ya que $dx dy$ es el área del rectángulo. Sustituyendo las ecs. (17.10) y (17.11) en la ec. (17.2) y cancelando el factor común $dx dy$ en ambos miembros, obtenemos

$$\frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial y} = -\frac{\partial \mathcal{B}_z}{\partial t}. \quad (17.12)$$

Colocando nuestro rectángulo en los planos YZ y ZX obtenemos otras dos expresiones:

$$\frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial z} = -\frac{\partial \mathcal{B}_x}{\partial t} \quad (17.13)$$

y

$$\frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial x} = -\frac{\partial \mathcal{B}_y}{\partial t}. \quad (17.14)$$

El conjunto de las expresiones (17.12), (17.13) y (17.14) constituye la ley de Faraday-Henry en forma diferencial. Como se hizo en la sección 16.13 para la ley de Ampère, se pueden combinar en una sola ecuación vectorial escribiendo

$$\text{rot } \mathcal{E} = - \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t}. \quad (17.15)$$

La ec. (17.15), o sus equivalentes (17.12), (17.13) y (17.14), expresa las relaciones que deben existir entre la derivada respecto al tiempo del campo magnético en un punto y el campo eléctrico existente en ese *mismo* punto del espacio. Ilustra de una manera obvia la interrelación íntima entre las componentes eléctrica y magnética de un campo electromagnético.

17.8 Autoinducción

Consideremos un circuito por el que circula una corriente I (fig. 17.10). De acuerdo con la ley de Ampère, la corriente produce un campo magnético que en cada punto es proporcional a I . Podemos calcular el flujo magnético a través del circuito debido a su propio campo magnético y llamarlo *flujo propio*. Este flujo,

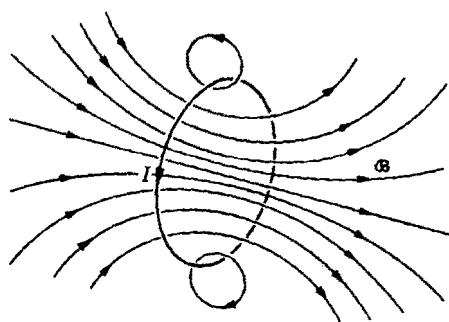


Fig. 17-10. Flujo magnético propio en un circuito.

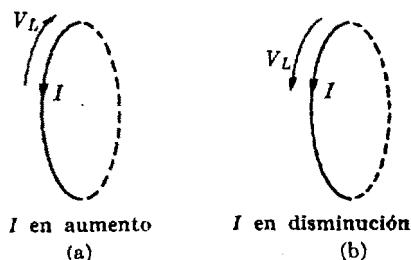


Fig. 17-11. Sentido de la fem inducida en un circuito.

que designaremos con Φ_I , es entonces proporcional a la corriente I por lo que podemos escribir

$$\Phi_I = LI. \quad (17.16)$$

El coeficiente L depende de la forma geométrica del conductor y se denomina *autoinductancia* del circuito. Se expresa en Wb A^{-1} , unidad llamada *henry* en honor de Joseph Henry y que se abrevia H . Esto es: $H = \text{Wb A}^{-1} = \text{m}^2 \text{ kg C}^{-2}$.

Si la corriente I varía en el tiempo, el flujo magnético Φ_I a través del circuito también varía y, de acuerdo con la ley de la inducción electromagnética, se induce una fem en el circuito. Este caso especial de inducción electromagnética se llama

autoinducción. Combinando las ecs. (17.1) y (17.16), tenemos para la fem inducida,

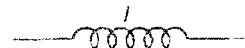
$$V_L = -\frac{d\Phi_I}{dt} = -L \frac{dI}{dt}. \quad (17.17)$$

El signo menos indica que V_L se opone a la variación de corriente. Así, si la corriente aumenta, dI/dt es positiva y V_L se opone a la corriente (fig. 17.11a). Si la corriente disminuye, dI/dt es negativa y V_L actúa en el mismo sentido que la corriente (fig. 17.11b). Por lo tanto V_L siempre actúa en un sentido que se opone a la variación de corriente. Cuando escribimos la ec. (17.17), supusimos que el circuito era rígido por lo que consideramos L constante al derivar respecto al tiempo. Si la forma del circuito es variable, L no es constante y en vez de la ec. (17.17) debemos escribir

$$V_L = -\frac{d}{dt} (LI). \quad (17.18)$$

Para indicar en un diagrama que un conductor tiene una inductancia apreciable se usa el símbolo mostrado en la fig. 17-12. Sin embargo debemos hacer notar que la autoinductancia de un circuito no está concentrada en un punto particular sino que es una propiedad del circuito como un todo.

Fig. 17-12. Representación de una autoinductancia.



EJEMPLO 17.2. Esablecimiento de una corriente en un circuito.

Solución: Cuando se aplica una fem V_0 a un circuito cerrando un interruptor (fig. 17-13), la corriente no alcanza instantáneamente el valor V_0/R correspondiente a la ley de Ohm, sino que aumenta gradualmente, aproximándose uniformemente al valor dado por la ley de Ohm. Este proceso se debe a la fem inducida V_L que se opone a la variación de la corriente y está presente mientras la corriente aumenta

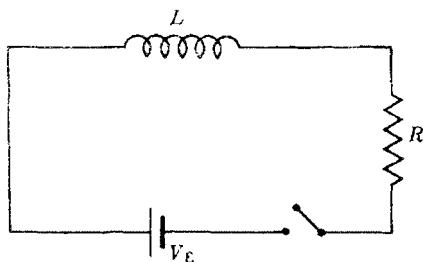


Fig. 17-13. Circuito eléctrico con una resistencia y una autoinductancia.

desde cero hasta su valor final constante. La fem total aplicada al circuito es entonces $V_0 + V_L = V_0 - L(dI/dt)$. La ley de Ohm es ahora

$$RI = V_0 + V_L \quad o \quad RI = V_0 - L(dI/dt). \quad (17.19)$$

Esta última se puede escribir en la forma $R(I - V_s/R) = -L(dI/dt)$ o, separando las variables I y t ,

$$\frac{dI}{I - V_s/R} = -\frac{R}{L} dt.$$

Al integrar, teniendo en cuenta que para $t = 0$ la corriente es nula ($I = 0$), tenemos

$$\int_0^I \frac{dI}{I - V_s/R} = -\frac{R}{L} \int_0^t dt$$

o sea

$$\ln(I - V_s/R) - \ln(-V_s/R) = -(R/L)t.$$

Recordando que $\ln e^x = x$, tenemos

$$I = \frac{V_s}{R} (1 - e^{-Rt/L}).$$

El segundo término del paréntesis disminuye con el tiempo y la corriente se approxima asintóticamente al valor V_s/R dado por la ley de Ohm (fig. 17-14). Si R/L es grande, la corriente alcanza este valor muy rápidamente, pero si R/L es pequeño puede transcurrir un largo tiempo antes de que la corriente se estabilice. El estudiante puede reconocer la similitud matemática entre la expresión de I y la de la velocidad de un cuerpo cayendo a través de un fluido viscoso (ejemplo 7.8) si se establecen las siguientes correspondencias: $V_s \leftrightarrow F$, $L \leftrightarrow m$ y $R \leftrightarrow K\eta$.

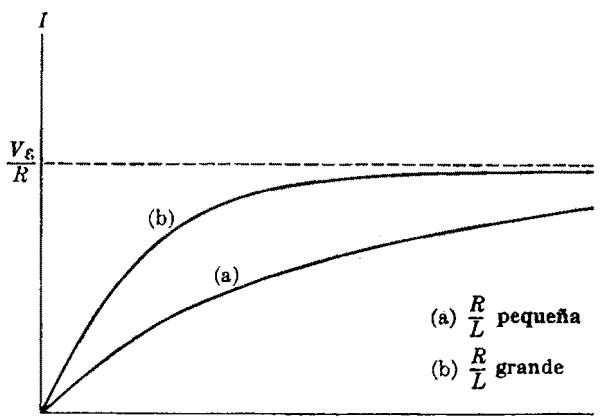


Fig. 17-14. Establecimiento de una corriente en un circuito.

EJEMPLO 17.4. Estudiar la caída de la corriente en el circuito de la fig. 17-15 cuando se mueve el conmutador de la posición 1 a la posición 2.

Solución: Si el conmutador ha estado en la posición 1 durante mucho tiempo, podemos suponer que la corriente en el circuito ha alcanzado su valor límite (o estacionario) V_s/R . Moviendo el conmutador a la posición 2, desconectamos la fem aplicada sin abrir realmente el circuito. La única fem que queda es $V_L = -L dI/dt$ y la ley de Ohm establece que

$$RI = -L \frac{dI}{dt} \quad \text{o} \quad \frac{dI}{I} = -\frac{R}{L} dt.$$

Si contamos el tiempo ($t = 0$) desde el instante en que se desconecta V_ϵ del circuito, la corriente inicial es V_ϵ/R . Integrando tenemos

$$\int_{V_\epsilon/R}^I \frac{dI}{I} = -\frac{R}{L} \int_0^t dt$$

o sea

$$\ln I - \ln (V_\epsilon/R) = -(R/L)t.$$

Eliminando los logaritmos tenemos

$$I = (V_\epsilon/R)e^{-Rt/L}.$$

La corriente decrece exponencialmente como se muestra en la fig. 17.16. Cuanto mayor es la resistencia R , o menor la inductancia L , más rápida es la caída de la corriente. El tiempo necesario para que la corriente caiga a $1/e$, o aproximadamente 63 %, de su valor inicial, es $\tau = L/R$. Este tiempo se denomina *tiempo de relajamiento*.

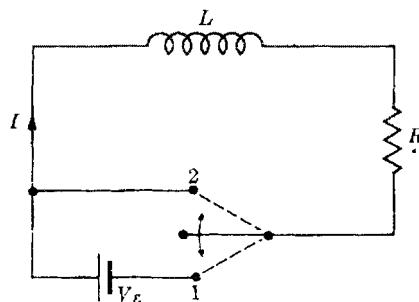


Fig. 17-15. Dispositivo para eliminar la fem aplicada a un circuito sin cambiar la resistencia.

EJEMPLO 17.5. Un circuito está compuesto de dos láminas metálicas cilíndricas coaxiales de radios a y b ; por cada una circula una corriente I pero en sentidos opuestos. Calcular la autoinductancia por unidad de longitud del circuito (fig. 17-17). El espacio entre los cilindros está ocupado por una sustancia de permeabilidad μ .

Solución: En el ejemplo 16.18 se obtuvo para el campo magnético de esta disposición de corrientes: $B = \mu I/2\pi r$ entre los cilindros y cero en el resto del espacio. Aquí, de conformidad con la sección 16.16, hemos reemplazado μ_0 (usada en el ejemplo 16.18) por μ , que es la permeabilidad del medio que llena el espacio entre los dos cilindros. Para calcular la autoinductancia debemos calcular el flujo magnético a través de cualquier sección del conductor, tal como la PQRS, que tiene

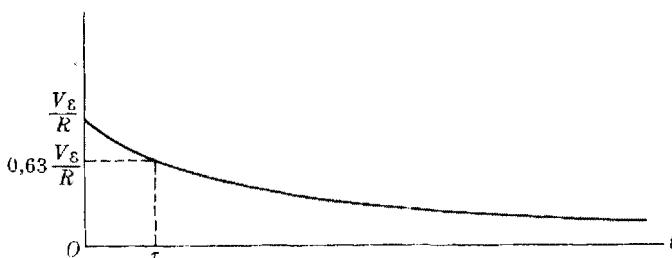


Fig. 17-16. Caída de la corriente en un circuito después de desconectar la fem.

longitud l . Si dividimos esta sección en tiras de ancho dr , el área de cada tira es $l dr$. El campo magnético \mathcal{B} es perpendicular a $PQRS$. En consecuencia

$$\begin{aligned}\Phi_I &= \int_{PQRS} \mathcal{B} dS = \int_a^b \left(\frac{\mu I}{2\pi r} \right) (l dr) \\ &= \frac{\mu Il}{2\pi} \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{\mu Il}{2\pi} \ln \frac{b}{a}.\end{aligned}$$

Por lo tanto la autoinductancia de una porción de longitud l es

$$L = \frac{\Phi_I}{I} = \frac{\mu l}{2\mu} \ln \frac{b}{a}, \quad (17.20)$$

y la autoinductancia por unidad de longitud será $(\mu/2\pi) \ln b/a$.

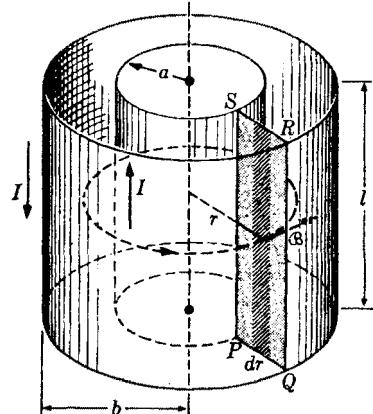


Figura 17-17

17.9 Energía del campo magnético

Hemos visto en la sección 16.10 que para mantener una corriente en un circuito se debe suministrar energía. La energía que se necesita por unidad de tiempo (o sea la potencia) es $V_E I$. Ahora bien, podemos escribir la ec. (17.19) en la forma

$$V_E = RI + L \frac{dI}{dt}.$$

Multiplicando esta ecuación por I tenemos

$$V_E I = RI^2 + LI \frac{dI}{dt}. \quad (17.21)$$

De acuerdo con la ec. (16.53), el término RI^2 es la energía consumida por unidad de tiempo en mover los electrones a través de la red cristalina del conductor y que se transfiere a los iones que forman la red. Interpretamos entonces el último término de la ec. (17.21) como la energía que se necesita por unidad de tiempo para establecer la corriente o su campo magnético asociado. En consecuencia la rapidez de aumento de la energía magnética es

$$\frac{dE_{\mathcal{B}}}{dt} = LI \frac{dI}{dt}.$$

La energía magnética necesaria para aumentar una corriente desde cero hasta el valor I es entonces

$$E_{\mathcal{B}} = \int_0^E dE_{\mathcal{B}} = \int_0^I LI dI = \frac{1}{2} LI^2. \quad (17.22)$$

Por ejemplo, en el circuito del ejemplo 17.5, la energía magnética de una sección de longitud l es, usando la ec. (17.20),

$$E_{\mathcal{B}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\mu l}{2\pi} \ln \frac{b}{a} \right) I^2 = \frac{\mu l I^2}{4\pi} \ln \frac{b}{a}. \quad (17.23)$$

La energía magnética $E_{\mathcal{B}}$ se puede también calcular empleando la expresión

$$E_{\mathcal{B}} = \frac{1}{2\mu} \int \mathcal{B}^2 dv, \quad (17.24)$$

donde la integral se extiende a todo el volumen en que existe el campo magnético y dv es un elemento de volumen. Por ejemplo, en el caso del circuito de la fig. 17-17, que se ha dibujado nuevamente en la fig. 17-18, el campo magnético está dado por $\mathcal{B} = \mu I / 2\pi r$. Si tomamos como elemento de volumen una capa cilíndrica de radio r y espesor dr , encontramos que su volumen es $dv = (2\pi r)l dr$. Sustituyendo en la ec. (17.24) y recordando qué el campo se extiende sólo desde $r = a$ hasta $r = b$, encontramos que

$$E_{\mathcal{B}} = \frac{1}{2\pi} \int_a^b \left(\frac{\mu I}{2\pi r} \right)^2 (2\pi r dr) = \frac{\mu l I^2}{4\pi} \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{\mu l I^2}{4\pi} \ln \frac{b}{a},$$

Obtenemos por lo tanto el mismo resultado que en la ec. (17.23).

Podemos interpretar la expresión (17.24) diciendo que la energía gastada en establecer la corriente se ha *almacenado* en el espacio circundante, de modo que a un volumen dv corresponde una energía $(\mathcal{B}^2/2\mu) dv$, y la energía $E_{\mathcal{B}}$ por unidad de volumen almacenada en el campo magnético es

$$E_{\mathcal{B}} = \frac{1}{2\mu} \mathcal{B}^2. \quad (17.25)$$

Aunque hemos justificado la expresión (17.25) para la densidad de energía magnética usando un circuito de simetría muy especial, un análisis más detallado que no se dará aquí, indicaría que el resultado es completamente general. Cuando hay tanto un campo eléctrico como uno magnético presentes, debemos considerar también la densidad de energía eléctrica dada por la ec. (16.40), por lo que la energía total por unidad de volumen en el campo electromagnético es

$$E = \frac{1}{2}\epsilon\epsilon^2 + \frac{1}{2\mu} \mathcal{B}^2. \quad (17.26)$$

EJEMPLO 17.6. Obtener la energía del campo magnético de un electrón que se mueve lentamente y analizar el resultado.

Solución: Según la sección 15.11, una carga que se mueve lentamente produce un campo magnético cuyas líneas de fuerza son circunferencias perpendiculares a la dirección del movimiento y cuyo módulo es, según la ec. (15.53),

$$\mathcal{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} q \frac{v \sin \theta}{r^2},$$

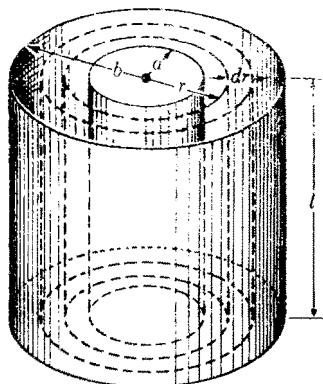


Figura 17-18

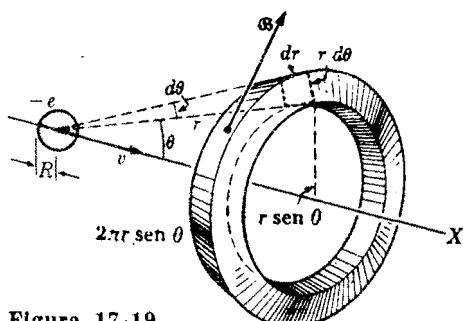


Figura 17-19

con $q = -e$ para un electrón. Supongamos que podemos usar el modelo burdo del electrón introducido en el ejemplo 16.14, donde R es el "radio" del electrón. La energía del campo magnético en el exterior de la carga se obtiene usando la ec. (17.24), extendiendo la integral a todo el espacio fuera de la carga. Tomaremos como elemento de volumen al anillo ilustrado en la fig. 17-19. El mismo tiene un perímetro igual a $2\pi r \operatorname{sen} \theta$ y su sección transversal tiene lados dr y $r d\theta$, por lo que su área es $r dr d\theta$. El volumen es

$$dv = \text{perímetro} \times \text{sección transversal} = 2\pi r^2 \operatorname{sen} \theta dr d\theta.$$

En consecuencia la ec. (17.24) da

$$\begin{aligned} E_{\text{ext}} &= \frac{1}{2\mu_0} \int_R^\infty \int_0^\pi \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{qv \operatorname{sen} \theta}{r^2} \right)^2 2\pi r^2 \operatorname{sen} \theta dr d\theta \\ &= \frac{\mu_0}{16\pi} q^2 v^2 \int_R^\infty \frac{dr}{r^2} \int_0^\pi \operatorname{sen}^3 \theta d\theta = \frac{1}{2} \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2q^2}{3R} \right) v^2. \end{aligned}$$

Este resultado no da la energía magnética total porque tenemos que agregarle la contribución debida al campo magnético dentro de la partícula cargada, que a su vez requiere que conozcamos la distribución de carga dentro de la partícula. De todos modos el resultado anterior da una estimación del orden de magnitud. La característica más importante de E_{ext} es que depende de v^2 por lo que recuerda la energía cinética de una partícula cuya masa es

$$m = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2q^2}{3R}.$$

En el caso del electrón, $q = -e$ y $m = m_e$ de modo que

$$m_e = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2e^2}{3R} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2e^2}{3Rc^2},$$

donde hemos usado la ec. (15.55) para eliminar μ_0 . Despejando R obtenemos

$$R = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e c^2} \right) = \frac{2}{3} r_e,$$

donde r_e es el radio del electrón definido en la ec. (16.45). El hecho de que nuestro cálculo burdamente aproximado dé un resultado del mismo orden de magnitud

que el del ejemplo 16.14, donde obtuvimos $R = \frac{q}{C}$, es una prueba de la compatibilidad de nuestra teoría ya que sólo se puede estimar el orden de magnitud. Si combinamos el presente resultado con el del ejemplo 16.14, parece razonable pensar que la energía en reposo de una partícula cargada está asociada con la energía de su campo eléctrico, mientras que la energía cinética corresponde a la energía del campo magnético. Es lógico pensar que los campos asociados con las otras interacciones que existen en la naturaleza también contribuyen a las energías en reposo y cinética de una partícula. Sin embargo, nuestro conocimiento incompleto de esas interacciones no nos permite al presente dar una respuesta definida. De hecho, el problema que hemos considerado, tanto en el ejemplo 16.14 como aquí, es lo que se denomina la determinación de la *energía propia* del electrón. El propósito de nuestra discusión de este problema ha sido el de presentarlo al estudiante. Si deseáramos tratarlo en forma apropiada, deberíamos emplear las técnicas de la mecánica cuántica en un nivel muy superior al de este libro.

17.10 Oscilaciones eléctricas

Hemos visto en diversas ocasiones que hay tres parámetros que caracterizan el flujo de electricidad a través de un circuito eléctrico: la capacitancia C , la resistencia R y la autoinductancia L . Analizaremos ahora el modo en que los tres juntos determinan la corriente producida por una fem dada. Suponiendo que la corriente I en el circuito de la fig. 17.20(a) está en el sentido indicado, aparecen cargas q y $-q$ en las placas del capacitor C tales que

$$I = dq/dt. \quad (17.27)$$

Estas cargas producen una fem $V_C = q/C$. El signo menos aparece porque la fem se opone a la corriente I como resultado de la tendencia del capacitor a descargarse a través del circuito. En la inductancia L hay otra fem $V_L = -L(dI/dt)$ conforme a la ec. (17.17). Puede haber además alguna otra fem aplicada al circuito, tal como la V_S mostrada en la fig. 17.20(b).

(a) *Oscilaciones libres.* Consideraremos primero el caso en que están presentes sólo las dos fem V_L y V_C . En este caso la corriente se inicia cargando el capacitor o variando el flujo magnético a través de la inductancia o intercalando y después

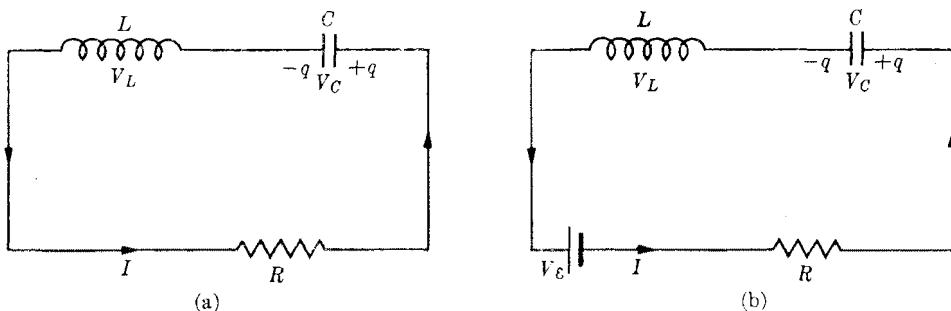


Figura 17-20

desconectando (como en la fig. 17-15) una fem externa. Por lo tanto, aplicando la ley de Ohm, ec. (16.64), tenemos

$$RI = V_L + V_C \quad \text{o} \quad RI = -L \frac{dI}{dt} - \frac{q}{C}. \quad (17.28)$$

Derivando la ecuación respecto a t , tenemos

$$R \frac{dI}{dt} = -L \frac{d^2I}{dt^2} - \frac{1}{C} \frac{dq}{dt}.$$

Usando la ec. (17.27) y pasando todos los términos al primer miembro de la ecuación, obtenemos

$$L \frac{d^2I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} I = 0. \quad (17.29)$$

Esta es una ecuación diferencial cuya solución da la corriente I en función de t . Los parámetros L , R y C caracterizan el circuito.

Ahora bien, esta ecuación es formalmente idéntica a la ec. (12.51), correspondiente a las oscilaciones amortiguadas de una partícula, si establecemos las siguientes correspondencias $L \leftrightarrow m$, $R \leftrightarrow \lambda$, $1/C \leftrightarrow k$. En consecuencia, todas las expresiones dadas allí se pueden aplicar en este caso. Las cantidades γ y ω definidas en las ecs. (15.52) y (12.54) son ahora, cuando $R^2 < 4L/C$,

$$\gamma = R/2L, \quad \omega = \sqrt{1/LC - R^2/4L^2}, \quad (17.30)$$

y la corriente está dada en función del tiempo por la misma expresión (12.54), que escribimos ahora en la forma

$$I = I_0 e^{-\gamma t} \sin(\omega t + \alpha), \quad (17.31)$$

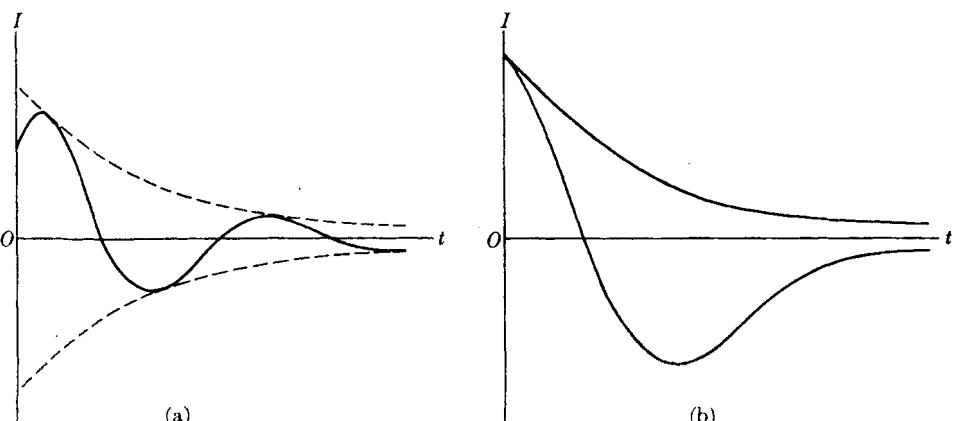


Fig. 17-21. Variación de la corriente de descarga de un capacitor en función del tiempo; (a) cuando $R^2 < 4L/C$, (b) cuando $R^2 > 4L/C$.

que el estudiante puede verificar por sustitución directa en la ec. (17.29). En la fig. 17-21(a) se da la gráfica de la corriente en función del tiempo. Vemos que se establece una corriente oscilatoria o alterna cuya amplitud decrece con el tiempo. Cuando la resistencia R es muy pequeña en comparación con la inductancia L , podemos despreciar tanto γ como el último término en la expresión de ω , con lo que resulta $I = I_0 \sin(\omega t + \alpha)$, de modo que las oscilaciones eléctricas no son amortiguadas y tienen una frecuencia

$$\omega_0 = \sqrt{1/LC}. \quad (17.32)$$

Esta se denomina *frecuencia característica* de un circuito LC y es equivalente a la frecuencia $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ de un oscilador no amortiguado. Obsérvese que el amortiguamiento en un circuito eléctrico proviene de la disipación de energía en la resistencia R .

Si la resistencia es suficientemente grande como para que $R^2/4L^2 > 1/LC$ ó $R^2 > 4L/C$, la frecuencia ω se hace imaginaria. En este caso la corriente disminuye

gradualmente sin oscilar como se muestra en la fig. 17-21(b). Las oscilaciones que hemos estudiado, en las cuales no hay una fem externa aplicada, son las oscilaciones *libres* del circuito.

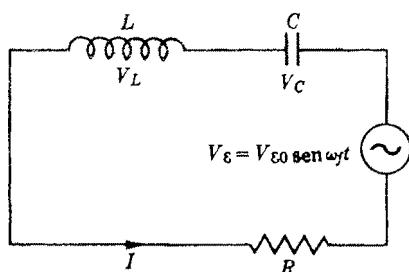


Figura 17-22

(b) *Oscilaciones forzadas.* Las oscilaciones eléctricas forzadas se producen cuando agregamos al circuito mostrado en la fig. 17-20 una fem alterna de la forma $V_s = V_{s0} \sin \omega_s t$, como se ilustra en la fig. 17-22. Por lo tanto, la ec. (17.28) tiene ahora la forma

$$RI = V_L + V_C + V_{s0} \sin \omega_s t.$$

Repitiendo el procedimiento usado para obtener la ec. (17.29), derivamos respecto al tiempo y ordenamos los términos en la forma

$$L \frac{d^2I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = \omega_s V_{s0} \cos \omega_s t. \quad (17.33)$$

Esta ecuación es muy similar a la ec. (12.56) para las oscilaciones forzadas de una partícula, pero con una diferencia importante: la frecuencia ω_s aparece como factor en el segundo miembro de la ec. (17.33). La razón de esto es que, debido a la relación $I = dq/dt$, la corriente en un circuito eléctrico corresponde a la velocidad $v = dx/dt$ en el movimiento de una partícula. Podemos ahora aplicar las fórmulas de la sección 12.13 con la correspondencia apropiada para las cantidades tal cual se muestra en la Tabla 17-1. Tenemos entonces que la corriente está dada por

$$I = I_0 \sin(\omega_s t - \alpha) \quad (17.34)$$

donde, si usamos la ec. (12.62) para la amplitud v_0 de la velocidad, con la corres-

pondencia apropiada, la amplitud de corriente es

$$I_0 = \frac{V_{\text{E}_0}}{\sqrt{R^2 + (\omega_f L - 1/\omega_f C)^2}}. \quad (17.35)$$

TABLA 17-1 Correspondencia entre un oscilador amortiguado y un circuito eléctrico

Oscilador	Circuito eléctrico
masa, m	inductancia, L
amortiguamiento, λ	resistencia, R
constante elástica, k	inversa de la capacitancia, $1/C$
desplazamiento, x	carga, q
velocidad, $v = dx/dt$	corriente, $I = dq/dt$
fuerza aplicada, F_0	fem aplicada, V_{E_0}

Usando las expresiones obtenidas en la sección 12.14, podemos expresar la impedancia de un circuito eléctrico en la forma

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega_f L - 1/\omega_f C)^2}. \quad (17.36)$$

La reactancia del circuito es

$$X = \omega_f L - 1/\omega_f C, \quad (17.37)$$

de modo que

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2} \quad (17.38)$$

y la diferencia de fase α entre la corriente y la fem aplicada se obtiene de

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{X}{R} = \frac{\omega_f L - 1/\omega_f C}{R}. \quad (17.39)$$

Las cantidades Z , R , X y α están relacionadas como se muestra en la fig. 17-23,

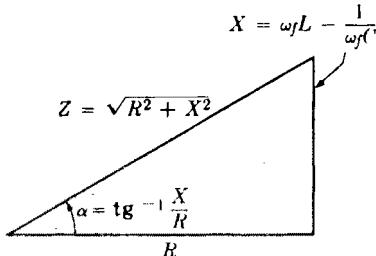


Fig. 17-23. Relación entre resistencia, reactancia e impedancia.

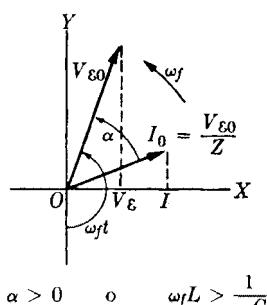
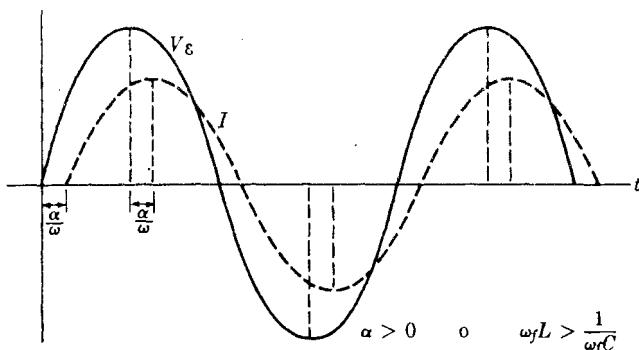


Fig. 17-24. Vectores rotantes de la corriente y de la fem en un circuito de corriente alterna.



que es una reproducción de la fig. 12.39. Nótese que tanto la reactancia como la impedancia se expresan en ohms. Por ejemplo, expresando el término ωL en función de las unidades fundamentales se tiene $s^{-1} H = m^2 \text{ kg s}^{-1} C^{-2}$. Esta es la misma expresión obtenida en la sección 16.10 para el ohm. El estudiante puede hacer la misma verificación para el término $1/\omega C$. Si R y X se expresan en ohms, también Z , en vista de su definición (17.38), se debe expresar en ohms.

Se pueden representar la fem V_ε y la corriente I mediante vectores rotantes, como se ilustra en la fig. 17-24. Las componentes de los vectores según el eje X dan los valores instantáneos de V_ε y de I . La corriente I sigue o precede a la fem según que α sea positivo o negativo, o que $\omega_f L$ sea mayor o menor que $1/\omega_f C$. La fig. 17-25 da la gráfica de V_ε y de I en función del tiempo. La potencia media necesaria para mantener la corriente se obtiene de la ec. (12.70) con la correspondencia apropiada, es decir,

$$\bar{P} = \frac{1}{2} V_{\varepsilon_0} I_0 \cos \alpha = \frac{1}{2} R I_0^2. \quad (17.40)$$

En este caso, la resonancia es equivalente a la *resonancia de energía*, estudiada

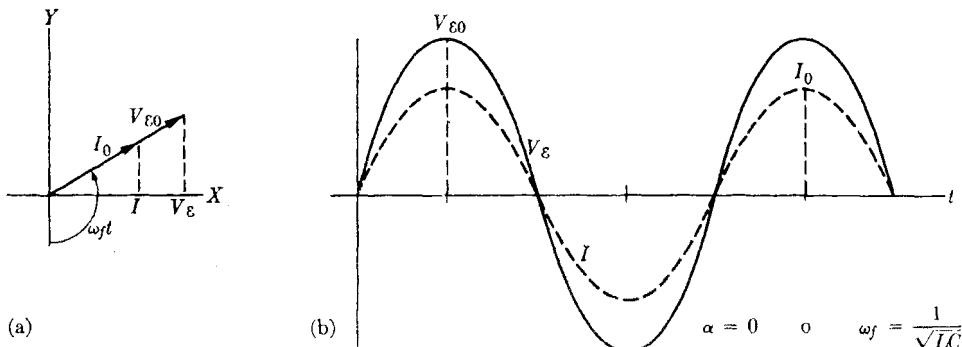


Fig. 17-26. Relación entre fem y corriente cuando la diferencia de fase es cero (resonancia).

en la sección 12.13. Se obtiene cuando \bar{P} es máxima, lo cual ocurre cuando $\alpha = 0$ o cuando $\omega_f L = 1/\omega_f C$, correspondiendo a una frecuencia $\omega_f = \sqrt{1/LC}$, igual a la ec. (17.32). En la resonancia, la corriente tiene amplitud máxima y está en fase con la fem, lo cual significa potencia media máxima. Los vectores rotantes V_S e I están en fase o superpuestos y la corriente y la fem varían como se muestra en la fig. 17.26.

Como en el caso de las oscilaciones forzadas de una partícula, la solución general de la ec. (17.33) es la suma de la ec. (17.34) y de una corriente transitoria dada por la ec. (17.31). Sin embargo, el término correspondiente a la ec. (17.31) se hace rápidamente despreciable a causa del amortiguamiento y sólo es necesario tener en cuenta la ec. (17.34). No obstante, cuando ocurre una modificación en el circuito, tal como una variación en L , C o R , el término transitorio aparece por un corto tiempo hasta que el circuito se ajusta a las nuevas condiciones.

EJEMPLO 17.7. Un circuito tiene una resistencia de 40Ω , una autoinductancia de $0,1 \text{ H}$ y una capacitancia de 10^{-6} F . La fem aplicada tiene una frecuencia de 60 Hz . Encontrar la reactancia, la impedancia, el defasaje de la corriente y la frecuencia de resonancia del circuito.

Solución: La frecuencia angular es $\omega_f = 2\pi\nu$ y como $\nu = 60 \text{ Hz}$, tenemos que $\omega_f = 377 \text{ s}^{-1}$. Por lo tanto, usando la ec. (17.37) obtenemos

$$X = \omega_f L - 1/\omega_f C = 227\Omega.$$

La impedancia es entonces

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2} = 231\Omega.$$

El defasaje es, conforme a la ec. (17.39),

$$\operatorname{tg} \alpha = X/R = -5,67 \quad \delta \quad \alpha = -80^\circ.$$

Por lo tanto la corriente precede a la fem. Para la frecuencia de resonancia encontramos, usando la ec. (17.32),

$$\omega_0 = \sqrt{1/LC} = 10^4 \text{ s}^{-1} \quad \delta \quad \nu = \omega/2\pi = 159 \text{ Hz}.$$

EJEMPLO 17.8. Estudiar un circuito de corriente alterna usando la técnica de los vectores rotantes.

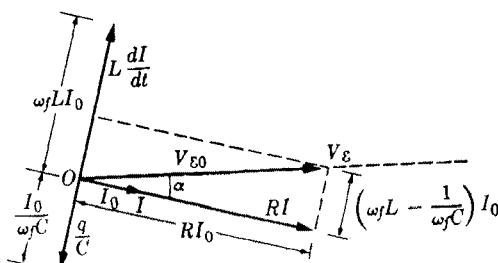


Fig. 17-27. Diagrama de vectores rotantes para el circuito mostrado en la fig. 17-22.

Solución: Los resultados establecidos en la sección 17.10 se pueden obtener muy fácilmente por medio de la técnica de los vectores rotantes. Obsérvese que la ecuación del circuito se puede escribir en la forma

$$V_{\delta_0} \operatorname{sen} \omega_f t = RI - V_L - V_C = RI + L \frac{dI}{dt} + \frac{q}{C}.$$

Del mismo modo que decimos que RI es la diferencia de potencial en la resistencia R , podemos decir que $L(dI/dt)$ y q/C son las diferencias de potencial (o caídas de voltaje) en la inductancia y en la capacitancia respectivamente.

Si suponemos que $I = I_0 \operatorname{sen}(\omega_f t - \alpha)$, el vector rotante de la corriente queda atrás del de la fem en un ángulo α (fig. 11-27). Ahora bien, podemos considerar al vector rotante de la fem como suma de los vectores rotantes correspondientes a los tres términos del segundo miembro de la ecuación anterior. Notemos que $dI/dt = \omega_f I_0 \cos(\omega_f t - \alpha)$ y que $q = \int I dt = -(1/\omega_f)I_0 \cos(\omega_f t - \alpha)$. Podemos escribir entonces

Caída de potencial en la resistencia:

$$RI = RI_0 \operatorname{sen}(\omega_f t - \alpha), \text{ en fase con } I.$$

Caída de potencial en la inductancia:

$$L(dI/dt) = \omega_f L I_0 \operatorname{sen}(\omega_f t - \alpha + \frac{1}{2}\pi), \text{ delante de } I \text{ en } \frac{1}{2}\pi.$$

Caída de potencial en el capacitor:

$$q/C = (1/\omega_f C)I_0 \operatorname{sen}(\omega_f t - \alpha - \frac{1}{2}\pi), \text{ detrás de } I \text{ en } \frac{1}{2}\pi.$$

Los tres vectores rotantes se muestran en la fig. 17-27, donde la línea de referencia está dada por el vector rotante correspondiente a V_{δ_0} . Sus amplitudes son RI_0 , $\omega_f L I_0$ e $I_0/\omega_f C$. Su resultante debe ser V_{δ_0} , ya que la suma de las tres caídas de potencial da la fem aplicada. Por lo tanto

$$V_{\delta_0}^2 = R^2 I_0^2 + \left(\omega_f L - \frac{1}{\omega_f C} \right)^2 I_0^2$$

o sea

$$V_{\delta_0} = \sqrt{R^2 + (\omega_f L - 1/\omega_f C)^2} I_0.$$

Si despejamos I_0 de esta ecuación, el resultado es idéntico a la ec. (17.35). El ángulo α se puede obtener de la figura, resultando un valor que concuerda con la ec. (17.39). La técnica de los vectores rotantes es muy usada por los ingenieros en el análisis de circuitos de corriente alterna.

17.11 Circuitos acoplados

Consideremos dos circuitos tales como el (1) y el (2) de la fig. 17-28. Cuando una corriente I_1 circula por el circuito (1), se establece a su alrededor un campo magnético proporcional a I_1 , y a través del circuito (2) hay un flujo magnético Φ_2 que también es proporcional a I_1 . Podemos entonces escribir

$$\Phi_2 = MI_1, \quad (17.41)$$

donde M es un coeficiente de proporcionalidad y representa el flujo magnético a través del circuito (2) por unidad de corriente en el circuito (1). Análogamente,

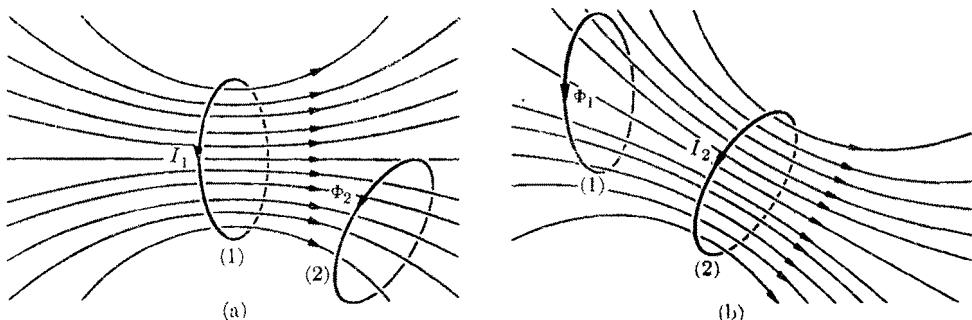


Fig. 17-28. Inducción mutua.

si una corriente I_2 circula por el circuito (2), se produce un campo magnético que a su vez produce un flujo magnético Φ_1 a través del circuito (1) el cual es proporcional a I_2 . Podemos escribir entonces

$$\Phi_1 = MI_2. \quad (17.42)$$

Nótese que en la ec. (17.42) hemos escrito el mismo coeficiente M que en la ec. (17.41). Esto significa reconocer que el flujo magnético a través del circuito (1) debido a la unidad de corriente en el circuito (2) es el mismo que antes. Este coeficiente común se denomina *inductancia mutua* de los dos circuitos y se puede demostrar que debe ser la misma en ambos casos, como hemos señalado. En otras palabras: la inducción mutua es simétrica. El coeficiente M depende de las formas de los circuitos y de su orientación relativa. También se mide en henrys, ya que corresponde a Wb A^{-1} .

Si la corriente I_1 es variable, el flujo Φ_2 a través del circuito (2) varía y se induce una fem V_{M2} en este circuito. Esta fem está dada por

$$V_{M2} = -M \frac{dI_1}{dt}.$$

Al escribir esta ecuación hemos supuesto que los circuitos son rígidos y que están fijos en el espacio de modo que M es constante. Análogamente, si la corriente I_2 es variable, se induce en el circuito (1) una fem V_{M1} dada por

$$V_{M1} = -M \frac{dI_2}{dt}. \quad (17.43)$$

Esta es la razón por la cual M se llama "inductancia mutua", ya que describe el efecto o influencia mutua entre los dos circuitos. Además, si se mueven los circuitos uno respecto al otro, lo que origina una variación de M , también se inducen fem en ellos.

Usando la ley de Ohm podemos obtener las ecuaciones que relacionan la corriente en el circuito (1) con los parámetros del sistema. Todo lo que tenemos que hacer es sumar la fem V_{M1} , dada por la ec. (17.43), a la ec. (17.28). Esto es,

$$RI_1 = V_{L1} + V_{C1} + V_{M1},$$

donde $V_{L_1} = -L_1 dI_1/dt$ y $V_{C_1} = -q_1/C_1$. Por lo tanto, si derivamos la ecuación anterior respecto al tiempo y tenemos en cuenta que $I_1 = dq_1/dt$, obtenemos, en vez de la ec. (17.29),

$$L_1 \frac{d^2 I_1}{dt^2} + R_1 \frac{dI_1}{dt} + \frac{1}{C_1} I_1 = -M \frac{d^2 I_2}{dt^2}. \quad (17.44)$$

Análogamente, obtenemos la siguiente ecuación para el circuito (2)

$$L_2 \frac{d^2 I_2}{dt^2} + R_2 \frac{dI_2}{dt} + \frac{1}{C_2} I_2 = -M \frac{d^2 I_1}{dt^2}. \quad (17.45)$$

Las ecs. (17.44) y (17.45) forman un sistema de ecuaciones diferenciales simultáneas similar a la ec. (12.36) correspondiente a dos osciladores acoplados. La constante de acoplamiento es M . No consideraremos las soluciones generales, pero del estudio de los osciladores acoplados que hicimos en la sección 12.10, concluimos que habrá un intercambio de energía entre los circuitos. El transformador y el generador de inducción son aplicaciones prácticas comunes de este proceso. Otra aplicación de la inductancia mutua en un sentido más amplio, es la transmisión de una señal de un lugar a otro produciendo una corriente variable en un circuito llamado *transmisor*; a su vez este circuito actúa sobre otro acoplado a él, llamado *receptor*. Este es el caso del telégrafo, la radio, la televisión, el radar, etc. Sin embargo, para estudiar estos dispositivos se necesita una técnica diferente que será desarrollada parcialmente en el capítulo 19.

El aspecto más importante y fundamental de la inducción es que *se puede intercambiar energía entre dos circuitos por intermedio del campo electromagnético*. Podemos decir que el campo electromagnético producido por las corrientes que circulan por los circuitos actúa como portador de energía, transportándola a través del espacio de un circuito a otro.

Pero la inducción mutua entre dos circuitos es un fenómeno macroscópico que resulta de las interacciones elementales entre las cargas en movimiento que constituyen sus respectivas corrientes. Podemos concluir entonces del fenómeno de inducción mutua que la interacción electromagnética entre dos partículas cargadas se puede describir como un intercambio de energía por intermedio del campo electromagnético mutuo.

Cuando dos partículas cargadas están sujetas a una interacción electromagnética, el principio de conservación de la energía se debe reformular incluyendo la energía del campo. Recordar que también tuvimos que reformular el principio de conservación del momentum en la ec. (15.68) para tener en cuenta el momentum del campo. En consecuencia debemos escribir la energía total de un sistema de dos partículas cargadas en interacción en la forma

$$E = E_1 + E_2 + E_{\text{campo}}, \quad (17.46)$$

donde E_1 y E_2 son las energías de cada partícula, suma de sus energías cinética y potencial que resulta de alguna fuerza que actúa sobre ellas, y E_{campo} es la energía asociada con su campo electromagnético común.

Se puede demostrar que en condiciones estáticas (o que varían muy lentamente en el tiempo), E_{campo} corresponde exactamente a la energía potencial

$$E_p = q_1 q_2 / 4 \pi \epsilon_0 r_{12}$$

debida a la interacción coulombiana entre las dos cargas.

Es la suma de los tres términos en la ec. (17.46) la que permanece constante durante el movimiento de las dos partículas si no están sujetas a otras fuerzas.

EJEMPLO 17.9. Una bobina que contiene N vueltas está arrollada en un solenoide toroidal que tiene n vueltas por unidad de longitud y una sección transversal de área S . Calcular la inductancia mutua del sistema (fig. 17-29).

Solución: Podemos resolver el problema sea calculando el flujo magnético a través del solenoide cuando circula una corriente por la bobina, sea calculando el flujo magnético a través de la bobina cuando circula una corriente por el solenoide. Sigamos el segundo procedimiento, que es el más fácil de los dos. Podemos recordar

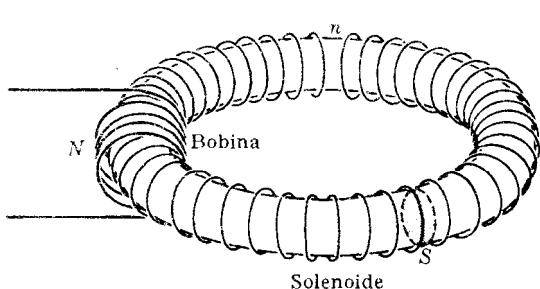


Figura 17-29

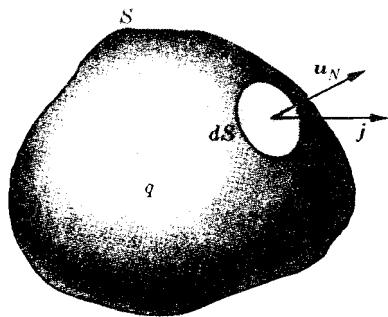


Fig. 17-30. Corriente a través de una superficie cerrada que contiene una carga q .

del ejemplo 16.19 que en el caso de un solenoide toroidal, el campo magnético está confinado a su interior y tiene un valor dado por la ec. (16.71), $\mathbf{B} = \mu_0 n \mathbf{I}$. El flujo magnético a través de cualquier sección del solenoide es

$$\Phi_B = \mathcal{B}S = \mu_0 n S I,$$

donde S es el área de la sección transversal del solenoide. Este flujo es el mismo que el que hay a través de cualquier vuelta de la bobina, aunque su sección sea mayor. Luego, el flujo magnético a través de la bobina es

$$\Phi_{\text{bobina}} = N\Phi_B = \mu_0 n N S I.$$

Comparando ésta con la ec. (17.41), se obtiene para la inductancia mutua del sistema

$$M = \mu_0 n N S.$$

Este arreglo se usa mucho en el laboratorio cuando se necesita una inductancia mutua patrón.

17.12 Principio de conservación de la carga

En la sección 14.2 discutimos el hecho de que la carga eléctrica se conserva. En otras palabras: en todos los procesos que ocurren en el universo, la cantidad neta de carga siempre debe permanecer constante. Este enunciado se puede expresar en una forma cuantitativa que es muy útil. Consideremos una superficie cerrada S (fig. 17.30) y llamemos q a la carga neta dentro de ella en un instante dado. Como nuestro problema es dinámico y no estático, las cargas libres (tales como los electrones en los metales o los iones en un plasma) se mueven a través del medio, atravesando la superficie S . A veces puede haber más cargas salientes que entrantes, originando una disminución de la carga neta q encerrada por la superficie S . Otras veces la situación se puede invertir y las cargas que entran pueden exceder a las que salen, dando como resultado un aumento de la carga neta q . Por supuesto que si los flujos de carga que entran y salen de la superficie S son los mismos, la carga neta q permanece constante. El principio de conservación de la carga exige claramente que

$$\begin{aligned} \text{pérdida de carga} &= \text{flujo de carga saliente} - \text{flujo de} \\ &\quad \text{carga entrante} = \text{flujo neto de carga saliente}. \end{aligned} \quad (17.47)$$

Ahora bien, se vio en el ejemplo 16.1 que el flujo neto de carga por unidad de tiempo, o corriente, a través de una superficie S es $I = \oint_S \mathbf{j} \cdot \mathbf{u}_N dS$, donde \mathbf{j} es la densidad de corriente. En el caso presente la superficie es cerrada, de modo que

$$I = \oint_S \mathbf{j} \cdot \mathbf{u}_N dS \quad (17.48)$$

da la carga neta que sale a través de la superficie por unidad de tiempo, es decir, la diferencia entre el flujo de carga saliente por unidad de tiempo y el entrante. Por otra parte, la pérdida de carga por unidad de tiempo dentro de S es $-dq/dt$. Por lo tanto, en términos matemáticos la ec. (17.47) es $-dq/dt = I$ o sea

$$-\frac{dq}{dt} = \oint_S \mathbf{j} \cdot \mathbf{u}_N dS, \quad (17.49)$$

ecuación que expresa el principio de conservación de la carga suponiendo que la carga no se crea ni aniquila. Ahora bien, de acuerdo con la ley de Gauss para el campo eléctrico dada por la ec. (16.3), la carga total dentro de una superficie cerrada se expresa en función del campo eléctrico en la superficie mediante

$$q = \epsilon_0 \oint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{u}_N dS,$$

por lo que

$$\frac{dq}{dt} = \epsilon_0 \frac{d}{dt} \oint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{u}_N dS.$$

Sustituyendo este resultado en la ec. (17.49), obtenemos

$$\oint_S \mathbf{j} \cdot \mathbf{u}_N dS + \epsilon_0 \frac{d}{dt} \oint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{u}_N dS = 0 \quad (17.50)$$

para expresar el principio de conservación de la carga de una manera que incorpora la ley de Gauss. Cuando los campos son estáticos, la integral $\oint_S \mathcal{E} \cdot \mathbf{u}_N dS$ no depende del tiempo. Luego, su derivada respecto al tiempo es cero, por lo que

$$\oint_S \mathbf{j} \cdot \mathbf{u}_N dS = 0, \quad \text{para campos estáticos.} \quad (17.51)$$

Esto significa que para campos estáticos no hay acumulación o pérdida de carga en ninguna región del espacio por lo que la corriente neta a través de una superficie cerrada es cero. (Este es esencialmente el contenido de la primera ley de Kirchhoff para el análisis de redes, que se introdujo en el ejemplo 16.17).

17.13 Ley de Ampère-Maxwell

La ley de Faraday-Henry, expresada por las ecs. (17.2) o (17.15), establece una relación entre el campo magnético y el campo eléctrico en la misma región del espacio. La íntima relación que existe entre los campos eléctrico y magnético sugiere que debiera existir una relación análoga entre la derivada de un campo eléctrico respecto al tiempo y un campo magnético en el mismo lugar. Ahora bien, la ec. (17.2), es decir

$$\oint_L \mathcal{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathcal{B} \cdot \mathbf{u}_N dS,$$

relaciona la circulación del campo eléctrico con la derivada respecto al tiempo del flujo del campo magnético. Podríamos esperar que una relación similar debiera relacionar la circulación del campo magnético con la derivada del flujo del campo eléctrico respecto al tiempo. Hasta ahora hemos encontrado que la circulación del campo magnético está expresada por la ley de Ampère, ec. (16.68),

$$\oint_L \mathcal{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int_S \mathbf{j} \cdot \mathbf{u}_N dS, \quad (17.52)$$

pero esta expresión no contiene ninguna derivada del flujo del campo eléctrico

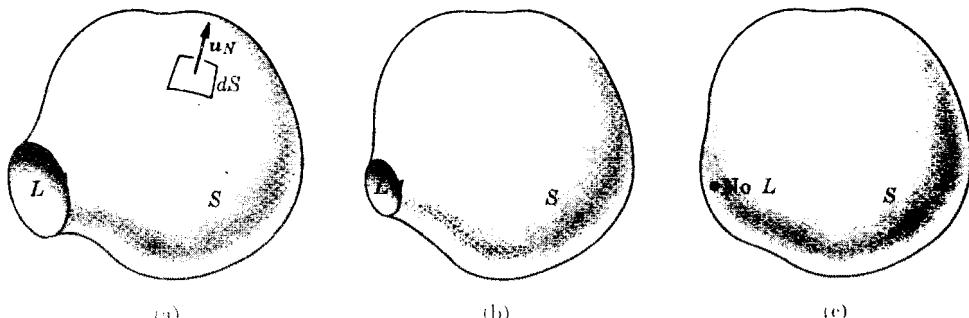


Fig. 17-31. Superficie limitada por una curva L . Cuando la curva L se encoge hasta convertirse en un punto, la superficie se cierra.

respecto al tiempo. Esto no es sorprendente ya que se obtuvo en condiciones estacionarias. Sin embargo podemos sospechar que la ley de Ampère puede necesitar una revisión cuando se la aplique a campos dependientes del tiempo.

Ahora bien, la ley de Ampère en la forma (17.52) se aplica a la superficie S limitada por la curva L . Excepto por estar limitada por la curva L , la superficie S es arbitraria. Si la curva L se encoge, el valor de $\oint_L \mathcal{B} \cdot d\mathbf{l}$ disminuye (fig. 17-31). Finalmente se anula cuando L se convierte en un punto y la superficie S se convierte en una superficie cerrada. La ley de Ampère exige, según la ec. (17.52), que

$$\oint_S \mathbf{j} \cdot \mathbf{u}_N dS = 0.$$

Esto concuerda con la ec. (17.51) para la conservación de la carga, en tanto el campo sea estático. Sin embargo, sabemos que cuando el campo no es estático sino dependiente del tiempo, la ec. (17.51) ya no es correcta. La correcta es la ec. (17.50) que incluye la ley de Gauss. Esto confirma nuestra sospecha de que se debe modificar la ley de Ampère al tratar campos dependientes del tiempo. La modificación parece evidente; en la ec. (17.52) debemos reemplazar $\oint_S \mathbf{j} \cdot \mathbf{u}_N dS$ por

$$\int_S \mathbf{j} \cdot \mathbf{u}_N dS + \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_S \mathcal{E} \cdot \mathbf{u}_N dS,$$

de conformidad con la ec. (17.50). Resulta

$$\oint_L \mathcal{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int_S \mathbf{j} \cdot \mathbf{u}_N dS + \epsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt} \int_S \mathcal{E} \cdot \mathbf{u}_N dS. \quad (17.53)$$

Recordando que $\int_S \mathbf{j} \cdot \mathbf{u}_N dS$ es la corriente I que pasa a través de la superficie S , también podemos escribir la ec. (17.53) en la forma

$$\oint_L \mathcal{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I + \epsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt} \int_S \mathcal{E} \cdot \mathbf{u}_N dS. \quad (17.54)$$

Hay que comparar ésta con la ec. (16.67) para la ley de Ampère. La ec. (17.54) se reduce a la ley de Ampère para campos estáticos, ya que entonces el último término es cero; además se transforma en la ec. (17.50) cuando la línea L se encoge hasta convertirse en un punto, cerrándose la superficie S . Por lo tanto, vemos que esta ecuación satisface todas las condiciones físicas encontradas anteriormente.

Hasta ahora hemos jugado meramente con la matemática tratando de hacer la ley de Ampère compatible con la ley de conservación de la carga. Un paso adicional necesario es verificar experimentalmente que la ec. (17.53) es correcta y que describe la situación real que se encuentra en la naturaleza. Podemos anticipar que es así. La mejor prueba es la existencia de ondas electromagnéticas, tema que se estudiará en el capítulo 19.

La persona que primero sugirió la modificación de la ley de Ampère en la forma que hemos señalado fue el científico británico James Clerk Maxwell (1831-1879)

en la segunda mitad del siglo pasado; por ello la ec. (17.53) se denomina ley de Ampère-Maxwell. Maxwell introdujo la modificación más por la necesidad de compatibilidad matemática que por los resultados experimentales. Los experimentos que corroboraron las ideas de Maxwell sólo se realizaron algunos años después.

La ley de Ampère, ec. (17.52), relaciona una corriente estacionaria con el campo magnético que produce. La ley de Ampère-Maxwell, ec. (17.53), va un paso más adelante e indica que un campo eléctrico \mathcal{E} dependiente del tiempo también contribuye al campo magnético. Por ejemplo, en ausencia de corrientes, tenemos

$$\oint_L \mathcal{B} \cdot d\ell = \epsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt} \int_S \mathcal{E} \cdot u_N dS, \quad (17.55)$$

que muestra más claramente la relación entre un campo eléctrico dependiente del tiempo y su campo magnético asociado. En otras palabras:

un campo eléctrico dependiente del tiempo implica la existencia de un campo magnético en el mismo lugar.

Si a la circulación del campo magnético la llamamos *fuerza magnetomotriz* aplicada a la curva L y la designamos con $\Lambda_{\mathcal{E}}$, y designamos con $\Phi_{\mathcal{E}}$ el flujo eléct-

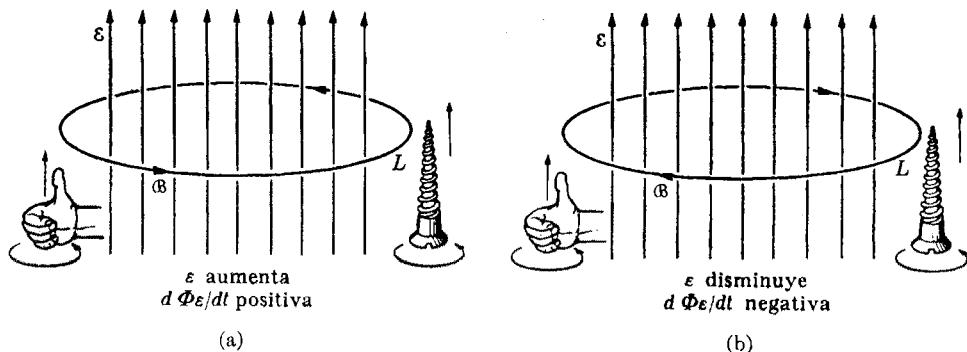


Fig. 17-32. Campo magnético producido por un campo eléctrico dependiente del tiempo.

trico a través de la superficie S limitada por la curva L , podemos escribir la ec. (17.55) en la forma

$$\Lambda_{\mathcal{E}} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{d\Phi_{\mathcal{E}}}{dt},$$

que el estudiante debe comparar con la ec. (17.1) para la ley de la inducción electromagnética. La orientación relativa de los campos eléctrico y magnético se muestra en la fig. 17-32, correspondiente a un campo eléctrico uniforme dependiente del tiempo. Si el campo eléctrico aumenta (disminuye), la orientación de las líneas magnéticas de fuerza es igual (opuesta) al sentido de rotación de un

tornillo de rosca derecha que avanza en el sentido del campo eléctrico. El estudiante debe comparar este resultado con la fig. 17.1.

La ley de Ampère-Maxwell, tal como la expresa la ec. (17.54), difiere de la ley de Faraday-Henry, tal como la expresa la ec. (17.2), en varios aspectos. En primer lugar, tenemos en la ec. (17.53) un término que corresponde a una corriente *eléctrica*, mientras que en la ec. (17.2) no hay ningún término que corresponda a una corriente magnética. Esto se debe simplemente al hecho de que aparentemente no hay polos magnéticos libres en la naturaleza. En segundo lugar, la derivada del flujo eléctrico respecto al tiempo aparece con signo positivo en la ec. (17.53), mientras que en la ec. (17.2) la del flujo magnético aparece con signo negativo. El estudiante también puede verificar que el factor $\epsilon_0 u_0$ es compatible con las unidades.

Aunque hemos corregido la ley de Ampère usando como guía el principio de conservación de la carga, igualmente podríamos haber usado el principio de relatividad y encontrado que cuando los campos eléctrico y magnético están relacionados en dos sistemas inerciales de referencia como en las ecs. (15.58) y (15.60), y la ley de Faraday-Henry es correcta, también se debe satisfacer la ec. (17.53). Este procedimiento es algo más difícil, pero es en cierto sentido más fundamental.

17.14 Ley de Ampère-Maxwell en forma diferencial

Como la ec. (17.53) para la ley de Ampère-Maxwell es muy similar a la ec. (17.2) para la ley de Faraday-Henry, podemos aplicar nuevamente la técnica empleada en la sec. 17.7 a fin de obtener la ley de Ampère-Maxwell en forma diferencial. La fig. 17-9 se reemplaza ahora por la fig. 17-33. Omitiendo los detalles, obtenemos análogamente a la ec. (17.10), la circulación del campo magnético a lo largo del camino rectangular PQRS de lados dx y dy , en la forma

$$\oint_{PQRS} \mathcal{B} \cdot d\mathbf{l} = \left(\frac{\partial \mathcal{B}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathcal{B}_x}{\partial y} \right) dx dy. \quad (17.56)$$

Para establecer la forma diferencial de la ley de Ampère, ya obtuvimos en la ec. (16.74) el flujo de la densidad de corriente a través de la superficie limitada por PQRS, esto es,

$$\int_{PQRS} \mathbf{j} \cdot \mathbf{u}_N dS = j_z dx dy. \quad (17.57)$$

Finalmente el flujo del campo eléctrico a través de la superficie limitada por PQRS es, por analogía con la ec. (17.57),

$$\int_{PQRS} \mathcal{E} \cdot \mathbf{u}_N dS = \mathcal{E}_z dx dy,$$

y en consecuencia

$$\frac{d}{dt} \int_{PQRS} \mathcal{E} \cdot \mathbf{u}_N dS = \frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial t} dx dy. \quad (17.58)$$

Sustituyendo las ecs. (17.56), (17.57) y (17.58) en la ec. (17.53) y cancelando en ambos miembros el factor común $dx dy$ resulta

$$\frac{\partial \mathcal{B}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathcal{B}_x}{\partial y} = \mu_0 j_z + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial t}. \quad (17.59)$$

Colocando nuestro rectángulo en los planos YZ y ZX, obtenemos otras dos expresiones:

$$\frac{\partial \mathcal{B}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathcal{B}_y}{\partial z} = \mu_0 j_x + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial t} \quad (17.60)$$

y

$$\frac{\partial \mathcal{B}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathcal{B}_z}{\partial x} = \mu_0 j_y + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial t}. \quad (17.61)$$

Las expresiones (17.59), (17.60) y (17.61) constituyen conjuntamente la ley de Ampère-Maxwell en forma diferencial. Las podemos combinar en una única ecua-

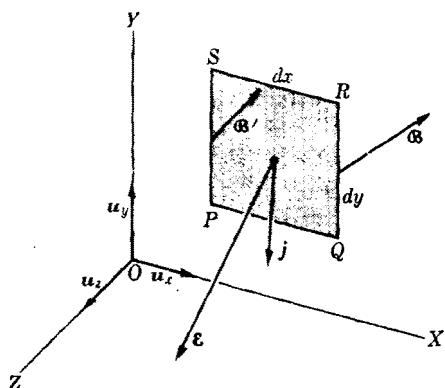


Fig. 17-33. Circuito elemental para deducir la forma diferencial de la ley de Ampère-Maxwell.

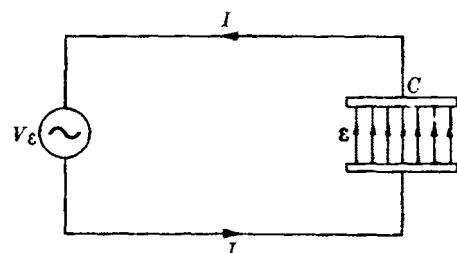


Fig. 17-34. La corriente de desplazamiento de Maxwell en un capacitor.

ción vectorial como ya hicimos para las leyes de Ampère y de Faraday-Henry, escribiendo

$$\text{rot } \mathcal{B} = \mu_0 \left(\mathbf{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} \right), \quad (17.62)$$

que expresa la relación entre la corriente eléctrica en un punto del espacio y los campos eléctrico y magnético en el mismo punto. En el espacio vacío, donde no hay corrientes, $\mathbf{j} = 0$ y la ec. (17.62) se convierte en

$$\text{rot } \mathcal{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t}, \quad (17.63)$$

que es el equivalente de la ec. (17.55) en forma diferencial. Es similar a la ec. (17.15) para la ley de Faraday-Henry y muestra claramente la relación entre el campo magnético y la derivada del campo eléctrico respecto al tiempo en el mismo punto.

Podemos observar que en la ec. (17.62) el efecto de un campo eléctrico dependiente del tiempo es añadir un término $\epsilon_0 \partial \mathcal{E} / \partial t$ a la densidad de corriente. Maxwell interpretó este término como una corriente adicional y la llamó *corriente de desplazamiento*. El razonamiento de Maxwell fue el siguiente. En un circuito que contiene un capacitor C (fig. 17-34), éste interrumpe la corriente I . Para "cerrar" el circuito debe haber una corriente de una placa a la otra y esta corriente es precisamente $(\epsilon_0 \partial \mathcal{E} / \partial t)S$, donde \mathcal{E} es el campo eléctrico en el capacitor y S es su superficie. Sin embargo, el término "corriente de desplazamiento" lleva a confusiones y la "imagen" de Maxwell es innecesaria, ya que no hay tal corriente entre las placas del capacitor, expresando la ec. (17.63) simplemente una correlación entre \mathcal{E} , \mathcal{B} y \mathbf{j} en el mismo punto del espacio.

17.15 Ecuaciones de Maxwell

Recapitulemos a esta altura nuestro estudio del campo electromagnético. Hemos visto que una clase importante de interacción entre las partículas fundamentales que componen la materia es la llamada *interacción electromagnética*. Está relacionada con una propiedad característica de cada partícula que se denomina su *carga eléctrica*. Para describir la interacción electromagnética, hemos introducido la noción de *campo electromagnético*, caracterizado por dos vectores, *el campo eléctrico* \mathcal{E} y *el campo magnético* \mathcal{B} , tales que la fuerza que se ejerce sobre una carga eléctrica es

$$\mathbf{F} = q(\mathcal{E} + \mathbf{v} \times \mathcal{B}). \quad (17.64)$$

Los campos eléctrico \mathcal{E} y magnético \mathcal{B} están a su vez determinados por las posiciones de las cargas y por sus movimientos (o corrientes). La separación del campo electromagnético en sus componentes eléctrica y magnética depende del movimiento relativo del observador y de las cargas que producen el campo. Además los campos \mathcal{E} y \mathcal{B} están directamente correlacionados por las leyes de Ampère-Maxwell y de Faraday-Henry. Todas estas relaciones se expresan mediante cuatro leyes que hemos analizado en los capítulos precedentes y que se pueden escribir tanto en forma integral como en forma diferencial como en la tabla 17-2.

La teoría del campo electromagnético está condensada en estas cuatro leyes. Se denominan *ecuaciones de Maxwell* porque fue Maxwell quien, además de formular la cuarta ley, se dio cuenta que, junto con la ec. (17.64), constituyan la estructura básica de la teoría de las interacciones electromagnéticas. La carga eléctrica q y la corriente I se denominan las *fuentes* del campo electromagnético ya que, dadas q e I , las ecuaciones de Maxwell nos permiten calcular \mathcal{E} y \mathcal{B} .

Debemos notar que las leyes de Gauss para los campos eléctrico y magnético, ecs. (16.3) y (16.81), se obtuvieron en el capítulo 16 para campos estáticos. No obstante, las estamos incorporando ahora a una teoría que involucra campos de-

pendientes del tiempo. El estudiante se puede preguntar si no tendremos quizás que corregirlas del mismo modo que tuvimos que modificar la ley de Ampère para hacerla aplicable en la situación de dependencia del tiempo. La respuesta es negativa. Se ha encontrado que el mencionado conjunto de leyes está conforme a la experiencia, y las consecuencias deducidas de ellas hasta ahora concuerdan con los resultados experimentales. Por lo tanto, las dos leyes de Gauss siguen siendo válidas cuando se aplican a campos eléctricos y magnéticos dependientes del tiempo.

TABLA 17-2 Ecuaciones de Maxwell para el campo electromagnético

Ley	Forma integral	Forma diferencial
I. Ley de Gauss para el campo eléctrico [(16.3) y (16.5)]	$\oint_S \mathcal{E} \cdot u_N dS = \frac{q}{\epsilon_0}$	$\operatorname{div} \mathcal{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$
II. Ley de Gauss para el campo magnético [(16.81) y (16.82)]	$\oint_S \mathcal{B} \cdot u_N dS = 0$	$\operatorname{div} \mathcal{B} = 0$
III. Ley de Faraday-Henry [(17.2) y (17.15)]	$\oint_L \mathcal{E} \cdot dl = -\frac{d}{dt} \oint_S \mathcal{B} \cdot u_N dS$	$\operatorname{rot} \mathcal{E} = -\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t}$
IV. Ley de Ampère-Maxwell [(17.54) y (17.62)]	$\oint_L \mathcal{B} \cdot dl = \mu_0 I + \epsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt} \oint_S \mathcal{E} \cdot u_N dS$	$\operatorname{rot} \mathcal{B} = \mu_0 J + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t}$

Las ecuaciones de Maxwell forman también un conjunto compatible. Por un lado, las ecs. (16.3) y (17.54), que involucran una integral de superficie del campo eléctrico, son compatibles porque éste fue nuestro requisito básico para corregir la ley de Ampère. Por otro lado, las ecs. (16.81) y (17.2), que involucran una integral de superficie del campo magnético, también son compatibles. Por ejemplo, aplicando la ec. (17.2) a la superficie de la fig. 17-31, tenemos que cuando la curva L se encoge hasta que la superficie se cierra, la circulación de \mathcal{E} es cero. Entonces

$$\frac{d}{dt} \oint_S \mathcal{B} \cdot u_N dS = 0 \quad \text{y} \quad \oint_S \mathcal{B} \cdot u_N dS = \text{const.}$$

que coincide con la ec. (16.81) si anulamos la constante de integración.

En el espacio libre o vacío, donde no hay ni cargas ($\rho = 0$) ni corrientes ($J = 0$), las ecuaciones de Maxwell son algo más simples, siendo su forma diferencial

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathcal{E} &= 0, & \operatorname{div} \mathcal{B} &= 0, \\ \operatorname{rot} \mathcal{E} &= -\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t}, & \operatorname{rot} \mathcal{B} &= \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t}, \end{aligned} \tag{17.65}$$

las cuales presentan cierta simetría. Sugerimos que el estudiante las escriba en detalle usando las componentes cartesianas.

El estudiante debe comparar las ecuaciones de Maxwell, sea en forma integral o diferencial, con las ecuaciones para el campo estático que se muestran en la tabla 16-4, y notar las principales modificaciones introducidas. En particular, debe observar que las leyes de Faraday-Henry y de Ampère-Maxwell suministran la conexión entre los campos eléctrico y magnético, la cual estaba ausente en las ecuaciones para los campos estáticos.

Según el problema a resolver, las ecuaciones de Maxwell se usan en forma integral o diferencial. En el capítulo 19, por ejemplo, ilustraremos cómo se usan para estudiar las ondas electromagnéticas. Puede parecer a primera vista que recordar todas estas ecuaciones es una tarea formidable. Sin embargo no es así. En primer lugar tienen una cierta simetría que (una vez reconocida) ayuda a organizarlas en la mente y por aplicación continuada uno se familiariza gradualmente con ellas. Pero en segundo lugar, comprender su significado físico es más importante que recordarlas en detalle.

Las ecuaciones de Maxwell son compatibles con el principio de relatividad en el sentido de que son invariantes frente a una transformación de Lorentz. Es decir, su forma no cambia cuando las coordenadas x , y , z y el tiempo t se transforman conforme a la transformación de Lorentz (6.33) y los campos \mathcal{E} y \mathcal{B} se transforman conforme a las ecs. (15.59) y (15.61). La demostración matemática de esto pertenece a un curso más avanzado, por lo que la omitiremos aquí aunque no es esencialmente difícil.

La síntesis de las interacciones electromagnéticas que expresan las ecuaciones de Maxwell es uno de los mayores logros de la física y es lo que coloca estas interacciones en una posición privilegiada. Son las mejor comprendidas de todas las interacciones y las únicas que, hasta ahora, se pueden expresar en una forma matemática cerrada y compatible. Esto es bastante afortunado para la humanidad, puesto que gran parte de nuestra civilización ha sido posible gracias a nuestra comprensión de las interacciones electromagnéticas, ya que son responsables de la mayoría de los procesos, naturales y debidos a la mano del hombre, que afectan nuestra vida diaria.

No obstante, debemos darnos cuenta que las ecuaciones de Maxwell, tal cual han sido presentadas, tienen sus limitaciones. Funcionan muy bien para tratar interacciones entre gran número de cargas, como las antenas radiantes, los circuitos eléctricos y aún los haces de átomos o de moléculas ionizados. Pero se ha encontrado que las interacciones electromagnéticas entre partículas elementales (especialmente a energías altas) se deben tratar en una forma algo diferente y conforme a las leyes de la mecánica cuántica, constituyendo una técnica denominada *electrodinámica cuántica*. Este tema no recibirá consideración ulterior en este libro. Aun dando por sentadas estas limitaciones, los resultados obtenidos de las ecuaciones de Maxwell dadas en este capítulo son una aproximación excelente para describir las interacciones electromagnéticas entre partículas elementales. Este método se denomina *electrodinámica clásica*. Es esta técnica aproximada la que se usará en este libro cuando estudiemos las ondas electromagnéticas y la estructura de la materia.

Bibliografía

1. "From Faraday to the Dynamo", H. Sharlin, *Sci. Am.*, mayo 1961, pág. 107
2. "Joseph Henry", C. Andrews, *The Physics Teacher* 3, 13 (1965)
3. "Michael Faraday", L. Williams, *The Physics Teacher* 3, 64 (1965)
4. "Displacement Currents and Magnetic Fields", A. French y J. Tessman, *Am. J. Phys.* 31, 201 (1963)
5. "Forces and Fields in Special Relativity", W. Ganley, *Am. J. Phys.* 31, 510 (1963)
6. "Interpretation of the Displacement Current", W. Rosser, *Am. J. Phys.* 31, 807 (1963)
7. "Maxwell, Displacement Current, and Symmetry", A. Bork, *Am. J. Phys.* 31, 854 (1963)
8. *Great Experiments in Physics*, Morris Shamos, editor. Holt, Rinehart and Winston, New York, 1959, cap. 10 (Faraday); cap. 11 (Lenz); apéndice 1 (Maxwell)
9. *Foundations of Electromagnetic Theory*, J. Reitz y F. Milford. Addison-Wesley, Reading, Mass., 1960, sec. 7-2; cap. 9; secs. 12-2, 13-1 a 13-6, y 15-1 a 15-3
10. *The Feynman Lectures on Physics*, vol. II, R. Feynman, R. Leighton y M. Sands. Addison-Wesley, Reading, Mass., 1963, caps. 16, 17, 18, 22 y 28
11. *Source Book in Physics*, W. Magie. Harvard University Press, Cambridge, Mass., 1963, pág. 472 (Faraday); pág. 511 (Lenz); pág. 513 (Henry); pág. 528 (Maxwell); pág. 583 (Rowland)
12. *Foundations of Modern Physical Science*, G. Holton y D. H. D. Roller. Addison-Wesley, Reading, Mass., 1958, secs. 28.8, 28.9 y 28.10

Problemas

17.1 Se coloca una bobina de 200 vueltas y de 0,10 m de radio perpendicularmente a un campo magnético uniforme de 0,2 T. Encontrar la fem inducida en la bobina si, en 0,1 s, (a) se duplica el campo, (b) se reduce el campo a cero, (c) se invierte el sentido del campo, (d) se rota la bobina en 90°, (e) se rota la bobina en 180°. En cada caso, hacer un diagrama mostrando el sentido de la fem.

17.2 Con referencia al problema 16.68, si la corriente varía según $I = I_0 \operatorname{sen} \omega t$, determinar la fem inducida en el circuito.

17.3 Mostrar que si $V_{\text{E}1}$ es una fem oscilante aplicada en los terminales AB , la fem $V_{\text{E}2}$ en los terminales $A'B'$ resultante de la inducción mutua entre los dos enrollados es $V_{\text{E}2} = (N_2/N)V_{\text{E}1}$ (ver fig. 17-35). Este es el fundamento del transformador; la fórmula es correcta en tanto el flujo magnético a través de los dos

enrollados sea el mismo y en tanto la resistencia sea despreciable.

17.4 Cuando se expresa el campo magnético en gauss y el área en cm^2 , el flujo magnético se mide en maxwells. (a) De-

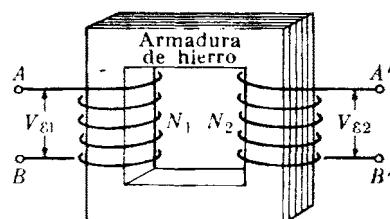


Figura 17-35

finir el maxwell. (b) Mostrar que un weber es igual a 10^8 maxwells. (c) Poner en la ec. (17.1) el factor numérico apro-

piado de modo que V_E se mida en voltios y Φ_B en maxweils.

17.5 El campo magnético B en todos los puntos dentro de la circunferencia de trazos de la fig. 17-36 es igual a $0,5 \text{ T}$. Está dirigido hacia el plano del papel y decrece a razón de $0,1 \text{ T s}^{-1}$. (a) ¿Cuál es la forma de las líneas de fuerza del

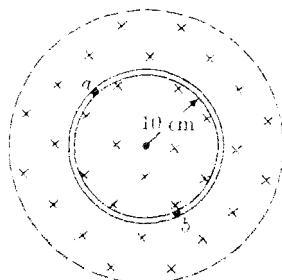


Figura 17-36

campo eléctrico inducido dentro de la circunferencia de trazos? (b) ¿Cuáles son el módulo y la dirección de este campo en cualquier punto del anillo conductor, y cuál es la fem en el mismo? (c) ¿Cuál es la corriente en el anillo si su resistencia es 2 ohms ? (d) ¿Cuál es la diferencia de potencial entre dos puntos cualesquiera del anillo? (e) ¿Cómo concilia sus respuestas a (c) y a (d)? Si se corta el anillo en algún punto y se separan los extremos ligeramente, ¿cuál será la diferencia de potencial entre los extremos?

17.6 Una espira cuadrada de alambre se mueve con velocidad v constante en dirección transversal a un campo magnético uniforme confinado en una región cuadrada cuyos lados son de longitud doble de los de la espira (ver fig. 17-37).

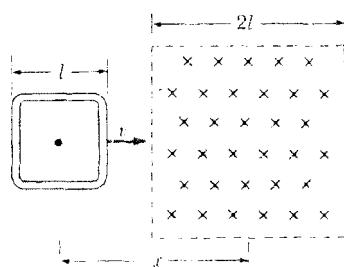


Figura 17-37

Hacer un gráfico esquemático de la fem inducida en la espira en función de x , desde $x = -2l$ hasta $x = +2l$, representando hacia arriba la fem en el sentido de las agujas del reloj y hacia abajo la de sentido opuesto.

17.7 Una espira rectangular se mueve a través de una región en la cual el campo magnético está dado por $B_y = B_z = 0$, $B_x = (6 - y) \text{ T}$ (ver fig. 17-38). Encontrar la fem inducida en la espira en función del tiempo, poniendo $t = 0$ cuando la espira está en la posición mostrada en la figura, (a) si $v = 2 \text{ m s}^{-1}$, (b) si la espira parte del reposo y tiene una aceleración de 2 m s^{-2} . (c) Repetir para cuando el movimiento es paralelo a OZ en lugar de OY . (d) Encontrar la corriente si $R_{\text{espira}} = 2 \text{ ohms}$.

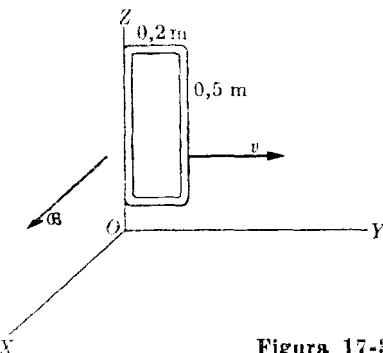


Figura 17-38

17.8 Suponiendo que la espira del problema 17.7 rota alrededor del eje OZ , (a) ¿cuál es la fem media durante los primeros 90° de rotación si el período de rotación es $0,2 \text{ s}$? (b) Calcular la fem y la corriente instantánea en función del tiempo.

17.9 En la fig. 17-39 sean $l = 1,5 \text{ m}$, $B = 0,5 \text{ T}$ y $v = 4 \text{ m s}^{-1}$. ¿Cuál es la diferencia de potencial entre los extremos del conductor? ¿Cuál extremo está a potencial más alto?

17.10 El cubo de la fig. 17-40, de un metro de lado, está en un campo magnético uniforme de $0,2 \text{ T}$ dirigido según el eje Y . Los alambres A , C y D se mueven en las direcciones indicadas, todos con una velocidad de $0,5 \text{ m s}^{-1}$. ¿Cuál es la diferencia de potencial entre los extremos de cada alambre?

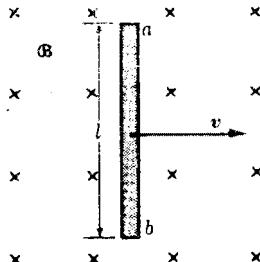


Figura 17-39

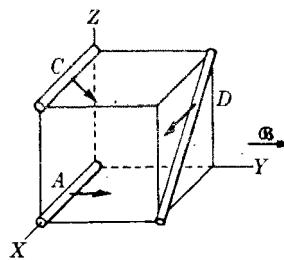


Figura 17-40

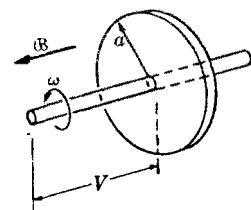


Figura 17-41

17.11 Un disco metálico de radio a rota con velocidad angular ω en un plano donde hay un campo magnético uniforme B paralelo al eje del disco (ver fig. 17-41). Demostrar que la diferencia de potencial entre el centro y el borde es $\frac{1}{2}\omega a^2 B$.

17.12 Un solenoide tiene una longitud de 0,30 m y una sección de $1,2 \times 10^{-3} \text{ m}^2$. Una bobina de 300 vueltas está arrollada en su parte central. Determinar (a) su inducción mutua, (b) la fem inducida en la bobina si en 0,2 s se invierte el sentido de la corriente de 2 A que circula por el solenoide.

17.13 Las bobinas A y B tienen 200 y 800 vueltas respectivamente. Una corriente de 2 A en A produce un flujo magnético de $1,8 \times 10^{-4}$ Wb en cada vuelta de B . Calcular (a) el coeficiente de inductancia mutua, (b) el flujo magnético a través de A cuando hay una corriente de 4 A en B , (c) la fem inducida en B cuando la corriente en A varía de 3 A a 1 A en 0,3 s.

17.14 Se colocan dos bobinas coaxialmente como se muestra en la fig. 17-42.

La bobina 1 está conectada a una fuente externa V_E , de fem. Suponer que la geometría es tal que un quinto del flujo magnético producido por la bobina 1 pasa por la bobina 2 y viceversa. Las resistencias de las bobinas son R_1 y R_2 y la bobina 2 está conectada a una resistencia externa como se muestra. Los números de vueltas de las bobinas son N_1 y N_2 . El flujo total producido por la bobina 1 está dado por $\Phi_B = (L_1/N_1)I_1$, donde L_1 es la autoinductancia de la bobina 1. (a) Encontrar la fem inducida en la bobina 2 cuando I_1 aumenta uniformemente de 0 a I_0 en t s. (b) Encontrar la fem inducida en la bobina 2 cuando $I_1 = I_0 \operatorname{sen} \omega t$. (c) ¿Cuánta energía se requiere del circuito 1 como resultado de la inducción en la bobina 2?

17.15 Se coloca una bobina de N vueltas alrededor de un solenoide muy largo de sección S que tiene n vueltas por unidad de longitud (ver fig. 17-34). Demostrar que la inductancia mutua del sistema es $\mu_0 n N S$.

17.16 En el centro de una bobina circular de radio a que tiene N_1 vueltas, hay

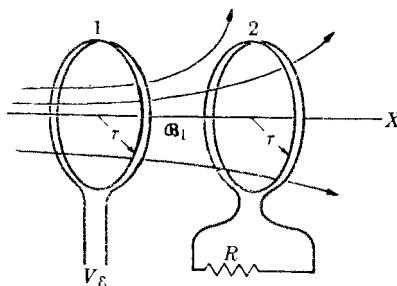


Figura 17-42

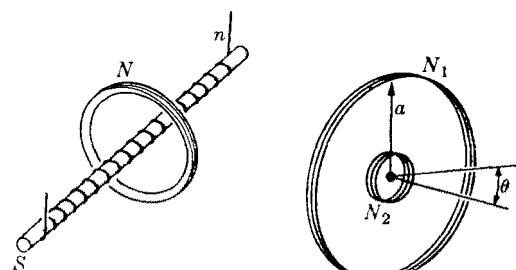


Figura 17-43

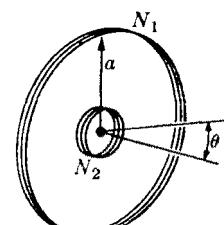


Figura 17-44

una bobina muy pequeña de sección S que tiene N_2 vueltas, como se muestra en la fig. 17.44. Demostrar que la inductancia mutua es $\mu_0 N_1 N_2 S \cos \theta/a$, donde θ es el ángulo entre las normales a las dos bobinas.

17.17 El flujo magnético a través de un circuito de resistencia R es Φ_B . En un tiempo determinado el flujo varía en $\Delta\Phi_B$. Demostrar que la cantidad de carga que pasa a través de cualquier sección del circuito es $Q = \Delta\Phi_B/R$, independientemente de que la variación de flujo sea rápida o lenta.

17.18 Una bobina de 1000 vueltas y con una resistencia de 100Ω está arrollada en un solenoide muy largo que tiene 10^4 vueltas por metro y una sección de $2 \times 10^{-3} \text{ m}^2$. La corriente que circula por el solenoide es de 10 A. En un tiempo corto dicha corriente se (a) duplica, (b) reduce a cero, (c) invierte. Encontrar la cantidad de carga que circula por la bobina en cada caso.

17.19 Encontrar la autoinductancia de un solenoide toroidal de N vueltas. Suponer que el radio del bobinado es muy pequeño respecto al radio del toro.

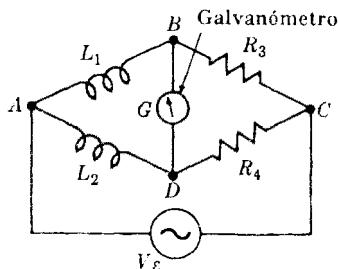


Figura 17-45

17.20 El flujo magnético a través de un circuito por el que circula una corriente de 2 A es 0,8 Wb. Encontrar su autoinductancia. Calcular la fem inducida en el circuito si en 0,2 s la corriente se (a) duplica, (b) reduce a cero, (c) invierte.

17.21 El puente ilustrado en la fig. 17-45 se puede usar para comparar las dos inductancias L_1 y L_2 . Se equilibra el puente de modo que la corriente de B a D sea cero en todo momento cuando se aplica la fem alterna V_g . Mostrar que $L_1/L_2 = R_3/R_4$.

17.22 En el problema 17.21 se despreció la resistencia de las inductancias. Si sus resistencias son R_1 y R_2 el procedimiento es el siguiente: se equilibra primero el puente hasta que no haya corriente entre B y D cuando se aplica una fem constante. A continuación se equilibra el puente como en el problema 17-21, sin cambiar la resistencia. Demostrar que se mantiene la misma relación.

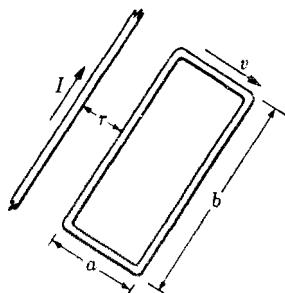


Figura 17-46

17.23 Si el circuito rectangular de la fig. 17-46 se mueve con velocidad v alejándose de la corriente rectilínea, encontrar la fem inducida. Usar dos métodos. [Sugerencia: Recordar el problema 16.68 y tener en cuenta que $v = dr/dt$.]

17.24 Refiriéndose a la situación estudiada en las secciones 17.2 y 17.4, calcular el campo eléctrico en el sistema de referencia fijo al conductor móvil y determinar la diferencia de potencial entre sus puntos terminales.

17.25 Aplicar el estudio de la sección 12.10 al análisis de dos circuitos idénticos acoplados.

17.26 Se conecta un capacitor C que tiene una carga inicial q_0 a un resistor R . Si se cierra el interruptor S de la fig. 17-47, el capacitor se descarga a través del resistor. Demostrar que (a) la corriente en el circuito es $I = -dq/dt$, (b) la ecuación del circuito es $q/C = RI$, (c) la carga del capacitor al tiempo t es $q = q_0 e^{-t/RC}$, (d) la energía disipada en la resistencia por efecto Joule es igual a la energía inicial del capacitor. [Sugerencia: Para (c) combinar (a) y (b); para (d) calcular la integral $\int_0^\infty RI^2 dt$.]

17.27 Un capacitor C_1 tiene una carga inicial q_0 . Cuando se cierra el interruptor S (fig. 17-48), el capacitor se conecta

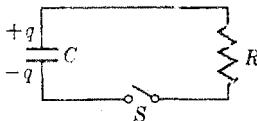


Figura 17-47

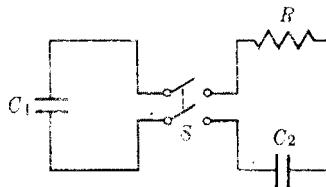


Figura 17-48

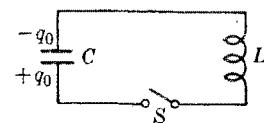


Figura 17-49

en serie con un resistor R y un capacitor descargado C_2 . (a) Demostrar que la ecuación del circuito es $q/C_2 + (q_0 - q)/C_2 = RI$. (b) Determinar q e I en función del tiempo.

17.28 Se conecta un capacitor C que tiene una carga inicial q_0 a una autoinductancia L de resistencia despreciable (fig. 17-49). Si se cierra el interruptor S , el capacitor se descarga a través de la inductancia. Demostrar que (a) la corriente que circula por el circuito es $I = -dq/dt$, (b) la ecuación del circuito es $q/C - L dI/dt = 0$, (c) la carga en el capacitor al tiempo t es $q = q_0 \cos \omega t$, donde $\omega = 1/\sqrt{LC}$, de modo que se establecen oscilaciones eléctricas. Este circuito se usa para obtener oscilaciones de alta frecuencia.

17.29 Se conecta una batería de fem V_S y resistencia interna despreciable en serie con un resistor R y un capacitor descargado C (fig. 17-50). Demostrar que,

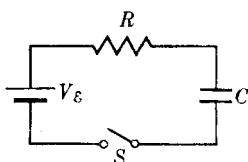


Figura 17-50

después de cerrar el interruptor S , (a) la corriente en el circuito es $I = +dq/dt$, donde q es la carga acumulada en el capacitor, (b) la ecuación del circuito es $V_S - q/C = RI$, (c) la carga en función del tiempo es $q = V_S C(1 - e^{-t/RC})$, la corriente en función del tiempo es $I = (V_S/R)e^{-t/RC}$. Representar q e I en función del tiempo.

17.30 Un circuito está compuesto de una resistencia a la cual se aplica una

fem alterna $V_S = V_0 \sin \omega t$. Demostrar que la corriente está dada por $I = (V_0/R) \sin \omega t$, representar los vectores rotantes de la fem y de la corriente y mostrar que están en fase. ¿Cuál es la impedancia del circuito?

17.31 Un circuito está compuesto de una fem alterna de amplitud V_{S0} y frecuencia angular ω , conectada a un capacitor C . (a) Encontrar la corriente. (b) Dibujar los vectores rotantes correspondientes a la fem aplicada y a la corriente. (c) Representar la corriente en función de ω y de C .

17.32 Se conecta un capacitor de $1\mu F$ a una fuente de CA cuya amplitud de voltaje se mantiene constante a 50 V, pero cuya frecuencia se puede variar. Encontrar la amplitud de corriente cuando la frecuencia angular es (a) 100 s^{-1} , (b) 1000 s^{-1} , (c) 10.000 s^{-1} . (d) Construir un gráfico bilogarítmico de la corriente en función de la frecuencia.

17.33 La amplitud de voltaje de una fuente de CA es 50 V y su frecuencia angular es 1000 s^{-1} . Encontrar la amplitud de corriente si la capacitancia de un capacitor conectado a la fuente es (a) $0,01 \mu F$, (b) $1,0 \mu F$, (c) $100 \mu F$. (d) Construir un gráfico bilogarítmico de la corriente en función de la capacitancia.

17.34 Un circuito está compuesto de una fem alterna de amplitud V_{S0} y frecuencia angular ω conectada a una autoinductancia L . (a) Encontrar la corriente. (b) Dibujar los vectores rotantes correspondientes a la fem aplicada, a la caída de potencial en la autoinductancia y a la corriente. (c) Representar la corriente en función de ω y de L .

17.35 A la fuente del problema 17.32 se conecta un inductor dc de autoinductancia 10 H y resistencia despreciable.

Encontrar la amplitud de corriente cuando la frecuencia angular es (a) 100 s^{-1} , (b) 1000 s^{-1} , (c) 10.000 s^{-1} . (d) Construir un gráfico bilogarítmico de la amplitud de corriente en función de la frecuencia.

17.26 Encontrar la amplitud de corriente si la autoinductancia de un inductor sin resistencia conectado a la fuente del problema 17.33 es (a) $0,01 \text{ H}$, (b) $1,0 \text{ H}$, (c) 100 H . (d) Construir un gráfico bilogarítmico de la amplitud de corriente en función de la autoinductancia.

17.37 Un circuito está compuesto de una resistencia y una autoinductancia en serie y se le aplica una fem alterna $V_E = V_{E_0} \sin \omega t$. Demostrar que la impedancia del circuito es $\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$ y que la corriente está en atraso respecto a la fem en un ángulo $\operatorname{tg}^{-1}(\omega L/R)$. [Sugerencia: Dibujar el vector rotante. Luego, utilizando los resultados del problema 17.34, dibujar los vectores rotantes correspondientes a la diferencia de potencial o fem en la resistencia y en la inductancia. Encontrar su módulo y

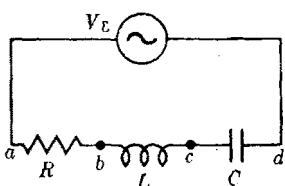


Figura 17-51

comparar con V_{E_0} para obtener la impedancia. El ángulo entre el vector rotante total de la fem y el vector rotante de la corriente da la diferencia de fase.]

17.38 Repetir el problema precedente para un circuito compuesto de (a) una resistencia y una capacitancia, (b) una inductancia y una capacitancia.

17.39 Una bobina que tiene 20 vueltas y un área de $0,04 \text{ m}^2$ rota a 10 rev s^{-1} en un campo magnético de $0,02 \text{ T}$. La resistencia de la bobina es 2Ω y su autoinductancia es 10^{-3} H . Encontrar la expresión de (a) la fem inducida, (b) la corriente.

17.40 En el circuito de la fig. 17-51 $V_E = V_{E_0} \sin \omega t$ es una fem alterna. En-

contrar la amplitud y la fase respecto a la fem de las diferencias de potencial V_{ab} , V_{bc} , V_{cd} , V_{ac} , V_{bd} . [Sugerencia: Dibujar los correspondientes vectores rotantes como se indicó en la fig. 17-27].

17.41 Se conecta una fem alterna que tiene un valor máximo de 100 V y una frecuencia angular de $120\pi \text{ s}^{-1}$ en serie con una resistencia de 1Ω , una autoinductancia de $3 \times 10^{-3} \text{ H}$ y una capacitancia de $2 \times 10^{-3} \text{ F}$. Determinar (a) la amplitud y la fase de la corriente, (b) la diferencia de potencial en el resistor, en el inductor y en el capacitor. (c) Hacer un diagrama mostrando los vectores rotantes correspondientes a la fem aplicada, a la corriente y a las tres diferencias de potencial. (d) Verificar que la suma de los tres vectores diferencia de potencial es el vector fem.

17.42 Si I_{mc} y ϵ_{mc} son las raíces de las medias cuadráticas de la corriente y de la fem en un ciclo, demostrar que $I_{mc} = I_0/\sqrt{2}$, $\epsilon_{mc} = \epsilon_0/\sqrt{2}$ y $\bar{P} = I_{mc}\epsilon_{mc} \cos \alpha$, donde α es el ángulo de fase entre la corriente y la fem.

17.43 Un circuito consiste en una fem alterna de valor máximo 100 V , una resistencia de 2Ω , una autoinductancia de 10^{-3} H y una capacitancia de 10^{-3} F , todas conectadas en serie. Encontrar el valor máximo de la corriente para los siguientes valores de la frecuencia angular de la fem: (a) 0 , (b) 10 s^{-1} , (c) 10^2 s^{-1} , (d) resonancia, (e) 10^4 s^{-1} , (f) 10^5 s^{-1} . Re-

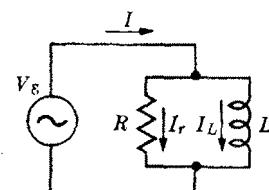


Figura 17-52

presentar la corriente en función del logaritmo de la frecuencia.

17.44 Un circuito está compuesto de una resistencia y una inductancia en paralelo como se muestra en la fig. 17-52. Demostrar que la impedancia total del circuito está dada por

$$1/Z = \sqrt{1/R^2 + 1/\omega_f^2 L^2}$$

y la fase por $\operatorname{arctg}(R/\omega_f L)$. [Sugerencia:

Representar el vector rotante de la fem. Luego, usando los resultados de los problemas 17.34 y 17.37, dibujar los vectores rotantes correspondientes a la corriente en la resistencia y en la inductancia. Su resultante da la corriente total de la cual se obtienen la impedancia y la diferencia de fase.]

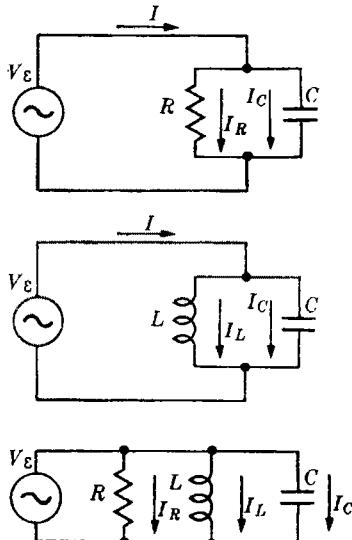


Figura 17-53

17.45 Repetir el problema precedente para los tres circuitos ilustrados en la fig. 17-53.

17.46 Se conecta una bobina que tiene una resistencia de $1\ \Omega$ y una inductancia de $10^{-3}\ \text{H}$ en paralelo con una segunda bobina que tiene una resistencia de $1\ \Omega$ y una autoinductancia de $3 \times 10^{-3}\ \text{H}$. Se aplica al sistema una fem alterna con una amplitud de $10\ \text{V}$ y una frecuencia angular de $120\pi\ \text{s}^{-1}$. Calcular (a) la corriente que circula por cada bobina, (b) la corriente total. (c) Representar los vectores rotantes de la fem, de la corriente en cada bobina y de la corriente total. (d) Verificar que el vector de la corriente total es igual a la suma de los vectores de cada corriente.

17.47 Un circuito está compuesto de un inductor y un capacitor en paralelo, conectados en serie con un resistor como se muestra en la fig. 17-54. (a) Dibujar

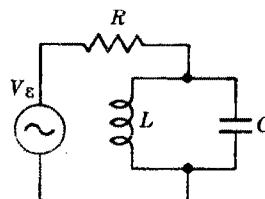


Figura 17-54

los vectores rotantes correspondientes a V_E , I_L , I_C , R , V_L y V_C . (b) Demostrar que la impedancia del circuito es $[R^2 + \omega^2 L^2 / (1 - \omega^2 LC)^2]^{1/2}$. ¿Cuál es el valor de la impedancia cuando $\omega = 1/\sqrt{LC}$? (en este caso se dice que hay antirresonancia). (d) Hacer una representación esquemática de la corriente en función de la frecuencia. [Sugerencia: Observar que la suma de los vectores rotantes de las corrientes que pasan por L y C debe ser igual al de la corriente que pasa por R , pero los correspondientes a la diferencia de potencial deben ser idénticos. También se muestra el diagrama de vectores rotantes para ayudar al estudiante.]

17.48 Una bobina circular de radio a , resistencia R y autoinductancia L rota con velocidad angular constante alrededor de un diámetro perpendicular a un campo magnético uniforme (ver fig. 17-55). Encontrar (a) la fem inducida en la bobina y la corriente que circula por ella, (b) los valores medios de las componentes x e y del campo magnético inducido por la bobina en O , (c) el ángulo que una aguja magnética colocada en O forma con el eje X .

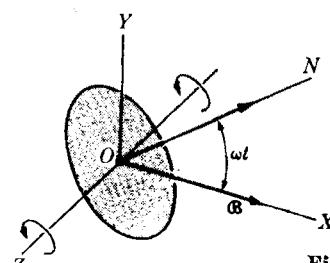


Figura 17-55

17.49 Demostrar que si $\mathcal{B} = C/r$ se satisface la ec. (17.8). [Sugerencia: Calcular \mathcal{B} para r arbitrario, introducir el valor en la ec. (17.8) y calcular la derivada respecto a r .]

17.50 Una carga q de masa m se mueve en una órbita circular de radio ρ bajo la acción de una fuerza centrípeta F . Durante cierto intervalo de tiempo, se establece un campo magnético uniforme perpendicular al plano de la órbita. Usando la ley de la inducción electromagnética, demostrar que la variación del módulo de la velocidad del ion es $\Delta v = -q\rho B/2m$ y que la variación correspondiente del momento magnético es $\Delta \mathbf{m} = -(q^2\rho^2/4m)\mathcal{B}$. Comparar con el ejemplo 16.21. [Sugerencia: Para obtener la aceleración tangencial mientras el campo magnético está variando, usar la ec. (17.6) obtenida al discutir el betatrón.]

17.51 Refiriéndose a la situación descrita en la sección 17.5 (a) demostrar que en el sistema de referencia en el cual el circuito está en reposo y el campo magnético rota con velocidad angular $-\omega$, $\partial \mathcal{B}/\partial t = -\omega \times \mathcal{B}$. (b) Escribir la ec. (17.15) con este valor de $\partial \mathcal{B}/\partial t$ y, usando el resultado del problema 16.64, demostrar que el campo eléctrico observado en este sistema de referencia es $\mathcal{E} = \frac{1}{2}(\omega \times \mathcal{B}) \times \mathbf{r}$. (c) Demostrar que la fem producida por este campo eléctrico es la misma que la fem medida por el observador fijo al campo magnético. [Sugerencia: Notar que $\frac{1}{2}\mathbf{r} \times d\mathbf{l}$ es el área del triángulo determinado por ambos vectores y que $\mathbf{A} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C}$.]

17.52 En una región donde hay un campo magnético uniforme \mathcal{B} , el módulo del campo está aumentando con una rapidez constante, es decir, $\partial \mathcal{B}/\partial t = b$, donde b es un vector constante paralelo a \mathcal{B} . (a) Demostrar que, conforme a la

ec. (17.15), el campo eléctrico en cada punto es $\mathcal{E} = -\frac{1}{2}\mathbf{b} \times \mathbf{r}$. (b) Colocando el eje Z paralelo al campo magnético, obtener las componentes cartesianas de \mathcal{E} . (e) Representar las líneas de fuerza de los campos eléctrico y magnético.

17.53 Encontrar el flujo eléctrico a través de una esfera con centro en una carga que se mueve a alta velocidad. [Sugerencia: Usar la expresión (15.64) de la ley de Gauss.]

17.54 Escribir la forma diferencial de las ecuaciones de Maxwell (tabla 17-2) usando el operador ∇ .

17.55 Demostrar que la forma diferencial de la ecuación de continuidad (17.51) es $\partial \rho/\partial t = -\operatorname{div} \mathbf{j}$.

17.56 Demostrar que para que la ecuación de continuidad escrita en el problema 17.55 permanezca invariante bajo una transformación de Lorentz para todos los observadores iniciales, es necesario que la corriente y la densidad de carga se transformen de acuerdo con la ley

$$j'_x = \frac{j_x - \rho v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad j'_y = j_y,$$

$$j'_z = j_z, \quad \rho' = \frac{\rho - j_x v/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Escribir el límite no relativista de estas expresiones y discutir su verosimilitud. [Sugerencia: Recordar que $j = \rho \mathbf{v}$ es la densidad de corriente para cargas que se mueven con velocidad \mathbf{v} .]

17.57 Verificar por sustitución directa que la ec. (17.34) es solución de la ec. (17.33) si I_0 y α están dados por las ecs. (17.35) y (17.39), respectivamente. [Sugerencia: Desarrollar primero $\sin(\omega_f t - \alpha)$ y reemplazar $\sin \alpha$ y $\cos \alpha$ por los valores obtenidos de la ec. (17.39).]

PARTE 3

ONDAS

- 18 *Movimiento ondulatorio*
- 19 *Ondas electromagnéticas*
- 20 *Reflexión, refracción, polarización*
- 21 *Geometría de las ondas*
- 22 *Interferencia*
- 23 *Difracción*
- 24 *Fenómenos de transporte*

De todos los conceptos que se usan en física, dos están dentro de las posibilidades de comprensión intuitiva de cualquier individuo, cualquiera sea su nivel cultural. Son éstos el concepto de *partícula* y el de *onda*. Para el lego, una partícula es una pequeña porción de materia, donde “pequeño” significa de dimensiones mucho menores que lo que rodea la partícula, lo cual se decide normalmente usando una escala antropomórfica. Análogamente, el lego tiene una imagen objetiva de las ondas basada en las ondas que observa en la superficie del agua, en una cuerda o en un resorte.

No obstante, como ya el estudiante se habrá dado cuenta indudablemente después de leer los capítulos precedentes, el físico usa el concepto de partícula en un sentido algo más abstracto y fundamental que le permite tratar en forma adecuada una gran variedad de situaciones físicas. El concepto de onda tiene una transformación similar: el físico ha extendido el concepto y lo ha aplicado a un gran número de fenómenos que no se parecen a la imagen objetiva de una onda en la superficie del agua, pero que tienen la misma descripción matemática. La Parte 3 de este texto está dedicada al estudio general de los fenómenos ondulatorios en este sentido más amplio.

Una advertencia: en cada caso el estudiante se debe concentrar en la comprensión de los fenómenos físicos descritos y del marco matemático utilizado y debe rehuir la tentación inevitable de imaginar todas las ondas simplemente como las ve en la superficie de un líquido. Analizaremos varios tipos de ondas, principalmente elásticas y electromagnéticas, con un énfasis especial en las últimas. Los aspectos más importantes de las ondas son su velocidad de propagación, y las modificaciones que experimentan cuando cambian las propiedades físicas del medio (reflexión, refracción, polarización), cuando se interponen diferentes clases de obstáculos en sus caminos (difracción, dispersión), o cuando varias ondas coinciden en la misma región del espacio (interferencia). Estos son por lo tanto los tópicos específicos que se cubrirán en los próximos capítulos. Pero el fin primordial de estos capítulos es permitir que el estudiante llegue a una comprensión fundamental de la descripción ondulatoria de fenómenos físicos, como es la propagación de una situación física descrita por un campo dependiente del tiempo. Por esta razón, en el capítulo 24 trataremos un grupo seleccionado de procesos bajo la denominación general de *fenómenos de transporte*. Se describen en una forma matemática algo diferente de la correspondiente a las ondas elásticas y electromagnéticas y, aunque también corresponden a la propagación de una condición física, el cuadro físico es diferente del de otros tipos de fenómenos ondulatorios. Comparando cuidadosamente los fenómenos de transporte con las otras ondas descritas en los capítulos que lo preceden, podemos tener una visión más profunda de la descripción ondulatoria de fenómenos físicos.

MOVIMIENTO ONDULATORIO

18.1 Introducción

- 18.2 Descripción matemática de la propagación
- 18.3 Análisis de Fourier del movimiento ondulatorio
- 18.4 Ecuación diferencial del movimiento ondulatorio
- 18.5 Ondas elásticas en una barra
- 18.6 Ondas de presión en una columna de gas
- 18.7 Ondas transversales en una cuerda
- 18.8 Ondas superficiales en un líquido
- 18.9 ¿Qué se propaga en un movimiento ondulatorio?
- 18.10 Ondas en dos y tres dimensiones
- 18.11 Ondas esféricas en un fluido
- 18.12 Velocidad de grupo
- 18.13 El efecto Doppler
- 18.14 Sonido; acústica

18.1 Introducción

Cuando golpeamos una campana o encendemos la radio, el sonido se oye en puntos distantes de la campana o de la radio. El sonido se ha transmitido a través del aire que nos rodea. Si estamos en la playa y un bote pasa velozmente a cierta distancia de la orilla sentimos la onda producida por su rápido movimiento. Cuando se enciende la lámpara del cuarto, éste se ilumina. En la sección 17.11 vimos que, como resultado de las relaciones físicas entre los campos magnético y eléctrico, es posible transmitir una señal eléctrica de un lugar a otro. Aunque el mecanismo físico puede ser diferente para cada uno de los procesos mencionados, todos ellos tienen una característica común, son situaciones físicas producidas en un punto del espacio, que se propagan a través del mismo y se reciben en otro punto. Todos estos procesos son ejemplos del *movimiento ondulatorio*.

De un modo más general, supongamos que tenemos una propiedad física descrita por un cierto campo. Este puede ser un campo electromagnético, la deformación de un resorte, la presión en un gas, la deformación de un sólido, el desplazamiento transversal de una cuerda, y quizás hasta el campo gravitacional. Supongamos que las condiciones en un lugar lleguen a ser dependientes del tiempo o dinámicas, de modo que haya una perturbación del estado físico en aquel lugar. Las propiedades físicas del sistema, descritas por las ecuaciones del campo dependientes del tiempo (tal como las ecuaciones del electromagnetismo de Maxwell), dan como resultado la propagación de esta perturbación a través del espacio. Esto ocasiona cambios en las condiciones físicas en otros lugares. Entonces decimos que hay una onda asociada al campo particular considerado.

Por ejemplo, consideremos la superficie libre de un líquido. El campo en este caso es el desplazamiento de cada punto de la superficie con respecto a su posición

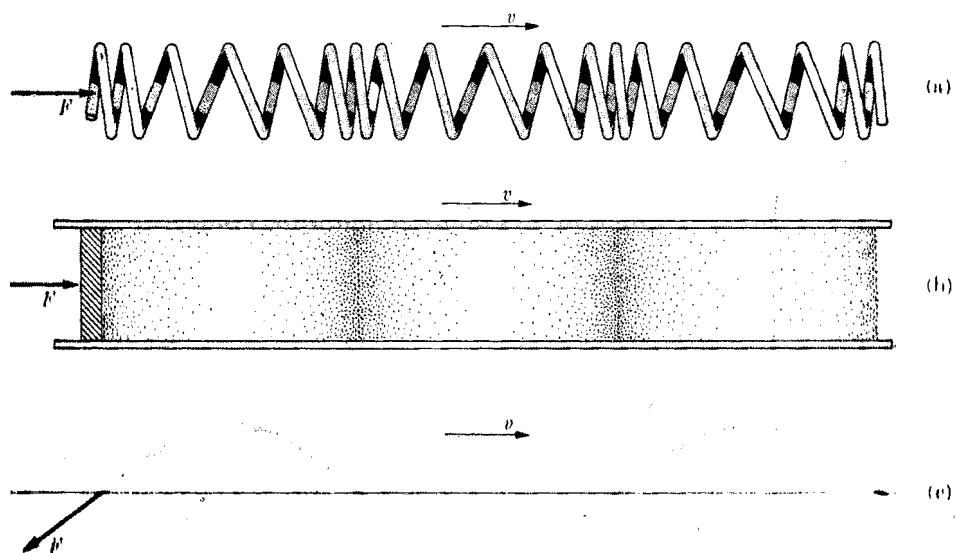


Fig. 18-17 Ondas elásticas en (a) un resorte, (b) un gas y (c) una cuerda.

de equilibrio. En condiciones de equilibrio o estáticas la superficie libre de un líquido es plana y horizontal. Pero si en un punto las condiciones en la superficie se perturban dejando caer una piedra, por ejemplo, esta perturbación se propaga en todas las direcciones según la superficie del líquido. Para determinar el mecanismo de la propagación y su velocidad, debemos analizar cómo el desplazamiento de un punto de la superficie del líquido afecta el resto de la superficie. Partiendo de este análisis establecemos las ecuaciones dinámicas del proceso. Estas ecuaciones nos permiten obtener información cuantitativa acerca de la variación de la perturbación en el espacio y en el tiempo.

En este capítulo estudiaremos las características generales del movimiento ondulatorio, para considerar a continuación algunas clases especiales de ondas. Muchos de los ejemplos corresponderán a ondas elásticas en una sustancia. Las diferentes y bien conocidas clases de ondas que se muestran en la fig. 18-1 son fundamentalmente ondas elásticas. En tales casos ignoraremos la estructura molecular de la materia y supondremos que se trata de un medio continuo. Esta suposición es válida mientras la variación espacial de la onda (determinada por la longitud de onda) sea grande comparada con la distancia intermolecular.

18.2 Descripción matemática de la propagación

Consideremos una función $\xi = f(x)$, representada gráficamente por la curva continua de la fig. 18-2. Si reemplazamos x por $x - a$, obtenemos la función $\xi = f(x - a)$. Evidentemente, la forma de la curva no ha cambiado; los mismos valores de ξ se obtienen para valores de x aumentados en a . En otras palabras, suponiendo que a es positiva, vemos que la curva ha sido desplazada sin deformación, hacia la derecha, una cantidad a . Análogamente tenemos que $\xi = f(x + a)$

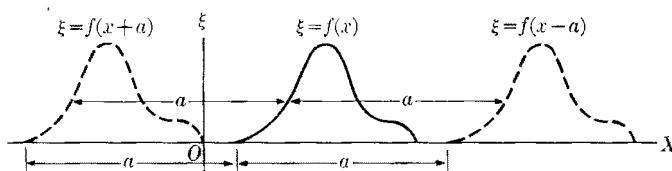


Fig. 18-2. Traslación de la función $\xi(x)$ sin distorsión.

corresponde a un desplazamiento rígido de la curva, hacia la izquierda, en la cantidad a .

Si $a = vt$, donde t es el tiempo, obtenemos una curva "viajera"; esto es, $\xi = f(x - vt)$ representa una curva que se mueve hacia la derecha con velocidad v , llamada *velocidad de fase* (fig. 18-3a). Del mismo modo, $\xi = f(x + vt)$ representa una curva que se mueve hacia la izquierda con velocidad v (fig. 18-3b). Concluimos entonces que una expresión matemática de la forma

$$\xi(x, t) = f(x \pm vt) \quad (18.1)$$

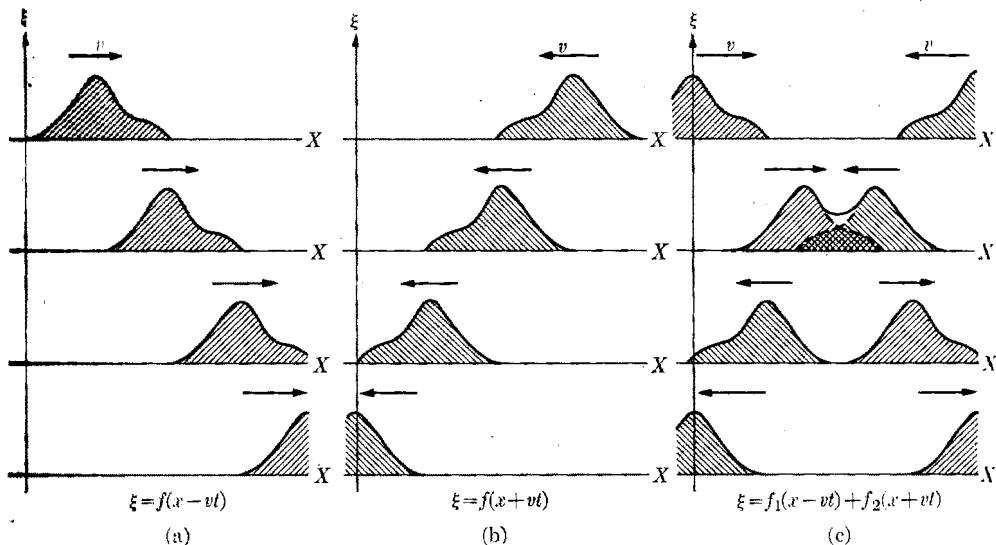


Fig. 18-8. Propagación sin distorsión de una onda (a) hacia la derecha y (b) hacia la izquierda. (c) Ondas que se propagan en direcciones opuestas producen resultados aditivos donde interfieren.

es adecuada para describir una situación física que “viaja” o “se propaga” sin deformación en la dirección del eje X ; esto se llama *movimiento ondulatorio*. La cantidad $\xi(x, t)$ puede representar muy diversas cantidades físicas, tales como la deformación en un sólido, la presión en un gas, un campo eléctrico o magnético, etc.

Un caso especialmente interesante es aquel en el cual $\xi(x, t)$ es una función sinusoidal o armónica tal como

$$\xi(x, t) = \xi_0 \operatorname{sen} k(x - vt). \quad (18.2)$$

La cantidad k tiene un significado especial. Reemplazando el valor de x por $x + 2\pi/k$, obtenemos para $\xi(x, t)$ el mismo valor, esto es,

$$\begin{aligned} \xi \left(x + \frac{2\pi}{k} - vt \right) &= \xi_0 \operatorname{sen} k \left(x + \frac{2\pi}{k} - vt \right) \\ &= \xi_0 \operatorname{sen} [k(x - vt) + 2\pi] = \xi(x - vt). \end{aligned}$$

Entonces

$$\lambda = 2\pi/k \quad (18.3)$$

es el “período espacial” de la curva de la fig. 18-4; esto es, la curva se repite a sí misma cada longitud λ . La cantidad λ se llama *longitud de onda*. Entonces la cantidad $k = 2\pi/\lambda$ representa el número de longitudes de onda en la distancia 2π y se denomina *número de onda*, aunque algunas veces este nombre se da a $1/\lambda$ ó $k/2\pi$, el cual corresponde al número de longitudes de onda en la unidad

de longitud. Por consiguiente

$$\xi(x, t) = \xi_0 \operatorname{sen} k(x - vt) = \xi_0 \operatorname{sen} \frac{2\pi}{\lambda} (x - vt) \quad (18.4)$$

representa una onda sinusoidal o armónica de longitud de onda λ propagándose hacia la derecha según el eje X con velocidad v . La ec. (18.4) puede escribirse también en la forma

$$\xi(x, t) = \xi_0 \operatorname{sen} (kx - \omega t), \quad (18.5)$$

donde

$$\omega = kv = \frac{2\pi v}{\lambda} \quad (18.6)$$

da la frecuencia angular de la onda. Puesto que, según la ec. (12.2), $\omega = 2\pi\nu$, donde ν es la frecuencia con la cual la situación física varía en cada punto x , tenemos la relación importante

$$\lambda\nu = v \quad (18.7)$$

entre la longitud de onda, la frecuencia y la velocidad de propagación. Es evidente que si P es el período de oscilación de cada punto, dado, según la ec. (12.2), por $P = 2\pi/\omega = 1/\nu$, podemos también escribir la ecuación (18.4) en la forma

$$\xi = \xi_0 \operatorname{sen} 2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{P} \right). \quad (18.8)$$

Análogamente

$$\begin{aligned} \xi &= \xi_0 \operatorname{sen} k(x + vt) = \xi_0 \operatorname{sen} (kx + \omega t) \\ &= \xi_0 \operatorname{sen} 2\pi \left(\frac{x}{\lambda} + \frac{t}{P} \right) \end{aligned} \quad (18.9)$$

representa una onda sinusoidal o armónica moviéndose según $-X$. Es interesante observar la distribución en el espacio de $\xi(x, t)$ a intervalos sucesivos de tiempo. La función $\xi(x, t)$ se ha representado en la fig. 18-5 en los instantes t_0 , $t_0 + P/4$, $t_0 + P/2$, $t_0 + 3P/4$, y $t_0 + P$. Notamos que mientras la situación física se propaga hacia la derecha, se repite a sí misma en el espacio después de un período. La razón es que según la ec. (18.7),

$$\lambda = v/\nu = vP,$$

lo cual muestra que podemos definir la longitud de onda como la distancia que avanza el movimiento ondulatorio en un período. Por consiguiente, en el movimiento ondulatorio sinusoidal, tenemos dos periodicidades: una en el tiempo,

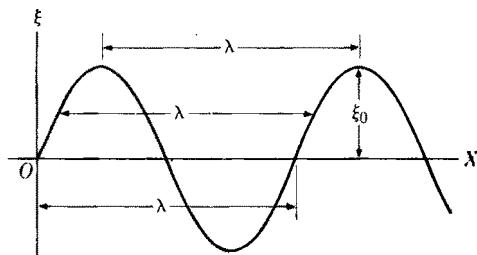


Fig. 18-4. Onda armónica.

dada por el período P , y la otra en el espacio, dada por la longitud de onda λ , estando las dos relacionadas por $\lambda = vP$.

El estudiante puede verificar fácilmente que la expresión (18.1) para una onda puede escribirse en la forma equivalente

$$\xi(x, t) = F(t \pm x/v)$$

donde, como anteriormente, el signo positivo corresponde a la propagación en

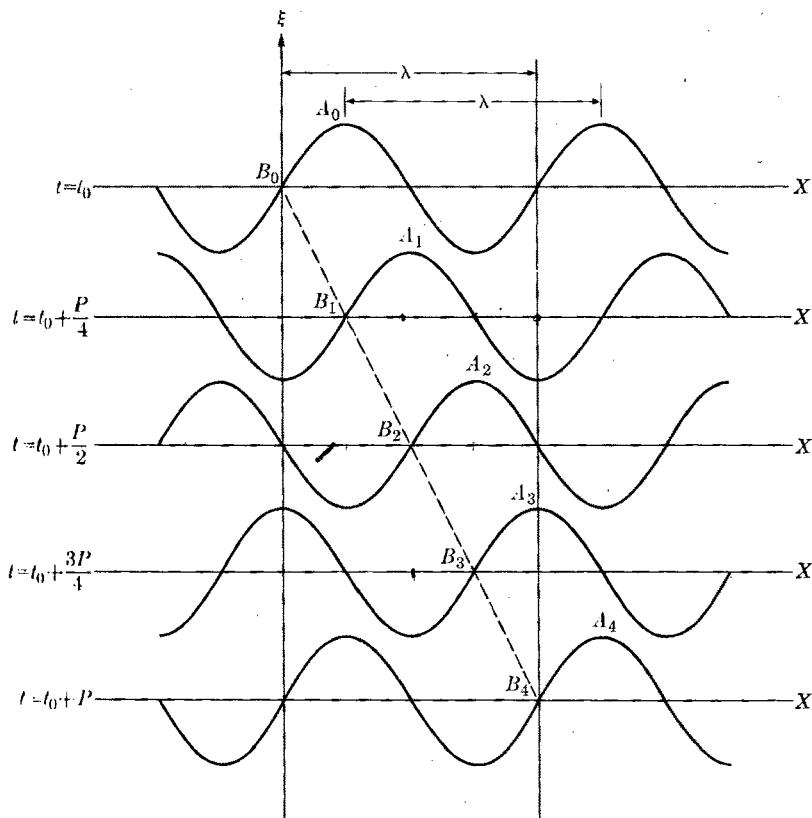


Fig. 18-5. Onda armónica propagándose hacia la derecha. La onda recorre la distancia λ en el tiempo P .

la dirección de $-X$ y el signo menos a la propagación en el sentido de $+X$. Así, para una onda armónica, las ecs. (18.5) y (18.9) pueden escribirse

$$\text{II } \xi(x, t) = \xi_0 \operatorname{sen}(\omega(t \pm x/v)) = \xi_0 \operatorname{sen}(\omega t \pm kx). \quad (18.10)$$

EJEMPLO 18.1. Un diapasón oscila con una frecuencia de 440 Hz. Si la velocidad del sonido en el aire es 340 m s^{-1} , hallar la longitud de onda del sonido producido.

Solución: Usando la ec. (18.7), tenemos

$$\lambda = \frac{v}{\nu} = \frac{340 \text{ m s}^{-1}}{440 \text{ Hz}} = 0,772 \text{ m.}$$

EJEMPLO 18.2. La luz se propaga en el vacío con la velocidad de $3 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$. Hallar la longitud de onda correspondiente a la frecuencia de $5 \times 10^{14} \text{ Hz}$, que es la frecuencia de la luz roja del espectro visible.

Solución: Usando de nuevo la ec. (18.7), obtenemos

$$\lambda = \frac{v}{\nu} = \frac{3 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}}{5 \times 10^{14} \text{ Hz}} = 6 \times 10^{-7} \text{ m.}$$

El estudiante, comparando estos dos ejemplos, se dará cuenta de la diferencia en los órdenes de magnitud de los datos y los resultados cuando se trata de ondas sonoras u ondas luminosas.

18.3 Análisis de Fourier del movimiento ondulatorio

En la sección 12.15 vimos que, según el teorema de Fourier, cualquier movimiento periódico se puede expresar como una superposición de movimientos armónicos simples de frecuencias $\omega, 2\omega, \dots, n\omega, \dots$ ó períodos $P, P/2, \dots, P/n, \dots$. El mismo resultado se aplica al movimiento ondulatorio periódico.

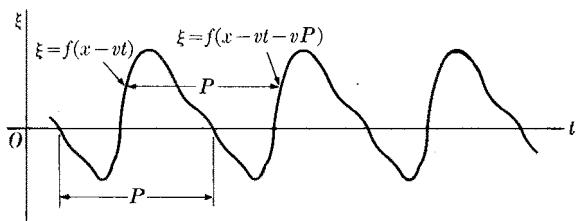


Fig. 18-6. Onda periódica no armónica en un punto dado.

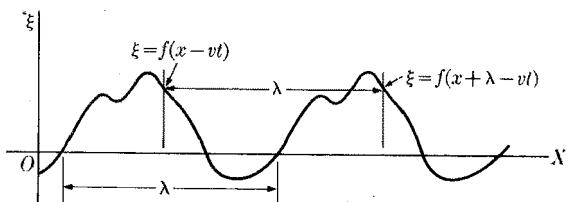


Fig. 18-7. Onda periódica no armónica en un instante dado.

Supongamos que $\xi = f(x - vt)$ sea un movimiento ondulatorio periódico, esto es, un movimiento que se repite a sí mismo en los instantes $P, 2P, \dots, nP, \dots$ (fig. 18-6). En otras palabras,

$$\xi = f(x - vt) = f[x - v(t \pm P)] = f(x - vt \mp vP).$$

Esto significa que en un instante dado, el valor de ξ es el mismo cuando x aumenta o disminuye en $vP, 2vP, \dots, nvP, \dots$. Por lo tanto, si en lugar de cambiar t ,

cambiamos x en la cantidad $\lambda = vP$, la onda se repite a sí misma en el espacio. Hemos ya observado que esto sucede en el movimiento ondulatorio sinusoidal (o armónico).

Supongamos ahora que $\xi = f(x)$ es una función periódica en el espacio de periodo λ , esto es, $f(x) = f(x + \lambda)$. Por tanto, usando el teorema de Fourier, explicado en la sección 12.15, podemos escribir

$$\xi = f(x) = a_0 + a_1 \cos kx + a_2 \cos 2kx + \dots + a_n \cos nkx + \dots \\ + b_1 \operatorname{sen} kx + b_2 \operatorname{sen} 2kx + \dots + b_n \operatorname{sen} nkx + \dots,$$

donde $k = 2\pi/\lambda$ juega el mismo papel que ω en la ec. (12.74). Los coeficientes a_n y b_n se obtienen en forma similar a la indicada en las ecs. (12.74), con x en lugar de t . Entonces, el movimiento ondulatorio descrito por $\xi = f(x - vt)$ puede expresarse como

$$\xi = f(x - vt) = a_0 + a_1 \cos k(x - vt) + a_2 \cos 2k(x - vt) \\ + \dots + a_n \cos nk(x - vt) + \dots \\ + b_1 \operatorname{sen} k(x - vt) + b_2 \operatorname{sen} 2k(x - vt) \\ + \dots + b_n \operatorname{sen} nk(x - vt) + \dots$$

o, ya que $\omega = kv$,

$$\xi = f(x - vt) = a_0 + a_1 \cos (kx - \omega t) + a_2 \cos 2(kx - \omega t) \\ + \dots + a_n \cos n(kx - \omega t) + \dots \\ + b_1 \operatorname{sen} (kx - \omega t) + b_2 \operatorname{sen} 2(kx - \omega t) \\ + \dots + b_n \operatorname{sen} n(kx - \omega t) + \dots,$$

lo cual indica que cualquier movimiento ondulatorio periódico se puede expresar como una superposición de movimientos ondulatorios armónicos de frecuencias ω , 2ω , 3ω , ..., $n\omega$, ... y longitudes de onda λ , $\lambda/2$, $\lambda/3$, ..., λ/n , ... Debido a este resultado es importante que comprendamos el movimiento ondulatorio armónico a fin de entender el movimiento ondulatorio en general.

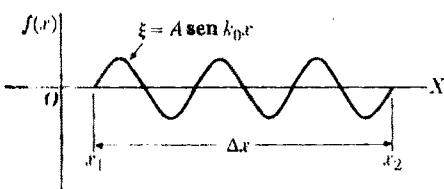


Fig. 18-8. Pulso armónico.

EJEMPLO 18.3. Una onda describida al tiempo $t = 0$ por la función $f(x)$ mostrada en la fig. 18-8, se expresa por $\xi = A \operatorname{sen} k_0 x$ en el intervalo $\Delta x = x_2 - x_1$ y por cero fuera de este intervalo. Este tipo de onda se llama *pulso o paquete de ondas*. Hacer el análisis de Fourier de esta onda.

Solución: Este problema es semejante al discutido en la sección 12-15 para la curva representada en la fig. 12-45; sólo es necesario reemplazar t por x , y ω_0 por k_0 . Esto significa que para obtener una onda del tipo ilustrado en la fig. 18-8, debemos su-

perponer muchas ondas con números de onda k que van desde $-\infty$ a $+\infty$, cada una asociada con una amplitud $A(k)$ semejante a la de la fig. 12-46 y también mostrada en la fig. 18-9. La amplitud $A(k)$ es apreciable solamente para valores de k en un intervalo Δk alrededor de k_0 igual a

$$\Delta k \sim 2\pi/\Delta x \quad \text{ó} \quad \Delta x \Delta k \sim 2\pi,$$

en analogía con la ec. (12.76). Esta relación indica que mientras más pequeña sea la región del espacio en el cual la onda se localiza, mayor es el intervalo de longitudes de onda requerido para representar el paquete de onda.

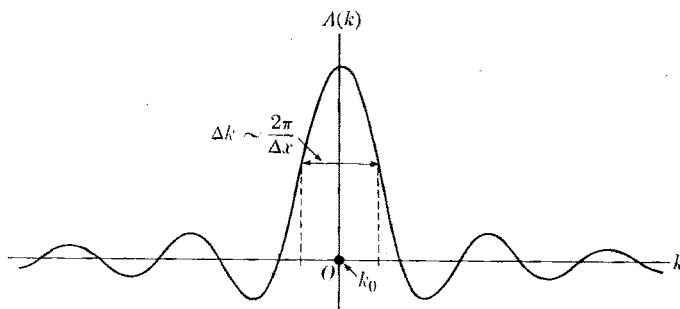


Fig. 18-9. Transformada de Fourier del pulso mostrado en la fig. 18-8.

18.4 Ecuación diferencial del movimiento ondulatorio

Como próximo paso, investiguemos cómo determinar cuándo un campo dado, en función del tiempo, se propaga como una onda sin distorsión. Como los campos asociados con cada proceso físico están gobernados por leyes dinámicas (características de cada proceso) que pueden expresarse en la forma de ecuaciones diferenciales, como se mostró en el caso del campo electromagnético, debemos explorar la posibilidad de encontrar una ecuación diferencial que sea aplicable a todo tipo de movimiento ondulatorio. Entonces, cada vez que reconozcamos que un campo particular, como resultado de sus propiedades físicas, satisface tal ecuación, podemos estar seguros que el mismo se propaga a través del espacio con velocidad definida y sin distorsión.* Recíprocamente, si experimentalmente observamos que un campo se propaga a través del espacio con una velocidad definida y sin distorsión, estamos en condiciones de describir tal campo por medio de un conjunto de ecuaciones compatibles con la ecuación de onda.

La ecuación que encontraremos muchas veces y que describe un movimiento ondulatorio que se propaga a una velocidad definida v y sin distorsión según las direcciones $+X$ ó $-X$ es

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}. \quad (18.11)$$

* Esta misma técnica se utilizó en el capítulo 12, donde descubrimos que un movimiento oscilatorio armónico simple sigue una ecuación del tipo $d^2x/dt^2 + \omega^2 x = 0$ y por consiguiente usamos esta ecuación para identificar varios tipos de movimiento armónico simple, una vez establecidas las leyes físicas del movimiento.

llamada *ecuación diferencial del movimiento ondulatorio*. La solución general de la ec. (18.11) tiene la forma de la ec. (18.1). Esto es

$$\xi(x, t) = f_1(x - vt) + f_2(x + vt). \quad (18.12)$$

De este modo la solución general de la ec. (18.11) se puede expresar como la superposición de dos movimientos ondulatorios que se propagan en la misma dirección pero en sentidos opuestos.¹¹ Desde luego, para una onda que se propaga en un solo sentido, aparecerá una sola de las dos funciones en la ec. (18.12). Sin embargo, cuando (por ejemplo) tenemos una onda incidente que se propaga según $+X$, y una onda reflejada que se propaga según $-X$, se debe usar la forma general de la ecuación (18.12). Para probar que una expresión de la forma de la ec. (18.12) es una solución de la ecuación de onda (18.11), debemos recordar algunos resultados matemáticos. Si tenemos una función $y = f(u)$, donde u es a su vez función de x , esto es, $u(x)$, entonces

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx},$$

llamada regla de derivación en cadena.* Por ejemplo, si $y = \operatorname{sen}(3x^2)$, tenemos $y = \operatorname{sen} u$, $u = 3x^2$, $dy/du = \cos u$ y $du/dx = 6x$, de modo que

$$dy/dx = (\cos u)(6x) = 6x \cos 3x^2.$$

Aplicaremos ahora la regla de derivación en cadena a $\xi = f(x \pm vt)$. En este caso hacemos $u = x \pm vt$, de modo que $\xi = f(u)$, y notando que hay dos variables x y t debemos usar derivadas parciales, $\partial u / \partial x = 1$, $\partial u / \partial t = \pm v$. Luego

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{d\xi}{du} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{d\xi}{du}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{d\xi}{du} \frac{\partial u}{\partial t} = \pm v \frac{d\xi}{du}.$$

Tomando ahora las derivadas segundas, tenemos

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{d}{du} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right) \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{d^2 \xi}{du^2},$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{d}{du} \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right) \frac{\partial u}{\partial t} = \pm v \frac{d^2 \xi}{du^2} (\pm v) = v^2 \frac{d^2 \xi}{du^2}.$$

Combinando ambos resultados para eliminar $d^2 \xi / du^2$, obtenemos la ec. (18.11), lo cual prueba que $\xi = f(x \pm vt)$ es una solución de la ecuación de onda, independientemente de la forma de la función f .¹¹ Como la ecuación de onda es lineal, la solución general es del tipo indicado en la ec. (18.12).

Podemos verificar, usando un ejemplo concreto, que la ecuación de onda (18.11) se satisface para una onda sinusoidal, $\xi = \xi_0 \operatorname{sen} k(x - vt)$. Tomando las deri-

* Ver *Cálculo infinitesimal y geometría analítica*, tercera edición, por G. B. Thomas. Aguilar, Madrid, 1964, Sección 2-5.

vadas parciales con respecto a x y t , tenemos

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = k\xi_0 \cos k(x - vt), \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = -k^2\xi_0 \sin k(x - vt);$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = -kv\xi_0 \cos k(x - vt), \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -k^2v^2\xi_0 \sin k(x - vt).$$

Por lo tanto $\partial^2 \xi / \partial t^2 = v^2 \partial^2 \xi / \partial x^2$, de acuerdo con la ec. (18.11).

A fin de comprender mejor las ideas fundamentales del movimiento ondulatorio, en este capítulo discutiremos ciertos tipos de ondas que son más o menos familiares a los estudiantes. El estudiante notará que en las ondas a discutirse en las secciones subsiguientes, la ec. (18.11) es el resultado de las leyes dinámicas del proceso, teniendo en cuenta ciertas aproximaciones tales como pequeña amplitud, o gran longitud de onda, etc. Por consiguiente, la teoría relacionada con la ec. (18.11) es aplicable sólo en estas aproximaciones.

18.5 Ondas elásticas en una barra

Si provocamos una perturbación en uno de los extremos de una barra, golpeándola por ejemplo con un martillo, la perturbación se propaga a lo largo de la barra y eventualmente se siente al otro extremo. Decimos que se ha propagado una onda elástica a lo largo de la barra. En esta sección, nuestro propósito es discutir detalladamente esta onda elástica y ver cómo está relacionada su velocidad de propagación con las propiedades físicas de la barra. Consideraremos una barra de sección transversal uniforme A , sujetada a una fuerza según su eje indicada por F .

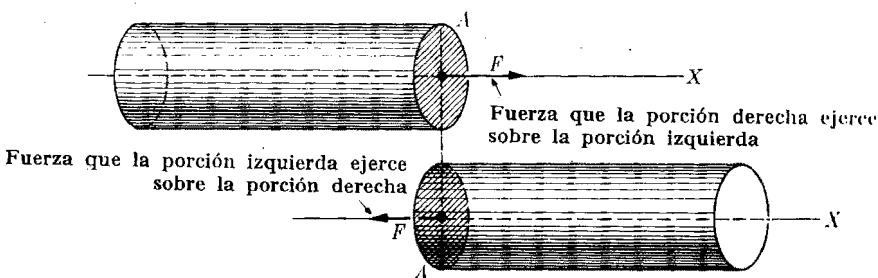


Fig. 18-10. Las fuerzas sobre cualquier sección transversal de una barra sometida a esfuerzo son iguales y opuestas.

La fuerza F no es necesariamente la misma en todas las secciones y puede variar a lo largo del eje de la barra. Sobre cada sección transversal actúan dos fuerzas iguales y opuestas (como se muestra en la fig. 18-10); una es la tensión sobre la parte izquierda debida a la porción derecha y la otra es la tensión sobre la parte derecha debida a la porción izquierda de la barra. El *esfuerzo normal o tensión* sobre una sección de la barra se define como la fuerza por unidad de área que se

ejerce perpendicularmente a la sección transversal en ambos sentidos. Entonces

$$\sigma = F/A. \quad (18.13)$$

La tensión normal se expresa en $N\ m^{-2}$.

Bajo la acción de tales fuerzas cada sección de la barra experimenta un desplazamiento ξ paralelo al eje. Si este desplazamiento es el mismo en todos los puntos de la barra, no se produce deformación, sino simplemente un desplazamiento rígido de la barra según su eje. Estamos interesados en el caso en el cual se produce deformación, de modo que haya una variación de ξ a lo largo de la barra, esto es, que ξ sea una función de x . Consideraremos dos secciones A y A' separadas la distancia dx en estado de equilibrio (fig. 18-11). Cuando las fuerzas se mani-

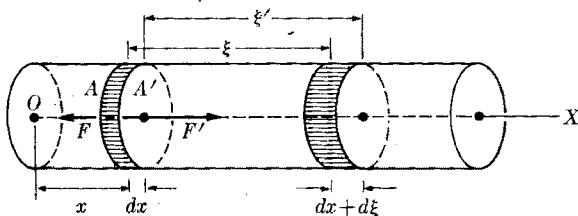


Fig. 18-11. Onda longitudinal en una barra.

fiestan, la sección A se desplaza la distancia ξ y la sección A' , la distancia ξ' . Luego, la separación entre A y A' en el estado de deformación es

$$dx + (\xi' - \xi) = dx + d\xi,$$

donde $d\xi = \xi' - \xi$. La deformación de la barra en aquella región ha sido por consiguiente $d\xi$. La deformación unitaria normal ϵ en la barra es la deformación por unidad de longitud a lo largo del eje de la barra. Como la deformación $d\xi$ corresponde a la longitud dx vemos que la deformación unitaria de la barra es

$$\epsilon = \partial \xi / \partial x. \quad (18.14)$$

Obsérvese que cuando no hay deformación, ξ es constante y $\epsilon = 0$, o sea que no hay deformación unitaria normal. Esta deformación unitaria, siendo el cociente de dos longitudes, es una cantidad adimensional.

Entre el esfuerzo normal σ y la deformación unitaria ϵ de la barra hay una relación llamada *ley de Hooke*, que establece que

dentro del límite de elasticidad del material, la tensión es esfuerzo proporcional a la deformación unitaria normal

o sea

$$\sigma = Y\epsilon, \quad (18.15)$$

donde Y , la constante de proporcionalidad, es el módulo de elasticidad de Young;

se expresa en N m^{-2} , ya que ϵ es un factor sin dimensiones. La ley de Hooke es una buena aproximación al comportamiento elástico de una sustancia siempre que las deformaciones sean pequeñas. Cuando las tensiones y deformaciones son grandes la ec. (18.15) no es válida y la descripción de la situación física se complica.

La tabla 18-1 da las constantes elásticas de ciertos materiales; ellas son: el módulo de Young Y , el módulo de elasticidad de volumen κ definido en la ec. (18.22) y el módulo de rigidez G definido en la ec. (18.31).

TABLA 18-1 Constantes elásticas (10^{11} N m^{-2})

Material	Y	κ	G
Aluminio	0,70	0,61	0,24
Cobre	1,25	1,31	0,46
Hierro	2,06	1,13	0,82
Plomo	0,16	0,33	0,054
Níquel	2,1	1,64	0,72
Acero	2,0	1,13	0,80

Introduciendo las ecs. (18.13) y (18.14) en la ec. (18.15) y despejando F , obtenemos

$$F = YA \frac{\partial \xi}{\partial x}. \quad (18.16)$$

En el caso de una barra o alambre en equilibrio con un extremo fijo en el punto O (fig. 18-12) y sujeto a una fuerza F aplicada en el otro extremo A , tenemos que la fuerza sobre cada sección debe ser la misma e igual a F . Entonces,

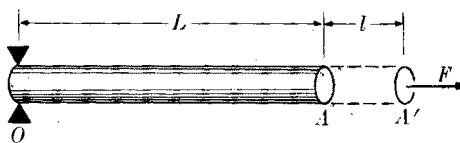


Figura 18-12

integrando la ec. (18.16) con F constante obtenemos la deformación en cada sección,

$$\int_0^x d\xi = \frac{F}{YA} \int_0^x dx \quad \text{o} \quad \xi = \frac{F}{YA} x.$$

En particular, la deformación l en el extremo libre A se obtiene haciendo $x = L$, de modo que $l = FL/YA$. Esta relación nos permite medir experimentalmente el módulo de Young.

Cuando la barra no está en equilibrio, la fuerza no es la misma en todas sus secciones, por lo que una de ellas de espesor dx estará sometida a una fuerza resultante distinta de cero. Por ejemplo, en la fig. 18-11, la cara A' de la sección de espesor dx está sometida a la fuerza F' hacia la derecha debida a la tensión

que ejerce la parte derecha de la barra, mientras el lado A está sujeto a la fuerza F hacia la izquierda, debida a la tensión de la parte izquierda de la barra. La fuerza neta sobre la sección es $F' - F = dF = (\partial F/\partial x) dx$ hacia la derecha. Si ρ es la densidad del material de la barra, la masa de la sección es de $dm = \rho dV = \rho A dx$, donde $A dx$ es el volumen de la sección. La aceleración de esta masa es $\partial^2 \xi / \partial t^2$. Por lo tanto, aplicando la relación dinámica fuerza = masa \times aceleración, podemos escribir la ecuación de movimiento de la sección en la forma

$$\frac{\partial F}{\partial x} dx = (\rho A dx) \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad \text{o} \quad \frac{\partial F}{\partial x} = \rho A \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}. \quad (18.17)$$

En este problema tenemos dos campos: uno es el desplazamiento ξ de cada sección de la barra, donde ξ es una función de la posición y del tiempo, y el otro es la fuerza F que se ejerce sobre cada sección, siendo F , también, función de la posición y del tiempo. Estos dos campos están relacionados por las ecs. (18.16) y (18.17) que se pueden denominar ecuaciones diferenciales del campo elástico de la barra deformada y que describen las condiciones físicas del problema. Estas ecuaciones son matemáticamente equivalentes a las ecuaciones de Maxwell para el electromagnetismo. Combinaremos ahora las ecs. (18.16) y (18.17). Tomando la derivada de la ec. (18.16) respecto a x tenemos

$$\frac{\partial F}{\partial x} = YA \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}.$$

Sustituyendo este resultado en la ec. (18.17) y cancelando el factor común A , tenemos

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{Y}{\rho} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}. \quad (18.18)$$

Esta es una ecuación similar a la ec. (18.11) y por lo tanto podemos concluir que el campo de deformación ξ se propaga a lo largo de la barra con una velocidad

$$v = \sqrt{Y/\rho}, \quad (18.19)$$

resultado que ha sido confirmado experimentalmente, midiendo independientemente las tres cantidades. Notemos que la ec. (18.19) es correcta dimensionalmente, ya que Y se expresa en $N m^{-2}$ y ρ en $kg m^{-3}$; luego, su cociente es $(N m^{-2})(kg m^{-3})^{-1} = m^2 s^{-2}$, que son las dimensiones del cuadrado de una velocidad. Utilizando la ec. (18.16) el estudiante puede verificar que el campo de fuerzas F satisface una ecuación similar,

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = \frac{Y}{\rho} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad (18.20)$$

indicando que el campo de fuerzas se propaga a lo largo de la barra con la misma velocidad que el campo de desplazamientos.

Es importante notar que la onda descrita por las ecs. (18.18) y (18.20) corresponde a las propiedades físicas deformación ξ y fuerza F , orientadas según la

dirección de propagación de la onda, o sea según el eje X. Este tipo de movimiento ondulatorio se llama *longitudinal*.

Debemos observar que las ecuaciones de campo (18.16) y (18.17) implican las ecuaciones de onda (18.18) y (18.20), pero la recíproca no es cierta ya que otras ecuaciones de campo pueden implicar también una ecuación de onda. Por consiguiente, las ecuaciones fundamentales del campo de nuestro problema son (18.16) y (18.17). Las ecuaciones de onda (18.18) y (18.20) sólo son consecuencias de las ecuaciones de campo.

EJEMPLO 18.4. Estimar la velocidad de propagación de las ondas elásticas longitudinales en una barra de acero.

Solución: Usando los valores de la tabla 18-1 y el valor $7,8 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ para la densidad del acero, tenemos, usando la ec. (18.19) que

$$v = \sqrt{\frac{Y}{\rho}} = \sqrt{\frac{2,0 \times 10^{11} \text{ N m}^{-2}}{7,8 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}}} = 5,06 \times 10^3 \text{ m s}^{-1}.$$

El valor experimental es $5,10 \times 10^3 \text{ m s}^{-1}$ a 0°C . Compárese con la velocidad del sonido en el aire, que es de 340 m s^{-1} .

EJEMPLO 18.5. Discutir las ondas longitudinales en un resorte.

Solución: Cuando se produce una perturbación en un resorte estirado y el desplazamiento experimentado por una sección del mismo es ξ , la fuerza en esa sección es $F = K(\partial\xi/\partial x)$, donde K es el módulo de elasticidad del resorte. Esta ecuación es la equivalente de la ec. (18.16) para una barra. El coeficiente K no debe confundirse con la constante elástica k introducida en la ec. (12.5). Para obtener la relación entre K y k observamos que si el resorte, de longitud L se estira lentamente hasta que su longitud aumenta en l , la fuerza F debe ser la misma en todos los puntos del resorte en equilibrio. De este modo $\partial\xi/\partial x = l/L$ y $F = (K/L)l$. La cantidad l es lo que hemos llamado x en la ec. (12.5), $F = kx$, y por consiguiente $k = K/L$ ó $K = kL$. Consideremos ahora una porción del resorte de longitud dx , de masa $m dx$, donde m es la masa por unidad de longitud. Razonando del mismo modo que para obtener la ec. (18.17), escribimos

$$m \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\partial F}{\partial x} = K \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \quad \text{ó} \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{K}{m} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2},$$

que tiene la forma de la ecuación de onda (18.11). Por lo tanto, la velocidad de propagación de la onda longitudinal a lo largo del resorte es

$$v = \sqrt{K/m} = \sqrt{kL/m}.$$

18.6 Ondas de presión en una columna de gas

A continuación consideraremos las ondas elásticas que se producen en un gas debido a las variaciones de presión. El sonido es el ejemplo más importante de este tipo de onda. Para simplificar, consideraremos que las ondas se propagan en un gas encerrado en un tubo o caño cilíndrico.

Hay una diferencia importante entre las ondas elásticas en un gas y las ondas elásticas en una barra. Los gases son muy compresibles y cuando se establecen

fluctuaciones de presión en un gas, la densidad del mismo experimenta las mismas fluctuaciones que la presión.

Sean p_0 y ρ_0 la presión y la densidad del gas en condiciones de equilibrio. En estas condiciones, p_0 y ρ_0 conservan el mismo valor en todo el volumen del gas, esto es, son independientes de x . Si la presión del gas se modifica, un volumen elemental tal como $A dx$ (fig. 18-13) se pone en movimiento debido a una fuerza neta no nula. En consecuencia, la sección A se desplaza la distancia ξ y la sección A' la distancia ξ' , de modo que el espesor del volumen elemental después de la deformación es $dx + (\xi' - \xi) = dx + d\xi$. Hasta aquí, todo parece idéntico al caso de la barra. Sin embargo, debido al cambio de volumen, la densidad

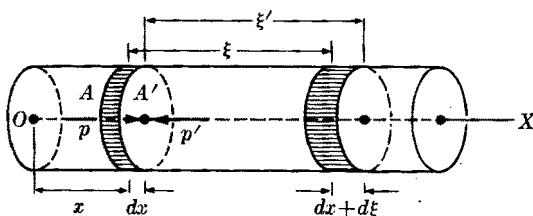


Fig. 18-13. Onda de presión en una columna de gas.

cambia porque el gas es más compresible. La masa del volumen elemental en equilibrio es $\rho_0 A dx$ y la masa del volumen perturbado es $\rho A(dx + d\xi)$, donde ρ es la densidad del gas perturbado. El principio de la conservación de la masa requiere que dichas masas sean iguales, es decir

$$\rho A(dx + d\xi) = \rho_0 A dx \quad \text{o} \quad \rho \left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial x}\right) = \rho_0.$$

Despejando ρ , obtenemos

$$\rho = \frac{\rho_0}{1 + \partial \xi / \partial x}.$$

Como en general $\partial \xi / \partial x$ es pequeño, podemos reemplazar $(1 + \partial \xi / \partial x)^{-1}$ por $1 - \partial \xi / \partial x$, usando el desarrollo del binomio (M. 28); así resulta que

$$\rho = \rho_0(1 - \partial \xi / \partial x) \quad \text{o} \quad \rho - \rho_0 = -\rho_0(\partial \xi / \partial x). \quad (18.21)$$

La presión p está relacionada con la densidad ρ por la ecuación de estado, que se puede escribir $p = f(\rho)$. Aplicando el desarrollo de Taylor (M. 31) a esta función, se tiene

$$p = p_0 + (\rho - \rho_0) \left(\frac{dp}{d\rho} \right)_0 + \frac{1}{2}(\rho - \rho_0)^2 \left(\frac{d^2 p}{d\rho^2} \right)_0 + \dots$$

Para variaciones de densidad relativamente pequeñas, podemos conservar úni-

camente los dos primeros términos y escribir [recordar la ec. (M. 32)]

$$p = p_0 + (\rho - \rho_0) \left(\frac{dp}{d\rho} \right)_0.$$

La cantidad

$$\kappa = \rho_0 \left(\frac{dp}{d\rho} \right)_0 \quad (18.22)$$

recibe el nombre de *módulo de elasticidad de volumen*. Se expresa en N m⁻², las mismas unidades que usamos para la presión. Entonces podemos escribir

$$p = p_0 + \kappa \left(\frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} \right). \quad (18.23)$$

Esta expresión corresponde a la ley de Hooke para los fluidos. Usando la ec. (18.21) para eliminar $\rho - \rho_0$, tenemos

$$p = p_0 - \kappa \frac{\partial \xi}{\partial x}. \quad (18.24)$$

Esta expresión relaciona la presión en cualquier punto de la columna de gas con la deformación en el mismo punto. [Para una barra elástica la ec. (18.24) es equivalente a la ec. (18.16).]

Necesitamos ahora la ecuación de movimiento del volumen elemental; la masa del mismo es $\rho_0 A dx$ y su aceleración es $\partial^2 \xi / \partial t^2$. El gas a la izquierda de nuestro elemento de volumen lo empuja hacia la derecha con una fuerza pA y el gas que está a la derecha lo empuja hacia la izquierda con una fuerza $p'A$. Por lo tanto, la fuerza resultante en la dirección $+X$ es $(p - p')A = -A dp$, ya que $dp = p' - p$. Entonces la ecuación de movimiento es

$$-A dp = (\rho_0 A dx) \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad \text{o} \quad \frac{\partial p}{\partial x} = -\rho_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}. \quad (18.25)$$

También en este problema tenemos dos campos, el campo de desplazamiento ξ y el campo de presión p . Las expresiones (18.24) y (18.25) son las ecuaciones que relacionan ambos campos. Estas ecuaciones pueden combinarse del siguiente modo. Derivando la ec. (18.24) con respecto a x , recordando que p_0 es constante en todo el gas, se obtiene

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\kappa \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2},$$

la cual, comparada con la ec. (18.25), nos indica que

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\kappa}{\rho_0} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}. \quad (18.26)$$

Una vez más obtenemos una ecuación similar a la ec. (18.11) y concluimos que el desplazamiento producido por la perturbación de la presión de un gas se propaga con la velocidad

$$v = \sqrt{\kappa/\rho_0}. \quad (18.27)$$

El estudiante deberá verificar la compatibilidad de las unidades en esta ecuación. La presión también obedece a una ecuación como la (18.26), lo cual el estudiante puede verificar combinando la ec. (18.24) con la ec. (18.25). Dicha ecuación es

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{\kappa}{\rho_0} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}.$$

Esta es la razón por la cual a las ondas elásticas en un gas se les llama *ondas de presión*. El sonido es simplemente una onda de presión en el aire. Una explosión, o sea un rápido aumento local de presión, produce una fuerte onda de presión, pero en este caso las variaciones de densidad pueden ser tan grandes que las aproximaciones hechas en nuestra teoría dejan de ser válidas, resultando una ecuación más complicada.

Análogamente, el estudiante, combinando las ecs. (18.21) y (18.26), puede verificar que la densidad del gas obedece a una ecuación de la misma forma, o sea

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = \frac{\kappa}{\rho_0} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}.$$

Por consiguiente, al referirnos a un gas, podemos hablar de una onda de desplazamiento, una onda de presión o una onda de densidad. Las ondas de desplazamiento se asemejan a la imagen gráfica que tenemos de las ondas superficiales en un líquido (es decir, el movimiento de materia en conjunto). Las ondas de presión y las de densidad, aunque no corresponden a tal imagen gráfica también describen una situación física que se propaga a través del gas.

El movimiento ondulatorio en los gases es un proceso adiabático, término que se usa esencialmente en el sentido de que no hay intercambio de energía calórica entre los elementos de volumen del gas. En condiciones adiabáticas $p = C\rho^\gamma$, donde γ es una cantidad característica de cada gas. Para muchos gases diatómicos, su valor es aproximadamente 1,4. Entonces $dp/d\rho = \gamma C\rho^{\gamma-1}$, y $K = \rho_0(dp/d\rho)_0 = \gamma C\rho_0^\gamma = \gamma p_0$. Entonces, quitando el subíndice 0 y sustituyendo en la ec. (18.27), encontramos que la velocidad del sonido en un gas es

$$v = \sqrt{\gamma p / \rho}. \quad (18.28)$$

La onda asociada con el campo ξ es también una onda longitudinal, ya que el desplazamiento es paralelo a la dirección de propagación. La presión p , sin embargo, no es un vector y no tiene dirección asociada. La dirección asociada es la de la fuerza producida por la diferencia de presión y es normal a la superficie. Por consiguiente, el movimiento ondulatorio correspondiente al campo de presión es una onda escalar. La onda correspondiente a la densidad ρ es también escalar.

EJEMPLO 18.6. Obtener la relación entre la velocidad de una onda de presión en un gas y la temperatura del gas.

Solución: Como probamos en el problema 9.46, la relación entre la presión y el volumen de un gas es $pV = nRT$. Pero como $\rho = m/V$, tenemos que $p/\rho = nRT/m = RT/M$, donde $M = m/n$ es la masa de un mol del gas, expresada en kg. Por lo tanto, la razón p/ρ es proporcional a la temperatura, y podemos escribir

$$v = \sqrt{\gamma p/\rho} = \sqrt{\gamma RT/M} = \alpha \sqrt{T},$$

donde $\alpha = \sqrt{\gamma R/M}$. Sabemos por medidas experimentales que a $T = 273,15^\circ\text{K}$ (0°C), la velocidad del sonido en el aire es $331,45 \text{ m s}^{-1}$. Luego el coeficiente α tiene el valor 20,055, y la velocidad del sonido en el aire a cualquier temperatura (medida

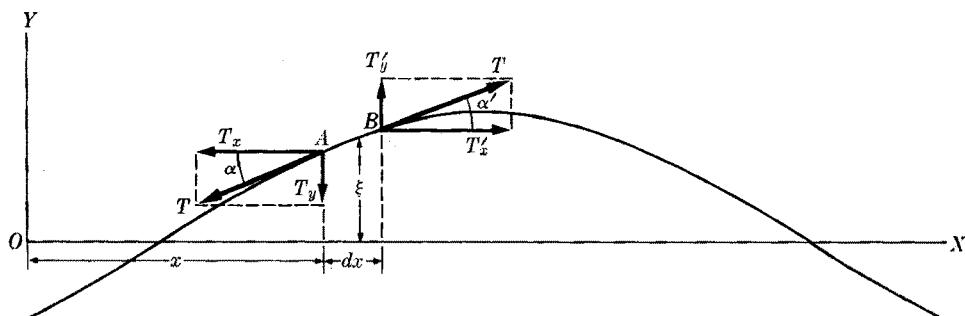


Fig. 18-14. Fuerzas que se ejercen sobre una sección de una cuerda desplazada transversalmente.

en K) es $v = 20,055 T \text{ m s}^{-1}$, resultado en concordancia con los valores experimentales para grandes intervalos de temperatura.

EJEMPLO 18.7. Obtener la relación entre las amplitudes de las ondas de desplazamiento y las de presión en una columna de gas.

Solución: Supongamos que las ondas de desplazamiento sean armónicas y estén expresadas por $\xi = \xi_0 \operatorname{sen}(kx - \omega t)$. Sustituyendo en la ec. (18.24), encontramos

$$p - p_0 = -k \frac{\partial \xi}{\partial x} = -k k \xi_0 \cos(kx - \omega t).$$

De este modo la onda de presión oscila en torno a su valor promedio con una amplitud \mathcal{P}_0 dada por $\mathcal{P}_0 = k k \xi_0$. Usando la ec. (18.27) para eliminar k , escribimos

$$\mathcal{P}_0 = v^2 \rho_0 k \xi_0.$$

Podemos obtener una expresión equivalente usando la relación dada en la ec. (18.6) $k = \omega/v$, entonces

$$\mathcal{P}_0 = v \rho_0 \omega \xi_0 = 2\pi v \rho_0 v \xi_0.$$

Estas relaciones son extremadamente útiles en cálculos acústicos. Por ejemplo, a la frecuencia de 400 Hz, el sonido más débil que se puede oír corresponde a una amplitud de presión de alrededor de $8 \times 10^{-6} \text{ N m}^{-2}$. La correspondiente amplitud de desplazamiento, tomando $1,29 \text{ kg m}^{-3}$ para la densidad del aire y 345 m s^{-1}

para la velocidad del sonido, es

$$\xi_0 = \frac{\rho_0}{2\pi v \rho_0 v} = 7,15 \times 10^{-11} \text{ m.}$$

Esta amplitud es del orden de las dimensiones moleculares.

18.7 Ondas transversales en una cuerda

Como problema siguiente consideraremos el caso de una cuerda sometida a una tensión T . En condiciones de equilibrio la cuerda está en línea recta. Desplazemos la cuerda perpendicularmente a su longitud, en una pequeña cantidad, como muestra la fig. 18-14. Entonces una porción AB de la cuerda de longitud dx se desplaza de su posición de equilibrio una distancia ξ . En cada extremo actúa una fuerza tangencial T ; en el extremo B esta fuerza es producida por la tensión de la cuerda a la derecha y en el extremo A por la tensión de la cuerda a la izquierda. Debido a la curvatura de la cuerda, estas dos fuerzas no son directamente opuestas. La componente vertical de cada fuerza es $T'_y = T \operatorname{sen} \alpha'$, $T_y = -T \operatorname{sen} \alpha$. La fuerza resultante sobre la porción AB de la cuerda es

$$F_y = T(\operatorname{sen} \alpha' - \operatorname{sen} \alpha).$$

Si la curvatura de la cuerda no es muy grande, los ángulos α y α' son pequeños y sus senos se pueden reemplazar por sus tangentes. De modo que la fuerza hacia arriba es

$$F_y = T(\operatorname{tg} \alpha' - \operatorname{tg} \alpha) = T d(\operatorname{tg} \alpha) = T \frac{\partial}{\partial x} (\operatorname{tg} \alpha) dx,$$

donde se usan derivadas parciales porque $\operatorname{tg} \alpha$ depende de x y de t . Como $\operatorname{tg} \alpha$, que es la pendiente de la curva formada por la cuerda, es igual a $\partial \xi / \partial x$, se tiene

$$F_y = T \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right) dx = T \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} dx.$$

Esta fuerza debe ser igual a la masa de la porción de cuerda AB multiplicada por su aceleración hacia arriba $\partial^2 \xi / \partial t^2$. Si m es la densidad lineal de la cuerda, o masa por unidad de longitud, expresada en kg m^{-1} , la masa del segmento AB es $m dx$; la ecuación de movimiento de este segmento de cuerda (usando la relación fuerza = masa \times aceleración) es, entonces,

$$(m dx) \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} dx \quad \text{o} \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{T}{m} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}. \quad (18.29)$$

Una vez más obtenemos la ec. (18.11), lo que verifica que una perturbación transversal en una cuerda se propaga a lo largo de la misma con una velocidad

$$v = \sqrt{T/m} \quad (18.30)$$

siempre que la amplitud sea pequeña. El estudiante puede verificar la compatibilidad de las unidades en esta ecuación.

Este ejemplo difiere de los anteriores en dos aspectos importantes.¹¹ Uno es que tenemos un solo campo, el desplazamiento ξ , y la ecuación de onda (18.29) es un resultado directo de la ecuación de movimiento. El segundo, más importante aún, es que el movimiento ondulatorio es transversal. Esto es, la propiedad física, el desplazamiento ξ , es perpendicular a la dirección de propagación de la onda, que es según el eje X. Pero hay muchas direcciones para las cuales el desplazamiento es perpendicular al eje X.¹² Si escogemos dos direcciones perpendiculares

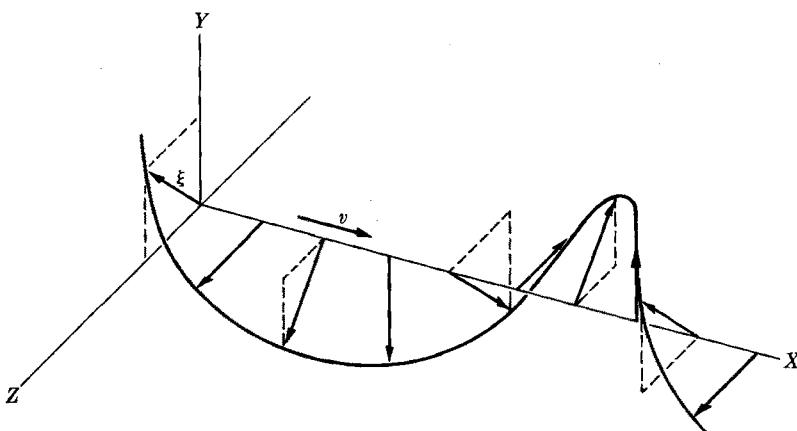


Fig. 18-15. Onda transversal no polarizada, en una cuerda.

entre sí, Y y Z como referencia, podemos expresar el desplazamiento transversal ξ , considerado como vector, en función de sus componentes según los ejes Y y Z. Mientras la perturbación se propaga, la dirección de ξ puede cambiar de un punto a otro dando como resultado que la cuerda se retuerce (fig. 18-15). Sin embargo, si los desplazamientos son paralelos, por ejemplo, al eje Y, la cuerda estará siempre en el plano XY, y decimos que el movimiento ondulatorio está *polarizado linealmente* (fig. 18-16). Es obvio que una onda transversal se puede siempre considerar como la combinación de dos ondas polarizadas linealmente en direcciones perpendiculares. Si ξ tiene una longitud constante pero cambia de dirección, de modo que la cuerda yazca sobre una superficie cilíndrica (fig. 18-17), la onda está *circularmente polarizada*. En este caso cada porción de cuerda se mueve en un círculo alrededor del eje X. La polarización de las ondas transversales es un tema muy importante, que discutiremos detalladamente en el capítulo 20.

Debe observarse que al escribir la ec. (18.29) hemos tomado en consideración solamente el movimiento transversal de la cuerda. Sin embargo, podemos verificiar fácilmente que no hemos ignorado ningún movimiento a lo largo de la cuerda. La fuerza resultante paralela al eje X es

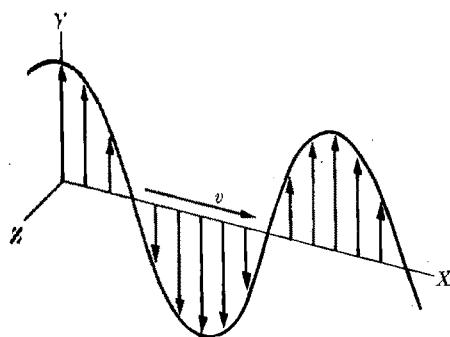


Fig. 18-16. Onda transversal polarizada linealmente, en una cuerda.

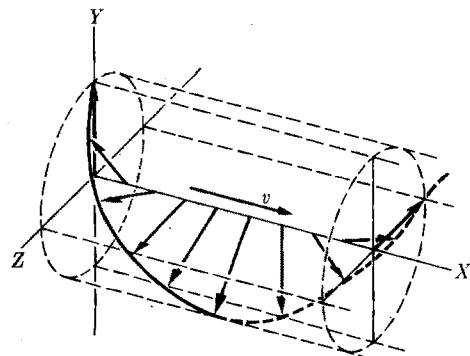


Fig. 18-17. Onda transversal polarizada circularmente, en una cuerda.

Pero cuando el ángulo es muy pequeño, el coseño es, con mucha aproximación, igual a uno. Por consiguiente, hasta aproximaciones de primer orden, $\cos \alpha' \approx \cos \alpha$ y $F_x = 0$, de modo que la fuerza neta paralela al eje X es cero.

EJEMPLO 18.8. Ondas elásticas transversales en una barra.

Solución: En la sección 18.5 estudiamos las ondas elásticas longitudinales en una barra. Analizaremos ahora las ondas elásticas transversales. Consideremos una barra que en su estado sin distorsión está representada por la parte punteada de la fig. 18-18. Si en un instante dado se hace vibrar la barra golpeándola transversalmente, adopta la forma de la línea curva y podemos suponer que cada sección de la misma se mueve hacia arriba y hacia abajo pero no horizontalmente. Sea ξ el desplazamiento transversal de una sección dx en un instante dado. Este desplazamiento debe ser una función de la posición, porque, si fuera constante, correspon-

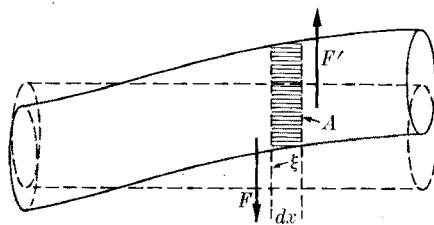


Fig. 18-18. Onda cortante o de cizallamiento en una barra.

dería a un desplazamiento paralelo de la barra. La cantidad $\gamma = \partial\xi/\partial x$ que es la variación de desplazamiento transversal por unidad de longitud, recibe el nombre de *deformación transversal unitaria*. Como resultado de la deformación, cada sección de espesor dx está sometida a dos fuerzas de sentido contrario F y F' , tangentes a la superficie (comparar con la situación de la fig. 18-11) ejercidas por las porciones de la barra a cada lado de la sección transversal. La fuerza tangencial por unidad de área, $\beta = F/A$, se denomina *esfuerzo tangencial o cortante*. También aquí, como en la ec. (18.15) que relaciona el esfuerzo normal con la deformación normal, hay una relación similar a la ley de Hooke entre el esfuerzo cortante y la defor-

mación correspondiente; esto es, $\delta = G\gamma$, donde G es un coeficiente característico del material, llamado *módulo de torsión*. Por consiguiente,

$$F = AG \frac{\partial \xi}{\partial x}. \quad (18.31)$$

La fuerza resultante sobre la sección es $F' - F = dF = (\partial F / \partial x) dx$. Por otra parte, si ρ es la densidad del material, la masa de la sección es $\rho A dx$, y la ecuación de movimiento en dirección transversal es

$$\frac{\partial F}{\partial x} dx = (\rho A dx) \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad \text{o} \quad \frac{\partial F}{\partial x} = \rho A \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}. \quad (18.32)$$

Tomando la derivada respecto de x en la ec. (18.31) tenemos

$$\frac{\partial F}{\partial x} = AG \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2},$$

que sustituida en la ec. (18.32), da (después de cancelar el factor común A)

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{G}{\rho} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}. \quad (18.33)$$

De nuevo obtenemos la ecuación diferencial (18.11) indicando que la deformación transversal se propaga a lo largo de la barra con una velocidad dada por

$$v = \sqrt{G/\rho}. \quad (18.34)$$

Más propiamente, la onda podría llamarse *onda de corte*. Otro ejemplo de este tipo de onda lo constituyen *las ondas de torsión*. Supongamos que en el extremo libre de una varilla fija en el otro extremo, aplicamos un torque variable. Esto

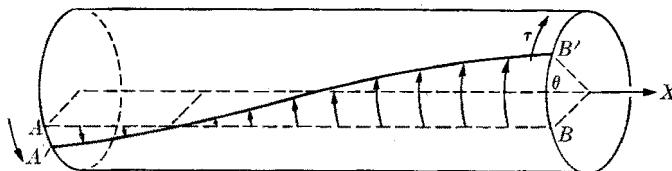


Fig. 18-19. Onda de torsión en una barra.

produce una torsión de la varilla (fig. 18-19). Si el torque es función del tiempo, el ángulo de torsión cambia con el tiempo, dando como resultado una onda de torsión que se propaga a lo largo de la varilla. Un análisis matemático del problema muestra que, independientemente de la forma de la sección transversal de la varilla, la velocidad de propagación de la onda de torsión se expresa por la ec. (18.34). No es sorprendente que la onda transversal y la onda de torsión en una varilla se propaguen con la misma velocidad, ya que ambos procesos son debidos, esencialmente, a los fenómenos que ocurren en el interior del material de que está hecha la varilla. Otro aspecto interesante de las ondas de torsión es que no corresponden a desplazamientos paralelos o perpendiculares al eje de la varilla, sino a rotaciones alrededor del eje sin cambio en la forma. Esto ayudará al estudiante a comprender la gran variedad de fenómenos involucrados en las ondas elásticas. Todos son procesos con una dinámica interna diferente, pero que, con las aproximaciones usadas, son descritos matemáticamente por el mismo tipo de ecuación, esto es, la ec. (18.11).

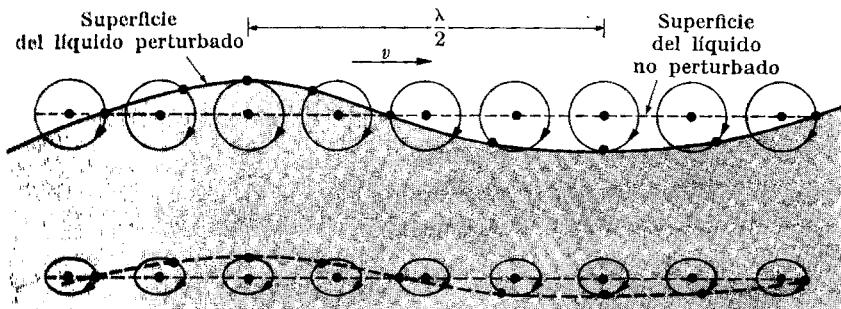


Fig. 18-20. Desplazamiento de las moléculas como consecuencia de una onda superficial en un líquido.

18.8 Ondas superficiales en un líquido

Como último ejemplo de movimiento ondulatorio en una dirección, consideraremos ahora las ondas en la superficie de un líquido. Estas son las ondas más comunes; son las que observamos en los océanos y en los lagos, o simplemente, las que se producen en un pozo cuando cae una piedra en él. El aspecto matemático, sin embargo, es más complicado que en los ejemplos anteriores y por lo tanto lo omitiremos. En su lugar, presentaremos en esta sección una discusión descriptiva, dejando una discusión matemática simplificada para el ejemplo 18.10.

La superficie de un líquido en equilibrio es plana y horizontal. Una perturbación de la superficie produce un desplazamiento de todas las moléculas situadas inmediatamente debajo de la superficie (fig. 18-20). Cada volumen elemental de líquido describe una trayectoria cerrada. La amplitud de los desplazamientos vertical y horizontal de un elemento de volumen de un fluido varía, en general, con la profundidad. Desde luego, las moléculas del fondo no experimentan desplazamiento vertical, porque no pueden separarse del mismo. En la superficie del líquido entran en juego ciertas fuerzas además de la fuerza debida a la presión atmosférica. Una de ellas es la debida a la tensión superficial del líquido, que da lugar a una fuerza hacia arriba sobre un elemento de superficie, similar a la que se encuentra en el caso de una cuerda. Otra fuerza es el peso del líquido situado por encima del nivel de equilibrio. La ecuación resultante para el desplazamiento de la superficie no es exactamente del tipo (18.11), sino ligeramente más complicada. Sin embargo, es satisfecha por ondas armónicas de longitud de onda λ y velocidad de propagación dada por

$$v = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi T}{\rho\lambda}}, \quad (18.35)$$

donde ρ es la densidad del líquido, T la tensión superficial y g la aceleración de gravedad. Esta ecuación es válida para profundidades no muy grandes en comparación con la longitud de onda λ . En caso contrario, la expresión resultante es diferente (ver ejemplo 18.9).

El aspecto más interesante de la ec. (18.35) es que *la velocidad de propagación depende de la longitud de onda*, una situación no encontrada previamente. Como la frecuencia está relacionada con la longitud de onda y con la velocidad de propagación a través de $v = \nu/\lambda$, concluimos que *la velocidad de propagación depende de la frecuencia*. Supongamos, por ejemplo, que λ es suficientemente grande como para que el segundo término de la ec. (18.35) sea despreciable. Entonces tenemos

$$v = \sqrt{g\lambda/2\pi}. \quad (18.36)$$

Las ondas en este caso son llamadas *ondas gravitacionales*. Con esta aproximación la velocidad de propagación es independiente de la naturaleza del líquido, ya que ningún factor referente al líquido (tal como su densidad o su tensión superficial) aparece en la ec. (18.36). Vemos que, en este caso, la velocidad de propagación es proporcional a la raíz cuadrada de la longitud de onda, y que a mayor longitud de onda, mayor rapidez de propagación. Por esta razón un viento fuerte y continuado produce ondas de mayor longitud de onda que una ráfaga repentina e irregular.

Cuando la longitud de onda es muy pequeña, el término que predomina es el segundo en la ec. (18.35) y entonces la velocidad de propagación es

$$v = \sqrt{2\pi T/\rho\lambda}. \quad (18.37)$$

Estas ondas se llaman *rizado* u *ondas capilares*; son las que se observan cuando sopla una brisa, o cuando el recipiente que contiene un líquido se somete a vibraciones de alta frecuencia y pequeña amplitud. En este caso, a mayor longitud de onda, menor velocidad de propagación.

Cuando la velocidad de propagación de un movimiento ondulatorio depende de la longitud de onda o de la frecuencia, decimos que hay *dispersión*. Si un movimiento ondulatorio resultante de la superposición de varias ondas armónicas de diferentes frecuencias penetra en un medio *dispersivo*, la onda se distorsiona porque cada una de sus ondas componentes se propaga con diferente velocidad. La dispersión es un fenómeno importante que se presenta en varios tipos de propagación de ondas. En particular, aparece en la propagación de las ondas electromagnéticas a través de la materia, como veremos en el próximo capítulo.

EJEMPLO 18.9. La expresión general para la velocidad de propagación de las ondas superficiales en un líquido es

$$v = \sqrt{\left(\frac{g\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi T}{\rho\lambda}\right) \operatorname{tgh} \frac{2\pi h}{\lambda}}, \quad (18.38)$$

donde h es la profundidad del líquido. Hallar los valores límites de esta expresión según que h sea muy grande o muy pequeña con respecto a λ .

Solución: Cuando la profundidad h es muy grande comparada con la longitud de onda (esto es, la cantidad $2\pi h/\lambda$ es grande comparada con la unidad), el valor de la tangente hiperbólica es cercano a uno y por lo tanto, el último factor de la ec. (18.38) se puede reemplazar por la unidad sin mucho error. Con esta aproximación la ec. (18.38) se transforma en la ec. (18.35).

Por otra parte, cuando la profundidad h es muy pequeña comparada con la longitud de onda λ , la cantidad $2\pi h/\lambda$ es muy pequeña comparada con la unidad, y usando la aproximación $\tgh x \approx x$ que es válida cuando x es muy pequeño, podemos reemplazar el último factor en la ec. (18.38) por $2\pi h/\lambda$. Despreciando también el término $2\pi T/\rho\lambda$, ya que hemos supuesto una longitud de onda relativamente grande, tenemos

$$v = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} \cdot \frac{2\pi h}{\lambda}} = \sqrt{gh}. \quad (18.39)$$

En estas circunstancias la velocidad de propagación es independiente de la longitud de onda.

EJEMPLO 18.10. Obtener de un modo directo la ecuación para las ondas superficiales en un líquido cuando la longitud de onda es muy grande y la amplitud es muy pequeña comparada con la profundidad.

Solución: Consideremos un líquido en un canal de profundidad h y ancho L . Si perturbamos la superficie del líquido con ondas de pequeña amplitud y gran longitud de onda (comparada con h), una sección vertical particular de líquido de anchura dx experimenta desplazamientos en las direcciones vertical y horizontal.

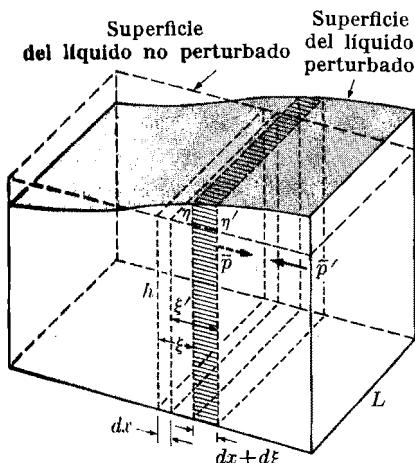


Figura 18-21

A consecuencia de estos desplazamientos el ancho de la sección varía desde dx hasta $dx + d\xi$ (fig. 18-21) y su altura desde h hasta $h + \eta$. Suponiendo que el líquido es incompresible, el volumen de la sección debe permanecer constante. Por lo tanto, debemos tener

$$\begin{aligned} Lh dx &= L(h + \eta)(dx + d\xi) \\ &= L(h dx + \eta dx + h d\xi + \eta d\xi). \end{aligned}$$

Considerando que η es muy pequeña comparada con h y que $d\xi$ es muy pequeño comparado con dx , podemos despreciar el último término, $\eta d\xi$, y escribir

$$\eta dx + h d\xi = 0 \quad \text{o} \quad \eta = -h \frac{\partial \xi}{\partial x}, \quad (18.40)$$

que relaciona los desplazamientos vertical y horizontal de la superficie para un líquido incompresible.

Debido a que el nivel perturbado no es horizontal, la presión media a cada lado de la sección fluida es diferente, como se muestra en la figura. Si $A = hL$ es el área de la sección transversal del canal, la fuerza neta hacia la derecha de la sección es

$$\bar{p}A - p'A = -(\bar{p}' - \bar{p})A = -A d\bar{p}.$$

Luego la ecuación del movimiento horizontal de la sección es

$$(\rho A dx) \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -A d\bar{p} \quad \text{o} \quad \rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\frac{\partial p}{\partial x}.$$

Pero usando la ec. (9.69), esto es, $p = \rho g z$, la diferencia de presión es

$$dp = \rho g (\eta' - \eta) = \rho g \frac{\partial \eta}{\partial x} dx,$$

de modo que $\partial \bar{p} / \partial x = \rho g \partial \eta / \partial x$, y la ecuación anterior se convierte en

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x}.$$

De la ec. (18.40) obtenemos, derivando, que

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = -h \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}.$$

Por consiguiente, eliminando $\partial \eta / \partial x$ entre estas dos ecuaciones, obtenemos finalmente

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = gh \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}.$$

Esta es, otra vez, la ec. (18.11) correspondiente a ondas que se propagan con velocidad $v = \sqrt{gh}$, en concordancia con el resultado obtenido en la ec. (18.39) bajo circunstancias similares. Debido a la relación (18.40), el desplazamiento vertical de la superficie satisface una ecuación semejante, o sea,

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = gh \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}.$$

18.9 ¿Qué se propaga en un movimiento ondulatorio?

Es muy importante comprender claramente qué es lo que se propaga como onda en un movimiento ondulatorio. La respuesta general es: lo que se propaga es una condición física generada en algún lugar y que, como consecuencia de la naturaleza del fenómeno, puede ser transmitida a otras regiones. Como esta explicación es algo abstracta, trataremos de formularla en términos más concretos.

Consideremos las diferentes clases de ondas discutidas en las secciones anteriores. Todas ellas corresponden a ciertos tipos de movimiento de átomos o moléculas del medio a través del cual la onda se propaga, pero los átomos, en promedio, permanecen en sus posiciones de equilibrio (fig. 18-22). Entonces, lo que se propaga, no es la materia sino su estado de movimiento. Es una condición dinámica que se transmite de una región a otra. Pero como estamos acostumbrados a describir las condiciones dinámicas usando los conceptos de momentum y energía, podemos decir:

en un movimiento ondulatorio se transmite o propaga momentum y energía.

Observemos, por ejemplo, el caso de las ondas elásticas longitudinales que se propagan a lo largo de una barra. En una sección transversal particular que se desplaza con velocidad $\partial \xi / \partial t$ (fig. 18-10), el lado derecho de la barra tira del lado izquierdo con una fuerza F y el lado izquierdo tira del lado derecho con una fuerza $-F$. Por lo tanto, la potencia (trabajo por unidad de tiempo) que el lado izquierdo transmite al lado derecho de la sección considerada es

$$\frac{\partial W}{\partial t} = (-F) \frac{\partial \xi}{\partial t}.$$

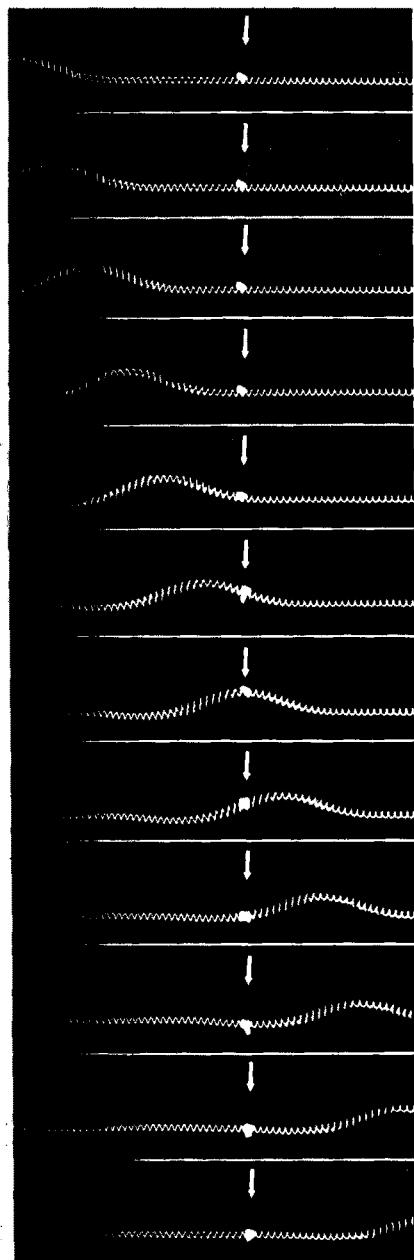


Fig. 18-22. Propagación de un pulso en un resorte. Las secciones del resorte se mueven hacia arriba y hacia abajo a medida que el pulso avanza desde la izquierda hacia la derecha.

Por lo tanto, cuando la perturbación pasa de una sección transversal a otra, esta potencia se transmite. Si la onda se propaga de izquierda a derecha, debe suministrarse energía al extremo izquierdo de la barra. Si se suministra energía durante un corto intervalo de tiempo, se produce una perturbación de extensión limitada o pulso. Si queremos que se produzca un tren continuo de ondas, debe suministrarse energía en forma continua al extremo izquierdo.

Para analizar el problema más detalladamente, consideremos el caso de una onda elástica sinusoidal $\xi = \xi_0 \operatorname{sen}(kx - \omega t)$. Tomando las derivadas apropiadas encontramos que $\partial \xi / \partial t = -\omega \xi_0 \cos(kx - \omega t)$ y $F = YA \partial \xi / \partial x = YA k \xi_0 \cos(kx - \omega t)$. Entonces, usando las relaciones $\omega = kv$ y $v = \sqrt{Y/\rho}$, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial t} &= YA \omega k \xi_0^2 \cos^2(kx - \omega t) \\ &= (\rho v^2) A (\omega^2/v) \xi_0^2 \cos^2(kx - \omega t) \\ &= v A [\rho \omega^2 \xi_0^2 \cos^2(kx - \omega t)]. \end{aligned}$$

La presencia del factor $\cos^2(kx - \omega t)$ nos asegura que $\partial W / \partial t$ es siempre positiva, aunque variable. Como $\partial W / \partial t$ depende de $kx - \omega t$, también satisface la ecuación de onda y corresponde a una *onda de energía*. La potencia media es

$$\left(\overline{\frac{\partial W}{\partial t}} \right) = v A \{ \rho \omega^2 \xi_0^2 \overline{\cos^2(kx - \omega t)} \}.$$

Pero $\cos^2(kx - \omega t) = \frac{1}{2}$, por lo que

$$\left(\overline{\frac{\partial W}{\partial t}} \right) = v A \left(\frac{1}{2} \rho \omega^2 \xi_0^2 \right). \quad (18.41)$$

Recordando ahora la ec. (12.11), que da la energía total de un oscilador en la forma $\frac{1}{2}m\omega^2A^2$, y observando que la amplitud A se está designando ahora con ξ_0 , y que en lugar de la masa m tenemos la densidad ρ , vemos que

$$E = \frac{1}{2}\rho\omega^2\xi_0^2 \quad (18.42)$$

es la energía por unidad de volumen o la densidad de energía en la barra debida a las oscilaciones producidas por el movimiento ondulatorio. Sustituyendo la ec. (18.42) en la ec. (18.41) podemos escribir

$$\left(\frac{\partial W}{\partial t} \right) = vAE. \quad (18.43)$$

Como v es la velocidad de propagación, tenemos que vE es el flujo de energía por unidad de área y por unidad de tiempo. Multiplicando esta cantidad por A , tenemos la energía por unidad de tiempo que fluye a través de la sección transversal de la barra. Así concluimos que podemos interpretar la ec. (18.43) como la energía media que fluye a lo largo de la barra como consecuencia del movimiento ondulatorio.

El promedio de flujo de energía por unidad de área y de tiempo, expresado en W m^{-2} , es

$$I = \frac{1}{A} \left(\frac{\partial W}{\partial t} \right) = vE, \quad (18.44)$$

cantidad que recibe el nombre de *intensidad* de la onda. El estudiante debe verificar que resultados similares valen para las ondas de presión en un gas y para las ondas transversales en una cuerda.

EJEMPLO 18.11. Expresar la intensidad de las ondas en una columna de gas (estudiadas en la sección 18.6) en función de la amplitud de la onda de presión.

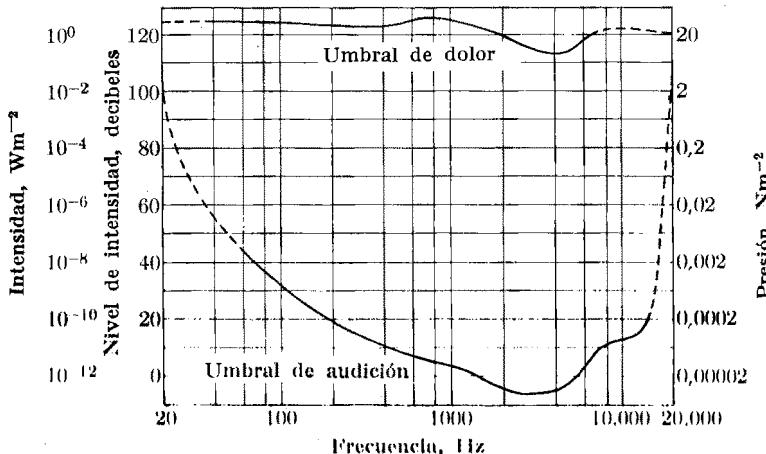


Fig. 18-28. Intervalo medio de audífono para el oído humano.

Solución: Del ejemplo 18.7, deducimos que las amplitudes de las ondas de presión y de desplazamiento están relacionadas por $\mathcal{P}_0 = 2\pi\nu\rho_0v^2\xi_0$. Por consiguiente, la densidad de energía de la onda es

$$E = \frac{1}{2}\rho_0\omega^2\xi_0^2 = 2\pi^2\rho_0v^2\xi_0^2 = \mathcal{P}_0^2/2v^2\rho_0$$

y la intensidad de la onda es, de acuerdo con la ec. (18.44),

$$I = \frac{\mathcal{P}_0^2}{2v\rho_0}.$$

La sensibilidad del oído humano es tal que para cada frecuencia hay una intensidad mínima o *umbral de audición*, por debajo de la cual el sonido no es audible y una intensidad máxima o *umbral de dolor*, por encima del cual el sonido produce molestia o dolor. Esto está ilustrado para cada frecuencia por las dos curvas de la fig. 18-23, la cual también indica las amplitudes de intensidad y presión. Nótese que la intensidad también se expresa con otra unidad llamada *decibel*. El *nivel de intensidad* de un sonido (o de cualquier movimiento ondulatorio) se indica con *B* y se expresa en decibeles (abreviado db), según la definición

$$B = 10 \log \frac{I}{I_0},$$

Donde I_0 es una intensidad de referencia. Para el caso del sonido en el aire el nivel de referencia, tomado arbitrariamente, es $10^{-12} \text{ W m}^{-2}$. Por ejemplo, para la amplitud de presión dada en el ejemplo 18.7, al sonido más débil que pueda oírse a 400 Hz, le corresponde una intensidad de $7.2 \times 10^{-12} \text{ W m}^{-2}$ y un nivel de intensidad de 8,57 db.

18.10 Ondas en dos y tres dimensiones

Aunque $\xi = f(x - vt)$ representa un movimiento ondulatorio que se propaga según el eje +X, no tenemos necesariamente que interpretarla como significando una onda concentrada sobre ese eje. Si la perturbación física descrita por ξ se extiende sobre todo el espacio, tenemos que a un tiempo dado t , la función $\xi = f(x - vt)$ toma el mismo valor en todos los puntos de abscisa x . Pero

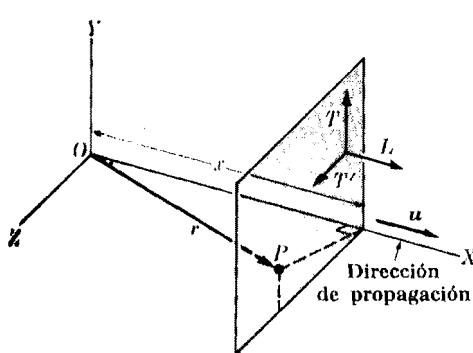


Fig. 18-24. Onda plana propagándose según el eje *X*.

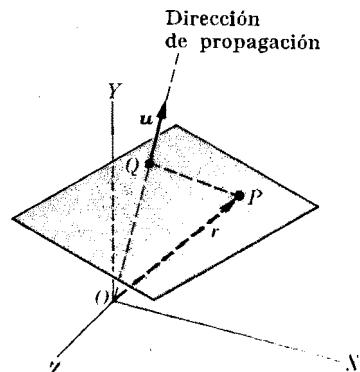


Fig. 18-25. Onda plana propagándose en una dirección arbitraria.

$\xi = \text{const}$ representa un plano perpendicular al eje X (fig. 18-24). Por lo tanto, $\xi = f(x - vt)$ describe en tres dimensiones una onda plana que se propaga paralelamente al eje X. Si ξ es un desplazamiento (o un campo vectorial), tenemos una onda longitudinal cuando ξ es paralelo a la dirección de propagación o eje X (indicado por la flecha L), y tenemos una onda transversal cuando ξ es perpendicular a la dirección de propagación (o sea, paralelo al plano YZ). En este último caso se puede también expresar como la superposición de dos desplazamientos según direcciones perpendiculares entre sí, tal como está indicado por las flechas T y T' .

Observemos que lo característico en una onda plana es la dirección de propagación, que se indica con un versor \mathbf{u} perpendicular al plano de la onda, siendo la orientación de los ejes coordenados más o menos arbitraria. Por consiguiente, es conveniente expresar la onda plana $\xi = f(x - vt)$ en una forma tal que sea independiente de la orientación de los ejes. En el caso de la fig. 18-24, el versor \mathbf{u} es paralelo al eje X. Si \mathbf{r} es el vector de posición de *cualquier* punto P del frente de onda, tenemos que $x = \mathbf{u} \cdot \mathbf{r}$, y por lo tanto, podemos escribir

$$\xi = f(\mathbf{u} \cdot \mathbf{r} - vt). \quad (18.45)$$

Cualquiera que sea la dirección de \mathbf{u} (fig. 18-25), la cantidad $\mathbf{u} \cdot \mathbf{r}$ es siempre la distancia medida desde el origen O según la dirección de propagación. Por lo tanto, la ec. (18.45) representa una onda plana que se propaga en la dirección \mathbf{u} . En el caso de una onda plana armónica o sinusoidal propagándose en la dirección \mathbf{u} , escribimos

$$\xi = \xi_0 \operatorname{sen} k(\mathbf{u} \cdot \mathbf{r} - vt).$$

Es conveniente definir un vector $\mathbf{k} = k\mathbf{u}$, llamado vector de propagación. Este vector tiene una longitud $k = 2\pi/\lambda = \omega/v$ y apunta en el sentido de la propagación. Como $\omega = kv$, una onda armónica plana se expresa por

$$\xi = \xi_0 \operatorname{sen} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) = \xi_0 \operatorname{sen} (k_x x + k_y y + k_z z - \omega t), \quad (18.46)$$

donde k_x , k_y , k_z son las componentes de \mathbf{k} que satisfacen la relación

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2 = \omega^2/v^2. \quad (18.47)$$

Cuando la propagación tiene lugar en un espacio tridimensional, la ecuación de onda (18.11) se debe modificar en consecuencia; se convierte en

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = v^2 \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} \right), \quad (18.48)$$

resultado que era de esperarse por consideraciones de simetría solamente. Debe verificarse por sustitución directa que la expresión (18.46) para una onda armónica plana satisface la ecuación general (18.48). Esta verificación se deja al estudiante. [Sugerencia: usar la ec. (18.47).]

Las ondas planas (18.45) o (18.46), aunque contienen las tres coordenadas x , y , z , son en realidad monodimensionales, ya que la propagación es según una

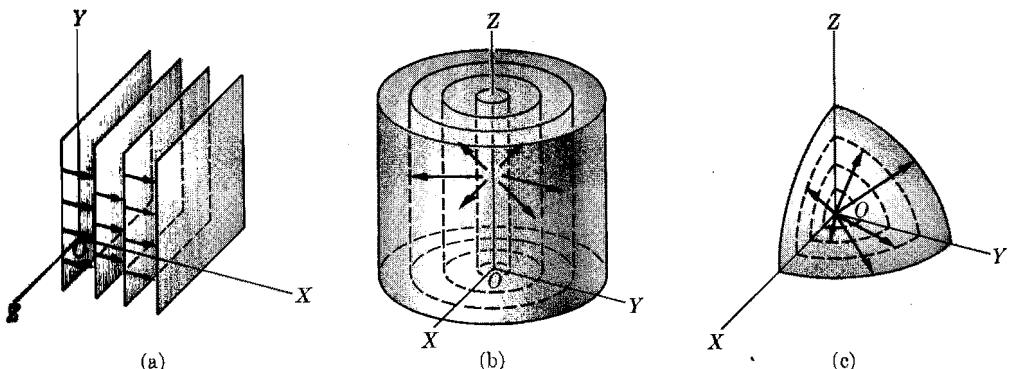


Fig. 18-26. Ondas (a) planas, (b) cilíndricas y (c) esféricas.

dirección particular y la situación física es la misma en todos los planos perpendiculares a la dirección de propagación (fig. 18-26a). Pero en la naturaleza hay otras clases de ondas que se propagan en varias direcciones, de las cuales las más interesantes son las ondas *cilíndricas* y las *esféricas*. Puede probarse que estas ondas más generales son también soluciones de la ecuación tridimensional (18.48). En el caso de las ondas cilíndricas, digamos el eje *Z*, y por lo tanto perpendiculares al plano *XY* (fig. 18-26b). La perturbación se propaga en todas las direcciones perpendiculares al eje *Z*. Este tipo de onda se produce, por ejemplo, si tenemos un conjunto de fuentes uniformemente distribuidas a lo largo del eje *Z*, todas oscilando en fase.

Si en un cierto punto se origina una perturbación y ésta se propaga en todas direcciones con la misma velocidad, se dice que el medio es *isótropo* (isos: igual, tropos: dirección) y la onda resultante es esférica. Los frentes de onda son esferas concéntricas con centro en el punto donde se originó la perturbación (fig. 18-26c). Tales ondas se producen, por ejemplo, cuando hay un repentino cambio de presión en un punto de un gas.

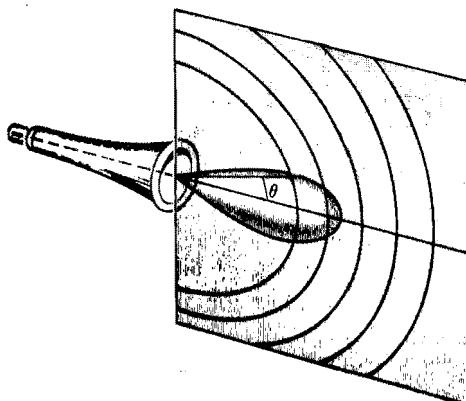
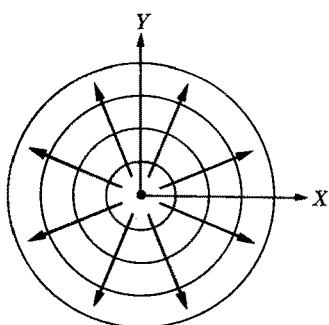


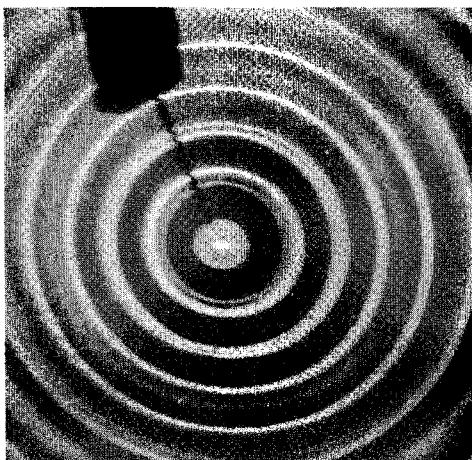
Fig. 18-27. Distribución angular de la intensidad del sonido producido por una bocina.

Algunas veces la velocidad de propagación no es la misma en todas las direcciones, en cuyo caso el medio es *anisótropo*. Por ejemplo, un gas en el cual haya un gradiente de temperatura, un sólido sometido a ciertas deformaciones, o un cristal, pueden tener propiedades elásticas diferentes en varias direcciones, resultando una velocidad de propagación diferente para cada dirección. En estos medios las ondas no son esféricas.

Aun cuando la onda sea esférica, puede darse que no tenga la misma amplitud o intensidad en todas las direcciones, porque la fuente de perturbación puede producir efectos diferentes en cada dirección. Por ejemplo, cuando se toca una corneta se produce una onda de presión o sonido en el extremo abierto. Sin em-



(a)



(b)

Fig. 18-28. Ondas circulares en la superficie de un líquido.

bargo, debido a la forma del extremo del tubo, un observador no percibe el sonido con la misma intensidad en todas las direcciones, aunque se propague con la misma velocidad en todas ellas (fig. 18-27).

Algunas veces una onda se propaga sobre una superficie tal como una membrana o la superficie libre de un líquido. Si se produce una perturbación en un cierto punto de la superficie, aquélla se propaga por la superficie en todas direcciones con la misma velocidad, resultando un conjunto de ondas *circulares* (fig. 18-28). Esta es una onda bidimensional por lo que requiere sólo dos coordenadas espaciales para describirla. La ecuación para esta onda no es la (18.48), sino

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = v^2 \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} \right), \quad (18.49)$$

ya que la coordenada *z* no es necesaria para describir este proceso.

EJEMPLO 18.19. Ondas elásticas producidas en una membrana tensa.

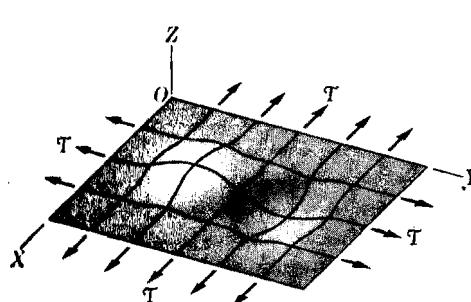


Fig. 18-29. Onda superficial en una membrana tensa.

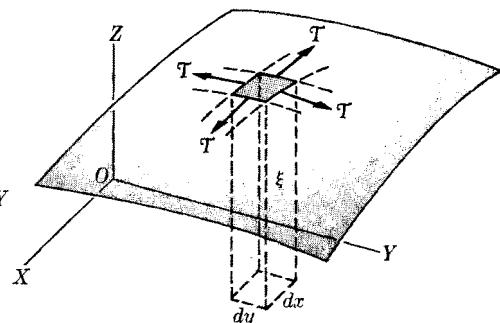


Fig. 18-30. Fuerzas que se ejercen sobre un elemento de superficie de una membrana tensa.

Solución: Consideremos una membrana delgada y tensa, la cual, para simplificar, supondremos rectangular, aunque esta limitación no es necesaria (fig. 18-29). La membrana está montada sobre un marco el cual ejerce la tensión T por unidad de longitud, expresada en N m^{-1} . Si la membrana se deforma en un punto particular y experimenta un desplazamiento en dirección perpendicular a ella; esta deformación se propaga por la membrana, resultando una onda superficial.

Para obtener la ecuación de este movimiento ondulatorio, consideremos una superficie elemental de la membrana de lados dx, dy (fig. 18-30). En un instante dado esta superficie experimenta un desplazamiento ξ hacia arriba; debido a que la membrana es curva, el desplazamiento ξ es una función de x e y y las fuerzas sobre los lados del área elemental no son directamente opuestas. Para obtener la fuerza vertical neta, usamos el mismo razonamiento aplicado en la sección 18.7 cuando tratábamos las ondas transversales en una cuerda. Según este razonamiento, decimos que los lados paralelos al eje Y están sujetos a fuerzas $T dy$ y la resultante vertical de estas fuerzas es

$$(T dy) \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} dx = T \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} dx dy.$$

Análogamente, los lados paralelos al eje X están sometidos a las fuerzas $T dx$, cuya resultante es

$$(T dx) \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} dy = T \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} dx dy.$$

Por consiguiente, la fuerza neta vertical es la suma de las dos

$$F_z = T \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} \right) dx dy.$$

Si la masa por unidad de área (o densidad superficial, expresada en kg m^{-2}) de la membrana es σ , la masa de esta porción de membrana es $\sigma dx dy$, y como su aceleración vertical es $\partial^2 \xi / \partial t^2$, podemos escribir la ecuación de movimiento de esta porción de membrana en la forma

$$(\sigma dx dy) \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = T \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} \right) dx dy$$

o sea

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{T}{\sigma} \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} \right).$$

Esta ecuación es similar a la ec. (18.49) por lo cual concluimos que la perturbación se propaga por la membrana como una onda con una velocidad $v = \sqrt{\kappa/\sigma}$. El estudiante deberá verificar que la expresión para v es correcta dimensionalmente.

18.11 Ondas esféricas en un fluido

Como ejemplo de ondas esféricas, consideremos una onda de presión en un fluido homogéneo e isótropo. A primera vista estaríamos tentados de decir que si r es la distancia desde el origen y p_0 la presión normal, la onda de presión podría escribirse en la forma $p - p_0 = f(r - vt)$, ya que r desempeña el mismo papel que x en una onda plana. Sin embargo, no es así, y debemos examinar el asunto más cuidadosamente.

Observemos que mientras una onda esférica se propaga, el frente de onda se extiende continuamente (crece como r^2). Consideremos, por ejemplo, una onda que se propaga en el interior de un ángulo sólido Ω (fig. 18-31). A una distancia r de la fuente, la onda superficial tiene un área A ; las áreas de las superficies de ondas a las distancias $2r, 3r, \dots, nr$ son $4A, 9A, \dots, n^2A$. Esto sugiere que la amplitud de la onda de presión debe disminuir a medida que la distancia a la fuente aumenta, ya que actúa sobre un área mayor, resultado confirmado experimentalmente y predicho cuando se hace un análisis teórico más detallado que omitiremos. Por ejemplo, si el fluido es isótropo y la onda tiene la misma amplitud en todas las direcciones puede probarse que la onda de presión está dada por la expresión

$$p - p_0 = \frac{1}{r} f(r - vt). \quad (18.50)$$

Tenemos ahora el factor geométrico $1/r$ que no aparecía en una onda plana, el cual explica por qué la presión disminuye con la distancia a la fuente. Cuando la amplitud (o intensidad) es diferente en cada dirección, se obtendrá una expresión más complicada. La ec. (18.50) representa una onda esférica *saliente*. Podemos también tener una onda esférica *entrante* la cual estará expresada por

$$p - p_0 = \frac{1}{r} f(r + vt).$$

La velocidad de propagación está dada por la misma expresión obtenida para las ondas planas, ec. (18.27). Esto es,

$$v = \sqrt{\kappa/\rho_0}. \quad (18.51)$$

Un caso particularmente interesante es el de una onda armónica esférica de

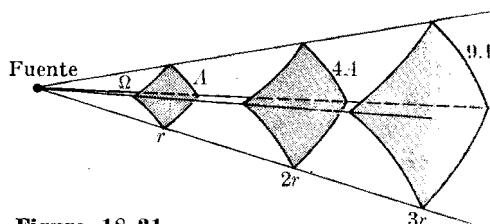


Figura 18-31

presión expresada por

$$p = p_0 + \frac{\mathcal{P}_0}{r} \operatorname{sen}(kr - \omega t). \quad (18.52)$$

La amplitud de la onda de presión es \mathcal{P}_0/r y disminuye con la distancia a la fuente. El desplazamiento correspondiente a esta onda de presión está dado por una expresión más complicada. Pero a grandes distancias de la fuente este desplazamiento se puede expresar con muy buena aproximación por

$$\xi = \frac{\xi_0}{r} \cos(kr - \omega t), \quad (18.53)$$

donde $\xi_0 = \mathcal{P}_0/v\rho_0\omega$, relación que es idéntica a la que se obtuvo para las ondas planas (ejemplo 18.7). Nótese que la amplitud de la onda de desplazamiento también disminuye con la distancia a la fuente, es decir, como $1/r$.

Consideremos a continuación la intensidad de una onda esférica. Usemos la ec. (18.53) y observemos que la amplitud es ahora ξ_0/r en lugar de ξ_0 . A grandes distancias, la energía por unidad de volumen está dada, de acuerdo con la ec. (18.42), por

$$E = \frac{1}{2} \frac{\rho_0 \omega^2 \xi_0^2}{r^2} = \frac{\mathcal{P}_0}{2v^2 \rho_0 r^2},$$

y disminuye como $1/r^2$. El flujo de energía por unidad de tiempo que pasa a través de una superficie esférica de radio r , si usamos la ec. (18.43) con $A = 4\pi r^2$, es

$$\left(\frac{\partial W}{\partial t} \right) = v(4\pi r^2) \left(\frac{1}{2} \frac{\rho_0 \omega^2 \xi_0^2}{r^2} \right) = 2\pi v \rho_0 \omega^2 \xi_0^2 = \frac{2\pi \mathcal{P}_0^2}{\rho_0 v}. \quad (18.54)$$

Notemos que el factor r^2 se ha cancelado, resultando una expresión independiente del radio. Este es el resultado que esperábamos, ya que la conservación de la energía requiere que, en promedio, fluya la misma cantidad de energía por unidad de tiempo a través de cualquier superficie esférica, independientemente de su radio. Esto explica la presencia del factor $1/r$ en las ecs. (18.52) y (18.53).

De acuerdo a la ec. (18.44), la intensidad de una onda esférica, o sea el promedio de energía que atraviesa a la unidad de área en la unidad de tiempo, es

$$I = v_E = \frac{\mathcal{P}_0}{2v\rho_0 r^2} = \frac{I_0}{r^2}, \quad (18.55)$$

donde

$$I_0 = \mathcal{P}_0^2/2\rho v, \quad (18.56)$$

resultado que es idéntico al obtenido en el ejemplo 18.11. Concluimos entonces que

en una onda esférica la intensidad es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia a la fuente,

resultado que tiene muchas aplicaciones en acústica y óptica. Este resultado es también compatible con la conservación de la energía, ya que, si la energía que fluye a través de cada superficie esférica debe ser la misma y el área de la esfera varía como r^2 , la energía que fluye a través de la unidad de área en la unidad de tiempo debe variar como $1/r^2$.

Las ondas esféricas que hemos discutido son aplicables solamente al caso de los fluidos perfectos, los cuales no soportan esfuerzos cortantes. Sin embargo, en un sólido elástico, son posibles dos clases de ondas: ondas irrotacionales y ondas solenoidales. En el caso de ondas planas ellas corresponden esencialmente a las ondas longitudinales y transversales estudiadas en las secciones 18.5 y 18.7. Sus respectivas velocidades de propagación son

$$v_l = \sqrt{\frac{\kappa + \frac{3}{4}G}{\rho}}, \quad v_t = \sqrt{\frac{G}{\rho}}.$$

Observese que si $G = 0$, tenemos sólo ondas longitudinales con una velocidad igual a nuestro resultado (18.51). Por otra parte, en ningún medio estable puede ser $v_t = 0$ y propagar solamente ondas transversales, porque se requeriría que $\kappa = -(\frac{3}{4})G$ = número negativo. Tal valor para κ significaría que un aumento de presión produciría un aumento de volumen, lo que es contrario tanto a la experiencia como a la intuición.

18.12 Velocidad de grupo

La velocidad $v = \omega/k$, expresada por la ec. (18.6) para una onda armónica de frecuencia angular ω y longitud de onda $\lambda = 2\pi/k$, se llama velocidad de fase. Sin embargo, ésta no es necesariamente la velocidad que observamos cuando analizamos un movimiento ondulatorio. Si tenemos una onda continua (o como se dice algunas veces, un tren de ondas de longitud infinita) ésta puede constar de una sola longitud de onda y de una sola frecuencia. Pero una onda de estas características no es adecuada para transmitir una señal, porque una señal implica algo que empieza en un cierto instante y termina un cierto tiempo más tarde. Esto es, la onda debe tener una forma similar a la representada en la fig. 18-32. Una onda de esta forma se denomina pulso. Por consiguiente, si medimos la velocidad con que la señal se transmite, nos estamos refiriendo, esencialmente, a la velocidad con que este pulso viaja.

De inmediato, diríamos que ésta es la velocidad de fase $v = \omega/k$, ya que hemos venido diciendo en las secciones anteriores que ésta es la velocidad de propagación de las ondas. Sin embargo, aquí entra un factor importante; la onda o pulso representado en la fig. 18-32 no es armónica; porque su amplitud

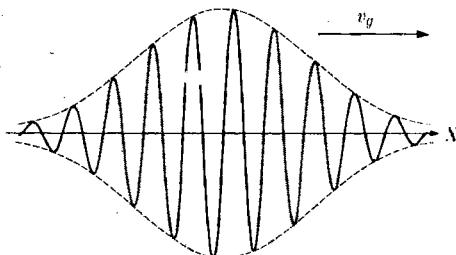


Fig. 18-32. Tren de ondas.

no es constante a lo largo del eje X. Luego, debemos hacer un análisis de Fourier de la onda. Al hacerlo descubrimos que realmente contiene varias frecuencias y varias longitudes de onda. Desde luego, si la velocidad de propagación es independiente de la frecuencia (o sea, si no hay dispersión), todas las componentes de Fourier de la onda viajan con la misma velocidad y en ese caso es correcto decir que la velocidad del pulso y la velocidad de fase son las mismas. Sin embargo, en un medio dispersivo cada componente de Fourier tiene su propia velocidad de propagación y, por lo tanto, debemos examinar la situación con mayor cuidado.

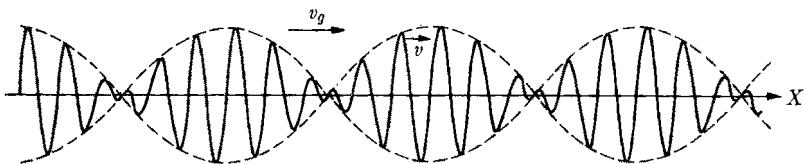


Fig. 18-33. Velocidad de grupo y velocidad de fase.

Para simplificar, consideremos el caso en el cual la onda puede estar constituida de dos frecuencias ω y ω' casi iguales, de modo que $\omega' - \omega$ sea muy pequeña. Supondremos que sus amplitudes son las mismas. Entonces, usando la ec. (M. 7), tenemos

$$\begin{aligned}\xi &= \xi_0 \operatorname{sen}(kx - \omega t) + \xi_0 \operatorname{sen}(k'x - \omega't) \\ &= \xi_0 [\operatorname{sen}(kx - \omega t) + \operatorname{sen}(k'x - \omega't)] \\ &= 2\xi_0 \cos \frac{1}{2}[(k' - k)x - (\omega' - \omega)t] \operatorname{sen} \frac{1}{2}[(k' + k)x - (\omega' + \omega)t].\end{aligned}$$

Como ω y ω' , lo mismo que k y k' , son casi iguales, podemos reemplazar $\frac{1}{2}(\omega + \omega')$ por ω y $\frac{1}{2}(k' + k)$ por k , de modo que

$$\xi = 2\xi_0 \cos \frac{1}{2}[(k' - k)x - (\omega' - \omega)t] \operatorname{sen}(kx - \omega t). \quad (18.57)$$

La ec. (18.57) representa un movimiento ondulatorio de amplitud modulada. El factor de modulación está dado por

$$2\xi_0 \cos \frac{1}{2}[(k' - k)x - (\omega' - \omega)t].$$

y se ha indicado en la fig. 18-33. La modulación de amplitud corresponde en sí a un movimiento que se propaga con una velocidad

$$v_g = \frac{\omega' - \omega}{k' - k} = \frac{d\omega}{dk}, \quad (18.58)$$

llamada *velocidad de grupo*. Esta es la velocidad con la cual la onda de amplitud, representada por la línea punteada de la fig. 18-33, se propaga. Si recordamos que $\omega = kv$, la ec. (18.58) se convierte en

$$v_g = v + k \cdot \frac{dv}{dk}. \quad (18.59)$$

Si la velocidad de fase es independiente de la longitud de onda, $dv/dk = 0$ y $v_g = v$. Por consiguiente, en un medio no dispersivo no hay diferencia entre la velocidad de fase y la velocidad de grupo, lo que habíamos inferido previamente. Pero en un medio dispersivo la velocidad de grupo puede ser mayor o menor que la velocidad de fase. Concluimos, entonces que el máximo del pulso de la fig. 18-32 se propaga con la velocidad de grupo v_g . Por lo tanto, en un medio dispersivo la velocidad de la señal es la velocidad de grupo. Aunque hemos derivado la ec. (18.59) para el caso de dos frecuencias solamente, ésta es verdadera para el caso de un pulso que contenga frecuencias desde $\omega - \Delta\omega$ hasta $\omega + \Delta\omega$. Debemos dejar sentado, sin embargo, que esta materia es realmente más complicada de lo que aquí hemos presentado, y una discusión completa del asunto está fuera del propósito de este libro.

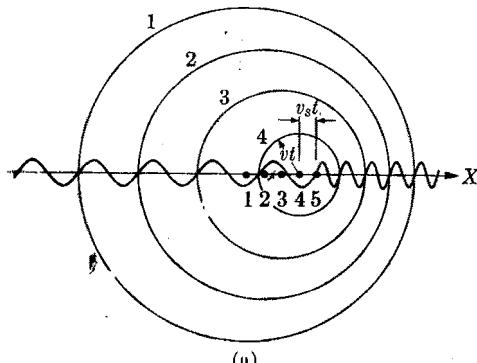
Como ilustración, consideraremos el caso de las ondas superficiales en un líquido con la aproximación de longitud de onda grande. La velocidad de fase para este caso, con la aproximación señalada, está dada por la ec. (18.36) y como $k = 2\pi/\lambda$, $v = \sqrt{g\lambda/2\pi} = \sqrt{g/k}$. Entonces

$$\frac{dv}{dk} = -\frac{1}{2k} \sqrt{\frac{g}{k}} = -\frac{v}{2k},$$

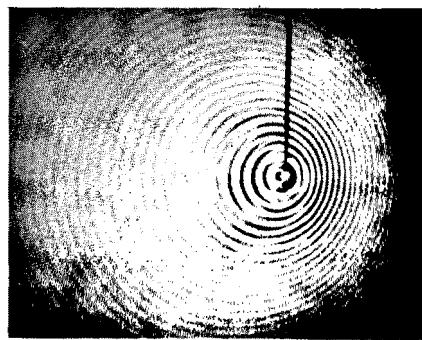
y la ec. (18.59) da $v_g = \frac{1}{2}v$, de modo que la velocidad de grupo es precisamente la mitad de la velocidad de fase. Esto significa que si se produce en el agua una perturbación de gran longitud de onda, la perturbación inicial se distorsiona de tal modo que las componentes de mayor longitud de onda "escapan" de la perturbación moviéndose más rápido que la velocidad de grupo, que es la velocidad del pico de la perturbación.

18.13 El efecto Doppler

Cuando la fuente de ondas y el observador están en movimiento relativo con respecto al medio material en el cual la onda se propaga, la frecuencia de las



(a)



(b)

Fig. 18-34. Efecto Doppler doblado a una fuente en movimiento. La fotografía ilustra el efecto Doppler en la superficie de un líquido.

ondas observadas es diferente de la frecuencia de las ondas emitidas por la fuente. Este fenómeno recibe el nombre de *efecto Doppler* en honor al físico C. J. Doppler (1803-1853) quien lo observó por vez primera en las ondas sonoras.

Supongamos que tenemos una fuente de ondas, tal como un cuerpo vibrante, moviéndose hacia la derecha (fig. 18-34) con velocidad v_s a través de un medio en reposo tal como aire o agua. Observando la fuente en varias posiciones 1, 2, 3, 4, ..., notamos que después de un tiempo t , contado a partir del tiempo en que la fuente estaba en la posición 1, las ondas emitidas en las varias posiciones ocupan ~~las esferas~~ 1, 2, 3, 4, ..., las cuales no son concéntricas. La separación entre las ondas es menor del lado en el cual el cuerpo se está moviendo y mayor del lado opuesto. Para un observador en reposo a cualquier lado, esto corresponde, respectivamente, a una menor y a una mayor longitud de onda efectiva o a una mayor y a una menor frecuencia efectiva. Pero si el observador está en movimiento con velocidad v_0 , las ondas lo alcanzarán con diferente rapidez. Por ejemplo, si el observador se aproxima a la fuente por la derecha, observará una longitud de onda aún menor o una mayor frecuencia, ya que él va al encuentro de las ondas. Lo opuesto ocurrirá si el observador se aleja de la fuente.

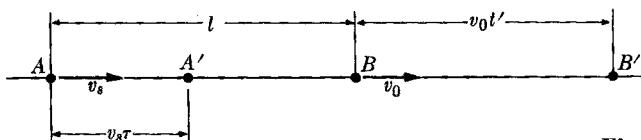


Figura 18-35

Para obtener la relación entre la frecuencia ν de las ondas producidas por la fuente y la frecuencia ν' registrada por el observador, razonamos del siguiente modo (para mayor sencillez supondremos que tanto la fuente como el observador se mueven sobre la misma recta): supongamos que en el instante $t = 0$, cuando la distancia AB (fig. 18-35) entre la fuente y el observador es l , la fuente emite una onda que llega al observador en el tiempo t ; durante ese tiempo el observador ha recorrido la distancia $v_0 t$ y la distancia total recorrida por la onda en el tiempo t es $l + v_0 t$; si v es la velocidad de propagación de la onda, esta distancia es también $v t$. Entonces

$$v t = l + v_0 t \quad \text{o} \quad t = \frac{l}{v - v_0}.$$

Al tiempo $t = \tau$ la fuente está en A' y la onda emitida en aquel instante alcanzará al observador al tiempo t' medido desde el mismo origen de tiempos que el primero. La distancia total recorrida por la onda desde el tiempo en que fue emitida en A' hasta que fue captada por el observador es $(l - v_s \tau) + v_0 t'$. El tiempo real durante el cual viajó la onda es $t' - \tau$ y la distancia recorrida es $v(t' - \tau)$. Por lo tanto

$$v(t' - \tau) = l - v_s \tau + v_0 t' \quad \text{o} \quad t' = \frac{l + (v - v_s) \tau}{v - v_0}.$$

El intervalo de tiempo registrado por el observador entre las ondas emitidas por la fuente en A y en A' es

$$\tau' = t' - t = \frac{v - v_s}{v - v_o} \tau.$$

Ahora bien, si v es la frecuencia de la fuente, el número de ondas emitido por ella en el tiempo τ es $v\tau$. Como estas ondas las recibe el observador en el tiempo τ' , la frecuencia que él mide es $v' = v\tau/\tau'$ o sea

$$v' = v \frac{v - v_o}{v - v_s}. \quad (18.60)$$

Esta ecuación da la relación entre la frecuencia v de la fuente y la frecuencia v' medida por el observador cuando ambos se están moviendo según la dirección de propagación.

Cuando ambas velocidades v_o y v_s son muy pequeñas comparadas con v , la expresión (18.60) se puede simplificar. Primero la escribimos así

$$v' = \frac{1 - v_o/v}{1 - v_s/v} v = \left(1 - \frac{v_o}{v}\right) \left(1 - \frac{v_s}{v}\right)^{-1} v.$$

Pero recordando el desarrollo binomial, ec. (M. 28), podemos escribir $(1 - v_s/v)^{-1} \approx 1 + v_s/v$, y

$$v' = \left(1 - \frac{v_o}{v}\right) \left(1 + \frac{v_s}{v}\right) v = \left(1 - \frac{v_o}{v} + \frac{v_s}{v} - \frac{v_o v_s}{v^2}\right) v.$$

Al multiplicar ambos paréntesis debemos mantener nuestra aproximación y tomar

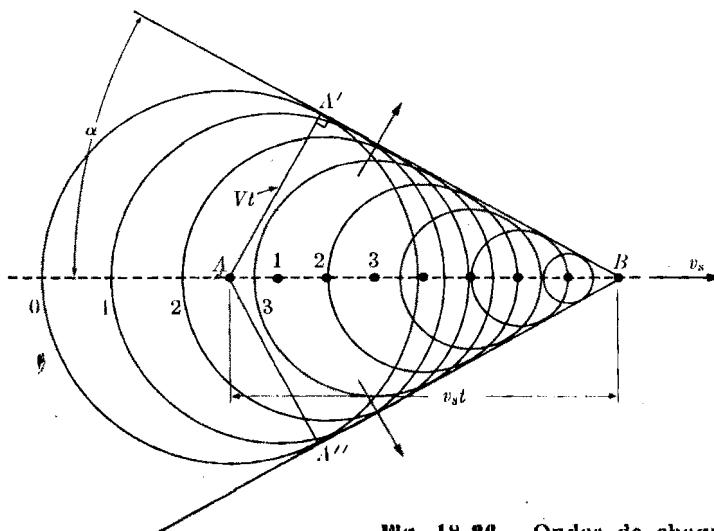


Fig. 18-86. Ondas de choque o de Mach.

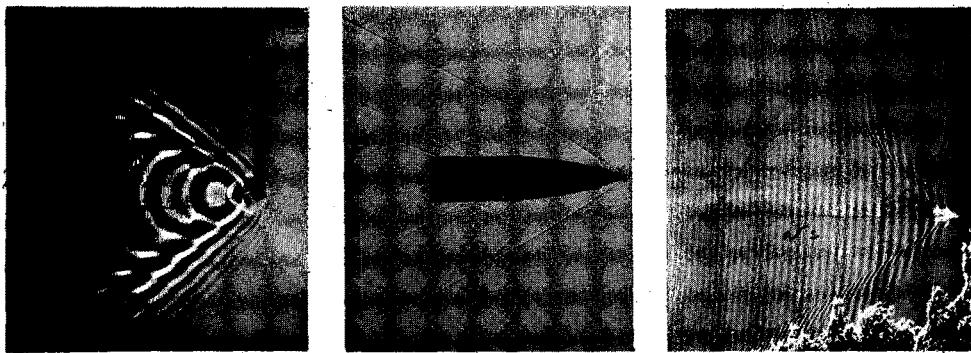


Fig. 18-87. Ondas de Mach (de choque) producidas por (a) una punta vibrante en movimiento tocando la superficie del agua, (b) una bala en el aire y (c) un bote rápido.

sólo los términos de primer orden. Entonces, despreciando el término $v_O v_s / v^2$, tenemos que la frecuencia medida por el observador es

$$\nu' = \left(1 - \frac{v_O - v_s}{v}\right) \nu = \left(1 - \frac{v_{Os}}{v}\right) \nu, \quad (18.61)$$

donde $v_{Os} = v_O - v_s$ es la velocidad del observador respecto a la fuente. Recor-dando que $\omega = 2\pi\nu$, podemos expresar la frecuencia angular medida por el ob-servador en la forma

$$\omega' = \left(1 - \frac{v_{Os}}{v}\right) \omega. \quad (18.62)$$

Si v_{Os} es positiva, el observador se aleja de la fuente y la frecuencia medida es menor. Pero si v_{Os} es negativa, el observador y la fuente se acercan y la frecuencia medida es mayor.

Cuando la dirección de v_{Os} no es la misma que la de propagación de las ondas, sino que forma un ángulo con esa dirección, debemos reemplazar la ec. (18.62) por

$$\omega' = \left(1 - \frac{v_{Os} \cos \theta}{v}\right) \omega, \quad (18.63)$$

como el estudiante puede verificar fácilmente. Obsérvese que $v_{Os} \cos \theta$ es la com-ponente de la velocidad relativa del observador respecto a la fuente segú-n la dirección de propagación.

Un caso especial se presenta cuando el observador está en reposo pero la fuente se mueve con una velocidad mayor que v . Entonces, en un tiempo dado la fuente avanza más rápido que el frente de onda; por ejemplo, si en un tiempo t la fuente se mueve desde A hasta B (fig. 18-36), su onda emitida en A ha vinjado solamente desde A hasta A' . La superficie tangente a todas las sucesivas ondas

es un cono cuyo eje es la recta sobre la que se mueve la fuente y cuya apertura α está dada por

$$\operatorname{sen} \alpha = v/v_s. \quad (18.64)$$

El movimiento ondulatorio resultante es entonces una onda *cónica* que se propaga como se indica con las flechas en la fig. 18-36. Esta onda se llama, a veces, *onda de Mach* u *onda de choque*, y no es más que el sonido repentino y violento que oímos cuando un avión supersónico pasa cerca de nosotros. Estas ondas también se observan en la estela que dejan los botes que se mueven con mayor velocidad que la de las ondas superficiales sobre el agua (fig. 18-37).

18.14 Sonido; acústica

Con la excepción de las ondas superficiales en un líquido, todas las otras ondas discutidas en este capítulo están dentro de la categoría de *ondas elásticas* en las cuales la perturbación (sea ésta una deformación, una presión o el desplazamiento de un volumen que contiene muchos átomos) se propaga con una velocidad que depende de las propiedades elásticas del medio. Estas ondas elásticas son también llamadas *sonido*.

En el lenguaje popular el sonido está relacionado con la sensación auditiva. Siempre que una onda elástica que se propaga a través de un gas, un líquido o un sólido, alcance nuestro oído, produce vibraciones en la membrana auditiva; estas vibraciones provocan una reacción del nervio auditivo y el proceso se conoce como audición. Pero nuestro sistema nervioso produce una sensación auditiva sólo para las frecuencias comprendidas entre 16 Hz y 20.000 Hz (el intervalo de frecuencias audibles es diferente para otros animales). Fuera de estos límites el sonido no es audible, aunque a las ondas elásticas correspondientes se les sigue llamando sonido. La física de las ondas elásticas de frecuencia por encima de 20.000 Hz se denomina *ultrasónica*.

La ciencia que trata de los métodos de generación, recepción y propagación del sonido se llama *acústica*. Esta cubre realmente muchos campos y está íntimamente relacionada con varias ramas de la ingeniería. Entre los campos de la acústica está el diseño de instrumentos acústicos, incluyendo la *electroacústica*, que trata de los métodos de producción y registro del sonido por medios eléctricos.

TABLA 18-2 Velocidad del sonido, m s⁻¹

Sólidos (20°)	Líquidos	Gases (0°C)	
granito	6000	aire	331,45
hierro	5130	hidrógeno	1269,5
cobre	3750	oxígeno	317,2
aluminio	5100	nitrógeno	330,3
plomo	1230	vapor (100°C)	404,8
lucite	1840		

(micrófonos, altoparlantes, amplificadores, etc.). La *acústica arquitectónica*, trata del diseño y construcción de salas y edificios y del comportamiento de las ondas sonoras en ambientes cerrados. La *acústica musical* trata directamente de la relación entre el sonido y la música.

El sonido, como ya se ha explicado, involucra el desplazamiento de átomos y moléculas del medio en el cual se propaga. Pero este desplazamiento se debe a un movimiento colectivo ordenado en el cual todos los átomos de un pequeño volumen experimentan esencialmente el mismo desplazamiento. A este movimiento ordenado se superpone la agitación molecular en los líquidos y gases. El resultado neto es que la intensidad del sonido disminuye o se atenúa mientras la onda sonora se propaga porque parte de la energía de la onda se disipa en los choques entre las moléculas del medio. Esto da como resultado un aumento en la energía interna molecular, principalmente en las energías de rotación y de traslación. En los líquidos la viscosidad, que en esencia es un efecto del movimiento molecular, también desempeña un papel importante en la atenuación del sonido.

La velocidad de propagación del sonido es prácticamente independiente de la frecuencia para un amplio intervalo de frecuencias que se extiende hasta por encima de 10^8 Hz. El valor de esta velocidad para diferentes sustancias está dado en la tabla 18-2. La velocidad de propagación es, sin embargo, dependiente de la temperatura y de la presión porque la densidad depende de estos factores. Muchos de los fenómenos ondulatorios que se describirán en los capítulos siguientes se aplican a las ondas sonoras. Sin embargo, no entraremos en un estudio detallado de la acústica, sino que concentraremos nuestra atención principalmente en las ondas electromagnéticas.

Bibliografía

1. "Helmholtz", A. C. Crombie, *Sci. Am.*, marzo de 1959, pág. 94
2. "Kilomegacycle Ultrasonics", K. Dransfeld, *Sci. Am.*, junio de 1963, pág. 48
3. "Sonic Boom", R. Emrich, *The Physics Teachers* 3, 18 (1965)
4. "A Method for Measuring the Sound Wavelength in gases", S. Lestz, *Am. J. Phys.* 31, 96 (1963)
5. *Waves and Oscillations*, R. A. Waldron. Momentum Books, Van Nostrand, Princeton, N. J., 1963
6. *Light: Principles and Experiments*, G. Monk. Dover, New York, 1963, apéndice 2
7. *The Feynman Lectures on Physics*, vol. I, R. Feynman, R. Leighton y M. L. Sands. Addison-Wesley, Reading, Mass., 1963, caps. 47 al 51
8. *Source Book in Physics*, W. F. Magie. Harvard University Press, Cambridge, Mass., 1963, pág. 122 (Helmholtz); pág. 174 (Fourier)

Problemas

18.1 Distinguir entre (a) las palabras homogéneo y heterogéneo, (b) las palabras isotrópico y anisotrópico. (c) ¿Puede un medio ser homogéneo y anisotrópico, heterogéneo e isotrópico?

18.2 Un bote en movimiento produce ondas superficiales en un lago tranquilo. El bote ejecuta 12 oscilaciones en 20 segundos; cada oscilación produce una cresta de onda. La cresta de la onda tarda 6 s para alcanzar la orilla distante 12 m. Calcular la longitud de onda de las ondas de superficie.

18.3 La ecuación de una cierta onda es $\xi = 10 \operatorname{sen} 2\pi(2x - 100t)$, donde x se mide en metros y t en segundos. Hallar (a) la amplitud, (b) la longitud de onda, (c) la frecuencia y (d) la velocidad de propagación de la onda. Dibujar la onda, mostrando la amplitud y la longitud de onda.

18.4 Dada la ecuación

$$\xi = 2 \operatorname{sen} 2\pi(0,1x - 5t),$$

donde x está en metros y t en segundos, determinar: (a) la longitud de onda, (b) la frecuencia, (c) el periodo, (d) la velocidad de propagación (e) la amplitud, y (f) la dirección de propagación. Escribir la expresión para una onda que sea idéntica pero que se propague en sentido opuesto.

18.5 Dada la onda

$$\xi = 2 \operatorname{sen} 2\pi(0,5x - 10t),$$

donde t está en segundos y x en metros, hacer el gráfico de ξ , extendido a varias longitudes de onda, para $t=0$ y $t=\frac{1}{40}$ s. Repetir el problema para $\xi = 2 \operatorname{sen} 2\pi(0,5x + 10t)$. Comparar resultados.

18.6 Una onda armónica

$$\xi = A \operatorname{sen} 2\pi(x/\lambda - t/P)$$

se propaga hacia la derecha. Seleccionar 13 puntos equidistantes sobre una distancia de una longitud de onda y hacer los gráficos correspondientes a los instantes $t = 0, \frac{1}{4}P, \frac{1}{2}P, \frac{3}{4}P$ y P después de que la onda ha alcanzado el primer punto.

18.7 Suponiendo que en el problema anterior la onda corresponda a una onda elástica transversal, mostrar en cada

gráfico la velocidad en cada punto. Hacer el gráfico de la velocidad $\partial\xi/\partial t$ y de la aceleración $\partial^2\xi/\partial t^2$ en el instante $t = 0$.

18.8 Demostrar que una onda elástica transversal que se propaga según el eje X con un desplazamiento ξ cuyas dos componentes son $\xi_y = \xi_0 \operatorname{sen}(kx - \omega t)$ y $\xi_z = \xi_0 \cos(kx - \omega t)$, está polarizada circularmente. Determinar el sentido de rotación de ξ visto por un observador situado sobre el eje X . Escribir las expresiones de ξ_y y ξ_z para una onda de polarización opuesta.

18.9 Dada la ecuación de onda en una cuerda $\xi = 0,03 \operatorname{sen}(3x - 2t)$, donde ξ y x están en metros y t en segundos, contestar lo siguiente: (a) para $t = 0$, ¿cuál es el desplazamiento cuando $x = 0,1$ m, $0,2$ m y $0,3$ m? (b) Para $x = 0,1$ m, ¿cuál es el desplazamiento cuando $t = 0,01$ s y $0,2$ s. (c) ¿Cuál es la ecuación de la velocidad de oscilación de las partículas de la cuerda? ¿Cuál es la velocidad máxima de oscilación? (d) ¿Cuál es la velocidad de propagación de la onda?

18.10 Un péndulo consta de un alambre de acero de 2,0 m de largo que soporta una lenteja de masa 20 kg. Si el péndulo se libera desde una posición donde forma un ángulo de 60° con la vertical, hallar la diferencia en longitud del alambre cuando la lenteja está en la posición inicial y cuando pasa por su posición más baja.

18.11 Una barra de acero transmite ondas longitudinales por medio de un oscilador acoplado a uno de sus extremos. La barra tiene un diámetro de 4 mm. La amplitud de las oscilaciones es 0,1 mm y la frecuencia es 10 oscilaciones por segundo. Hallar (a) la ecuación de las ondas que se propagan a lo largo de la barra, (b) la energía por unidad de volumen, (c) el promedio de flujo de energía por unidad de tiempo a través de una sección cualquiera de la barra, (d) la potencia requerida para operar el oscilador.

18.12 A lo largo de una barra se propagan ondas longitudinales (sección 18.5). La deformación en cada punto es

$$\xi = \xi_0 \operatorname{sen} 2\pi(x/\lambda - t/P).$$

(a) Usando la relación (18.16), obtener la expresión para la fuerza sobre cada sección transversal, (b) demostrar que las ondas de ξ y F tienen una diferencia de fase de un cuarto de longitud de onda. Hacer el gráfico de ξ y F en función de x en un instante dado para varias longitudes de onda.

18.13 Un resorte que tiene una longitud normal de 1 m y una masa de 0,2 kg se estira 4 cm cuando se le aplica una fuerza de 10 N. Hallar la velocidad de propagación de las ondas longitudinales a lo largo del resorte.

18.14 Un resorte de acero tiene una longitud normal de 4 m y una masa de 200 g. Cuando el resorte se suspende verticalmente con un cuerpo de 100 g fijo a su extremo libre, se estira 5,0 cm. Hallar la velocidad de las ondas longitudinales en el resorte.

18.15 Obtener la velocidad de las ondas de torsión en el acero. Comparar con el resultado obtenido para ondas longitudinales en el ejemplo 18.4.

18.16 Probar que las ondas de energía estudiadas en la sección 18.9 se pueden escribir en la forma

$$\partial W/\partial t = v\{\rho\omega^2\xi_0^2[\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos 2(kx - \omega t)]\}.$$

Obtener de esta ecuación el valor promedio. Demostrar que la frecuencia de la onda de energía es doble y que la longitud de onda es la mitad de la que corresponde a la onda de desplazamiento. Hacer el gráfico $\partial W/\partial t$ en función de x en un instante dado.

18.17 ¿Cómo varía la velocidad de propagación de una onda transversal a lo largo de una cuerda si la tensión (a) se duplica, (b) se reduce a la mitad? ¿En cuánto debe reducirse la tensión de la cuerda (c) para duplicar, (d) para reducir a la mitad la velocidad de propagación?

18.18 Un alambre de acero de diámetro 0,2 mm está sujeto a una tensión de 200 N. Determinar la velocidad de propagación de las ondas transversales a lo largo del alambre.

18.19 Una cuerda de 2 m de longitud y de 4 g de masa se mantiene horizontalmente con un extremo fijo y el otro soportando una masa de 2 kg. Hallar la velocidad de las ondas transversales en la cuerda.

18.20 Un extremo de una cuerda horizontal está sujeto a uno de los brazos de un diapasón de frecuencia 240 Hz operado eléctricamente. El otro extremo pasa por una polea y soporta un peso de 3 kg. La masa por unidad de longitud de la cuerda es de $0,020 \text{ kg m}^{-1}$. (a) ¿Cuál es la velocidad de las ondas transversales en la cuerda? (b) ¿Cuál es la longitud de onda?

18.21 Un extremo de un tubo de goma está fijo a un soporte, el otro extremo pasa por una polea situada a 5 m del extremo fijo y sostiene una carga de 2 kg. La masa del tubo entre el extremo fijo y la polea es 0,6 kg. (a) Hallar la velocidad de propagación de las ondas transversales a lo largo del tubo. Una onda armónica de amplitud 0,1 cm y longitud de onda 0,3 m se propaga a lo largo del tubo; (b) hallar la velocidad transversal máxima de cualquier punto del tubo. (c) Escribir la ecuación de la onda. (d) Determinar el promedio de la rapidez con que fluye energía a través de cualquier sección transversal del tubo.

18.22 Una fuente vibrante al extremo de una cuerda tensa tiene un desplazamiento dado por la ecuación $\xi = 0,1 \sin 6t$, donde ξ está en metros y t en segundos. La tensión en la cuerda es de 4 N y la masa por unidad de longitud es $0,01 \text{ kg m}^{-1}$. (a) ¿Cuál es la velocidad de la onda en la cuerda? (b) ¿Cuál es la frecuencia de la onda? (c) ¿Cuál es la longitud de onda? (d) ¿Cuál es la longitud del desplazamiento de un punto situado a 1 m de la fuente?, y a 3 m? (e) Hacer un gráfico de ξ en función de t en $x=3 \text{ m}$. (f) ¿Cuál es la amplitud del movimiento? (g) Hacer un gráfico de ξ en función de x para $t = \pi/12 \text{ s}$.

18.23 Un alambre de acero que tiene una longitud de 2 m y un radio de 0,5 mm cuelga del techo. (a) Si un cuerpo de 100 kg de masa se suspende del extremo libre, hallar la elongación del alambre. (b) Hallar el desplazamiento del punto medio y el esfuerzo hacia abajo sobre él. (c) Determinar la velocidad de las ondas longitudinales y transversales que se propagan a lo largo del alambre cuando la masa está suspendida.

18.24 Una cuerda de longitud L y masa M cuelga libremente del techo.

(a) Demostrar que la velocidad de una onda transversal en función de la posición a lo largo de la cuerda es $v = \sqrt{gx}$, siendo x la distancia desde el extremo libre. (b) Probar que un pulso transversal recorrerá la cuerda (ida y vuelta) en un tiempo $2\sqrt{L/g}$. Notar que estos resultados no dependen de la masa de la cuerda.

18.25 En la sección 18.9 obtuvimos el flujo de energía de una onda longitudinal en una barra. Repetir el cálculo para las ondas transversales en una cuerda y demostrar que la potencia media es $v(\frac{1}{2}m\omega^2\xi_0^2)$. Notar que la cantidad encerrada en el paréntesis corresponde ahora a la energía por unidad de longitud. [Sugerencia: Calcular la rapidez con que la fuerza perpendicular a la cuerda ($F \sin \alpha \approx F(\partial\xi/\partial x)$ en la fig. 18-14) realiza un trabajo.]

18.26 Calcular la velocidad de propagación del sonido en el hidrógeno, nitrógeno y oxígeno a 0°C. Comparar con los resultados experimentales. Tomar $\gamma = 1,40$ para los tres gases.

18.27 Hallar la variación de la velocidad del sonido en el aire por unidad de variación de temperatura a 27°C.

18.28 Del valor dado en el ejemplo 18.6 para el coeficiente $\alpha = \sqrt{\gamma R/M}$ para el aire, obtener la masa molecular efectiva del aire y compararla con el resultado obtenido por otros medios. Suponer que para el aire $\gamma = 1,40$.

18.29 Refiriéndose a las ondas de presión en una columna de gas (sección 18.6), suponer que la presión cambia en la forma $p = p_0 = p_0 \sin 2\pi(x/\lambda - t/P)$. (a) Usando las ecs. (18.21) y (18.24), obtener las expresiones para las ondas de densidad y de desplazamiento en el gas. (b) Mostrar que las ondas de presión y de densidad están en fase pero que la onda de desplazamiento tiene un desfase de un cuarto de longitud de onda. (c) Hacer el gráfico de las tres ondas en función de x para un instante dado, extendido a varias longitudes de onda.

18.30 Una onda sonora armónica plana, en el aire a 20°C y presión normal, tiene una frecuencia de 500 Hz y una amplitud de 10^{-8} m. (a) Escribir la expresión que describe la onda de desplazamiento.

(b) Dibujar la onda de desplazamiento para $t = 0$ s hasta unas pocas longitudes de onda. (c) Escribir la expresión que describe a la onda de presión. (d) Dibujar la onda de presión para $t = 0$ s hasta unas pocas longitudes de onda y comparar con el gráfico hecho en (b). (e) Expresar el nivel de intensidad de esta onda en db.

18.31 El sonido más claro que puede oírse tiene una amplitud de presión de cerca de 2×10^{-5} N m⁻², y el más alto que puede oírse sin dolor tiene una amplitud de presión de 28 N m⁻². Determinar, en cada caso, la intensidad del sonido en W m⁻² y en db, y la amplitud de las oscilaciones si la frecuencia es 500 Hz. Suponer que la densidad del aire es $1,29$ kg m⁻³ y que la velocidad del sonido es 345 m s⁻¹.

18.32 Los niveles de intensidad de dos ondas sonoras difieren en (a) 10 db, (b) 20 db. Hallar el cociente entre sus intensidades y entre sus amplitudes de presión.

18.33 (a) ¿En cuánto varía la intensidad de una onda sonora cuando se duplica la amplitud de presión? (b) ¿En cuánto debería cambiar la amplitud de presión para que la intensidad fuera 10 veces mayor?

18.34 Expresar en db la diferencia en los niveles de intensidad de dos ondas sonoras si (a) la intensidad de una de las ondas es dos veces la intensidad de la otra, (b) la amplitud de presión de una es el doble de la de la otra.

18.35 Dos ondas sonoras, una en el aire y la otra en el agua, tienen la misma intensidad. (a) ¿Cuál es el cociente entre las amplitudes de la onda en el agua y de la onda en el aire? (b) ¿Cuál sería la razón de sus intensidades si las amplitudes de las ondas de presión fueran las mismas?

18.36 Comparar la importancia relativa de los dos términos que aparecen en la expresión de la velocidad de las ondas superficiales en aguas profundas [ec. (18.35)] para las siguientes longitudes de onda: (a) 1 mm, (b) 1 cm, (c) 1 m. ¿Para cuál longitud de onda son los dos términos iguales? La tensión superficial del agua es aproximadamente 7×10^{-8} N m⁻¹.

18.37 Considerar un canal de sección transversal rectangular y de 4 m de profundidad. Determinar la velocidad de propagación de las ondas de longitud de onda (a) 1 cm, (b) 1 m, (c) 10 m, (d) 100 m. En cada caso usar la fórmula que mejor corresponda al orden de magnitud de las cantidades involucradas. La tensión superficial del agua del canal es $7 \times 10^{-4} \text{ N m}^{-1}$.

18.38 Dos ondas armónicas de la misma frecuencia y amplitud se propagan con igual velocidad en direcciones opuestas. (a) Determinar el movimiento ondulatorio resultante. (b) Suponiendo que la onda resultante corresponda a una onda transversal en una cuerda, hacer el gráfico del desplazamiento de los puntos de la cuerda en diferentes instantes.

18.39 Dos ondas de igual amplitud, velocidad y frecuencia, pero con un desfase de $\pi/4$, viajan en la misma dirección en una cuerda. Sumar las dos ondas y mostrar que la resultante es una onda viajera de la misma velocidad y frecuencia.

18.40 Dos ondas de la misma amplitud y velocidad pero de frecuencias 1000 y 1010 Hz respectivamente, viajan en la misma dirección a 10 m s^{-1} . Escribir las ecuaciones correspondientes a las ondas separadas y a su suma. Hacer un dibujo de la onda resultante.

18.41 Repetir el problema anterior cuando una de las ondas tiene doble amplitud que la otra.

18.42 Dos ondas polarizadas en planos perpendiculares viajan en la dirección OX a la misma velocidad. Hallar el movimiento ondulatorio resultante si (a) $A_1 = 2A_2$ y de fases iguales, (b) $A_1 = 2A_2$ y un desfase de $\pi/2$, (c) $A_1 = A_2$ y un desfase $\pi/2$.

18.43 En el estudio de las ondas longitudinales en una barra (sección 18.5), despreciamos las deformaciones laterales que acompañan a la deformación longitudinal. Cuando este efecto se toma en consideración puede mostrarse que la velocidad de fase de las ondas armónicas longitudinales de longitud de onda λ que se propagan a lo largo de un cilindro de radio R es $v_p = \sqrt{Y/\rho} (1 - \pi^2 \sigma^2 R^2 / \lambda^2)$, donde σ es un coeficiente llamado razón

de Poisson (ver problema 18.54). Hallar la velocidad de grupo de las ondas que se propagan a lo largo de la barra y expresarla en función de v_p . Obtener el valor límite de la velocidad de grupo para el caso en que R es muy pequeño respecto a λ . Discutir la variación de v_p y v_g en función de R/λ .

18.44 La velocidad de fase de una onda armónica de flexión en una barra es $v_p = v \sqrt{1 + \lambda^2 / 4\pi^2 K^2}$, donde $v = \sqrt{Y/\rho}$ es la velocidad de fase para las ondas longitudinales, λ la longitud de onda y K el radio de giro de la sección transversal de la barra respecto del eje que pasa por el centro y es normal al eje longitudinal de la barra. (a) Hallar la velocidad de grupo de las ondas de flexión y expresarla en función de la velocidad de fase. (b) Estudiar el caso de una barra de sección transversal circular. (c) Obtener la velocidad de grupo cuando λ es muy grande respecto a $2\pi K$. [Nota: Una onda de flexión es aquélla que se propaga a lo largo de una barra cargada, esto es, una barra sometida a fuerzas transversales (tal como su propio peso) distribuidas uniformemente en toda su longitud.]

18.45 Se produce una cierta onda por medio de una fuente cuyo movimiento puede ser representado por

$$y = \frac{8}{\pi^2} A \left[\sin \omega t - \frac{1}{3^2} \sin 3\omega t + \frac{1}{5^2} \sin 5\omega t - \dots \right].$$

(a) Construir aproximadamente la forma de la onda sumando gráficamente los tres primeros términos. (b) ¿A qué se reduce la forma de la onda tomando todos los términos de la serie? Esta curva recibe el nombre de "diente de sierra". (c) Dar la expresión de una onda viajera que tenga la misma forma y se propague hacia la derecha con velocidad v , independiente de la frecuencia. [Sugerencia: observar que $1 + (\frac{1}{3})^2 + (\frac{1}{5})^2 + \dots = \pi^2/8$.]

18.46 Repetir el problema 18.45 para una fuente cuyo movimiento está dado por

$$y = \frac{4}{\pi} A (\sin \omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \frac{1}{5} \sin 5\omega t + \dots).$$

[*Sugerencia:* observar que $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots = \pi/4$.]

18.47 El tono del silbato de una locomotora es de 500 Hz. Determinar la frecuencia del sonido que oye una persona en la estación si el tren se mueve con una velocidad de 72 km h^{-1} (a) acercándose, (b) alejándose de la estación.

18.48 Una fuente sonora tiene una frecuencia de 10^3 Hz y se mueve a la velocidad de 30 m s^{-1} con respecto al aire. Suponiendo que la velocidad del sonido respecto al aire en reposo es de 340 m s^{-1} , hallar la longitud de onda efectiva y la frecuencia percibida por un observador en reposo respecto al aire y que ve a la fuente (a) alejándose de él, (b) acercándose a él.

18.49 Repetir el problema 18.48, suponiendo que la fuente está en reposo respecto al aire pero que el observador se mueve con la velocidad de 30 m s^{-1} . De sus resultados, ¿podría usted concluir que no importa cuál de los dos se está moviendo?

18.50 La ec. (18.61) para el efecto Doppler se dedujo suponiendo que el medio a través del cual la onda se propaga permanece en reposo. Demostrar que si el medio tiene una velocidad v_m según la línea que une al observador con la fuente, la ecuación se transforma en $v' = v(v - v_0 + v_m)/(v - v_s + v_m)$.

18.51 La deformación específica de volumen de un cuerpo se define por la relación $\epsilon_v = dV/V$, donde dV es la variación de volumen como resultado de las fuerzas aplicadas al cuerpo de volumen V . (a) Demostrar que $\epsilon_v = -d\rho/\rho$, donde ρ es la densidad del cuerpo. [*Sugerencia:* observar que $\rho V = m = \text{const.}$] (b) Demostrar además que el módulo de elasticidad de volumen definido por la ec. (18.22) puede expresarse en la forma equivalente $K = -V(dp/dV)$, donde dV es el cambio de volumen resultante de la variación de presión dp .

18.52 Usando los valores del módulo de elasticidad de volumen para el hierro y para el plomo (tabla 18-1) calcular el porcentaje de variación en densidad y volumen de cada sustancia correspondiente a un cambio de presión igual a 1 atm.

18.53 La deformación lineal específica se define por la relación $\epsilon_L = dL/L$, donde L es la distancia entre dos puntos cualesquiera del cuerpo en el estado no deformado, y dL es la variación de esta distancia como resultado de la deformación. Demostrar, considerando un cubo de lado L , que $\epsilon_v = 3\epsilon_L$.

18.54 Cuando se estira un alambre su diámetro D disminuye, dando como resultado una deformación lateral específica definida por $\epsilon_D = dD/D$. La razón de Poisson se define por $\sigma = dD/dL$. Probar que si un paralelepípedo rectangular está sometido a un esfuerzo normal S sobre cada cara, la deformación lineal neta sobre cada arista es $\epsilon_L = S(1 - 2\sigma)/Y$. [*Sugerencia:* observar que el esfuerzo normal sobre cada par de caras del paralelepípedo da como resultado deformaciones laterales opuestas sobre el otro par de caras.]

18.55 Usando los resultados de los problemas 18.53 y 18.54, demostrar que $Y = 3K(1 - 2\sigma)$. De esta relación obtener σ , y usando los valores de la tabla 18-1, calcular la razón de Poisson para algunos materiales.

18.56 Por razonamiento similar al del problema 18.55, puede probarse que $Y = 2G(1 + \sigma)$. Eliminando σ entre esta relación y la del problema 18.55, mostrar que $Y = 3KG/(K + \frac{4}{3}G)$. Usando los valores de la tabla 18-1, verificar para algunos materiales tabulados, hasta dónde es válida esta expresión teórica de Y .

18.57 Para una cierta sustancia $G = 1,24 \times 10^{10} \text{ N m}^{-2}$ e $Y = 3,20 \times 10^{10} \text{ N m}^{-2}$. Calcular el valor del módulo de elasticidad de volumen y la razón de Poisson para esta sustancia. Hacer lo mismo para el cuarzo, que tiene $Y = 5,18 \times 10^{10} \text{ N m}^{-2}$ y $G = 2,88 \times 10^{10} \text{ N m}^{-2}$. Discutir las implicaciones físicas de los resultados.

18.58 Puede probarse que para un resorte, la constante K introducida en el ejemplo 18.5 está dada por $\pi GR^4/2a^3$, donde R es el radio del alambre y a el radio del resorte. Hallar el valor de K para un resorte de acero de radio 1 cm hecho de alambre de radio 1 mm. Si la longitud del resorte sin estirar es 50 cm, hallar su elongación cuando se le aplica una fuerza de 50 N.

18.59 Suponer un campo ξ cuya ecuación de propagación es $\partial^2\xi/\partial t^2 = a\partial^4\xi/\partial x^4$, donde a es una cierta constante. (a) ¿Admitiría como solución una expresión de la forma

$$\xi = \xi_0 \operatorname{sen} k(x \pm vt)$$

si la admite, ¿cuál es el valor de v ? (b) ¿Admitiría $\xi = f(x \pm vt)$ como solución? (c) De los resultados precedentes, ¿concluiría usted que este campo se propaga sin distorsión?

18.60 Una barra de sección transversal circular de radio R se tuerce como consecuencia de un torque aplicado en torno a su eje. Probar que si θ es el ángulo de torsión en un punto x sobre la abscisa, el torque es

$$\tau = \frac{1}{2}AGR^2(\partial\theta/\partial x),$$

donde $A = \pi R^2$ es el área de la sección transversal.

18.61 Usando el resultado del problema anterior, mostrar que la velocidad de propagación de una onda de torsión a lo largo de una barra es $\sqrt{G/\rho}$. [Sugerencia: notar que $\operatorname{sen} \alpha = \operatorname{tg} \alpha / \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \operatorname{tg} \alpha - \frac{1}{2} \operatorname{tg}^3 \alpha + \dots$]

considerar una porción de espesor dx y observar que el torque sobre esa porción es $(\partial\tau/\partial x)dx$.]

18.62 Puede probarse que una onda esférica isotrópica satisface la ecuación diferencial

$$\frac{\partial^2(r\xi)}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2(r\xi)}{\partial r^2}.$$

Verificar que la solución de esta ecuación es $\xi = (1/r)f(r + vt)$. Comparar con la discusión hecha en la sección 18.11 para las ondas de presión en un fluido.

18.63 Demostrar que para grandes amplitudes la ecuación de las ondas transversales en una cuerda se convierte en

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = \frac{T}{m} \frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} \left[1 - \frac{3}{2} \left(\frac{\partial\xi}{\partial x} \right)^2 \right].$$

Observar que esta ecuación no es lineal y que se reduce a la ec. (18.29) cuando $(\partial\xi/\partial x)^2$ es despreciable. [Sugerencia: notar que $\operatorname{sen} \alpha = \operatorname{tg} \alpha / \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \operatorname{tg} \alpha - \frac{1}{2} \operatorname{tg}^3 \alpha + \dots$]

ONDAS ELECTROMAGNETICAS

19.1 Introducción

19.2 Ondas electromagnéticas planas

19.3 Energía y momentum de una onda electromagnética

19.4 Radiación por un dipolo eléctrico oscilante

19.5 Radiación por un dipolo magnético oscilante

19.6 Radiación por multipolos oscilantes de orden superior

19.7 Radiación por una carga acelerada

19.8 Absorción de la radiación electromagnética

19.9 Difusión de ondas electromagnéticas por electrones ligados

19.10 Difusión de la radiación electromagnética por un electrón libre; el efecto Compton

19.11 Fotones

19.12 Más sobre los fotones: efecto fotoeléctrico

19.13 Propagación de ondas electromagnéticas en la materia; dispersión

19.14 Efecto Doppler en las ondas electromagnéticas

19.15 Espectro de la radiación electromagnética

19.1 Introducción

En la sección 15.11 hemos sugerido que el campo electromagnético se propagaría en el vacío con una velocidad

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \approx 3 \times 10^8 \text{ m s}^{-1},$$

que corresponde a la velocidad de la luz en el vacío. En la sección 17.11, cuando estudiábamos el fenómeno de inducción electromagnética, señalamos la posibilidad de trasmitir una señal de un lugar a otro por medio de un campo electromagnético dependiente del tiempo. Hacia fines del siglo XIX, el físico alemán Heinrich Hertz (1857-1894) probó fuera de toda duda que el campo electromagnético se propaga en el vacío con una velocidad igual a c .* Las propiedades de las ondas electromagnéticas descubiertas por Hertz se han estudiado cuidadosamente en forma experimental. El gran volumen de información que se ha acumulado sobre las ondas electromagnéticas (cómo se producen, propagan y absorben, por ejemplo) ha posibilitado el mundo maravilloso de las comunicaciones que conocemos hoy día. Antes de que Hertz realizara sus experimentos, la existencia de ondas electromagnéticas había sido predicha por Maxwell como resultado de un análisis cuidadoso de las ecuaciones del campo electromagnético (sintetizadas en la sección 17.15). El desarrollo de nuestro conocimiento sobre las ondas electromagnéticas constituye otro ejemplo de la íntima relación entre la teoría y el experimento que ha existido en la evolución de la física.

En este capítulo vamos a examinar las ecuaciones de Maxwell (que describen el campo electromagnético dependiente del tiempo) para ver cómo podemos interpretar la propagación de este campo en forma de ondas. Para lograr esto tenemos que verificar si los campos eléctrico y magnético satisfacen una ecuación de onda de la forma indicada en la ec. (18.11). Discutiremos las ondas electromagnéticas planas en primer lugar; luego algunos mecanismos de emisión, absorción y difusión de la radiación electromagnética, concluyendo con una breve consideración de las diferentes partes del espectro electromagnético.

19.2 Ondas electromagnéticas planas

Veamos si las ecuaciones de Maxwell para el campo electromagnético admiten, como solución particular, un campo eléctrico \mathcal{E} y un campo magnético \mathcal{B} perpendiculares entre sí. Tomaremos el eje Y paralelo al campo \mathcal{E} y el eje Z paralelo al campo \mathcal{B} . En este caso particular,

$$\mathcal{E}_x = 0, \quad \mathcal{E}_y = \mathcal{E}, \quad \mathcal{E}_z = 0,$$

y

$$\mathcal{B}_x = 0, \quad \mathcal{B}_y = 0, \quad \mathcal{B}_z = \mathcal{B}.$$

* Los experimentos de Hertz se describen en la sección 22.7.

Supondremos también que el campo se encuentra en el vacío, es decir que no hay cargas libres ni corrientes; esto implica que $\rho = 0$ y $\mathbf{j} = 0$ en las ecuaciones de Maxwell.

En estas condiciones las ecs. (17.65) se expresan en la forma:

(a) ley de Gauss para el campo eléctrico,

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial y} = 0. \quad (19.1)$$

(b) ley de Gauss para el campo magnético,

$$\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial z} = 0. \quad (19.2)$$

(c) ley de Faraday-Henry,

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z} = 0, \quad (19.3)$$

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x} = -\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t}. \quad (19.4)$$

(d) ley de Ampère-Maxwell,

$$\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial y} = 0, \quad (19.5)$$

$$-\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial x} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t}. \quad (19.6)$$

Las ecs. (19.1), (19.2), (19.3) y (19.5) indican que ni \mathcal{E} ni \mathcal{B} dependen de y o de z . En consecuencia los campos \mathcal{E} y \mathcal{B} dependen sólo de x y de t , y en cada instante cada uno de ellos tiene el mismo valor sobre cualquier plano perpendicular al eje X (fig. 19-1). Por lo tanto nos quedan las ecs. (19.4) y (19.6) para determinar cómo \mathcal{E} y \mathcal{B} dependen de x y de t . Derivando la ec. (19.4) con respecto a x , obtenemos

$$\frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 \mathcal{B}}{\partial x \partial t}.$$

Análogamente, derivando la ec. (19.6) con respecto a t , resulta

$$\frac{\partial^2 \mathcal{B}}{\partial x \partial t} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial t^2}.$$

Combinando estos dos resultados se tiene

$$\frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial x^2}. \quad (19.7)$$

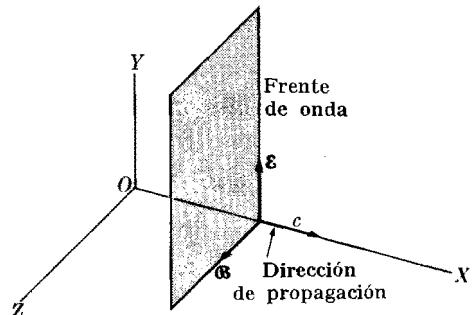


Fig. 19-1. Orientación de los campos eléctrico y magnético con respecto a la dirección de propagación de una onda electromagnética plana.

Esta ecuación es de la misma forma que la ec. (18.11), lo cual indica que el campo eléctrico \mathcal{E} se propaga en la dirección del eje X con velocidad

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}, \quad (19.8)$$

y se puede expresar en la forma

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}(x - ct). \quad (19.9)$$

De una manera similar se obtiene

$$\frac{\partial^2 \mathcal{B}}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \frac{\partial^2 \mathcal{B}}{\partial x^2}, \quad (19.10)$$

de modo que el campo magnético \mathcal{B} también se propaga en la dirección del eje X con velocidad c por lo que puede expresarse en la forma

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}(x - ct). \quad (19.11)$$

Consideremos en particular el caso de ondas armónicas de frecuencia $\nu = \omega/2\pi$ y longitud de onda $\lambda = 2\pi/k$. En tal caso

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \operatorname{sen} k(x - ct) = \mathcal{E}_0 \operatorname{sen}(kx - \omega t)$$

y

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_0 \operatorname{sen} k(x - ct) = \mathcal{B}_0 \operatorname{sen}(kx - \omega t). \quad (19.12)$$

Al escribir estas ecuaciones hemos usado la relación $\omega = kc$, que corresponde a la ec. (18.6). Las amplitudes \mathcal{E}_0 y \mathcal{B}_0 no son independientes pues deben satisfacer las ecs. (19.4) y (19.6). Ahora bien,

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x} = k\mathcal{E}_0 \cos k(x - ct) \quad \text{y} \quad \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t} = -kc\mathcal{B}_0 \cos k(x - ct).$$

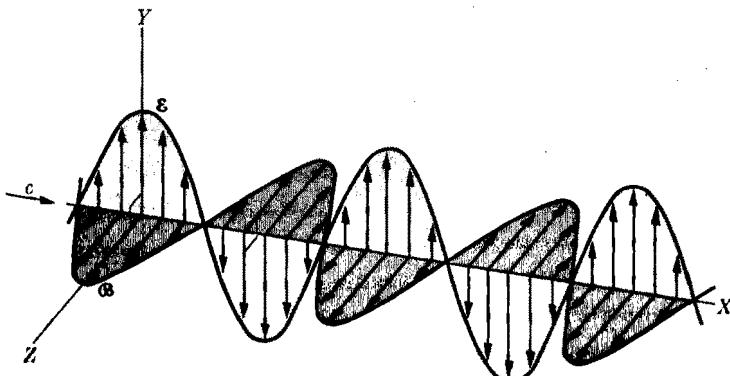


Fig. 19-2. Campos eléctrico y magnético en una onda electromagnética armónica plana.

Sustituyendo estas igualdades en la ec. (19.4), obtenemos

$$\mathcal{E}_0 = c\mathcal{B}_0 \quad \text{o} \quad \mathcal{B}_0 = \frac{1}{c} \mathcal{E}_0. \quad (19.13)$$

El estudiante puede verificar que se obtiene el mismo resultado usando la ec. (19.6) en vez de la ec. (19.4). La relación (19.13) entre las amplitudes significa que para los valores instantáneos, dados en las ecs. (19.12), también se cumple que

$$\mathcal{E} = c\mathcal{B} \quad \text{o} \quad \mathcal{B} = \frac{1}{c} \mathcal{E}. \quad (19.14)$$

Por medio de las ecs. (19.4) y (19.6) puede verificarse que las mismas relaciones son válidas para campos definidos en forma más general por las ecs. (19.9) y (19.11). De la ec. (19.14) se deduce que los campos \mathcal{E} y \mathcal{B} están en fase, es decir que toman valores extremos y nulos al mismo tiempo. En la fig. 19-2 se ha representado la onda electromagnética descrita por la ec. (19.12). El campo eléctrico oscila en el plano XY y el campo magnético en el plano XZ, lo cual corresponde a una onda plana polarizada linealmente. El plano de polarización se define como el plano en el cual oscila el campo eléctrico, en este caso el plano XY. Vemos que una onda electromagnética consta en realidad de dos ondas acopladas: la onda eléctrica y la onda magnética.

La ec. (19.12) no es la única solución en forma de onda plana de las ecs. (19.7) y (19.10). Por ejemplo: el campo eléctrico puede estar en la dirección del eje Z, en cuyo caso el campo magnético está en la dirección del eje Y con sentido negativo, o sea

$$\mathcal{E}_z = \mathcal{E}_0 \sin(kx - \omega t), \quad \mathcal{B}_y = -\mathcal{B}_0 \sin(kx - \omega t).$$

Tanto en esta onda como en la de la ec. (19.12) es posible usar cosenos en vez de senos, o aún agregar una fase constante arbitraria.

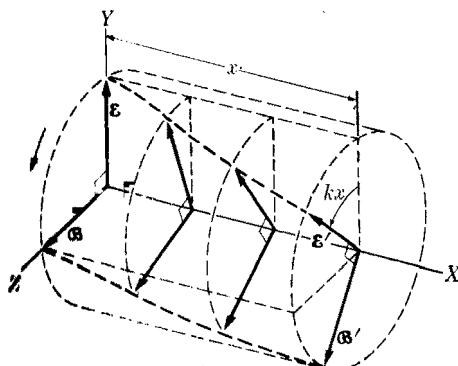


Fig. 19-3. Onda electromagnética polarizada circularmente. Los campos \mathcal{E} y \mathcal{B} giran alrededor de la dirección de propagación.

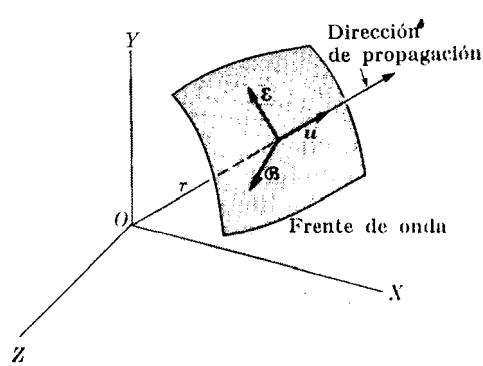


Fig. 19-4. Onda electromagnética esférica a grandes distancias de la fuente.

Otra solución en forma de onda es aquella en la cual los campos eléctrico y magnético tienen una magnitud constante pero rotan alrededor de la dirección de polarización dando como resultado una onda *polarizada circularmente* (fig. 19-3). Esta nueva solución se obtiene combinando las dos soluciones linealmente polarizadas tratadas anteriormente, con amplitudes iguales para cada campo y con la diferencia de fase apropiada. (Esta combinación es posible porque las ecuaciones de Maxwell son lineales en los campos \mathcal{E} y \mathcal{B}). La polarización circular puede ser derecha o izquierda, según sea el sentido de rotación de los campos. Las componentes de los campos eléctrico y magnético según dos ejes perpendiculares se expresan entonces por

$$\mathcal{E}_y = \mathcal{E}_0 \operatorname{sen}(kx - \omega t), \quad \mathcal{E}_z = \pm \mathcal{E}_0 \cos(kx - \omega t),$$

y

$$\mathcal{B}_y = \mp \mathcal{B}_0 \cos(kx - \omega t), \quad \mathcal{B}_z = \mathcal{B}_0 \operatorname{sen}(kx - \omega t),$$

que corresponden a un defasaje de $\pm\pi/2$ entre las componentes de cada campo, de acuerdo con lo dicho en la sección 12.9, siendo el campo magnético \mathcal{B} perpendicular al campo eléctrico \mathcal{E} en todo instante. Se sugiere que el estudiante sustituya las expresiones anteriores para los campos magnético y eléctrico en las ecs. (17.65) y que verifique que se satisfacen las ecuaciones de Maxwell. Si las amplitudes de las dos componentes ortogonales de cada campo son distintas, se obtiene *polarización elíptica*. Existen además otras soluciones de las ecuaciones de Maxwell que también tienen forma de ondas planas pero que no corresponden a un estado de polarización definido. Sin embargo, no las discutiremos aquí porque la comprensión de las ondas polarizadas linealmente y circularmente es suficiente para la mayoría de las aplicaciones.

Como la elección de los ejes *XYZ* es cuestión de conveniencia, podemos sacar la conclusión de que las soluciones en forma de onda plana que hemos obtenido de las ecuaciones de Maxwell son completamente generales, y que

las ondas electromagnéticas planas son transversales, con los campos \mathcal{E} y \mathcal{B} perpendiculares entre sí y a la dirección de propagación de las ondas.

Esta predicción teórica de las ecuaciones de Maxwell ha sido ampliamente confirmada por la experiencia y da lugar a varios fenómenos que serán considerados en los capítulos siguientes. Existen, además de las soluciones de las ecuaciones de Maxwell en forma de ondas planas, las ondas electromagnéticas cilíndricas y esféricas. A grandes distancias de la fuente, una porción pequeña de una onda cilíndrica o de una esférica puede considerarse prácticamente como plana; en este caso los campos eléctrico y magnético son también perpendiculares entre sí y a la dirección de propagación (dirección radial), como se indica en la fig. 19-4.

19.3 Energía y momentum de una onda electromagnética

Si usamos la ec. (16.40), la densidad de energía asociada con el campo eléctrico de una onda electromagnética es

$$E_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 \mathcal{E}^2.$$

Análogamente, usando las ecs. (19.14), $\mathcal{B} = \mathcal{E}/c$, y (19.8), $c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$, se obtiene para la densidad de energía magnética dada por la ec. (17.25)

$$\mathbf{E}_\mathcal{B} = \frac{1}{2\mu_0} \mathcal{B}^2 = \frac{1}{2\mu_0 c^2} \mathcal{E}^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 \mathcal{E}^2,$$

de modo que $E_\mathcal{B} = E_\mathcal{E}$. O sea: la densidad de energía eléctrica de una onda electromagnética es igual a la densidad de energía magnética. La densidad de energía total es

$$E = E_\mathcal{E} + E_\mathcal{B} = \epsilon_0 \mathcal{E}^2. \quad (19.15)$$

La intensidad de la onda electromagnética (es decir, la energía que pasa a través de la unidad de área en la unidad de tiempo) es, por analogía con la ec. (18.44),

$$I = EC = c \epsilon_0 \mathcal{E}^2. \quad (19.16)$$

La intensidad media de la onda electromagnética es $\bar{I} = c \bar{\mathcal{E}}^2$. En el caso de una onda electromagnética armónica, $\bar{\mathcal{E}}^2 = \mathcal{E}_0^2 \operatorname{sen}^2 k(x - ct) = \frac{1}{2} \mathcal{E}_0^2$ de modo que la intensidad media es

$$\bar{I} = \frac{1}{2} c \epsilon_0 \mathcal{E}_0^2. \quad (19.17)$$

Hallemos ahora el producto vectorial $\mathcal{E} \times \mathcal{B}$ para una onda electromagnética plana. La dirección de $\mathcal{E} \times \mathcal{B}$ es perpendicular al frente de onda apuntando por consiguiente en la dirección de la onda (fig. 19.5). Su módulo es

$$|\mathcal{E} \times \mathcal{B}| = \mathcal{E} \mathcal{B} = \frac{1}{c} \mathcal{E}^2.$$

El módulo del vector $c \mathcal{E} \times \mathcal{B}$ es $c \mathcal{E}^2$. Luego $c^2 \epsilon_0 \mathcal{E} \times \mathcal{B}$, llamado *vector de Poynting*, tiene módulo igual a I ; por lo tanto, el flujo de esta cantidad a través de una superficie S , dado por

$$\int_S c^2 \epsilon_0 (\mathcal{E} \times \mathcal{B}) \cdot \mathbf{u}_N dS = \frac{dE}{dt}, \quad (19.18)$$

es la energía que pasa a través del área S en la unidad de tiempo, y por esa razón lo hemos llamado dE/dt .

En el capítulo 11 verificamos el hecho de que la energía y el momentum están íntimamente relacionados y que forman un cuadrivector (lo cual es un requisito del principio de relatividad). Podemos suponer entonces que una onda electromagnética transporta, además de su energía, un cierto momentum. Como la radiación electromagnética se propaga con velocidad c , podemos usar la relación entre energía y momentum dada por la ec. (11.17), $p = \hbar E/c^2$ (con $\hbar = e$), para obtener el momentum p por unidad de volumen asociado con una onda electro-

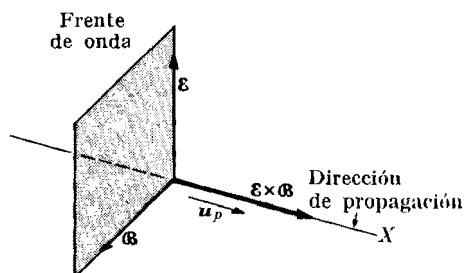


Fig. 19.5. Definición de la dirección del flujo de energía en una onda electromagnética.

magnética. Se tiene

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{E}}{c} = \frac{\epsilon_0 \mathcal{E}^2}{c} = \epsilon_0 |\mathcal{E} \times \mathcal{B}|. \quad (19.19)$$

El estudiante debe verificar que $\epsilon_0 |\mathcal{E} \times \mathcal{B}|$ tiene dimensiones de $\text{m}^{-2} \text{ kg s}^{-1}$, que corresponden a momentum por unidad de volumen. Como el momentum debe tener dirección igual a la de propagación, podemos escribir la ecuación anterior en la siguiente forma vectorial

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{E}}{c} \mathbf{u} = \epsilon_0 \mathcal{E} \times \mathcal{B},$$

donde \mathbf{u} es un vedor en la dirección de propagación. Aunque la relación expresada por la ec. (19.19) ha sido establecida para la unidad de volumen, tenemos que a una cantidad arbitraria de energía E en una onda plana corresponde un momentum $p = E/c$ en la dirección de propagación.

Si una onda electromagnética tiene momentum, tiene también momentum angular. El momentum angular por unidad de volumen es

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \epsilon_0 \mathbf{r} \times (\mathcal{E} \times \mathcal{B}).$$

Esto es lo que podría llamarse momentum angular "orbital" de la radiación, por analogía con el momentum angular de una partícula que describe una órbita. La radiación electromagnética posee además un momentum angular intrínseco, o espín, similar al espín de las partículas elementales (recordar el ejemplo 15.6). Puede demostrarse que, para una onda plana polarizada circularmente, el espín tiene una componente en la dirección de propagación que es igual a $\mp E/\omega$, según sea la polarización en el sentido de las agujas del reloj o a la inversa. En una onda polarizada linealmente el valor medio de la componente del espín en la dirección de propagación es cero.

En consecuencia, cuando una partícula cargada absorbe o emite radiación electromagnética no sólo cambian su energía y su momentum, sino también su momentum angular, lo cual ha sido verificado experimentalmente tanto en forma directa como indirecta. Resumiendo:

una onda electromagnética lleva momentum y momentum angular además de energía.

Este hecho no es sorprendente. La interacción electromagnética entre dos cargas eléctricas implica un intercambio de energía y de momentum entre las mismas. Esto se lleva a cabo por intermedio del campo electromagnético, que es el vehículo de la energía y del momentum intercambiados. La existencia de un momentum asociado con el campo electromagnético ha sido ya sugerida en la sección 15.14. La relación $p = E/c$ entre energía y momentum de la radiación electromagnética es particularmente importante. Tendremos oportunidad de referirnos nuevamente a ella varias veces y señalaremos alguna evidencia experimental en apoyo de esta suposición trascendental.

EJEMPLO 19.1. Discutir la presión de radiación.

Solución: Como las ondas electromagnéticas poseen momentum, dan lugar a cierta presión cuando se reflejan o absorben en la superficie de un cuerpo. El principio básico es el mismo que en el caso de la presión ejercida por un gas en las paredes de un recipiente, como se explicó en los ejemplos 9.2 y 9.16.

Consideremos en primer lugar algunos casos simples. Supongamos que una onda electromagnética plana incide perpendicularmente sobre una superficie perfectamente absorbente (fig. 19-6). El momentum incidente por unidad de volumen es p y el total de momentum de la radiación que incide sobre la superficie A en la unidad de tiempo se obtiene multiplicando p por el volumen cA , o sea que es pcA . Si la radiación es completamente absorbida por la superficie, la cantidad anterior es

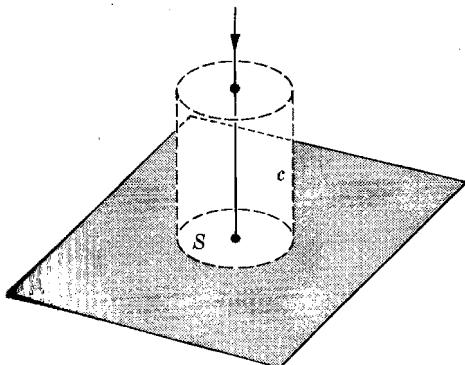


Fig. 19-6. La presión de radiación para incidencia normal.

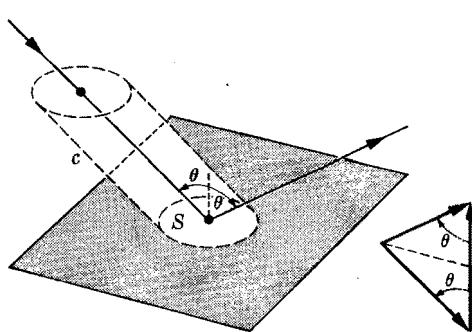


Fig. 19-7. La presión de radiación para incidencia oblicua. A la derecha se muestra el diagrama de momentum.

también el momentum absorbido por la superficie A en la unidad de tiempo, o sea la fuerza que actúa sobre A . Dividiendo por A obtenemos la presión debida a la radiación

$$P_{\text{rad}} = cp = E = \epsilon_0 c^2.$$

En consecuencia, para incidencia normal, la presión de radiación sobre un absorbente perfecto es igual a la densidad de energía en la onda.

Por otra parte, si la superficie es perfectamente reflectora, la radiación reflejada tiene un momentum de módulo igual al de la incidente pero en dirección opuesta. Por lo tanto la variación de momentum por unidad de volumen es $2p$, y la presión de radiación es entonces

$$P_{\text{rad}} = 2cp = 2E = 2\epsilon_0 c^2.$$

Estos resultados pueden generalizarse para el caso de incidencia oblicua (fig. 19-7), en el cual el cambio de momentum de radiación por unidad de volumen en la superficie perfectamente reflectora es $2p \cos \theta$ y la correspondiente presión de radiación es

$$P_{\text{rad}} = 2cp \cos \theta = 2E \cos \theta.$$

El estudiante puede verificar que éste es un resultado idéntico al del ejemplo 9.16, si se reemplaza c por la velocidad molecular v y p por mv . Si la radiación se propaga en todas direcciones, tenemos que integrar sobre todas las orientaciones, como

Hacemos en el ejemplo 9.16, obteniendo como resultado

$$P_{\text{rad}} = \frac{3}{4}cp = \frac{3}{4}E.$$

Cuando la superficie es un absorbente perfecto, la variación de momentum normal a la superficie se reduce a la mitad del valor obtenido anteriormente (porque no hay onda reflejada que lleve momentum), resultando

$$P_{\text{rad}} = \frac{1}{2}E.$$

La existencia de la presión de radiación, que se ha verificado experimentalmente y que es responsable de varios fenómenos importantes, constituye una verificación indirecta de la ec. (19.19). Por ejemplo, la curvatura de la cola de un cometa puede explicarse en función de la presión de radiación debida a la radiación electromagnética del sol. Para estimar la presión de radiación sobre la superficie terrestre, debemos tener en cuenta que la energía incidente por unidad de área en la unidad de tiempo es alrededor de $1,4 \times 10^8 \text{ W m}^{-2}$, lo cual corresponde a una densidad de energía (dividiendo por c) igual a $4,7 \times 10^{-6} \text{ J m}^{-3}$. Suponiendo que la tierra es un absorbente perfecto y que la radiación viene de todas las direcciones, la presión de radiación es $P_{\text{rad}} = \frac{1}{2}E = 1,6 \times 10^{-6} \text{ N m}^{-2}$. Compare el estudiante este valor con el de la presión atmosférica, que es 10^5 N m^{-2} aproximadamente.

19.4 Radiación por un dipolo eléctrico oscilante

En lo estudiado hasta ahora, hemos considerado las ondas electromagnéticas sin mencionar cómo se producen, o sea, sin explicar cuáles son las fuentes de las ondas electromagnéticas. Si estamos por ejemplo tratando las ondas elásticas (como el sonido), decimos que la fuente de las ondas es algún cuerpo que vibra, tal como la membrana de un tambor o la cuerda de un violín. En el caso de las ondas electromagnéticas, sus fuentes son evidentemente las mismas que las del campo electromagnético, o sea las cargas eléctricas en movimiento. Dado un conjunto de cargas en movimiento, las ecuaciones de Maxwell permiten calcular (en principio) el campo electromagnético que producen dichas cargas y por lo tanto las ondas electromagnéticas resultantes. En vez de considerar la solución general de las ecuaciones de Maxwell para cargas en movimiento arbitrario (lo cual es un problema teórico muy importante, pero demasiado complicado para ser discutido en este libro), concentraremos nuestra atención en dos casos importantes. Uno es el de cargas en movimiento formando un dipolo eléctrico oscilante y el otro el de cargas en movimiento que corresponden a un dipolo magnético oscilante.

El caso de un dipolo eléctrico oscilante se da cuando el movimiento de las cargas puede describirse colectivamente por medio de un dipolo eléctrico cuyo momento varía en el tiempo según la ley $\Pi = \Pi_0 \sin \omega t$.^{*} Por ejemplo, éste podría ser el caso de un electrón; o el de la corriente oscilante en una antena rectilínea de una radiodifusora. Cuando el momento dipolar eléctrico es constante, el único campo producido es eléctrico, como se explicó en la sección 14.11. En cambio, cuando el momento dipolar eléctrico oscila, el campo eléctrico también

* En este capítulo se usa el símbolo Π para el momento dipolar eléctrico para que no se confunda con el momentum y la presión.

oscila y por lo tanto depende del tiempo. Esto significa que hay además un campo magnético, como lo prescribe la ley de Ampère-Maxwell. Esto se puede también deducir del hecho de que un dipolo eléctrico oscilante es equivalente a una corriente rectilínea oscilante y una corriente eléctrica siempre produce un campo magnético a su alrededor.

La solución de las ecuaciones de Maxwell para el caso de un dipolo eléctrico oscilante es un problema matemático demasiado difícil para ser presentado aquí; podemos sin embargo usar nuestra intuición física para determinar las características principales de dicha solución. El efecto de retardo debido a la velocidad finita de propagación de las ondas electromagnéticas es despreciable en puntos muy cercanos al dipolo eléctrico porque la distancia r es muy pequeña (recordar lo discutido en la sección 15.14). El campo es entonces similar al creado por un dipolo eléctrico estático, campo que se calculó en la sección 14.11. Es decir: si suponemos que el eje Z está orientado paralelamente al dipolo, podemos escribir las componentes del campo eléctrico en la forma

$$\epsilon_r = \frac{2\pi \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{2\pi I_0 \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \operatorname{sen} \omega t$$

(19.20)

$$\epsilon_\theta = \frac{\Pi \operatorname{sen} \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{\Pi_0 \operatorname{sen} \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \operatorname{sen} \omega t,$$

siendo despreciable el campo magnético. Por el contrario, a grandes distancias, la velocidad finita de propagación de las ondas produce una modificación en el campo. La solución de la ecuación de onda para ondas esféricas de igual amplitud en todas las direcciones, dada en la sección 18.11, sugiere que en este caso (aunque no hay simetría esférica sino cilíndrica alrededor del eje de oscilación del dipolo) el campo electromagnético debe depender asintóticamente de la distancia en la forma $1/r$ en vez de $1/r^3$ como para pequeñas distancias. (Esto se confirma resolviendo las ecuaciones de Maxwell). A grandes distancias, además, cuando una porción pequeña del frente de onda parece una onda plana, el campo eléctrico debe ser perpendicular a la dirección de propagación; como la dirección de propagación es la misma que la del vector posición r , se tiene $\epsilon_r = 0$. El campo eléctrico tiene entonces módulo

$$\epsilon = \frac{I_0 \operatorname{sen} \theta}{4\pi\epsilon_0 r} \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \operatorname{sen}(kr - \omega t),$$

(19.21)

y dirección como se indica en la fig. 19.8. El campo magnético, que corresponde a una corriente en la dirección del eje Z , se debe representar por líneas de fuerza

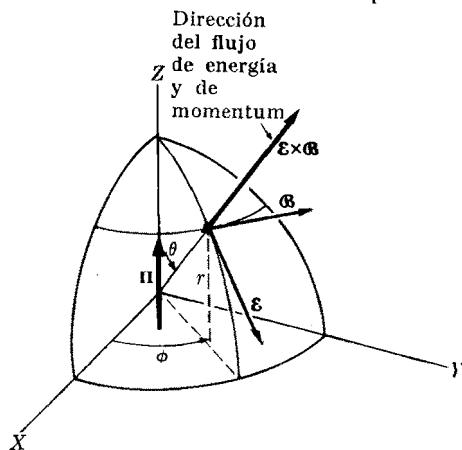


Fig. 19.8. Campos eléctrico y magnético producidos por un dipolo eléctrico oscilante.

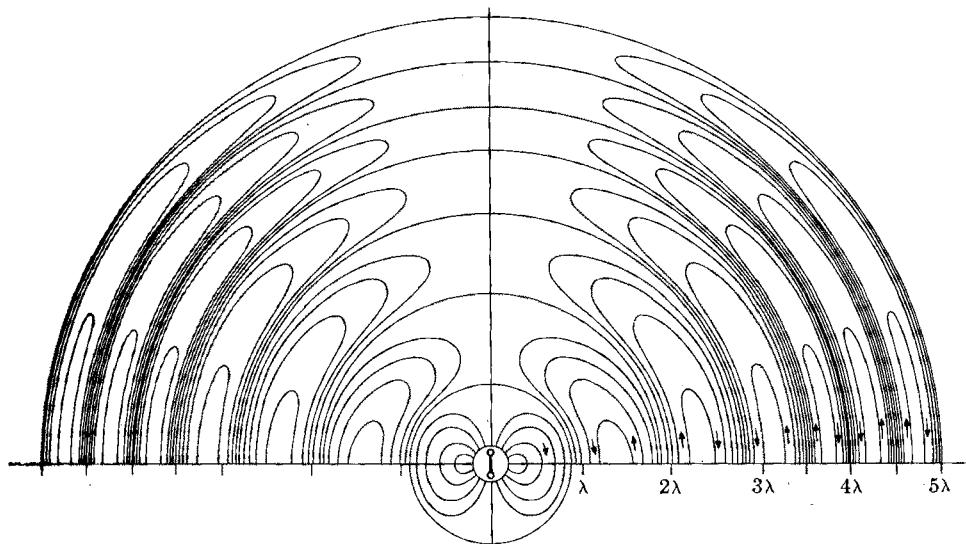


Fig. 19-9. Líneas del campo eléctrico producido por un dipolo eléctrico oscilante.

que son circunferencias paralelas al plano XY. Usando la ec. (19.14) tenemos

$$\mathcal{B} = \frac{1}{c} \mathcal{E} = \frac{\Pi_0 \operatorname{sen} \theta}{4\pi\epsilon_0 cr} \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \operatorname{sen}(kr - \omega t), \quad (19.22)$$

con la orientación indicada en la fig. 19-8, de modo que \mathcal{E} y \mathcal{B} son perpendiculares. Nótese que tanto \mathcal{E} como \mathcal{B} son nulos para $\theta = 0$, o sea para los puntos que están sobre el eje Z. Esto significa que la amplitud de la onda electromagnética proveniente de un dipolo eléctrico oscilante es cero en la dirección de oscilación. Por otra parte, $\operatorname{sen} \theta$ alcanza su valor máximo cuando $\theta = \pi/2$, o sea en los puntos que están sobre el plano XY. En consecuencia, la onda electromagnética proveniente de un dipolo eléctrico oscilante tiene su máximo de intensidad en el plano ecuatorial. Las ondas están polarizadas linealmente, oscilando el campo eléctrico en planos meridianos. En la fig. 19-9 se muestran las líneas de campo eléctrico en un plano meridiano; cada lazo corresponde a una oscilación completa. Las líneas de campo magnético son circunferencias paralelas al plano XY con sus centros en el eje Z.

Como el vector $\mathcal{E} \times \mathcal{B}$ tiene la misma dirección que \mathbf{r} , la energía y el momentum fluyen desde el dipolo eléctrico en dirección radial, por lo que para mantener la oscilación del dipolo eléctrico se le debe suministrar energía. Si usamos las ecs. (19.15) y (19.21), encontramos que a grandes distancias del dipolo eléctrico oscilante la densidad de energía en la onda es

$$E = \epsilon_0 \mathcal{E}^2 = \frac{11\Pi_0 \operatorname{sen}^2 \theta}{16\pi^2 \epsilon_0 r^2} \cdot \frac{\omega^4}{c^4} \operatorname{sen}^2(kr - \omega t).$$

La densidad promedio de energía es, ya que $\overline{E} = \frac{\Pi_0^2 \omega^4}{32\pi^2 c^4 \epsilon_0 r^2} \sin^2 \theta$

$$\bar{E} = \frac{\Pi_0^2 \omega^4}{32\pi^2 c^4 \epsilon_0 r^2} \sin^2 \theta. \quad (19.23)$$

La intensidad de la radiación emitida por el dipolo eléctrico oscilante (es decir la energía que pasa por unidad de área y por unidad de tiempo en el sentido de propagación) es, según la ec. (19.16),

$$I(\theta) = c\bar{E} = \frac{\Pi_0^2 \omega^4}{32\pi^2 c^3 \epsilon_0 r^2} \sin^2 \theta. \quad (19.24)$$

Esta expresión presenta dos particularidades interesantes. En primer lugar muestra la dependencia funcional $1/r^2$ que era de esperarse de acuerdo con la discusión de ondas esféricas que hicimos en la sección 18.11. Tiene además una dependencia angular puesto que es proporcional a $\sin^2 \theta$. En consecuencia, la intensidad es máxima en el plano ecuatorial y nula según el eje del dipolo eléctrico oscilante. Esto significa que *un dipolo eléctrico oscilante no irradia energía según su eje*. La dependencia angular de $I(\theta)$ está representada en la fig. 19-10.

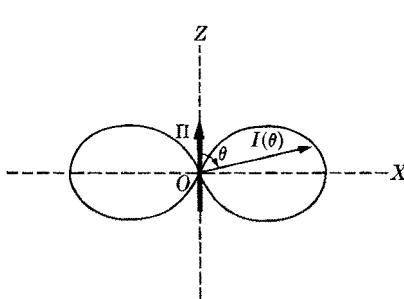


Fig. 19-10. Dependencia angular de la intensidad de la radiación electromagnética producida por un dipolo eléctrico oscilante.

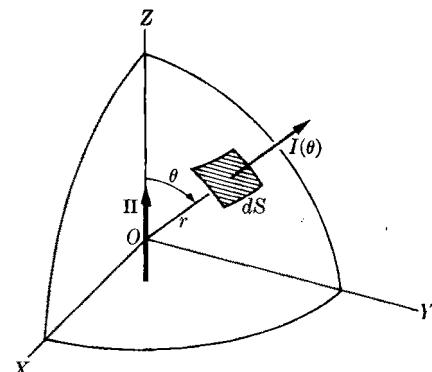


Fig. 19-11. Cálculo de la energía total que un dipolo eléctrico oscilante irradia por unidad de tiempo.

Para calcular la energía total irradiada por el dipolo en la unidad de tiempo, debemos proceder como sigue. Teniendo en cuenta que la energía fluye en dirección radial (ver fig. 19-8), podemos trazar una esfera muy grande alrededor del dipolo (fig. 19-11). La energía que pasa por unidad de tiempo a través de la superficie elemental dS es $I(\theta) dS$ por lo que la energía total irradiada en la unidad de tiempo es

$$\frac{dE}{dt} = \int_{\text{esfera}} I(\theta) dS. \quad (19.25)$$

El cálculo de esta integral es un ejercicio matemático puro que se omitirá; el resultado es

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\Pi_0^2 \omega^4}{12\pi\epsilon_0 c^3}. \quad (19.26)$$

Como el momento dipolar eléctrico se puede expresar en la forma qz , donde q es la carga que oscila y $z = z_0 \operatorname{sen} \omega t$, podemos reemplazar Π_0 por qz_0 , donde z_0 es la amplitud de las oscilaciones. En muchos casos lo que oscila es un protón o un electrón dentro de un núcleo o de un átomo, en cuyo caso q es la carga fundamental $\pm e$. La ec. (19.26) se transforma entonces en

$$\frac{dE}{dt} = \frac{e^2 z_0^2 \omega^4}{12\pi\epsilon_0 c^3}. \quad (19.27)$$

En el caso de un electrón en un átomo, la cantidad z_0 es del orden del tamaño del átomo, o sea de alrededor de 10^{-10} m. Introduciendo los valores de las otras constantes, vemos que para la radiación dipolar eléctrica atómica es

$$\frac{dE}{dt} \sim 10^{-74} \omega^4 \text{ W}.$$

En la región óptica, ω es del orden de 10^{15} s⁻¹, lo cual significa que $dE/dt \sim 10^{-14}$ W ó 0,1 MeV s⁻¹, cantidad que es muy pequeña según los patrones de la ingeniería pero apreciable desde el punto de vista atómico.

La radiación dipolar eléctrica es una de las maneras más efectivas de producir ondas electromagnéticas y constituye el mecanismo más importante por el cual átomos, moléculas y núcleos emiten (o absorben) radiación electromagnética. Sin embargo, para estudiar la radiación dipolar eléctrica por átomos, moléculas o núcleos, debemos usar los métodos de la mecánica cuántica. En consecuencia, los resultados que se indican aquí y en las secciones que siguen sólo pueden dar una estimación aproximada de los órdenes de magnitud involucrados. Uno de los resultados experimentales más importantes a considerar en el tratamiento cuántico es el de que un átomo no emite radiación continuamente sino por destellos. Otro resultado experimental que debe explicarse es que la radiación emitida por los átomos (o moléculas, o núcleos) se compone de un conjunto bien definido de frecuencias $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots$ características de cada átomo, molécula o núcleo, que se denomina *espectro de emisión* de la sustancia; mencionamos este hecho en la sección 16.7.

Como dijimos al discutir la fig. 19-9, la radiación dipolar eléctrica está polarizada, yaciendo siempre el campo eléctrico en un plano meridiano; sin embargo, el ojo humano parece no ser sensible a la dirección de polarización de una onda electromagnética, por lo que no podemos distinguir esta importante propiedad a simple vista. En cambio, es interesante que ciertos insectos parecen ser sensibles a la polarización. Además, en la mayoría de las sustancias, los dipolos atómicos radiantes están orientados al azar, de modo que no se observa polarización alguna en la radiación total emitida por la sustancia.

EJEMPLO 19.2. Aplicar la ec. (19.27) para calcular la potencia transmitida por la antena de una radioemisora.

Solución: En esencia, una antena es simplemente un alambre de longitud z_0 en el cual se mantiene una corriente oscilante. La corriente está relacionada con las cargas por $I = dq/dt$, de modo que la amplitud de corriente es $I_0 = q\omega$; en consecuencia $H_0 = qz_0 = I_0 z_0 / \omega$. Introduciendo esta relación en la ec. (19.26), tenemos

$$\frac{dE}{dt} = \frac{I_0^2 \omega^2 z_0^2}{12\pi\epsilon_0 c^3}. \quad (19.28)$$

Esta igualdad expresa la potencia que requiere una radioemisora de frecuencia ω . En nuestra discusión de la ley de Ohm aplicada a circuitos con corrientes alternas (sección 17.10) vimos que la potencia media requerida para mantener una corriente es $\frac{1}{2}RI^2$ [ec. (17.40)]. De acuerdo con esto, podemos escribir la ec. (19.28) en la forma

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2} \left(\frac{\omega^2 z_0^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \right) I_0^2, \quad (19.29)$$

y por analogía llamar a

$$R = \frac{\omega^2 z_0^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} = \frac{2\pi}{3} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \left(\frac{z_0}{\lambda} \right)^2 \quad (19.30)$$

la resistencia de radiación de la antena. Se expresa en ohms, como puede verificarse escribiéndola en función de unidades fundamentales. Por supuesto que la resistencia total de la antena es la resistencia de radiación más la resistencia de conducción. Introduciendo valores numéricos en la ec. (19.30), obtenemos $R = 787 (\mu_0/\lambda)^2$ ohms. Notar que las ecs. (19.29) y (19.30) para una antena rectilínea han sido obtenidas por medio de la aproximación dipolar eléctrica, por lo que las mismas son válidas sólo cuando la longitud z_0 es muy pequeña comparada con la longitud de onda de la radiación.

Como ejemplo, consideremos una antena rectilínea de 30 m de longitud que lanza ondas electromagnéticas de frecuencia 5×10^6 Hz. El valor medio cuadrático de la corriente es 20 A. Usando la ec. (19.30) con $\omega = 2\pi\nu = 3,14 \times 10^6$ s⁻¹ y $z_0 = 30$ m, obtenemos $R = 1,97 \Omega$ para su resistencia de radiación. Como $I_{\text{rmc}} = I_0/\sqrt{2}$ (ver problema 17.42), tenemos $I_{\text{rmc}}^2 = \frac{1}{2}I_0^2$. Por lo tanto la potencia irradiada es

$$\frac{dE}{dt} = RI_{\text{rmc}}^2 \sim 400 \text{ W.}$$

Notar que en este caso $\lambda = c/v = 600$ m, de modo que la aproximación es correcta ya que $z_0/\lambda \ll 1$.

19.5 Radiación por un dipolo magnético oscilante

Otra fuente importante de ondas electromagnéticas es el dipolo magnético oscilante. Su estudio es muy similar al del dipolo eléctrico, sólo que se intercambian los papeles de los campos magnético y eléctrico.

En la sección 15.6 definimos un dipolo magnético como una pequeña espira de corriente, siendo el momento magnético $\vec{M} = IA$, donde I es la corriente y A el área de la espira. Supongamos que la espira está en el plano XY con su centro en el origen (fig. 19-12). Si la corriente oscila de acuerdo a la ley $I = I_0 \sin \omega t$, el momento magnético es $\vec{M} = M_0 \sin \omega t$, donde $M_0 = I_0 A$. Un dipolo

magnético estático produce solamente un campo magnético constante, pero cuando el dipolo magnético oscila, su campo magnético en todo punto del espacio también oscila o sea que depende del tiempo. Esto significa que hay también un campo eléctrico, de acuerdo con lo dicho al hablar de la ley de Faraday-Maxwell.

Como en el caso del dipolo eléctrico oscilante, omitiremos, a causa de las dificultades matemáticas, los detalles de cómo se obtienen las expresiones para los campos eléctrico y magnético. En puntos cercanos al dipolo magnético, el efecto de retardación debido a la finitud de la velocidad de propagación de las ondas electromagnéticas es despreciable porque la distancia r es muy pequeña. El campo es entonces similar al de un dipolo magnético estático, estudiado en la sección 15.6, o sea

$$\mathcal{B}_r = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\mathcal{M} \cos \theta}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\mathcal{M}_0 \cos \theta}{r^3} \sin \omega t, \quad (19.31)$$

$$\mathcal{B}_\theta = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathcal{M} \sin \theta}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathcal{M}_0 \sin \theta}{r^3} \sin \omega t,$$

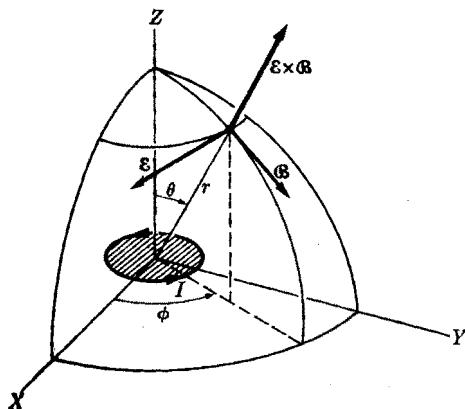


Fig. 19-12. Campos eléctrico y magnético producidos por un dipolo magnético oscilante.

de modo que las líneas de campo eléctrico son circunferencias con centro en el eje Z. Con estas aproximaciones, los campos se expresan por

$$\epsilon = \frac{\mu_0 c}{4\pi} \frac{\mathcal{M}_0 \sin \theta}{r} \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \sin (kr - \omega t) \quad (19.32)$$

$$\mathcal{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathcal{M}_0 \sin \theta}{r} \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \sin (kr - \omega t).$$

Observemos que la relación $\mathcal{B} = \epsilon/c$ es válida aún. La orientación relativa de los campos ϵ y \mathcal{B} de un dipolo magnético oscilante se ilustra en la fig. 19-12. Nótese

que el campo eléctrico es despreciable. A grandes distancias, sin embargo, el hecho de que la velocidad de propagación de las ondas sea finita, produce una modificación notable en el campo. Como en el caso de un dipolo eléctrico, podemos esperar una solución que dependa asintóticamente de $1/r$ en vez de $1/r^3$, como en las ecs. (19.31), estando los campos eléctrico y magnético en un plano perpendicular a la dirección de propagación de las ondas. Podemos suponer también que los campos eléctrico y magnético intercambian sus papeles con respecto a los que desempeñan en el dipolo eléctrico; es decir: el campo magnético estará en un plano meridiano y el campo eléctrico estará en una dirección transversal,

que el vector $\mathcal{E} \times \mathcal{B}$ tiene dirección radial. La onda está polarizada linealmente con el campo magnético oscilando en un plano meridiano; en otras palabras, el plano de polarización está rotado 90° con respecto al de las ondas dipolares eléctricas. Esto suministra un medio para distinguir entre las radiaciones dipolar eléctrica y dipolar magnética.

Con el mismo razonamiento usado para obtener la ec. (19-23), se encuentra que la densidad media de energía de la radiación emitida por un dipolo magnético oscilante es

$$E(\theta) = \frac{\mathcal{M}_0^2 \omega^4}{32\pi^2 \epsilon_0 c^6 r^2} \sin^2 \theta. \quad (19.33)$$

La intensidad de la radiación emitida por el dipolo magnético, $I(\theta) = cE(\theta)$, es nula según el eje del dipolo (eje Z) y máxima en el plano ecuatorial, situación análoga a la encontrada en el caso del dipolo eléctrico oscilante. La energía media emitida en la unidad de tiempo por el dipolo magnético oscilante es

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\mathcal{M}_0^2 \omega^4}{12\pi\epsilon_0 c^5}. \quad (19.34)$$

Este resultado se obtiene siguiendo el mismo procedimiento sugerido para el dipolo eléctrico.

En el caso de un electrón en un átomo tenemos, según la ec. (15.27), que $\mathcal{M}_0 = -e(2m_e)L$, donde L es el momentum angular orbital del electrón; por lo tanto

$$\frac{dE}{dt} = \frac{(e/2m_e)^2 L^2 \omega^4}{12\pi\epsilon_0 c^5}. \quad (19.35)$$

La cantidad $e/2m_e$ vale $1,759 \times 10^{11} \text{ C kg}^{-1}$ y el momentum angular L es del orden de $10^{-34} \text{ J s}^{-1}$ (ver ejemplo 15.7), de modo que

$$\frac{dE}{dt} \approx 10^{-80} \omega^4 \text{ W}.$$

Cuando comparamos este resultado con el correspondiente a un dipolo eléctrico, llegamos a la conclusión de que para átomos (y también para moléculas), el cociente entre la intensidad de la radiación dipolar magnética y la de la dipolar eléctrica es del orden de 10^{-6} . Esto indica que para una misma frecuencia, la radiación dipolar magnética emitida por átomos es despreciable frente a la dipolar eléctrica y solamente se debe tener en cuenta cuando por alguna razón no hay radiación dipolar eléctrica; este punto no se discutirá aquí porque para ello se necesita aplicar la mecánica cuántica. En realidad, como $L = m_r p$, y r y z son del mismo orden de magnitud, se encuentra que

$$\left(\frac{dE}{dt} \right)_{\text{dipolo magnético}} \approx \left(\frac{p}{c} \right)^2 \left(\frac{dE}{dt} \right)_{\text{dipolo eléctrico}},$$

de modo que sólo son comparables para electrones muy rápidos. En los núcleos, por el contrario, la radiación dipolar magnética es relativamente más intensa que en los átomos y moléculas.

EJEMPLO 19.3. Estudiar la radiación dipolar magnética emitida por una antena.

Solución: Aplicando la fórmula (19.34), con $\mathcal{M}_0 = I_0 A$, a una antena radiante, se encuentra que la potencia media requerida para hacerla funcionar es

$$\frac{dE}{dt} = \frac{I_0^2 A^2 \omega^4}{12\pi\epsilon_0 c^5}. \quad (19.36)$$

Comparando con la ec. (19.28) correspondiente a una antena dipolar eléctrica, resulta

$$\frac{(dE/dt)_{\text{dipolo magnético}}}{(dE/dt)_{\text{dipolo eléctrico}}} = \left(\frac{A\omega}{z_0 c}\right)^2.$$

Teniendo en cuenta que $\omega/c = k = 2\pi/\lambda$ y que A es del mismo orden de magnitud que z_0 , se obtiene

$$\frac{(dE/dt)_{\text{dipolo magnético}}}{(dE/dt)_{\text{dipolo eléctrico}}} \approx \left(\frac{2\pi z_0}{\lambda}\right)^2. \quad (19.37)$$

Como para las antenas de radiodifusión, z_0 es normalmente mucho menor que λ , nuevamente llegamos a la conclusión de que el modo magnético de la radiación es mucho más débil que el modo eléctrico. Resulta instructivo aplicar la ec. (19.37) al caso atómico. En este caso z_0 es del orden de 10^{-10} m y en la región óptica λ es de alrededor de 10^{-7} m, por lo que para el cociente que aparece en la ec. (19.37) se encuentra un valor del orden de 10^{-6} , que está de acuerdo con nuestra estimación anterior. Por otra parte, en los núcleos, z_0 es del orden de 10^{-14} m y λ del orden de 10^{-18} m, de modo que el cociente (19.37) vale aproximadamente 10^{-4} , por lo que la radiación dipolar magnética es relativamente más importante que en el caso atómico.

EJEMPLO 19.4. Obtener la resistencia de radiación de una antena en forma de espira. Aplicar el resultado al caso de una antena circular de 30 m de longitud en la que oscila una corriente de frecuencia $5,0 \times 10^6$ Hz y valor medio cuadrático de 20 A.

Solución: Según la ec. (19.36) se tiene

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2} \left(\frac{A^2 \omega^4}{6\pi\epsilon_0 c^5}\right) I_0^2,$$

de modo que la resistencia de la radiación es

$$R = \frac{A^2 \omega^4}{6\pi\epsilon_0 c^5} = \frac{8\pi^3}{3} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \left(\frac{A}{\lambda^2}\right)^2 = 31,170 \left(\frac{A}{\lambda^2}\right)^2 \text{ ohms.}$$

En nuestro caso el radio es $30/2\pi$ m por lo que el área es $A = 900/4\pi = 72 \text{ m}^2$; la longitud de onda es la misma que en el ejemplo 19.2. Por consiguiente $R = 0,0012 \Omega$. La potencia media irradiada es

$$\frac{dE}{dt} = RI_{\text{rms}}^2 = 0,24 \text{ W},$$

valor que debe compararse con el obtenido en el ejemplo 19.2.

10.8 Radiación por multipolos oscilantes de orden superior

En las dos secciones anteriores hemos considerado la radiación emitida por dipolos eléctricos y magnéticos. En los capítulos 14 y 15 hemos hablado de multipolos de orden superior, tanto magnéticos como eléctricos, relacionados con diferentes distribuciones de cargas y de corrientes. Si estos multipolos oscilan, producen ondas electromagnéticas cuya distribución angular y estado de polarización difieren de los de las ondas dipolares. En general, cuanto mayor es el orden del multipolo, menor es la intensidad de radiación en comparación con la de un dipolo de dimensiones similares y de la misma frecuencia. Por ejemplo, si r_0 es el orden de magnitud de las dimensiones del sistema y λ la longitud de onda, el cociente entre la intensidad de la radiación cuadrupolar eléctrica y la de la dipolar eléctrica es del orden de $(r_0/\lambda)^2$. En los átomos, r_0 es del orden de 10^{-10} m y para la luz λ es del orden de 10^{-7} m, de modo que $(r_0/\lambda)^2$ vale aproximadamente 10^{-6} . Por otra parte, en los núcleos r_0 es del orden de 10^{-14} m y λ es del orden de 10^{-12} m, de modo que $(r_0/\lambda)^2$ vale aproximadamente 10^{-4} , por lo que la radiación cuadrupolar eléctrica es más importante que en los átomos. Nótese que en ambos casos la intensidad de la radiación cuadrupolar eléctrica es del mismo orden que la de la dipolar magnética. Estos resultados muestran que la radiación dipolar eléctrica es la más importante en sistemas atómicos. Por lo contrario, en ciertos núcleos debe tenerse en cuenta la radiación cuadrupolar eléctrica y la dipolar magnética y, en algunos casos, también la octopolar eléctrica y la cuadrupolar magnética. La radiación multipolar de orden superior es muy débil y muy pocas veces se observa, salvo en condiciones muy especiales.

10.7 Radiación por una carga acelerada

En las secciones 19.4 y 19.5 estudiamos dos mecanismos particulares de emisión de radiación electromagnética: los dipolos oscilantes magnético y eléctrico. Es sin embargo muy importante tener una comprensión más general de la emisión de la radiación electromagnética. Consideremos en primer lugar el caso de una carga en movimiento uniforme, o sea una carga moviéndose con velocidad constante. Los campos eléctrico y magnético que resultan en este caso fueron estudiados en la sección 15.13. El campo eléctrico es radial y el campo magnético es transversal siendo sus líneas de fuerza circunferencias con centros en la trayectoria de la carga. La fig. 19-13 muestra el campo eléctrico \mathcal{E} y el magnético \mathcal{B} en cuatro puntos simétricos P_1 , P_2 , P_3 y P_4 . En cada punto se ha indicado también el vector $\mathcal{E} \times \mathcal{B}$. Observando la figura, se ve que cuando sumamos las contribuciones de $\mathcal{E} \times \mathcal{B}$ en todos los puntos del espacio, las componentes perpendiculares a la dirección del movimiento se cancelan mientras que las componentes paralelas a la dirección del movimiento están todas en el mismo sentido y se suman unas a otras. Esto significa que hay un flujo neto de energía en la misma dirección en que se mueve la carga. Esto es explicable desde el punto de vista físico ya que la partícula lleva consigo el campo (y con él su energía y su momentum). En puntos lejos con respecto a nuestro sistema de referencia del laboratorio y que se encuen-

tran por detrás de la carga en movimiento, el campo electromagnético es decreciente, mientras que en puntos que están al frente de la carga el campo crece en la misma proporción. Esto requiere una transferencia de energía de izquierda a derecha (es decir en la dirección del movimiento de la carga en nuestro sistema de referencia), lo cual da lugar al flujo de energía mencionado.

Para constatar si se irradia energía, debemos calcular el flujo del vector $\mathcal{E} \times \mathcal{B}$ a través de una superficie cerrada que contiene la carga. Usando la ec. (19.18) para el caso de una superficie cerrada tenemos

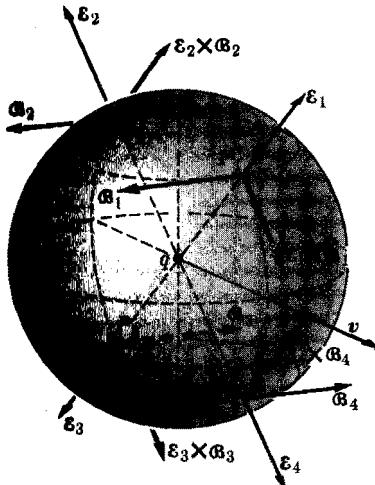


Fig. 19-18. Campos eléctrico y magnético de una carga en movimiento uniforme.

Como superficie cerrada elegimos una esfera de radio r con centro en la carga. En la fig. 19-13 se ve que el vector $\mathcal{E} \times \mathcal{B}$ es en todos los puntos tangente a la superficie esférica y por lo tanto perpendicular al versor \mathbf{u}_N normal a la superficie. Luego,

$$\mathcal{E} \times \mathcal{B} \cdot \mathbf{u}_N = 0$$

y el flujo neto de energía a través de la superficie esférica es nulo. Llegamos entonces a la conclusión de que

una carga que está en movimiento rectilíneo uniforme no irradia energía electromagnética.

Esto también es explicable puesto que en el sistema inercial de referencia de la carga, el campo es estático y la energía permanece constante; por lo tanto en el sistema de referencia del laboratorio la energía también permanece constante. Hay simplemente un flujo estacionario de energía en el sentido del movimiento de la carga.

Cuando la carga está en movimiento acelerado se presenta una situación muy diferente. El campo eléctrico de una carga acelerada ya no es radial y no es simétrico respecto a la carga, como cuando el movimiento es uniforme. No daremos aquí la expresión del campo porque es muy complicada, pero las líneas de campo tienen una forma similar a la que se muestra en la fig. 19.14. Suponiendo que la partícula se mueve de izquierda a derecha, el campo disminuye a la izquierda y aumenta a la derecha pero, debido a la aceleración, el aumento del campo (que corresponde a la nueva velocidad mayor) es superior a la disminución del campo que existía previamente (y que corresponde a una velocidad anterior, más pequeña). En consecuencia, se debe transferir un exceso neto de energía a todo el espacio para establecer el campo. Por lo tanto

una carga acelerada irradia energía electromagnética.

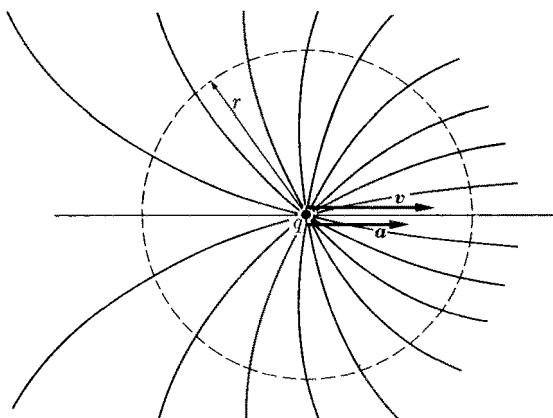


Fig. 19-14. Líneas del campo eléctrico producido por una carga acelerada.

Esto significa que, para determinar el movimiento de una partícula cargada bajo la acción de una fuerza, debemos tener en cuenta la energía que irradia. Esto complica la ecuación de movimiento de la partícula, y la razón de no haber considerado anteriormente este factor es que en la mayoría de los casos prácticos (en los que la aceleración es pequeña y la velocidad es pequeña con respecto a \$c\$) el mismo es despreciable.

Usando las expresiones apropiadas para los campos \$\mathcal{E}\$ y \$\mathcal{B}\$, podemos demostrar que, si la carga acelerada está momentáneamente en reposo o se mueve lentamente con respecto al observador (de modo que pueden despreciarse todos los efectos de retardación debidos a que la velocidad de propagación de la onda es finita), la energía irradiada por unidad de tiempo y que atraviesa una superficie esférica de radio \$r\$ alrededor de la carga, es

$$\frac{dE}{dt} = \frac{q^2 a^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}, \quad (19.38)$$

donde \$a\$ es la aceleración de la carga. Este resultado, llamado *fórmula de Larmor*, es esencialmente idéntico a la ec. (19.26), ya que para una carga que oscila según el eje \$Z\$ es \$a = -\omega^2 z\$. Por lo tanto

$$\frac{dE}{dt} = \frac{q^2 z^2 \omega^4}{6\pi\epsilon_0 c^3},$$

y para obtener la energía media irradiada necesitamos \$\bar{z}^2\$ que es igual a \$\frac{1}{2}\bar{z}_0^2\$. Haciendo esta sustitución, obtenemos la ec. (19.26).

Una conclusión importante es que para mantener una carga en movimiento acelerado, tenemos que suministrar energía para compensar la que se pierde por radiación. Esto significa que cuando se acelera un ion en un acelerador lineal, tal como el generador de Van de Graaff, parte de la energía suministrada al ion se pierde como radiación electromagnética; esta pérdida es sin embargo despreciable, excepto para energías relativistas.

Otra especulación interesante es que si toda la masa es de origen eléctrico, como sugerimos en el ejemplo 17.6, podríamos interpretar la inercia diciendo que se debe al hecho de que una carga en movimiento acelerado necesita un suministro de energía para establecer su campo electromagnético. Cuando no hay este suministro, la carga se frena hasta que queda en reposo en un sistema inercial. Sin embargo, este asunto es aún materia de conjeturas y discusiones.

Si la aceleración es paralela a la velocidad y ésta es pequeña con respecto a c , la distribución angular de la energía irradiada es de la forma $\sin^2 \theta$ ilustrada en la fig. 19.10 para un dipolo eléctrico. En efecto, usando la ec. (19.24) con los cambios apropiados (o sea, reemplazando Π_0^2 por $q^2 z_0^2$ y $z_0 \omega^2$ por la aceleración a , y teniendo en cuenta que no estamos usando valores medios sino instantáneos por lo que hay que quitar el factor $\frac{1}{2}$), encontramos que la intensidad de la radiación en la dirección especificada por el ángulo θ con respecto a la velocidad, se puede expresar por

$$I(\theta) = \frac{q^2 a^2}{16 \pi^2 c^3 \epsilon_0 r^2} \sin^2 \theta. \quad (19.39)$$

La distribución angular $I(\theta)$ es simétrica con respecto a un plano que pasa por la carga y es perpendicular a la dirección del movimiento, como se muestra en la fig. 19-15. A altas energías, sin embargo, la intensidad de la energía irradiada por una carga acelerada tiene su máximo sobre una superficie cónica abierta en el sentido del movimiento de la partícula, como también se muestra en la fig. 19-15. El ángulo del cono disminuye a medida que la velocidad de la partícula aumenta.

Si la partícula se frena en vez de acelerarse, la expresión (19.38) sigue siendo válida, y la energía irradiada es en cada instante la misma que el campo elec-

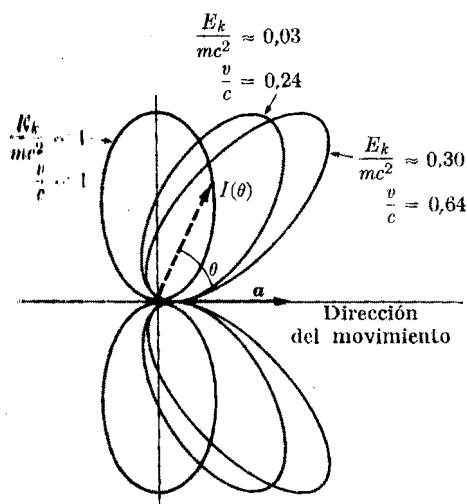


Fig. 19-15. Distribución angular, para diferentes valores de v/c , de la radiación que emite una carga acelerada.

tromagnético tiene un exceso como resultado de la disminución de la velocidad de la carga. Esto es lo que ocurre, por ejemplo, cuando una carga rápida, tal como un electrón o un protón, da contra un blanco. Una parte importante de su energía total se transforma en radiación llamada *radiación de frenado*, o más frecuentemente *bremsstrahlung* (del alemán *Bremsung*, frenado, y *Strahlung*, radiación) (fig. 19-16). Este es el principal mecanismo de producción de radiación en los tubos de rayos X usados en las aplicaciones físicas, médicas e industriales.

Aunque en la fig. 19-14 se muestra el caso en que la aceleración tiene la misma dirección que el movimiento, nuestra discusión vale también para cualquier clase de movimiento en el que haya aceleración. Por ejemplo, una partícula

cargada que se mueve en una trayectoria circular tiene una aceleración centrípeta, por lo que emite radiación. En consecuencia, cuando se acelera un ion en un acelerador cíclico, como el ciclotrón, el betatrón o el sincrotrón, parte de la energía que se le suministra se pierde como radiación electromagnética, efecto que en los aceleradores cílicos es más importante que en los lineales. Nosotros no tuvimos en cuenta este hecho en nuestro estudio anterior del ciclotrón y del betatrón, omisión que se justifica cuando la energía no es muy alta y la aceleración es pequeña. Por lo contrario, cuando las partículas alcanzan altas energías, como en los sincrotrones en los que la aceleración es grande, las pérdidas por radiación, llamadas *radiación sincrotrónica*, se hacen muy importantes y constituyen una limitación seria para la construcción de aceleradores cílicos de energía muy alta.

Cuando una partícula atrapada en un campo magnético sigue una trayectoria espiral, como se estudió en la sección 15.3, también emite radiación sincrotrónica. Como la radiación electromagnética se emite preferentemente en dirección per-

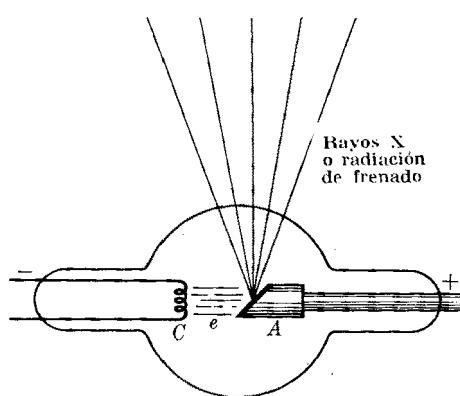


Fig. 19-16. Radiación emitida por una carga que se frena al incidir sobre el blanco *A* en un tubo de rayos X. El blanco se debe construir de un material con un alto punto de fusión y se debe refrigerar continuamente.

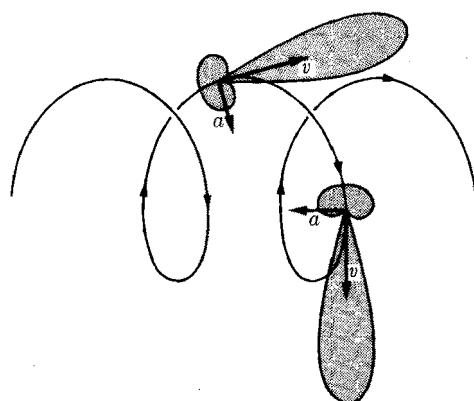


Fig. 19-17. Radiación sincrotrónica de una partícula que se mueve en un campo magnético. En dos posiciones se muestra la distribución angular de la intensidad, y la dirección de la velocidad y de la aceleración de la partícula.

pendicular a la aceleración (ver fig. 19-15) y como la aceleración apunta hacia el eje de la hélice siendo perpendicular a la velocidad, deducimos que la radiación sincrotrónica se emite principalmente en la dirección del movimiento dentro de un cono cuyo eje es tangente a la trayectoria de la partícula, como se indica en la fig. 19-17. La radiación originada en las partículas cargadas (provenientes de las manchas solares o de cuerpos más lejanos, como ciertas nebulosas) atrapadas en el campo magnético terrestre, es en esencia de este tipo. En la fig. 19-18 se muestran cuatro fotografías de la Nebulosa del Cangrejo; la radiación recibida, que se extiende desde las radiofrecuencias hasta el ultravioleta extremo, se supone que es radiación sincrotrónica de electrones con energías de hasta alrededor de 10^{12} eV,

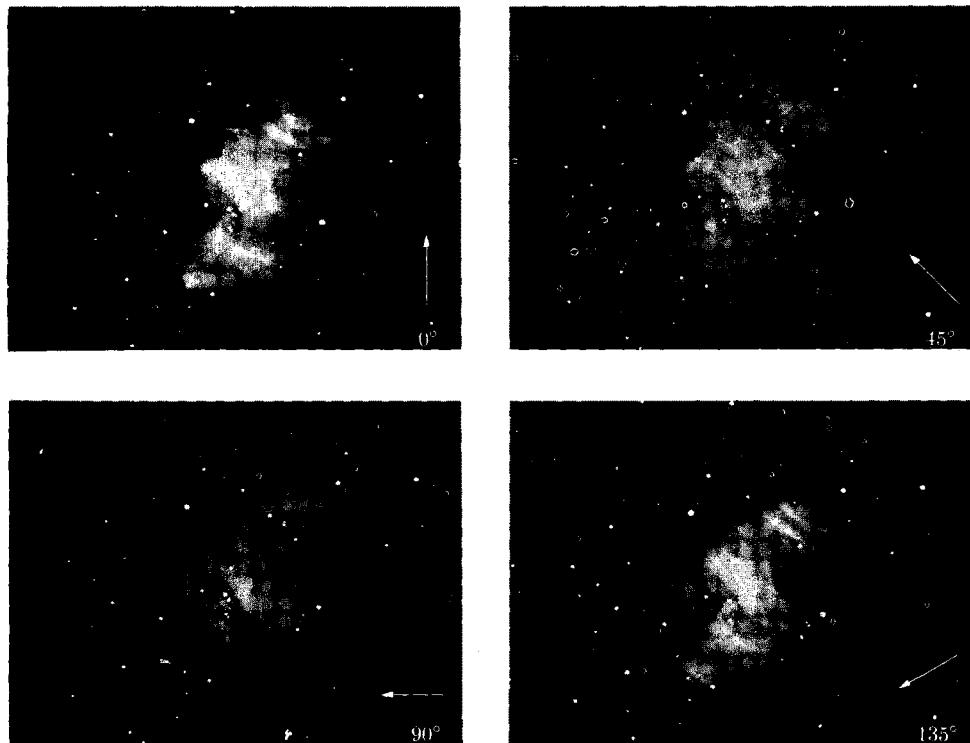


Fig. 19-18. Radiación sincrotrónica de la Nebulosa del Cangrejo. Cada fotografía se sacó a través de un dispositivo que aceptaba sólo radiación con el vector eléctrico como se señala. El hecho de que las fotografías sean diferentes indica que la radiación está polarizada. (Fotografías cortesía de los Observatorios de Mt. Wilson y Palomar).

que se están moviendo en trayectorias circulares o helicoidales en un campo magnético del orden de 10^{-8} T. La radiación ostenta una fuerte polarización, como se deduce de las diferencias en las fotografías, las cuales fueron tomadas a través de un filtro polarizador que sólo dejaba pasar radiación con el campo eléctrico en una dirección especificada para cada fotografía, dirección que se indica con una flecha.

Hay otra consideración interesante que se relaciona con la estructura atómica. En la sección 14.7 señalamos que, como resultado de los experimentos de Rutherford sobre la dispersión de partículas alfa, representamos los átomos como compuestos de un núcleo central, cargado positivamente, describiendo los electrones cargados negativamente, órbitas cerradas alrededor del mismo. Pero esto significa que los electrones se mueven con movimiento acelerado y, si aplicámos las ideas expuestas en esta sección, todos los átomos estarían irradiando energía continuamente. Como resultado de esta pérdida de energía, las órbitas electrónicas se encogerían, con la consiguiente contracción del tamaño de todos los cuerpos. Por supuesto que si todos los cuerpos fueran idénticos, no podríamos detectar esta contracción, porque afectaría de igual manera tanto al cuerpo que

se mide como a la regla que se usa para medir. Pero como los átomos de elementos diferentes son también diferentes, se encogerían en proporciones distintas, lo que produciría un efecto observable. Sin embargo, ni esta contracción de la materia ni la radiación continuada con ella asociada han sido observadas. Por lo tanto tenemos que sacar en conclusión que el movimiento de los electrones atómicos está gobernado por otros principios que aún no hemos considerado. Estos son los de la mecánica cuántica que en cierta medida modifican los resultados discutidos aquí.

EJEMPLO 19.5. Deducir, para la energía irradiada en la unidad de tiempo por una carga acelerada, una expresión que sea válida cualesquiera sean su velocidad y la dirección de su aceleración.

Solución: La fórmula de Larmor, ec. (19.38), es estrictamente correcta sólo cuando la partícula está momentáneamente en reposo con respecto a un observador. Para obtener el valor de la energía irradiada por la carga tal como la mide un observador que ve la partícula moverse con velocidad v , debemos hacer simplemente una transformación de Lorentz de todas las cantidades que aparecen en dicha expresión. Supongamos que la carga está momentáneamente en reposo con respecto a un observador O' que usa el sistema de referencia $X'Y'Z'$; la ec. (19.38) se escribe

$$\frac{dE'}{dt'} = \frac{q^2 a'^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}.$$

Para un observador O , con respecto al cual la partícula tiene una velocidad v y que usa los ejes de coordenadas $X Y Z$, tenemos que usar dE/dt en vez de dE'/dt' . Pero como dt y dt' son dos intervalos de tiempo correspondientes al mismo punto en $X'Y'Z'$, están relacionados por la ec. (6.34); o sea, $dt = dt'/\sqrt{1 - v^2/c^2}$. Análogamente, dE y dE' (que son variaciones de la energía de la partícula que tiene momentum cero con respecto a $X'Y'Z'$) están relacionados por $dE = dE'/\sqrt{1 - v^2/c^2}$, según se desprende de la ec. (11.27). (Un razonamiento equivalente sería recordar que E/c se transforma como ct , puesto que ambos son las cuartas componentes de un cuadrivector). Por lo tanto $dE/dt = dE'/dt'$ y el primer miembro es el mismo para ambos observadores.

Para transformar el segundo miembro de la fórmula de Larmor, usamos la ec. (6.39) para la relación entre los valores de las aceleraciones de la partícula medidos por ambos observadores, o sea

$$a'^2 = \frac{a^2 - (v \times a)^2/c^2}{(1 - v^2/c^2)^3}.$$

Por lo tanto

$$\frac{dE}{dt} = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \frac{a^2 - (v \times a)^2/c^2}{(1 - v^2/c^2)^3}, \quad (19.40)$$

resultado que se conoce como *fórmula de Lienard* y que fue obtenido por primera vez en 1898, antes de que se desarrollara la teoría de la relatividad. Se puede demostrar que la fórmula de Lienard ya incluye los efectos de retardación debidos a la velocidad finita de propagación de la radiación electromagnética.

Si la aceleración es paralela a la velocidad, $v \times a = 0$ y la ec. (19.40) se reduce a

$$\left(\frac{dE}{dt} \right)_{||} = \frac{q^2 a^2}{6\pi\epsilon_0 c^3 (1 - v^2/c^2)^3}. \quad (19.41)$$

Esta es la expresión que debe usarse para estimar las pérdidas por radiación en los aceleradores lineales. Por otra parte, cuando la aceleración es perpendicular a la

velocidad, como en el caso de una órbita circular, $(\mathbf{v} \times \mathbf{a})^2 = v^2 a^2$ y la ec. (19.40) se reduce a

$$\left(\frac{dE}{dt} \right)_\perp = \frac{q^2 a^2}{6\pi\epsilon_0 c^3 (1 - v^2/c^2)^2}. \quad (19.42)$$

Esta es la expresión que debe usarse para calcular la radiación sincrotrónica. A velocidades muy bajas ($v \ll c$), $(dE/dt)_{||}$ y $(dE/dt)_\perp$ se expresan ambas por la ec. (19.38).

EJEMPLO 19.6. En un acelerador Van de Graaff cuyo tubo es de 2 m de longitud, se acelera un protón a través de una diferencia de potencial de 5×10^6 V. Determinar la energía irradiada y compararla con la energía ganada.

Solución: Si t es el tiempo que tarda el protón en recorrer el tubo de aceleración y v su velocidad final, $v = at$, suponiendo que el movimiento no es relativista, lo cual es válido en este caso; por lo tanto vale la ec. (19.38). Teniendo en cuenta que la aceleración a es constante, vemos que la energía total perdida por el protón en el tiempo t por causa de la radiación es [poniendo $v = at$ y $q = e$ en la ec. (19.38)],

$$E_{\text{rad}} = \left(\frac{dE}{dt} \right) t = \frac{e^2 v^2}{6\pi\epsilon_0 c^3 t}.$$

Pero si s es la longitud del tubo de aceleración, se tiene $s = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}(at)t = \frac{1}{2}vt$; por lo tanto $t = 2s/v$ y

$$E_{\text{rad}} = \frac{e^2 v^3}{12\pi\epsilon_0 c^3 s}.$$

que puede esperarse que sea muy pequeña por depender de $(v/c)^3$. La energía cinética ganada por el electrón a través de la diferencia de potencial V es $E_k = \frac{1}{2}mv^2 = eV - E_{\text{rad}} \approx eV$. En consecuencia,

$$\frac{E_{\text{rad}}}{E_k} = \frac{e^2 v}{6\pi\epsilon_0 c^3 m_e s} = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3 m_e s} \left(\frac{2eV}{m_e} \right)^{1/2},$$

ya que $v = (2eV/m_e)^{1/2}$. Introduciendo los valores numéricos tenemos que $E_{\text{rad}}/E_k = 8,4 \times 10^{-20}$. Por lo tanto las pérdidas por radiación son despreciables en este acelerador.

EJEMPLO 19.7. En un ciclotrón con un radio de 0,92 m se acelera un protón. La frecuencia del potencial aplicado a las des es $1,5 \times 10^7$ Hz y el máximo de diferencia de potencial es 20 000 V (ver ejemplo 15.3). Comparar la energía perdida por radiación en una revolución con la energía cinética ganada.

Solución: La máxima energía cinética ganada por el protón en cada revolución es $E_k = 2eV_{\max}$ porque cruza dos veces el espacio entre las des. La aceleración del protón es $a = \omega^2 r = 4\pi^2 r^2$, pudiéndose despreciar los efectos relativistas. Por lo tanto, poniendo $q = e$ en la ec. (19.38) se tiene

$$\frac{dE}{dt} = \frac{e^2 (4\pi^2 r^2)^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} = \frac{8\pi^3 e^2 r^4 r^2}{3\epsilon_0 c^3},$$

y la energía irradiada en una revolución (tiempo = $1/\nu$) es

$$E_{\text{rad}} = \left(\frac{dE}{dt} \right) \frac{1}{\nu} = \frac{8\pi^3 e^2 r^4 r^2}{3\epsilon_0 c^3}.$$

Introduciendo los valores numéricos, tenemos que $E_{\text{rad}}/E_k = 4,0 \times 10^{-15}$. En este caso E_{rad} es también mucho menor que E_k pero es relativamente más importante que en nuestro ejemplo anterior del acelerador rectilíneo. La pérdida de energía por radiación se hace tanto más seria cuanto mayor es la energía de la partícula.

10.11 Absorción de la radiación electromagnética

Hemos estudiado los mecanismos de radiación más importantes mediante los cuales puede producir ondas electromagnéticas. Debemos ahora analizar el proceso y ver qué ocurre cuando una onda electromagnética interactúa con un átomo o con un sistema de cargas de modo que la energía de la onda es absorbida por el sistema. La absorción de energía de una onda electromagnética es un problema complicado que requiere extensos cálculos matemáticos y el uso de la mecánica cuántica, pero las ideas fundamentales pueden comprenderse fácilmente. Cuando una onda electromagnética incide sobre un átomo, tanto el campo eléctrico de la onda como el magnético actúan sobre los electrones del átomo. El efecto del campo magnético se puede despreciar en primera aproximación, ya que es del orden de magnitud de $e\nu\mathcal{B} = (v/c)e\mathcal{E}$, donde v es la velocidad del electrón y hemos usado la relación $\mathcal{B} = \mathcal{E}/c$, que es válida para una onda electromagnética plana. Llegamos entonces a la conclusión de que la interacción magnética con una onda electromagnética es v/c veces menor que la interacción eléctrica $e\mathcal{E}$ y se puede por lo tanto despreciar excepto en el caso de electrones muy rápidos.

En una región del espacio que sea pequeña con respecto a la longitud de onda (como en un átomo), el campo eléctrico de la onda electromagnética puede expresarse en la forma $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \sin \omega_f t$ ya que la parte espacial de la onda es prácticamente constante dentro de la pequeña región en que se mueve el electrón. La frecuencia del campo se ha designado con ω_f de acuerdo con la notación de la sección 12.13. La fuerza eléctrica sobre el electrón es $-e\mathcal{E}$ y hace que el electrón realice oscilaciones forzadas. Recordando el estudio hecho en la sección 12.13, llegamos a la conclusión de que la rapidez de absorción de energía por parte del electrón (o sea la potencia media que el campo eléctrico de la onda transfiere al oscilador) es máxima cuando hay resonancia de energía; esto ocurre cuando la frecuencia ω_f de la onda es igual a la frecuencia natural del electrón. Un análisis cuántico más detallado, que omitimos, muestra que esta frecuencia es cualquiera de las frecuencias $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots$ del espectro de emisión del átomo (o molécula) al cual el electrón está ligado. En otras palabras,

un átomo o molécula absorbe radiación electromagnética preferentemente cuando la frecuencia de la onda electromagnética coincide con una de las frecuencias de su espectro de emisión,

o en síntesis, los espectros de emisión y de absorción de una sustancia se componen de las mismas frecuencias. La fig. 19-19(a) muestra la distribución de intensidad en una onda incidente sobre una sustancia y la energía absorbida por ésta en función de la frecuencia. La fig. 19-19(b) muestra la distribución de intensidad en la radiación transmitida. Nótese la correspondencia entre las dos curvas,

pues la radiación transmitida es disminuida en las frecuencias correspondientes a la absorción preferencial por parte del átomo.

¿Cuál es el resultado de la absorción de energía por parte del átomo (o molécula)? Esta absorción de energía provoca un ajuste del movimiento electrónico a la mayor energía del átomo (o molécula). Se dice entonces que el átomo (o molécula) queda en un *estado excitado*. Un átomo (o molécula) excitado puede a su vez reemisir en forma de radiación dipolar eléctrica, el exceso de energía absorbida.

En la naturaleza hay un continuo intercambio de energía entre los átomos, las moléculas y la radiación electromagnética. El sol es la fuente principal de la radiación electromagnética que llega a la Tierra. La interacción de la radiación electromagnética del sol con los cuerpos que están en la superficie terrestre es responsable de la mayoría de los fenómenos que observamos diariamente, incluyendo la vida misma.

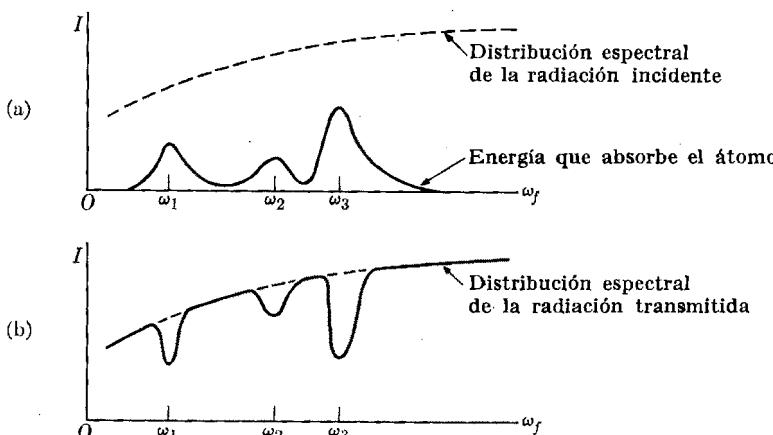


Fig. 19-19. Intensidades de la radiación que se absorbe y se trasmite al pasar a través de una sustancia.

19.9 Difusión de ondas electromagnéticas por electrones ligados

Cuando una onda electromagnética pasa a través de un átomo (o molécula), perturba el movimiento de los electrones ligados, como se explicó en la sección precedente, y el átomo (o molécula) puede quedar en un estado excitado; pero como los electrones actúan como dipolos eléctricos que oscilan forzadamente, los átomos excitados pueden, por el proceso inverso, emitir radiación electromagnética de la misma frecuencia que la onda incidente sin retraso apreciable. La energía que el átomo emite ha sido absorbida de la onda incidente por los electrones ligados del átomo. Este proceso se llama difusión (N.T.) y la radiación emitida es la *onda difundida* (fig. 19-20).

N. T.: El nombre generalmente aceptado para este proceso es *dispersión*. Sin embargo, usamos *difusión* para que no haya confusión con el fenómeno que se estudiará en la sección 19.13. Advertimos al estudiante que este fenómeno de difusión no es el mismo que el que se tratará en el capítulo 24.

La difusión ayuda a disminuir la intensidad de la onda primaria o incidente pues la energía absorbida de la onda se vuelve a emitir en todas direcciones dando como resultado una remoción efectiva de energía en la radiación primaria.

Se ha observado experimentalmente que la intensidad de las ondas difundidas depende de la frecuencia de la onda primaria y del ángulo de difusión. Para calcular esta dependencia es necesario primeramente determinar en qué medida el campo eléctrico de la onda primaria perturba el movimiento de los electrones atómicos; este análisis debe realizarse por medio de la mecánica cuántica.

Una característica importante es que *las ondas difundidas son más intensas cuando la frecuencia de la radiación incidente es igual a una de las frecuencias: $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots$ del espectro de emisión del átomo (o molécula)*, resultado que se conoce como *fluorescencia resonante*.^{*} Este resultado físico era de esperar puesto que parece natural que la intensidad de la radiación difundida sea mayor para aquellas frecuencias para las cuales la absorción de energía de la onda es mayor, y éstas son las mismas frecuencias que las del espectro de emisión del átomo (como se explicó en la sección 19.8). Sin embargo, la difusión puede ser apreciable aún para frecuencias diferentes de las del espectro de emisión.

Otra propiedad interesante es que para gases cuyas moléculas tienen un espectro de emisión en el ultravioleta (ver sección 19.15) la difusión de ondas electromagnéticas con frecuencias en el visible, aumenta con su frecuencia. Esto es fácil de comprender, ya que cuanto mayor es la frecuencia en la región visible, más cerca está de la frecuencia resonante en el ultravioleta y mayor es la amplitud de las oscilaciones forzadas; esto origina una difusión mayor. Por ejemplo, el brillo y el color azul del cielo se atribuyen a la difusión de la luz solar por las moléculas del aire; en particular, el color azul es el resultado de una mayor dispersión a las frecuencias más altas (o a las longitudes de onda más cortas). El mismo proceso explica los colores rojos brillantes que se observan a la salida y a la puesta del sol, cuando los rayos de la luz atraviesan un gran espesor de aire antes de alcanzar la superficie terrestre, dando como resultado una fuerte atenuación de las altas frecuencias (o longitudes de onda cortas) debido a la difusión.

La difusión es producida también por partículas pequeñas (como las del humo o del polvo) o gotitas de agua (como las de las nubes) suspendidas en el aire. Los líquidos con una suspensión de partículas, como los coloides, exhiben una fuerte difusión; éste es el *efecto Tyndall*.

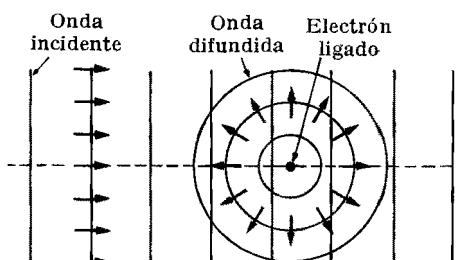


Fig. 19-20. Difusión de la radiación por un electrón ligado.

* En la región visible del espectro electromagnético, la luminiscencia inducida en un sustancia como resultado de la absorción y la emisión subsiguiente de radiación, se denomina *fluorescencia* cuando el tiempo que transcurre entre la absorción y la emisión es menor que 10^{-8} s. Cuando el retardo es mayor, el fenómeno se llama *fosforescencia*. La radiación fluorescente y la fosforescente no tienen por qué tener la misma frecuencia.

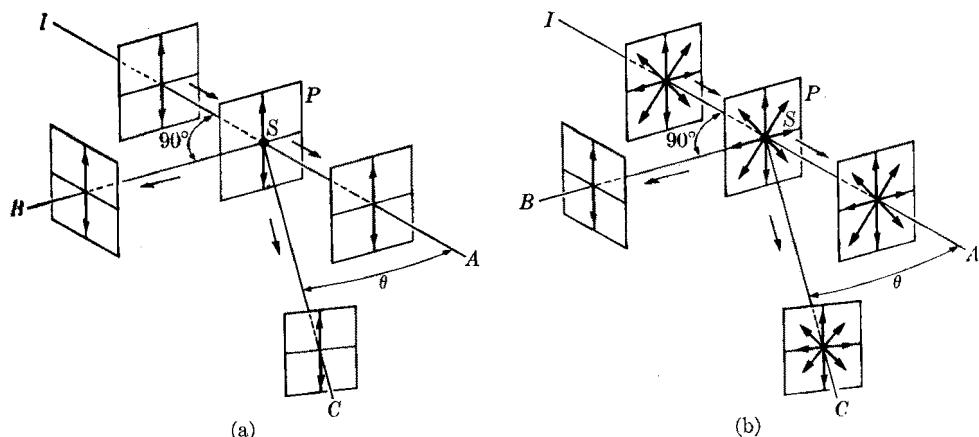


Fig. 19-21. Polarización de la radiación difundida cuando la radiación incidente (a) está polarizada linealmente y (b) no está polarizada.

Cuando la radiación primaria está polarizada linealmente, las oscilaciones atómicas tienen lugar en la dirección fija del campo eléctrico de la onda y la radiación difundida tiene la polarización característica de la radiación dipolar eléctrica (fig. 19-21a). Sin embargo, aunque la radiación incidente no esté polarizada, la radiación difundida está siempre parcialmente polarizada. Consideremos por ejemplo una onda no polarizada incidente sobre un átomo S (fig. 19-21b). Las oscilaciones dipolares eléctricas inducidas en el átomo son paralelas al campo eléctrico de la onda y por lo tanto están todas en un plano P perpendicular a la dirección de propagación IA de la onda incidente. La polarización de la radiación difundida en cada dirección depende de la dirección de las oscilaciones dipolares y por lo tanto no siempre está en una dirección fija cuando la onda incidente no está polarizada; pero para cualquier dirección SB perpendicular a IS , la onda difundida tiene polarización lineal paralela al plano P , perpendicular a IS , ya que para estas direcciones los dipolos oscilan siempre en tal plano. Para otras direcciones, el grado de polarización de la radiación difundida depende del ángulo que la dirección de difusión hace con IA . En la dirección IA , la radiación difundida no está polarizada si la radiación incidente no lo está.

19.10 Difusión de la radiación electromagnética por un electrón libre ; el efecto Compton

La difusión de la radiación electromagnética por un electrón libre tiene ciertas particularidades que requieren un estudio aparte del de la difusión por electrones ligados o por moléculas, que hicimos en la sección precedente.¹⁷ Como hemos visto, la difusión es un proceso doble por el cual un electrón absorbe energía de una onda electromagnética y la vuelve a irradiar como onda dispersada. No olvidemos que una onda electromagnética transporta energía y momentum por lo que si

se saca una energía E de la onda, una cantidad correspondiente $p = E/c$ de momentum se debe también retirar de la onda.¹¹

Ahora bien, un electrón libre no puede absorber una cantidad de energía E y al mismo tiempo adquirir un momentum $p = E/c$, porque para un electrón la relación entre energía cinética y momentum es $E_k = c \sqrt{m_e^2 c^2 + p_e^2} - m_e c^2$ a altas energías, y $E_k = p_e^2 / 2m_e$ a energías bajas. Cualquiera de las dos es incompatible con la relación $p = E/c$ si $E = E_k$ como prescribe la conservación de la energía. Deduciríamos entonces que un electrón libre no puede absorber energía electromagnética sin violar el principio de la conservación del momentum. El estudiante puede entonces preguntarse por qué no mencionamos este problema del momentum en la sección precedente cuando estudiamos la difusión y la absorción de ondas electromagnéticas por electrones ligados. La razón es ésta: la conservación del momentum y de la energía se aplica en ambos casos, pero en el del electrón ligado, la energía y el momentum absorbidos son compartidos por el electrón y por el ion que constituye la parte restante del átomo, y siempre es posible dividir tanto la energía como el momentum en las proporciones correctas. Sin embargo, como el ion tiene una masa mayor, se lleva (junto con algo de momentum) una pequeña fracción de la energía disponible, por lo que habitualmente no se la considera (ver ejemplo 9.12). En el caso de un electrón libre no hay ninguna otra partícula con la cual el electrón pueda compartir la energía y el momentum por lo que no serían posibles ni la absorción ni la difusión.

Los resultados experimentales nos dicen, sin embargo, otra cosa. Cuando analizamos la radiación electromagnética que ha pasado por una región en la que hay electrones libres, observamos que, además de la radiación incidente, hay otra de frecuencia diferente. Esta nueva radiación se interpreta como la difundida por los electrones libres. La frecuencia de la radiación difundida es menor que la de la incidente y en consecuencia la longitud de onda de la radiación difundida es mayor que la de la radiación incidente (fig. 19-22). La longitud de onda de la radiación difundida varía con la dirección de difusión. Este fenómeno interesante se denomina efecto Compton en homenaje al físico norteamericano A. H. Compton, quien fue el primero en observarlo y analizarlo en los primeros años de la década del 20.

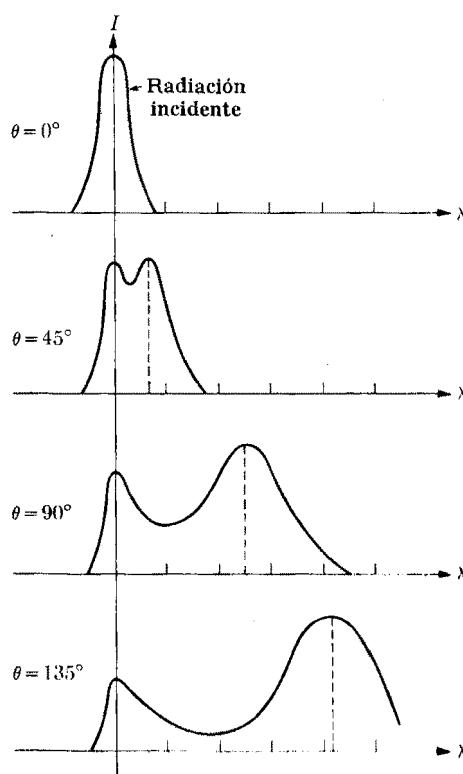


Fig. 19-22. Radiación difundida por un electrón libre. Distribución de intensidad para diferentes ángulos de difusión.

Sea λ la longitud de onda de la radiación incidente y λ' la de la difundida; Compton encontró que λ' está determinada solamente por la dirección de difusión. O sea, si θ es el ángulo entre las ondas incidentes y la dirección en la cual se observan las ondas difundidas (fig. 19-23), la longitud de onda λ' de la radiación difundida está determinada solamente por el ángulo θ . La relación experimental es

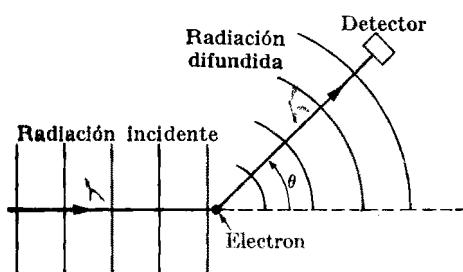


Fig. 19-28. Geometría de la difusión Compton.

$$\lambda' - \lambda = \lambda_C(1 - \cos \theta), \quad (19.43)$$

donde λ_C es una constante cuyo valor en el caso de los electrones, que estamos considerando aquí es

$$\lambda_C = 2,4262 \times 10^{-12} \text{ m}$$

si λ y λ' se miden en metros. Se llama *longitud de onda Compton para electrones*.

Recordando que $\lambda = c/v$, donde v es la frecuencia $\omega/2\pi$ de la onda, podemos escribir la ec. (19.43) en la forma

$$\frac{1}{v'} - \frac{1}{v} = \frac{\lambda_C}{c} (1 - \cos \theta). \quad (19.44)$$

Ahora bien, la difusión de una onda electromagnética por un electrón puede imaginarse como un "choque" entre la onda y el electrón, puesto que implica un intercambio de energía y de momentum. Además, como la onda se propaga con velocidad c y la relación $E = cp$ entre energía y momentum es similar a la correspondiente a una partícula de masa en reposo nula, esta difusión se debe parecer a una colisión en la que una de las partículas tiene masa en reposo nula y se mueve con velocidad c . Este tipo de colisión fue discutido en el ejemplo 11.10; el resultado está contenido en la ec. (11.43),

$$\frac{1}{E'} - \frac{1}{E} = \frac{1}{m_e c^2} (1 - \cos \theta), \quad (19.45)$$

donde E y E' son las energías de la partícula con masa en reposo nula antes y después del choque, y m_e es la masa en reposo de la otra partícula involucrada, en este caso un electrón. La similitud entre las ecs. (19.44) y (19.45) es sorprendente y va más allá de una similitud algebraica. Ambas ecuaciones se aplican a un proceso de choque en su sentido más general y, como ya se ha dicho, la relación $E = cp$ entre energía y momentum de una onda electromagnética es del mismo tipo que la correspondiente a una partícula de masa en reposo nula, a la cual se aplica la ec. (19.45). La conclusión evidente es relacionar la frecuencia v y la energía E escribiendo

$$E = hv, \quad (19.46)$$

donde h es una constante universal que describe la proporcionalidad entre la frecuencia de una onda electromagnética y la energía asociada con ella en el proceso de "choque". La ec. (19.45) se escribe entonces

$$\frac{1}{hv'} - \frac{1}{hv} = \frac{1}{m_e c^2} (1 - \cos \theta)$$

o sea

$$\frac{1}{v'} - \frac{1}{v} = \frac{h}{m_e c^2} (1 - \cos \theta), \quad (19.47)$$

que es idéntica a la ec. (19.44). Para obtener la equivalente de la ec. (19.43), multiplicamos la ec. (19.47) por c y usamos la relación $\lambda = c/v$. El resultado es

$$\lambda' - \lambda = (h/m_e c)(1 - \cos \theta). \quad (19.48)$$

Por lo tanto la longitud de onda de Compton λ_C para un electrón está relacionada con la masa del mismo por

$$\lambda_C = h/m_e c. \quad (19.49)$$

De los valores conocidos de λ_C , m_e y c , podemos obtener para la nueva constante h el valor

$$h = 6,6256 \times 10^{-34} \text{ J s ó m}^2 \text{ kg s}^{-1}.$$

Esta constante se denomina *constante de Planck* y tiene un papel muy importante en la física (recordar el ejemplo 7.15 y la sección 15.6). Esta constante apareció por primera vez en la física en relación con un problema diferente; fue introducida a fines del siglo XIX por el físico alemán Max Planck (1858-1947) como resultado de su tentativa de explicar la intensidad de la radiación electromagnética en equilibrio con la materia que se denomina *radiación del cuerpo negro*. La velocidad c de la luz, la carga fundamental e , la masa m_e del electrón y la constante h son cuatro constantes fundamentales de la física.

Para un protón, que tiene una masa diferente de la de un electrón, la longitud de onda Compton calculada es (usando el valor indicado de h)

$$\lambda_{C,p} = h/m_p c = 1,3214 \times 10^{-15} \text{ m.}$$

Este resultado ha sido confirmado experimentalmente, lo cual nos asegura la validez de nuestra suposición (19.46); sin embargo, como la longitud de onda Compton del protón es $1/10^3$ la del electrón, el efecto Compton es mucho menos apreciable.

Lleguemos entonces a la conclusión de que podemos "explicar" la difusión de la radiación electromagnética por un electrón libre identificando el proceso con la **colisión de un electrón libre con una partícula de masa en reposo nula**.

19.11 Fotones

Nuestra "explicación" del efecto Compton requiere un análisis cuidadoso a causa de las consecuencias de profundo alcance que puede tener. Recapitulemos prime-ramente nuestras suposiciones:

(a) la difusión de la radiación electromagnética por un electrón libre se puede considerar como una colisión entre el electrón y una partícula de masa en reposo nula;

(b) la radiación electromagnética hace las veces de una partícula de masa en reposo nula, que para abreviar llamaremos *fotón* de ahora en adelante;

(c) la energía y el momentum de la partícula de masa en reposo nula (o fotón) están relacionados con la frecuencia y la longitud de onda de la radiación electromagnética por

$$E = h\nu, \quad p = h/\lambda. \quad (19.50)$$

La segunda relación se debe al hecho de que $p = E/c = h\nu/c$ y $\nu/c = 1/\lambda$. Podemos imaginar el efecto Compton como la colisión ilustrada en la fig. 19-24, en la cual

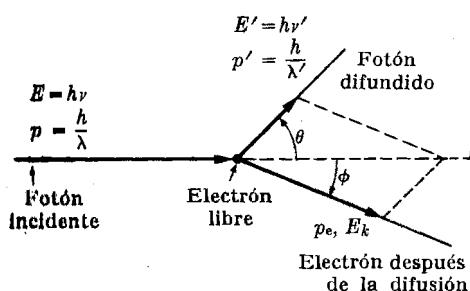


Fig. 19-24. Relaciones entre impulsos y energía en la difusión Compton.

un fotón de frecuencia ν choca con un electrón en reposo, transfiriéndole cierta energía y cierto momentum. Como resultado de la interacción, la energía del fotón difundido es menor, teniendo correspondientemente una frecuencia menor ν' . Una prueba adicional es verificar si el electrón, después de la difusión, tiene un momentum igual a la diferencia entre el momentum del fotón incidente y el del difundido. Este es un experimento difícil, pero ha sido llevado a cabo y los resultados verifican la teoría.

¿Cuál es el significado físico del concepto de fotón y de las relaciones (19.50) que lo definen? No es necesario concluir que la radiación electromagnética sea un chorro de fotones, lo cual sería una explicación pictórica posible. Podemos interpretar la energía del fotón incidente $E = h\nu$ y su momentum $p = h/\lambda$ como la energía y el momentum absorbidos, por el electrón libre, de la onda electromagnética incidente. La energía $E' = h\nu'$ y el momentum $p' = h/\lambda'$ del fotón difundido son entonces la energía y el momentum que vuelve a emitir el electrón como radiación difundida. El electrón adquiere una energía cinética $E_k = E - E'$ y un momentum $\mathbf{p}_e = \mathbf{p} - \mathbf{p}'$, que están relacionados por $E_k = c \sqrt{m_e c^2 + p_e^2} - m_e c^2$, de acuerdo con la dinámica de altas energías y la conservación de la energía y el momentum. En consecuencia, podemos deducir que el fotón es el "cuanto" de energía y momentum electromagnético emitido o absorbido en un proceso único por una partícula cargada; está completamente determinado por la frecuencia de la radiación. El concepto de fotón se aplica sólo a interacciones entre radiación

electromagnética y partículas cargadas, e interviene en todos los procesos en que la radiación electromagnética interactúa con la materia y no solamente con electrones libres. Por consiguiente podemos establecer el siguiente principio:

Cuando una onda electromagnética interactúa con un electrón (o con cualquier otra partícula cargada), las cantidades de energía y de momentum que pueden intercambiarse en el proceso son las correspondientes a un fotón.

Este principio, que es una de las leyes fundamentales de la física, parece ser característico de todos los procesos radiativos que involucran partículas cargadas y campos electromagnéticos. No se deduce de ninguna ley establecida o estudiada previamente. Es un principio completamente nuevo a agregarse a leyes universales tales como la conservación de la energía y del momentum. Su descubrimiento en el primer cuarto de este siglo fue un hito en el desarrollo de la física. Sus consecuencias han dado lugar a una nueva rama de la física llamada *mecánica cuántica*.

Este importante principio es básico para la comprensión de la emisión y de la absorción de radiación electromagnética en átomos, moléculas y núcleos. Hemos mencionado varias veces con anterioridad que un átomo (o molécula) puede solamente absorber o emitir radiación electromagnética de ciertas frecuencias; también indicamos en la sección 14.7 que la energía de los átomos y moléculas está cuantificada y puede tener sólo ciertos valores. Estos dos hechos importantes están relacionados por el concepto de fotón. Supongamos que un átomo en el estado estacionario de energía E absorbe radiación electromagnética de frecuencia ν y pasa a otro estado estacionario de energía E' más alta. El átomo varía su energía en $E' - E$; por otra parte la energía del fotón absorbido es $h\nu$. La conservación de la energía requiere que ambas cantidades sean iguales; por lo tanto

$$E' - E = h\nu,$$

expresión conocida como *fórmula de Bohr* porque fue propuesta por primera vez en 1913 por el físico danés Niels Bohr (1885-1962). La expresión anterior se aplica también cuando un átomo emite un fotón y pasa de un estado estacionario de energía E' a uno de energía E menor.

Como la energía del estado estacionario está cuantificada y puede tener solamente ciertos valores E_1, E_2, E_3, \dots , la fórmula de Bohr limita la frecuencia de la radiación emitida o absorbida; es así como se obtiene un espectro discreto de frecuencias. En realidad Bohr razonó a la inversa y propuso el concepto de estados estacionarios para explicar la existencia de un espectro discreto de frecuencias. La fig. 19-25 es un diagrama esquemático que muestra las posibles variaciones de energía en un sistema; corresponden a transiciones entre estados estacionarios o *niveles de energía*.

Por ejemplo, las energías del estado estacionario de átomos con un solo electrón (H, He^+, Li^{1+} , etc.) está dada por $E = RZ^2hc/n^2$, donde R es la constante de Rydberg (ver problema 14.88). Por lo tanto en una transición entre estados con

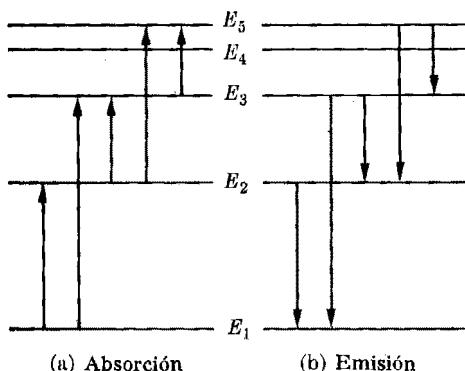


Fig. 19-25. Transiciones entre los estados estacionarios de un átomo, una molécula o un núcleo. El espaciamiento de los niveles de energía y las transiciones posibles dependen de la naturaleza del sistema.

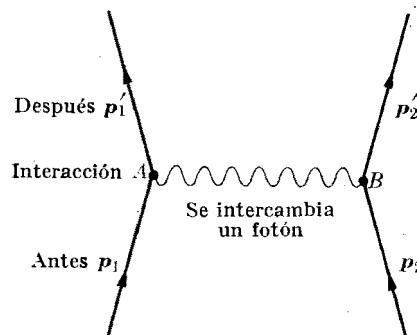


Fig. 19-26. Interacción electromagnética considerada como un intercambio de fotones. Los fotones transfieren energía y momentum de una carga a otra.

números cuánticos n y n' ($n' > n$), la frecuencia de la radiación emitida o absorbida es

$$\nu = \frac{E' - E}{h} = RZ^2 c \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n'^2} \right)$$

o sea, introduciendo valores numéricos,

$$\nu = 3.2800 \times 10^{15} Z^2 \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n'^2} \right) \text{ Hz.}$$

Esta fórmula concuerda muy bien con las frecuencias de emisión y de absorción de los espectros de este tipo de átomos. Se denomina *fórmula de Balmer* en honor al matemático y físico suizo Johann Balmer (1825-1898), que la inventó para catalogar las líneas espectrales visibles del hidrógeno.

El concepto de fotón sugiere una representación gráfica de la interacción electromagnética entre dos partículas cargadas; la fig. 19-26 muestra tal interacción entre dos partículas. La interacción corresponde a un intercambio de momentum y energía; los momenta iniciales p_1 y p_2 de las partículas se convierten en p'_1 y p'_2 después de la interacción. Aunque la interacción no está localizada en un instante determinado, la hemos indicado por simplicidad a un tiempo particular y en las posiciones A y B . La partícula 1 interactúa con la partícula 2 por medio de su campo electromagnético con el resultado de que la partícula 2 toma del campo cierta energía y cierto momentum, equivalentes a un fotón, con el correspondiente cambio en su movimiento. El movimiento de la partícula 1 debe entonces ajustarse para corresponder al nuevo campo, que es el campo original menos un fotón. Por supuesto que el proceso inverso también es posible y la partícula 1 puede absorber un fotón del campo de la partícula 2. Podemos decir entonces que lo que ha ocurrido es que ha habido un intercambio de fotones.

entre las partículas 1 y 2; en otras palabras,

las interacciones electromagnéticas pueden imaginarse como el resultado de un intercambio de fotones entre las partículas cargadas interaccutantes.

(Los diagramas tales como el de la fig. 19-26 se denominan *diagramas de Feynman*, y son muy útiles para analizar procesos complejos que involucran diferentes tipos de interacciones).

En cualquier instante el momentum total de un sistema de dos partículas cargadas es $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_{\text{campo}}$, donde $\mathbf{p}_{\text{campo}}$ es el momentum asociado con el campo electromagnético de las partículas cargadas. Esta es justamente la imagen de una interacción que dimos en la sección 15.14 cuando estudiamos el principio de la conservación del momentum en el caso de una interacción que se propaga con velocidad finita. Ahora tenemos una base teórica y experimental más firme para nuestro cuadro conceptual de un campo que posee energía y momentum.

Al final de la sección 19.3 señalamos que la interacción electromagnética posee momentum angular intrínseco o espín, además de energía y momentum, y que para ondas polarizadas circularmente el espín según la dirección de propagación es $\pm E/\omega$. Usando la relación $\omega = 2\pi\nu$ vemos que la energía de un fotón es $E = h\omega/2\pi = \hbar\omega$ donde $\hbar = h/2\pi$ (recordar los ejemplos 7.15 y 15.7). Por lo tanto, los fotones polarizados circularmente tienen, según la dirección de propagación, un espín igual a $\mp\hbar$. Por lo contrario, el valor medio del espín de fotones polarizados linealmente es nulo.

EJEMPLO 19.8. Expresar la energía de un fotón en electronvolts cuando su longitud de onda está en metros. Aplicar el resultado para obtener la longitud de onda de los rayos X en función del voltaje de aceleración aplicado a un tubo de rayos X.

Solución: De $E = h\nu$ y $\lambda\nu = c$ tenemos que $E = hc/\lambda$. Pero

$$\begin{aligned} hc &= (6,6256 \times 10^{-34} \text{ J s})(2,9979 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}) \\ &= 1,9863 \times 10^{-25} \text{ J m}. \end{aligned}$$

Recordando que $1 \text{ eV} = 1,6021 \times 10^{-19} \text{ J}$, tenemos que $hc = 1,2397 \times 10^{-6} \text{ eV m}$. Por lo tanto $E = 1,2397 \times 10^{-6}/\lambda$, donde E se expresa en electronvolts y λ en metros.

Como explicamos en relación con la fig. 19-16, los rayos X se producen por el impacto de electrones rápidos contra el material del anticátodo de un tubo de rayos X. La energía de un electrón puede ser irradiada como resultado de choques sucesivos dando lugar a varios fotones, o puede irradiarse toda en una sola colisión. Evidentemente, los fotones de mayor energía que emergen del tubo de rayos X serán aquellos emitidos en el último proceso; son los que corresponden a la longitud de onda más corta. En otras palabras, si V es el voltaje de aceleración, las longitudes de onda de los rayos X producidos son iguales o mayores que el umbral de longitud de onda, el cual satisface la relación

$$\lambda_0 = \frac{1,2397 \times 10^{-6}}{V} \approx \frac{1,24 \times 10^{-6}}{V},$$

ya que en este caso la energía E del fotón es igual a la energía del electrón, la cual a su vez es igual a V expresada en electronvolts. En un tubo de televisión, por ejemplo, los electrones se aceleran en una diferencia de potencial del orden de

18 000 V; cuando los electrones llegan a la pantalla del tubo, se detienen abruptamente emitiendo rayos X por la misma razón que en un tubo de rayos X; la intensidad es, sin embargo, muy baja. La mínima longitud de onda de los rayos X que se producen cuando los electrones se detienen en la pantalla es entonces $\lambda = 6,9 \times 10^{-11}$ m.

19.12 Más sobre los fotones: efecto fotoeléctrico

Investigaciones adicionales han demostrado que el concepto de fotón se aplica no solamente al proceso de difusión por un electrón libre, sino a *todos* los procesos en los que ondas electromagnéticas interactúan con la materia. Otro ejemplo que ilustra el concepto de fotón es el *efecto fotoeléctrico*. En 1887 Heinrich Hertz observó que iluminando con luz ultravioleta los electrodos entre los cuales tiene lugar una descarga eléctrica, podía aumentar la intensidad de la misma; esto sugirió que había más partículas cargadas o electrones disponibles. Un año más tarde, Wilhelm Hallwachs (1859-1922) observó emisión de electrones cuando se iluminaban las superficies de ciertos metales como Zn, Rb, K, Na, etc. Estos electrones se denominan *fotoelectrones* por la manera cómo son producidos. Evidentemente, la emisión electrónica aumenta con la intensidad de la radiación que incide sobre la superficie metálica puesto que hay más energía disponible para liberar los electrones. Pero también se observa una dependencia característica de la frecuencia; esto significa que para cada sustancia hay una frecuencia mínima v_0 de la radiación electromagnética tal que no se producen fotoelectrones cuando la radiación incidente tiene una frecuencia menor que v_0 , cualquiera sea su intensidad.

Anteriormente hemos explicado que en un metal hay electrones que son más o menos libres de moverse por la red cristalina. Estos electrones no escapan del metal a temperatura normal porque si uno llega a escapar, se destruye el balance eléctrico del metal, el cual se carga positivamente atrayendo nuevamente al electrón; éste vuelve a penetrar en el metal a no ser que tenga suficiente energía para sobreponerse a la atracción. Una manera de aumentar la energía de los electrones es calentando el metal; los electrones que se "evaporan" se denominan entonces *termoelectrones*. Este es el tipo de emisión electrónica que existe en los tubos al vacío. Otra manera de liberar electrones de un metal es por absorción de energía de la radiación electromagnética.

El *efecto fotoeléctrico* es un proceso por el cual los electrones de conducción en los metales y otras sustancias absorben energía del campo electromagnético y escapan de la sustancia; esto difiere del proceso de absorción estudiado en la sección 19.8, el cual corresponde a absorción por un electrón ligado a un átomo o a una molécula. Llamemos ϕ a la energía necesaria para que un electrón escape de un metal dado; entonces, si el electrón absorbe la energía E , la diferencia $E - \phi$ aparecerá como energía cinética del electrón y podemos escribir en el límite de bajas energías (o no relativistas)

$$\frac{1}{2}mv^2 = E - \phi.$$

Evidentemente, si E es menor que ϕ , no habrá emisión de electrones. Si E es la energía absorbida de la radiación electromagnética por un electrón y v es la frecuencia de la misma, se tiene $E = hv$, de acuerdo con la ec. (19.50). Por lo tanto podemos escribir la ec. (19.51) en la forma

$$\frac{1}{2}mv^2 = hv - \phi. \quad (19.52)$$

Esta ecuación fue propuesta por vez primera en 1905 por Albert Einstein, antes del descubrimiento del efecto Compton. No todos los electrones necesitan la misma energía ϕ para escapar de un metal; por consiguiente llamamos *energía de arranque* del metal al valor mínimo ϕ_0 . La energía cinética máxima de los electrones es entonces

$$\frac{1}{2}mv_{\max}^2 = hv - \phi_0. \quad (19.53)$$

La energía cinética máxima $\frac{1}{2}mv_{\max}^2$ puede medirse por el método indicado en la fig. 19-27. Aplicando una diferencia de potencial V entre las placas A y C , podemos retardar el movimiento de los fotoelectrones; a un voltaje particular V_0 la corriente que indica el electrómetro E cae repentinamente a cero, lo cual indica que ningún electrón, ni aún los más rápidos, llegan a la placa C . De acuerdo con la ec. (14.38) se tiene entonces que $\frac{1}{2}mv_{\max}^2 = eV_0$ y la ec. (19.53) se transforma en

$$eV_0 = hv - \phi_0. \quad (19.54)$$

Variando la frecuencia, podemos obtener una serie de valores del potencial V_0 . Si la ec. (19.54) es correcta, se debe obtener una recta al representar los valores de V_0 en función de v ; esto es exactamente lo que se obtiene, como muestra la fig. 19-28. La pendiente de la recta es $\operatorname{tg} \alpha = h/e$; midiendo α y usando el valor conocido de e podemos recalcular la constante h de Planck y obtener el mismo resultado que en el efecto Compton. Este acuerdo puede considerarse como una justificación más del concepto de fotón.

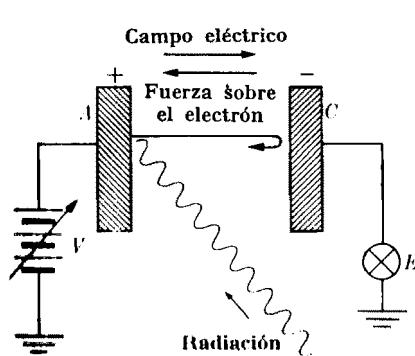


Fig. 19-27. Arreglo experimental para observar el efecto fotoeléctrico.

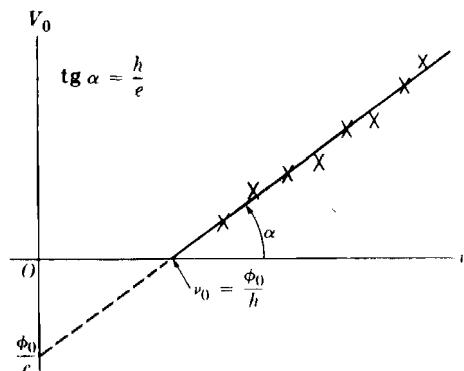


Fig. 19-28. Relación entre el potencial de detención y la frecuencia en el efecto fotoeléctrico.

De acuerdo con la ec. (19.53), la energía cinética de los electrones es cero para la frecuencia $v_0 = \phi_0/h$; v_0 es entonces la mínima frecuencia para la cual hay emisión fotoeléctrica y se denomina *umbral de frecuencias*. No hay emisión alguna para frecuencias menores que v_0 . El efecto fotoeléctrico tiene, por medio de dispositivos tales como las células fotoeléctricas, innúmeras aplicaciones en mecanismos de control automático.

Cuando hay radiación electromagnética de frecuencia adecuada (o sea fotones de energía suficiente) se puede arrancar electrones de los átomos (o moléculas) en lo que se denomina *efecto fotoeléctrico atómico*, al cual se debe la mayor parte de la absorción de rayos X y γ por cualquier material. Este efecto fotoeléctrico atómico da como resultado una ionización del material (incluyendo el aire) por el cual pasan los rayos X y γ , y es uno de los mecanismos mediante los cuales la radiación afecta la materia. Un proceso similar es el *efecto fotonuclear* por el cual una partícula, generalmente un protón, es arrancado de un núcleo después de absorber radiación electromagnética. Estos fotones deben tener una energía tan grande y en consecuencia una frecuencia tan alta en comparación con los fotones involucrados en el efecto fotoeléctrico atómico, que están dentro de la categoría de rayos γ de alta energía.

Puede notarse que no hemos mencionado la conservación del momentum en nuestra discusión del efecto fotoeléctrico. La razón es nuevamente que el electrón que absorbe la radiación electromagnética está ligado a la red cristalina del sólido, o a un átomo o a una molécula; el momentum del fotón absorbido es compartido por el electrón y la red, el átomo o la molécula. Por otro lado, la energía cinética de la red, del átomo o de la molécula es despreciable debido a su masa relativamente grande por lo que podemos suponer (sin cometer un error apreciable) que toda la energía del fotón pasa al electrón. El mismo análisis se aplica a los protones en el efecto fotonuclear.

19.13 Propagación de ondas electromagnéticas en la materia ; dispersión

Hasta ahora hemos considerado solamente la propagación de ondas electromagnéticas en el vacío. Los experimentos muestran que la velocidad de propagación de una onda electromagnética a través de la materia es diferente de la de propagación en el vacío. Para ver la razón de esta diferencia debemos recordar que el estudio que hicimos en la sección 19.2 estaba basado en la ausencia de cargas y corrientes. Por lo contrario, aunque en la materia no haya ni cargas libres ni corrientes, cuando una onda electromagnética se propaga en ella induce ciertas cargas y corrientes como resultado de la polarización y de la magnetización de la materia estudiadas en el capítulo 16. Si la sustancia es homogénea e isótropa, puede demostrarse que el efecto neto de la polarización y la magnetización del medio por la onda electromagnética se tiene en cuenta reemplazando en las ecuaciones de Maxwell las constantes ϵ_0 y μ_0 por la permitividad eléctrica ϵ y la permeabilidad magnética μ características del material. En los cálculos hechos en la sec-

Nota 19.2 todo permanece igual, excepto que la velocidad de la onda es ahora

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}. \quad (19.55)$$

El cociente entre la velocidad c de las ondas electromagnéticas en el vacío y la velocidad v en la materia se denomina *índice de refracción absoluto* de la sustancia y se designa con n . Es un concepto útil para describir las propiedades de las sustancias en relación con las ondas electromagnéticas. Se tiene

$$n = \frac{c}{v} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} \sqrt{\epsilon\mu} = \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{\epsilon_0\mu_0}}.$$

Pero $\epsilon/\epsilon_0 = \epsilon_r$ y $\mu/\mu_0 = \mu_r$, donde ϵ_r y μ_r son la permitividad y permeabilidad relativas del medio. Por lo tanto,

$$n = \sqrt{\epsilon_r\mu_r}. \quad (19.56)$$

En general μ_r difiere muy poco de la unidad en la mayoría de las sustancias que transmiten ondas electromagnéticas (ver tabla 16.3) y podemos escribir, con buena aproximación

$$n = \sqrt{\epsilon_r}. \quad (19.57)$$

Esta relación sirve de base para un método experimental simple para determinar la permitividad de la sustancia si el índice de refracción se obtiene independientemente (como puede hacerse). El acuerdo entre los valores de ϵ_r obtenidos por este método y los obtenidos en otro tipo de mediciones constituye una base sólida para la teoría. En la sección 16.7 calculamos ϵ_r obteniendo como resultado la ec. (16.24); llamaremos N al número de electrones por unidad de volumen para no confundir con el índice de refracción. Se tiene entonces

$$n^2 = \epsilon_r = 1 + \frac{Ne^2}{m_e\epsilon_0} \left(\sum_i \frac{f_i}{\omega_i^2 - \omega^2} \right). \quad (19.58)$$

El índice de refracción depende entonces de la frecuencia de la onda (y por lo tanto de su longitud de onda) de una manera similar a la ilustrada en la fig. 16-20 para ϵ_r ; esta dependencia se muestra en la fig. 19-29, donde $\omega_1, \omega_2, \dots$ son las frecuencias características del espectro de emisión de la sustancia. En consecuencia, la velocidad de fase $v = c/n$ de la onda electromagnética en la materia

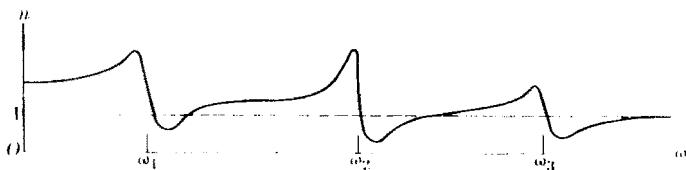


Fig. 19-29. El índice de refracción en función de la frecuencia.

también depende de su frecuencia. Las ondas electromagnéticas experimentan entonces dispersión cuando se propagan en la materia; o sea que un pulso que contenga varias frecuencias se distorsionará porque cada componente viajará con una velocidad diferente.

✓ La velocidad de grupo v_g es, según la ec. (18.59),

$$v_g = v + k \frac{dv}{dk}.$$

Ahora bien, sabemos que

$$\frac{dv}{dk} = \frac{dv}{d\omega} \cdot \frac{d\omega}{dk} = v_g \frac{dv}{d\omega},$$

pues $v_g = d\omega/dk$. Usando $v = c/n$ tenemos

$$\frac{dv}{d\omega} = -\frac{c}{n^2} \frac{dn}{d\omega}.$$

En consecuencia

$$v_g = v - \frac{v_g ck}{n^2} \frac{dn}{d\omega}.$$

Despejando v_g obtenemos

$$v_g = \frac{v}{1 + (ck/n^2)(dn/d\omega)} = \frac{c}{n + \omega(dn/d\omega)}, \quad (19.59)$$

en la que para obtener la última expresión hemos usado $k = \omega/v = \omega n/c$. Cuando $dn/d\omega$ es positiva, la velocidad de grupo es menor que la velocidad de fase, situación que se denomina *dispersión normal*. Por el contrario, si $dn/d\omega$ es negativa, la velocidad de grupo es mayor que la velocidad de fase lo que da lugar a la *dispersión anómala*. En este caso existe la posibilidad de que la velocidad de grupo sea mayor que c y que por lo tanto un pulso electromagnético pueda ser transmitido a una velocidad mayor que c . Esto está aparentemente en contradicción con los resultados que se deducen de la transformación de Lorentz y el principio de relatividad.

Brillouin, Sommerfeld y otros han hecho un análisis cuidadoso de la transmisión de una señal electromagnética; este análisis (que es matemáticamente muy complicado) reveló que es imposible transmitir una señal con una velocidad mayor que c . La fig. 19-30 muestra la variación de la velocidad de fase v , la velocidad de grupo v_g y la velocidad de señal v_s cerca de una frecuencia característica ω_1 . La velocidad de señal coincide prácticamente con la velocidad de grupo excepto cerca de la frecuencia característica, y nunca es mayor que c , aún en la región de dispersión anómala.

Cuando n es mayor que uno, de modo que v es menor que c , existe la posibilidad de que una partícula cargada q , que emite ondas electromagnéticas, se mueva con una velocidad v_q mayor que la velocidad de fase v de las ondas electromagnéticas.

Esta situación corresponde a la ilustrada en la fig. 18-36 para las ondas de Mach en un fluido. Las ondas electromagnéticas se propagan por lo tanto en superficies concéntricas que forman con la dirección de propagación un ángulo α dado por

$$\operatorname{sen} \alpha = v_g/v,$$

de acuerdo con la ec. (18.46). Estas ondas se denominan *radiación de Cherenkov*. Como la dirección efectiva de propagación del frente de onda está relacionada con la velocidad de la partícula cargada, ésta se puede determinar a partir de aquélla; para ello se emplean los dispositivos llamados *detectores de Cherenkov*. Estos detectores son muy usados en los experimentos sobre partículas fundamentales porque suministran una información directa sobre la velocidad de las mismas.

Hemos dicho que las ondas electromagnéticas se propagan en la materia con velocidad de fase diferente de su velocidad de propagación en el vacío. Pero esa diferencia aparece como debida al hecho de que la permitividad y la permeabilidad de la materia son diferentes de las del vacío. Esta diferencia en la permitividad y la permeabilidad es, a su vez, consecuencia de la polarización eléctrica y magnética de la materia bajo la acción de la onda electromagnética que la atraviesa. Por lo tanto, cuando una onda electromagnética incide sobre un pedazo de materia, induce oscilaciones en las partículas cargadas de los átomos o moléculas, los cuales emiten entonces ondas secundarias o difundidas (ver la sección 19.9). Estas ondas difundidas se superponen a la onda original formando una onda resultante. Las fases de las ondas secundarias son en general diferentes de la de la onda original, pues un oscilador forzado no siempre está en fase con la fuerza externa (recordar la sección 12.13). Un análisis detallado que omitiremos, indica que este desfase afecta la onda resultante de un modo tal que la misma parece tener una velocidad de fase diferente de la que una onda tiene en el vacío (ver problema 19.55). Este resultado es muy satisfactorio ya que, desde el punto de vista atómico, todas las cargas, tanto libres como ligadas, son equivalentes y las ondas electromagnéticas que emiten deben propagarse todas con velocidad c . Es la onda resultante de la superposición de esas ondas individuales con fases diferentes la que, precisamente por esas diferencias de fase, parece tener una velocidad de propagación diferente.

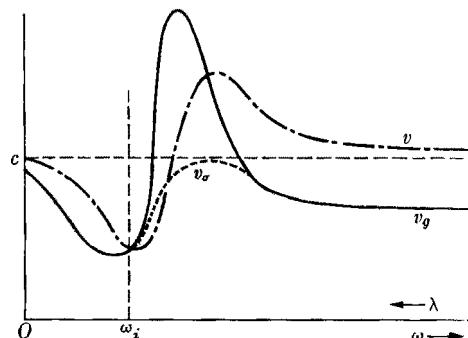


Fig. 19-30. Las velocidades de fase, de grupo y de señal de un pulso electromagnético en un medio dispersivo.

EJEMPLO 19.9. Calcular la velocidad de grupo de una radiación electromagnética de alta frecuencia, tal como los rayos X.

Solución: Si ω es mucho mayor que las frecuencias características ω_i que aparecen en la ec. (19.58), podemos despreciar las ω_i y escribir dicha ecuación en la forma

$$n^2 = 1 - \frac{Ne^2}{m_e \epsilon_0 \omega^2} \sum_i f_i = 1 - \frac{Ne^2}{m_e \epsilon_0 \omega^2},$$

puesto que $\sum_i f_i = 1$, como se señaló en la sección 16.7. Usando la aproximación $(1-x)^{1/2} = 1 - \frac{1}{2}x + \dots$, válida cuando $x \ll 1$, según la ec. (M. 28), tenemos para el índice de refracción

$$n = 1 - Ne^2/2\epsilon_0 m_e \omega^2,$$

que es menor que la unidad, o sea que $v > c$. Se tiene que $dn/d\omega = Ne^2/\epsilon_0 m_e \omega^3$; sustituyendo este valor en la ec. (19.58), tenemos

$$\begin{aligned} v_g &= \frac{c}{n + \omega(dn/d\omega)} = \frac{c}{1 - (Ne^2/2\epsilon_0 m_e \omega^2) + \omega(Ne^2/\epsilon_0 m_e \omega^3)} = \\ &= \frac{c}{1 + (Ne^2/2\epsilon_0 m_e \omega^2)}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, aunque la velocidad de fase v es mayor que c porque n es menor que la unidad, la velocidad de grupo v_g es menor que c . Nótese que para la velocidad de fase se tiene

$$v = \frac{c}{n} = \frac{c}{1 - (Ne^2/2\epsilon_0 m_e \omega^2)} \approx c[1 + (Ne^2/2\epsilon_0 m_e \omega^2)],$$

donde hemos usado la aproximación $(1-x)^{-1} = 1 + x$ (válida cuando $x \ll 1$), de acuerdo con la ec. (M. 28). Por lo tanto $v_g v = c^2$, relación que, aunque no es de validez general, se satisface con buena aproximación en un intervalo amplio de frecuencias.

19.14 Efecto Doppler en las ondas electromagnéticas

En la sección 18.13 estudiamos el efecto Doppler en ondas elásticas y en otros tipos de ondas que implican materia en movimiento. El efecto Doppler en las ondas electromagnéticas debe discutirse separadamente, en primer lugar porque las ondas electromagnéticas no implican movimiento de materia, por lo que la velocidad de la fuente con respecto al medio no interviene en la discusión; en segundo lugar, su velocidad de propagación es c con respecto a todos los observadores, independientemente de sus movimientos relativos. El efecto Doppler en las ondas electromagnéticas debe calcularse necesariamente por medio del principio de relatividad.

Para un observador en un sistema inercial de referencia, una onda electromagnética plana y armónica puede describirse por una función de la forma $\sin(kx - \omega t)$ multiplicada por un factor de amplitud apropiado. Para otro observador fijo a un sistema inercial de referencia diferente, las coordenadas x y t deben reemplazarse por x' y t' dadas por la transformación de Lorentz (6.33) y por lo tanto escribirá su función en la forma $\sin(k'x' - \omega't')$, donde k' y ω' no tienen por qué ser iguales a las del otro observador. Por otra parte, el principio de relatividad exige que la expresión $kx - \omega t$ quede invariante cuando se

pase a un observador inercial a otro; por consiguiente debemos tener

$$kx - \omega t = k'x' - \omega't'.$$

Usando la primera y la cuarta ecuación de la transformación de Lorentz inversa (6.34), tenemos

$$k \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - \omega \frac{t' + vx'/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = k'x' - \omega't'$$

o sea

$$\frac{k - \omega v/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} x' - \frac{\omega - kv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} t' = k'x' - \omega't'.$$

Por lo tanto

$$k' = \frac{k - \omega v/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad \omega' = \frac{\omega - kv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (19.60)$$

Recordando que $\omega = ck$, podemos escribir cualquiera de estas ecuaciones en la forma

$$\omega' = \omega \frac{1 - v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (19.61)$$

A bajas velocidades, o sea $v \ll c$, podemos aproximar el denominador por la unidad, resultando

$$\omega' = \omega(1 - v/c),$$

que es igual a la ec. (18.62) para el movimiento del observador con respecto a la fuente según la línea de propagación. Nótese que las velocidades vOs y v que aparecen en la ec. (18.62) se han designado ahora v y c , respectivamente.

La ec. (19.61) relaciona las frecuencias ω y ω' medidas por dos observadores O y O' cuando O' se mueve según el eje X con velocidad v respecto de O . Cuando el movimiento relativo de los dos observadores no es según la línea de propagación, se obtiene, por cálculos no tan simples (ver ejemplo 19.10),

$$\omega' = \omega \frac{1 - (v/c) \cos \theta}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad (19.62)$$

donde θ es el ángulo entre la dirección de propagación y la dirección del movimiento relativo. Suponiendo que O está en reposo con respecto a la fuente de la onda electromagnética, vemos que si la fuente O y el observador O' se alejan una de otro, O' observa una frecuencia menor o sea una longitud de onda mayor. Esto se observa en los espectros de estrellas y se denomina *corrimiento hacia el rojo*, pues el espectro visible de estrellas que se alejan se corre hacia el límite de las longitudes de onda más largas o sea hacia el rojo. Este factor permite estimar la velocidad con la cual se alejan estas estrellas.

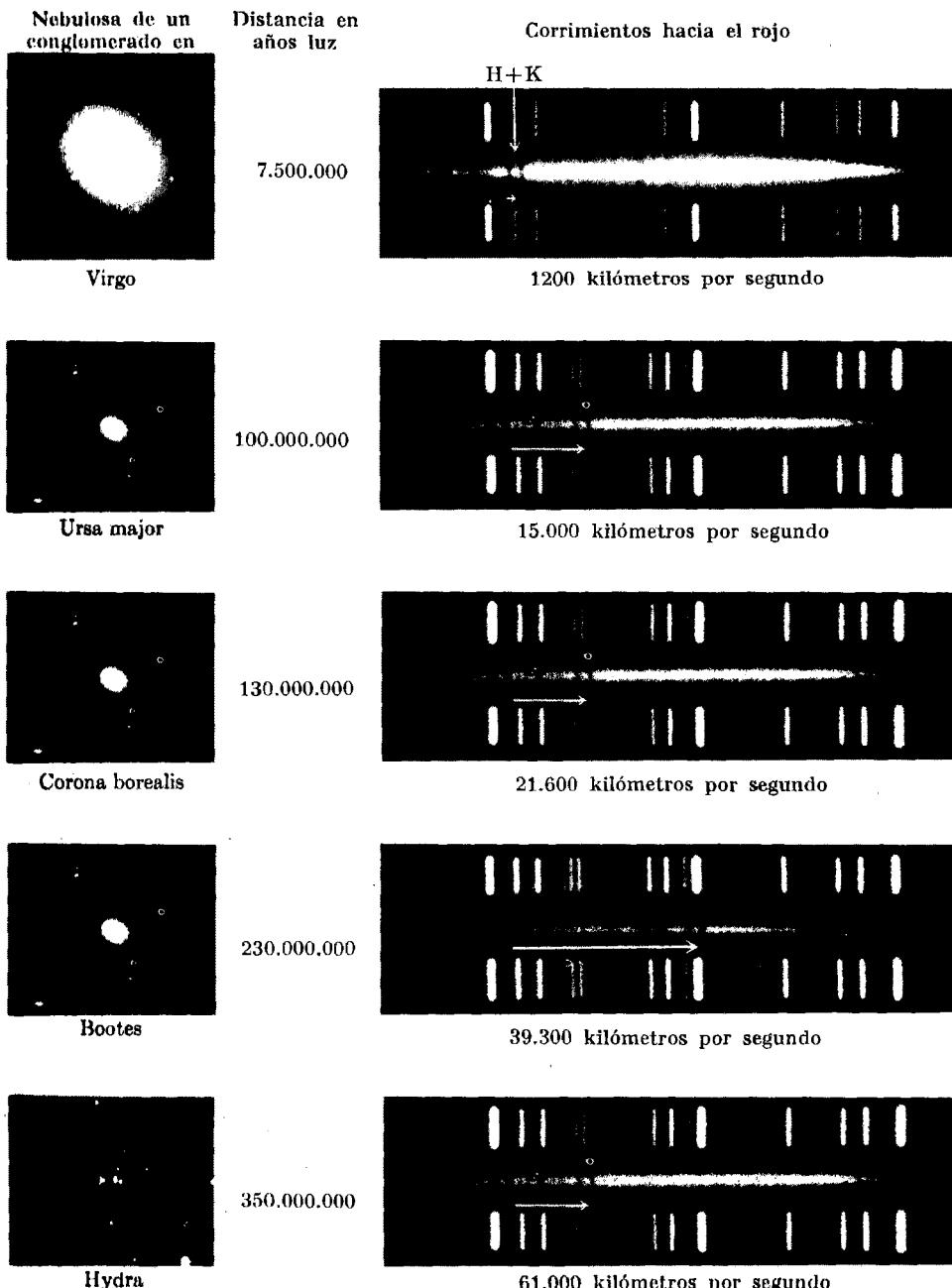


Fig. 19-31. Efecto Doppler en nebulosas extragalácticas. El corrimiento hacia el rojo de las líneas H y K del espectro del calcio (indicadas por la flecha) aumenta con la distancia de la nebulosa, lo cual sugiere mayores velocidades de alejamiento. (Fotografía cortesía de los Observatorios de Mt. Wilson y Palomar).

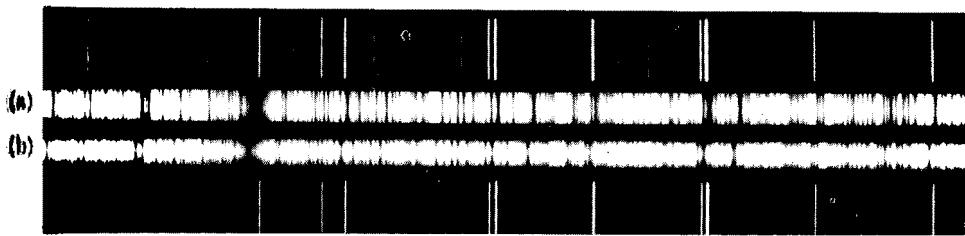


Fig. 19-32. Espectros ($\lambda 4200 \text{ \AA}$ hasta $\lambda 4300 \text{ \AA}$) de la estrella Arturo (que tiene velocidad constante) tomados con un intervalo de seis meses aproximadamente. (a) Julio 1.^o, 1939; velocidad medida con respecto a la tierra: $+18 \text{ km s}^{-1}$. (b) Enero 19, 1940; velocidad medida: -32 km s^{-1} . La diferencia de 50 km s^{-1} en las velocidades se debe totalmente al cambio de la velocidad orbital de la tierra. El corrimiento de las líneas espectrales se puede ver claramente comparándolas con los dos espectros de referencia. (Fotografía cortesía de los Observatorios de Mt. Wilson y Palomar).

La fig. 19-31 muestra el corrimiento hacia el rojo de las líneas H y K del calcio, observadas en los espectros de varias nebulosas; la flecha horizontal indica el corrimiento. Nótese que el corrimiento, y por lo tanto la velocidad relativa, es tanto mayor cuanto mayor es la distancia de la nebulosa. Esto apoya la teoría de un universo en expansión. Recientemente se ha observado que ciertas nebulosas se alejan a velocidades tan grandes como la mitad de la velocidad de la luz, lo cual ha hecho pensar que el efecto Doppler no es el único responsable del corrimiento hacia el rojo. Es interesante notar que la luz de Andrómeda (fig. 1-6) exhibe un corrimiento hacia longitudes de onda más cortas o sea un corrimiento hacia el azul; esto parece indicar que el movimiento actual del sistema solar dentro de nuestra galaxia rotante es hacia esta nebulosa.

La fig. 19-32 muestra el corrimiento del espectro de la estrella Arturo, que está a alrededor de 36 años luz del sol; los dos espectros fueron registrados con una diferencia de seis meses y vemos que el corrimiento de uno es hacia el rojo, mientras que el del otro es hacia el azul. Este corrimiento se debe a la inversión del sentido del movimiento de la tierra con respecto a Arturo.

Hemos deducido la expresión (19.61) aplicando el principio de relatividad a la fase $kx - \omega t$ de la onda; pero por otro lado hemos atribuido cierto momentum y cierta energía a la radiación y los hemos incluido en el concepto de fotón. Debemos entonces verificar si nuestro razonamiento no es contradictorio, viendo si la transformación de Lorentz para la energía y el momentum del fotón es compatible con la ec. (19.60); (ver ejemplo 11.8). Segundo la ec. (19.50) tenemos para un fotón

$$E = h\nu, \quad p = h/\lambda. \quad (19.63)$$

Aplicando la ec. (11.27) para transformar de un sistema inercial a otro la energía y el momentum, tenemos

$$p' = \frac{p - vE/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad \text{y} \quad E' = \frac{E - vp}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (19.64)$$

Luego, usando las relaciones $E' = h\nu'$, $p' = h/\lambda' = h\nu'/c$ y las similares para E y p , tenemos, cancelando el factor común h en todos los términos, que ambas ecuaciones se reducen a

$$\nu' = \nu \frac{1 - v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (19.65)$$

Multiplicando ambos miembros por 2π y usando $\omega = 2\pi\nu$, vemos que obtenemos la ec. (19.61) de nuevo. Este resultado podría haberse obtenido directamente del ejemplo 11.8 si hubiéramos puesto $p = h\nu/c = h\omega/2\pi c$ y la ecuación similar para p' en la primera relación, cancelando el factor común $h/2\pi c$. Podemos entonces concluir que el concepto de fotón es casi una exigencia del principio de relatividad; o sea, si suponemos que la relación $E = cp$ vale junto con $\omega = ck$, vemos que la simple comparación de las ecs. (19.60) y (19.64) hubiera tentado a los físicos para que buscaran una correspondencia del tipo $E \rightarrow \omega$ y $p \rightarrow k$ ó $1/\lambda$. Si un físico hubiera usado esto como guía, el concepto de fotón habría surgido como una exigencia teórica; pero los trabajos de Einstein y Compton, basados en la exigencia experimental directa, aceleraron el descubrimiento de las relaciones (19.50) para la radiación electromagnética.

EJEMPLO 19.10. Deducir la relación (19.62) para el efecto Doppler.

Solución: Cuando la dirección de propagación de una onda electromagnética plana forma un ángulo θ con la dirección del movimiento relativo de los dos observadores O y O' , debemos escribir, en vez de la segunda de las ecs. (19.64), la ecuación

$$E' = \frac{E - vp_x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

pero $p_x = p \cos \theta$, por lo que, recordando que para un fotón es $E = cp$, podemos escribir

$$E' = \frac{E - vp \cos \theta}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = E \frac{1 - (v/c) \cos \theta}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (19.66)$$

Usando $E = h\nu = h\omega/2\pi$ y cancelando factores comunes, obtenemos finalmente

$$\omega' = \omega \frac{1 - (v/c) \cos \theta}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

que es la ec. (19.62).

EJEMPLO 19.11. Estudiar la relación entre las direcciones de propagación de una onda electromagnética plana determinadas por dos observadores en movimiento relativo. Este efecto se denomina *aberración*.

Solución: Supongamos que tenemos una fuente en reposo con respecto al observador O y que él ve una onda electromagnética propagándose en una dirección que forma un ángulo θ con el eje X , el cual coincide con la dirección del movimiento relativo de los dos observadores. Debemos tener entonces, de acuerdo con la ec. (11.27),

$$p'_x = \frac{p_x - vE/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

Por lo tanto $p_x = p \cos \theta$ y análogamente $p'_x = p' \cos \theta'$ para el observador O' . Por lo tanto, teniendo $E = cp$, tenemos

$$p' \cos \theta' = p \frac{\cos \theta - v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Si escribimos $p = h/\lambda = \hbar\omega/2\pi c$ y análogamente para p' , y cancelamos factores comunes, obtenemos

$$\omega' \cos \theta' = \omega \frac{\cos \theta - v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Combinando esta ecuación con la (19.62) para eliminar las frecuencias, obtenemos

$$\cos \theta' = \frac{\cos \theta - v/c}{1 - (v/c) \cos \theta}, \quad (19.67)$$

que relaciona las direcciones de propagación de la onda electromagnética determinadas por los dos observadores.

10.15 Espectro de la radiación electromagnética

Las ondas electromagnéticas cubren una amplia gama de frecuencias o de longitudes de onda y pueden clasificarse según su principal fuente. La clasificación no tiene límites precisos, ya que fuentes diferentes pueden producir ondas en intervalos de frecuencia superpuestos parcialmente.

La clasificación habitual del espectro electromagnético es la siguiente:

(1) *Ondas de radiofrecuencia.* Estas tienen longitudes de onda que van desde algunos kilómetros a 0,3 m; el intervalo de frecuencias es desde algunos Hz hasta 10^9 Hz; la energía de los fotones va casi desde cero hasta alrededor de 10^{-6} eV. Estas ondas, que se usan en los sistemas de radio y televisión, son generadas por medio de dispositivos electrónicos, principalmente circuitos oscilantes.

(2) *Microondas.* Las longitudes de onda de las microondas están entre 0,3 m y 10^{-3} m, el intervalo de frecuencias es desde 10^9 Hz hasta 3×10^{11} Hz; la energía de los fotones va desde 10^{-5} eV hasta 10^{-3} eV aproximadamente. Estas ondas se usan en el radar y otros sistemas de comunicaciones, así como también en el análisis de detalles muy finos de la estructura atómica y molecular; se generan también con dispositivos electrónicos. La región de las microondas se suele denominar UHF (del inglés *ultra high frequency*, frecuencias ultra altas, con respecto a la radiofrecuencia).

(3) *Espectro infrarrojo.* Cubre las longitudes de onda entre 10^{-3} m y $7,8 \times 10^{-7}$ m (o 7800 Å); el intervalo de frecuencias es entre 3×10^{11} Hz y 4×10^{14} Hz y la energía de los fotones va desde 10^{-3} eV hasta alrededor de 1,6 eV. Esta región se subdivide en tres: *el infrarrojo lejano*, de 10^{-3} m a 3×10^{-6} m, *el infrarrojo medio*, de 3×10^{-6} m a 3×10^{-5} m, y *el infrarrojo cercano* que se extiende hasta alrededor de $7,8 \times 10^{-7}$ m. Estas ondas son producidas por cuerpos calientes y moléculas, y tienen muchas aplicaciones en la industria, la medicina, la astronomía, etc.

(4) *Luz o espectro visible.* Es una banda angosta formada por las longitudes de onda a las cuales nuestra retina es sensible. Se extiende en longitudes de onda desde $7,8 \times 10^{-7}$ m hasta $3,8 \times 10^{-7}$ m y en frecuencias desde 4×10^{14} Hz hasta 8×10^{14} Hz; la energía de los fotones va desde 1,6 eV hasta 3,2 eV aproximadamente. La luz es producida por átomos y moléculas como resultado del ajuste interno del movimiento de sus componentes, principalmente los electrones. No es necesario resaltar la importancia de la luz en nuestro mundo.

La luz es tan importante que ha dado lugar al desarrollo de una rama de la física aplicada, llamada *óptica*. La óptica trata los fenómenos luminosos y la visión, incluyendo el diseño de instrumentos ópticos. El campo de la óptica incluye actualmente, además del espectro visible, el infrarrojo y el ultravioleta, por la similitud entre el comportamiento de ambos y el de aquél. Las diferentes sensaciones que la luz produce en el ojo, que se denominan colores, dependen de la frecuencia (o de la longitud de onda) de la onda electromagnética y corresponden a los siguientes intervalos para la persona promedio:

Color	λ , m	ν , Hz
violeta	$3,90-4,55 \times 10^{-7}$	$7,69-6,59 \times 10^{14}$
azul	$4,55-4,92$	$6,59-6,10$
verde	$4,92-5,77$	$6,10-5,20$
amarillo	$5,77-5,97$	$5,20-5,03$
naranja	$5,97-6,22$	$5,03-4,82$
rojo	$6,22-7,80$	$4,82-3,84$

La sensibilidad del ojo también depende de la longitud de onda de la luz; esta sensibilidad es máxima para longitudes de onda de $5,6 \times 10^{-7}$ aproximadamente. Es por la relación entre color y longitud de onda o frecuencia de la luz que una onda electromagnética de frecuencia o longitud de onda definida se denomina también onda *monocromática* (*monos*: uno; *chromos*: color).

La visión es el resultado de señales transmitidas al cerebro por dos elementos presentes en una membrana llamada *retina*, la cual está en el fondo del ojo; estos elementos son los *conos* y los *bastoncillos*. Los conos son los elementos activos en la presencia de luz intensa, como la que hay durante las horas del sol, y son sensibles al color. Los bastoncillos, por otra parte, son elementos capaces de actuar con una iluminación muy tenue, como la que hay en una habitación en penumbra, y son insensibles al color. La visión debida a los conos se llama *fotópica* y la debida a los bastoncillos se denomina *escotópica*. La sensibilidad del ojo a diferentes longitudes de onda para ambos tipos de visión está representada en la fig. 19-33.

(5) *Rayos ultravioletas.* Cubren desde $3,8 \times 10^{-7}$ hasta alrededor de 6×10^{-10} m, con frecuencias desde 8×10^{14} Hz hasta 3×10^{17} Hz aproximadamente; la energía de los fotones va desde 3 eV hasta 2×10^3 eV aproximadamente. Estas ondas son producidas por átomos y moléculas en descargas eléctricas. Su energía es del orden de magnitud de la energía involucrada en muchas reacciones químicas, lo que explica muchos de sus efectos químicos. El sol es una fuente muy poderosa

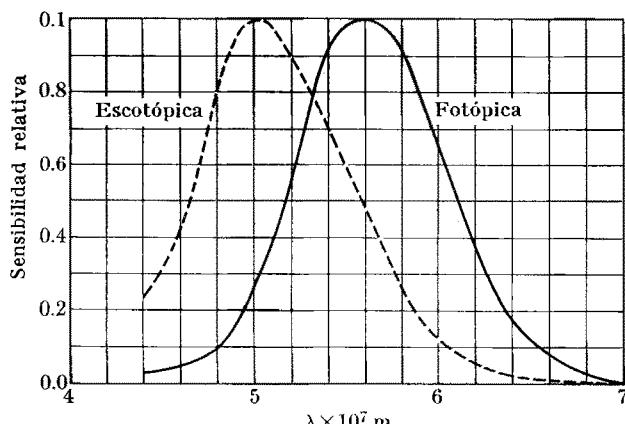


Fig. 19-33. Sensibilidad del ojo para la visión escotópica y para la fotópica.

de radiación ultravioleta, siendo este factor el principal responsable del bronceado de la piel. La radiación ultravioleta del sol también interactúa con los átomos presentes en la alta atmósfera, produciendo gran cantidad de iones; esto explica por qué la alta atmósfera está fuertemente ionizada a una altura mayor de 80 km; es por este motivo que se denomina *ionosfera*. Cuando algunos microbios absorben radiación ultravioleta, pueden ser destruidos como resultado de las reacciones químicas producidas por la ionización y la disociación de moléculas; por esta razón los rayos ultravioletas se usan en algunas aplicaciones médicas y también en procesos de esterilización.

(6) *Rayos X.* Esta parte del espectro electromagnético abarca una gama de longitudes de onda entre 10^{-9} m y 6×10^{-12} m aproximadamente, o sea frecuencias entre 3×10^{17} Hz y 5×10^{19} Hz; la energía de los fotones va desde 1.2×10^3 eV hasta 2.4×10^5 eV aproximadamente. Esta parte del espectro electromagnético fue descubierta en 1895 por el físico alemán W. Röntgen cuando estaba estudiando los rayos catódicos. Los rayos X son producidos por los electrones atómicos más fuertemente ligados. Otra fuente de rayos X es el bremsstrahlung o radiación de frenado mencionada en la sección 19.7; en realidad, ésta es la manera más común de producir rayos X en los tubos comerciales de rayos X; un haz de electrones, acelerado por un potencial de varios miles de voltios, incide sobre un blanco metálico llamado anticátodo (fig. 19-16) (en realidad, fue de este modo que se produjeron los rayos X en los experimentos de Röntgen). La mayor energía de los fotones de los rayos X hace que éstos produzcan efectos más profundos en los átomos y moléculas de las sustancias por las que se propagan, ya que disocian o ionizan las moléculas. Los rayos X se usan para el diagnóstico médico porque su mayor absorción por parte de los huesos en comparación con otros tejidos permite una "fotografía" nítida. Producen además serios daños en tejidos y organismos vivos, como resultado de los procesos químicos que inducen; es por esta razón que los rayos X se usan en el tratamiento del cáncer, ya que parecen tener una tendencia a destruir los tejidos enfermos más

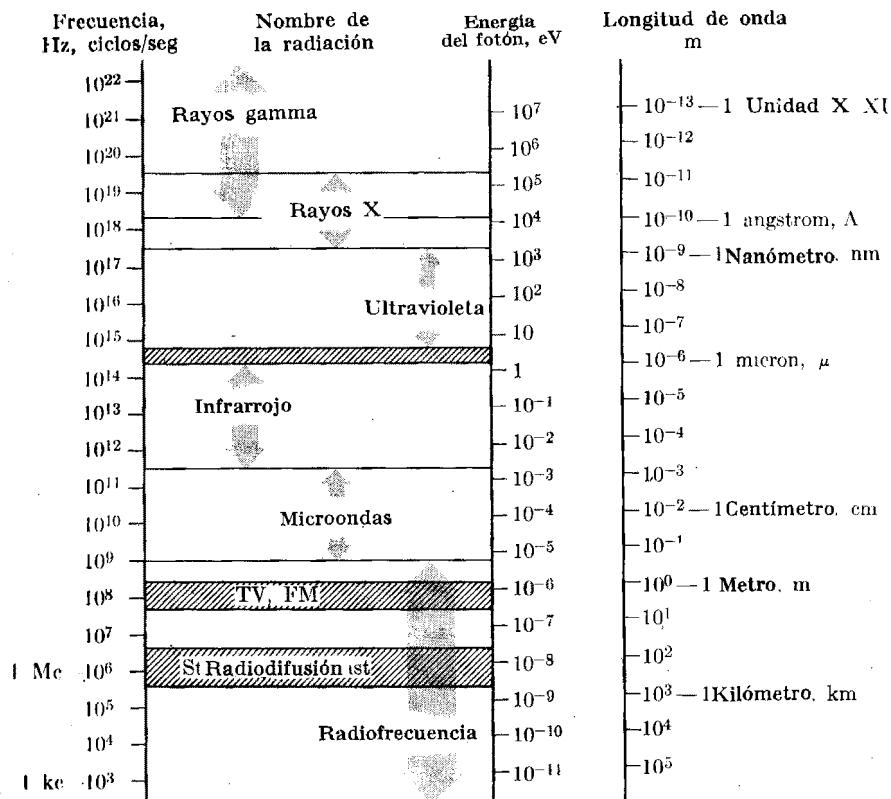


Fig. 19-34. El espectro electromagnético.

fácilmente que los sanos. Debemos recalcar que *cualquier* cantidad de radiación X destruye tejidos sanos; una exposición a una gran dosis puede causar una destrucción suficiente como para producir enfermedades o la muerte.

(7) *Rayos gamma*. Estas ondas electromagnéticas son de origen nuclear y se superponen al límite superior del espectro de rayos X; sus longitudes de onda van desde alrededor de 10^{-10} m hasta mucho menos de 10^{-14} m, estando la gama de frecuencias correspondiente entre 3×10^{18} Hz y más de 3×10^{22} Hz. La energía de los fotones va desde 10^4 eV hasta 10^7 eV aproximadamente; estas energías son del mismo orden de magnitud que las involucradas en los procesos nucleares, por lo que la absorción de rayos γ puede producir cambios nucleares. Estos rayos son producidos por muchas sustancias radioactivas y están presentes en grandes cantidades en los reactores nucleares. La mayoría de las sustancias no lo absorben fácilmente, pero cuando son absorbidos por organismos vivos producen efectos graves. Su manejo requiere un buen blindaje de protección.

En la radiación cósmica hay ondas electromagnéticas de longitudes de onda aún más cortas (o frecuencias aún mayores) y en consecuencia con fotones de

energía más alta. Estas radiaciones tienen especial interés en la investigación **astronómica**.

Cuando nos fijamos en la amplitud del espectro de la radiación electromagnética, podemos comprender fácilmente por qué sus diversas partes se comportan de manera diferente cuando se propagan a través de la materia. Por ejemplo, las ondas que tienen fotones de una energía comparable a las energías características de los electrones atómicos o de los átomos en las moléculas, interactuarán más fuertemente con los átomos y las moléculas; este es el caso de las radiaciones **infra-roja**, visible y ultravioleta. En general, la radiación de mayor longitud de onda, que lleva fotones de energía menor, interactúa débilmente con la materia por su baja capacidad de absorción; esto es lo que ocurre con las ondas de radio-frecuencia. La materia también absorbe muy poco las ondas de alta energía o **longitud de onda muy corta**, como los rayos X y γ , pero sus efectos son más profundos, ya que no sólo producen ionización atómica y molecular, sino también en muchos casos la fragmentación del núcleo.

La fig. 19-34 relaciona las diversas secciones del espectro electromagnético en función de la energía, la frecuencia y la longitud de onda.

Bibliografía

1. "The Longest Electromagnetic Waves", J. Heitzler, *Sci. Am.*, marzo de 1962, pág. 128
2. "Influence of the Environment on the Wave Transmission of Energy: Resonance and Relaxation", R. Lindsay, *Am. J. Phys.* 28, 67 (1960)
3. "The Scattering of X-rays as Particles", A. Compton, *Am. J. Phys.* 29, 817 (1961)
4. "Measurement of the Velocity of Light Through μ_0, ϵ_0 ", W. Stephens, *Am. J. Phys.* 31, 105 (1963)
5. "Resource Letter QSL-1 on Quantum and Statistical Aspects of Light", P. Carnthers, *Am. J. Phys.* 31, 321 (1963)
6. "The Compton Effect: Historical Background", A. Bartlett, *Am. J. Phys.* 32, 120 (1964)
7. "Some thoughts on Radiation Pressure", P. Tea, Jr., *Am. J. Phys.* 33, 190 (1965)
8. "Einstein's Proposal of the Photon Concept", A. Arons y M. Peppard, *Am. J. Phys.* 33, 367 (1965)
9. *Fundamentos de óptica*, B. Rossi, Reverté, Barcelona, 1966, caps. 7 y 9
10. *Great Experiments in Physics*, Morris Shamos, editor. Holt, Rinehart and Winston, New York, 1959, cap. 13 (Hertz); cap. 17 (Einstein); apéndice 5 (Compton)
11. *Foundations of Electromagnetic Theory*, J. Reitz y F. Milford. Addison-Wesley, Reading, Mass., 1960, secs. 15-4, 15-5, 16-8 y 16-9; cap. 17
12. *The Feynman Lectures on Physics*, R. Feynman, R. Leighton y M. Sands. Addison Wesley, Reading, Mass., 1963, vol. I, caps. 28 y 34; vol. II, caps. 20, 21, 27 y 28
13. *Source Book in Physics*, W. F. Magie. Harvard University Press, Cambridge, Mass., 1963, pág. 549 (Hertz); pág. 578 (Hallwachs)
14. *Foundations of Modern Physical Science*, G. Holton y D. H. D. Roller. Addison Wesley, Reading, Mass., 1958, caps. 29 y 32

Problemas

19.1 El campo de una onda electromagnética plana en el vacío se representa, usando unidades MKSC, por $\epsilon_x = 0$, $\epsilon_y = 0,5 \cos [2\pi \times 10^8 (t - x/c)]$, $\epsilon_z = 0$. (a) Determinar la longitud de onda, el estado de polarización y la dirección de propagación. (b) Calcular el campo magnético de la onda. (c) Calcular la intensidad media o flujo de energía por unidad de área.

19.2 Resolver los puntos (a), (b) y (c) del problema 19.1 para la onda representada por $\epsilon_x = 0$, $\epsilon_y = 0,5 \cos [4\pi \times 10^7 (t - x/c)]$, $\epsilon_z = 0,5 \sin [4\pi \times 10^7 (t - x/c)]$.

19.3 Escribir las ecuaciones de los campos ϵ y \mathcal{B} que describen las siguientes ondas electromagnéticas que se propagan según el eje X : (a) Una onda polarizada linealmente cuyo plano de vibración forma un ángulo de 45° con el plano XY . (b) Una onda polarizada linealmente cuyo plano de vibración forma un ángulo de 120° con el plano XY . (c) Una onda con polarización circular derecha. (d) Una onda con polarización elíptica derecha, con el eje mayor paralelo al eje Y y de longitud doble de la del eje menor.

19.4 Considerar la onda representada por $\epsilon_y = \epsilon_0 \cos 2\pi(t/P - x/\lambda)$, $\epsilon_z = \epsilon_0 \cos 2\pi(t/P - x/\lambda + \frac{\pi}{2})$. Calcular el módulo del vector eléctrico y el ángulo que forma dicho vector con el eje Y en los instantes $t = 0$ y $t = P/4$, y en los puntos $x = 0$, $x = \lambda/4$, $x = \lambda/2$, $x = \lambda$. En cada caso expresar cuál es el campo magnético correspondiente.

19.5 Describir el estado de polarización de las ondas representadas por las siguientes ecuaciones:

- (a) $\epsilon_y = A \cos \omega(t - x/c)$
 $\epsilon_z = A \sin \omega(t - x/c)$
- (b) $\epsilon_y = A \cos \omega(t - x/c)$
 $\epsilon_z = -A \cos \omega(t - x/c)$
- (c) $\epsilon_y = A \cos \omega(t - x/c)$
 $\epsilon_z = A \cos [\omega(t - x/c) - 3\pi/4]$
- (d) $\epsilon_y = A \cos \omega(t - x/c)$
 $\epsilon_z = A \cos [\omega(t - x/c) + \pi/4]$

En cada caso representar el campo magnético, mostrando cómo varía a medida que la onda avanza.

19.6 Una onda luminosa plana sinusoidal con polarización lineal y longitud de onda $\lambda = 5,0 \times 10^{-7}$ m, se propaga en el vacío. La intensidad media es $0,1 \text{ W m}^{-2}$. La dirección de propagación está en el plano XY a un ángulo de 45° con respecto al eje X . El campo eléctrico oscila paralelo al eje Z . Escribir las ecuaciones que describen los campos eléctrico y magnético de esta onda.

19.7 Una onda electromagnética plana sinusoidal con polarización circular y longitud de onda $\lambda = 5,0 \times 10^{-7}$ m, se propaga en el vacío en la dirección del eje X . Su intensidad media por unidad de área es $0,1 \text{ W m}^{-2}$ y el plano de vibración del vector eléctrico es paralelo al eje Y . Escribir las ecuaciones que describen los campos eléctrico y magnético de esta onda.

19.8 El campo eléctrico de una onda electromagnética plana tiene una amplitud de 10^{-2} V m^{-1} . Encontrar: (a) el módulo del campo magnético, (b) la energía de la onda por unidad de volumen. (c) Si la onda es completamente absorbida cuando incide sobre un cuerpo, determinar la presión de radiación. (d) Contestar la pregunta anterior para el caso de que el cuerpo sea un reflector perfecto.

19.9 La radiación electromagnética del sol cae sobre la superficie terrestre a razón de $1,4 \times 10^3 \text{ W m}^{-2}$. Suponiendo que esta radiación puede considerarse como una onda plana, estimar el módulo de las amplitudes de los campos eléctrico y magnético de la onda.

19.10 La potencia media de una estación difusora es 10^5 W . Suponiendo que la potencia se irradia uniformemente sobre cualquier semiesfera con centro en la estación, encontrar el módulo del vector de Poynting y las amplitudes de los campos eléctrico y magnético en un punto a 10 km de la fuente. Suponer que a esa distancia la onda es plana.

19.11 Un trasmisor de radar emite su energía dentro de un cono que abarca un ángulo sólido de 10^{-2} sterad. El campo eléctrico tiene una amplitud de 10 V m^{-1} a una distancia de 10^3 m . Encontrar la

Amplitud del campo magnético y la potencia del transmisor.

19.12 Suponer que una lámpara de 100 W y 80% de eficiencia irradia toda su energía en forma isótropa. Calcular la amplitud de los campos eléctrico y magnético a 2 m de la lámpara.

19.13 Las ondas de radio recibidas en un radioreceptor tienen un campo eléctrico de amplitud máxima igual a 10^{-1} V/m². Suponiendo que la onda se puede considerar plana, calcular: (a) la amplitud del campo magnético, (b) la intensidad media de la onda, (c) la densidad media de energía. (d) Suponiendo que el receptor está a 1 km de la radioemisora y que ésta irradia energía en forma isótropa, determinar la potencia de la estación.

19.14 Dos ondas electromagnéticas armónicas, ambas de frecuencia ν y amplitud E_0 , viajan en el vacío en las direcciones de los ejes X e Y, respectivamente. Los campos eléctricos de ambas ondas son paralelos al eje Z. Calcular, para la onda resultante de la superposición de las dos, (a) las componentes del campo eléctrico \mathcal{E} , (b) las componentes del campo magnético \mathcal{B} , la densidad de energía E, (d) las componentes del vector de Poynting. Determinar los planos sobre los cuales el valor medio de \mathcal{E}^2 es máximo o mínimo. (g) Determinar los planos sobre los cuales el vector \mathcal{B} realiza oscilaciones circulares.

19.15 Demostrar que si

$$\mathbf{V} = V_0 \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t),$$

la condición $\operatorname{div} \mathbf{V} = 0$ implica que $\mathbf{k} \cdot \mathbf{V}_0 = 0$ ó sea que \mathbf{k} es perpendicular a \mathbf{V}_0 . Esto prueba, según las ecs. (17.65), que tanto \mathcal{E} como \mathcal{B} son perpendiculares a \mathbf{k} en el vacío, por lo que los resultados de la sección 19.2 tienen validez general.

19.16 Demostrar que si

$$\mathbf{V} = V_0 \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t),$$

tal $\mathbf{V} = \mathbf{k} \times \mathbf{V}_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)$, por lo que las ecs. (17.65) implican que $\mathbf{k} \times \mathcal{B} = \mu_0 \epsilon_0 \omega \mathcal{E}$ y $\mathbf{k} \times \mathcal{E} = \omega \mathcal{B}$. Demostrar que los dos resultados son compatibles. Usando los resultados de este problema y los del anterior, discutir la orientación relativa de los vectores \mathbf{k} , \mathcal{E} y \mathcal{B} . Comparar con los resultados de la sección 19.2.

19.17 Usando los resultados anteriores, demostrar que los campos \mathcal{E} y \mathcal{B} de una onda electromagnética plana deben estar en fase.

19.18 Demostrar que el vector de Poynting puede expresarse en la forma $\mathcal{E} \times \mathcal{H}$. Esta expresión es aplicable a una onda electromagnética que se propaga en el vacío o en un medio material.

19.19 Demostrar que el valor medio del módulo del vector de Poynting de una onda plana armónica es $\frac{1}{2} \epsilon_0 \mathcal{E}_0^2$ ó $\mathcal{E}_0 \mathcal{B}_0 / 2\mu_0$. Comparar con la ec. (19.17).

19.20 Demostrar que si un sistema de cargas oscilantes irradia energía electromagnética en forma isótropa, el valor medio del módulo del vector de Poynting a una distancia r es $(dE/dt)/4\pi r^2$.

19.21 Un sistema de cargas oscilantes concentradas alrededor de un punto, irradia energía a razón de 10^4 W. Suponiendo que la energía se irradia en forma isótropa, encontrar, para un punto a la distancia de 1 m: (a) el valor medio del módulo del vector de Poynting, (b) el módulo de las amplitudes de los campos eléctrico y magnético, (c) las densidades de energía y de momentum. [Sugerencia: tener en cuenta que a grandes distancias de la fuente, una porción pequeña del frente de onda se puede considerar plana.]

19.22 Calcular el flujo de energía por unidad de área a través de un plano que es perpendicular a la velocidad de una carga en movimiento uniforme y que pasa por la misma. Suponer que la carga tiene radio R y usar la expresión no relativista de los campos eléctrico y magnético. Discutir críticamente el resultado. [Sugerencia: como elementos de área para el flujo usar anillos de radio r y espesor dr con centro en la carga.]

19.23 Una fuente gaseosa emite luz de longitud de onda 5×10^{-7} m. Suponer que cada molécula actúa como un oscilador de carga e y amplitud 10^{-10} m. (a) Calcular la rapidez promedio de irradiación de energía por molécula. (b) Si la rapidez total de irradiación de energía por la fuente es de 1 W, ¿cuántas moléculas está emitiendo simultáneamente?

19.24 Usando la ec. (19.27), estimar el valor de dE/dt para un protón dentro de

un núcleo. Tomar z_0 del orden de 10^{-16} m y ω del orden de 5×10^{20} s $^{-1}$ que corresponde a rayos gamma de baja energía.

19.25 La expresión (19.39) da la intensidad de la radiación proveniente de una carga acelerada en función de la dirección de dicha radiación. Integrando la misma respecto a todas las direcciones, obtener la ec. (19.38). [Sugerencia: multiplicar $I(0)$ por el elemento de área $dS = 2\pi r^2 \sin \theta d\theta$ e integrar de 0 a π .]

19.26 Obtener una expresión para la energía irradiada por unidad de tiempo por una partícula cargada que se mueve con velocidad v perpendicular al campo magnético B .

19.27 (a) El electrón de un átomo de hidrógeno tiene una energía cinética de 13,6 eV y está sobre una órbita de $5,29 \times 10^{-11}$ m de radio. Suponiendo que se puede aplicar la teoría del ejemplo 19.7, calcular la energía irradiada por segundo y por revolución. (b) Repetir el problema para un electrón de 50 keV sobre una trayectoria circular de 1 m de radio. (c) Repetir para un protón de 50 keV sobre una trayectoria circular de 1 m de radio.

19.28 Demostrar que para una partícula que se mueve en un acelerador lineal la potencia que irradia es

$$(dE/dt)_{\text{rad}} = (q^2/6\pi\epsilon_0 m_0 c^3)(dE_k/dx)^2,$$

donde E_k es la energía cinética de la partícula.

19.29 Demostrar que en un acelerador circular una partícula irradia energía a razón de $(dE/dt)_{\text{rad}} = (q^2 c / 6\pi\epsilon_0 r^2)(v/c)^4 (E/m_0 c^3)^4$.

19.30 Demostrar que en el caso de los gases, el segundo término en la ec. (19.58) es pequeño y que podemos escribir

$$n \approx 1 + \frac{Ne^2}{2m_e\epsilon_0} \left(\sum_i \frac{f_i}{\omega_i - \omega^2} \right).$$

En caso de que haya una sola frecuencia resonante, esta expresión se convierte en

$$n \approx 1 + \frac{Ne^2}{2m_e\epsilon_0(\omega^2 - \omega^2)}.$$

19.31 El índice de refracción del hidrógeno gaseoso a temperatura y presión normales es $n = 1 + 1,400 \times 10^{-4}$ para

$\lambda = 5,46 \times 10^{-7}$ m y $n = 1 + 1,547 \times 10^{-4}$ para $\lambda = 2,54 \times 10^{-7}$ m. Suponiendo que hay una sola frecuencia resonante, calcular esta frecuencia y el número de osciladores electrónicos por unidad de volumen. Comparar con el número de moléculas por unidad de volumen (ver problema 2.4). [Sugerencia: Usar el resultado del problema 19.30.]

19.32 Con referencia al problema anterior, calcular el índice de refracción del hidrógeno para $\lambda = 4 \times 10^{-7}$ m, a la presión de 10 atm y a la temperatura de 300K.

19.33 Considerar un gas cuyas moléculas se comportan como osciladores dipolares de constante elástica $k = 3 \times 10^2$ kg s $^{-2}$. Las partículas que oscilan son electrones. Calcular su frecuencia característica. Escribir el índice de refracción del gas en función de la frecuencia, suponiendo que el gas está a temperatura y presión normales. Obtener los valores del mismo para $\lambda = 5 \times 10^{-7}$ m y $\lambda = 10^{-7}$ m.

19.34 Verificar que en el ejemplo 19.19 la cantidad $Ne^2/m_e\omega^2$ es pequeña con respecto a la unidad en la región de los rayos X.

19.35 Determinar la frecuencia y la longitud de onda de los fotones absorbidos por los siguientes sistemas: (a) un núcleo que absorbe 10³ eV de energía, (b) un átomo que absorbe 1 eV, (c) una molécula que absorbe 10⁻² eV.

19.36 Los átomos de sodio absorben o emiten radiación electromagnética de $5,9 \times 10^{-7}$ m de longitud de onda, correspondiente a la luz amarilla del espectro visible. Determinar la energía de los fotones que se absorben o emiten.

19.37 Encontrar la energía de un fotón que tiene el mismo momentum que (a) un protón de 40 MeV, (b) un electrón de 40 MeV. Determinar la región del espectro a la cual pertenece. [Sugerencia: tener en cuenta que el protón puede tratarse en forma no relativista mientras que el electrón no.]

19.38 Para separar los átomos de carbono y de oxígeno que forman la molécula de monóxido de carbono se requiere una energía mínima de 11 eV. Encontrar la frecuencia mínima y la

longitud de onda máxima de la radiación electromagnética que se requiere para disociar la molécula.

19.39 Un átomo de hidrógeno en reposo absorbe un fotón de 10^4 eV de energía. Como consecuencia de ello el electrón sale disparado en la dirección de la radiación incidente. Despreciando la energía que se necesita para separar el electrón (alrededor de 13,6 eV), encontrar el momentum y la energía del electrón y del protón.

19.40 La energía de unión de un electrón en el plomo es de 9×10^4 eV. Cuando se irradia el plomo con una cierta radiación electromagnética y los fotoelectrones entran en un campo magnético de 10^{-2} T, describen una circunferencia de 0,25 m de radio. Calcular (a) el momentum y la energía de los electrones, (b) la energía de los fotones absorbidos. (c) ¿Puede usted despreciar el efecto del retroceso de los iones de plomo?

19.41 Cuando se ilumina una cierta superficie metálica con luz de diferentes longitudes de onda y se miden los potenciales que detienen los fotoelectrones, se obtienen los valores que se muestran en la siguiente tabla:

$\lambda \times 10^{-7}$ m)	V(V)	$\lambda \times 10^{-7}$ m)	V(V)
3,66	1,48	4,92	0,62
4,05	1,15	5,46	0,36
4,36	0,93	5,79	0,24

Representar el potencial en función de la frecuencia. Por medio de este gráfico determinar: (a) el umbral de frecuencias, (b) la energía de arranque del metal, (c) el cociente h/e .

19.42 La energía de arranque del potasio es de 2,0 eV. Suponiendo que sobre el potasio incide luz de $3,6 \times 10^{-7}$ m de longitud de onda, encontrar: (a) el potencial que detiene los fotoelectrones, (b) la energía cinética y la velocidad de los fotoelectrones más rápidos.

19.43 Un haz monocromático uniforme de $4,0 \times 10^{-7}$ m de longitud de onda incide en un material que tiene una energía de arranque de 2,0 eV. Si el haz tiene una intensidad de $3,0 \times 10^{-8}$ W m⁻²,

encontrar: (a) el número de electrones emitidos por m² y por s, (b) la energía absorbida por m² y por s.

19.44 Una radiación electromagnética de longitud igual a 10^{-6} m incide normalmente sobre una muestra metálica de 10^{-1} kg de masa y se emite un electrón en sentido opuesto al de la radiación incidente. Usando las leyes de la conservación de la energía y del momentum, obtener la energía del electrón y la energía de retroceso de la muestra metálica. Suponiendo que la energía de arranque es nula, ¿justifica este resultado el no haber considerado la conservación del momentum en nuestros cálculos del efecto fotoeléctrico?

19.45 Un fotón con una energía de 10^4 eV choca con un electrón libre en reposo y se difunde a un ángulo de 60° . Encontrar: (a) la variación de energía, de frecuencia y de longitud de onda del fotón, (b) la energía cinética, el momentum y dirección del electrón que retrocede.

19.46 Una radiación de 10^{-10} m (1 Å) de longitud de onda sufre difusión Compton en una muestra de carbono. La radiación difundida se observa en una dirección perpendicular a la de incidencia. Encontrar: (a) la longitud de onda de la radiación difundida, (b) la energía cinética del electrón.

19.47 Con referencia al problema anterior, si los electrones retroceden en una dirección que forma un ángulo de 60° con la de la radiación incidente, encontrar: (a) la longitud de onda y la dirección de la radiación difundida. (b) la energía cinética del electrón.

19.48 Demostrar que la energía cinética del electrón de retroceso en el efecto Compton está dada por

$$E_k = h\nu\alpha(1 - \cos\theta)/[1 + \alpha(1 - \cos\theta)],$$

donde $\alpha = h\nu/m_ec^2$. Mostrar que la máxima energía del electrón de retroceso es $(h\nu)^2/(h\nu + \frac{1}{2}m_ec^2) \approx h\nu - \frac{1}{2}m_ec^2$ si $h\nu \gg \frac{1}{2}m_ec^2$.

19.49 Mostrar que si el electrón se difunde en una dirección que forma un ángulo ϕ con la del fotón incidente en la difusión Compton, la energía cinética del electrón es $E_k = h\nu(2\alpha \cos^2 \phi)/$

$[(1 + \alpha)^2 - \alpha^2 \cos^2 \phi]$, donde $\alpha = h\nu/mec^2$.

19.50 Demostrar que en la difusión Compton, la relación entre los ángulos que definen las direcciones del fotón difundido y el electrón de retroceso es $\cot \phi = (1 + \alpha) \operatorname{tg} \frac{1}{2}\theta$.

19.51 Deducir la ec. (19.62) para el efecto Doppler usando el resultado del ejemplo 11.8.

19.52 Considerar una sustancia que se mueve con velocidad v paralela al eje X . Sea $V' = c/n'$ la velocidad de la luz en la sustancia, medida por un observador O' en reposo con respecto a la sustancia. Demostrar que la velocidad V de una onda que se propaga en la sustancia según el eje X , medida por un observador O con respecto al cual la sustancia se mueve con velocidad v , es $V \approx c/n' + v(1 - 1/n'^2)$. [Sugerencia: Usar la transformación de Lorentz para las velocidades.]

19.53 Demostrar que cuando la luz se propaga en un medio que se mueve con velocidad v paralela al eje X , el efecto Doppler es $v' = v(1 - nv/c)$ si $v \ll c$.

19.54 Usando el resultado del problema 19.53, demostrar que $n' = n - (nv/c) dn/dv$, donde n' se calcula para v' y n para v . Como (con referencia al problema 19.52) n' debe calcularse para v' , demostrar que el resultado del problema 19.52 puede también escribirse en la forma $V \approx c/n + v[1 - 1/n^2 - (\lambda/n) dn/d\lambda]$. [Sugerencia: Tener en cuenta que

$\lambda v = c/n$ y que en el último término se puede reemplazar n' por n .]

19.55 Considerar una placa de vidrio de índice de refracción n y espesor Δx interpuesta entre una fuente monocromática S y un observador O , como se muestra en la fig. 19-35. (a) Demostrar

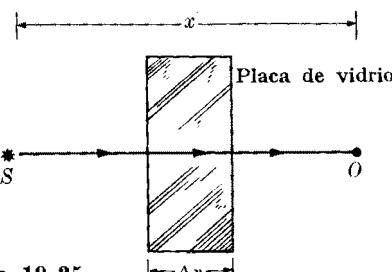


Figura 19-35

que si se desprecia la absorción por la placa de vidrio, el efecto de ésta sobre la onda que recibe O es introducir un desfase igual a $-\omega(n-1)\Delta x/c$, sin cambiar la amplitud ϵ_0 de la onda. (b) Si el desfase es pequeño, sea porque Δx es muy pequeño o porque n es muy cercano a la unidad, demostrar que la onda recibida en O se puede considerar como la superposición de la onda original de amplitud ϵ_0 , sin la placa, con una onda de amplitud $\epsilon_0\omega(n-1)\Delta x/c$ que tiene un desfase de $-\pi/2$. (Este problema muestra el efecto de un medio material sobre una onda electromagnética).

REFLEXION REFRACCION POLARIZACION

- 20.1 *Introducción*
- 20.2 *Principio de Huygens*
- 20.3 *Teorema de Malus*
- 20.4 *Reflexión y refracción de ondas planas*
- 20.5 *Reflexión y refracción de ondas esféricas*
- 20.6 *Más acerca de las leyes de la reflexión y de la refracción*
- 20.7 *Reflexión y refracción de ondas electromagnéticas*
- 20.8 *Propagación de ondas electromagnéticas en un medio anisótropo***
 - 20.9 *Dicroísmo*
 - 20.10 *Doble refracción*
 - 20.11 *Actividad óptica*
- 20.12 *Reflexión y refracción en superficies metálicas*
- 20.13 *Propagación en un medio no homogéneo*

20.1 Introducción

En todas las clases de ondas estudiadas en los capítulos 18 y 19, la velocidad de propagación depende de alguna propiedad física del medio a través del cual la onda se propaga. Por ejemplo, la velocidad de las ondas elásticas depende del módulo de elasticidad y de la densidad del medio. La velocidad de las ondas electromagnéticas depende de la permitividad y de la permeabilidad de la sustancia a través de la cual se propagan.

El hecho de que la velocidad de propagación de una onda dependa de las propiedades del medio da lugar a los fenómenos de *reflexión* y de *refracción*, que ocurren cuando una onda cruza la superficie de separación de dos medios en los cuales la onda se propaga con diferentes velocidades. La *onda reflejada* es una nueva onda que se propaga en el medio en el cual la onda original se estaba propagando. La *onda refractada* es la onda que se transmite al segundo medio. La energía de la onda incidente se divide entre la onda reflejada y la refractada. En muchos casos la onda reflejada recibe mayor energía, como sucede en los espejos. En otros, la onda refractada transporta la mayor parte de la energía. Cuando una onda transversal está polarizada la polarización queda generalmente afectada por la reflexión y por la refracción; por consiguiente también trataremos la polarización en este capítulo.

20.2 Principio de Huygens

La propagación de una onda está descrita por las ecuaciones del campo al cual la onda corresponde. Consideraremos esto con detenimiento en los capítulos 18-19. Por lo tanto, si conocemos la fuente productora de una onda, podemos, en principio, seguir su propagación de una región a otra, tomando en consideración en nuestros cálculos los cambios en las propiedades del medio. Es también posible, sin embargo, calcular la amplitud de una onda en un punto particular del espacio sin hacer referencia a las fuentes. Alrededor de 1680 el físico danés Christian Huygens (1629-1695) propuso un mecanismo simple para trazar la propagación de ondas. Su construcción es aplicable a ondas mecánicas o elásticas en un medio material.

Recordemos que una *superficie de onda* o un *frente de onda* es una superficie que pasa por todos los puntos del medio alcanzados por el movimiento ondulatorio al mismo instante. Por consiguiente, la perturbación en todos los puntos de una superficie de onda tiene la misma fase. Por ejemplo, para una onda plana la perturbación se expresa por $f(\mathbf{u} \cdot \mathbf{r} - vt)$, y una superficie de onda la forman todos los puntos en los cuales la fase $\mathbf{u} \cdot \mathbf{r} - vt$ tiene el mismo valor a un instante dado. Luego, la superficie de onda está dada por la ecuación

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{r} - vt = \text{const},$$

la cual, para un dato t , corresponde a un plano perpendicular al versor \mathbf{u} (recordar el ejemplo 3.11). Análogamente, para ondas esféricas, las superficies de onda están dadas por $r - vt = \text{const}$, la cual, para un dado t corresponde a esferas.

Huygens visualizó un método para pasar de una superficie de onda a otra. Consideremos una superficie de onda S (fig. 20-1). Cuando el movimiento ondulatorio alcanza esta superficie, cada partícula a, b, c, \dots sobre la superficie se convierte en una fuente secundaria de ondas, que emite *ondas secundarias* (indicadas por pequeñas semicircunferencias), que alcanzan la próxima capa de partículas del medio. Entonces estas partículas se ponen en movimiento, formando la subsiguiente superficie de onda S' . La superficie S' es tangente a todas las ondas secundarias. El proceso se repite, resultando la propagación de la onda a través del medio. Esta representación pictórica de la propagación de una onda parece muy razonable cuando la onda resulta de las vibraciones mecánicas de los átomos o moléculas de un cuerpo, es decir, es elástica.

Sin embargo, esta representación no tiene significado físico en casos como, por ejemplo, la propagación en el vacío de una onda electromagnética, donde no hay partículas que vibren. Por lo tanto, la construcción de Huygens, aunque razonable al aplicarse a las ondas mecánicas que se propagan en la materia, requirió una revisión al saberse que en la naturaleza existen otras ondas de clase diferente. Esta revisión fue llevada a efecto al final del último siglo por Kirchhoff, quien reemplazó la construcción intuitiva de Huygens por un tratamiento más matemático. Los cálculos de Kirchhoff son tan complicados que no los reproduciremos aquí. Su resultado final es, sin embargo, relativamente simple, como se verá en los párrafos que siguen.

El movimiento ondulatorio está regido por la ecuación general de onda (18.48). Esto es,

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = v^2 \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} \right) \quad (20.1)$$

donde ξ puede ser el desplazamiento de los átomos de una sustancia en el caso de una onda elástica, el campo eléctrico o magnético en el caso de una onda electromagnética, y así sucesivamente. Comprender la propagación de una onda en un medio cualquiera consiste fundamentalmente en obtener una solución $\xi(r, t)$ de esta ecuación diferencial. La solución de la ec. (20.1) depende de las condiciones físicas del problema que se deben satisfacer; esto es, de la posición y naturaleza de las fuentes, de las superficies físicas de discontinuidad, etc. Estas condiciones son llamadas por los matemáticos *condiciones de contorno*. La teoría de las ecuaciones diferenciales establece que bajo condiciones especiales podemos hallar la solución de una ecuación tal como la ec. (20.1) si conocemos los valores de la función $\xi(r, t)$ sobre una superficie cerrada S (fig. 20-2). Para ser más concretos, supongamos que queremos evaluar el movimiento ondulatorio en un punto P . Si conocemos las fuentes $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots$, podemos sumar todas sus con-

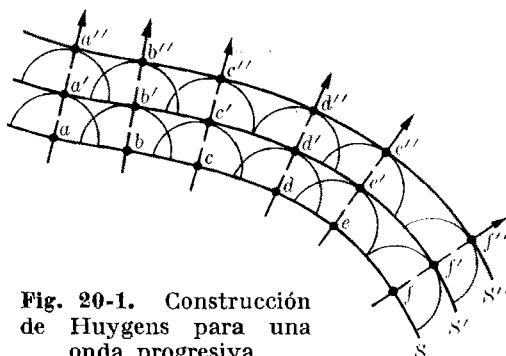


Fig. 20-1. Construcción de Huygens para una onda progresiva.

tribuciones en el punto P y obtener el movimiento ondulatorio resultante. Supongamos ahora que, en su lugar, conocemos el valor de ξ en todos los puntos de una superficie arbitraria, pero cerrada, S . En este caso también podemos obtener la onda en P , aun cuando ignoremos la distribución de las fuentes. Matemáticamente, se puede expresar esto del siguiente modo. Sea $f(Q, t)$ la función que representa la onda en cada punto Q de la superficie S al instante t . Supongamos que r representa la distancia entre el elemento de superficie dS alrededor de Q y el punto P . La perturbación en P al instante t se puede expresar por una integral de la forma*

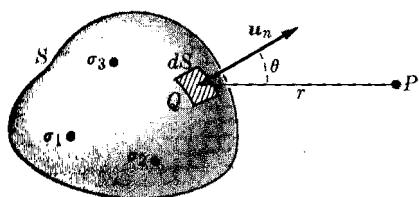


Fig. 20-2. La onda en P se puede calcular si se conoce la onda en todos los puntos de la superficie S .

emitida por la superficie elemental dS al instante $t - r/v$ y que llega a P al instante t , de modo que r/v es el tiempo de propagación desde dS hasta P . El factor $g(\theta)$ es un factor direccional que indica que las ondas emitidas por dS no tienen la misma amplitud en todas las direcciones. Cuando dS es perpendicular a la dirección de propagación, $g(\theta)$ toma la forma

$$g(\theta) = \frac{1}{2}(1 + \cos \theta),$$

de modo que la amplitud máxima ($g = 1$) corresponde a $\theta = 0$, o propagación hacia adelante, y la amplitud mínima ($g = 0$) a $\theta = \pi$, o propagación hacia atrás. Concluimos entonces que podemos obtener la perturbación en el punto P al instante t si suponemos que cada elemento de superficie dS de la superficie cerrada S actúa como una fuente secundaria de ondas. Este es esencialmente el enunciado de Huygens, pero en una perspectiva diferente, sin referencia a un modelo mecánico.

Tendremos ocasión de usar el principio de Huygens, reformulado por Kirchhoff, en muchas de las discusiones que siguen sobre la propagación de ondas, especialmente cuando tratemos la difracción y la difusión.

20.3 Teorema de Malus

Otro instrumento importante para seguir la propagación de una onda, a través de un medio, es el teorema de Malus. Refiriéndonos de nuevo a la fig. 20-1, observamos que podemos trazar una serie de líneas perpendiculares a las sucesivas

* La expresión real es algo más complicada; pero la ec. (20.2) conviene a nuestros fines y suministra una adecuada aproximación, aplicable al tipo de problemas discutidos en este libro.

$$\xi_P(t) = \oint_S g(\theta) \frac{f(r - vt)}{r} dS, \quad (20.2)$$

donde la integral se extiende a toda la superficie S . Esta integral tiene por lo demás una interpretación física simple. El factor $(1/r)f(r - vt)$ representa una onda esférica

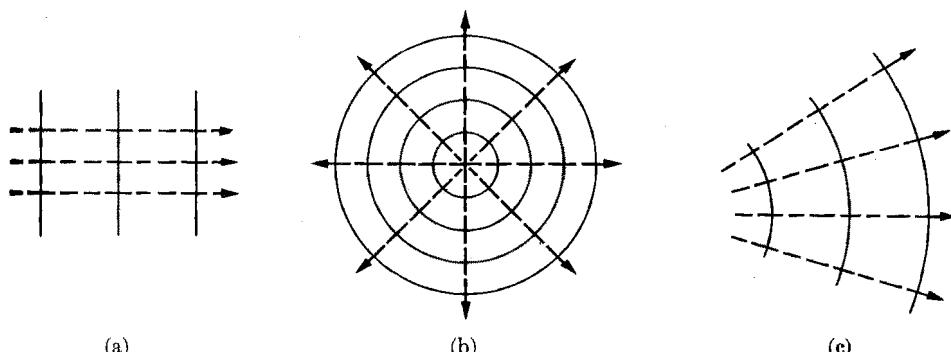


Fig. 20-3. Ondas planas, ondas esféricas y ondas de forma arbitraria.

superficies de onda (indicadas con líneas de trazos con flechas). Estas líneas se llaman *rayos* y corresponden a líneas de propagación de la onda. Debemos observar que la relación entre rayos y superficies de onda es similar a la relación entre líneas de fuerza y superficies equipotenciales. Puntos de diferentes superficies de onda unidos por un rayo dado, tal como a, a', a'' ó b, b', b'' de la fig. 20-1, se llaman *puntos correspondientes*. Evidentemente el tiempo requerido para que la onda vaya desde S a S'' debe ser el mismo cualquiera sea el rayo según el cual se mida. Podemos de este modo establecer que

el tiempo que separa puntos correspondientes de dos superficies de onda es el mismo para todos los pares de puntos correspondientes.

De aquí concluimos que las distancias $aa'', bb'', cc'',$ etc., deben depender de la velocidad del movimiento ondulatorio en cada punto. En un medio isótropo y homogéneo, donde la velocidad es la misma en todos los puntos y en todas las direcciones, la separación entre dos superficies de onda debe ser la misma para todos los puntos correspondientes. Otro hecho importante que debemos aceptar es que en un medio isótropo homogéneo los rayos deben ser líneas rectas, porque la simetría sugiere que no hay razón para que éstos se desvíen hacia un lado u otro. Esto lo hemos visto ya con ondas planas y esféricas; se ilustra en las partes (a) y (b) de la fig. 20-3. Por lo tanto, en el caso general la familia de superficies de onda debe tener un conjunto común de normales, como se muestra en la fig. 20-3(c), y deben estar igualmente espaciadas a lo largo de estas normales.

Consideraremos ahora el caso de una onda que se propaga a través de una sucesión de medios isótropos homogéneos. En el cruce de cada superficie de separación

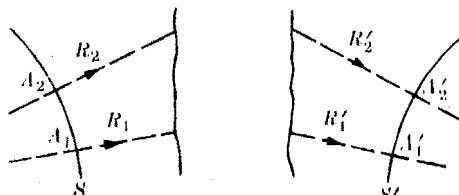


Fig. 20-4. Rayos correspondientes en ondas entrantes y salientes.

de dos medios adyacentes, la dirección de propagación puede cambiar (esto es, los rayos pueden cambiar de dirección), pero mientras esté propagándose en un medio dado, estos rayos seguirán siendo líneas rectas perpendiculares a las superficies de onda. Sea S (fig. 20-4) una superficie de onda en el primer medio. Entonces podemos trazar dos rayos, R_1 y R_2 , perpendiculares a S . Las sucesivas superficies de onda en ese medio deben ser perpendiculares a R_1 y R_2 . Si después que el movimiento ondulatorio ha pasado a través de todos los medios, observamos otra superficie de onda S' , encontramos que los rayos R_1 y R_2 se han transformado en los rayos R'_1 y R'_2 , que son también perpendiculares a S' . En otras palabras,

la relación de ortogonalidad entre rayos y superficies de onda se conserva a través de todo el proceso de la propagación de una onda.

Este teorema supone además que el tiempo requerido para que la onda se propague desde A_1 hasta A'_1 (que son puntos correspondientes) debe ser el mismo que el tiempo requerido para ir desde A_2 hasta A'_2 (que también son puntos correspondientes).

20.4 Reflexión y refracción de ondas planas

Consideremos una onda plana que se propaga en el medio (1) en la dirección del vedor \mathbf{u}_i (fig. 20-5). Los experimentos indican que, cuando la onda alcanza la superficie plana AB que separa el medio (1) del medio (2), se transmite una onda al segundo medio y otra regresa al medio (1). Estas son las ondas *refractadas* y *reflejadas*, respectivamente. Cuando el ángulo de incidencia es oblicuo, las ondas refractadas se propagan en la dirección indicada por el vedor \mathbf{u}_r , diferente de \mathbf{u}_i , y la reflejada se propaga en la dirección que indica el vedor \mathbf{u}'_r simétrico de \mathbf{u}_i con respecto a la superficie. La fig. 20-6 indica la correspondiente situación para los rayos. Los ángulos θ_i , θ_r y θ'_r , se llaman ángulos de incidencia, refracción y reflexión, respectivamente. Las direcciones de los tres versores \mathbf{u}_i , \mathbf{u}_r y \mathbf{u}'_r están relacionadas por las siguientes leyes experimentales:

(1) *Las direcciones de incidencia, refracción y reflexión están en un mismo plano*, que es normal a la superficie de separación y por lo tanto contiene la normal N a la superficie.

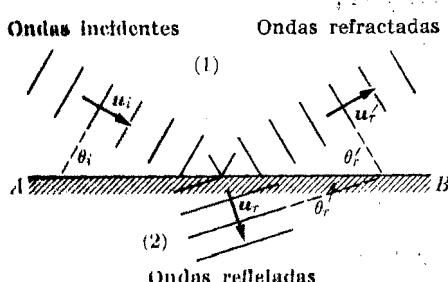


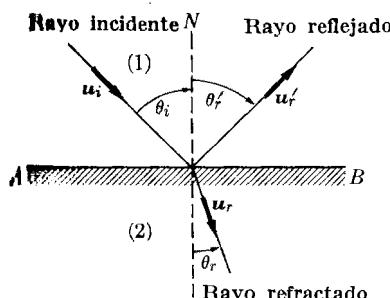
Fig. 20-5. Ondas planas incidentes, reflejadas y refractadas.

(2) *El ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión.* Esto es,

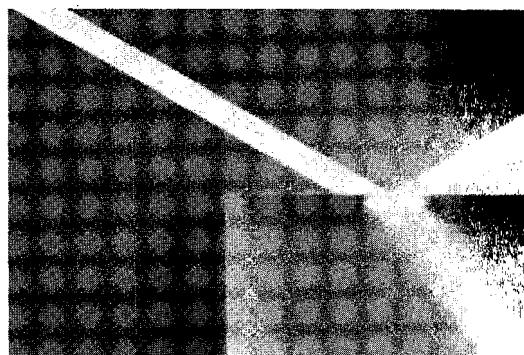
$$\theta_i = \theta'_r. \quad (20.3)$$

(3) *El cociente entre el seno del ángulo de incidencia y el seno del ángulo de refracción es constante.* Esto se denomina *ley de Snell* y se expresa por

$$\frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_r} = n_{st}. \quad (20.4)$$



(a)



(b)

Fig. 20-6. (a) Rayo incidente, reflejado y refractado. (b) Un haz de luz reflejado y refractado por un bloke de vidrio. (De: *Physics*, D.C. Heath, Boston, 1960.)

La constante n_{21} se llama índice de refracción del medio (2) respecto al medio (1). El valor numérico depende de la naturaleza de la onda y de las propiedades de los medios.

Estas leyes siguen siendo válidas aún cuando la superficie de onda y la superficie de separación no sean planas, porque en cada punto hay una sección limitada de cada una de las dos superficies que se puede considerar plana y los rayos en aquél punto se comportan de conformidad con las ecuaciones (20.3) y (20.4).

Las tres leyes pueden verificarse experimentalmente sin gran dificultad. Se pueden probar teóricamente usando los conceptos básicos de la propagación de ondas y en particular el teorema de Malus. Por ejemplo, la primera ley se puede justificar basándose solamente en consideraciones de simetría, ya que el rayo incidente y la normal N determinan un plano, y no hay a priori razón para que los rayos refractados y los reflejados se desvien de este plano. Para probar la segunda y tercera leyes, consideremos dos rayos incidentes R_1 y R_2 (fig. 20-7) paralelos entre sí, ya que las ondas incidentes son planas. El rayo R_1 toca la superficie de separación en el punto A y R_2 en B' . Como la situación geométrica para A y B' es la misma, concluimos que los rayos refractados R'_1 y R'_2 , así como los rayos reflejados R''_1 y R''_2 , son también paralelos. Como los rayos R_1 y R_2 son arbitrarios, tenemos entonces que las ondas refractadas y reflejadas son también planas ya que deben ser perpendiculares a un conjunto correspondiente de rayos paralelos, como lo requiere el teorema de Malus.

Consideraremos las siguientes superficies de onda: AB en la onda incidente, $A'B'$ en la onda refractada, y $A''B''$ en la onda reflejada. Está implícito en el

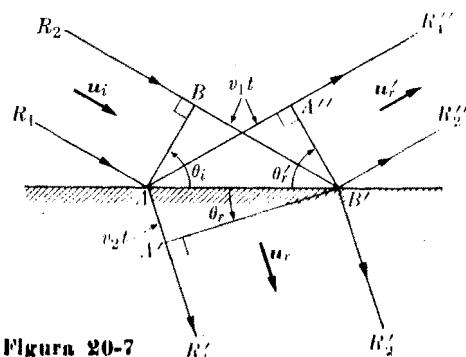


Figura 20-7

teorema de Malus que los rayos entre puntos correspondientes de superficies de onda deben tardar el mismo tiempo en cubrir la distancia entre ellos. Llamemos t el tiempo que toma la onda incidente en ir desde B hasta B' según el rayo R_2 con velocidad v_1 . En el mismo tiempo la onda refractada se ha movido según el rayo R'_1 desde A hasta A'' con velocidad v_1 . Entonces:

$$BB' = v_1 t, \quad AA' = v_2 t, \quad AA'' = v_1 t,$$

y de la geometría de la figura,

$$\operatorname{sen} \theta_i = \frac{BB'}{AB'} = \frac{v_1 t}{AB'},$$

$$\operatorname{sen} \theta_r = \frac{AA'}{AB'} = \frac{v_2 t}{AB'},$$

$$\operatorname{sen} \theta'_r = \frac{AA''}{AB'} = \frac{v_1 t}{AB'}.$$

De la comparación de la primera y la tercera relaciones, se obtiene: $\operatorname{sen} \theta_i = -\operatorname{sen} \theta'_r$, ó $\theta_i = \theta'_r$, que es la ley de la reflexión, ec.(20.3). Dividiendo la primera relación entre la segunda, se obtiene

$$\frac{\operatorname{sen} \theta_i}{\operatorname{sen} \theta_r} = \frac{v_1}{v_2},$$

que expresa la ley de Snell, ec. (20.4), ya que el cociente v_1/v_2 entre las dos velocidades de propagación es constante. Comparando esta ecuación con la ec. (20.4), vemos que el índice de refracción relativo de dos sustancias es igual al cociente entre las velocidades de propagación de la onda en las sustancias, o

$$n_{21} = v_1/v_2. \quad (20.5)$$

Tomemos un medio particular de referencia o patrón y designemos por c la velocidad de propagación de la onda en ese medio. El índice absoluto de refracción de cualquier otro medio se define como

$$n = c/v. \quad (20.6)$$

Para las ondas electromagnéticas,* el medio de referencia es el vacío y entonces $c \approx 3 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$. Luego, para dos sustancias,

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{c}{v_2} \times \frac{v_1}{c} = \frac{v_1}{v_2} = n_{21}, \quad (20.7)$$

de modo que el índice de refracción relativo de dos sustancias es igual al cociente de sus índices absolutos de refracción. Usando la relación (20.7), podemos escribir

* El concepto de índice absoluto de refracción para las ondas electromagnéticas se introdujo en la sección 19.13.

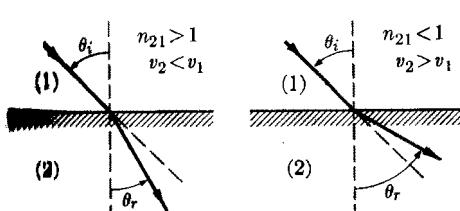


Fig. 20-8. Rayos refractados para $n_{21} > 1$ y $n_{21} < 1$.

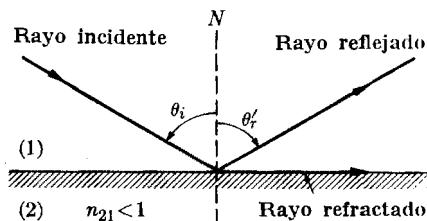


Fig. 20-9. La reflexión total ocurre cuando $n_{21} < 1$ y θ_i es mayor que el ángulo crítico λ .

la ley de Snell, ec. (20.4), en la forma más simétrica

$$n_1 \operatorname{sen} \theta_i = n_2 \operatorname{sen} \theta_r. \quad (20.8)$$

Obsérvese que si $v_2 \leq v_1$, entonces $n_2 \geq n_1$, con lo cual resulta $\theta_i \leq \theta_r$, como se indica en la fig. 20-8. En el segundo caso, esto es, $n_{21} < 1$, puede dar lugar a una situación especial. Cuando

$$\operatorname{sen} \theta_i = n_{21}, \quad (20.9)$$

obtenemos de la ec. (20.4) que $\operatorname{sen} \theta_r = 1$ ó $\theta_r = \pi/2$ lo cual indica que el rayo refractado es paralelo a la superficie. El ángulo θ_i dado por la ec. (20.9) se llama *ángulo crítico* y se designa con λ . La situación geométrica se ilustra en la fig. 20-9. Si $n_{21} < 1$, tenemos $\theta_i > \lambda$ ó $\operatorname{sen} \theta_i > n_{21}$, de lo cual se deduce que $\operatorname{sen} \theta_r > 1$, lo que es imposible. Por consiguiente, en este caso no hay rayo refractado y decimos que se produce *reflexión total*. Esta situación puede ocurrir, por ejemplo, cuando la luz pasa del vidrio al aire. Estrictamente hablando, como se muestra en la fig. 20-9, existe una onda que se propaga en el segundo medio paralelamente a la superficie, pero la amplitud de ésta decrece muy rápidamente a medida que se interna en el segundo medio, quedando confinada a una delgada capa a lo largo de la superficie.

EJEMPLO 20.1. Verificar que cuando una onda pasa a través de un medio limitado por caras planas paralelas, la dirección de propagación del rayo emergente es paralela a la del rayo incidente. Calcular el desplazamiento lateral de los rayos.

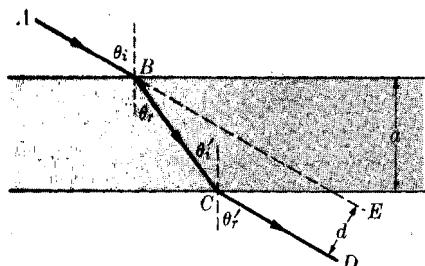
Solución: Consideremos una placa de espesor a y un rayo AB (fig. 20-10) que incide con un ángulo θ_i . Haremos caso omiso del rayo reflejado. El ángulo de refracción es θ_r , correspondiente al rayo refractado BC . Usando la relación (20.8), tenemos que

$$n_1 \operatorname{sen} \theta_i = n_2 \operatorname{sen} \theta_r.$$

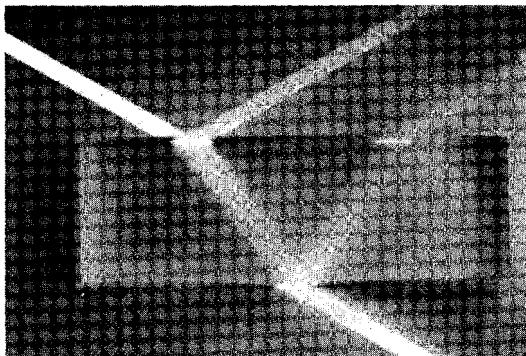
En el punto C la refracción es del medio (2) al medio (1), de modo que la ec. (20.8) da

$$n_2 \operatorname{sen} \theta'_r = n_1 \operatorname{sen} \theta'_i.$$

Además de la geometría de la fig. 20-10 deducimos que $\theta'_r = \theta_r$. Por lo tanto, multiplicando ambas relaciones, obtenemos $\operatorname{sen} \theta_i = \operatorname{sen} \theta'_i$ ó $\theta_i = \theta'_i$, lo cual prueba que el rayo emergente CD es paralelo al incidente AB , resultando que era de esperar



(a)



(b)

Fig. 20-10. Propagación de un rayo a través de una placa de caras paralelas. En (b) se muestra la fotografía del desplazamiento de un haz de luz. (De: *Physics*, D. C. Heath, Boston, 1960.)

de la geometría del problema. Dejamos que el estudiante verifique que el desplazamiento lateral del rayo es

$$d = a \frac{\operatorname{sen}(\theta_i - \theta_r)}{\cos \theta_r}.$$

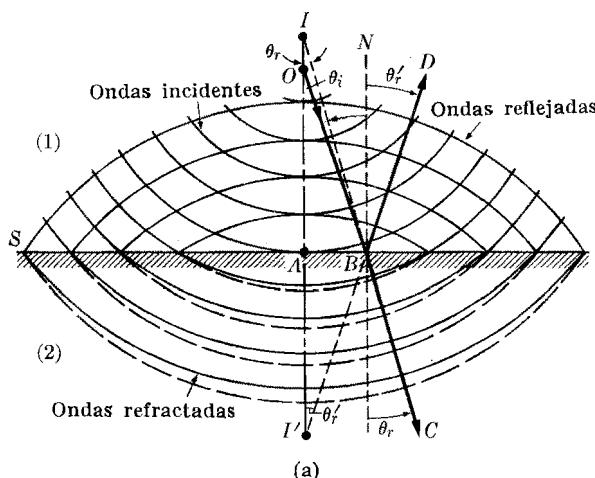
También se puede comprobar fácilmente que si se tienen varias placas paralelas de materiales diferentes, los rayos incidente y emergente continúan siendo paralelos.

20.5 Reflexión y refracción de ondas esféricas

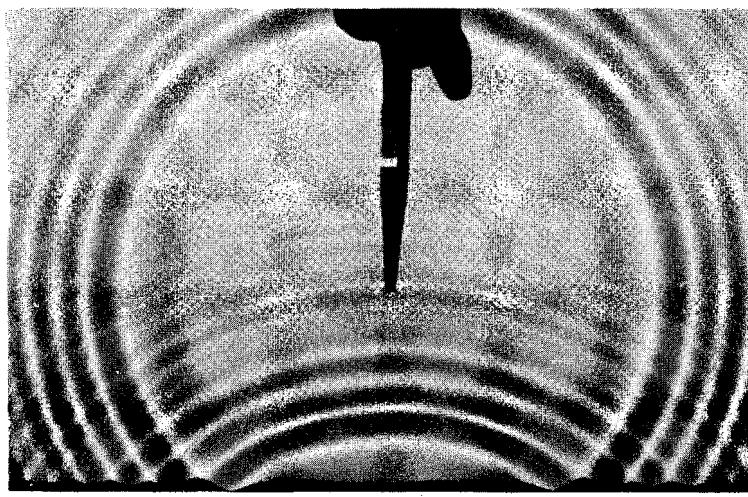
Un segundo problema importante es la reflexión y refracción de ondas *esféricas* en una superficie plana. Consideremos las ondas esféricas generadas en la fuente puntual *O* e incidentes sobre una superficie plana *S*. Se producen entonces dos conjuntos nuevos de ondas: las reflejadas y las refractadas o transmitidas, como se muestra en la fig. 20-11. A fin de trazar la forma de los frentes de onda reflejados y refractados, sería necesario dibujar muchos rayos reflejados y refractados. Las correspondientes superficies de onda reflejadas y refractadas son normales a los rayos. En la fig. 20-11, se ha dibujado en *B* un conjunto de estos rayos, suponiendo $n_{21} > 1$. De acuerdo con las leyes (2) y (3) para la reflexión y la refracción, tenemos

$$\theta_i = \theta'_r, \quad \operatorname{sen} \theta_i / \operatorname{sen} \theta_r = n_{21}.$$

El rayo reflejado *BD*, cuando se prolonga en el medio (2), intercepta a la normal *AO* en el punto *I'*. Puesto que los triángulos *OAB* e *I'AB* son rectángulos y los ángulos en *O* e *I'* son iguales, se deduce que $\angle AOB = \angle AI'B$. Como *B* es un punto arbitrario, concluimos que *todos los rayos reflejados pasan por el punto *I'*, simétrico*



(a)



(b)

Fig. 20-11. Ondas esféricas: incidente, reflejada y refractada. En (b) la fotografía muestra las ondas superficiales incidentes y reflejadas en un medio líquido. (De: *Physics*, D. C. Heath, Boston, 1960.)

de O respecto a la superficie plana. Este punto se llama la *imagen* de O por reflexión.

En consecuencia, cuando las ondas esféricas inciden sobre una superficie plana, las ondas reflejadas son esféricas y simétricas con respecto a las incidentes. Esta simetría era de esperarse en vista de que las ondas reflejadas se propagan con la misma velocidad que las ondas incidentes, de tal modo que se mantienen simétricas respecto a la superficie reflectora.

Respecto al rayo refractado BC , vemos que cuando lo extendemos en el medio (1) intercepta a la normal OA en el punto I tal que $\tan \theta_r = AB/AI$. También $\tan \theta_i = AB/AO$. Por lo tanto

$$\frac{\tan \theta_i}{\tan \theta_r} = \frac{AI}{AO}$$

o sea

(20.10)

$$AI = AO \frac{\tan \theta_i}{\tan \theta_r}.$$

Ahora bien, la ley de refracción de Snell requiere que $\sin \theta_i / \sin \theta_r$ sea constante e igual a n_{21} . Pero entonces $\tan \theta_i / \tan \theta_r$ no puede ser constante. Por consiguiente los rayos refractados no pasan todos por el mismo punto. Concluimos entonces

que cuando las ondas esféricas inciden sobre una superficie plana, las ondas refractadas no son esféricas.

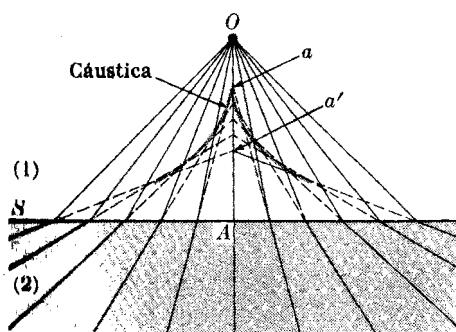


Fig. 20-12. Refracción de rayos procedentes de una fuente puntual. Los rayos refractados, al prolongarse hacia atrás, no se interceptan.

y podemos reemplazar las tangentes por senos en la ec. (20.10), con lo cual resulta

$$AI \approx AO \frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_r} = n_{21} AO. \quad (20.11)$$

20.6 Más acerca de las leyes de la reflexión y de la refracción

Hemos establecido las leyes de la reflexión y de la refracción usando razonamientos más o menos geométricos basados en el teorema de Malus. Pero es posible también discutir estas leyes en una forma más analítica. Supongamos que una onda incidente esté descrita por una ecuación de la forma (18.46). Esto es

$$\xi_i = \xi_{0i} \sin(\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r} - \omega t). \quad (20.12)$$

Las ondas refractadas y reflejadas serán, respectivamente,

$$\xi_r = \xi_{0r} \operatorname{sen}(\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r} - \omega t) \quad (20.13)$$

y

$$\xi'_r = \xi'_{0r} \operatorname{sen}(\mathbf{k}'_r \cdot \mathbf{r} - \omega t). \quad (20.14)$$

Observese que hemos usado la misma ω de la onda incidente para las ondas reflejadas y refractadas porque es un hecho experimental que la frecuencia del movimiento ondulatorio no cambia en la reflexión o refracción.

La propiedad física adscrita a ξ (un desplazamiento, una presión, o un campo eléctrico o magnético) es tal que su valor en la superficie de separación de dos medios debe ser el mismo cualquiera sea el lado en que la calculemos. (En el caso de una onda electromagnética, la relación entre las componentes del campo eléctrico y del campo magnético puede ser de naturaleza algo diferente. Pero continúa siendo una relación lineal que involucra los campos a ambos lados de la superficie.) Ahora bien, en el medio (1) tenemos las ondas incidente y reflejada, que produce la perturbación resultante $\xi_i + \xi'_r$, y en el medio (2) tenemos sólo la onda refractada, ξ_r . Entonces en la superficie de separación

$$\xi_i + \xi'_r = \xi_r. \quad (20.15)$$

A fin de que esta ecuación sea satisfecha en todos los puntos de la superficie de separación al mismo instante, es necesario que las fases en las ecs. (20.12), (20.13) y (20.14) sean idénticas, esto es,

$$\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r} - \omega t = \mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r} - \omega t = \mathbf{k}'_r \cdot \mathbf{r} - \omega t \quad (20.16)$$

para puntos \mathbf{r} sobre la superficie. Después de cancelar el término común ωt , la ec. (20.16), se reduce a

$$\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k}'_r \cdot \mathbf{r}. \quad (20.17)$$

Ahora podemos escoger nuestros ejes XYZ, como se indica en la fig. 20-13, de modo que la superficie de separación coincida con el plano XZ y la dirección de incidencia esté en el plano XY. Entonces, como \mathbf{r} debe estar en el plano XZ, $\mathbf{r} = u_x \mathbf{x} + u_z \mathbf{z}$. Análogamente, $\mathbf{k}_i = u_{xk_{ix}} + u_{yk_{iy}}$, y como no sabemos si \mathbf{k}_r y \mathbf{k}'_r están también en el mismo plano, debemos escribir $\mathbf{k}_r = u_{xk_{rx}} + u_{yk_{rz}} + u_{zk_{rz}}$ y $\mathbf{k}'_r = u_{xk'_{rx}} + u_{yk'_{ry}} + u_{zk'_{rz}}$. Sustituyendo en la ec. (20.17), usando la expresión (3.20) para el producto escalar, obtenemos

$$k_{ix}x = k_{rx}x + k_{rz}z = k'_{rx}x + k'_{rz}z.$$

Pero esta relación debe ser válida para todos los puntos del plano XZ; por lo tanto

$$k_{ix} = k_{rx} = k'_{rx} \quad y \quad k_{rz} = k'_{rz} = 0. \quad (20.18)$$

El segundo grupo de ecuaciones indica que los vectores \mathbf{k}_r y \mathbf{k}'_r no tienen componentes según el eje Z, de modo que están también en el plano XY y los rayos

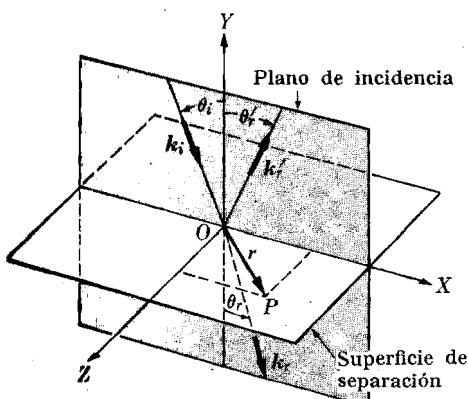


Figura 20-13

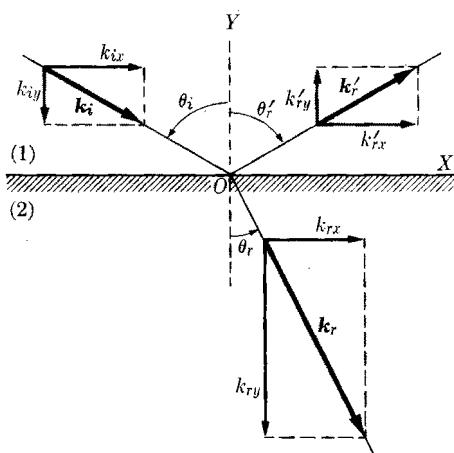


Fig. 20-14. Vectores de propagación en las ondas incidente, reflejada y refractada.

incidente, reflejado y refractado están en el mismo plano; ésta es la ley (1) mencionada anteriormente.

Vemos a continuación que, según la fig. 20-14, $k_{ix} = k_i \operatorname{sen} \theta_i$, $k_{rx} = k_r \operatorname{sen} \theta_r$ y $k'_{rx} = k'_r \operatorname{sen} \theta'_r$. Y de la ec. (18.6), se deduce $k_i = k'_r = \omega/v_1$ y $k_r = -\omega/v_2$. Usando todas estas relaciones en el primer grupo de ecs. (20.18), obtenemos, después de eliminar el factor común ω ,

$$\frac{1}{v_1} \operatorname{sen} \theta_i = \frac{1}{v_2} \operatorname{sen} \theta_r = \frac{1}{v_1} \operatorname{sen} \theta'_r.$$

De estas relaciones deducimos que $\operatorname{sen} \theta_i = \operatorname{sen} \theta'_r$ ó $\theta_i = \theta'_r$ y $\operatorname{sen} \theta_i / \operatorname{sen} \theta_r = -v_1/v_2 = n_{21}$. De este modo, llegamos en forma más analítica a las leyes (2) y (3) de la reflexión y la refracción.

Cuando se satisface la ec. (20.16), la ec. (20.15) se reduce a

$$\xi_{0i} + \xi'_{0r} = \xi_{0r}, \quad (20.19)$$

que es una relación entre las amplitudes de las tres ondas. Ahora bien, si sólo se satisface la ec. (20.15), o su equivalente, la ec. (20.19), no tenemos suficiente información para determinar la amplitud de las ondas reflejada y refractada. Sin embargo, debido a la naturaleza del problema se requiere usualmente otra condición de contorno tal como la continuidad de las tensiones o de las presiones a través de la superficie de separación en el caso de ondas elásticas, o la continuidad de ciertas componentes de los campos eléctrico y magnético en el caso de ondas electromagnéticas. Por consiguiente existe una segunda condición (o condición de contorno) que involucra las amplitudes ξ_{0i} , ξ_{0r} y ξ'_{0r} . Si usamos las dos condiciones de contorno, podemos determinar las amplitudes ξ_{0r} y ξ'_{0r} en función de ξ_{0i} . Esto se ilustra en el ejemplo siguiente.

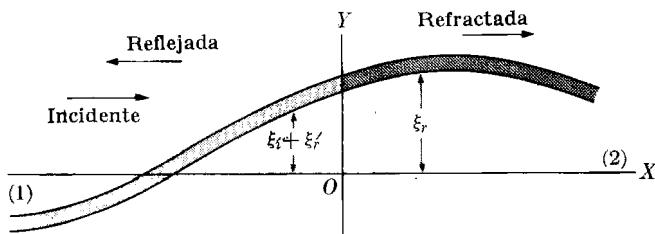


Fig. 20-15. Ondas transversales en dos cuerdas unidas de diferentes densidades.

EJEMPLO 20.2. Estudiar la reflexión y la transmisión de ondas transversales en el punto de unión de dos cuerdas de materiales diferentes. Las cuerdas están sometidas a una tensión T .

Solución: Supongamos que tenemos dos cuerdas (1) y (2) (fig. 20-15), unidas en un punto; este punto será nuestro origen de coordenadas. Por conveniencia matemática, en este ejemplo usaremos para la forma de las ondas la alternativa dada en la ec. (18.10). Existe una onda incidente que viene de la izquierda y que tiene la forma

$$\xi_i = \xi_{0i} \operatorname{sen}(\omega t - k_i x).$$

En el punto de discontinuidad se produce una onda refractada o transmitida que se propaga a lo largo de la cuerda (2),

$$\xi_r = \xi_{0r} \operatorname{sen}(\omega t - k_r x),$$

y una onda reflejada que regresa a la cuerda (1),

$$\xi'_i = \xi'_{0i} \operatorname{sen}(\omega t + k_i x).$$

Obsérvese que usamos k_i para las ondas incidente y reflejada porque se propagan en el mismo medio: cuerda (1). El desplazamiento vertical en cualquier punto de la cuerda (1) es $\xi = \xi_i + \xi'_i$. En la cuerda (2) el desplazamiento vertical es $\xi = \xi_r$. El punto O , donde las cuerdas se unen, corresponde a $x = 0$. En este punto debemos tener $\xi_i + \xi'_i = \xi_r$, en conformidad con la ec. (20.15), que se convierte en

$$\xi_{0i} \operatorname{sen} \omega t + \xi'_{0i} \operatorname{sen} \omega t = \xi_{0r} \operatorname{sen} \omega t$$

o sea

$$\xi_{0i} + \xi'_{0i} = \xi_{0r}, \quad (20.20)$$

que es una condición entre las amplitudes similar a la ec. (20.19). De acuerdo con la discusión hecha en la sección 18.7, la fuerza vertical en cualquier punto de la cuerda (1) es

$$F_y = T \operatorname{sen} \alpha \approx T \operatorname{tg} \alpha = T \frac{\partial \xi}{\partial x} = T \left(\frac{\partial \xi_i}{\partial x} + \frac{\partial \xi'_i}{\partial x} \right),$$

ya que α es pequeño y $\operatorname{sen} \alpha$ es prácticamente igual a $\operatorname{tg} \alpha$. Entonces:

$$F_y = Tk_i [-\xi_{0i} \cos(\omega t - k_i x) + \xi'_{0i} \cos(\omega t + k_i x)].$$

Análogamente, la fuerza vertical en cualquier punto de la cuerda (2) es

$$F_y = T \frac{\partial \xi_r}{\partial x} = -Tk_r \xi_{0r} \cos(\omega t - k_r x).$$

Ahora bien, en el punto de unión la fuerza vertical debe ser la misma, sea que la calculemos usando F_y para la cuerda (1) o para la cuerda (2). Haciendo $x = 0$ en

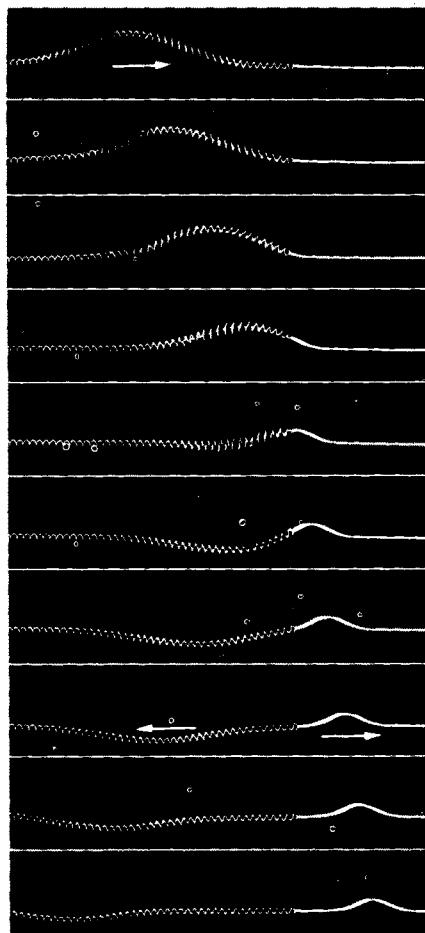
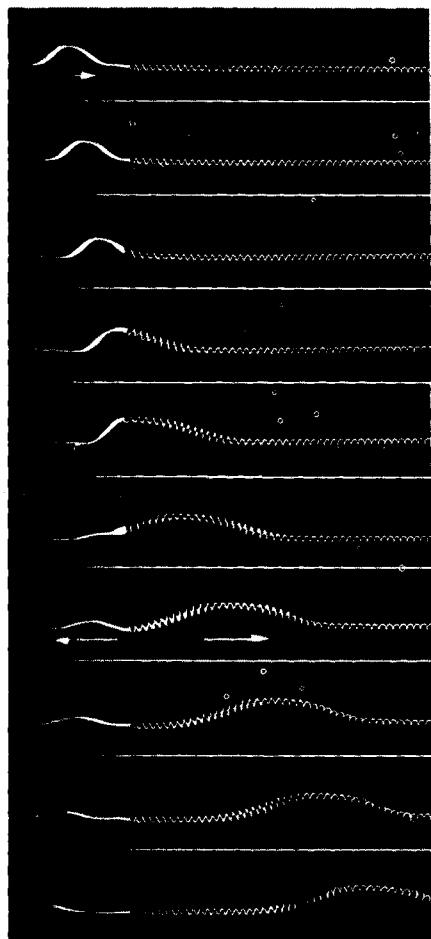
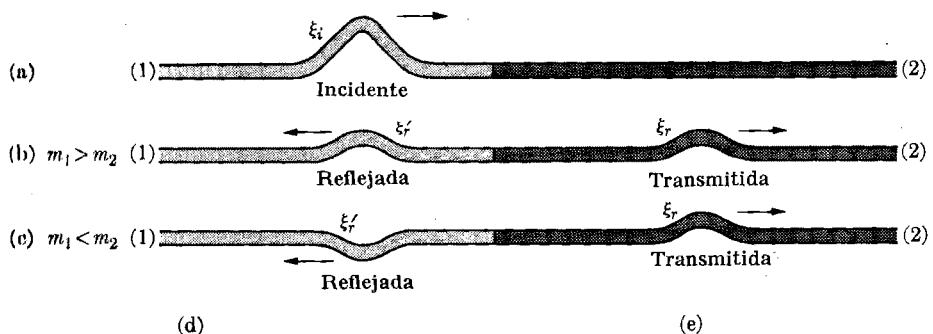


Fig. 20-10. Ondas incidente, reflejada y transmitida en dos cuerdas unidas de diferentes densidades. En (b) y (d) la cuerda que transporta la onda incidente es más densa; en (c) y (e) la cuerda de la izquierda es más ligera. (Fotografías de: *Physics*, D. C. Heath, Boston, 1980.)

las dos expresiones anteriores de F_y , e igualándolas después de eliminar el factor común $\cos \omega t$, obtenemos

$$k_1(\xi_{0t} - \xi'_{0t}) = k_2 \xi_{0t}. \quad (20.21)$$

Esta es una segunda condición que deben satisfacer las tres amplitudes y que está impuesta por la naturaleza física de la onda. Resolviendo el sistema de ecuaciones (20.20) y (20.21), obtenemos,

$$\xi_{0r} = \frac{2k_1}{k_1 + k_2} \xi_{0t}, \quad \xi'_{0r} = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \xi_{0t}, \quad (20.22)$$

que determinan las amplitudes de las ondas reflejada y refractada. Notando que $k = \omega/v$, podemos escribir

$$\xi_{0r} = \frac{2v_2}{v_1 + v_2} \xi_{0t}, \quad \xi'_{0r} = \frac{v_2 - v_1}{v_1 + v_2} \xi_{0t}. \quad (20.23)$$

Como en el caso de ondas transversales en una cuerda $v = \sqrt{T/m}$, de acuerdo con la ec. (18.30), donde m es la masa por unidad de longitud, podemos escribir también:

$$\xi_{0r} = \frac{2\sqrt{m_1}}{\sqrt{m_1} + \sqrt{m_2}} \xi_{0t}, \quad \xi'_{0r} = \frac{\sqrt{m_1} - \sqrt{m_2}}{\sqrt{m_1} + \sqrt{m_2}} \xi_{0t}. \quad (20.24)$$

Los cocientes ξ_{0r}/ξ_{0t} y ξ'_{0r}/ξ'_{0t} se llaman, respectivamente, *coeficientes de refracción* (o de transmisión) y *de reflexión*; designándolos **T** y **R**, respectivamente, se tiene

$$T = \frac{2\sqrt{m_1}}{\sqrt{m_1} + \sqrt{m_2}}, \quad R = \frac{\sqrt{m_1} - \sqrt{m_2}}{\sqrt{m_1} + \sqrt{m_2}}.$$

Observemos que **T** es siempre positiva, de modo que ξ_{0r} , tiene siempre el mismo signo que ξ_{0t} y la onda transmitida está siempre en fase con la onda incidente. Pero **R** es positiva o negativa dependiendo de si $m_1 \geq m_2$, de modo que la onda reflejada puede estar en fase o en oposición con la onda incidente. En el segundo caso, el desfasaje con respecto a la onda incidente es π . Las dos situaciones se ilustran en la fig. 20-16.

El estudiante puede verificar el flujo de energía a través de la unión usando la rapidez con que fluye la energía en la cuerda (1) y en la cuerda (2). La energía transmitida es proporcional a T^2 y la energía reflejada es proporcional a R^2 .

20.7 Reflexión y refracción de ondas electromagnéticas

El caso de las ondas electromagnéticas requiere atención especial porque involucra dos campos: las componentes eléctrica y magnética de la onda. Ambos campos son perpendiculares a la dirección de propagación de cada onda, aunque pueden tener una orientación cualquiera alrededor de dicha dirección. Por lo tanto, al estudiar la reflexión y refracción de ondas electromagnéticas, es más conveniente imaginar cada campo formado de una componente *paralela* al plano de incidencia, designada por el subíndice π , y una componente *perpendicular* al mismo, designada por el subíndice σ . Debido a la perpendicularidad entre \mathbf{E} y \mathbf{B} , tenemos una componente E_π asociada con B_σ y una componente E_σ asociada con B_π . Según vimos en el capítulo 19, la polarización de una onda electromagnética está convencionalmente determinada por la dirección del campo eléctrico; por ello hemos ilustrado en la fig. 20-17 las componentes de \mathbf{E} y \mathbf{B} polarizadas paralela-

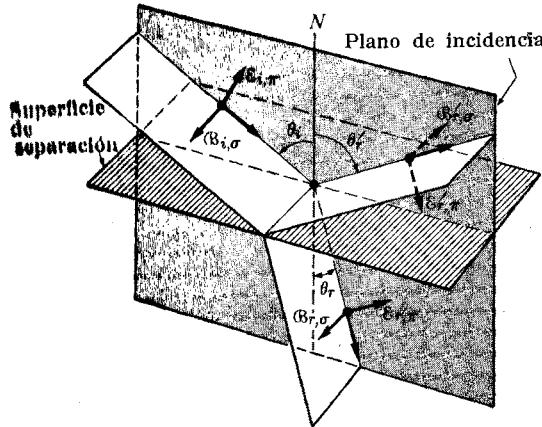


Fig. 20-17. Campos eléctrico y magnético de las ondas incidentes, reflejadas y refractadas para la polarización paralela al plano de incidencia.

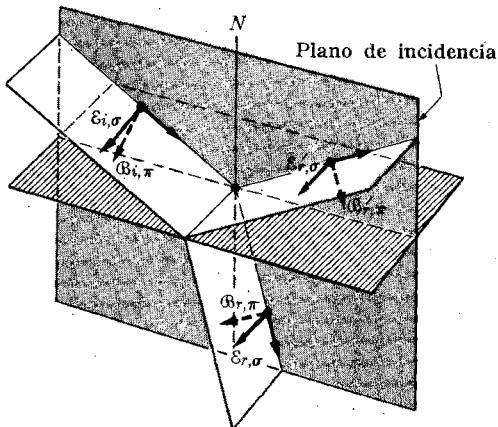


Fig. 20-18. Campos eléctrico y magnético de las ondas incidente, reflejada y refractada para la polarización perpendicular al plano de incidencia.

mente en el plano de incidencia y en la fig. 20-18 para polarización perpendicular al plano de incidencia. En cada caso las flechas indican las orientaciones consideradas positivas para las componentes de \mathcal{E} . El caso general es una combinación de ambas polarizaciones, ya que, como se ha indicado anteriormente, los campos \mathcal{E} y \mathcal{B} pueden siempre separarse en las componentes π y σ .

Las ecuaciones de Maxwell suministran ciertas relaciones entre las componentes paralela y perpendicular de los campos eléctrico y magnético a ambos lados de la superficie que separa dos medios, lo que nos permite establecer las relaciones entre las componentes del campo eléctrico en las ondas incidente, reflejada y refractada. A partir de ellas podemos calcular los coeficientes de reflexión y de refracción o transmisión. Cuando $\mu_1 \approx \mu_2 \approx \mu_0$, que es válido en un gran número de casos, los resultados que se obtienen son los siguientes:

$$\begin{aligned} R_\pi &= \frac{\mathcal{E}'_{r,\pi}}{\mathcal{E}_{i,\pi}} = \frac{n_1 \cos \theta_r - n_2 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_r + n_2 \cos \theta_i}, \\ R_\sigma &= \frac{\mathcal{E}'_{r,\sigma}}{\mathcal{E}_{i,\sigma}} = \frac{n_1 \cos \theta_i - n_2 \cos \theta_r}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_r}, \\ T_\pi &= \frac{\mathcal{E}_{r,\pi}}{\mathcal{E}_{i,\pi}} = \frac{2n_1 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_r + n_2 \cos \theta_i}, \\ T_\sigma &= \frac{\mathcal{E}_{r,\sigma}}{\mathcal{E}_{i,\sigma}} = \frac{2n_1 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_r}. \end{aligned} \quad (20.25)$$

Hay una situación muy importante que corresponde a $R_\pi = 0$. Entonces la onda reflejada no tiene la componente eléctrica del tipo $\mathcal{E}'_{r,\pi}$, sino sólo la $\mathcal{E}'_{r,\sigma}$. Luego, la onda reflejada está totalmente polarizada en un plano perpendicular

al plano de incidencia. Esto ocurre cuando, de acuerdo con la ec. (20.25), $n_2 \cos \theta_i = -n_1 \cos \theta_r$. Como la ley de Snell, ec. (20.8), requiere que $n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_r$, tenemos que $\sin \theta_i \cos \theta_i = \sin \theta_r \cos \theta_r$, o $\sin 2\theta_i = \sin 2\theta_r$. La solución de esta ecuación da $2\theta_i = \pi - 2\theta_r$ ó $\theta_i + \theta_r = \pi/2$,* y esto implica que los rayos reflejado y refractado son perpendiculares. En consecuencia

cuando los rayos reflejado y refractado son perpendiculares, el rayo reflejado está totalmente polarizado, estando el campo eléctrico perpendicular al plano de incidencia.

Esta situación se ilustra en la fig. 20-19, donde sólo se indican las componentes del campo eléctrico; para simplificar, hemos omitido las componentes correspondientes al campo magnético. Ahora bien, como para el caso que se muestra en la fig. 20-19, $\sin \theta_r = \cos \theta_i$, el ángulo de incidencia dado por la ley de Snell es

$$\operatorname{tg} \theta_i = n_{21}. \quad (20.26)$$

El ángulo θ_i dado por la ec. (20.26) se llama ángulo de polarización. El resultado establecido por la ec. (20.26) se llama *ley de Brewster*.

Puede demostrarse que no es posible tener $R_\sigma = 0$ y satisfacer la ley de Snell al mismo tiempo. Por consiguiente, la componente perpendicular del campo eléctrico en la onda reflejada no puede ser cero a menos que ya lo sea en la onda incidente.

También podemos observar en la ec. (20.25) que los coeficientes de refracción T_n y T_σ no pueden anularse y por consiguiente la onda refractada no está nunca completamente polarizada. Sin embargo, si una onda electromagnética se transmite a través de una serie de láminas delgadas y paralelas (fig. 20.20), con un

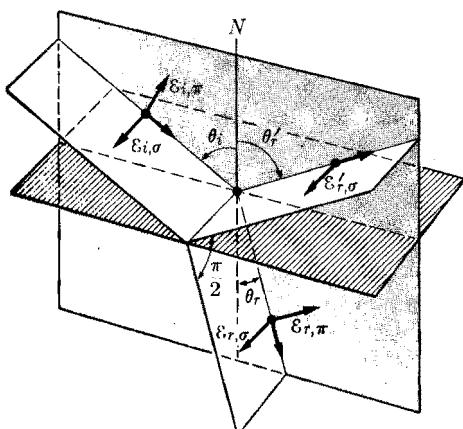


Fig. 20-19. Polarización de una onda electromagnética por reflexión.

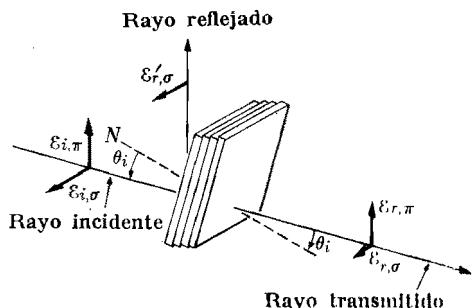


Fig. 20-20. Polarización de una onda electromagnética por refracciones sucesivas.

* Nótese que la posibilidad $2\theta_i = 2\theta_r$, ó $\theta_i = 0$, se debe excluir debido a la ley de Snell.

ángulo de incidencia igual al ángulo de polarización, la onda transmitida tiene una componente $E_{r,o}$, mucho menor, porque esta componente tiende a irse con la onda reflejada cada vez que ésta se refleja al pasar de una lámina a la siguiente. Luego, la onda transmitida está casi totalmente polarizada y el campo eléctrico oscila en el plano de incidencia.

Además, observemos que los coeficientes de transmisión T son positivos, de modo que la onda transmitida está siempre en fase con la onda incidente. Sin embargo, los coeficientes de reflexión R pueden ser positivos o negativos, y la onda reflejada puede estar en fase o tener un desfase de π con respecto a la onda incidente.

EJEMPLO 20.3. Calcular los coeficientes de reflexión y de transmisión para las ondas electromagnéticas en la región visible para el vidrio "crown" y un ángulo de incidencia de 30° .

Solución: En la tabla 20-1 tenemos $n_{\text{vidrio}} = 1,52$, y como para el aire $n_{\text{aire}} \approx 1$, tenemos entonces $\operatorname{sen} \theta_i = 1,52 \operatorname{sen} \theta_r$. Haciendo $\theta_i = 30^\circ$, obtenemos $\theta_r = 19^\circ 12'$. Luego, aplicando las relaciones (20.25), obtenemos

$$R_\pi = 0,165, \quad R_\sigma = -0,248, \quad T_\pi = 0,442, \quad T_\sigma = 0,752.$$

Obsérvese que la componente perpendicular de la onda reflejada ha sufrido un cambio de fase de π . El ángulo de Brewster para el vidrio "crown" corresponde a $\operatorname{tg} \theta_i = 1,52$ ó $\theta_i = 56^\circ 41'$.

TABLA 20-1 Indices de refracción absolutos de varias sustancias para ondas electromagnéticas*

Sustancia	<i>n</i>	Sustancia	<i>n</i>
agua (25° C)	1,33	vidrio "crown"	1,52
alcohol (20° C)	1,36	vidrio "flint"	1,65
bisulfuro de carbono	1,63	sodio (líquido)	4,22
hielo	1,31	diamante	2,417
cuarzo	1,51	aire	1,00029

* Valores medios en la región visible del espectro.

20.8 Propagación de ondas electromagnéticas en un medio anisótropo

Cuando una onda transversal se propaga a través de un medio anisótropo, la velocidad de propagación de la onda depende de la dirección de polarización y de la dirección de propagación de la onda. Esto se da particularmente en el caso de ondas electromagnéticas (que son las únicas que consideraremos en esta sección). La polarizabilidad de la mayoría de las moléculas no es la misma en todas direcciones. Como las moléculas en los gases y en los líquidos están orientadas al azar, esta dependencia direccional de la polarizabilidad no da lugar a efecto particular alguno y el medio se comporta macroscópicamente como una sustancia isotrópica. Pero en un sólido cristalino, las moléculas están más o menos

orientadas y su orientación está "congelada"; esto es, no son libres de rotar alrededor de sus posiciones de equilibrio dentro de la red cristalina. De este modo las propiedades del cristal en general dependen de la dirección según la cual se miden. Dependiendo del arreglo y de la estructura molecular, los sólidos cristalinos pueden comportarse ópticamente como un medio isotrópico o anisótropo.

El hecho de que la polarizabilidad del medio no sea la misma en todas las direcciones significa que, en general, la polarización \mathcal{P} no tiene la misma dirección que el campo eléctrico \mathcal{E} (fig. 20-21). En consecuencia, el vector de desplazamiento $\mathcal{D} = \epsilon_0 \mathcal{E} + \mathcal{P}$ no es paralelo a \mathcal{E} . Esta situación es matemáticamente muy similar a la encontrada en el capítulo 10 cuando discutimos la relación entre el momentum angular \mathbf{L} y la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ de un cuerpo rígido en rotación. Recordemos que en un cuerpo en rotación \mathbf{L} y $\boldsymbol{\omega}$ no son paralelos, excepto en el caso de la rotación según el eje principal del cuerpo. Análogamente encontramos

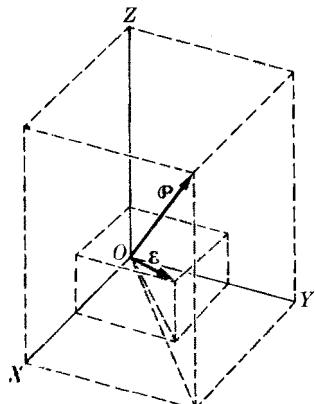


Fig. 20-21. Orientación de \mathcal{E} y \mathcal{P} en una sustancia anisótropa.

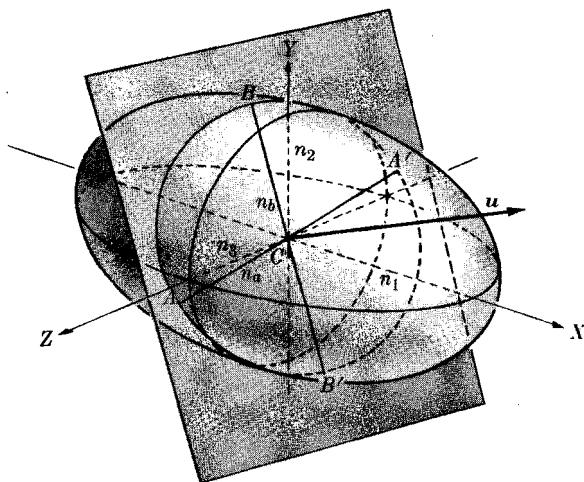


Fig. 20-22. Elipsoide de Fresnel. La elipse $ABA'B'$ es la intersección del elipsoide con un plano perpendicular a \mathbf{u} que pasa por C .

que hay como mínimo tres direcciones perpendiculares, llamadas ejes principales, característicos de cada sustancia, para los cuales \mathcal{E} y \mathcal{D} son paralelos. Orientando los ejes coordenados XZY paralelamente a los ejes principales y designando los tres valores de la permitividad de la sustancia correspondiente a cada uno de los ejes principales por ϵ_1 , ϵ_2 , ϵ_3 , tenemos que las componentes de \mathcal{D} para una orientación arbitraria de \mathcal{E} son, por extensión de la ec. (16.14),

$$\mathcal{D}_x = \epsilon_1 \mathcal{E}_x, \quad \mathcal{D}_y = \epsilon_2 \mathcal{E}_y, \quad \mathcal{D}_z = \epsilon_3 \mathcal{E}_z.$$

Podemos hablar también de tres índices principales de refracción n_1 , n_2 y n_3 , asociado cada uno con la correspondiente permitividad, como se indica en la ec. (19.57).

Tanto los experimentos como la teoría (basada en las ecuaciones de Maxwell y en la discusión previa) muestran que

en un medio anisótropo, a cada dirección de propagación de una onda electromagnética plana corresponden dos posibles estados de polarización mutuamente perpendiculares, cada uno de los cuales se propaga con diferente velocidad.

De este modo, cualquiera sea el estado inicial de polarización, cuando una onda electromagnética penetra en una sustancia anisótropa, se separa en dos ondas, polarizadas en direcciones perpendiculares y que se propagan con diferentes velocidades de fase. Esta situación da lugar al fenómeno de doble refracción, que será discutido en la sección 20-10.

Veamos a continuación cómo se puede determinar la velocidad de fase y el estado de polarización de una onda, dada la dirección de propagación de la onda. Podemos hacerlo usando un método geométrico sugerido por el físico francés Agustín Fresnel (1788-1827) mucho antes de que se formulara la teoría de las ondas electromagnéticas. Construyamos un elipsoide de ejes n_1 , n_2 y n_3 , llamado *elipsoide de Fresnel* (fig. 20-22). Entonces, dada la dirección de propagación de la

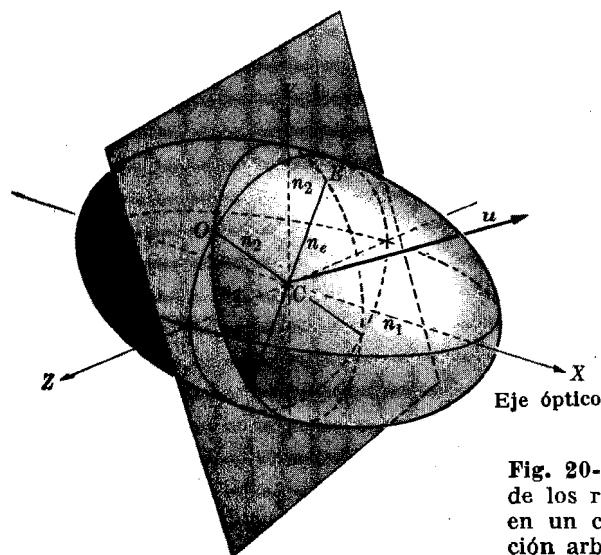


Fig. 20-23. Direcciones de polarización de los rayos ordinario y extraordinario en un cristal uníáxico para una dirección arbitraria de propagación.

onda, determinada por el versor u , trazamos un plano por el centro C del elipsoide y perpendicular a u . La intersección del plano con el elipsoide es una elipse. Las direcciones de los dos ejes AA' y BB' de esta elipse determinan los planos de polarización de la onda para la dirección de propagación dada. Las longitudes CA y CB de los ejes de la elipse dan los índices de refracción n_a y n_b para cada polarización y por consiguiente la correspondiente velocidad de fase.

Los medios isótropos se caracterizan por el hecho de que los tres índices principales de refracción son iguales ($n_1 = n_2 = n_3$). El elipsoide de Fresnel es una esfera y el índice de refracción es el mismo en todas las direcciones. Por consiguiente no existe una dirección especial de polarización, ya que todas las intersecciones son circunferencias. Los cristales cúbicos, así como la mayoría de los medios no cristalinos, se comportan de este modo. Otro caso especial es aquel en el cual dos índices principales de refracción son iguales, digamos $n_2 = n_3$. La dirección que corresponde al índice desigual n_1 , se llama *eje óptico*; éste es un eje de simetría del cristal. Por esta razón estas sustancias se denominan cristales uníaxicos. A esta clase pertenecen los cristales de los sistemas *trigonal*, *hexagonal* y *tetragonal*. Cuando $n_2 < n_1$, el cristal se llama *positivo*; cuando $n_2 > n_1$, es *negativo*. El elipsoide de Fresnel de un cristal uníaxico es un elipsoide de revolución alrededor del eje óptico (fig. 20-23). Sabemos por las propiedades geométricas de un elipsoide de revolución, que su intersección con un plano que pasa por su centro *C* y es perpendicular a la dirección de propagación *u*, es una elipse, uno de cuyos ejes (*CO*) es siempre igual a n_2 y está dirigido perpendicularmente a la dirección de propagación y al eje óptico, mientras que el otro eje (*CE*) tiene una longitud n_e que varía entre n_2 y n_1 y está en el plano determinado por la dirección de propagación y el eje óptico. En este caso podemos definir dos ondas: *ordinaria* y *extraordinaria*.

La onda ordinaria está polarizada linealmente en el plano determinado por *CO* y *u* y es por lo tanto perpendicular al plano determinado por la dirección de propagación y el eje óptico. La onda ordinaria se propaga en todas las direcciones con la misma velocidad $v_o = v_2 = c/n_2$. Por lo tanto se comporta como una onda en un medio isótropo siendo ésta la razón de su denominación.

La onda extraordinaria está polarizada linealmente en el plano determinado por *CE* y *u* o (lo que es lo mismo) por la dirección de propagación y el eje óptico; pero su velocidad v_e depende de la dirección de propagación, variando entre v_2 y v_1 (correspondientes a los índices de refracción n_2 y n_1).

Cuando las ondas se propagan según el eje óptico, la ellipse de intersección es una circunferencia de radio n_2 y las dos ondas se propagan con la misma velocidad v_2 . Esto puede considerarse como otra definición de eje óptico (fig. 20-24a); el eje óptico es la dirección según la cual hay una sola velocidad de propagación. Cuando las ondas se propagan perpendicularmente al eje óptico, la ellipse de

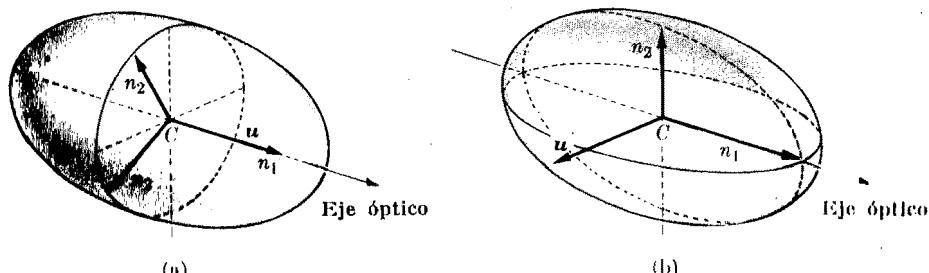


Fig. 20-24. Direcciones de polarización de los rayos ordinario y extraordinario en un cristal uníxico para una propagación (a) paralela, (b) perpendicular al eje óptico.

intersección tiene por semiejes n_1 y n_2 y la onda extraordinaria tiene la velocidad v_1 (fig. 20-24b).

Otra construcción geométrica útil se obtiene gráficamente dibujando para cada dirección de propagación, vectores de longitudes iguales a v_o y v_e , las velocidades de fase de las ondas ordinaria y extraordinaria, respectivamente, con lo que se obtiene una doble superficie (fig. 20-25) llamada *superficie de velocidades de Fresnel*. Una de las superficies es una esfera de radio $v_0 = v_2$, que corresponde a la velocidad de onda ordinaria. La otra superficie es un elipsoide de revolución cuyos ejes son v_1 y v_2 , que corresponden a la onda extraordinaria. Las dos superficies son tangentes en el punto en que interceptan el eje óptico. En la fig. 20-25 se indica el estado de polarización para varias direcciones de propagación.

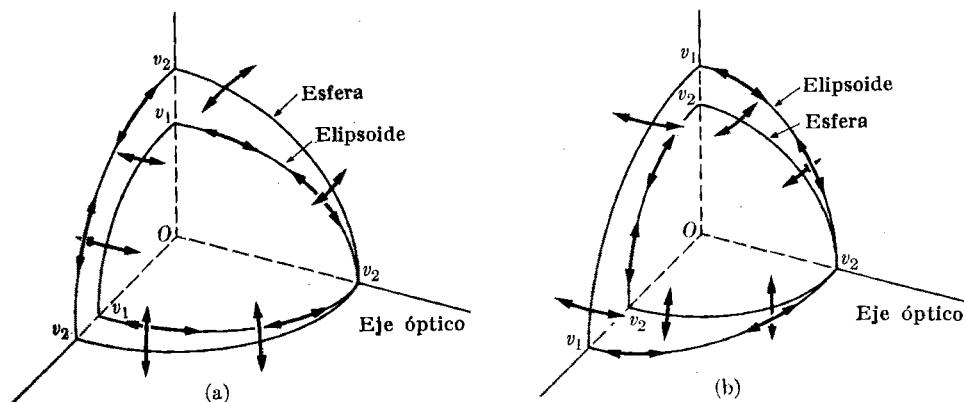


Fig. 20-25. Superficie de velocidades de Fresnel para cristales uniaxicos. (a) Un cristal positivo en el cual $n_2 < n_1$ (ó $v_2 > v_1$). (b) Un cristal negativo en el cual $n_2 > n_1$ (ó $v_2 < v_1$).

En el caso general de tres índices diferentes de refracción, se puede probar que hay dos direcciones para las cuales las velocidades de propagación de dos ondas polarizadas son iguales. Estas direcciones, también llamadas ejes ópticos, son perpendiculares a los planos cuyas intersecciones con el elipsoide de Fresnel son circunferencias. Las sustancias en las cuales estos ejes existen se llaman *bidiácticas* y pertenecen a los sistemas cristalinos *ortorrómico*, *monoclínico* y *triclinico*. La superficie de velocidades de Fresnel para cristales biáxicos es más complicada y no entraremos en discusión de sus detalles geométricos. La tabla 20-2 da los índices de refracción para diversos materiales uniaxicos y biáxicos.

Muchas sustancias que normalmente son isotropas se hacen anisótropas y birefringentes cuando se someten a tensiones mecánicas o a intensos campos eléctricos o magnéticos estáticos, perpendiculares a la dirección de propagación. Ejemplos de esto son el efecto electroóptico de Kerr y el efecto magnetoóptico de Cotton-Mouton. En todos los casos la anisotropía de la sustancia se debe a la orientación parcial de las moléculas que resulta de las tensiones o de los campos.

TABLA 20-2 Índices principales de refracción de varios cristales*

Sustancia	n^1	n_2	n_3
<i>uniáxicas:</i>			
apatita	1,6417	1,6461	
calcita	1,4864	1,6583	
cuarzo	1,5533	1,5442	
zircón	1,9682	1,9239	
<i>biáxicas:</i>			
aragonita	1,5301	1,6816	1,6859
yeso	1,5206	1,5227	1,5297
mica	1,5692	1,6049	1,6117
topacio	1,6155	1,6181	1,6250

* Para la luz del sodio, $\lambda = 5,893 \times 10^{-7}$ m

EJEMPLO 20.4. Una onda linealmente polarizada incide sobre una lámina delgada de un material uniáxico, tal como el cuarzo, cortado con las caras paralelas al eje óptico. Hallar el desfase entre las ondas ordinaria y extraordinaria y el estado de polarización de la onda emergente.

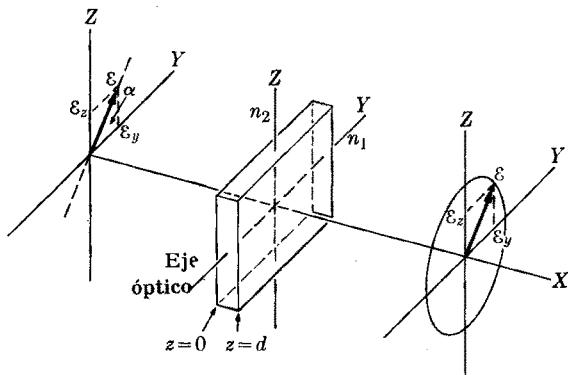


Fig. 20-26. Cambio de polarización de una onda electromagnética después de atravesar una placa de caras paralelas cortada de un cristal uniáxico.

Solución: La fig. 20-26 muestra la disposición experimental. La placa de cristal se ha colocado con el eje óptico (índice n_1) horizontal. La dirección del eje óptico se ha designado por Y. La dirección perpendicular Z corresponde a la polarización del rayo ordinario (índice n_2). Supongamos que una onda linealmente polarizada que forma un ángulo con el eje Y incide sobre la placa. Entonces podemos escribir $E = E_0 \sin(\omega t - kz)$ para el campo eléctrico en la onda incidente. Obsérvese que hemos invertido el orden de los términos en la función seno lo que es más conveniente para nuestro cálculo y es la forma alternativa de la ec. (18.10). Las componentes

del campo eléctrico en la onda incidente según los ejes Y y Z son

$$\mathcal{E}_y = \mathcal{E}_{0y} \operatorname{sen}(\omega t - kx), \quad \mathcal{E}_z = \mathcal{E}_{0z} \operatorname{sen}(\omega t - kx),$$

donde

$$\mathcal{E}_{0y} = \mathcal{E}_0 \cos \alpha \quad \text{y} \quad \mathcal{E}_{0z} = \mathcal{E}_0 \operatorname{sen} \alpha.$$

Cuando la onda polarizada linealmente se propaga a través del cristal, se separa en dos ondas con sus campos eléctricos según los ejes Y y Z , respectivamente. Estas componentes corresponden a las ondas ordinaria y extraordinaria. Como la velocidad de propagación de cada onda es $v_1 = c/n_1$ y $v_2 = c/n_2$, los correspondientes vectores de propagación son

$$k_1 = \frac{\omega}{v_1} = \frac{\omega n_1}{c} = kn_1, \quad k_2 = kn_2,$$

donde $k = \omega/c$. Por lo tanto, después que las ondas han atravesado el espesor d , los campos eléctricos respectivos están representados por las expresiones

$$\mathcal{E}_y = \mathcal{E}_{0y} \operatorname{sen}(\omega t - k_1 d), \quad \mathcal{E}_z = \mathcal{E}_{0z} \operatorname{sen}(\omega t - k_2 d),$$

resultando un desfasaje entre las dos ondas de

$$\delta = (k_1 - k_2)d = k(n_1 - n_2)d = 2\pi(n_1 - n_2)d/\lambda.$$

Después de atravesar la placa anisótropa las dos ondas se combinan en una sola. De acuerdo con la discusión hecha en la sección 12.9, concluimos que debido al desfasaje, la onda transmitida estará, en general, polarizada elípticamente. Los ejes de la ellipse serán paralelos a los ejes Y y Z si δ es un múltiplo impar de $\pi/2$, o sea si

$$(n_1 - n_2)d = \text{entero impar} \times \lambda/4.$$

La onda transmitida estará polarizada linealmente si δ es un múltiplo de π o sea si

$$(n_1 - n_2)d = \text{entero} \times \lambda/2.$$

En este caso si el entero es par, la onda transmitida está polarizada linealmente en el mismo plano que la onda incidente, pero si el entero es impar, está polarizada en un plano simétrico respecto al plano XZ . Evidentemente, si el ángulo α es de 45° , estos dos planos serán perpendiculares entre sí.

Las láminas correspondientes a las dos condiciones dadas arriba se llaman *lámina de cuarto de onda* y *lámina de media onda*. Estos tipos de lámina se usan ampliamente para el análisis de la luz polarizada.

La misma situación ocurre en sentido opuesto; si a través de una lámina de cuarto de onda pasa luz polarizada elípticamente se convierte en luz polarizada linealmente.

20.9 Dicroísmo

Algunas sustancias anisótropas absorben las ondas ordinarias y extraordinarias en proporciones muy diferentes. En tales condiciones una onda electromagnética que se propague a través de una porción de sustancia suficientemente gruesa aparece gradualmente polarizada en un plano, ya que una de las ondas, la ordinaria o la extraordinaria, es casi completamente absorbida. La situación se denomina *dicroísmo* y se ilustra en la fig. 20-27, en la cual \mathcal{E}_0 es la amplitud del campo eléctrico de la onda incidente. La onda incidente, en cuanto penetra en la sustancia, se separa en las ondas ordinaria y extraordinaria, polarizadas para-

lealmente a los ejes Y y Z. Sus amplitudes son ξ_{0y} y ξ_{0z} . Si ξ_{0z} es absorbida más que ξ_{0y} , tenemos sólo ξ_{0y} después que las ondas han penetrado una cierta distancia con lo cual resulta luz polarizada linealmente.

Como el dicroísmo resulta de una diferencia en los coeficientes de absorción, depende de la frecuencia de la onda electromagnética, y una sustancia puede exhibir el fenómeno en mayor grado a ciertas frecuencias que a otras. Para la región visible hay dos sustancias dicroicas especialmente importantes. Una es la *turmalina* (borosilicato de aluminio), que absorbe con preferencia el rayo ordinario. La otra es la *herapatita* (sulfato de yodoquinina), que tiene el inconveniente de que sus cristales son muy quebradizos y por consiguiente difíciles de pre-

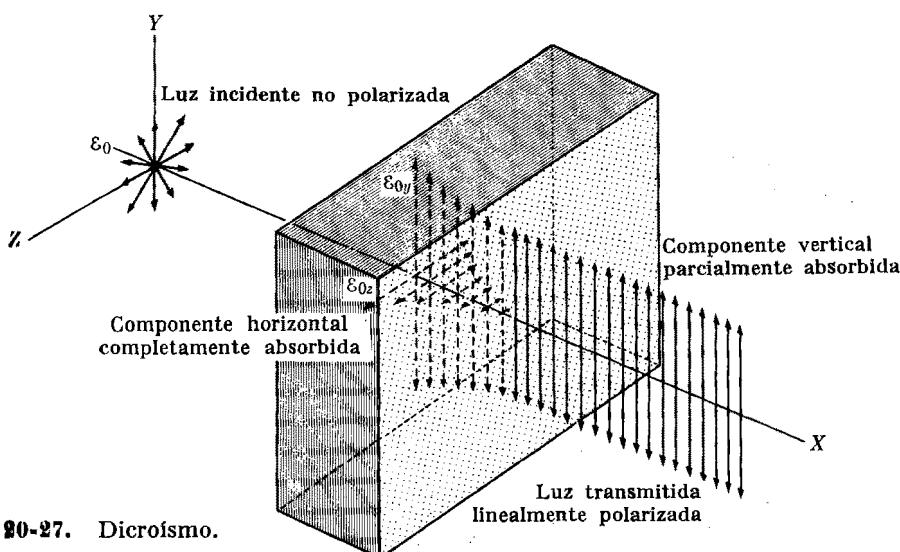


Fig. 80-27. Dicroísmo.

servar en tamaño apropiado. Sin embargo, la Polaroid Corporation hace esta sustancia en una forma llamada *polaroide*, que consiste en muchos cristales pequeños paralelos entre sí y colocados entre dos hojas de vidrio o celuloide. La misma compañía construye otros materiales dicroicos, usando sustancias compuestas de moléculas muy largas orientadas paralelamente, tal como el alcohol polivinílico. Esta combinación da un material que tiene propiedades muy diferentes en dirección longitudinal y en dirección transversal. El dicroísmo constituye una de las maneras más simples y económicas para producir y analizar luz polarizada.

80.10 Doble refracción

En esta sección estudiaremos cómo se comporta una onda electromagnética cuando se transmite o refracta en un medio anisótropo, limitándonos a las sustancias uniaxicas. No nos ocuparemos de la onda reflejada, ya que no involucra ningún factor esencialmente diferente de aquellos ya discutidos en este capítulo.

Comenzaremos tratando el caso simple de incidencia normal de una onda plana sobre una superficie también plana perpendicular al eje óptico, el cual coincide con la página del libro. Consideraciones de simetría requieren que ambas superficies refractadas, la ordinaria y la extraordinaria, sean planas y también que permanezcan paralelas a la superficie de separación mientras se propagan en el medio anisótropo. Para determinar las direcciones de los rayos ordinario y extraordinario, en los puntos de incidencia (fig. 20-28) trazamos la superficie de velocidades de Fresnel, indicada previamente en la fig. 20-25. Las tangentes comunes de las dos hojas de la superficie de velocidades de Fresnel dan los frentes de onda ordinario y extraordinario. Los puntos de tangencia determinan las direcciones de los rayos ordinario y extraordinario. Por lo tanto, la onda ordinaria se propagará en la dirección de incidencia y estará linealmente polarizada en un plano perpendicular al plano del papel (lo que se indica con puntos en la fig. 20-28).

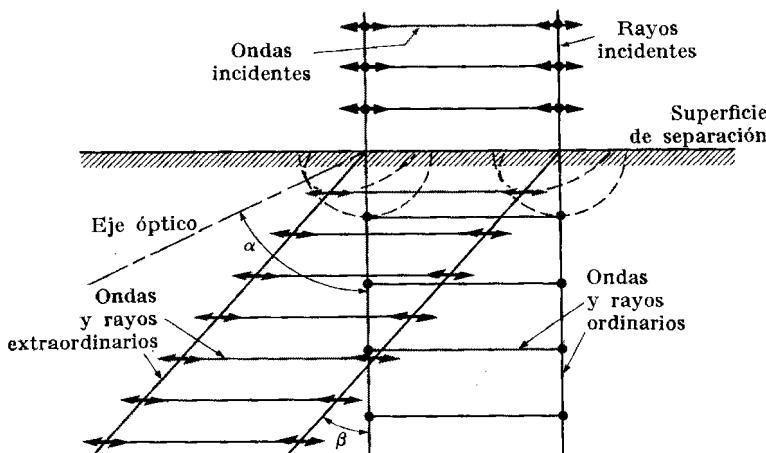


Fig. 20-28. Rayos ordinarios y extraordinarios para incidencia normal sobre la cara de un cristal uníáxico. Las polarizaciones lineales de los rayos ordinarios y extraordinarios son perpendiculares entre sí.

Sin embargo, la onda extraordinaria, aunque permanece paralela a la superficie de separación, experimentará un desplazamiento lateral, de modo que la energía fluya según el rayo extraordinario, a un ángulo β con respecto a la dirección de propagación. La onda extraordinaria estará polarizada en el plano del papel (lo que se indica con barras en la fig. 20-28). Cuando a un solo rayo incidente corresponden dos rayos refractados ocurre el fenómeno llamado *doble refracción*, y por esa razón las sustancias anisótropas se denominan *birrefringentes*. Cuando la sustancia está limitada por dos superficies paralelas (fig. 20-29), los rayos ordinario y extraordinario emergen paralelos pero separados, resultando una doble imagen, como se muestra en la fotografía de un cristal de calcita de la fig. 20-30.

Cuando la incidencia es oblicua, la situación es algo más complicada geométricamente, pero el resultado físico es esencialmente el mismo. Por cada onda

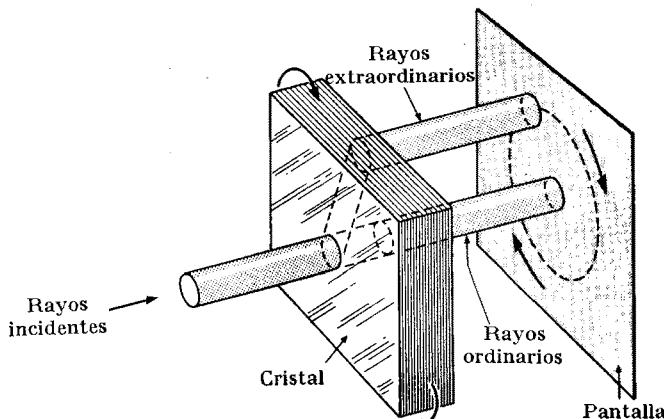


Fig. 20-29. Un haz estrecho de luz no polarizada se puede separar en dos haces por medio de un cristal birrefringente. Si el cristal rota, el haz extraordinario rota alrededor del haz ordinario. Los dos haces están polarizados linealmente en direcciones perpendiculares.

incidente, hay dos ondas refractadas diferentes que se propagan en diferentes direcciones y que están polarizadas en direcciones perpendiculares.

La doble refracción es un instrumento muy importante de investigación en el estudio de la estructura cristalina, y tiene muchas otras aplicaciones interesantes. Una aplicación práctica consiste en producir un haz de luz polarizada en un plano

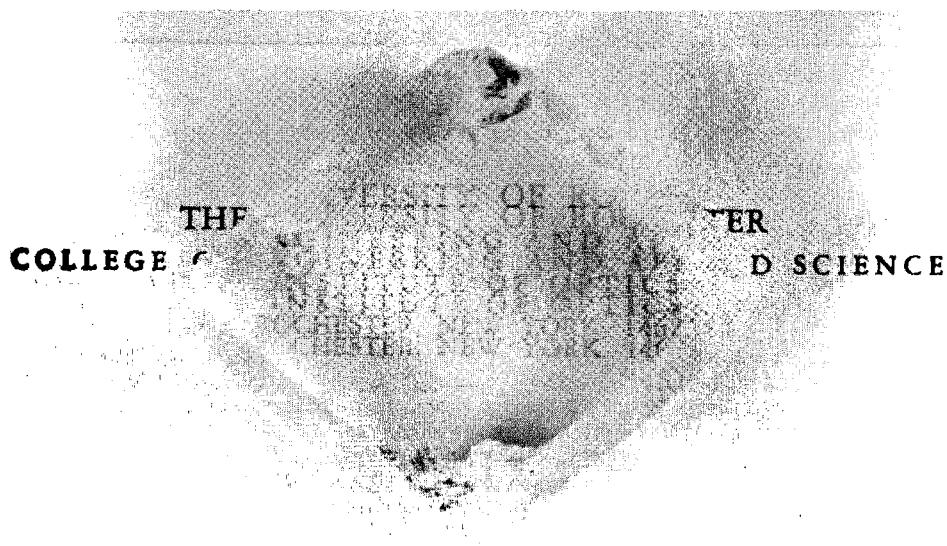


Fig. 20-30. Fotografía de la doble imagen producida por un cristal de calcita. (Cortesía de W. L. Hyde, Director del Instituto de Óptica, Universidad de Rochester).

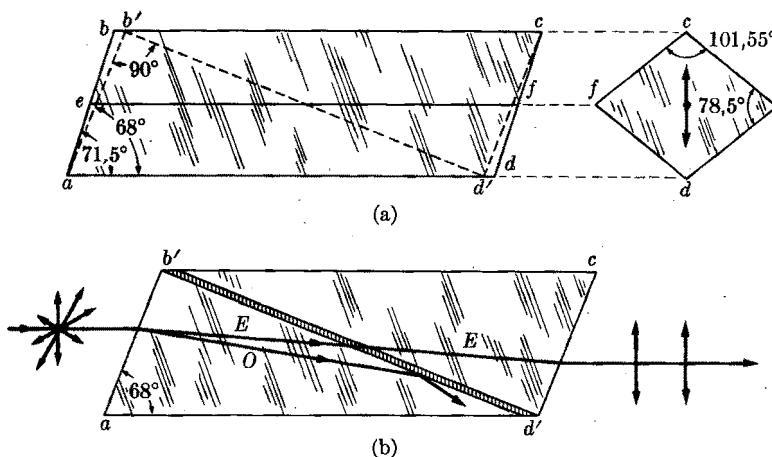


Fig. 20-81. (a) Cristal de calcita natural llamado espato de Islandia. (b) Prisma de Nicol.

por medio de un *prisma de Nicol*. Para hacer un prisma de Nicol se corta un cristal de calcita cuyo largo es cuatro veces su ancho por sus caras extremas, como se muestra con las líneas de trazos ab' y cd' de la fig. 20-31a. Entonces el cristal se corta diagonalmente a lo largo de la línea $b'd'$ y las dos mitades se pegan con bálsamo del Canadá. El índice de refracción del bálsamo es diferente de los índices del cristal de calcita para los rayos ordinario y extraordinario. Debido a esto y también a la geometría del cristal, los rayos ordinarios sufren reflexión total en la superficie de separación y son desviados fuera del prisma, mientras que los rayos extraordinarios prosiguen dentro de la otra mitad del cristal y emergen al otro extremo. Por consiguiente, la luz transmitida está polarizada linealmente. Los prismas de Nicol son utilizados en muchos instrumentos ópticos, tales como los polarímetros.

EJEMPLO 20.5. Un rayo de luz incide sobre un cristal de calcita cortado de modo tal que su superficie sea paralela al eje óptico. Suponiendo que el plano de incidencia sea perpendicular a éste y que el ángulo de incidencia sea de 50° , hallar la separación angular entre los rayos ordinario y extraordinario.

Solución: De acuerdo a las figs. 20-24 y 20-25, cuando la onda se propaga en dirección perpendicular al eje óptico, el rayo ordinario se propaga con velocidad v_2 correspondiente al índice de refracción n_2 y la onda extraordinaria se propaga con velocidad v_1 correspondiente al índice de refracción n_1 . Por lo tanto usando la ley de Snell y los índices de refracción principales dados en la tabla 20-2, tenemos $\sin \theta_1 / \sin \theta_0 = n_1 = 1,6583$ y $\sin \theta_1 / \sin \theta_0 = n_2 = 1,4864$. Dado $\theta_1 = 50^\circ$, obtenemos $\theta_0 = 27^\circ 30'$ y $\theta_0 = 31^\circ 5'$. De este modo la separación angular entre los dos rayos es $\theta_0 - \theta_0 = 3^\circ 35'$.

EJEMPLO 20.6. Se observan ondas electromagnéticas a través de un dispositivo polarizante llamado en este caso un *analizador*. Estudiar las fluctuaciones en la intensidad de la onda transmitida cuando el analizador rota.

Solución: Consideremos la fig. 20-32. El analizador es un instrumento que transmite una onda cuyo campo eléctrico es paralelo al eje AA' . Cuando el eje AA' del analizador forma un ángulo θ con el campo eléctrico de la onda incidente polarizada linealmente, se transmite sólo la componente $\mathcal{E}_A = \mathcal{E} \cos \theta$. Por lo tanto, como la intensidad de la onda es proporcional al cuadrado del campo eléctrico, tenemos la relación

$$I = I_0 \cos^2 \theta,$$

donde I_0 es la intensidad de la onda incidente e I la de la onda transmitida. Este resultado se conoce como *ley de Malus*. Cuando $\theta = 0$ ó π , la intensidad de la luz transmitida es máxima; cuando $\theta = \pi/2$ ó $3\pi/2$, la intensidad es cero. Por consiguiente, cuando el analizador rota, la intensidad de la onda transmitida fluctúa entre 0 e I_0 . Esto, por ejemplo, proporciona un medio de determinar si una onda, digamos luminosa, está polarizada o no. Para ondas no polarizadas o circularmente polarizadas, no se observa fluctuación en la intensidad. Para ondas elípticamente polarizadas, la onda transmitida fluctúa entre un máximo y un mínimo. Estos dos extremos se obtienen cuando el analizador es paralelo al eje mayor o al eje menor de la elipse. El grado de polarización de la onda incidente está dado entonces por la expresión

$$P = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}.$$

Observar que $P = 1$ para ondas polarizadas linealmente y que $P = 0$ para ondas no polarizadas.

EJEMPLO 20.7. Polarización cromática. Cuando sobre una lámina similar a la considerada en el ejemplo 20.4, incide luz blanca polarizada linealmente y se analiza por medio de otro instrumento polarizador, la luz se ve coloreada, dependiendo el color de la orientación del analizador. El problema consiste en observar luz de diferentes longitudes de onda y determinar el color para cada orientación del analizador.

Solución: Consideremos el arreglo de la fig. 20-33. Supongamos por simplicidad que la luz blanca incidente está polarizada linealmente formando el campo eléctrico un ángulo de 45° con el eje óptico de la lámina. Conforme a los resultados del ejemplo

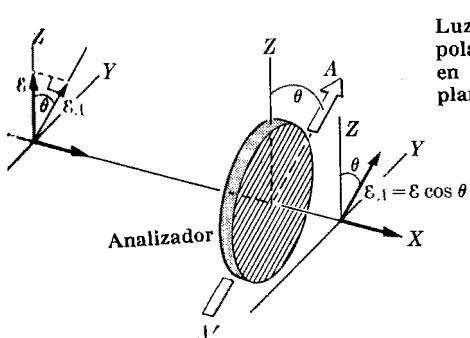


Fig. 20-32. Variación de la intensidad de luz polarizada linealmente al variar la orientación del analizador.

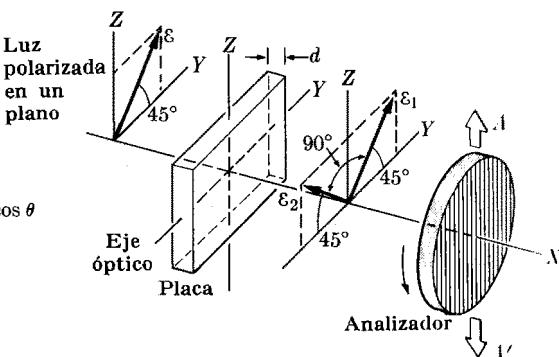


Fig. 20-33. Un cristal en forma de placa colocado entre un haz de luz polarizado linealmente y un analizador. El fenómeno resultante se llama *polarización cromática*.

20.4 la luz transmitida estará polarizada linealmente según \mathcal{E}_1 ó \mathcal{E}_2 , dependiendo de que la longitud de la onda sea tal que

$$(n_1 - n_2) d = \begin{cases} \text{entero par} \times \lambda/2 & (\text{polarización } \mathcal{E}_1), \\ \text{entero impar} \times \lambda/2 & (\text{polarización } \mathcal{E}_2). \end{cases}$$

Para todas las otras longitudes de onda, la onda transmitida está polarizada elípticamente. Si observamos ahora la luz transmitida a través de un analizador, notaremos que ésta es coloreada en lugar de blanca y que el color cambia cuando se rota el eje del analizador AA' . Según el ejemplo 20.6, esto se debe a que cuando el eje del analizador es paralelo a \mathcal{E}_1 , las correspondientes longitudes de onda son transmitidas con intensidad máxima, mientras las correspondientes a \mathcal{E}_2 están bloqueadas. En condiciones inversas, cuando el eje del analizador es paralelo a \mathcal{E}_2 , aparecen los colores complementarios. Por consiguiente, cuando rotamos el analizador, obtenemos un haz de iluminación variable, estando los colores complementarios separados 90° .

Este fenómeno se aplica al análisis de las tensiones de piezas estructurales usadas en los edificios y máquinas, dando lugar a una rama de la física aplicada llamada *fotoelasticidad*. Como decíamos al final de la sección 20.8, cuando un material plástico se somete a tensiones, se hace birrefringente, debido a la anisotropía resultante de las deformaciones. Por consiguiente, si se hace un modelo plástico y se somete a las mismas tensiones que una pieza real de estructuras, se comporta ópticamente como una lámina no homogénea birrefringente. La falta de homogeneidad se debe a la distribución no uniforme de las deformaciones en el plástico. Cuando la pieza en tensión reemplaza a la lámina de la fig. 20-33 resulta un diagrama (coloreado) como el de la fig. 20-34, por medio del cual se pueden estimar las deformaciones con el uso de técnicas especiales.

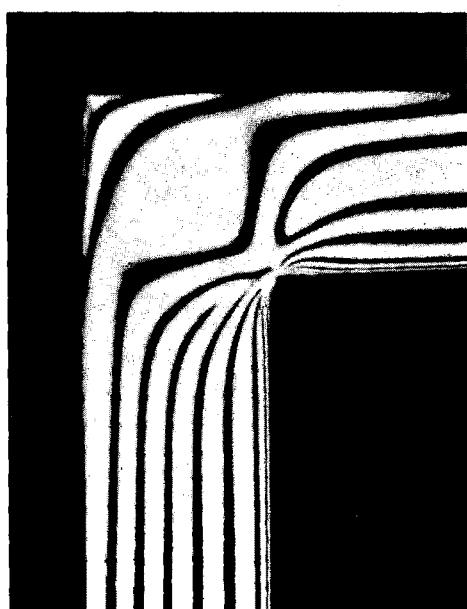
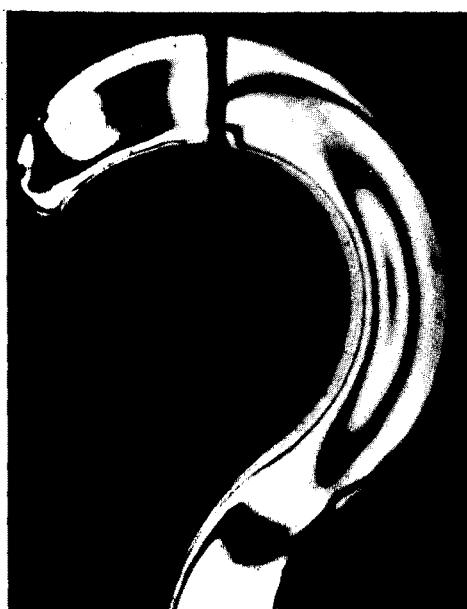


Fig. 20-34. Birrefringencia inducida en una sustancia por las tensiones aplicadas. (Cortesía de Klinger Scientific Apparatus Company).

20.11 Actividad óptica

Otro fenómeno relacionado con el carácter transversal de las ondas electromagnéticas es el de la rotación del plano de polarización, propiedad llamada *actividad óptica* cuando se observa en la región visible y en las cercanas a ella, del espectro electromagnético. Si un haz de luz polarizada linealmente pasa a través de una sustancia ópticamente activa (fig. 20-35), la onda transmitida está polarizada linealmente, pero en un plano que forma un ángulo θ con el plano de incidencia. El valor de θ es proporcional a la longitud l que el haz recorre en la sustancia y depende también de la naturaleza de la misma. Desde el punto de vista de un observador que recibe la luz transmitida, las sustancias se clasifican en *dextrógiros* o *levógiros* según que la rotación del plano de polarización vista por el observador sea en el sentido horario o antihorario (*dextro*: derecho; *levo*: izquierdo).

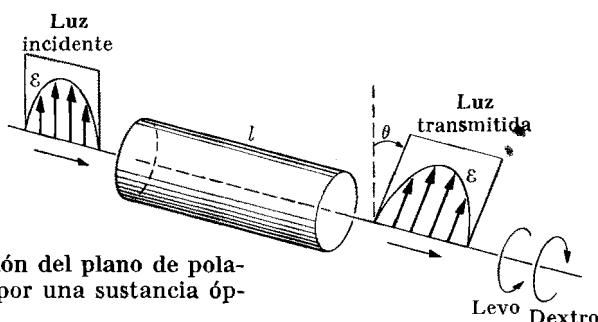


Fig. 20-35. Rotación del plano de polarización producida por una sustancia ópticamente activa.

Ciertas sustancias presentan actividad óptica sólo en el estado sólido. Muchos cristales inorgánicos, especialmente el cuarzo, y algunos orgánicos, tal como el benzil, son de este tipo. En fusión, solución o vapor, estas sustancias pierden su actividad óptica. Esto demuestra que la actividad óptica de estas sustancias depende de distribuciones especiales de los átomos o moléculas en el cristal, distribuciones que desaparecen cuando las moléculas se orientan al azar como sucede en los estados líquido y gaseoso. Otras sustancias, como la trementina, el azúcar, el alcanfor y el ácido tartárico, son ópticamente activas en todos los estados físicos y en solución. En este último tipo de sustancias la actividad óptica está asociada con las moléculas individuales y no con sus disposiciones relativas.

La actividad óptica resulta de cierto retorcimiento de las órbitas de los electrones en las moléculas o cristales bajo la acción de un campo electromagnético oscilatorio externo. Cuando tratamos la polarización de la materia (sección 16.5), supusimos que los electrones oscilaban en línea recta, paralelamente al campo en sustancias isotropas y formando un ángulo con el campo en sustancias anisotropas (sección 20.8). En ciertas moléculas y cristales, sin embargo, el movimiento de los electrones se hace según un camino curvo, que por simplicidad suponemos es una hélice (fig. 20-36). Supongamos que la molécula (o cristal) está orientada de tal modo que los caminos helicoidales del electrón son como se muestra en la fig. 20-36, esto es, con el eje de la hélice perpendicular a la dirección de propagación y paralelo tanto al campo eléctrico como al magnético de la onda incidente.

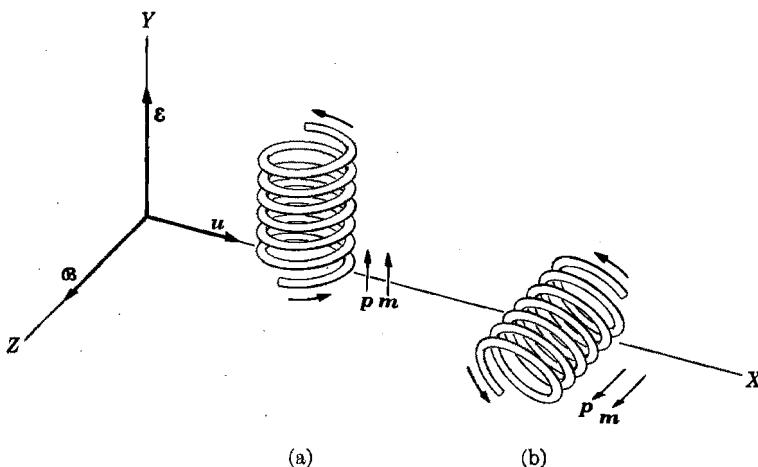


Fig. 20-86. Momentos dipolares eléctrico y magnético inducidos por una onda electromagnética en una molécula helicoidal.

Consideremos el primer caso u orientación (a). El campo eléctrico oscilante de la onda produce un movimiento oscilatorio de los electrones hacia arriba y hacia abajo a lo largo de la hélice con lo cual resulta un momento dipolar eléctrico oscilante efectivo \mathbf{p} paralelo al eje de la hélice. Hasta ahora la situación es similar a la de la polarización ordinaria. Pero debido a la forma del camino de los electrones, la corriente electrónica circulando por cada vuelta de la hélice es equivalente a un dipolo magnético \mathbf{m} orientado también según el eje de la misma. Para la orientación (b), el campo magnético oscilante de la onda produce un flujo variable a través de cada vuelta de la hélice que, por la ley de Faraday-Henry, origina una corriente electrónica oscilante a lo largo de la misma. Esta corriente produce también un momento magnético oscilante \mathbf{m} según el eje de la hélice. Pero el movimiento hacia atrás y hacia adelante del electrón, produce alternadamente en los extremos de la molécula, cargas positivas y negativas alternadas, con lo cual resulta un momento dipolar eléctrico oscilatorio efectivo \mathbf{p} según el eje de la hélice. Por consiguiente, para ambas orientaciones de la molécula se producen un momento dipolar eléctrico \mathbf{p} y un momento dipolar magnético \mathbf{m} oscilantes y paralelos a los ejes moleculares. Estos dipolos radian ondas electromagnéticas, difundidas, tal como se discutió en la sección 19.9, donde sólo se consideró la difusión dipolar eléctrica, ya que el movimiento de los electrones se supuso en línea recta.

Un análisis matemático detallado de la onda difundida, que omitiremos aquí, muestra que según la dirección de propagación de la onda incidente, los campos \mathcal{E}' y \mathcal{B}' de la onda difundida están en fase con los de la onda incidente, pero oscilando en direcciones distintas debido a la diferente orientación relativa de los campos \mathcal{E} y \mathcal{B} de un dipolo eléctrico y de uno magnético (figs. 19-8 y 19-12). Un observador según la dirección de propagación recibe las ondas incidente y difundida, las cuales interfieren porque están en fase, resultando una polariza-

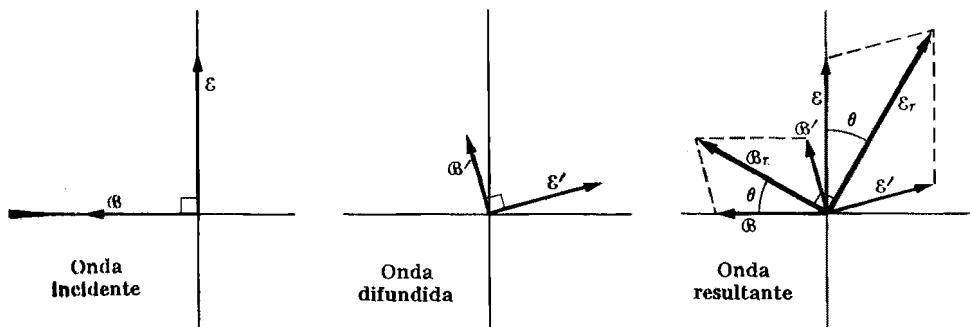


Fig. 20-37. Campos resultantes eléctrico y magnético debidos a la superposición de las ondas incidente y difundida.

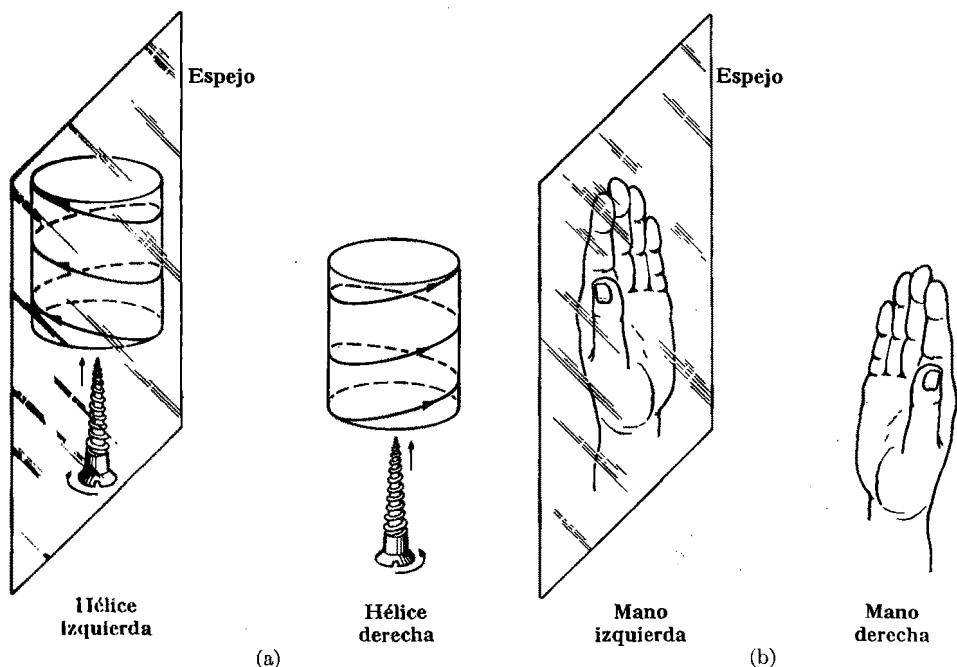


Fig. 20-38. Simetría derecha-izquierda. (a) La imagen especular de una hélice o tornillo de rosca derecha es una hélice o tornillo de rosca izquierda. (b) La imagen especular de la mano derecha es la mano izquierda.

ción lineal (recordar la sección 12.9) en una dirección que forma el ángulo θ con el plano original del vector eléctrico (fig. 20-37). Resulta así una rotación del plano de polarización de la onda. Para moléculas orientadas al azar se puede probar que el efecto es siempre el mismo, aunque su magnitud depende de la orientación molecular. De este modo la actividad óptica molecular persiste en cualquier estado físico o en solución. En algunos cristales, sin embargo, el efecto

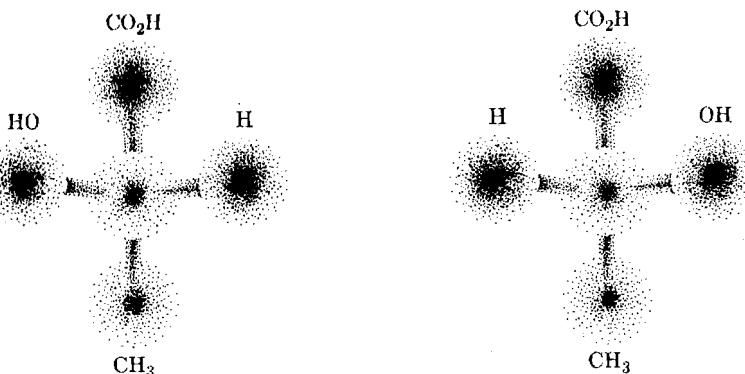


Fig. 20-39. Formas del ácido láctico que son la imagen especular una de otra.

depende de la ordenación molecular; pero las moléculas individuales no tienen una simetría helicoidal, y por lo tanto el efecto desaparece cuando las moléculas se desordenan.

El estudiante puede darse cuenta que hay dos clases de hélices, derecha e izquierda (fig. 20-38). Una es la imagen especular de la otra, como la mano izquierda es la imagen especular de la mano derecha. Esta clase de simetría se llama *enantiomorfismo*. Algunas moléculas actúan como una hélice derecha y otras como una izquierda. En un caso la rotación del plano de polarización se efectúa en un sentido y en el otro en sentido contrario. Esto explica la existencia de sustancias dextrógiros y levógiros.

Algunas sustancias contienen ambas clases de moléculas, propiedad llamada *estereoisomerismo*. Por ejemplo, las moléculas de ácido láctico ($\text{CH}_3-\text{COH}_2-\text{CO}_2\text{H}$) pueden existir en una o en otra de las dos formas de imagen especular, como se ilustra en la fig. 20-39. Una muestra de ácido láctico que contenga cantidades iguales de ambas clases de moléculas es ópticamente inactiva, pero si predomina una sobre la otra, resulta una rotación neta.

En el caso del cuarzo (SiO_2), las moléculas son todas idénticas, pero sus ordenamientos espaciales en el cristal tienen simetría ya izquierda, ya derecha, como puede apreciarse en la apariencia externa de las dos clases de cristal de cuarzo

que se muestran en la fig. 20-40, siendo una leve y la otra dextro. Cuando el cristal se funde los ordenamientos moleculares se destruyen y la actividad óptica desaparece.

Cuando una sustancia cuyas moléculas son ópticamente activas, tal como el ácido láctico, la levulosa, la dextrosa, etc., se disuelve en agua, la rotación del plano de polarización depende de la concentración. Este resultado se usa para determinar cuantitativamente la cantidad de sustancia que contiene una solución, tal como la concentración de azúcar en una melaza o en la orina.

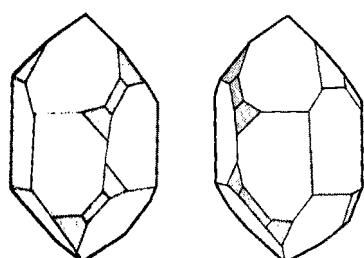


Fig. 20-40. Formas cristalinas del cuarzo que son la imagen especular una de otra.

Algunas sustancias llegan a ser ópticamente activas cuando, por algún medio, se introduce alguna forma de simetría helicoidal. Un método de lograr esto es aplicar un campo magnético estacionario intenso según la dirección de propagación. Esto se conoce como efecto Faraday.

80.12 Reflexión y refracción en superficies metálicas

En el capítulo 14 vimos que el campo eléctrico estacionario, en el interior de un conductor, es nulo. La situación no es exactamente la misma cuando el campo eléctrico depende del tiempo. Sin embargo, aún cuando el campo eléctrico dependa del tiempo, una onda electromagnética se atenúa grandemente cuando se propaga en un conductor, tal como un metal o un gas ionizado. No presentaremos aquí la teoría en detalle, pero sí indicaremos uno de los cambios fundamentales que tienen lugar en las ecuaciones que regulan la propagación de una onda electromagnética en un conductor.

Las ecs. (19.1) a (19.5) quedan sin alteración, pero la ec. (19.6) debe modificarse para tomar en consideración las corrientes inducidas en el conductor por el campo eléctrico de la onda. En la ec. (16.49) vemos que la densidad de corriente es $\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}$. Cuando esta corriente se incorpora dentro de la ecuación (19.6), una manipulación fácil y rápida indica que el campo eléctrico debe satisfacer la ecuación,

$$\frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial x^2} = \epsilon\mu \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial t^2} + \mu\sigma \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t}, \quad (20.27)$$

en lugar de la ec. (19.7) más simple. El término nuevo, $\mu\sigma \partial\mathcal{E}/\partial t$, siendo una derivada de primer orden respecto al tiempo, es similar al término $-\lambda dx/dt$ de amortiguamiento en un oscilador amortiguado, estudiado en la sección 12.12. Por lo tanto esto indica que la onda se va amortiguando a medida que progres a través del metal. De este modo la onda disminuye rápidamente en intensidad a medida que penetra en el conductor. La solución de la ec. (20.27) se puede expresar en la forma

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 e^{-\alpha x} \sin(kx - \omega t), \quad (20.28)$$

donde la velocidad de propagación $v = \omega/k$ y el coeficiente de amortiguamiento α están expresados por una relación algebraica complicada entre μ , ϵ y σ . Cuando la frecuencia es pequeña de modo que pueda despreciarse ω^2 y el material es muy buen conductor, tal que $\sigma \gg \epsilon\omega$, el estudiante puede verificar por sustitución directa de la ec. (20.28) en la ec. (20.27) que

$$k = \alpha \approx \sqrt{\frac{1}{2}\mu\sigma\omega}. \quad (20.29)$$

La velocidad de propagación es entonces

$$v = \omega/k = \sqrt{2\pi/\mu\sigma}. \quad (20.30)$$

En todo caso, el exponencial de la ec. (20.28) indica que la onda se amortigua a medida que avanza en el medio conductor.

Esta situación explica dos hechos importantes concernientes a los conductores. Uno es la opacidad, que resulta de la fuerte absorción de las ondas que en consecuencia no se transmiten a través de un conductor, a menos que éste sea una lámina muy delgada. Por consiguiente, los conductores son excelentes para aislar una región de ondas electromagnéticas. (Esto se hace, por ejemplo, rodeando la región con una rejilla metálica). El otro es la gran reflectividad de los conductores como consecuencia de que sólo una pequeña fracción de la energía de la onda incidente penetra al conductor yéndose la mayor parte de la energía en la onda reflejada. Esta alta reflectividad es típica de los metales. Una capa de gas ionizada también puede actuar como un conductor, reflejando las ondas electromagnéticas incidentes sobre ella. Este principio se usa, por ejemplo, en radiocomunicaciones para transmitir

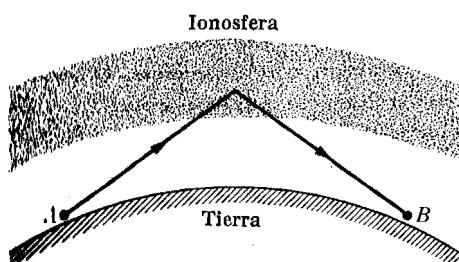


Fig. 20-41. Reflexión de ondas de radio en la ionosfera.

una señal de radio alrededor de la tierra. La señal se refleja hacia la tierra cuando alcanza una capa de la atmósfera altamente ionizada, llamada *ionosfera*, la cual dista cerca de 100 km de la superficie terrestre. De este modo es posible la comunicación entre dos puntos *A* y *B*, lo que no se podría lograr por medio de una onda propagándose en línea recta entre los dos puntos (fig. 20-41).

20.13 Propagación en un medio no homogéneo

Los fenómenos de reflexión y refracción descritos en las secciones previas corresponden a la situación en la cual una onda pasa de un medio homogéneo a otro. Sin embargo, en muchos casos una onda se propaga en un medio cuyas propiedades varían de punto a punto. Por ejemplo, en un día de verano las capas de aire bajas están más calientes que las superiores y tanto las ondas sonoras como las ondas luminosas experimentan refracción continua.

Consideremos la propagación de una onda a través de un medio estratificado (fig. 20-42), o sea, un medio compuesto de varias capas en las cuales la velocidad de propagación es diferente. Si una onda alcanza la primera superficie con un ángulo de incidencia θ_1 , las sucesivas refracciones satisfacen las condiciones

$$n_1 \operatorname{sen} \theta_1 = n_2 \operatorname{sen} \theta_2,$$

$$n_2 \operatorname{sen} \theta_2 = n_3 \operatorname{sen} \theta_3,$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

O sea

$$n \operatorname{sen} \theta = \text{const.}$$

Consideremos a continuación un medio cuyo índice de refracción depende de una coordenada, digamos y . Este puede considerarse como un medio estratificado cuyas capas sucesivas son muy delgadas. Entonces la ec. (20.31) aún es válida, y podemos escribir

$$n(y) \operatorname{sen} \theta = C, \quad (20.32)$$

donde C es una constante. Esta expresión da el ángulo θ en cada punto de la trayectoria del rayo; lo que permite trazarlo a través del medio no homogéneo.

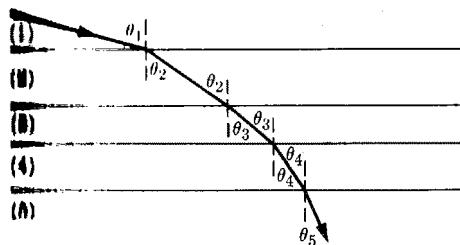


Fig. 20-42. Camino de un rayo en un medio estratificado.

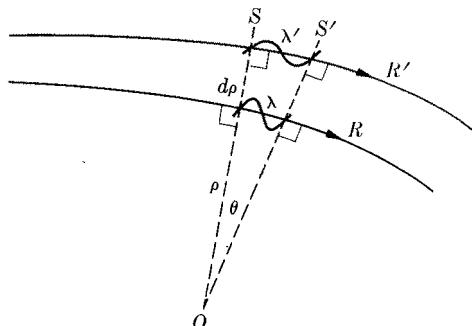


Fig. 20-43. Curvatura de un rayo en un medio no homogéneo.

EJEMPLO 20.8. Obtener el radio de curvatura de un rayo cuando la onda se propaga en un medio con índice de refracción variable.

Solución: Consideremos dos superficies de onda S y S' (fig. 20-43) separadas en el tiempo por un período. Luego, la distancia de separación a lo largo de cualquier rayo será una longitud de onda. Consideremos dos rayos muy cercanos R y R' . Como la velocidad de propagación varía de punto a punto, la longitud de onda es también variable, porque $\lambda = v/v = c/vn$. Sean λ y λ' las longitudes de onda a lo largo de los rayos correspondientes. Entonces, en la fig. 20-43, vemos que $\rho\theta = \lambda$ y $(\rho + d\rho)\theta = \lambda' - \lambda = d\lambda$. Pero $\theta = \lambda/\rho$, de modo que

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\lambda} \frac{d\lambda}{d\rho} = \frac{d}{d\rho} (\ln \lambda) = -\frac{d}{d\rho} (\ln n), \quad (20.33)$$

ya que $\ln \lambda = \ln c - \ln v - \ln n$, y c y v son constantes. La ec. (20.33) indica que el camino está curvado de tal modo que su concavidad está en la dirección en que el índice de refracción aumenta.

Bibliografía

1. "Phase Change on Reflection from Isotropic Dielectrics", G. Friedmann y H. Sandhu, *Am. J. Phys.* 38, 135 (1965)
2. *Light: Principles and Experiments*, G. Monk. Dover, New York, 1963, caps. 1, 13 y 15
3. *Fundamentos de óptica*, B. Rossi. Reverté, Barcelona, 1966, caps. 1, 6 y 8

4. *Foundations of Electromagnetic Theory*, J. R. Reitz y F. J. Milford. Addison-Wesley, Reading, Mass., 1960, secs. 16-2 a 16-4
5. *The Feynman Lectures on Physics*, R. Feynman, R. Leighton y M. Sands. Addison-Wesley, Reading, Mass., 1963, vol. I, caps. 26, 31 y 33; vol. II, caps. 30 a 33
6. *Source Book in Physics*, W. F. Magie. Harvard University Press, Cambridge, Mass., 1963, pág. 265 (Descartes); pág. 280 (Bartholinus); pág. 283 (Huygens); pág. 315 (Malus); pág. 352 (Faraday)
7. *Foundations of Modern Physical Science*, G. Holton y D. H. D. Roller. Addison-Wesley, Reading, Mass., 1958, secs. 30.1 y 30.7

Problemas

20.1 Se ha propuesto la siguiente regla para construir el rayo refractado (figura 20-44): Usando unidades arbitrarias, se trazan en el punto de incidencia, dos circunferencias de radios 1 y n . El rayo incidente se prolonga hasta interceptar la circunferencia de radio 1. Se traza la perpendicular a la superficie por el punto y se halla su intersección con la circunferencia de radio n . El rayo refractado pasa por este punto.

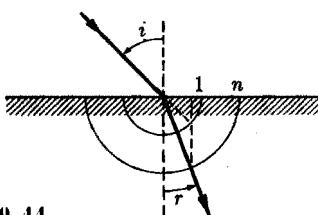


Figura 20-44

(a) Justificar esta regla. (b) Aplicarla al caso de $n = 1,5$ y ángulo de incidencia de 60° . (c) Repetir para $n = 0,80$ y ángulos de incidencia de 30° y 60° . Verificar los resultados usando la ley de Snell.

20.2 Un alambre de cobre de radio 1 mm se suelda a otro alambre del mismo material de radio 0,8 mm. Encontrar T y R en la unión, para ondas que se propagan en el sistema del primero al segundo alambre.

20.3 Dos alambres, uno de cobre y el otro de acero, del mismo radio, se unen formando un alambre más largo. Encontrar T y R en el punto de unión

para ondas que se propaguen a lo largo del alambre. Sea 1 mm el radio común. Suponiendo que la frecuencia de la onda incidente es 10 Hz, que su amplitud es 2 cm y que la tensión es 50 N, escribir las ecuaciones de las ondas incidente, reflejada y transmitida. (La densidad del cobre es $8,89 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ y la del acero $7,80 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$.)

20.4 Para la situación discutida en el ejemplo 20.2, mostrar que la intensidad de la onda transmitida más la intensidad de la onda reflejada es igual a la intensidad de la onda incidente. ¿Cuál es el significado físico de este resultado?

20.5 Sobre una placa de vidrio ($n = 1,5$) incide luz polarizada linealmente con un ángulo de incidencia de 45° . Hallar los coeficientes de reflexión y de refracción si el campo eléctrico de la onda incidente (a) está en el plano de incidencia, (b) es normal al plano de incidencia.

20.6 Una onda electromagnética incide perpendicularmente sobre una superficie plana que separa dos medios de índices n_1 y n_2 . Usando la ec. (20.25), probar que los coeficientes de reflexión y de refracción son, en este caso, $R = -(n_1 - n_2)/(n_1 + n_2)$ y $T = 2n_1/(n_1 + n_2)$. Obsérvese que en este caso no tenemos que distinguir entre las componentes π y σ . Dibujar los campos eléctrico y magnético de las ondas incidentes, reflejadas y refractadas cuando $n_1 < n_2$ y cuando $n_1 > n_2$.

20.7 (a) Un haz de luz incide perpendicularmente sobre una placa de vidrio

(a = 1,5). Encontrar los coeficientes de reflexión y de transmisión. (b) Repetir el cálculo para cuando la luz pasa del agua al aire. (c) Analizar en cada caso el cambio de fase. [Sugerencia: Usar los resultados del problema 20.6.]

20.8 Relatiéndose a la situación descrita en el problema 20.6, calcular, usando la ec. (19.16), las intensidades de las ondas reflejada y refractada y probar que su suma es igual a la intensidad de la onda incidente. [Sugerencia: Notar que en la ec. (19.16) debemos reemplazar ν por la velocidad $v = c/n$ en el medio y que $n = c/v$. Además $n \approx \sqrt{\epsilon_r}$.]

20.9 El índice de refracción del vidrio es 1,80. Calcular los ángulos de incidencia y de refracción cuando la luz reflejada por una superficie de vidrio está completamente polarizada.

20.10 En una cierta sustancia el ángulo crítico para ondas luminosas es de 45° . ¿Cuál es el ángulo de polarización?

20.11 (a) A qué ángulo por encima de la horizontal debe estar el sol para que su luz reflejada por la superficie de un lago tranquilo esté completamente polarizada? (b) ¿Cuál es el plano del vector eléctrico de la luz reflejada?

20.12 Una onda luminosa polarizada linealmente y proveniente del aire incide según el ángulo de polarización en un medio de índice n . El vector eléctrico de la onda incidente yace en el plano de incidencia; su amplitud de oscilación es ϵ_0 . Calcular (a) la intensidad de la onda incidente, (b) la amplitud ϵ' de la onda reflejada y (c) la intensidad de la onda refractada. Comparar (a) con (c) y explicar el resultado.

20.13 Probar que para una onda electromagnética, R_σ es positivo si $n_{\text{ai}} < 1$ y negativo si $n_{\text{ai}} > 1$. Análogamente, probar que R_n es negativo (positivo) para ángulos de incidencia menores (mayores) que el ángulo de polarización cuando $n_{\text{ai}} < 1$ y positivo (negativo) cuando $n_{\text{ai}} > 1$.

20.14 Si una onda plana está polarizada linealmente con su campo eléctrico formando un ángulo α_i con el plano de incidencia, demostrar que en la onda reflejada y en la refractada el campo

eléctrico forma con el mismo plano el ángulo

$$\operatorname{tg} \alpha_r = (\mathbf{T}_o / \mathbf{T}_n) \operatorname{tg} \alpha_i$$

y

$$\operatorname{tg} \alpha'_r = (\mathbf{R}_o / \mathbf{R}_n) \operatorname{tg} \alpha_i,$$

respectivamente.

20.15 Una onda luminosa en el aire, ($n = 1$), plana y polarizada linealmente, incide sobre una superficie de agua ($n = 1,33$). Determinar las amplitudes y fases de las ondas reflejada y refractada con respecto a las de la onda incidente para los casos siguientes:

Ángulo de incidencia	Ángulo entre el plano de incidencia y el plano del campo eléctrico
20°	0°
20°	90°
75°	0°
75°	90°

20.16 Una onda luminosa plana polarizada linealmente se origina en el agua ($n = 1,33$) y se refracta en la superficie de separación entre el agua y el aire ($n = 1$). Determinar las amplitudes y fases de las ondas refractada y reflejada respecto a las de la onda incidente, para los siguientes casos:

Ángulo de incidencia	Ángulo entre el plano de incidencia y el plano del campo eléctrico
20°	0°
20°	90°
40°	0°
40°	90°

20.17 Un haz de luz polarizada circularmente en el aire ($n = 1$) incide sobre una superficie de vidrio ($n = 1,52$) según un ángulo de 45° . Describir en detalle el estado de polarización de los haces reflejado y refractado.

20.18 Una placa de vidrio (índice n_v) está revestida de una película plástica delgada (índice n_r) (fig. 20-45). Desig-

nando por n_a el índice del aire, mostrar que para incidencia normal, el coeficiente de reflexión en la superficie de separación entre aire y revestimiento y entre éste y el vidrio son iguales si $n_r = -\sqrt{n_v n_a}$. Hallar la relación entre los coeficientes cuando el ángulo de incidencia es 10° y n_v es 1,52.

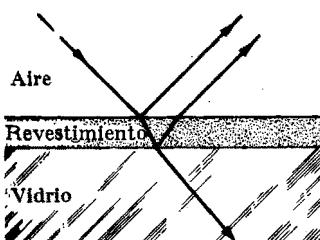


Figura 20-45

20.19 Considerar dos medios transparentes (1) y (2), separados por una superficie plana (fig. 20-46). Si R y T son los coeficientes de reflexión y de refracción para un rayo incidente en el medio (1), y R' y T' los mismos coeficientes cuando el rayo incide en el medio (2), probar que $T'T = 1 - R^2$ y $R = -R'$. Estas expresiones se llaman *relaciones de Stokes*. La segunda

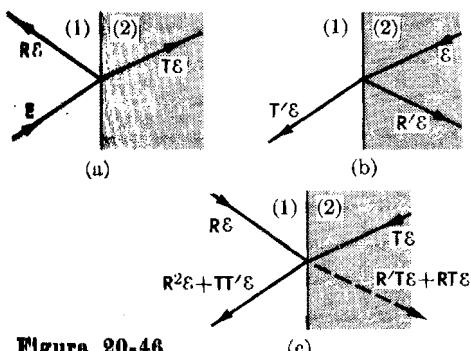


Figura 20-46

relación indica que los coeficientes de reflexión son de signo opuesto, y si para una de las reflexiones no hay cambio de fase, para la otra debe haber un cambio de fase igual π . [Sugerencia: Suponer que se invierte el sentido de los rayos $R'E$ y $T'E$, como se muestra en la fig. 20-46(c) y tener en cuenta que

en este caso el rayo final en el medio (1) debe ser E y que no existe rayo final en el medio (2).]

20.20 Un polarizador y un analizador se orientan de modo que se transmite un máximo de luz. ¿A qué fracción de su valor máximo se reduce la intensidad de la luz transmitida cuando el analizador se rota los ángulos (a) 30° , (b) 45° , (c) 60° , (d) 90° , (e) 120° , (f) 135° , (g) 150° , (h) 180° ? Hacer un gráfico de I/I_{\max} para una vuelta completa del analizador.

20.21 Un haz paralelo de luz polarizada linealmente de longitud de onda $5,90 \times 10^{-7}$ m (en el vacío) incide sobre un cristal de calcita como se indica en la fig. 20-26. Hallar las longitudes de onda de las ondas ordinaria y extraordinaria en el cristal. Hallar también la frecuencia de cada rayo.

20.22 Un haz de luz polarizada en un plano incide perpendicularmente sobre una placa de calcita (cuyos lados opuestos están cortados paralelamente al eje óptico) formando el vector eléctrico un ángulo de 60° con el eje óptico. Hallar el cociente de las amplitudes y de las intensidades de los haces ordinario y extraordinario.

20.23 Hallar el espesor de una placa de calcita necesario para producir un desfasaje de (a) $\lambda/4$, (b) $\lambda/2$, (c) λ , entre los rayos ordinario y extraordinario, para una longitud de onda de 6×10^{-7} m.

20.24 ¿Cuál es el estado de polarización de la luz transmitida por una placa de cuarto de onda cuando el vector eléctrico de la luz incidente polarizada linealmente forma un ángulo de 30° con el eje óptico?

20.25 Un *compensador de Babinet* (figura 20-47) consiste en dos cuñas de

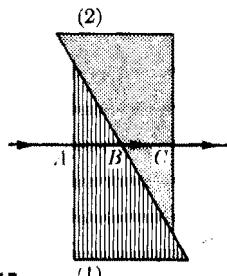


Figura 20-47

charro que pueden deslizarse una sobre otra. Las cuñas están cortadas de tal modo que sus ejes ópticos son perpendiculares. Por consiguiente el rayo ordinario en una de ellas es el extraordinario en la otra. Demostrar que, para cualquier rayo, el desfase es $\delta = -\frac{(2n/\lambda)(n_1 - n_2)}{e}(e - e')$, donde $e = AB$ y $e' = BC$. Por lo tanto, si se desliza una cuña sobre la otra, se puede variar continuamente el desfase.

20.26 En un compensador de Babinet, el ancho de una cuña es 2 mm. Hallar el ancho que la otra debe tener para que produzca un desfase de $2\pi/3$ en una otra dirección cuando se usa luz de longitud de onda $5,7 \times 10^{-7}$ m.

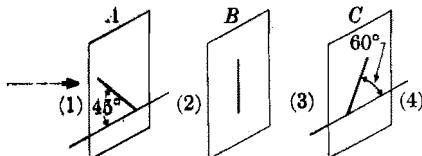


Figura 20-48

20.27 En la fig. 20-48, A y C son hojas de políodo cuyas direcciones de transmisión se indican. B es una hoja de material birefringente cuyo eje óptico es vertical. Las tres hojas son paralelas. Dende la izquierda entra luz no polarizada. Discutir el estado de polarización de la luz en los puntos (2), (3) y (4).

20.48 La fig. 20-49 representa un *prisma de Wollaston* hecho de dos prismas de cuarzo pegados entre sí. El eje óptico del prisma de la derecha es perpendicular a la página, mientras que el del lado izquierdo es paralelo a la misma. La luz incidente es normal a la superficie y da lugar a los rayos ordinario y extraordinario que viajan en el prisma de la izquierda según la misma trayectoria, pero con diferentes velocidades. Copiar la fig. 20-49 y mostrar sobre ese diagrama cómo se deflectan los rayos ordinario y extraordinario al atravesar el prisma de la derecha y también al salir al aire.

20.29 La onda descrita en el problema 19-4 incide perpendicularmente sobre un polarizador, el cual rota en su plano hasta que la intensidad transmitida es

máxima. (a) ¿En qué dirección yace el eje de transmisión del polarizador? (b) ¿En qué dirección yace el eje de transmisión cuando la luz transmitida es mínima? (c) Calcular el cociente de las intensidades transmitidas para las posiciones encontradas en (a) y (b).

20.30 Un haz de luz blanca polarizada linealmente incide perpendicularmente sobre una placa de cuarzo de espesor 0,865 mm, cortada paralelamente al eje óptico. El plano del campo eléctrico forma un ángulo de 45° con el eje de la placa. Los índices principales de refracción del cuarzo para la luz del sodio están en la tabla 20-2. Despreciar la variación de $n_1 - n_2$ con la longitud de onda. (a) ¿Cuáles longitudes de onda comprendidas entre $6,0 \times 10^{-7}$ m y $7,0 \times 10^{-7}$ m emergen de la placa polarizadas linealmente? (b) ¿Cuáles longitudes de onda circularmente polarizadas emergen? (c) Suponer que el haz emergente pasa a través de un analizador cuyo eje de transmisión es perpendicular al plano de vibración de la luz incidente. ¿Qué longitudes de onda faltan en el haz transmitido?

20.31 Un haz de luz, después de pasar a través de un prisma de Nicol N_1 ,

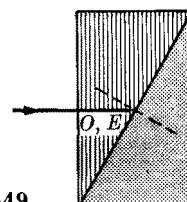


Figura 20-49

atraviesa una celda que contiene un medio difusor. Se observa la celda en ángulo recto por medio de otro prisma de Nicol N_2 . Originalmente, los prismas de Nicol se orientan hasta que el brillo del campo sea máximo. (a) ¿Se produce extinción cuando se rota el prisma N_2 en 90° ? (b) Se rota ahora el prisma N_1 en 90° , ¿es brillante u oscuro el campo a través de N_2 ? (c) Se restaura el prisma N_2 a su posición original. ¿Es brillante u oscuro el campo visto a través de N_2 ? **20.32** Se sabe experimentalmente que por cada grano de azúcar disuelto en

1 cm³ de agua, el plano de polarización de una onda electromagnética polarizada linealmente rota + 66,5° por cada cm de camino. Un tubo de 30 cm de largo contiene una solución de azúcar que contiene 15 gramos de ésta en 100 cm³ de solución. Hallar el ángulo de rotación de la luz polarizada.

20.33 Hallar la cantidad de azúcar contenida en un tubo cilíndrico de 30 cm de longitud y 2 cm² de sección transversal si el plano de polarización rota 89,7°. [Sugerencia: ver el problema precedente.]

20.34 Estimar la profundidad de penetración en el cobre de una onda electromagnética cuando su amplitud disminuye hasta 1/e de su valor en la superficie, si la frecuencia es (a) en la región de las microondas, 6×10^9 Hz, (b) en la región visible, 6×10^{14} Hz, (c) en la región de los rayos X, 3×10^{18} Hz. Suponer que $\mu \approx \mu_0$.

20.35 El índice de refracción del aire es $n = 1 + 0,00024\rho$, donde ρ es la densidad del aire (en kg m⁻³). Sea θ el ángulo zenital verdadero de una estrella y $\theta - \Delta\theta$ el ángulo zenital aparente respecto a un observador que mira la estrella a través de la atmósfera (figura 20-50). (a) Escribir la ecuación que da $\Delta\theta$ en función del ángulo zenital verdadero, de la densidad ρ , de la presión atmosférica p y de la temperatura absoluta T . Calcular $\Delta\theta$ al nivel del mar para una estrella con $\theta = 45^\circ$ su-

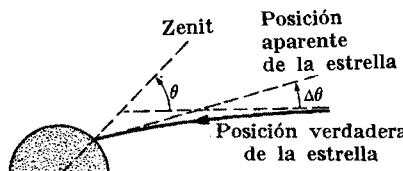


Figura 20-50

poniendo una temperatura $T = 298^\circ$ K (25° C).

20.36 Un medio no homogéneo estratificado tiene un índice de refracción que varía según la dirección Y , esto es $n = n(y)$. Demostrar que la ecuación del camino de un rayo, que satisface la ec. (20.32), es

$$x = x_0 + \int_{y_0}^y dy / \sqrt{n^2(y)/C^2 - 1}.$$

20.37 La trayectoria de un rayo en un medio no homogéneo está representada por $x = A \operatorname{sen}(y/B)$. Calcular el índice de refracción n en el espacio entre los planos $x = A$ y $x = -A$, suponiendo que depende sólo de x y que tiene el valor n_0 para $x = 0$.

20.38 El índice de refracción de un cierto medio está dado por $n = h + kx$. Calcular la trayectoria del rayo que pasa por el origen de los ejes coordenados y forma en este punto un ángulo ϕ_0 con el eje X . Hacer el gráfico de la trayectoria del rayo, suponiendo que $h = 1$, $k = 1$, y $\phi_0 = 45^\circ$.

GEOMETRIA DE LAS ONDAS

- 21.1 *Introducción*
- 21.2 *Reflexión en una superficie esférica*
- 21.3 *Refracción en una superficie esférica*
- 21.4 *Lentes*
- 21.5 *Instrumentos ópticos*
- 21.6 *El prisma*
- 21.7 *Dispersión de un medio*
- 21.8 *Aberración cromática*
- 21.9 *Principio de Fermat del tiempo estacionario*

21.1 Introducción

En los capítulos anteriores hemos estudiado algunos fenómenos que ocurren cuando una onda pasa de un medio a otro en el cual la propagación es diferente. No sólo analizamos lo que ocurre al frente de onda sino que también introdujimos el concepto de rayo por ser muy útil para construcciones geométricas.

En este capítulo vamos a examinar con más detalle los fenómenos de reflexión y de refracción desde el punto de vista geométrico, usando el concepto de rayo como herramienta para describir los procesos que ocurren en superficies de discontinuidad. Supondremos también que los procesos son únicamente reflexiones y refracciones y que no hay otros cambios en las superficies de onda. (Pospondremos la consideración de la difracción y de la difusión de ondas hasta el capítulo 23.) Este modo de tratar el tema es lo que podemos llamar geometría de las ondas o trazado de rayos. En particular, para las ondas electromagnéticas en las regiones visibles y cercanas al visible, constituye la óptica geométrica, que es una rama muy importante de la física aplicada.

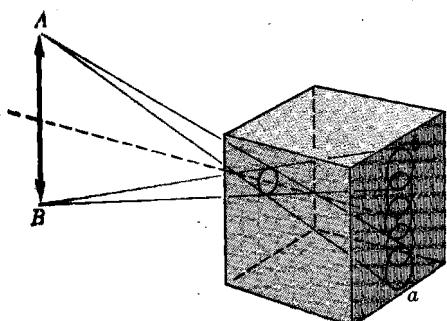
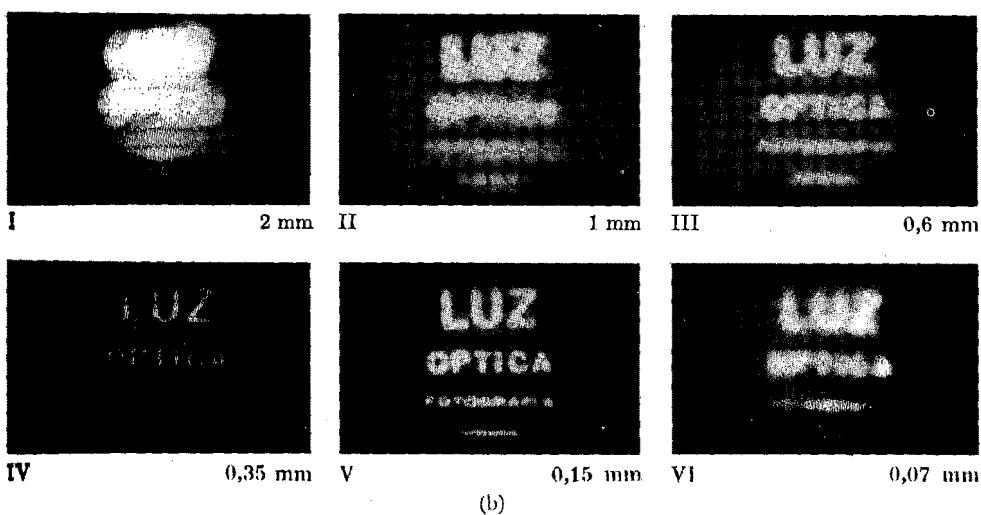


Fig. 21-1. Formación de imagen en una cámara de agujero. El diagrama ilustra los caminos de los rayos. La serie de fotografías muestra la variación en la claridad de la imagen a medida que disminuye el diámetro del agujero. Nótese que hay un diámetro óptimo para la claridad de la imagen. (Fotografía cortesía del Dr. N. Noel. Proyecto Piloto de la UNESCO para la enseñanza de la física).



Este tratamiento geométrico es adecuado en tanto las superficies y otras discontinuidades que encuentre la onda en su propagación sean muy grandes respecto a la longitud de onda. Mientras se satisfaga esta condición, nuestro tratamiento se aplicará tanto a ondas luminosas como a ondas acústicas (especialmente ultrasónicas), ondas sísmicas, etc. Sin embargo, en la mayoría de nuestros ejemplos consideraremos ondas luminosas, ya que posiblemente son las más familiares y las más importantes desde este punto de vista; por esta razón, también podríamos considerar que éste es un capítulo sobre óptica geométrica.

Un ejemplo característico del uso de rayos es la imagen producida por la cámara de agujero (fig. 21.1). Esta cámara consiste en una caja con un agujero muy pequeño de un lado. Si se coloca frente a él un objeto AB que emite ondas, los rayos Bb y Aa forman una imagen ab del lado opuesto. Esta imagen está bien definida cuando el agujero es muy pequeño, de modo que sólo una pequeña fracción de los frentes de onda pasa a través de él, correspondiendo entonces un punto de la imagen a cada punto del objeto. Si el agujero es demasiado grande, la imagen aparece borrosa porque a cada punto del objeto corresponde una mancha en la imagen. Además, el agujero no debe ser tan pequeño que su radio sea comparable a la longitud de onda, porque entonces comienzan a aparecer efectos de difracción y la imagen ab también aparece borrosa (como se estudiará en el capítulo 23).

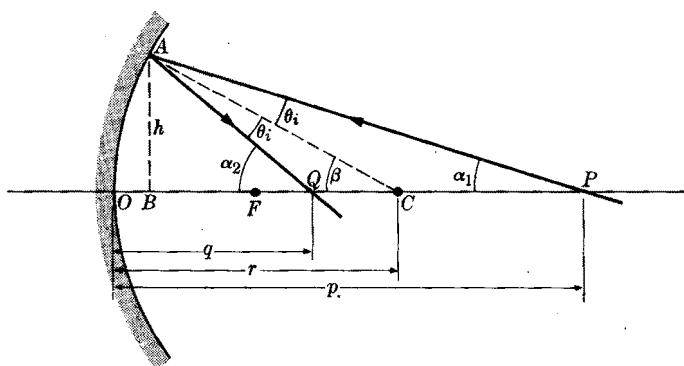


Fig. 21-2. Camino de un rayo reflejado en una superficie esférica.

21.2 Reflexión en una superficie esférica

Comenzaremos por considerar la reflexión de ondas en una superficie esférica. Debemos establecer primeramente ciertas definiciones y convenciones de signo. El centro de curvatura C es el centro de la superficie esférica (fig. 21.2) y el vértice O es el polo del casquete esférico. La línea que pasa por O y C se denomina *eje principal*. Si tomamos nuestro origen de coordenadas en O , todas las cantidades que se miden a la derecha de O son positivas y las que se miden a la izquierda negativas.

Supongamos que el punto P es una fuente de ondas esféricas. El rayo PA se refleja como rayo AQ y, como los ángulos de incidencia y de reflexión son iguales,

deducimos de la figura que

$$\beta = \theta_i + \alpha_1 \quad \text{y} \quad \alpha_2 = \beta + \theta_i,$$

de donde

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 2\beta. \quad (21.1)$$

Suponiendo que los ángulos α_1 , α_2 y β son muy pequeños (es decir, los rayos son paraxiales), podemos escribir con buena aproximación

$$\alpha_1 \approx \operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{AB}{BP} \approx \frac{h}{p},$$

$$\alpha_2 \approx \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{AB}{BQ} \approx \frac{h}{q},$$

$$\beta \approx \operatorname{tg} \beta = \frac{AB}{BC} \approx \frac{h}{r}.$$

Sustituyendo en la ec. (21.1) y cancelando el factor común h , obtenemos

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{2}{r}, \quad (21.2)$$

que es la fórmula de Descartes para la reflexión en una superficie esférica. Implica que, en la aproximación usada para obtenerla, todos los rayos incidentes que pasan por P pasarán por Q después de reflejarse en la superficie. Decimos entonces que Q es la imagen de P .

Para el caso especial en que el rayo incidente es paralelo al eje principal, lo cual es equivalente a colocar el objeto a una gran distancia del espejo, tenemos $p = \infty$. Luego, la ec. (21.2) se convierte en $1/q = 2/r$ y la imagen cae en el punto F , a una distancia del espejo dada por $q = r/2$. El punto F se denomina foco de la superficie esférica y su distancia al espejo se denomina distancia focal, design-

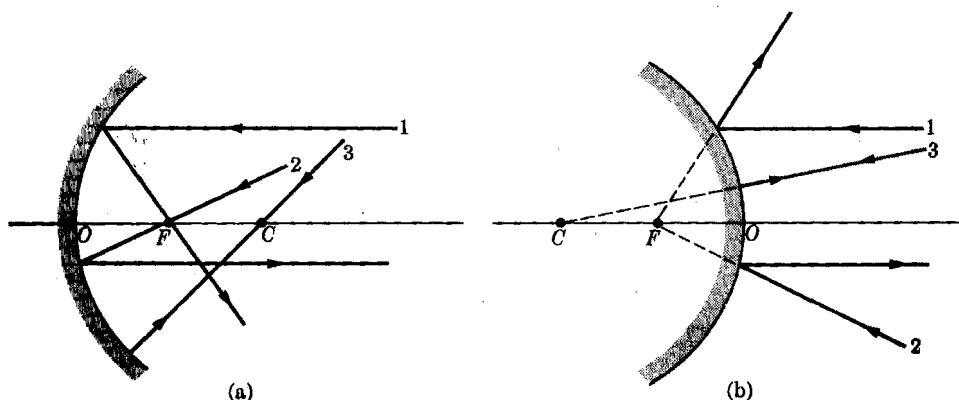


Fig. 21-8. Rayos principales en espejos esféricos. (a) Cóncavo y (b) convexo.

nándose con f , de modo que $f = r/2$. Luego, la ec. (21.2) se puede escribir en la forma

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}. \quad (21.3)$$

Como f se puede determinar experimentalmente observando el punto de convergencia de los rayos paralelos al eje principal, no es necesario conocer el radio r para aplicar la ec. (21.3). Obsérvese que si $q = \infty$, $p = f$, por lo que todos los

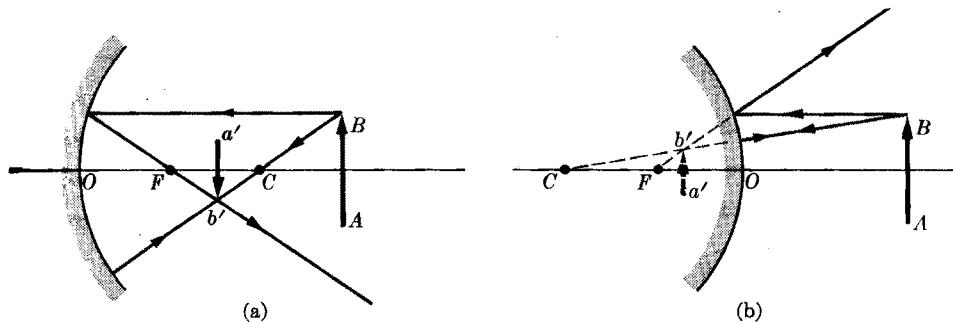


Fig. 21-4. Construcción de la imagen en espejos esféricos. (a) Cóncavo y (b) convexo.

rayos incidentes que pasan por el foco F se reflejan paralelamente al eje principal.

Debido a nuestra convención de signos, las superficies cónicas tienen un radio positivo mientras que las convexas tienen un radio negativo. Por lo tanto, los signos de las distancias focales correspondientes son positivo y negativo, respectivamente. La fig. 21.3 muestra los llamados *rayos principales* para una superficie cónica y para una convexa. El rayo 1 es un rayo paralelo, el rayo 2 es un

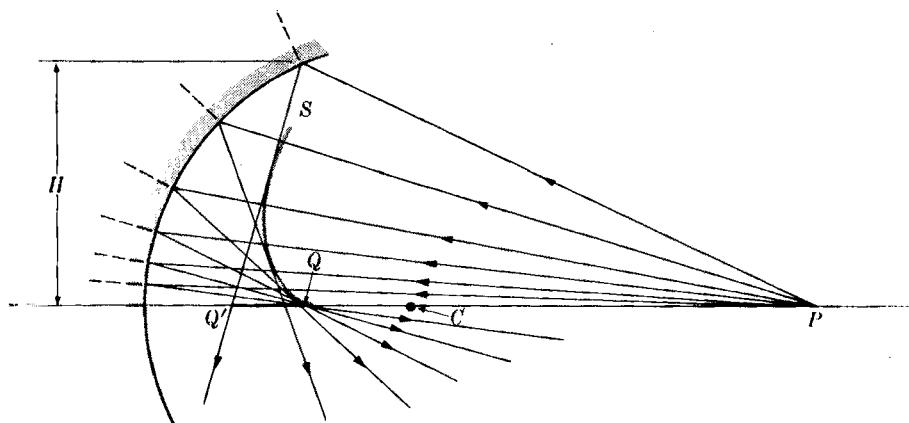


Fig. 21-5. Aberración esférica en un espejo cónico.

rayo focal y el 3 es un rayo central, que incide normalmente ($\theta_i = 0$). En la fig. 21-4 se usan estos rayos para ilustrar la formación de una imagen por una superficie esférica reflectora. El *objeto* es AB y la *imagen* es $a'b'$. En la fig. 21-4(a) la *imagen* es *real* (ya que los rayos reflejados se cortan realmente) y en la fig. 21-4(b) es *virtual* (porque los rayos parecen haberse cortado detrás del espejo). En la tabla 21-1 se indican las convenciones de signos usadas en este texto.

Cuando la abertura del espejo es grande, de modo que acepta rayos de gran inclinación, la ec. (21.3) ya no es una buena aproximación. En tales casos ya no hay una *imagen* puntual bien definida correspondiente a un *objeto* puntual, sino un número infinito de ellas; por lo tanto la *imagen* de un *objeto* extenso aparece borrosa. La fig. 21-5 muestra rayos que vienen del punto P y se reflejan en el

TABLA 21-1 Convenciones de signo en espejos esféricos

	+	-
radio r	cóncava	convexa
foco f	convergente	divergente
objeto p	real	virtual
imagen q	real	virtual

espejo. Vemos que los rayos no se interceptan en el mismo punto sino sobre un segmento QQ' a lo largo del eje, efecto llamado *aberración esférica*. El punto Q , que corresponde a los rayos que forman un ángulo muy pequeño con el eje, está determinado por la ec. (21.3); Q' corresponde a los rayos de máxima inclinación. Los rayos reflejados también se interceptan a lo largo de una superficie cónica, indicada por la linea gruesa QS , que se denomina *cáustica por reflexión*.

La aberración esférica no se puede eliminar, pero diseñando convenientemente la superficie se puede suprimir para ciertas posiciones llamadas anastigmáticas. Para un *objeto* puntual en el centro del espejo esférico, la *imagen* es exactamente un punto (también en el centro) y no tiene aberración esférica. Por lo tanto el centro de un espejo esférico es una posición anastigmática. Las posiciones anastigmáticas se pueden modificar cambiando la forma de la superficie. Por ejemplo, un espejo parabólico no produce aberración en rayos paralelos al eje principal, debido a una propiedad de la parábola; todos ellos deben pasar por el foco de la parábola. Es por esto que los espejos parabólicos se emplean en telescopios, no sólo para recibir rayos en la región visible del espectro electromagnético, sino también para recibir rayos en la región de la radiofrecuencia, como en los radiotelescopios (fig. 21-6).

Un radiotelescopio consiste en un espejo parabólico metálico formado por una malla de alambre. Se coloca una antena receptora dipolar en el foco del espejo. Las señales recibidas por la antena, correspondientes a las ondas electromagnéticas que se propagan en dirección paralela al eje del espejo, se transmiten al laboratorio para ser analizadas. Análogamente, un espejo elíptico es también ana-



Fig. 21-8. Radiotelescopio de reflexión en Parkes, Nueva Gales del Sur, Australia. El reflector que tiene 64 m de diámetro, puede rotar alrededor de la vertical y variar su ángulo zenithal, y se puede dirigir prácticamente a todo el cielo visible. El telescopio está diseñado para obtener funcionamiento óptimo en la línea del hidrógeno de 21 cm de longitud de onda, aunque es sensible aún hasta longitudes de onda de unos pocos centímetros. La ubicación, a 340 km de Sydney, se eligió para que hubiera un mínimo de interferencia eléctrica. (Fotografía cortesía de la Oficina Australiana de Noticias e Información).

tigmático para un objeto colocado en un foco de la elipse; su imagen cae exactamente en el otro foco.

Además de la aberración esférica hay otros defectos que observamos en las imágenes producidas por reflexión (o refracción) en superficies esféricas. No los trataremos, sin embargo, porque pertenecen a ramas bastante especializadas de la óptica.

EJEMPLO 21.1. Estudiar la formación de imagen en un espejo cuya abertura es grande.

Solución: Cuando un espejo esférico tiene gran abertura y puede aceptar rayos muy inclinados, deja de ser válida la aproximación hecha para obtener la ec. (21.2), ya que entonces reemplazar α por $\tan \alpha$ no sería una aproximación muy buena. No es difícil obtener otra expresión más precisa que la ec. (21.2). Cuando aplicamos la ley del seno a los triángulos ACP y ACQ (fig. 21-2), obtenemos

$$\frac{CP}{AP} = \frac{\sin \theta_1}{\sin(\pi - \beta)}, \quad \frac{QC}{AQ} = \frac{\sin \theta_1}{\sin \beta}.$$

Luego, como $\sin(\pi - \beta) = \sin \beta$, tenemos

$$\frac{CP}{AP} = \frac{QC}{AQ} \quad \text{o} \quad \frac{P - r}{AP} = \frac{r - q}{AQ},$$

que se puede escribir en la forma

$$\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{p} \right) \frac{P}{AP} = \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{r} \right) \frac{q}{AQ}. \quad (21.4)$$

Si α_1 y α_2 son muy pequeños, podemos hacer la aproximación $p = AP$ y $q = AQ$, obteniendo de nuevo la ec. (21.2). Para avanzar un paso más, tenemos en el triángulo ACP

$$\begin{aligned} AP^2 &= r^2 + (P - r)^2 + 2r(P - r) \cos \beta \\ &= p^2 + 2r(p - r)(1 - \cos \beta) \\ &= p^2 - 4r(p - r) \sin^2 \frac{1}{2}\beta \\ &= p^2 \left[1 - 4 \frac{r^2}{p} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{p} \right) \sin^2 \frac{1}{2}\beta \right] \\ &\approx p^2 \left[1 - \frac{h^2}{p} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{p} \right) \right], \end{aligned}$$

donde en la última línea se ha hecho la aproximación $\sin \frac{1}{2}\beta \approx \frac{1}{2}\beta \approx h/2r$. Luego

$$\frac{P}{AP} = \left[1 - \frac{h^2}{p} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{p} \right) \right]^{-1/2} = 1 + \frac{h^2}{2p} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{p} \right), \quad (21.5)$$

donde se ha hecho la aproximación $(1 - x)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}x$, conforme a la ec. (M.28). Del mismo modo, usando el triángulo AQC , tenemos

$$\frac{q}{AQ} = 1 + \frac{h^2}{2q} \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{r} \right). \quad (21.6)$$

Luego, sustituyendo en la ec. (21.4) obtenemos

$$\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{p} \right) \left[1 + \frac{h^2}{2p} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{p} \right) \right] = \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{r} \right) \left[1 + \frac{h^2}{2q} \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{r} \right) \right].$$

Realizando la multiplicación y agrupando términos, obtenemos

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{2}{r} + \frac{h^2}{2} \left[\frac{1}{p} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{p} \right)^2 + \frac{1}{q} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{q} \right)^2 \right].$$

Como el segundo término del segundo miembro es un término correctivo, podemos usar la ec. (21.2) para eliminar q en el mismo. El resultado es

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{2}{r} + \frac{h^2}{r} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{p} \right)^2. \quad (21.7)$$

La distancia h está determinada por la inclinación de los rayos y cuanto mayor es h menor es q . En consecuencia, todos los rayos que salen de un punto P (fig. 21-5) sobre el eje principal se interceptan, no en el mismo punto, sino sobre un segmento QQ' , como se indicó anteriormente. Obtenemos el punto Q empleando la ec. (21.2) o haciendo $h = 0$ en la ec. (21.7). El punto Q' se obtiene haciendo $h = H$, donde H es el radio de la base de la superficie esférica.

EJEMPLO 21.2. Obtener una expresión para el aumento producido por un espejo esférico.

Solución: El aumento M de un sistema óptico se define como el cociente entre el tamaño de la imagen y el del objeto. Esto es, $M = ab/AB$. El aumento puede ser positivo o negativo, según que la imagen esté erecta o invertida con respecto al objeto. En la fig. 21-7 vemos que

$$\operatorname{tg} \theta_i = \frac{AB}{OA} = \frac{AB}{p},$$

$$\operatorname{tg} \theta'_i = -\frac{ab}{Oa} = -\frac{ab}{q},$$

donde el signo menos se debe al hecho de que ab es negativo, ya que la imagen está invertida. Teniendo en cuenta que $\theta_i = \theta'_i$, tenemos entonces que

$$M = -q/p. \quad (21.8)$$

EJEMPLO 21.3 Un espejo cóncavo tiene un radio de 0,600 m. Se coloca un objeto a 1,000 m del espejo. Encontrar las imágenes más próxima y más lejana producidas por el espejo, suponiendo que su apertura es 20° .

Solución: En este caso tenemos $r = +0,600$ m y $p = +1,000$ m. Por lo tanto, empleando la ec. (21.2), tenemos para rayos paraxiales que

$$\frac{1}{1,000} + \frac{1}{q} = \frac{2}{0,600} \quad \text{ó} \quad q = +0,429 \text{ m.}$$

Los rayos de máxima inclinación producen una imagen que se obtiene empleando la ec. (21.7), con $h = r \operatorname{sen} \beta$ y $\beta = \frac{1}{2}(20^\circ) = 10^\circ$. Luego, $h = 0,600 \operatorname{sen} 10^\circ = 0,104$ m y $h^2 = 0,0108$. Entonces

$$\frac{1}{1,000} + \frac{1}{q} = \frac{2}{0,600} + \frac{0,011}{0,600} \left(\frac{1}{0,600} - \frac{1}{1,000} \right)^2$$

o sea que $q = +0,427$ m. En consecuencia las imágenes ocupan un pequeño segmento de aproximadamente $0,002$ m = 2 mm de longitud a lo largo del eje principal.

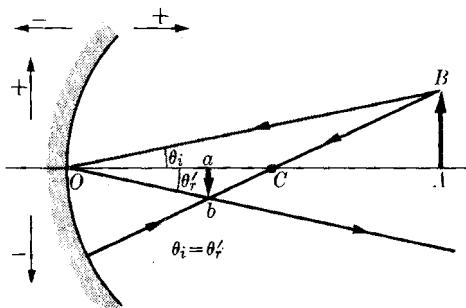


Fig. 21-7. Cálculo del aumento producido por un espejo esférico.

21.3 Refracción en una superficie esférica

Consideraremos ahora la refracción en una superficie esférica que separa dos medios cuyos índices de refracción absolutos son n_1 y n_2 (fig. 21-8). Los elementos geométricos fundamentales son los definidos en la sección precedente. Un rayo incidente tal como el PA se refracta según AD el cual, prolongado hacia atrás en el primer medio, intercepta el eje principal en Q . En la figura observamos que $\beta = \theta_i + \alpha_1$ y $\beta = \theta_r + \alpha_2$. Ahora bien, según la ley de Snell, $n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_r$. Suponemos, como hicimos en la sección precedente, que los rayos tienen inclinación muy pequeña. Luego, los ángulos θ_i , θ_r , α_1 , α_2 y β son muy pequeños y podemos escribir $\sin \theta_i \approx \theta_i$ y $\sin \theta_r \approx \theta_r$, de modo que la ley de Snell es $n_1 \theta_i = n_2 \theta_r$ o sea

$$n_1(\beta - \alpha_1) = n_2(\beta - \alpha_2). \quad (21.9)$$

Ahora bien, en la fig. 21.8 vemos que, como en el caso de la reflexión,

$$\alpha_1 \approx \frac{h}{p}, \quad \alpha_2 \approx \frac{h}{q}, \quad \beta \approx \frac{h}{r},$$

de modo que, sustituyendo en la ec. (21.9), cancelando factores, ordenando términos, obtenemos

$$\frac{n_1}{p} - \frac{n_2}{q} = \frac{n_1 - n_2}{r}, \quad (21.10)$$

que es la fórmula de Descartes para la refracción en una superficie esférica.

El foco objeto F_o , también llamado primer punto focal, de una superficie esférica refringente es la posición de un objeto puntual sobre el eje principal tal que los rayos refractados son paralelos al eje principal, lo cual equivale a tener la

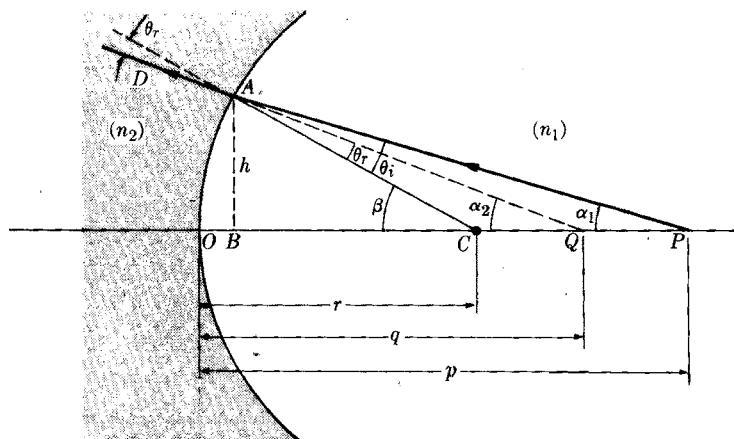


Fig. 21-8. Camino de un rayo refractado por una superficie esférica.

Imagen del punto en el infinito, o sea $q = \infty$. La distancia del objeto a la superficie esférica se denomina *distancia focal objeto* y se designa con f_o . Haciendo $p = f_o$ y $q = \infty$ en la ec. (21.10), tenemos $n_1/f_o = (n_1 - n_2)/r$, o

$$f_o = \frac{n_1}{n_1 - n_2} r. \quad (21.11)$$

Analógicamente, cuando los rayos incidentes son paralelos al eje principal, lo cual es equivalente a tener el objeto a una distancia muy grande de la superficie esférica ($p = \infty$), los rayos refractados pasan por un punto F_i sobre el eje prin-

Tabla 21-2 Convenciones de signo para una superficie esférica refringente

	+	-
radio r		
foco f_o	cóncava	convexa
objeto p	convergente	divergente
imagen q	real	virtual
	virtual	real

cial denominado *foco imagen* o *segundo punto focal*. En este caso, la distancia de la imagen a la superficie esférica se denomina *distancia focal imagen* y se designa con f_i . Haciendo $p = \infty$ y $q = f_i$ en la ec. (21.10), tenemos $-n_2/f_i = -(n_1 - n_2)/r$, ó

$$f_i = -\frac{n_2}{n_1 - n_2} r. \quad (21.12)$$

Observese que $f_o + f_i = r$. Combinando la ec. (21.10) con la (21.11) o con la (21.12), podemos escribir

$$\frac{n_1}{p} - \frac{n_2}{q} = \frac{n_1}{f_o} \quad \left(\text{ó } \frac{n_2}{f_i} \right),$$

que es una expresión útil. La fig. 21-9 muestra la construcción de los rayos principales para el caso en el cual $r > 0$ y $n_1 > n_2$. En la fig. 21-10 se muestra la construcción de la imagen de un objeto en esas mismas condiciones. El estudiante puede dibujar figuras similares para los casos restantes, es decir, $r > 0$ y $n_1 < n_2$, $r < 0$ y $n_1 \geq n_2$. Cuando f_o es positiva el sistema se denomina *convergente* y cuando es negativa se denomina *divergente*. En la tabla 21-2 se da la lista de convenciones de signos empleadas en este texto.

La ec. (21.10) indica también que para cada objeto puntual hay una imagen puntual única. Esto es cierto en tanto la superficie esférica tenga una abertura pequeña, admitiendo solamente rayos de inclinación muy pequeña, caso en que son válidas muestras aproximaciones. Para superficies esféricas refringentes de gran abertura, la situación es similar a la encontrada en la fig. 21-5 para un espejo

esférico, y origina el mismo fenómeno de aberración esférica discutido anteriormente para los espejos esféricos.

EJEMPLO 21.4. Estudiar la formación de imagen por una superficie refringente de gran abertura.

Solución: El procedimiento en este caso es muy similar al del ejemplo 21.1 para un espejo. De los triángulos ACP y ACQ (fig. 21-8) obtenemos

$$\frac{CP}{AP} = \frac{\sin \theta_i}{\sin (\pi - \beta)}, \quad \frac{CQ}{AQ} = \frac{\sin \theta_r}{\sin (\pi - \beta)}.$$

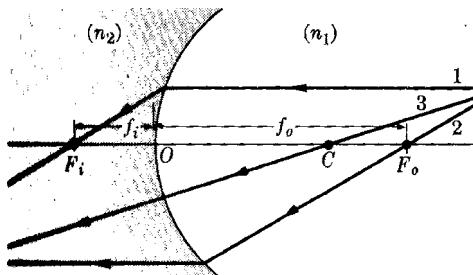


Fig. 21-9. Rayos principales en una superficie esférica refringente.

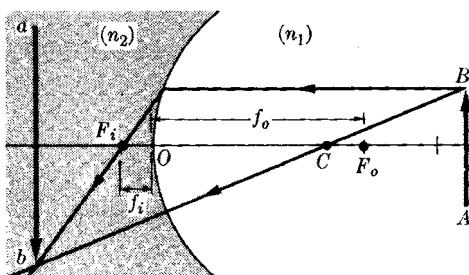


Fig. 21-10. Formación de imagen por refracción en una superficie esférica.

Despejando $\sin \theta_i$ y $\sin \theta_r$ de estas ecuaciones y sustituyendo sus valores en la ley de Snell $n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_r$, obtenemos

$$n_1 \frac{CP}{AP} = n_2 \frac{CQ}{AQ} \quad \text{y} \quad n_1 \frac{p - r}{AP} = n_2 \frac{q - r}{AQ}.$$

Esta expresión se puede escribir en la forma

$$n_1 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{p} \right) \frac{p}{AP} = n_2 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{q} \right) \frac{q}{AQ}. \quad (21.13)$$

que se debe comparar con la ec. (21.4). Si α_1 y α_2 son muy pequeños, podemos hacer la aproximación $p = AP$ y $q = AQ$, obteniendo de nuevo la ec. (21.10). Para avanzar un paso más usamos las aproximaciones mejores que proporcionan las ecs. (21.5) y (21.6). Luego

$$\begin{aligned} n_1 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{p} \right) \left[1 + \frac{h^2}{2p} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{p} \right) \right] &= \\ &= n_2 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{q} \right) \left[1 + \frac{h^2}{2q} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{q} \right) \right]. \end{aligned}$$

Efectuando las multiplicaciones y ordenando términos, obtenemos

$$\frac{n_1}{p} - \frac{n_2}{q} = \frac{n_1 - n_2}{r} + \frac{h^2}{2} \left[\frac{n_1}{p} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{p} \right)^2 - \frac{n_2}{q} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{q} \right)^2 \right].$$

Empleando la ec. (21.10) para eliminar q en el último término de corrección, obtene-

mos finalmente

$$\frac{n_1}{p} - \frac{n_2}{q} = \frac{n_1 - n_2}{r} + \frac{h^2}{2} \frac{n_1 - n_2}{n_2^2} \left[\frac{n_1^2}{r} - \frac{n_1(n_1 + n_2)}{p} \right] \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{p} \right)^2. \quad (21.14)$$

Como en el caso de un espejo esférico, la posición de la imagen depende del valor de h o de la inclinación del rayo incidente. En consecuencia, la imagen de un punto no es otro punto sino un segmento sobre el eje principal.

EJEMPLO 21.5. Obtener una expresión para el aumento producido por una superficie esférica refringente.

Solución: Este problema es similar al del ejemplo 21.2. Teniendo en cuenta la fig. 21.11, en la cual AB es un objeto y ab su imagen (virtual), tenemos que $M = -ab/AB$. Tenemos también

$$\operatorname{tg} \theta_i = \frac{AB}{OA} = \frac{AB}{p}, \quad \operatorname{tg} \theta_r = \frac{ab}{Oa} = \frac{ab}{q},$$

y por lo tanto

$$M = \frac{q \operatorname{tg} \theta_r}{p \operatorname{tg} \theta_i} \approx \frac{q \operatorname{sen} \theta_r}{p \operatorname{sen} \theta_i},$$

donde la última aproximación es válida siempre que los ángulos sean pequeños y se puedan reemplazar tangentes por senos. Entonces, empleando la ley de Snell $n_1 \operatorname{sen} \theta_i = n_2 \operatorname{sen} \theta_r$, tenemos

$$M = \frac{n_2 q}{n_1 p}.$$

EJEMPLO 21.6. Una superficie cóncava cuyo radio es 0,50 m separa un medio de índice de refracción 1,20 de otro cuyo índice es 1,60. Se coloca un objeto en el primer medio a 0,80 m de la superficie. Determinar las distancias focales, la posición de la imagen y el aumento.

Solución: En este caso $r = +0,50$ m, $n_1 = 1,20$ y $n_2 = 1,60$. Por lo tanto, empleando las ec. (21.11) y (21.12), obtenemos

$$f_o = \frac{n_1 r}{n_1 - n_2} = -1,50 \text{ m}, \quad f_i = -\frac{n_2 r}{n_1 - n_2} = +2,00 \text{ m}.$$

El sistema es entonces divergente. Usando la ec. (21.10) encontramos que

$$\frac{1,20}{0,80} - \frac{1,60}{q} = \frac{1,20 - 1,60}{0,50} \quad \text{y} \quad q = +0,69 \text{ m}.$$

El signo positivo indica que la imagen es virtual. Para el aumento usamos el resultado del ejemplo 21.5,

$$M = \frac{1,20 \times 0,69}{1,60 \times 0,80} = 0,65.$$

Como M es positivo, la imagen está erecta, esto es, tiene la misma orientación que el objeto.

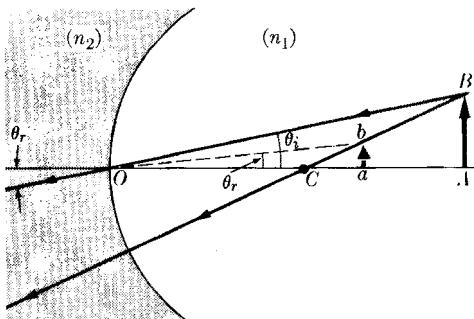


Fig. 21-11. Aumento por refracción.

21.4 Lentes

Una lente es un medio transparente limitado por dos superficies curvas (generalmente esféricas), aunque una de las caras de la lente puede ser plana. Por lo tanto, una onda incidente sufre dos refracciones al pasar a través de la lente. Para simplificar supongamos que a ambos lados de la lente el medio es el mismo y que su índice de refracción es la unidad (como el aire), mientras que el índice de refracción de la lente es n . Además sólo consideraremos lentes delgadas, es decir, lentes cuyo espesor es muy pequeño comparado con los radios.

El eje principal es ahora la recta determinada por los dos centros C_1 y C_2 (figura 21-12). Consideremos el rayo incidente PA que pasa por P . En la primera superficie el rayo incidente se refracta según el rayo AB . Si se lo prolongara, el rayo AB pasaría por Q' , que es por lo tanto la imagen de P producida por la primera superficie refringente. La distancia q' de Q' a O_1 se obtiene por medio de la ec. (21.10), es decir

$$\frac{1}{p} - \frac{n}{q'} = \frac{1-n}{r_1}. \quad (21.15)$$

El rayo sufre en B una segunda refracción saliendo como rayo BQ . Decimos entonces que Q es la imagen final de P producida por el sistema de dos superficies refringentes que constituye la lente. Ahora bien, para la refracción en B el objeto (virtual) es Q' y la imagen es Q a una distancia q de la lente. Por lo tanto, aplicando nuevamente la ec. (21.10) con q' en vez de p , tenemos

$$\frac{n}{q'} - \frac{1}{q} = \frac{n-1}{r_2}. \quad (21.16)$$

Nótese que está invertido el orden de los índices de refracción porque el rayo pasa de la lente al aire. En rigor, las distancias que aparecen en las ecs. (21.15) y (21.16) se deben medir desde O_1 y desde O_2 respectivamente, por lo que en la

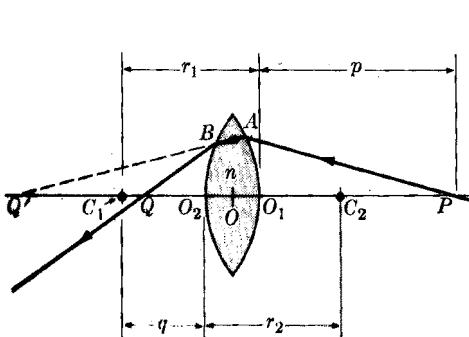


Fig. 21-12. Camino de un rayo a través de una lente delgada.

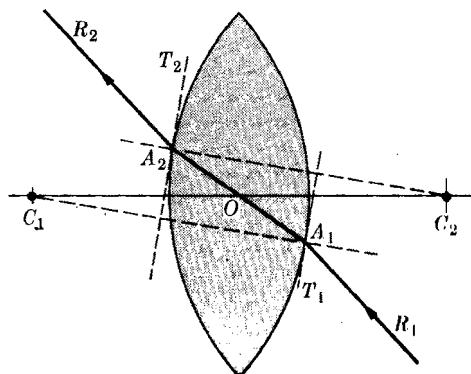


Fig. 21-18. Centro óptico de una lente.

es, (21-16) deberíamos escribir $q' + t$ en vez de q' , donde $t = O_2O_1$ es el espesor de la lente. Pero como la lente es muy delgada podemos despreciar t , lo cual es equivalente a medir todas las distancias desde un origen común O . Combinando las ecs. (21.15) y (21.16) para eliminar q' , encontramos que

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = (n - 1) \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right), \quad (21.17)$$

que es la fórmula de Descartes para una lente delgada.

El punto O en la fig. 21-12 se elige de modo que coincida con el centro óptico de la lente. El centro óptico es un punto definido en forma tal que cualquier rayo que pasa por él emerge en dirección paralela a la del rayo incidente. Para ver que tal punto existe consideremos, en la lente de la fig. 21-13, dos radios paralelos C_1A_1 y C_2A_2 . Los correspondientes planos tangentes T_1 y T_2 también son paralelos. Para el rayo R_1A_1 , cuya dirección es tal que el rayo refractado es A_1A_2 , el rayo emergente A_2R_2 es paralelo a A_1R_1 . Por la semejanza de los triángulos C_1A_1O y C_2A_2O , vemos que la posición del punto O es tal que

$$\frac{C_1O}{OC_2} = \frac{C_1A_1}{A_2C_2} = -\frac{r_1}{r_2},$$

por lo que es independiente del rayo particular elegido. En consecuencia todos los rayos incidentes cuyo rayo interno pasa por el punto O emergen sin desviación angular.

Como en el caso de una sola superficie refringente, el *foco objeto* F_o , o primer punto focal de una lente, es la posición del objeto para la cual los rayos emergen paralelamente al eje principal ($q = \infty$) después de atravesar la lente. La distancia de F_o a la lente se denomina *distancia focal objeto* y se designa con f . Luego, poniendo $p = f$ y $q = \infty$ en la ec. (21.17), obtenemos para la distancia focal objeto

$$\frac{1}{f} = (n - 1) \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right), \quad (21.18)$$

que se suele llamar *ecuación del constructor de lentes*. Combinando las ecs. (21.15) y 21.18), tenemos

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{1}{f}. \quad (21.19)$$

Esta expresión tiene la ventaja de que, si determinamos f experimentalmente, podemos usar una lente sin necesidad de conocer su índice de refracción o sus radios.

Para un rayo incidente paralelo al eje principal ($p = \infty$), el rayo incidente pasa por un punto F_i que tiene $q = -f$ y se denomina *foco imagen* o segundo punto focal. Por lo tanto, los dos focos de una lente delgada están simétricamente ubicados a ambos lados de la misma. Si f es positiva, la lente se llama *convergente*

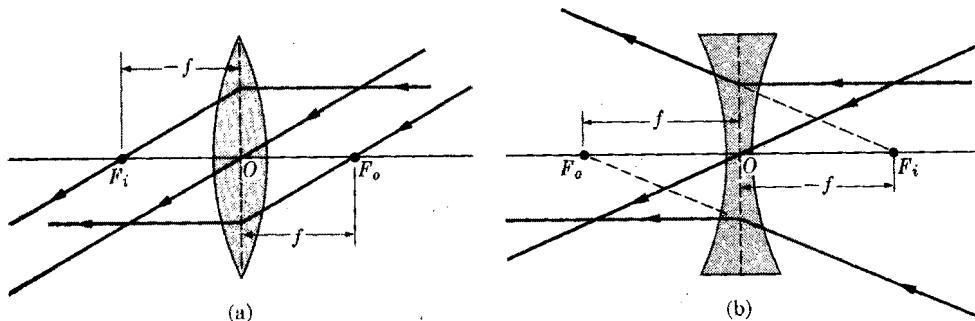


Fig. 21-14. Rayos principales para lentes (a) convergentes y (b) divergentes.

y si es negativa, *divergente*. Las convenciones de signos son las mismas que se dieron en la tabla 21-2 para una superficie esférica refringente.

A los fines del trazado de rayos, podemos representar una lente delgada mediante un plano perpendicular al eje principal y que pasa por O . La fig. 21-14 muestra la construcción de los rayos principales para una lente convergente y para una divergente; en la fig. 21-15 se han usado estos rayos para construir la imagen de un objeto en dos casos.

También aquí la teoría que hemos desarrollado es correcta en tanto los rayos tengan una inclinación muy pequeña, de modo que la aberración esférica sea despreciable. Para lentes de gran diámetro, la imagen de un punto no es un punto sino un segmento del eje principal. En particular, los rayos incidentes paralelos al eje principal se interceptan en puntos diferentes cuya posición depende de la distancia de los rayos al eje. La aberración esférica se mide entonces por la diferencia $f' - f$ entre la distancia focal para un rayo marginal y la de un rayo axial (fig. 21-16). Los rayos refractados se interceptan sobre una superficie cónica llamada *cáustica de refracción*.

EJEMPLO 21.7. Obtener una expresión para el aumento producido por una lente.

Solución: Como antes, se define el aumento por $M = ab/AB$. Pero en la fig. 21-17 tenemos, si O es el centro óptico de la lente, que $\tan \alpha = AB/OA$ y $\tan \alpha = ab/Oa$.

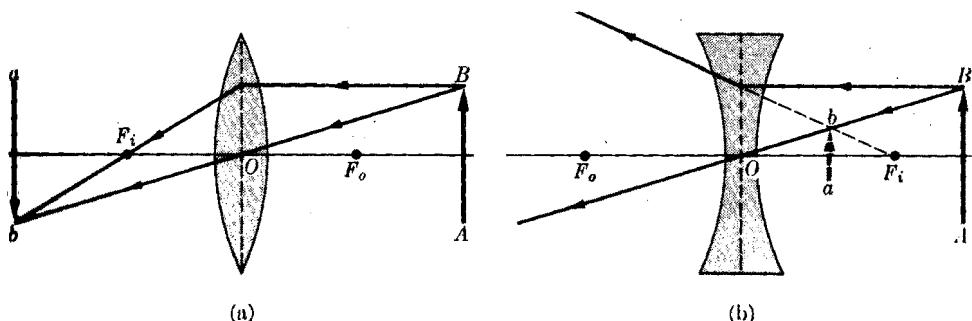


Fig. 21-15. Formación de imagen en una lente. (a) Convergente y (b) divergente.

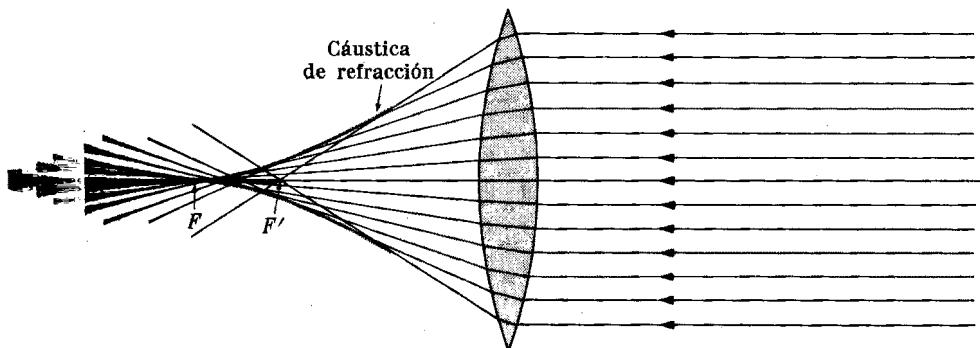


Fig. 21-16. Aberración esférica de una lente.

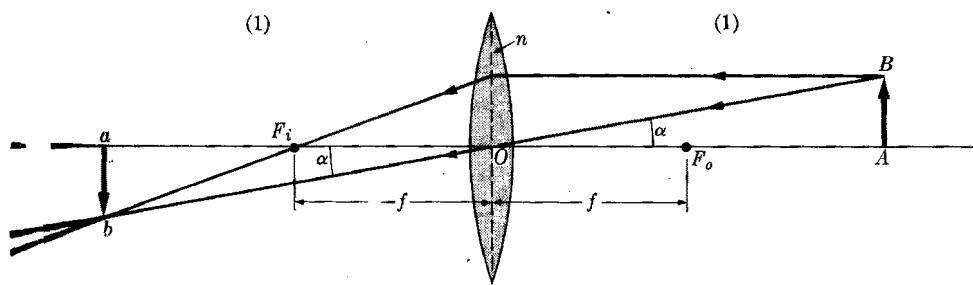


Fig. 21-17. Aumento producido por una lente.

Ambas relaciones son algebraicamente correctas, o sea en valor absoluto y en signo. Por lo tanto $ab/AB = Oa/OA$, por lo que

$$M = q/p.$$

Esta relación se podría haber obtenido usando el resultado del ejemplo 21.5 correspondiente a una superficie esférica refringente, ya que, de acuerdo con la fig. 21-12, el aumento producido por la refracción en la primera superficie es $M_1 = q'/np$ y el aumento producido por la refracción en la segunda superficie es $M_2 = nq/q'$. Por lo tanto el aumento total es

$$M = M_1 M_2 = \frac{q'}{np} \times \frac{nq}{q'} = \frac{q}{p}.$$

EJEMPLO 21.8. Una lente esférica tiene dos superficies convexas de radios 0,80 m y 1,20 m. Su índice de refracción es $n = 1,50$. Calcular su distancia focal y la posición de la imagen de un punto situado a 2,00 m. de la lente.

Solución: De acuerdo con las convenciones de signos de la tabla 21-2, debemos escribir $r_1 = O_1 C_1 = -0,80$ m y $r_2 = +1,20$ m, ya que (fig. 21-12) la primera superficie aparece convexa y la segunda cóncava vistas desde el lado del objeto que se encuentra a la derecha. Por lo tanto

$$\frac{1}{f} = (1,50 - 1) \left(\frac{1}{1,20} - \frac{1}{-0,80} \right) \quad 6 \quad f = +0,96 \text{ m.}$$

El hecho de que f sea positivo indica que se trata de una lente convergente. Para obtener la posición de la imagen empleamos la ec. (21.19) con $p = 2,00\text{ m}$ y el valor de f obtenido, lo cual da

$$\frac{1}{2,00} - \frac{1}{q} = \frac{1}{0,96} \quad \delta \quad q = -1,81\text{ m.}$$

El signo negativo de q indica que la imagen es real y está por lo tanto a la izquierda de la lente. Finalmente, el aumento es

$$M = q/p = -0,905.$$

En vista del signo negativo, la imagen debe estar invertida y, como M es menor que la unidad, también será ligeramente menor que el objeto.

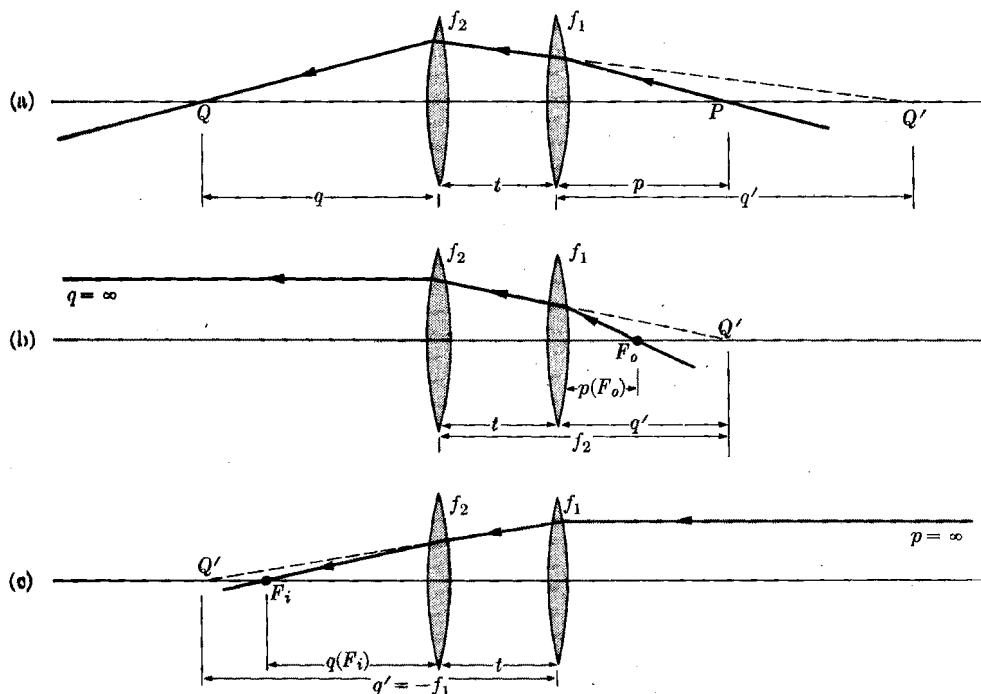


Fig. 21-18. Sistema de dos lentes delgadas.

EJEMPLO 21.9. Determinar las posiciones de los focos de un sistema de dos lentes delgadas separadas por una distancia t .

Solución: El sistema de lentes delgadas ilustrado en la fig. 21-18 muestra en (a) el camino seguido por un rayo que pasa por el punto P . La imagen de P producida por la primera lente es Q' . Llámemos p a la distancia del objeto a la primera lente. La posición de Q' se determina entonces por

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{q'} = \frac{1}{f_1}.$$

El punto Q' hace las veces de objeto para la segunda lente, la cual produce una imagen final en Q . Como la distancia de Q' a la segunda lente es $q' + t$, tenemos que

$$\frac{1}{q' + t} - \frac{1}{q} = \frac{1}{f_2},$$

donde q es la distancia de la imagen final a la segunda lente. Este sistema de ecuaciones nos permite obtener la posición de la imagen correspondiente a cualquier posición del objeto.

El foco objeto F_o (fig. 21-18b) del sistema de lentes es la posición del objeto para la cual la imagen Q está en el infinito ($q = \infty$). Llamando $p(F_o)$ a la distancia de F_o a la primera lente, tenemos según la segunda relación que $q' = f_2 - t$; sustituyendo este valor en la primera relación se obtiene

$$p(F_o) = \frac{f_1(f_2 - t)}{f_1 + f_2 - t}.$$

Análogamente, para obtener la posición $q(F_i)$ del foco imagen F_i (fig. 21-18c), hacemos $p = \infty$, resultando

$$q(F_i) = -\frac{f_2(f_1 - t)}{f_1 + f_2 - t}.$$

Un caso importante es cuando las lentes están en contacto por lo que se puede despreciar t . Entonces la ecuación que relaciona q' y q se convierte en

$$\frac{1}{q'} - \frac{1}{q} = \frac{1}{f_2},$$

la cual, combinada con la primera ecuación, da

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}.$$

Este resultado muestra que un sistema de dos lentes delgadas en contacto es equivalente a una sola lente de distancia focal dada por

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}.$$

Se puede obtener el mismo resultado haciendo $t = 0$ en la expresión de $p(F_o)$.

21.5 Instrumentos ópticos

El trazado de rayos en sistemas de lentes y espejos es particularmente importante para el diseño de instrumentos ópticos. Estudiaremos dos de los más importantes: el microscopio y el telescopio.

(a) *El microscopio*. Un microscopio es un sistema de lentes que produce una imagen virtual aumentada de un pequeño objeto. El microscopio más simple es una lente convergente, llamada comúnmente *lupa*. El objeto AB (fig. 21-19) se coloca entre la lente y el foco F_o de modo que la imagen es virtual y está a una distancia q igual a la distancia mínima δ de visión nítida que, para una persona normal, es de alrededor de 25 cm. Como p es casi igual a f , especialmente si f

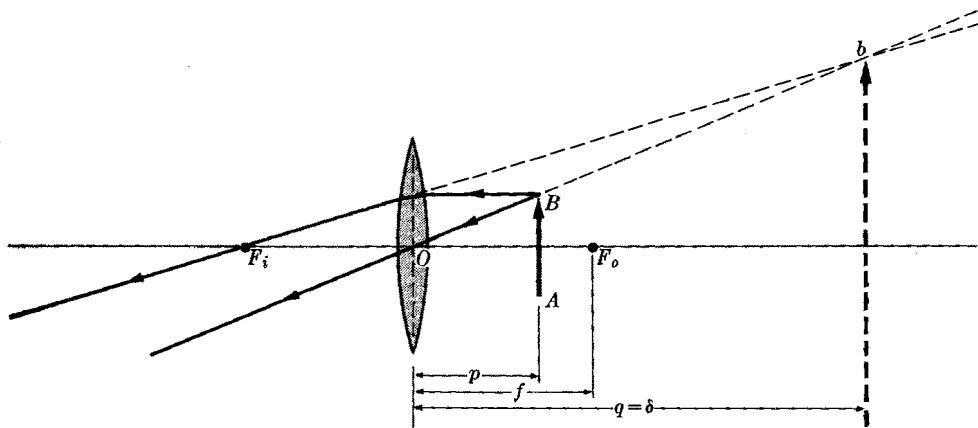


Fig. 21-19. Trazado de rayos en una lupa.

es muy pequeña, podemos escribir para el aumento

$$M = \frac{q}{p} \approx \frac{\delta}{f}. \quad (21.20)$$

El *microscopio compuesto* es más elaborado (fig. 21-20). Consiste en dos lentes convergentes de pequeña distancia focal, llamadas el *objetivo* y el *ocular*. La distancia focal f del objetivo es mucho menor que la distancia focal f' del ocular. Tanto f como f' son mucho menores que la distancia entre el objetivo y el ocular. El objeto AB se coloca a una distancia del objetivo ligeramente mayor que f . El objetivo forma una primera imagen real $a'b'$ que hace de objeto para el ocular. La imagen $a'b'$ debe estar a una distancia del ocular ligeramente menor que f' . La imagen final ab es virtual, invertida y mucho mayor que el objeto. El objeto AB

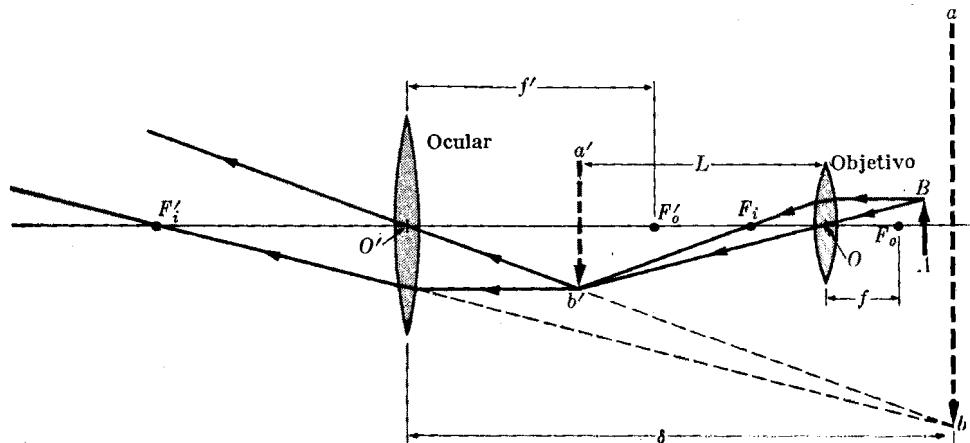


Fig. 21-20. Trazado de rayos en un microscopio compuesto.

se coloca de manera tal que ab esté a una distancia del ocular igual a la distancia mínima δ de visión nítida (alrededor de 25 cm). Esta condición se obtiene mediante la operación de *enfoque*, que consiste en mover todo el microscopio respecto al objeto. El aumento debido al objetivo es

$$M_O = \frac{a'b'}{AB} \approx \frac{L}{f},$$

y el debido al ocular es

$$M_E = \frac{ab}{a'b'} \approx \frac{\delta}{f'}.$$

Por lo tanto el aumento total es

$$M = M_O M_E = \frac{ab}{AB} = \frac{\delta L}{ff'}. \quad (21.21)$$

En los microscopios, L es prácticamente igual a la distancia entre el objetivo y el ocular.

El aumento útil de un microscopio está limitado por su *poder resolvente*, es decir, la distancia mínima entre dos puntos del objeto que se pueden distinguir

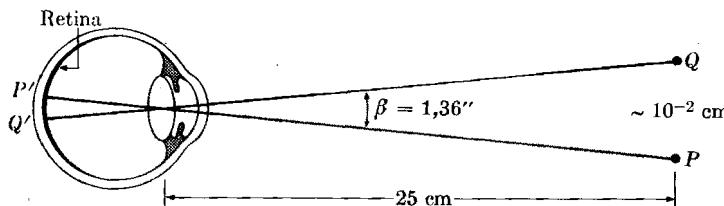


Fig. 21-21. Poder de resolución del ojo.

en la imagen. El poder resolvente está a su vez determinado por la difracción en el objetivo. Un cálculo detallado que no se dará aquí, da para el poder resolvente

$$R = \frac{\lambda}{2n \sin \theta}, \quad (21.22)$$

donde λ es la longitud de onda, n el índice de refracción del medio en el cual el objeto está sumergido y θ es el ángulo que un rayo marginal forma con el eje del microscopio. En general $2n \sin \theta$ vale alrededor de tres, por lo que $R \approx \frac{1}{3}\lambda$. Por otra parte, el poder resolvente del ojo es alrededor de 10^{-2} cm para un objeto situado a unos 25 cm (fig. 21-21). En consecuencia, el aumento útil máximo es

$$M = \frac{10^{-2} \text{ cm}}{\frac{1}{3}\lambda} \approx \frac{3 \times 10^{-2} \text{ cm}}{\lambda}.$$

Por ejemplo, para la luz con $\lambda = 5 \times 10^{-7}$ m, que corresponde aproximadamente al centro del espectro visible, M es alrededor de 600. Se puede mejorar el aumento con radiación de longitud de onda más corta, pero entonces puede estar fuera del espectro visible.

(b) *El telescopio.* Otro instrumento óptico importante es el telescopio, utilizado para observar objetos muy distantes. En el *telescopio de refracción*, el objetivo (fig. 21-22) es una lente convergente de distancia focal f muy grande, a veces de varios metros. Como el objeto AB es muy distante, su imagen $a'b'$ producida por el objetivo, está en su foco F_o . Sólo hemos indicado los rayos centrales Bb' y Aa' ya que es todo lo que necesitamos porque conocemos la posición de la imagen.

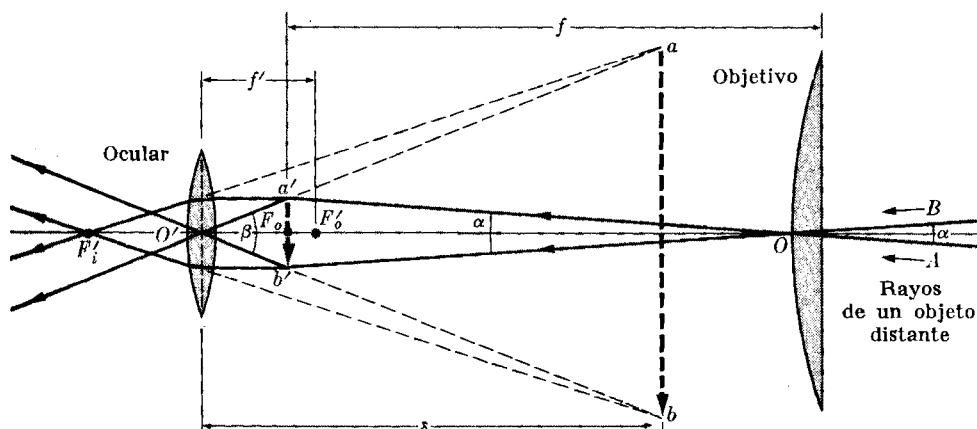


Fig. 21-22. Trazado de rayos en un telescopio de refracción.

El ocular también es una lente convergente pero de distancia focal f' mucho menor. Se coloca de forma tal que la imagen intermedia $a'b'$ esté entre O' y F'_o y la imagen final ab esté a la distancia mínima de visión nítida. El enfoque se realiza moviendo el ocular solamente, ya que nada se gana en este caso moviendo el objetivo.

El aumento producido por este instrumento no es lineal porque la imagen es siempre menor que el objeto. En su lugar, se define un aumento angular, es decir el cociente entre el ángulo β subtendido por la imagen y el ángulo α subtendido por el objeto. En fórmulas

$$M = \beta/\alpha. \quad (21.23)$$

A causa de la proximidad de la imagen, el ángulo β es mucho mayor que α , siendo esto lo que crea la sensación de aumento. De acuerdo con la figura y teniendo en cuenta que los ángulos α y β son pequeños, podemos escribir

$$\alpha \approx \operatorname{tg} \alpha = \frac{a'b'}{f}, \quad \beta \approx \operatorname{tg} \beta \approx \frac{a'b'}{f'},$$

porque la distancia de $a'b'$ a O' es prácticamente f' . Sustituyendo en la ec. (21.23), tenemos

$$M = f/f'. \quad (21.24)$$

En consecuencia, para obtener un gran aumento, la distancia focal del objetivo debe ser muy grande y la del ocular muy pequeña. Prácticamente, la longitud del instrumento está determinada por la distancia focal f del objetivo.

El aumento del telescopio astronómico está limitado por el poder resolvente del objetivo y el del ojo del observador. Para un objetivo cuyo diámetro es D , el poder resolvente (es decir el mínimo ángulo subtendido por dos puntos del objeto que se pueden distinguir en la imagen $a'b'$) es, como se mostrará en la ec. (23.12),

$$\alpha \approx 1,22 \frac{\lambda}{D}. \quad (21.25)$$

Por otra parte, el poder resolvente del ojo (fig. 21-21) es, expresado en función de un ángulo,

$$\beta = \frac{10^{-2} \text{ cm}}{25 \text{ cm}} = 4 \times 10^{-4} \text{ rad} = 1,36''. \quad (21.26)$$

Por lo tanto el aumento útil máximo de un telescopio es

$$M = \frac{4 \times 10^{-4} D}{1,22\lambda} \approx 3,3 \times 10^{-4} \frac{D}{\lambda}. \quad (21.26)$$

Un aumento mayor significa, bien un valor menor de α , que implica menor detalle en la imagen, bien un valor mayor de β , lo cual esencialmente no revela nuevos detalles en la imagen final ab pues los mismos no estaban en la imagen intermedia $a'b'$. Por ejemplo, para luz de $\lambda = 5 \times 10^{-7} \text{ m}$ tenemos $M \approx 660D$, donde D está en metros. En consecuencia, podemos incrementar el aumento incrementando el diámetro D del objetivo. Por ejemplo, en el telescopio de Yerkes, que es el mayor telescopio de refracción, D es de alrededor de 1 m resultando un aumento de alrededor de 660 y un poder resolvente de 10^{-2} segundos de arco.

En el telescopio de reflexión, el objetivo es un espejo parabólico cóncavo que forma en un foco una imagen libre de aberración esférica. El mayor telescopio de reflexión es el de Mount Palomar. Tiene un diámetro de cerca de 5 m y un aumento del orden de 3500.

Los instrumentos ópticos son mucho más complicados que la versión simplificada que hemos presentado, principalmente por la necesidad de producir una imagen tan desprovista de aberraciones como sea posible. Por esa razón los oculares están compuestos de varias lentes y los objetivos de microscopio son sistemas de lentes muy complejos.

21.6 El prisma

Un prisma es un medio limitado por dos superficies planas que forman un ángulo A (fig. 21.23). Suponemos que el medio tiene un índice de refracción n y que está rodeado de un medio cuyo índice de refracción es la unidad, por ejemplo el aire.

Un rayo incidente tal como PQ sufre dos refracciones y emerge desviado un ángulo δ respecto a la dirección incidente. Se puede ver fácilmente en la figura que valen las siguientes relaciones:

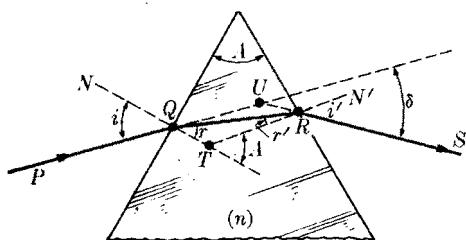


Fig. 21-23. Camino de un rayo a través de un prisma.

cuarta usando el triángulo QRU . Las tres primeras ecuaciones sirven para trazar el rayo y la cuarta nos permite hallar la desviación.

Hay un rayo particular para el cual la desviación es mínima; se obtiene haciendo $d\delta/di = 0$. De la ec. (21.30) obtenemos

$$\frac{d\delta}{di} = 1 + \frac{di'}{di},$$

y para que $d\delta/di = 0$ debemos tener

$$\frac{di'}{di} = -1. \quad (21.31)$$

De las ecs. (21.28) y (21.29) tenemos

$$\cos i \, di = n \cos r \, dr, \quad \cos i' \, di' = n \cos r' \, dr', \quad dr = -dr'.$$

En consecuencia

$$\frac{di'}{di} = -\frac{\cos i \cos r'}{\cos i' \cos r}. \quad (21.32)$$

Como los cuatro ángulos i , r , i' y r' son menores que $\frac{1}{2}\pi$ y satisfacen las condiciones simétricas (21.27) y (21.28), se pueden satisfacer simultáneamente las ecs. (21.31) y (21.32) solamente si $i = i'$ y $r = r'$, para lo cual debe ser

$$i = \frac{1}{2}(\delta_{\min} + A), \quad r = \frac{1}{2}A, \quad (21.33)$$

donde δ_{\min} es el valor de la desviación mínima. Nótese que en este caso el camino del rayo es simétrico respecto a las dos caras del prisma. Introduciendo la ec. (21.33) en la ec. (21.27) obtenemos

$$n = \frac{\sin \frac{1}{2}(\delta_{\min} + A)}{\sin \frac{1}{2}A}, \quad (21.34)$$

que es una fórmula conveniente para medir el índice de refracción de una sustancia hallando δ_{\min} experimentalmente en un prisma de ángulo A conocido.

$$\text{sen } i = n \text{ sen } r, \quad (21.27)$$

$$\text{sen } i' = n \text{ sen } r', \quad (21.28)$$

$$r + r' = A, \quad (21.29)$$

$$\delta = i + i' - A. \quad (21.30)$$

La primera y segunda ecuaciones son simplemente la ley de Snell aplicada a las refracciones en Q y en R . La tercera se obtiene usando el triángulo QTR y la

21.7 Dispersión de un medio

Cuando una onda se refracta en un medio dispersivo cuyo índice de refracción depende de la frecuencia (o de la longitud de onda), el ángulo de refracción también dependerá de la frecuencia o longitud de onda. Si la onda incidente, en vez de ser armónica (o monocromática) se compone de varias frecuencias o longitudes de onda superpuestas, cada longitud de onda componente se refractará según un ángulo diferente; este fenómeno se denomina *dispersión*. (En la sección 19.13 introdujimos el tema de la dispersión de ondas en la materia.)

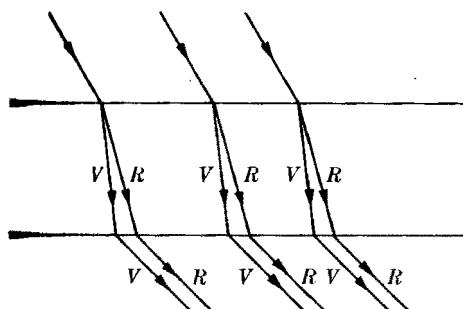


Fig. 21-24. Dispersión cuando la luz pasa a través de una placa de caras paralelas.

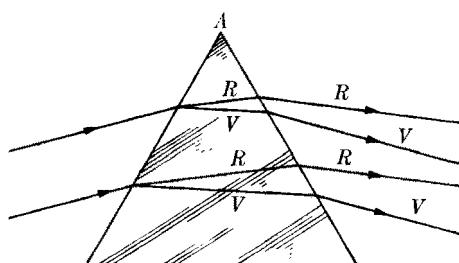


Fig. 21-25. Dispersión cuando la luz pasa a través de un prisma.

Recordamos al estudiante que los colores están asociados con intervalos de longitudes de onda. Por lo tanto la luz blanca se descompone en colores cuando se refracta al pasar del aire a otra sustancia como el agua o el vidrio. En un pedazo de vidrio en forma de placa de caras paralelas, los rayos emergentes son paralelos, y los diferentes colores se superponen nuevamente (fig. 21-24) y no se

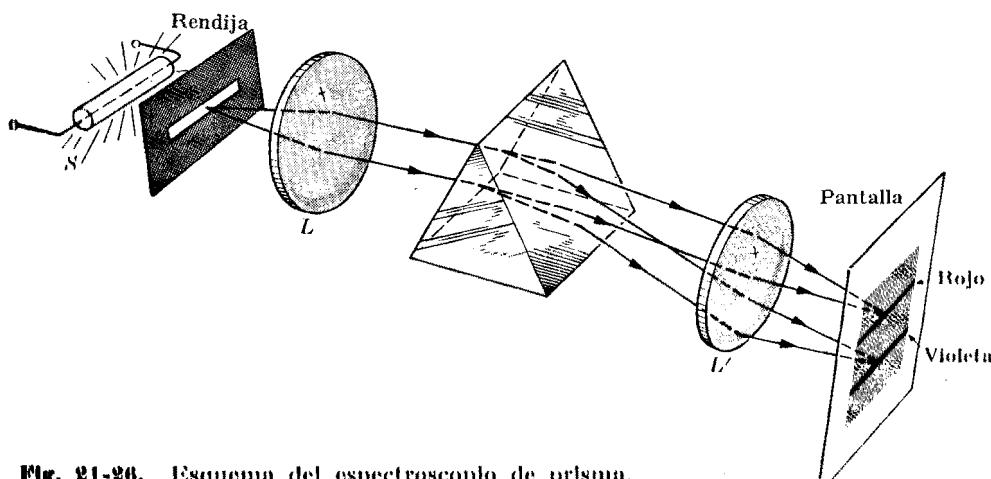


Fig. 21-26. Esquema del espectroscopio de prisma.

observa dispersión excepto en el borde mismo de la imagen. Aún así, este efecto no es notable normalmente.

Pero si la luz pasa a través de un prisma (fig. 21-25), los rayos emergentes no son paralelos para los diferentes colores y la dispersión es más notable, especialmente en los bordes. De ahí que los prismas se usen extensivamente para analizar la luz en los instrumentos llamados *espectroscopios*. En la fig. 21-26 se ilustra un tipo simple de espectroscopio. La lente L transforma en rayos paralelos la luz emitida por una fuente S y limitada por una rendija. Después de dispersados por el prisma, los rayos correspondientes a los diferentes colores pasan por otra lente L' . Como todos los rayos del mismo color (misma longitud de onda) son paralelos, se enfocan en el mismo punto de la pantalla. Pero los rayos que difieren en color (o longitud de onda) no son paralelos, por lo que colores diferentes son enfocados en puntos diferentes de la pantalla. Los diferentes colores o longitudes de onda emitidos por la fuente S aparecen desplegados en la pantalla formando lo que se denomina el *espectro* de la luz proveniente de S . Si la desviación δ varía rápidamente con la longitud de onda λ , los colores aparecen muy espaciados en la pantalla. Para cada longitud de onda aparece sobre la pantalla una linea que es la *imagen de la rendija*.

Se define la dispersión de un prisma por

$$D = \frac{d\delta}{d\lambda} = \frac{d\delta}{dn} \frac{dn}{d\lambda}. \quad (21.35)$$

El factor $d\delta/dn$ depende fundamentalmente de la geometría del sistema, mientras que el factor $dn/d\lambda$ depende del material de que está compuesto el prisma. Derivando las ecs. (21.27) a (21.30) con respecto al índice de refracción n encontramos que

$$0 = \operatorname{sen} r + n \cos r \frac{dr}{dn},$$

$$\cos i' \frac{di'}{dn} = \operatorname{sen} r' + n \cos r' \frac{dr'}{dn},$$

$$\frac{dr}{dn} + \frac{dr'}{dn} = 0,$$

y

$$\frac{d\delta}{dn} = \frac{di'}{dn}.$$

Si combinamos estos cuatro resultados y utilizamos la ec. (21.29), obtenemos finalmente

$$\frac{d\delta}{dn} = \frac{di'}{dn} = \frac{\operatorname{sen} A}{\cos i' \cos r}.$$

Si se orienta el prisma para obtener desviación promedio mínima, tenemos

$$\frac{d\delta}{dn} = \frac{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}A}{\cos \frac{1}{2}(\delta_{\min} + A)}.$$

El segundo factor $dn/d\lambda$ en la ec. (21.35) depende de la naturaleza de las ondas y del medio. Para las ondas electromagnéticas en general y para la luz en particular, una expresión aproximada y satisfactoria para el índice de refracción en función de la longitud de onda está dada por la *fórmula de Cauchy*,

$$n = A + \frac{B}{\lambda^2}, \quad (21.36)$$

donde A y B son constantes características de cada sustancia (ver el ejemplo 21.10). En la fig. 21.27 se muestra la variación de n con λ para diversos materiales transparentes en la región óptica. De la ec. (21.36) obtenemos

$$\frac{dn}{d\lambda} = -\frac{2B}{\lambda^3}.$$

La dispersión en un prisma es entonces

$$D = -\frac{d\theta}{d\lambda} = \frac{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}A}{\cos \frac{1}{2}(\delta_{\min} + A)} \left(-\frac{2B}{\lambda^3} \right). \quad (21.37)$$

El signo negativo significa que la desviación disminuye cuando la longitud de onda aumenta, de modo que el rojo se desvía menos que el violeta.

EJEMPLO 21.10. Justificación de la fórmula de Cauchy.

Solución: En la ec. (19.58) obtuvimos una expresión que da el índice de refracción en función de la frecuencia de las ondas electromagnéticas y las frecuencias características de la sustancia. Suponiendo para simplificar que hay una sola frecuencia atómica ω_0 y que $\omega \ll \omega_0$, obtenemos

$$n^2 = 1 + \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m(\omega_0^2 - \omega^2)},$$

de modo que, usando el desarrollo binomial (M.28), obtenemos

$$\begin{aligned} n &= \left(1 + \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m(\omega_0^2 - \omega^2)} \right)^{1/2} = 1 + \frac{Ne^2}{2\epsilon_0 m(\omega_0^2 - \omega^2)} \\ &= 1 + \frac{Ne^2}{2\epsilon_0 m\omega_0^2} \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right)^{-1} \\ &= 1 + \frac{Ne^2}{2\epsilon_0 m\omega_0^2} \left(1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right). \end{aligned}$$

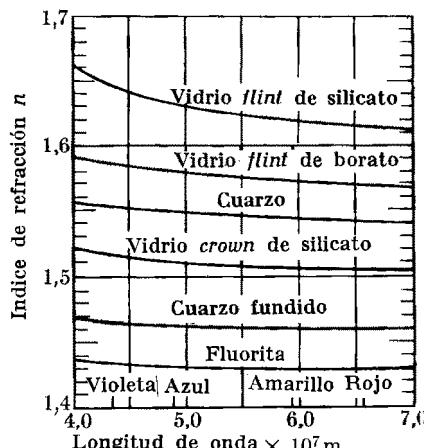


Fig. 21-27. Variación del índice de refracción con la longitud de onda en la región visible, para algunos materiales.

Y, como $\omega = 2\pi c/\lambda$, tenemos

$$n = A + \frac{B}{\lambda^2},$$

donde

$$A = 1 + \frac{Ne^2}{2\epsilon_0 m \omega_0^2} \quad \text{y} \quad B = \frac{2\pi^2 c^2 N e^2}{\epsilon_0 m \omega_0^4}.$$

Sugerimos que el estudiante determine el orden de magnitud de A y de B .

21.8 Aberración cromática

Cuando luz compuesta de varias longitudes de onda (tal como la luz blanca) pasa a través de una lente, sufre dispersión y los bordes de la imagen producida por la lente aparecen coloreados. Este efecto se denomina *aberración cromática*. Es fácil comprender el origen de este efecto si nos damos cuenta que una lente es equivalente a dos prismas unidos por sus bases (para una lente convergente) o por sus vértices (para una lente divergente).

Una lente tiene un foco para cada color o longitud de onda. Esto se ve en la ec. (21.28), ya que f está determinado por el índice de refracción n y éste depende de la longitud de onda. Para sustancias transparentes cuyo índice de refracción disminuye al aumentar la longitud de onda en la región visible (ver fig. 21-27), el violeta tiene una distancia focal más corta que el rojo. En la fig. 21-28 se muestra

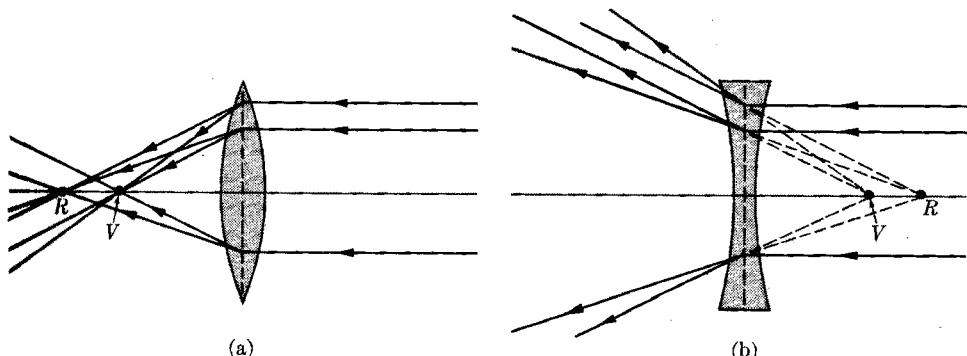


Fig. 21-28. Aberración cromática en lentes. (a) Lente convergente y (b) divergente.

la aberración cromática de una lente convergente y de una divergente para tal tipo de material.

Se define la aberración cromática de una lente por la diferencia $f_C - f_F$ entre las distancias focales correspondientes a las longitudes de onda $6,563 \times 10^{-7}$ m y $4,862 \times 10^{-7}$ m, emitidas por el hidrógeno y que se denominan líneas C y F de Fraunhofer. Luego, empleando la ec. (21.18), tenemos

$$\frac{1}{f_C} = (n_C - 1) \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) \quad \text{y} \quad \frac{1}{f_F} = (n_F - 1) \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right),$$

y por lo tanto

$$\frac{1}{f_F} - \frac{1}{f_C} = (n_F - n_C) \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right). \quad (21.38)$$

Ahora bien, la línea D de Fraunhofer, con longitud de onda $5,890 \times 10^{-7}$ m, corresponde aproximadamente al índice de refracción medio, que se designa con n_D . Luego

$$\frac{1}{f_D} = (n_D - 1) \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right).$$

Utilizando la expresión anterior, podemos eliminar la dependencia de los radios de la lente en la ec. (21.38) y escribir

$$\frac{1}{f_F} - \frac{1}{f_C} = \frac{n_F - n_C}{n_D - 1} \frac{1}{f_D}.$$

Pero se puede escribir el segundo miembro en la forma

$$\frac{f_C - f_F}{f_C f_F} \approx \frac{f_C - f_F}{f_D^2},$$

ya que $f_C f_F \approx f_D^2$ aproximadamente. Por lo tanto la aberración cromática longitudinal de la lente es

$$A = f_C - f_F = \frac{n_F - n_C}{n_D - 1} f_D. \quad (21.39)$$

TABLA 21-3 Índices de refracción y poder dispersivo

Linea de Fraunhofer	C	D	F	Poder dispersivo, ω
Longitud de onda $\times 10^7$ (m)	6,563	5,890	4,862	
vidrio "crown"	1,514	1,517	1,524	0,0193
vidrio "flint"	1,622	1,627	1,639	0,0271
alcohol	1,361	1,363	1,367	0,0165
benceno	1,497	1,503	1,514	0,0338
agua	1,332	1,334	1,338	0,0180

La cantidad

$$\omega = \frac{f_C - f_F}{f_D} = \frac{n_F - n_C}{n_D - 1} \quad (21.40)$$

se denomina *poder dispersivo* del material. La tabla 21-3 da los índices de refracción de algunos materiales transparentes para las líneas C, D y F de Fraunhofer.

El tipo de aberración cromática que hemos estudiado hasta ahora para las lentes se denomina *longitudinal* porque se mide a lo largo del eje principal. Hay también una aberración cromática *transversal*. Consideremos un objeto *AB* frente a una lente *L* (fig. 21-29). A menos que la luz proveniente del objeto sea monocromática, habrá dispersión al pasar por la lente y en vez de una imagen, se formará una serie de imágenes de diferente tamaño, una para cada longitud de onda o color. La figura muestra sólo las imágenes extremas, correspondientes al rojo

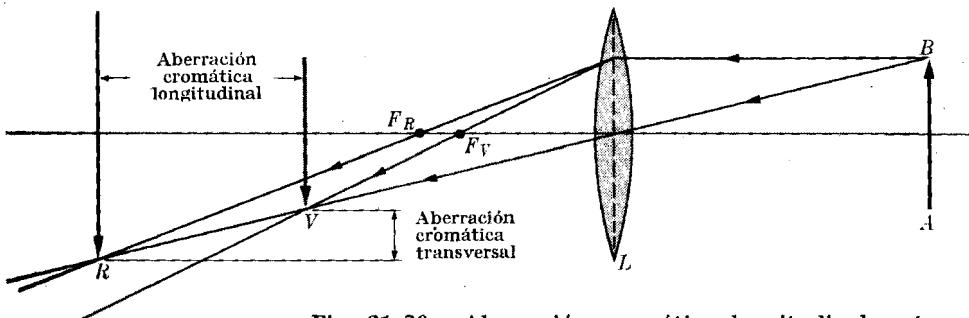


Fig. 21-29. Aberración cromática longitudinal y transversal en una lente.

y al violeta, y su separación está muy exagerada. Es por esta dispersión lateral que los bordes de la imagen aparecerán coloreados. Se puede expresar la aberración cromática transversal en función de los aumentos diferentes para las líneas C y F.

EJEMPLO 21.11. Estudio de sistemas acromáticos.

Solución: Se puede reducir y aún eliminar la aberración cromática combinando lentes de materiales diferentes en lo que se denomina *sistema acromático*. Para ver cómo se puede hacer esto, supongamos que tenemos el sistema de lentes de la fig. 21-30 donde, por ejemplo, la lente *L* está hecha de vidrio "crown" y la lente *L'* de vidrio "flint". Llámemos f y f' a sus respectivas distancias focales, y ω y ω' a sus respectivos poderes dispersive. La lente *L* tendría la aberración cromática indicada por el segmento VR . Pero si se diseña la lente divergente *L'* en forma apropiada, los rayos correspondientes a todas las longitudes de onda se enfocarán en *F*. Para

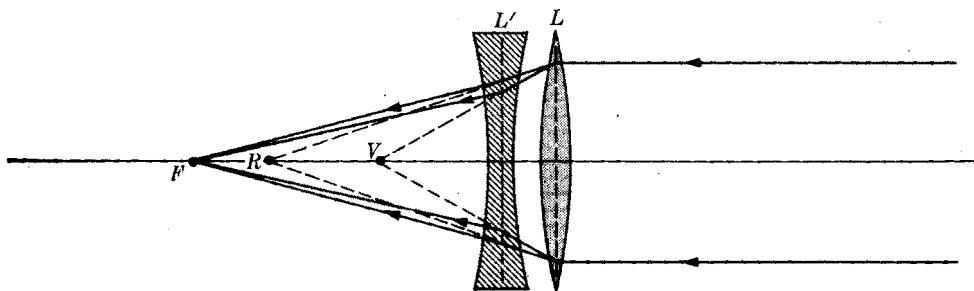


Fig. 21-30. Sistema acromático de lentes.

Ver cómo se hace esto, recordemos del ejemplo 21.9 que para cada longitud de onda

$$\frac{1}{F_C} = \frac{1}{f_C} + \frac{1}{f'_C}, \quad \frac{1}{F_F} = \frac{1}{f_F} + \frac{1}{f'_F},$$

donde F_C y F_F son las correspondientes distancias focales de la combinación de lentes. Luego, restando estas dos ecuaciones y recordando que $F_C F_F \approx F_D^2$, etc., tenemos

$$\frac{F_C - F_F}{F_D^2} = \frac{f_C - f_F}{f_D^2} + \frac{f'_C - f'_F}{f_D^2} = \frac{\omega}{f_D} + \frac{\omega'}{f_D}.$$

Para que no haya aberración cromática longitudinal debemos tener $F_C - F_F = 0$, de modo que

$$\frac{\omega}{f_D} + \frac{\omega'}{f_D} = 0. \quad (21.41)$$

Como ω y ω' son positivos, concluimos que f_D y f'_D tienen signos opuestos. Por lo tanto una lente es convergente y la otra debe ser divergente.

EJEMPLO 21.12. Diseñar una lente acromática de 0,350 m de distancia focal y hecha de dos lentes: una de vidrio *crown* y la otra de vidrio *flint*.

Solución: Según los datos de la tabla 21-3, el poder dispersive del vidrio *crown* es 0,0193 y el del vidrio *flint* 0,0271. En consecuencia, la condición de acromaticidad impuesta por la ec. (21.14) se expresa por

$$\frac{0,0193}{f_1} + \frac{0,0271}{f_2} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{f_2}{f_1} = -1,402.$$

Utilizando el resultado del ejemplo 21.9 con $F = +0,35$ m, se impone la segunda condición

$$\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} = \frac{1}{0,350}.$$

Combinando estas dos ecuaciones, obtenemos

$$f_1 = +0,1007 \text{ m}, \quad f_2 = -0,1414 \text{ m}.$$

Por lo tanto la lente de *crown* es convergente y la de *flint* divergente. Suponiendo que el sistema es planoconvexo, correspondiendo la cara plana a la lente de *flint*, y empleando la ec. (21.18) con el valor n_D para el índice de refracción, tenemos que el radio de la cara común a las dos lentes es 0,089 m y que el radio de la otra cara de la lente de *crown* es 0,126 m.

21.9 Principio de Fermat del tiempo estacionario

En este capítulo y en los precedentes hemos basado nuestro estudio de la reflexión y de la refracción, bien en el teorema de Malus, bien en las condiciones de contorno en las superficies de separación entre los dos medios. En la geometría de ondas, por otro lado, hay un tercer principio, no relacionado directamente con los otros dos, que da el camino de un rayo en un medio no homogéneo. Fue sugerido por

el matemático francés Pierre de Fermat (1601-1665). El principio de Fermat se puede enunciar en la siguiente forma:

Al pasar de un punto a otro, el rayo elige el camino para el cual el tiempo de propagación es mínimo.

Consideremos, por ejemplo, un medio estratificado como el estudiado en la sección 20.13. El camino real, que se calcula utilizando la ec. (20.32), está representado por la línea (1) en la fig. 21-31(a). La línea (2) representa otro camino arbitrario. No es un camino físico porque no se satisface la ley de Snell en el límite entre dos superficies. Podemos calcular los tiempos necesarios para que el rayo de luz recorra el camino físico (1) y el camino arbitrario (2) si conocemos la lon-

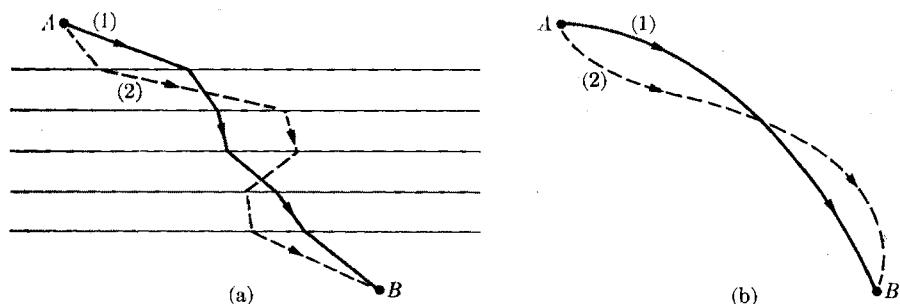


Fig. 21-31. Comparación entre el camino físico de la luz entre dos puntos y un camino cercano pero no físico.

gitud de cada segmento de camino y la velocidad de propagación en cada medio. El principio de Fermat exige que el tiempo de recorrido del camino físico sea menor que el tiempo necesario para recorrer cualquier camino vecino arbitrario y no físico, es decir que $t_1 < t_2$. Si en vez de un medio estratificado tenemos un medio no homogéneo (fig. 21-31b) en el cual (1) es el camino físico real del rayo y (2) es un camino vecino arbitrario y no físico, el principio de Fermat exige que $t_1 < t_2$.

Es evidente que el tiempo necesario para que el rayo vaya de A a B a lo largo de un camino es función de dicho camino, es decir que $t_{AB} = f(\text{camino})$. Este es un nuevo tipo de dependencia funcional, en el sentido de que las variables en la función f no son las coordenadas de un punto, sino los parámetros que definen un camino que une A y B . La condición de que t_{AB} sea mínimo se puede enunciar diciendo que $dt_{AB} = 0$ para una pequeña variación de los valores de los parámetros correspondientes al camino físico. Una técnica matemática especial conocida como cálculo de variaciones nos permite hallar los valores de los parámetros del camino que satisfacen $dt_{AB} = 0$ y de esta forma podemos determinar el camino del rayo.

No entraremos en más detalles acerca de cómo se puede usar el principio de Fermat para trazar el camino de un rayo en un medio no homogéneo, sino que sólo verificaremos que este principio es compatible con la ley de Snell. Considera-

mos la fig. 21-32, en la cual la superficie S separa dos medios de índices de refracción n_1 y n_2 . Un rayo que viaja de A a C sigue el camino ABC . Recordando, ec. (19.56), que $v = c/n$, el tiempo necesario para que la luz recorra este camino es

$$t = \frac{r_1}{v_1} + \frac{r_2}{v_2} = \frac{1}{c} (n_1 r_1 + n_2 r_2).$$

El principio de Fermat exige que

$$dt = \frac{1}{c} (n_1 dr_1 + n_2 dr_2) = 0, \quad (21.42)$$

donde dt es el incremento de t para caminos vecinos tales como el $AB'C$, que produce los correspondientes incrementos dr_1 y dr_2 en r_1 y r_2 respectivamente.

Ahora bien, teniendo en cuenta que

$r^2 = \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}$ tenemos que $r dr = \mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}$ o sea $dr = (\mathbf{r}/r) \cdot d\mathbf{r} = \mathbf{u} \cdot d\mathbf{r}$, donde $\mathbf{u} = \mathbf{r}/r$ es el versor en la dirección de \mathbf{r} . Por lo tanto $dr_1 = \mathbf{u}_1 \cdot d\mathbf{r}_1$ y $dr_2 = \mathbf{u}_2 \cdot d\mathbf{r}_2$. Pero $\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} = \text{const.}$ Luego, $d\mathbf{r}_1 + d\mathbf{r}_2 = 0$, o sea $d\mathbf{r}_2 = -d\mathbf{r}_1$, de modo que $dr_2 = -\mathbf{u}_2 \cdot d\mathbf{r}_1$. Entonces, la ec. (21.42) da (eliminando el factor constante $1/c$)

$$(n_1 \mathbf{u}_1 - n_2 \mathbf{u}_2) \cdot d\mathbf{r}_1 = 0. \quad (21.43)$$

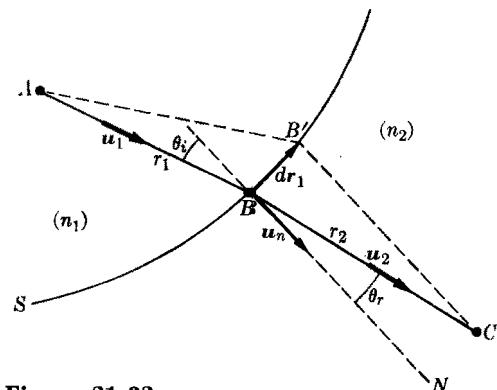


Figura 21-32

Ahora bien, el vector $d\mathbf{r}_1$ está, como se indica en la fig. 21-32, en el plano tangente a S en B . Esto significa, conforme a la ec. (21.43), que el vector $n_1 \mathbf{u}_1 - n_2 \mathbf{u}_2$ es paralelo a la normal \mathbf{u}_N a S en B , lo cual implica que el rayo incidente, el refractado y la normal a la superficie son coplanares, que es la primera ley enunciada en la sección 20-4. Recordemos de la sección 3.9 que si dos vectores son paralelos su producto vectorial es cero, de modo que

$$(n_1 \mathbf{u}_1 - n_2 \mathbf{u}_2) \times \mathbf{u}_N = 0 \quad ó \quad n_1 \mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_N = n_2 \mathbf{u}_2 \times \mathbf{u}_N. \quad (21.44)$$

Como todos los vectores que aquí aparecen son unitarios, la ec. (21.44) implica (en módulo) que $n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_r$, que es la ley de Snell, ec. (20.4).

EJEMPLO 21.13. Usar el principio de Fermat para estudiar la reflexión en una superficie esférica.

Solución: Si tenemos una fuente puntual P (fig. 21-33) frente a una superficie reflectora y queremos producir una imagen en Q , la forma de la superficie debe ser tal que, conforme al principio de Fermat, todos los rayos tarden el mismo tiempo en viajar de P a Q . (Notar que esto también lo exige el teorema de Malus.) El tiempo

necesario para que un rayo viaje a lo largo del eje principal es

$$t = \frac{1}{c} (OP + OQ). \quad (21.45)$$

Para un rayo que incide sobre la superficie en A tenemos que

$$t' = \frac{1}{c} (AP + AQ), \quad (21.46)$$

y debemos imponer que $t = t'$, al menos en el primer orden de aproximación. Obsérvese que esto es imposible si la superficie es plana (tal como OY) porque si A estuviera sobre OY , siempre $AP > OP$ y $AQ > OQ$, resultando $t' > t$. Pero curvando la superficie, se puede ajustar tanto AP como AQ para que valga $t = t'$. Veámos si esto es posible con una superficie esférica. La condición $t = t'$ exige que

$$AP + AQ = OP + OQ. \quad (21.47)$$

En el triángulo ABP tenemos

$$h^2 = AP^2 - BP^2 = (AP - BP)(AP + BP).$$

Pero si A está suficientemente cerca de O , tenemos que AP es ligeramente mayor que OP y BP ligeramente menor. Luego, podemos escribir $AP + BP = 2OP = 2p$ con buena aproximación. En consecuencia

$$AP = BP + \frac{h^2}{2p}.$$

Análogamente,

$$AQ = BQ + \frac{h^2}{2q}.$$

Sustituyendo estas ecuaciones en la ec. (21.47), encontramos que

$$\left(BP + \frac{h^2}{2p} \right) + \left(BQ + \frac{h^2}{2q} \right) = OP + OQ$$

o sea

$$\frac{h^2}{2p} + \frac{h^2}{2q} = (OP - BP) + (OQ - BQ) = 2OB. \quad (21.48)$$

Pero en el triángulo ABC tenemos que $OB = h^2/2r$, si despreciamos OB^2 frente a r^4 , lo cual es aceptable siempre que A esté cerca de O (todos los rayos sean par-

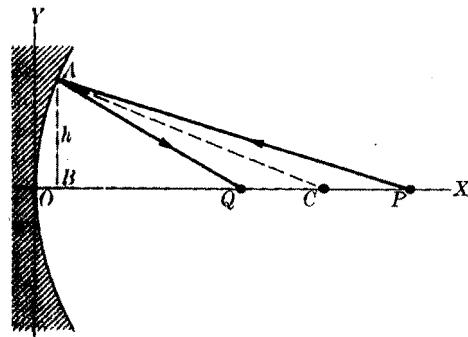


Figura 21-83

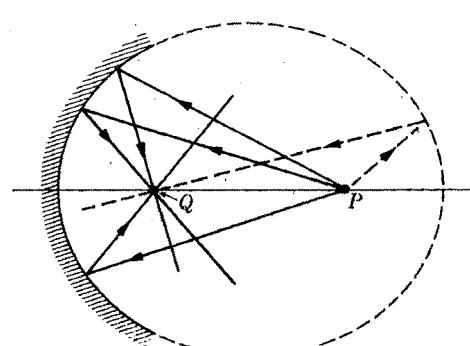


Fig. 21-84. Espejo elíptico.

~~xiales).~~ Luego, sustituyendo en la ec. (21.48) y eliminando el factor común $\frac{1}{h^2}$, obtenemos

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{2}{r}.$$

Esta es la fórmula de Descartes que obtuvimos por un método diferente en la sección 21.2.

El paso siguiente sería ver si, por medio de una superficie apropiada, pudiéramos satisfacer rigurosamente la ec. (21.47), por lo menos para un par de puntos P y Q . Notemos que en este caso la ec. (21.47) sería equivalente a $AP + AQ = \text{const.}$ Esta es la ecuación de un elipsoide de revolución cuyos focos están en P y Q , como se indica en la fig. 21-34; es la forma de la superficie reflectora para la cual la imagen de P es rigurosamente Q (es decir que no hay aberración esférica para este par de puntos). Para todo otro punto hay aberración esférica cuya magnitud depende de la distancia del punto a los dos puntos elegidos.

Bibliografía

1. "Ground-Based Astronomy", *Physics Today*, febrero 1965, pág. 19
2. "The 210-Foot Radio Telescope at Parkes", E. Bowen, *The Physics Teacher* 4, 99 (1966)
3. "Radio Astronomy", G. Swenson, Jr., *The Physics Teacher* 2, 271 (1964)
4. "Present-Day Photographic Lenses and Their Characteristics", G. Wallington, *The Physics Teacher* 2, 381 (1964)
5. "A Lens Forms Too Many Images!" A. King y N. Winsor, *Am. J. Physics* 32, 895 (1964)
6. "Experiments in Color Vision", E. Land, *Sci. Am.*, mayo 1959, pág. 84
7. "Fermat's Principle and Geometrical Optics", J. Shaw, *Am. J. Phys.* 33, 40 (1965)
8. *Light: Principles and Experiments*, G. Monk. Dover Press, New York, 1963, caps. 3, 7 y 8
9. *Fundamentos de óptica*, B. Rossi. Reverté, Barcelona, 1966, cap. 2
10. *The Feynman Lectures on Physics*, vol. I, R. Feynman, R. Leighton y M. Sands. Addison-Wesley, Reading, Mass., 1963, caps. 26 y 27
11. *Source Book in Physics*, W. F. Magie. Harvard University Press, Cambridge, Mass., 1963, pág. 278 (Fermat); pág. 298 (Newton); pág. 381 (Christiansen); pág. 382 (Kundt)

Problemas

21.1 Demostrar que cuando se rota un espejo plano en un ángulo, el rayo reflejado rota un ángulo doble, es decir $\beta = 2\alpha$ en la fig. 21-35.

21.2 Demostrar que si se desplaza un espejo plano paralelamente a sí mismo una distancia x según la normal, la imagen se mueve una distancia $2x$.

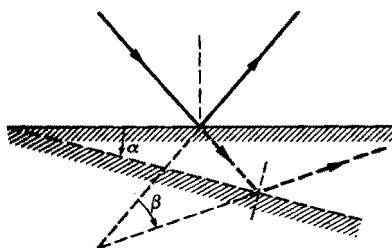


Figura 21-35

21.3 Un espejo cónico tiene un radio de 1,00 m. Hallar la posición de la imagen de un objeto y el aumento si el objeto está a una distancia del espejo igual a (a) 1,40 m, (b) 1,00 m, (c) 0,80 m, (d) 0,50 m y (e) 0,30 m. Considerar también un objeto virtual a una distancia de 0,60 m.

21.4 Un espejo convexo tiene un radio de 1,00 m. Hallar la posición de la imagen de un objeto y el aumento si la distancia del objeto al espejo es 0,60 m. Considerar también un objeto virtual a una distancia de (a) 0,20 m y (b) 0,80 m.

21.5 Determinar la distancia focal y la naturaleza de un espejo esférico si, a un objeto colocado a 1,20 m del espejo corresponde una imagen (a) real y a 0,80 m del espejo, (b) virtual y a 3,20 m del espejo, (c) virtual y a 0,60 m del espejo, (d) real y dos veces mayor, (e) virtual y dos veces mayor, (f) real y tres veces menor y (g) virtual y tres veces menor.

21.6 Un espejo esférico cónico tiene un radio de 1,60 m. Hallar la posición del objeto si la imagen es (a) real y tres veces mayor, (b) real y tres veces menor y (c) virtual y tres veces mayor. Repetir el mismo problema para un espejo convexo.

21.7 Un espejo cónico para afeitarse tiene una distancia focal de 15 cm. Hallar la distancia óptica de una persona al espejo si la distancia de visión nítida es 25 cm. ¿Cuál es el aumento?

21.8 Un espejo cónico produce una imagen real invertida tres veces mayor que el objeto y a una distancia de 28 cm del objeto. Hallar la distancia focal del espejo.

21.9 Cuando un objeto inicialmente a 60 cm de un espejo cónico se acerca 10 cm a él, la distancia entre el objeto y su imagen se hace cinco medios mayor. Determinar la distancia focal del espejo.

21.10 Se define la aberración esférica de un espejo (esférico) como la diferencia entre la distancia focal f para un rayo cercano al eje del espejo y la distancia focal f' para un rayo cercano al borde. Demostrar que $f - f' \approx H^2/2r$, donde H es el radio de la base del espejo.

21.11 Un espejo cónico tiene un radio de 10 cm. La base del espejo tiene un radio de 8 cm. Hallar la aberración esférica del espejo y comparar con su distancia focal.

21.12 Un objeto se acerca a un espejo esférico con velocidad v . Hallar la velocidad de la imagen en función de la distancia p . Representar la velocidad de la imagen en función de p . Repetir el problema para una lente esférica.

21.13 Demostrar que si u_1 y u_2 son las distancias de un objeto y de su imagen al centro de un espejo esférico, vale la relación $1/u_1 + 1/u_2 = 2/r$. Demostrar que en este caso el aumento está dado por $M = u_2/u_1$.

21.14 Si x_1 y x_2 son las distancias del objeto y de su imagen, medidas desde el foco de un espejo esférico, demostrar que la ec. (21.3) da $x_1 x_2 = f^2$. Esto se denomina ecuación de Newton. ¿Puede Ud. concluir entonces que el objeto y su imagen están siempre del mismo lado del foco? [Sugerencia: Notar que $x_1 = FP = OP - OF$ y análogamente para x_2 .]

21.15 Demostrar que la ec. (21.4) es independiente del ángulo β . Esto es,

$p/AP = q/AQ$ si $1/p + 1/q = 1/r$, excepto en el caso trivial en que el objeto está en el centro del espejo. Demostrar que esto también implica la ec. (21.2). ¿Es esta condición compatible con la ec. (21.2)? ¿Cuál es su conclusión?

21.16 Dados la distancia focal f de un espejo esférico y el aumento M , demostrar que las posiciones del objeto y de la imagen son $p = f(M - 1)/M$ y $q = -f(M - 1)$.

21.17 Probar que todos los rayos paralelos al eje de un espejo parabólico (figura 21.36) pasan por el foco después

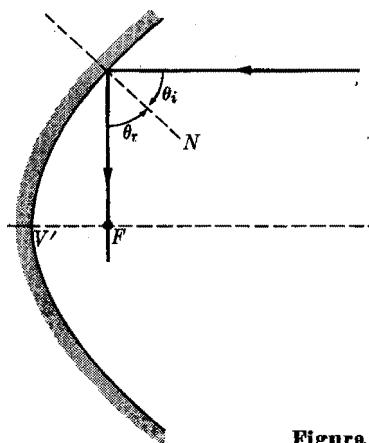


Figura 21-36

de la reflexión, independientemente de sus distancias al eje.

21.18 Una sustancia transparente está limitada por una superficie esférica cóncava de radio igual a 0,60 m. Su índice de refracción es 1,5. Determinar las distancias focales. Determinar la posición de la imagen y el aumento de un objeto colocado a una distancia de la superficie igual a (a) 2,40 m, (b) 1,60 m y (c) 0,60 m. Repetir el problema para una superficie convexa.

21.19 Una esfera de vidrio de 2 cm de diámetro contiene una pequeña burbuja de aire a 0,5 cm del centro. Hallar la posición y el aumento de la imagen de la burbuja vista por una persona que mira de uno u otro lado según la línea que une el centro de la esfera con la burbuja. El índice de refracción del vidrio es 1,50.

21.20 Una esfera transparente de índice de refracción n respecto al aire tiene un radio r . Se coloca un objeto a una distancia $4r$ del centro de la esfera. Hallar la posición de su imagen final. Representar la trayectoria de un rayo a través de la esfera.

21.21 Una varilla transparente de 40 centímetros de largo tiene un extremo plano y el otro en forma de semiesfera de 12 cm de radio. Se coloca un objeto sobre el eje de la varilla a 10 cm del extremo semiesférico. (a) ¿Cuál es la posición de la imagen final? (b) ¿Cuál es su aumento? Suponer que el índice de refracción es 1,50.

21.22 Ambos extremos de una varilla de vidrio de 10 cm de diámetro y de índice 1,50, están desgastados y pulidos en forma de superficies esféricas convexas de 5 cm de radio en el extremo derecho y de 10 cm en el izquierdo. La longitud de la varilla entre los vértices es 60 cm. Una flecha de 1 mm de longitud perpendicular al eje y a 20 cm a la derecha del primer vértice, constituye el objeto para la primera superficie. (a) ¿Qué constituye el objeto para la segunda superficie? (b) ¿Cuál es la distancia del objeto para la segunda superficie? (c) ¿Es real o virtual el objeto? (d) ¿Cuál es la posición de la imagen formada por la segunda superficie? (e) ¿Cuál es la altura de la imagen final?

21.23 Se acorta la varilla del problema 21.22 hasta que haya una distancia de 10 cm entre sus vértices; la curvatura de sus extremos permanece igual. (a) ¿Cuál es la distancia del objeto para la segunda superficie? (b) ¿Es real o virtual el objeto? ¿Está erecto o invertido respecto al objeto original? (c) ¿Cuál es la altura de la imagen final?

21.24 Los extremos de una varilla cilíndrica de vidrio de índice de refracción 1,5 son dos superficies esféricas convexas cuyos radios de curvatura son respectivamente 10 y 20 cm (fig. 21-37). La longitud de la varilla entre los vértices es 50 cm. Una flecha de 1 mm de longitud está frente a la primera superficie esférica, perpendicular al eje del cilindro y a 25 cm del vértice. Calcular (a) la posición y la longitud de la imagen de la flecha formada por la primera

superficie y (b) la posición y la longitud de la imagen de la flecha formada por ambas superficies. Especificar si las imágenes son reales o virtuales.

21.25 Determinar los puntos focales del sistema descrito en el problema 21.24; resolver gráficamente este problema.

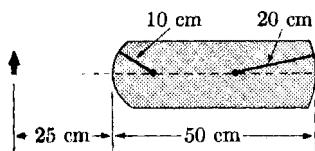


Figura 21-37

21.26 Se tiene una varilla de vidrio de índice de refracción 1,50 cuyos extremos están desgastados y pulidos en forma de superficies hemisféricas de 5 cm de radio. Cuando se coloca un objeto sobre el eje de la varilla a 20 cm de un extremo, se forma la imagen real final a 40 cm del extremo opuesto. ¿Cuál es la longitud de la varilla?

21.27 Una esfera sólida de vidrio cuyo radio es R y cuyo índice de refracción es 1,50 tiene un hemisferio plateado como en la fig. 21-38. Se coloca un pequeño objeto sobre la recta que pasa por el centro de la esfera y el polo del hemisferio a una distancia $2R$ del polo no plateado. Hallar la posición de la imagen final después de que todas las refacciones y reflexiones han tenido lugar.

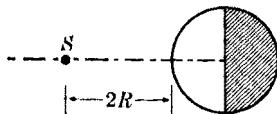


Figura 21-38

21.28 Considerar una esfera de vidrio de radio R e índice de refracción n cortada por un plano que pasa por un punto S a una distancia x del centro O y es perpendicular a OS (fig. 21-39). Demostrar que si $x = R/n$, todos los rayos que entran a la esfera de vidrio desde una fuente puntual en S emergen de la esfera según rectas que divergen de un punto S' collinear con O y S a una dis-

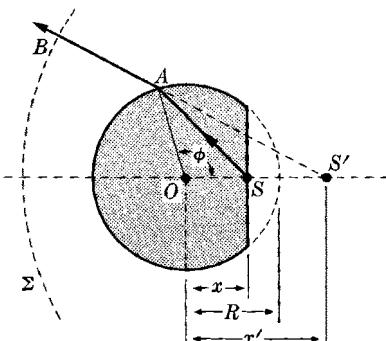


Figura 21-39

tancia $x' = nR$ de O . [Sugerencia: Demostrar que prolongando hacia atrás el rayo refractado, pasa por S' para todo valor de ϕ y para los valores dados de x y x' .]

21.29 Demostrar que para la refracción en una superficie esférica, la ec. (21.13) es independiente del ángulo β si $1/p + 1/q = 1/r$ y que esto implica la validez de la ec. (21.10). Demostrar que entonces la posición anastigmática del objeto es $p = (n_1 + n_2)r/n_1$. ¿Cuál es la posición de la imagen?

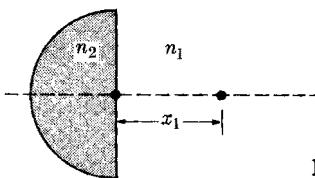


Figura 21-40

21.30 Una sustancia en forma de hemisferio de radio R e índice de refracción n_2 está sumergida en un medio de índice de refracción n_1 como se muestra en la fig. 21-40. Se coloca un objeto sobre el eje a una distancia x_1 del centro. Demostrar que si la imagen está a una distancia x_2 del centro, $n_1^2/x_1 - n_2^2/x_2 = n_2(n_2 - n_1)/R$.

21.31 Demostrar que para una superficie esférica refringente que separa dos sustancias de índices de refracción n_1 y n_2 , vale la relación $x_1x_2 = f_1f_2$, donde x_1 es la distancia del objeto al primer foco y x_2 la de la imagen al segundo foco.

21.32 Demostrar que para la refracción en una superficie esférica vale la siguiente relación: $n_1 y_1 \operatorname{sen} \alpha_1 = n_2 y_2 \operatorname{sen} \alpha_2$, donde α_1 y α_2 son los ángulos mostrados en la fig. 21-8, e y_1 , y_2 son los tamaños del objeto y de su imagen. En consecuencia, la relación $ny \operatorname{sen} \alpha = -\text{const}$ vale para un rayo que pasa por varias superficies refringentes con sus centros alineados. Esta relación se denomina *ley de Helmholtz*. [Sugerencia: Refiriéndose a la fig. 21-8, aplicar la ley del seno combinada con la ley de Snell y la relación obtenida de la semejanza de los triángulos *Cab* y *CAB* de la fig. 21-11.]

21.33 Hacer un esquema de las diversas lentes delgadas que se pueden obtener combinando dos superficies cuyos radios de curvatura son, en valor absoluto, 10 cm y 20 cm. ¿Cuáles son convergentes y cuáles divergentes? Hallar la distancia focal de cada lente suponiendo que están hechas de vidrio de índice 1,50.

21.34 Una lente biconvexa tiene un índice de refracción de 1,5 y sus radios son 0,20 m y 0,30 m. Hallar la distancia focal. Determinar la posición de la imagen y el aumento de un objeto que está a una distancia de la lente igual a (a) 0,80 m, (b) 0,48 m, (c) 0,40 m, (d) 0,24 m y (e) 0,20 m. Considerar también el caso de un objeto virtual que está a 0,20 m detrás de la lente.

21.35 Una lente bicóncava tiene un índice de refracción de 1,5 y sus radios son 0,20 m y 0,30 m. (a) Hallar la distancia focal. (b) Determinar la posición de la imagen y el aumento de un objeto que está a 0,20 m de la lente. Considerar también el caso de un objeto virtual a una distancia de (c) 0,40 m y (d) 0,20 m.

21.36 Un sistema de lentes está compuesto de dos lentes convergentes cuyas distancias focales son 30 cm y 60 cm. Estudiar la posición de la intersección de un rayo inicialmente paralelo al eje común con dicho eje, en función de la distancia entre las lentes. Considerar los casos en que la separación es (a) 20 cm, (b) 50 cm, (c) 90 cm y (d) 120 cm. Repetir el problema para cuando la primera lente es divergente.

21.37 Una lente proyecta la imagen de un objeto sobre una pantalla colo-

cada a 12 cm de la lente. Cuando la lente se aleja 2 cm del objeto, la pantalla se debe acercar 2 cm al objeto para ponerlo en foco. ¿Cuál es la distancia focal de la lente?

21.38 Se coloca un objeto a 18 cm de una pantalla. (a) ¿En qué puntos entre el objeto y la pantalla se puede colocar una lente de 4 cm de distancia focal para obtener una imagen sobre la pantalla? (b) ¿Cuál es el aumento de la imagen para estas posiciones de la lente?

21.39 Una lente convergente tiene una distancia focal de 0,40 m. Hallar la posición de un objeto y la naturaleza de la imagen si el aumento es (a) -0,6; (b) -1,5; (c) -1; (d) 3 y (e) 0,8.

21.40 Una lente convergente tiene una distancia focal de 0,60 m. Hallar la posición del objeto para producir una imagen (a) real y tres veces mayor, (b) real y tres veces menor, (c) virtual y tres veces mayor.

21.41 Determinar la distancia focal y la naturaleza de una lente que, para un objeto a 1,20 m de la misma produce una imagen (a) real a 0,80 m de la lente, (b) virtual a 3,20 m de la lente, (c) virtual a 0,60 m de la lente, (d) real y dos veces mayor, (e) virtual y dos veces mayor, (f) real y tres veces menor y (g) virtual y tres veces menor.

21.42 Una lente delgada de índice de refracción n_2 está rodeada de dos medios de índices de refracción n_1 y n_3 respectivamente. Demostrar que la ecuación que relaciona las posiciones del objeto y de la imagen es

$$\frac{n_1}{p} - \frac{n_3}{q} = \left(\frac{n_1}{n_2} - \frac{n_2}{n_3} \right) \frac{1}{r_1} + \left(\frac{n_2}{n_3} - \frac{n_3}{n_1} \right) \frac{1}{r_2}.$$

21.43 Un tanque lleno de agua tiene en una pared una abertura cubierta por una lente biconvexa de índice de refracción 1,5 y radio igual a 30 cm. Hallar la distancia focal de un rayo que entra a la lente paralelamente al eje viniendo del interior del tanque y del exterior del mismo. Determinar la posición de la imagen de una fuente de luz colocada dentro del tanque a (a) 30 cm y (b) 45 cm de la lente. El índice de refracción del agua es 1,33.

21.44 Una lente delgada equiconvexa hecha de vidrio de índice de refracción

1,50 tiene una distancia focal en el aire de 30 cm. Se pega la lente en una abertura en un extremo de un tanque lleno de agua (índice 1,33). En el otro extremo del tanque hay un espejo plano a 80 cm de la lente. Hallar la posición de la imagen formada por el sistema lente-tanque de agua sobre el eje de la lente a 90 cm a la izquierda de la misma. ¿Es real o virtual la imagen? ¿Erecta o invertida?

21.45 Demostrar que para una lente esférica se tiene $x_1 x_2 = f^2$, donde x_1 es la distancia del objeto al primer foco y x_2 la distancia de la imagen al segundo foco.

21.46 Usando la expresión (21.14) para calcular la refracción en cada superficie de una lente esférica, demostrar que la distancia focal está dada por

$$\frac{1}{f'} = (n - 1) \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) + \frac{h^2}{2} \frac{n - 1}{n^2}$$

$$\times \left[\left(\frac{1}{r^2} + \frac{n + 1}{f} \right) \left(\frac{1}{r_2} + \frac{1}{f} \right)^2 - \frac{1}{r_1^2} \right],$$

donde f' está dado por la ec. (21.18). De este resultado estimar el valor de la aberración esférica de la lente, definida como la diferencia de distancia focal para un rayo cercano al eje y un rayo cercano al borde de la lente.

21.47 Una lente biconvexa tiene un índice de refracción 1,5. Las dos superficies tienen el mismo radio, 10 cm. La lente tiene un radio de 8 cm. Hallar la distancia focal y la aberración esférica. Repetir el problema para una lente biconcava.

21.48 Los rayos que vienen de una lente convergen en una imagen puntual P , como en la fig. 21-41. ¿Qué espesor t de vidrio de índice 1,50 se debe interponer, como en la figura, para que la imagen se forme en P' ?

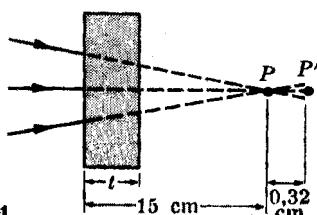


Figura 21-41

21.49 Representar q en función de p para (a) un espejo esférico que satisface la ec. (21.3) y (b) para una lente esférica que satisface la ec. (21.19). Verificar que en ambos casos resulta una hipérbola equilátera. En cada caso representar también el aumento en función de p .

21.50 Un prisma tiene un índice de refracción 1,5 y un ángulo de 60° . (a) Determinar la desviación de un rayo incidente a un ángulo de 40° . (b) Hallar la desviación mínima y el correspondiente ángulo de incidencia.

21.51 La desviación mínima de un prisma es 30° . El ángulo del prisma es 50° . Hallar su índice de refracción y el ángulo de incidencia para desviación mínima.

21.52 Demostrar que para la refracción debida a un prisma se cumple

$$\sin \frac{1}{2}(\delta + A) = n \sin \frac{1}{2}A \frac{\cos \frac{1}{2}(r - r')}{\cos \frac{1}{2}(i - i')}.$$

Demostrar también que $\cos \frac{1}{2}(r - r')$ nunca es menor que $\cos \frac{1}{2}(i - i')$. Concluir entonces que la condición de desviación mínima es $i = i'$.

21.53 Demostrar que si el ángulo de un prisma es muy pequeño y los rayos inciden casi perpendicularmente a una de las caras, la desviación es

$$\delta = (n - 1)A.$$

21.54 Si un rayo llega a la segunda superficie de un prisma a un ángulo mayor que el ángulo crítico, hay reflexión total y el rayo se refleja hacia atrás en vez de pasar a través del prisma. Este principio se usa en muchos instrumentos ópticos. Demostrar que si $n > 1$ la condición para que por lo menos un rayo emerja es $A \leq 2\lambda$, donde λ es el ángulo crítico. Discutir luego el intervalo de valores del ángulo de incidencia i para el cual el rayo emerge del otro lado. Este intervalo está dado por el ángulo α mostrado en la fig. 21-42. Probar que está dado por $\cos \alpha = n \sin(A - \lambda)$. Estudiar la variación de α con A .

21.55 Aplicar la discusión del problema precedente al caso de un prisma que tiene un ángulo de refracción de 45° y un índice de refracción de 1,5. Obtener el valor de α . Estudiar la trayectoria de un

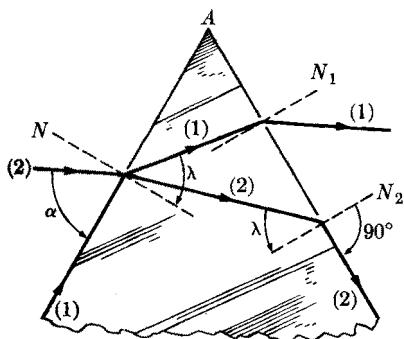


Figura 21-42

rayo que incide perpendicularmente a una de las caras. Considerar también el caso en que el ángulo del prisma es de 35° .

21.56 De los datos de la tabla 21-3, obtener los coeficientes A y B que aparecen en la fórmula de Cauchy para el índice de refracción en el caso de vidrio *crown*.

21.57 Usando el resultado del problema precedente, determinar la separación angular correspondiente a las líneas C y F de Fraunhofer en un prisma de vidrio *crown* cuyo ángulo es 50° si el ángulo de incidencia es 30° .

21.58 Un sistema de lentes está compuesto de dos lentes en contacto, una planocónvava de vidrio *flint* y la otra biconvexa de vidrio *crown*. El radio de la cara común es 0,20 m y el radio de

la otra cara de la lente de *crown* es 0,12 m. Hallar la distancia focal del sistema y la aberración cromática.

21.59 El ocular de un instrumento óptico está compuesto de dos lentes convergentes idénticas de 5 cm de distancia focal separadas 2,5 cm. Hallar la posición de los focos del sistema medidas desde la lente más cercana.

21.60 El objetivo de un microscopio tiene una distancia focal de 4 mm. La imagen formada por este objetivo está a 180 mm de su segundo punto focal. El ocular tiene una distancia focal de 31,25 mm. (a) ¿Cuál es el aumento del microscopio? (b) ¿Se puede a ojo desnudo distinguir separados dos puntos si están a 0,1 mm aproximadamente uno de otro? ¿Cuál es la separación mínima que se puede percibir con la ayuda de este microscopio?

21.61 El diámetro de la luna es $3,5 \times 10^3$ km y su distancia a la tierra es $3,8 \times 10^5$ km. Hallar el diámetro angular de la imagen de la luna formada por un telescopio si la distancia focal del objetivo es de 4 m y la del ocular 10 cm.

21.62 Refiriéndose a la fig. 21-39, demostrar que el tiempo que tarda el rayo para ir de S a cualquier punto de la superficie de onda Σ es independiente de ϕ e igual a $S'B/c$, donde $S'B$ es el radio de Σ .

INTERFERENCIA

22.1 Introducción

- 22.2 Interferencia de ondas producidas por dos fuentes sincrónicas
- 22.3 Interferencia de ondas producidas por varias fuentes sincrónicas
 - 22.4 Ondas estacionarias en una dimensión
 - 22.5 Ondas estacionarias y la ecuación de onda
 - 22.6 Ondas electromagnéticas estacionarias
 - 22.7 Ondas estacionarias en dos dimensiones
- 22.8 Ondas estacionarias en tres dimensiones; cavidades resonantes
 - 22.9 Guías de onda

22.1 Introducción

Una característica muy importante del movimiento ondulatorio es el fenómeno de interferencia. Este ocurre cuando dos o más movimientos ondulatorios coinciden en el espacio y en el tiempo. En el capítulo 12 estudiamos la superposición de dos movimientos armónicos simples. La teoría allí desarrollada se puede aplicar directamente al presente problema para el caso de ondas armónicas o monocromáticas.* La región en la cual coinciden las ondas incidente y reflejada es uno de los lugares donde ocurre interferencia. En efecto, éste es uno de los métodos más comunes de producir interferencia. Otro ejemplo importante de interferencia se halla en el movimiento ondulatorio confinado a una región limitada del espacio, tal como una cuerda fija por sus extremos, o un líquido en un canal, o una onda electromagnética en una cavidad metálica. La interferencia en estos casos da lugar a ondas estacionarias.

Con el fin de aplicar las fórmulas desarrolladas en el capítulo 12, escribiremos para una onda armónica que se mueve en la dirección $+X$

$$\xi = \xi_0 \operatorname{sen}(\omega t - kx), \quad (22.1)$$

y para una que se mueve en la dirección $-X$

$$\xi = \xi_0 \operatorname{sen}(\omega t + kx), \quad (22.2)$$

en lugar de las ecs. (18.5) y (18.9). Esto involucra sólo un cambio de signo y, en tanto seamos consistentes, es un procedimiento correcto, como se indicó al final de la sección 18.2 en la ec. (18.10) y se usó en el ejemplo 20.2.

Como se dijo en los capítulos precedentes, la teoría desarrollada aquí es aplicable a cualquier tipo de movimiento ondulatorio, pero en general se referirán nuestros ejemplos y aplicaciones a las ondas electromagnéticas.

22.2 Interferencia de ondas producidas por dos fuentes sincrónicas

Consideremos dos fuentes puntuales S_1 y S_2 (fig. 22-1) que oscilan en fase con la misma velocidad angular ω y amplitudes ξ_{01} y ξ_{02} . Sus ondas esféricas respectivas son

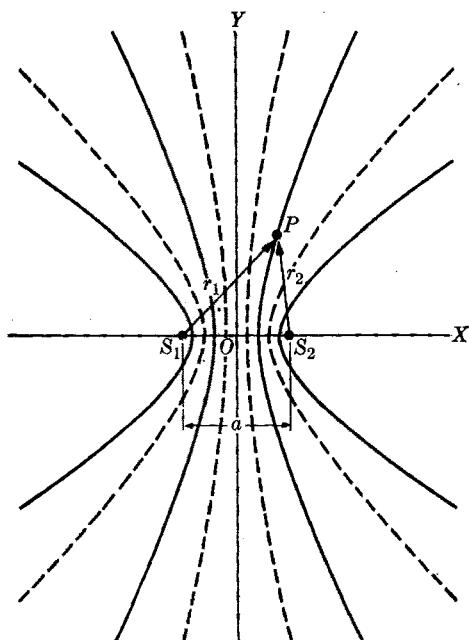
$$\xi_1 = \xi_{01} \operatorname{sen}(\omega t - kr_1) \quad (22.3)$$

y

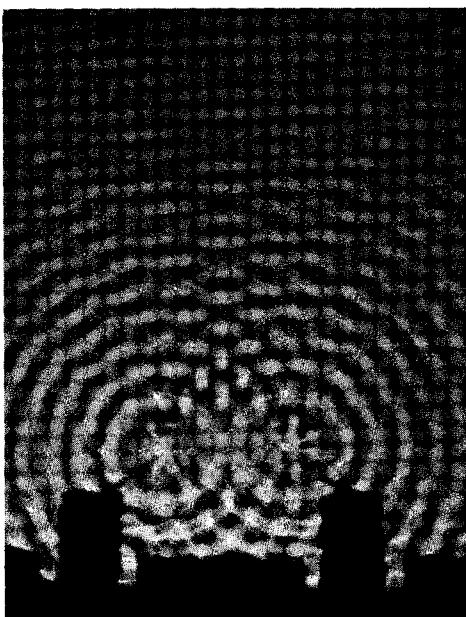
$$\xi_2 = \xi_{02} \operatorname{sen}(\omega t - kr_2), \quad (22.4)$$

donde r_1 y r_2 son las distancias desde cualquier punto a S_1 y S_2 , respectivamente. Obsérvese que, aunque las dos fuentes son idénticas, no producen la misma amplitud en P si r_1 y r_2 son diferentes, porque, como vimos en la sección 18.11, la amplitud de una onda esférica disminuye según la ley $1/r$.

* Sugerimos al estudiante que antes de estudiar este capítulo relea en el capítulo 12 las secciones 12.7 a 12.9.



(a)



(b)

Fig. 22-1. (a) Líneas nodales y ventrales resultantes de la interferencia de ondas producidas por dos fuentes idénticas. (b) Diagrama real de interferencia de ondas en el agua. (Fotografía cortesía de Educational Services, Inc.)

Supongamos que ξ es una propiedad escalar, tal como una perturbación de la presión. Si ξ corresponde a una cantidad vectorial, supondremos que ξ_1 y ξ_2 tienen la misma dirección de modo que la combinación de las dos ondas pueda ser tratada escalarmente. Cuando comparamos las ecs. (22.3) y (22.4) con la ec. (12.1) [esto es, $\xi = A \operatorname{sen}(\omega t + \alpha)$], las cantidades kr_1 y kr_2 juegan el mismo papel que las fases iniciales. Entonces el defasaje entre los dos movimientos ondulatorios en cualquier punto P (si recordamos que $k = 2\pi/\lambda$) es

$$\delta = kr_1 - kr_2 = \frac{2\pi}{\lambda} (r_1 - r_2). \quad (22.5)$$

Cuando usamos la técnica de los vectores rotatorios explicada en la sección 12.7, los dos movimientos ondulatorios que interfieren pueden ser representados por vectores, de longitud ξ_{01} y ξ_{02} respectivamente, los cuales forman los ángulos $\alpha_1 = kr_1$ y $\alpha_2 = kr_2$ con el eje X (fig. 22.2). La amplitud ξ_0 y la fase α del movimiento ondulatorio resultante están dadas por el vector resultante. Por lo tanto podemos expresar la amplitud de la perturbación resultante en P por

$$\xi_0 = \sqrt{\xi_{01}^2 + \xi_{02}^2 + 2\xi_{01}\xi_{02} \cos \delta}. \quad (22.6)$$

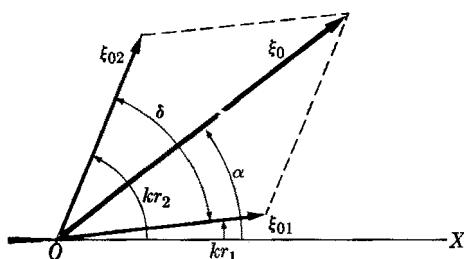


Fig. 22-2. Amplitud resultante de dos ondas que interfieren. El eje X se ha tomado como línea de referencia.

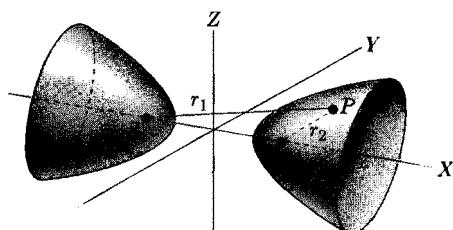


Fig. 22-3. Superficies de defasaje constante para ondas esféricas producidas por dos fuentes puntuales S_1 y S_2 coherentes.

En la ec. (22.6), vemos que ξ está comprendido entre los valores $\xi_{01} + \xi_{02}$ y $\xi_{01} - \xi_{02}$ dependiendo de que sea

$$\cos \delta = +1 \text{ ó } -1 \quad \delta = 2n\pi \text{ ó } (2n+1)\pi,$$

donde n es un número entero positivo o negativo. En el primer caso tenemos máximo refuerzo de los dos movimientos ondulatorios, o *interferencia constructiva*, y en el segundo hay máxima atenuación, o *interferencia destructiva*. Esto es,

$$\delta = \begin{cases} 2n\pi & \text{interferencia constructiva,} \\ (2n+1)\pi & \text{interferencia destructiva.} \end{cases}$$

Usando la ec. (22.5), podemos entonces escribir

$$\frac{2\pi}{\lambda} (r_1 - r_2) = \begin{cases} 2n\pi & \text{interferencia constructiva,} \\ (2n+1)\pi & \text{interferencia destructiva,} \end{cases} \quad (22.7)$$

o sea

$$r_1 - r_2 = \begin{cases} n\lambda & \text{interferencia constructiva,} \\ (2n+1) \frac{\lambda}{2} & \text{interferencia destructiva.} \end{cases} \quad (22.8)$$

Pero $r_1 - r_2 = \text{const}$ define una hipérbola cuyos focos son S_1 y S_2 ó, como el problema es realmente en el espacio, esta ecuación define superficies hiperbólicas de revolución, tales como las de la fig. 22-3. Por consiguiente concluimos de la ec. (22.8) que en las superficies hiperbólicas cuyas ecuaciones son $r_1 - r_2 = \pm \lambda$, $\pm 2\lambda$, $\pm 3\lambda$, ..., los dos movimientos ondulatorios interfieren reforzándose. Estas superficies se denominan *superficies ventrales* o *antinodales*. En las superficies hiperbólicas cuyas ecuaciones son $r_1 - r_2 = \pm \frac{1}{2}\lambda$, $\pm \frac{3}{2}\lambda$, ..., los dos movimientos ondulatorios interfieren atenuándose. Estas superficies se denominan *nodales*. El diagrama en su totalidad es de este modo una sucesión de superficies ventrales y nodales alternadas. Las hipérbolas que se ilustran en la fig. 22-1 son las intersecciones de estas superficies con un plano que pasa por el eje X .

La situación descrita es tal que, en cada punto del espacio, el movimiento ondulatorio resultante tiene una amplitud característica, dada por la ec. (22.6) de modo que

$$\xi = \xi_0 \operatorname{sen}(\omega t - \alpha),$$

donde α es el ángulo indicado en la fig. 22-2. Por consiguiente el resultado de la interferencia no tiene la apariencia de un movimiento ondulatorio progresivo sino una situación *estacionaria* en la cual el movimiento tiene una amplitud fija en cada punto del espacio. La razón de esto es que las dos fuentes oscilan con la misma frecuencia y mantienen un defasaje constante, y por lo tanto se dice que son *coherentes*. Pero si las fuentes no son de la misma frecuencia, o si sus defasajes cambian erráticamente con el tiempo, no se observa el diagrama de interferencia estacionario, y las fuentes se dice que son *incoherentes*. Esto es lo que sucede con las fuentes de luz compuestas de la misma clase de átomos, las cuales emiten luz de la misma frecuencia. Como cada fuente contiene muchos átomos y éstos no oscilan en fase, no se observa un diagrama de interferencia definido.

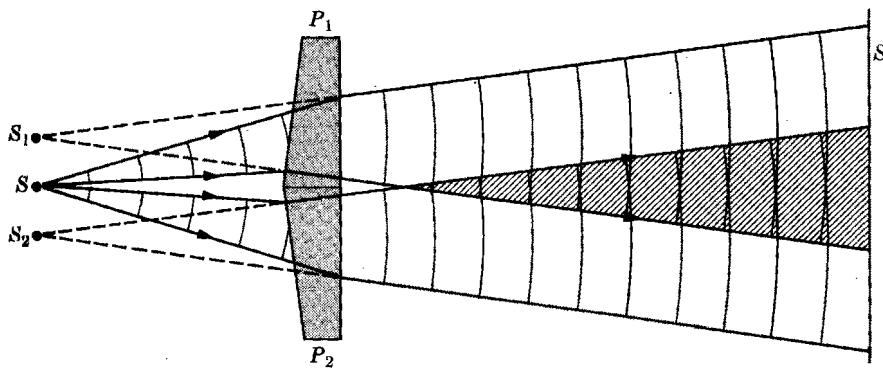


Fig. 22-4. Biprisma de Fresnel.

Para obviar esta dificultad y producir dos haces de luz coherentes, se han diseñado varios aparatos. Uno muy común es el biprisma de Fresnel, que se ilustra en la fig. 22-4, el cual está compuesto de dos prismas P_1 y P_2 . La luz proveniente de la fuente S se refracta en cada prisma y se separa en dos haces coherentes que aparentemente proceden de dos fuentes coherentes, S_1 y S_2 . Estas son las imágenes de S producidas por cada prisma. La coherencia está asegurada en este caso porque los dos haces provienen de la misma fuente. Estos haces interfieren en la región sombreada. Para grandes defasajes, la coherencia se destruye, porque los haces que interfieren son producidos por la fuente en instantes muy separados de modo que, microscópicamente hablando, la fuente no es la misma en ambos instantes y las fases no son constantes.

Un dispositivo todavía más simple es el usado por Thomas Young (1773-1829), quien en sus primeros experimentos sobre interferencia de la luz, probó de un modo concluyente que la luz era un fenómeno ondulatorio. Su dispositivo (fig. 22-5)

consistía en dos pequeños agujeros o rendijas, S_1 y S_2 muy cercanos, en una pantalla con una fuente de luz S colocada detrás de ella. De acuerdo con el principio de Huygens, S_1 y S_2 se comportan como fuentes secundarias coherentes cuyas ondas interfieren sobre la región a la derecha de la pantalla.

En el caso de la luz, el diagrama de interferencia se observa sobre una pantalla colocada paralelamente a las dos fuentes S_1 y S_2 , como se indica en la fig. 22-6(a). Una serie de franjas brillantes y oscuras dispuestas alternadamente aparecen sobre la pantalla debido a la intersección de ésta con las superficies hiperbólicas ventrales y nodales como se muestra en la fig. 22-6(b). Para otras regiones del

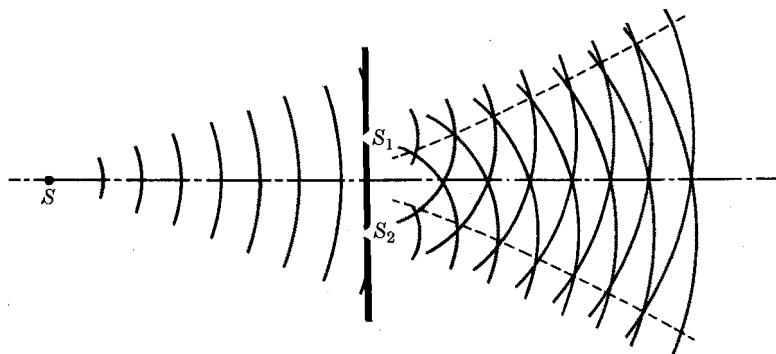


Fig. 22-5. Interferencia producida por dos fuentes coherentes. Experimento de Young de la doble rendija.

espectro electromagnético, se usan diferentes tipos de detectores para observar el diagrama de interferencia.

Si la separación a de las fuentes S_1 y S_2 es pequeña comparada con la distancia D , podemos despreciar la pequeña diferencia entre r_1 y r_2 y suponer que las amplitudes ξ_{01} y ξ_{02} son prácticamente iguales. Podemos entonces volver a escribir la ec. (22.6) como

$$\xi_0 = \xi_{01} \sqrt{2(1 + \cos \delta)} = 2\xi_{01} \cos \frac{1}{2}\delta.$$

Ahora, de la geometría de la fig. 22-6, considerando que el ángulo θ es pequeño, de modo que $\sin \theta \approx \tan \theta = x/D$, obtenemos $r_1 - r_2 = S_1 B = a \sin \theta = ax/D$, y por lo tanto

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} (r_1 - r_2) = \frac{2\pi}{\lambda} a \sin \theta = \frac{2\pi ax}{D\lambda}. \quad (22.9)$$

La intensidad del movimiento resultante en los puntos de la pantalla es proporcional a ξ_0^2 . Por consiguiente

$$I = I_0 \cos^2 \left(\frac{\pi a \sin \theta}{\lambda} \right) = I_0 \cos^2 \left(\frac{\pi ax}{D\lambda} \right), \quad (22.10)$$

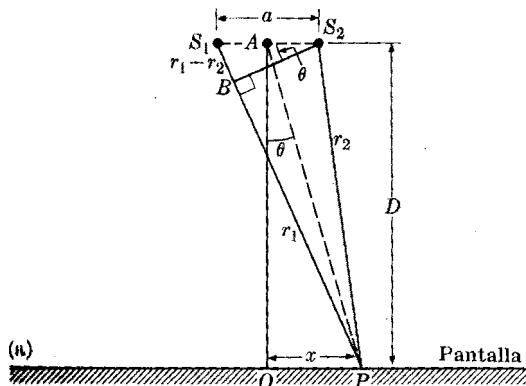


Fig. 22-6. (a) Dibujo esquemático para determinar la intensidad de movimiento ondulatorio resultante sobre una pantalla debido a la interferencia producida por dos fuentes coherentes. (b) Fotografía de las franjas de interferencia producidas sobre una pantalla por un par de rendijas iluminadas por una fuente puntual de luz monocromática. Observar que hay un desvanecimiento de las franjas cerca de los bordes debido a la pérdida de coherencia.

donde I_0 es la intensidad para $\theta = 0$. En la fig. 22-7 se ilustra la ley \cos^2 para la distribución de intensidad. Los puntos de intensidad máxima corresponden a

$$\frac{\pi a \operatorname{sen} \theta}{\lambda} = n\pi \quad \text{o} \quad a \operatorname{sen} \theta = n\lambda,$$

y también a

$$\frac{\pi ax}{D\lambda} = n\pi \quad \text{o} \quad x = \frac{nD}{a} \lambda, \quad (22.11)$$

donde n es un número entero positivo o negativo. La separación entre dos franjas brillantes consecutivas es $\Delta x = (D/a)\lambda$. Por lo tanto midiendo Δx , D y a , podemos obtener la longitud de onda λ . Este es, en efecto, uno de los métodos corrientes de medir longitudes de onda.

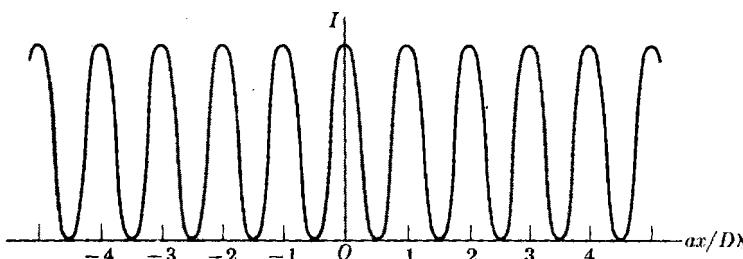


Fig. 22-7. Distribución de intensidad en un diagrama de interferencia producido por dos fuentes coherentes.

EJEMPLO 22.1. En un experimento similar al de Young, las dos rendijas están separadas una distancia de 0,8 mm; se iluminan con luz monocromática de longitud de onda $5,9 \times 10^{-7}$ m, y el diagrama de interferencia se observa sobre una segunda pantalla, que está a 0,5 m de las rendijas. Determinar la separación entre dos franjas brillantes o entre dos franjas oscuras.

Solución: Las cantidades que aparecen en la ec. (22-11) son, en este caso, $a = 0,8 \text{ mm} = 8 \times 10^{-4} \text{ m}$, $D = 5 \times 10^{-1} \text{ m}$ y $\lambda = 5,9 \times 10^{-7} \text{ m}$. Por consiguiente, las posiciones de las franjas brillantes son $x = n(D\lambda/a) = 3,7 \times 10^{-4} n \text{ m} = 0,37 n$ milímetros. En general, las franjas tienen que ser observadas con una lupa. La separación entre franjas brillantes sucesivas es 0,37ⁿ mm, la misma separación que hay entre dos franjas oscuras.

EJEMPLO 22.2. Discutir el diagrama de interferencia producido por dos fuentes no coherentes de la misma frecuencia.

Solución: La no coherencia se debe en este caso a que la diferencia de fase es variable. En consecuencia escribimos, en lugar de las ecs. (22.3) y (22.4),

$$\xi_1 = \xi_{01} \sin(\omega t - kr_1 - \phi), \quad \xi_2 = \xi_{02} \sin(\omega t - kr_2),$$

donde ϕ es el defasaje adicional que varía con el tiempo al azar. Entonces el defasaje es $\delta = 2\pi(r_1 - r_2)/\lambda + \phi$, y la amplitud resultante en el punto de interferencia es

$$\xi_0^2 = \xi_{01}^2 + \xi_{02}^2 + 2\xi_{01}\xi_{02} \cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}(r_1 - r_2) + \phi\right].$$

Pero ahora ξ_0 no es constante en el tiempo debido a los cambios en ϕ . Por consiguiente, en su lugar debemos hallar $\overline{\xi_0^2}$. Pero debido a la variación al azar de ϕ , tenemos que

$$\left\langle \cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}(r_1 - r_2) + \phi\right] \right\rangle = 0.$$

Por lo tanto

$$\overline{(\xi_0^2)} = \xi_{01}^2 + \xi_{02}^2$$

y, como la intensidad es proporcional al cuadrado de la amplitud,

$$\bar{I} = I_1 + I_2.$$

Por consiguiente la intensidad media resultante es la suma de las intensidades individuales y no se observan fluctuaciones en la intensidad. La intensidad media es la misma en todos los puntos. Esta es la razón por la cual, por ejemplo, no se observan franjas de interferencia con la luz proveniente de dos bombillos eléctricos, porque las diferencias de fase de sus respectivos átomos radiantes están distribuidas al azar.

22.3 Interferencia de ondas producidas por varias fuentes sincrónicas

Consideremos ahora el caso de varias fuentes sincrónicas idénticas distribuidas linealmente, como se ilustra en la fig. 22-8. Para simplificar nuestra discusión podemos suponer que observamos el movimiento ondulatorio resultante a una distancia muy lejana comparada con la separación de las fuentes, de modo que efectivamente los rayos que interfieren son paralelos. Entre rayos sucesivos hay

un desfasaje constante dado por

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} a \operatorname{sen} \theta. \quad (22.12)$$

Para obtener la amplitud resultante en la dirección de observación dada por el ángulo θ , debemos evaluar la suma vectorial de los correspondientes vectores rotantes de cada fuente. Si las fuentes son todas iguales, sus vectores rotantes tienen la misma longitud ξ_{01} y los vectores sucesivos están desviados en el mismo

ángulo δ , como se indica en la fig. 22-9. Designando el número de fuentes por N , tenemos entonces un polígono regular de N lados que tiene su centro en C , radio ρ , y el ángulo OCP es $N\delta$. En el triángulo COP , vemos que

$$\xi_0 = OP = 2\rho \operatorname{sen} \frac{1}{2}N\delta.$$

Análogamente, en el triángulo COR , que corresponde a uno de los lados del polígono, tenemos

$$\xi_{01} = 2\rho \operatorname{sen} \frac{1}{2}\delta.$$

Dividiendo las dos relaciones para eliminar ρ , tenemos

$$\xi_0 = \xi_{01} \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}N\delta}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}\delta}. \quad (22.13)$$

Fig. 22-8. Serie lineal de fuentes coherentes equidistantes.

Para $N = 2$, obtenemos $\xi_0 = 2\xi_{01} \cos \frac{1}{2}\delta$, de conformidad con los resultados deducidos en la sección 22.2 para dos fuentes iguales. La intensidad de las ondas resultantes, siendo proporcional a ξ_0^2 , es entonces

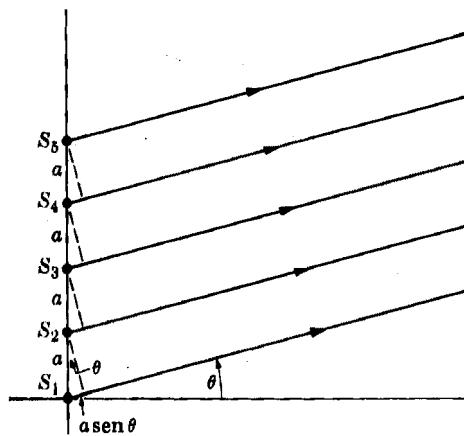
$$I = I_0 \left(\frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}N\delta}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}\delta} \right)^2 = I_0 \left[\frac{\operatorname{sen} (N\pi a \operatorname{sen} \theta / \lambda)}{\operatorname{sen} (\pi a \operatorname{sen} \theta / \lambda)} \right]^2, \quad (22.14)$$

donde I_0 es la intensidad de cada fuente proporcional a ξ_{01}^2 . La expresión (22.14) da un máximo muy pronunciado, igual a $N^2 I_0$, para $\delta = 2n\pi$ ó

$$a \operatorname{sen} \theta = n\lambda. \quad (22.15)$$

Esto se debe a que $\operatorname{sen} N\alpha / \operatorname{sen} \alpha = \pm N$ para $\alpha = n\pi$, y en nuestro caso $\alpha = \frac{1}{2}\delta$. El valor de I es entonces $I = N^2 I_0$. Este resultado es comprensible observando la fig. 22-9 porque cuando $\delta = 2n\pi$, todos los vectores ξ_{01} son paralelos, como se indica en la fig. 22-10, y la amplitud resultante es $\xi_0 = N\xi_{01}$ de conformidad con la ec. (22.13). La expresión (22.15) concuerda con la ec. (22.11) deducida para dos fuentes bajo hipótesis similares. La intensidad es nula para $\frac{1}{2}N\delta = n'\pi$, ó

$$a \operatorname{sen} \theta = \frac{n'\lambda}{N}, \quad (22.16)$$



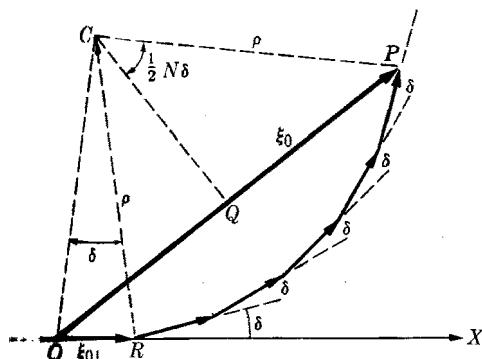


Fig. 22-9. Amplitud resultante en un punto arbitrario debido a la interferencia de ondas generadas por fuentes coherentes equidistantes dispuestas linealmente.

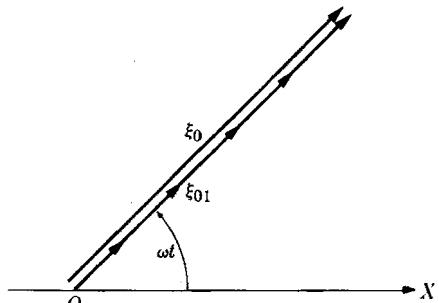


Fig. 22-10. Amplitud resultante en un punto de defasaje nulo en la interferencia producida por fuentes equidistantes dispuestas linealmente.

donde n' toma los valores 1 a $N - 1$, $N + 1$ a $2N - 1$, etc.; los valores $n' = 0, N, 2N, \dots$, se excluyen, ya que de lo contrario la ec. (22.16) se transformaría en la ec. (22.15). Entre dos mínimos debe haber siempre un máximo. Por consiguiente, concluimos que también hay $N - 2$ máximos adicionales entre los máximos principales dados por la ec. (22.15). Sus amplitudes son sin embargo relativamente pequeñas, especialmente si N es grande. El máximo principal corresponde a la dirección según la cual las ondas emitidas por fuentes adyacentes están en fase.

El gráfico de I/I_0 en función de δ se muestra en la fig. 22-11 para $N = 2, 4, 8$ y muy grande. Vemos que cuando N aumenta el sistema se hace altamente direccional, porque el movimiento ondulatorio resultante es importante sólo para bandas estrechas de valores de δ , o para bandas estrechas de valores del ángulo 0.

Estos resultados son ampliamente usados en las estaciones de radiotransmisión o recepción cuando se desea un efecto direccional. En este caso se agrupan varias antenas en tal forma que la intensidad de la radiación emitida (o recibida) sea máxima sólo para ciertas direcciones, dadas por la ec. (22.15). Por ejemplo, para cuatro antenas lineales separadas por $a = \lambda/2$, la ec. (22.15) da $\sin \theta = 2n$. Entonces, sólo $n = 0$ es posible para el máximo principal, dando $\theta = 0$ y π . Para los ceros, o planos nodales, la ec. (22.16) da $\sin \theta = \frac{1}{2}n'$, permitiendo para n' los valores ± 1 y ± 2 o $\theta = \pm\pi/3$ y $\pm\pi/2$. Esta situación se ilustra en el diagrama polar de la fig. 22-12 donde la intensidad está en función del ángulo. Esta disposición de antena transmite y recibe preferencialmente en dirección perpendicular a la línea que une las fuentes y se llama por lo tanto una *disposición en batuta*. El mismo efecto direccional se usa en los radiotelescopios. Varias antenas parabólicas se colocan equidistantes sobre una linea recta, con sus ejes paralelos. Para un distanciamiento y orientación dados de los ejes, la longitud de las ondas de radio recibidas se determina por la ec. (22.15). (Ver el problema 22.16.)

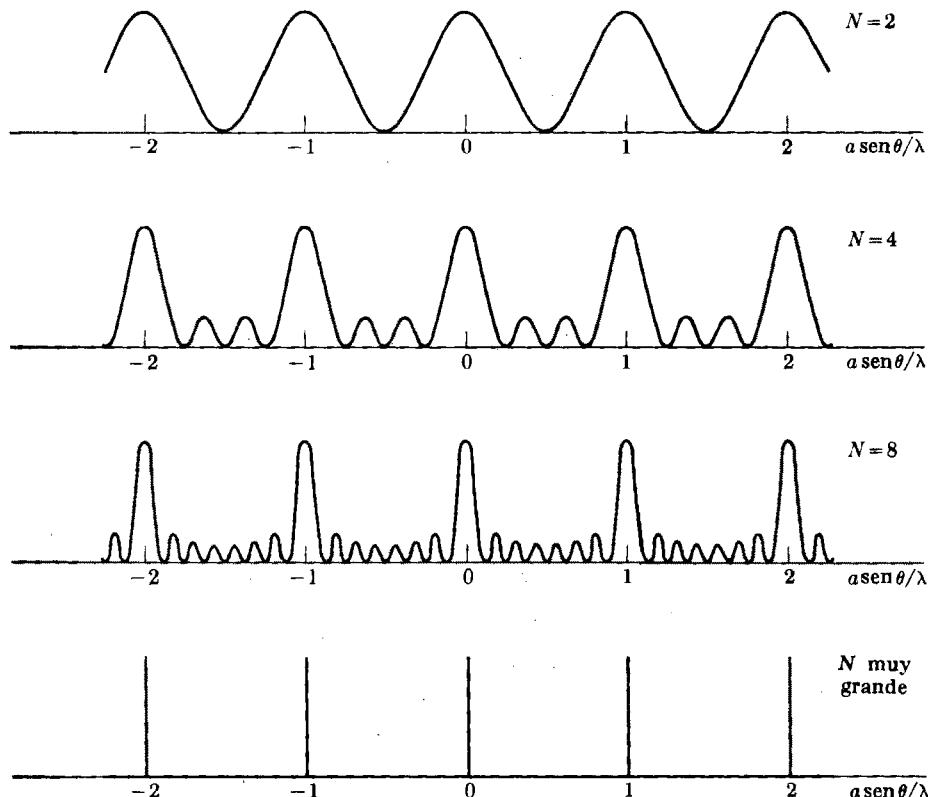


Fig. 22-11. Intensidades del diagrama de interferencia para 2, 4, 8 y muchísimas fuentes. La separación a entre las fuentes se mantiene constante.

EJEMPLO 22.3. Estudiar la interferencia debida a la reflexión en láminas delgadas o que se origina en la transmisión a través de las mismas.

Solución: La discusión de las secciones previas puede aplicarse al caso de la luz reflejada o transmitida por láminas delgadas. Consideremos (fig. 22-13) una película de espesor a y ondas planas incidentes sobre ella a un ángulo de incidencia θ_i . Parte de un rayo tal como AB se refleja según BG y se refracta según BC . El rayo BC , a su vez, se refleja parcialmente en C según CD y se transmite parcialmente según CH . El rayo CD , de nuevo se refleja parcialmente en D , según DK , superponiéndose con el rayo refractado en D del incidente FD . Este mismo rayo CD se refracta en D y el rayo refractado se superpone con el reflejado de FD . Análogamente el rayo reflejado BG también contiene contribuciones de los varios rayos a su izquierda. Por lo tanto ocurren fenómenos de interferencia a lo largo de los rayos reflejados y refractados. La situación es entonces similar al caso ilustrado en la sección 22.3, con N muy grande, pero con una diferencia importante: los rayos que interfieren no tienen todos la misma intensidad porque en cada reflexión o refracción sucesiva la intensidad disminuye.

Si no tomamos en cuenta este cambio de intensidad, los máximos debidos a la interferencia por reflexión o refracción ocurren cuando el desfase δ entre rayos sucesivos satisface la ecuación $\delta = 2n\pi$. Para calcular δ para la interferencia por reflexión, consideremos los rayos AB y FD . Trazando el frente de onda BB' , el

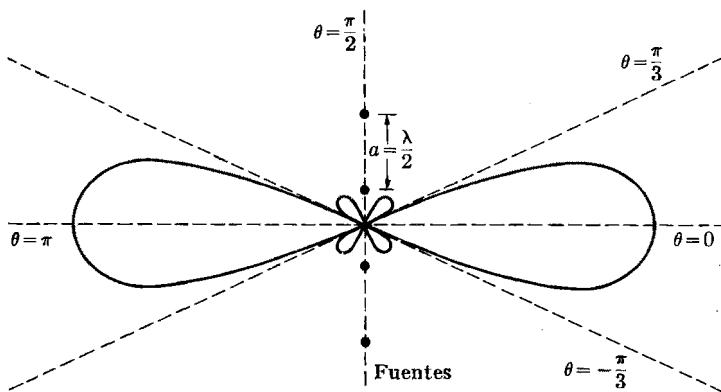


Fig. 22-12. Distribución angular de la intensidad en el diagrama de interferencia producido por ondas generadas por cuatro fuentes coherentes en línea recta y separadas entre sí por media longitud de onda.

defasaje según DE se debe a que los caminos $B'D$ y BCD seguidos por los rayos son recorridos en diferentes tiempos. Ahora bien, en la figura vemos que

$$B'D = BD \operatorname{sen} \theta_i \quad \text{y} \quad BD = 2a \operatorname{tg} \theta_r.$$

Por consiguiente

$$B'D = 2a \operatorname{tg} \theta_r \operatorname{sen} \theta_i = \frac{2an \operatorname{sen}^2 \theta_r}{\cos \theta_r},$$

ya que por la ley de Snell $\operatorname{sen} \theta_i = n \operatorname{sen} \theta_r$. Además $BCD = 2BC = 2a/\cos \theta_r$. Entonces, $t_1 = B'D/c = 2an \operatorname{sen}^2 \theta_r/c \cos \theta_r$ y $t_2 = BCD/v = 2an/c \cos \theta_r$, debido a que $v = c/n$. La diferencia de tiempo es

$$t_2 - t_1 = \frac{2an \cos \theta_r}{c}$$

y la diferencia de fase, ya que $\lambda = 2\pi c/\omega$, es

$$\delta = \omega(t_2 - t_1) = \frac{2a\omega n \cos \theta_r}{c} = \frac{4\pi a n \cos \theta_r}{\lambda}.$$

Este puede no ser el defasaje total porque, como vimos en la sección 20.7, algunas veces la reflexión da lugar a un defasaje adicional de π . Esto ocurre, por ejemplo, en el caso de ondas electromagnéticas cuando luz polarizada perpendicularmente al plano de incidencia va de un medio donde su velocidad es mayor a otro donde es menor. De modo que, en este caso, si $n > 1$ hay un cambio de fase de π para el rayo FD cuando se refleja en D , pero no lo hay para el rayo BC cuando se refleja en C ; lo inverso ocurre cuando $n < 1$. De este modo podemos escribir en los dos casos

$$\delta = \frac{4\pi a n \cos \theta_r}{\lambda} + \pi$$

y, haciendo $\delta = 2N\pi$, donde N es un entero, obtenemos

$$2a n \cos \theta_r = \frac{1}{2}(2N - 1)\lambda$$

(reflexión máxima, transmisión mínima), (22.17)

como condición para que las ondas reflejadas al interferir se refuercen. El estudiante puede verificar por medio de cálculos similares que para ondas transmitidas según DK, la condición para intensidad máxima es

$$2an \cos \theta_r = N\lambda$$

(trasmisión máxima, reflexión mínima). (22.18)

El cambio de fase de π no ocurre en este caso, porque el rayo ha experimentado dos reflexiones internas. La ec. (22.17) da también la condición de trasmisión mínima y la ec. (22.18) da la condición para reflexión mínima. Es interesante notar, entonces, que el color observado por reflexión no es el mismo que el observado por trasmisión. Estos están determinados en cada caso por las longitudes de onda que satisfacen las ecs. (22.17) ó (22.18).

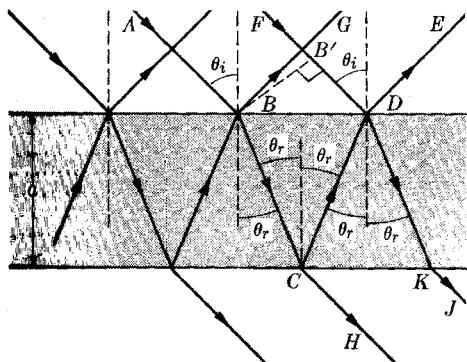
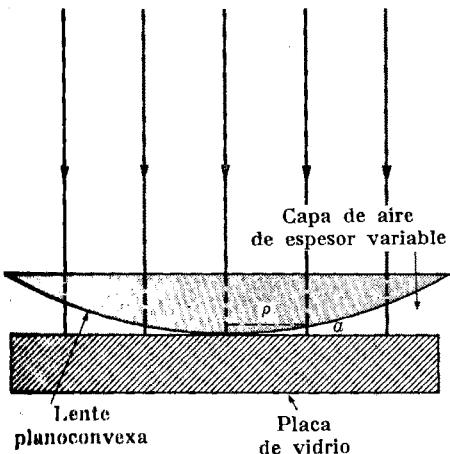


Fig. 22-13. Interferencia por reflexión o refracción en una película delgada.

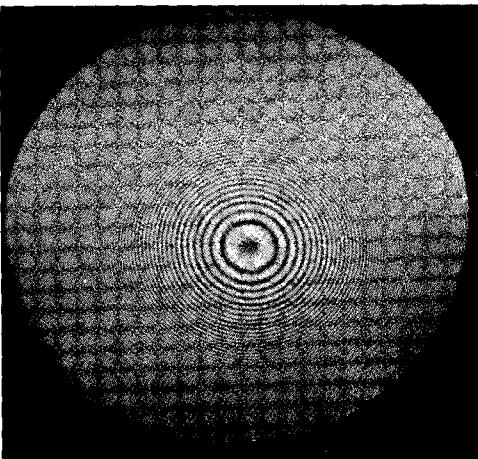
de bandas coloreadas. Se puede ver esto fácilmente colocando una lente planoconvexa sobre una placa de vidrio, como se muestra en la fig. 22-14(a). El espacio entre la lente y la placa de vidrio es una capa de aire de espesor variable. El dia-

y la luz incidente no es monocromática, las ecs. (22.17) y (22.18) dan diferentes valores de θ_r y por lo tanto de θ_i para cada λ . Esto explica los colores que observamos en las películas delgadas de aceite sobre el agua. Además, si la película es de espesor variable, las condiciones (22.17) y (22.18) no se cumplen totalmente en todos los puntos para una longitud de onda dada, lo cual da lugar, en el caso de luz monocromática, a una sucesión de bandas oscuras y brillantes, y en el caso de luz blanca, a una sucesión

fácilmente visible colocando una lente planoconvexa sobre una placa de vidrio, como se muestra en la fig. 22-14(a). El espacio entre la lente y la placa de vidrio es una capa de aire de espesor variable. El dia-



(a)



(b)

Fig. 22-14. Anillos de Newton, formados por interferencia en la película de aire existente en el espacio entre una superficie convexa y una plana. (a) Dibujo esquemático. (b) Fotografía de los anillos. (Cortesía Bausch and Lomb Optical Co.).

grama de interferencia resultante consiste de una serie de anillos concéntricos coloreados, conocidos como *anillos de Newton*, ilustrados en la fig. 22-14(b).

EJEMPLO 22.4. El índice de refracción de una cierta película es 1,42. Determinar el espesor mínimo para que aparezca negra por (a) reflexión, (b) trasmisión, cuando se ilumina con luz de sodio (longitud de onda $5,9 \times 10^{-7}$ m).

Solución: En las ecs. (22.17) y (22.18) vemos que el valor mínimo de a ocurre para el valor máximo de $\cos \theta_r$; o sea, para $\theta_r = 0^\circ$ y desde luego también $\theta_i = 0^\circ$. Esta situación corresponde a incidencia normal. En este caso (con $N = 1$) la condición viene a ser $a = \lambda/4n$ para que no haya trasmisión y $a = \lambda/2n$ para que no haya reflexión. De modo que los valores correspondientes son $a = 1,04 \times 10^{-7}$ m y $a = 2,08 \times 10^{-7}$ m. Como la separación entre átomos es del orden de 10^{-9} m, el espesor mínimo de la película en cada caso es sólo de unos pocos cientos de capas atómicas.

22.4 Ondas estacionarias en una dimensión

En el ejemplo 20.2 estudiamos las ondas que se transmiten y reflejan sobre una cuerda que tiene una discontinuidad en un cierto punto, tal como un cambio en diámetro o en densidad. Consideraremos ahora la situación en que la cuerda tiene un extremo fijo, como se indica en la fig. 22-15, donde el extremo O es el punto fijo. Una onda transversal incidente moviéndose hacia la izquierda y de ecuación $\xi = \xi_0 \operatorname{sen}(\omega t + kx)$ se refleja en O , originando una nueva onda que se propaga hacia la derecha y que tiene por ecuación $\xi = \xi'_0 \operatorname{sen}(\omega t - kx)$. El desplazamiento en cualquier punto de la cuerda es el resultado de la interferencia o superposición

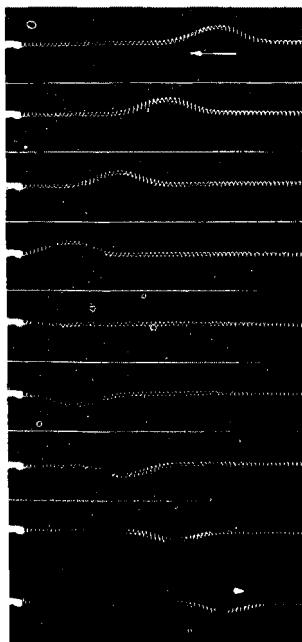
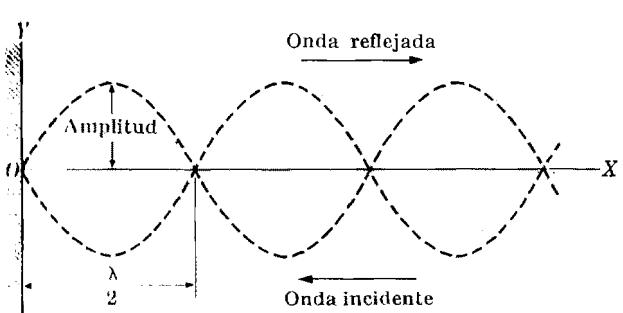


Fig. 22-15. Cambio de fase de una onda reflejada sobre una cuerda que tiene un extremo fijo. (Fotografía cortesía del Educational Services, Inc.).

de estas dos ondas, esto es,

$$\xi = \xi_0 \operatorname{sen}(\omega t + kx) + \xi'_0 \operatorname{sen}(\omega t - kx). \quad (22.19)$$

En el punto O , tenemos $x = 0$, de modo que

$$\xi_{(x=0)} = (\xi_0 + \xi'_0) \operatorname{sen} \omega t.$$

Pero O es fijo, lo cual significa que $\xi_{(x=0)} = 0$ en todo instante. Esto requiere que $\xi'_0 = -\xi_0$. En otras palabras, la onda experimenta un cambio de fase de π cuando se refleja en el extremo fijo. Hemos encontrado este cambio de fase en muchas ocasiones anteriores (ejemplo 20.2 y 20.3). Se puede ver el cambio de fase en la serie de fotografías de la fig. 22-15, las cuales muestran un pulso incidente y uno reflejado. Entonces la ec. (22.19) se convierte en

$$\xi = \xi_0 [\operatorname{sen}(\omega t + kx) - \operatorname{sen}(\omega t - kx)].$$

y utilizando la relación trigonométrica (M.7), $\operatorname{sen} \alpha - \operatorname{sen} \beta = 2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}(\alpha - \beta) \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$, obtenemos

$$\xi = 2\xi_0 \operatorname{sen} kx \cos \omega t. \quad (22.20)$$

Las expresiones $\omega t \pm kx$ no aparecen más y la ec. (22.20) no representa una onda viajera. Efectivamente, esta última expresión representa un movimiento armónico simple cuya amplitud varía de punto a punto y está dada por

$$A = 2\xi_0 \operatorname{sen} kx. \quad (22.21)$$

Esta amplitud se indica con líneas de trazos en la fig. 22-15. La amplitud es cero para $kx = n\pi$, donde n es un número entero. Este resultado también se puede escribir en la forma

$$x = \frac{1}{2}n\lambda. \quad (22.22)$$

Estos puntos se denominan *nodos*. Los nodos sucesivos están separados por una distancia de $\frac{1}{2}\lambda$. Cuando recordamos la expresión (18.30), $v = \sqrt{T/m}$, para la velocidad de propagación de las ondas a lo largo de una cuerda sometida a la tensión T y que tiene una masa m por unidad de longitud, la longitud de onda se determina por

$$\lambda = \frac{2\pi v}{\omega} = \frac{2\pi}{\omega} \sqrt{\frac{T}{m}}, \quad (22.23)$$

y es arbitraria en tanto la frecuencia angular también lo sea.

Supongamos ahora que imponemos una segunda condición: que el punto $x = L$, que es el otro extremo de la cuerda, sea también fijo. Esto significa que $x = L$ es un nodo y debe satisfacer la condición $kL = n\pi$. O, si usamos la ec. (22.22),

$$L = \frac{1}{2}n\lambda \quad \text{o} \quad \lambda = \frac{2L}{n} = 2L, \frac{2L}{2}, \frac{2L}{3}, \dots \quad (22.24)$$

Esta segunda condición limita automáticamente las longitudes de onda de las ondas que pueden propagarse en esta cuerda a los valores dados por la ec. (22.24), y a su vez, en vista de la ec. (22.23), también están limitadas las frecuencias de oscilación a los valores

$$\nu_n = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{T}{m}} = \nu_1, 2\nu_1, 3\nu_1, \dots, \quad (22.25)$$

donde

$$\nu_1 = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{T}{m}}$$

se llama *frecuencia fundamental*. De este modo las posibles frecuencias de oscilación (llamadas *armónicos*) son todos los múltiplos de la fundamental. Podemos decir que las frecuencias y longitudes de onda están *cuantizadas*, y que la cuantización es el resultado de las condiciones de contorno impuestas en ambos extremos de la cuerda. Esta es una situación que aparece en muchos problemas físicos, como tendremos oportunamente ocasión de ver más adelante.

La fig. 22-16 indica la distribución de amplitud para los tres primeros modos de vibración ($n = 1, 2, 3$). Los puntos de máxima amplitud son los *antinodos*. La distancia entre antinodos sucesivos es también $\frac{1}{2}\lambda$. Desde luego que la separación entre un nodo y un antinodo es $\lambda/4$. Observar que mientras que $\xi = 0$ en los nodos $\partial\xi/\partial x = 0$ en los antinodos, ya que la amplitud es máxima.

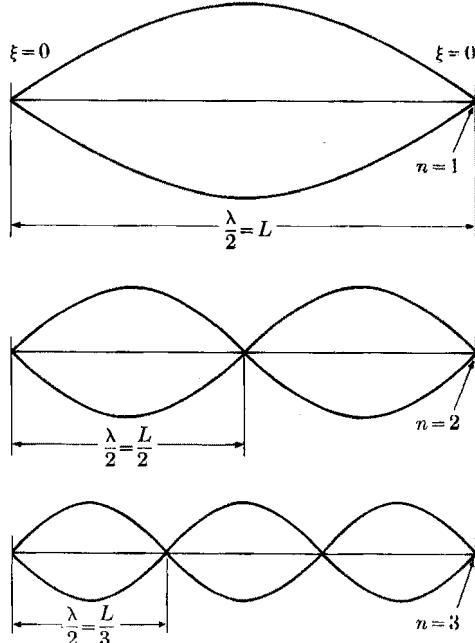


Fig. 22-16. Ondas transversales estacionarias en una cuerda con ambos extremos fijos.

EJEMPLO 22.5. Una cuerda de acero tiene una longitud de 40 cm y un diámetro de 1 mm. Suponiendo que su vibración fundamental es de 440 s^{-1} , correspondiente a la nota musical La en la escala diatónica de la clave de Do, hallar su tensión. (Suponer que la densidad de la cuerda es $\rho = 7,86 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$.)

Solución: La masa por unidad de longitud es $m = \pi r^2 \rho$. Usando

$$r = 5 \times 10^{-4} \text{ m} \quad \text{y} \quad \rho = 7,86 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3},$$

obtenemos $m = 6,15 \times 10^{-8} \text{ kg m}^{-1}$. Despejando de la ec. (22.25) la tensión T , teniendo $n = 1$, ya que queremos el tono fundamental, hallamos $T = 4L^2 m\nu_1^2$. Haciendo

$$L = 40 \text{ cm} = 0,40 \text{ m}, \quad \nu_1 = 440 \text{ s}^{-1},$$

e introduciendo el valor de m ya calculado, obtenemos finalmente

$$T = 762,0 \text{ N.}$$

Como el estudiante puede ahora comprender, los instrumentos musicales de cuerdas se afinan ajustando las tensiones (o longitudes) de sus cuerdas.

22.5 Ondas estacionarias y la ecuación de onda

En el capítulo 18 se estudió la ecuación que regula la propagación de una onda, esto es

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}, \quad (22.26)$$

y probamos que su solución general es de la forma

$$\xi = f_1(x - vt) + f_2(x + vt). \quad (22.27)$$

Cuando discutimos la propagación de ondas en una dirección, usamos $f_1(x - vt)$ ó $f_2(x + vt)$, pero no ambas. Sin embargo, hemos visto que cuando una onda se refleja en un punto, resultan dos ondas que se propagan en sentidos opuestos, y se debe usar la ec. (22.27). Esto fue lo que hicimos en la ec. (20.19) para el caso de una cuerda con un extremo fijo. Entonces, hemos obtenido la ec. (22.20) para el movimiento resultante. La característica importante de la ec. (22.20) (esto es, $\xi = 2\xi_0 \operatorname{sen} kx \cos \omega t$) es que las variables x y t están separadas, con lo cual resulta una amplitud variable a lo largo de la cuerda, pero fija para cada punto. Esta es la característica de las ondas estacionarias. Debemos entonces explorar la posibilidad de hacer una formulación más general de una onda armónica estacionaria. Es posible satisfacer nuestro requerimiento con una expresión de la forma

$$\xi = f(x) \operatorname{sen} \omega t, \quad (22.28)$$

donde $f(x)$ es la amplitud de la onda en un punto x . Como ξ debe ser una solución de la ec. (22.26), debemos sustituir ξ dado en la ec. (22.28) en la ec. (22.26) para determinar la condición sobre la amplitud $f(x)$ para que las ondas sean estacionarias. Ahora bien, por derivación, encontramos

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{d^2 f}{dx^2} \operatorname{sen} \omega t \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\omega^2 f \operatorname{sen} \omega t.$$

Por consiguiente, sustituyendo estos valores en la ec. (22.26) y cancelando el factor común $\operatorname{sen} \omega t$, obtenemos

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = -\frac{\omega^2}{v^2} f$$

o, como $k = \omega/v$,

$$\frac{d^2 f}{dx^2} + k^2 f = 0. \quad (22.29)$$

Esta es entonces la ecuación diferencial que debe satisfacer la amplitud $f(x)$ si la onda estacionaria dada por la ec. (22.28) debe ser una solución de la ecuación de la onda. La solución general de la ec. (22.29), como el estudiante puede verificar por sustitución directa, es

$$f(x) = A \operatorname{sen} kx + B \cos kx, \quad (22.30)$$

donde A y B son constantes arbitrarias. Por consiguiente la ec. (22.28) se convierte en

$$\xi = (A \operatorname{sen} kx + B \cos kx) \operatorname{sen} \omega t. \quad (22.31)$$

Desde luego que podíamos haber usado $\cos \omega t$ en lugar de $\operatorname{sen} \omega t$ con el mismo resultado. En otras palabras, la fase del factor que depende del tiempo no tiene importancia en nuestra discusión.

Las constantes de la ec. (22.31) se determinan con las condiciones de contorno. Ilustremos esto con el problema de la cuerda con extremos fijos estudiado en la sección precedente. Las condiciones son que $\xi = 0$ para $x = 0$ y $x = L$. Haciendo $x = 0$ en la ec. (22.31), tenemos

$$\xi_{(x=0)} = B \operatorname{sen} \omega t = 0.$$

Por lo tanto $B = 0$, y la ec. (22.31) se reduce a

$$\xi = A \operatorname{sen} kx \operatorname{sen} \omega t. \quad (22.32)$$

Ahora si hacemos $x = L$, la ec. (22.32) da

$$\xi_{(x=L)} = A \operatorname{sen} kL \operatorname{sen} \omega t = 0.$$

Pero ahora no podemos hacer $A = 0$, porque ello haría que ξ fuera cero en todos los puntos; esto es, no habría onda. Nuestra única elección es hacer $\operatorname{sen} kL = 0$, lo cual requiere que

$$kL = n\pi \quad ó \quad \lambda = 2L/n, \quad (22.33)$$

donde n es un entero, de conformidad con la ec. (22.24).

Obviamente si en lugar de imponer la condición $\xi = 0$ en los extremos, imponemos otras condiciones debido a que la situación física del problema en los extremos es diferente, como en las cuerdas ilustradas en la fig. 22-17, llegaríamos a soluciones diferentes a las dadas por las ecs. (22.32) y (22.33).

Es instructivo considerar otros dos ejemplos simples, relacionados con las ondas estacionarias en el interior de un tubo con aire, tal como un tubo de órgano.

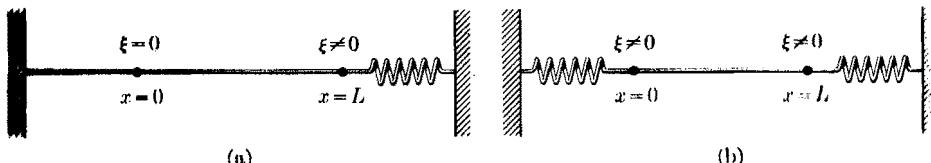


Figura 22-17

Consideremos primero un tubo abierto en ambos extremos (fig. 22-18). Se sopla por uno de ellos a través de la boquilla, y se producen ondas estacionarias debido a la reflexión que ocurre en el otro extremo. La diferencia fundamental entre este caso y el anterior, es que ambos extremos son libres y por consiguiente ξ tiene valor máximo en estos extremos; en otras palabras, hay un antinodo en cada extremo. Nuestras condiciones de contorno correspondientes a antinodos en ambos extremos, son ahora $\xi = \text{máximo}$ ó $\partial\xi/\partial x = 0$ para $x = 0$ y $x = L$. En la ec. (22.31), tenemos

$$\partial\xi/\partial x = k(A \cos kx - B \sin kx) \sin \omega t. \quad (22.34)$$

Haciendo $x = 0$, hallamos

$$(\partial\xi/\partial x)_{x=0} = kA \sin \omega t = 0,$$

de modo que $A = 0$. Entonces la ec. (22.34) se convierte en

$$\partial\xi/\partial x = -kB \sin kx \sin \omega t.$$

Si ahora hacemos $x = L$, tenemos

$$(\partial\xi/\partial x)_{x=L} = -kB \sin kL \sin \omega t = 0.$$

Ahora bien, como en el caso de la cuerda, no puede ser $B = 0$, porque no habría onda, por lo tanto debe ser $\sin kL = 0$, lo cual nos da de nuevo

$$kL = n\pi \quad \text{o} \quad \lambda = 2L/n. \quad (22.35)$$

Esta es idéntica a la ec. (22.33). Las frecuencias de las ondas estacionarias son

$$v_n = v/\lambda = n(v/2L) = v_1, 2v_1, 3v_1, \dots, \quad (22.36)$$

con $n = 1, 2, 3, \dots$, y por lo tanto las frecuencias posibles comprenden todos los armónicos correspondientes al tono fundamental de frecuencia $v_1 = v/2L$. En la ec. (22.31) vemos que en este caso, con $A = 0$, $\xi = B \cos kx \sin \omega t$. En la fig. 22-18 las líneas de trazos indican la distribución de amplitud para los casos $n = 1, 2, 3$. Concluimos entonces que las oscilaciones de una columna de aire abierta en ambos extremos son equivalentes a las de una cuerda con ambos extremos fijos, pero las posiciones de los nodos y antinodos están intercambiadas.

Como segundo ejemplo, consideremos un tubo con el extremo opuesto al de la boquilla (fig. 22-19), cerrado. Las condiciones físicas en ese extremo se han cambiado, mientras que en la boquilla son las mismas que en el caso anterior. Por consiguiente en la boquilla debemos tener de nuevo un antinodo, ó $\partial\xi/\partial x = 0$ para $x = 0$ pero en el extremo cerrado ($x = L$) debemos tener un nodo, ó $\xi = 0$ para $x = L$. La primera condición, en $x = 0$, requiere, como en el ejemplo previo, que $A = 0$, de modo que la ec. (22.31) se convierte en

$$\xi = B \cos kx \sin \omega t.$$

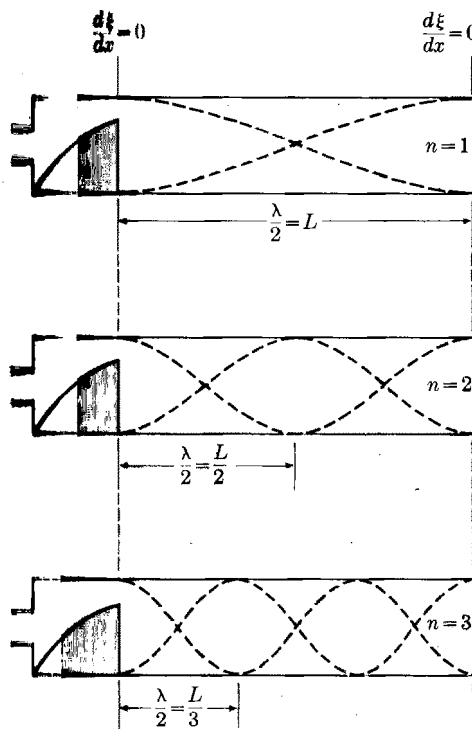


Fig. 22-18. Ondas de presión estacionarias en una columna de aire abierta en ambos extremos.

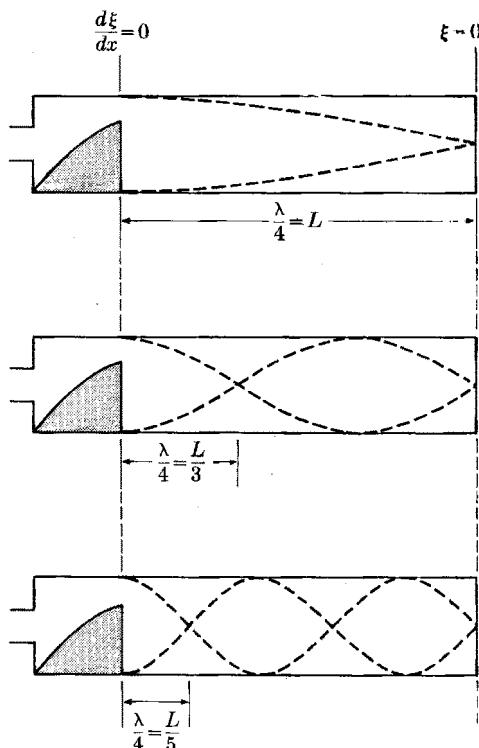


Fig. 22-19. Ondas de presión estacionarias en una columna de aire cerrada en un extremo.

Aplicando las condiciones de contorno al extremo cerrado, $x = L$, obtenemos

$$\xi_{(x=L)} = B \cos kL \sin \omega t = 0.$$

Entonces requiere que $\cos kL = 0$. En otras palabras

$$kL = (2n + 1) \frac{\pi}{2} \quad \text{o} \quad \lambda = \frac{4L}{2n + 1}, \quad (22.37)$$

con la frecuencia correspondiente

$$v = \frac{v}{\lambda} = (2n + 1) \frac{v}{4L} = v_1, 3v_1, 5v_1, \dots \quad (22.38)$$

Los modos de vibración son ahora diferentes de los dados por las ecs. (22.35) y (22.36), que corresponden a un tubo abierto en ambos extremos. La fig. (22.19) muestra los puntos nodales y ventrales para el caso del tubo abierto-cerrado para $n = 0, 1$ y 2 . La característica más importante es que un tubo cerrado en un extremo puede vibrar sólo con armónicos impares del fundamental $v_1 = v/4L$.

Para longitudes iguales, la frecuencia fundamental de un tubo cerrado es la mitad de la de un tubo abierto.

Una solución de la ecuación de onda del tipo (22.31) corresponde a una onda armónica estacionaria de frecuencia angular ω . En general, sin embargo, la perturbación establecida inicialmente no corresponde a una frecuencia particular. A fin de determinar las longitudes de onda y frecuencias involucradas, se debe hacer un análisis de Fourier de la perturbación inicial. La perturbación en un instante posterior es

$$\xi = \sum_{\omega} (A \operatorname{sen} kx + B \cos kx) \operatorname{sen} \omega t, \quad (22.39)$$

donde $k = \omega/c$ y los coeficientes A y B se determinan mediante un análisis de Fourier. Pero la ec. (22.39) no representa una onda estacionaria en el sentido definido antes (esto es, una onda cuya amplitud depende de la posición) porque, debido a la sumatoria, las variables de tiempo y posición no están completamente separadas.

EJEMPLO 22.6. Un resorte de masa m_0 , longitud L y constante elástica k se suspende de un punto fijo y tiene una esferilla de masa M fija al extremo libre. La esferilla se desplaza verticalmente de su posición de equilibrio y entonces se libera.

Determinar su frecuencia de oscilación.

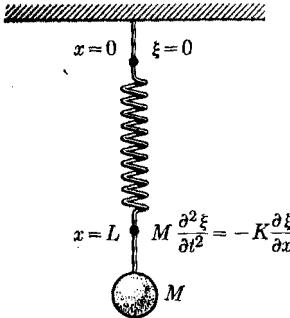


Figura 22-20

Solución: Este problema es similar al discutido en la sección 12.3, y estaríamos tentados de decir que la frecuencia angular es $\omega = \sqrt{k/M}$ que fue lo que hicimos en aquel ejemplo (aquí llamamos k a la constante elástica del resorte para evitar confusión con el número de onda, designado por k). Sin embargo, encontraremos que esta frecuencia es correcta sólo cuando la masa del resorte es despreciable en comparación con la masa de la esferilla. En la fig. 22-20 vemos que cuando colgamos la masa M , el resorte se estira hasta que la fuerza hacia arriba que se produce sobre M equilibra su peso. Si M se pone a oscilar, se producen ondas en el resorte que viajan hacia arriba y hacia abajo, originando ondas estacionarias. La frecuencia de oscilación de M se determina por la de las ondas estacionarias producidas en el resorte. Designemos el desplazamiento de cada sección del resorte por ξ . La condición de contorno en el extremo fijo, $x = 0$, es $\xi = 0$. Esto requiere que $B = 0$ en la ec. (22.31) de modo que el desplazamiento de cada sección del resorte está dado por

$$\xi = A \operatorname{sen} kx \operatorname{sen} \omega t.$$

En el extremo libre del resorte, M está acelerada por la fuerza que ejerce el resorte, la cual, de acuerdo al ejemplo 18.5, es $-K(\partial\xi/\partial x)_{x=L}$ donde $K = kL$ es el módulo de elasticidad del resorte, tal como fue definido en aquél ejemplo. El signo negativo aparece porque el sentido positivo para ξ es hacia abajo y la fuerza está orientada hacia arriba (o negativa) cuando $\partial\xi/\partial x$ es positiva. Por consiguiente la ecuación de movimiento de M es

$$M \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \right)_{x=L} = -K \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_{x=L}$$

Entonces la ecuación da la condición de contorno en el extremo libre del resorte. La ecuación anterior se puede escribir (usando la expresión dada para ξ anteriormente) como

$$-M\omega^2 \sin kL = -Kk \cos kL.$$

Haciendo $k = \omega/v$ y recordando que $m = m_0/L$ es la masa del resorte por unidad de longitud y $v = \sqrt{K/m}$ según el resultado obtenido en el ejemplo 18.5, tenemos

$$\frac{\omega L}{v} \operatorname{tg} \frac{\omega L}{v} = \frac{KL}{Mv^2} = \frac{mL}{M} = \frac{m_0}{M}.$$

Esta es una ecuación del tipo $\theta \operatorname{tg} \theta = \text{constante}$, que determina los posibles valores de la frecuencia angular ω . Es una ecuación transcendente que no se puede resolver por métodos algebraicos ordinarios. Sin embargo, cuando el resorte es muy llviano de modo que v es muy grande, podemos usar la aproximación $\operatorname{tg} \theta = \theta + \frac{1}{3}\theta^3 + \dots$, que es válida cuando θ es muy pequeño [ver ec. (M.27)]. Entonces el primer miembro de la ecuación se convierte en

$$\frac{\omega L}{v} \left[\frac{\omega L}{v} + \frac{1}{3} \left(\frac{\omega L}{v} \right)^3 + \dots \right] = \left(\frac{\omega L}{v} \right)^2 \left[1 + \frac{1}{3} \left(\frac{\omega L}{v} \right)^2 + \dots \right].$$

Recordando que $K = \kappa L$, y de este modo $v = \sqrt{K/m} = L\sqrt{\kappa/m_0}$, tenemos $\omega L/v = \omega\sqrt{m_0/\kappa}$, de modo que

$$\frac{\omega^2 m_0}{\kappa} \left(1 + \frac{\omega^2 m_0}{3\kappa} + \dots \right) = \frac{m_0}{M}$$

0 101

$$\omega^2 \left(1 + \frac{\omega^2 m_0}{3\kappa} + \dots\right) = \frac{\kappa}{M}.$$

Como una primera aproximación, si m_0 es muy pequeño, podemos despreciar el segundo término dentro del paréntesis, resultando $\omega^2 = \kappa/M$ ó $\omega = \sqrt{\kappa/M}$, que es el valor que usamos en la sección 12.3. Como una segunda aproximación, introducimos este valor de ω en el segundo término del paréntesis, con la cual resulta,

$$\omega^2 \left(1 + \frac{1}{3} \frac{m_0}{M} + \dots\right) = \frac{\kappa}{M} \quad \text{or} \quad \omega = \sqrt{\frac{\kappa}{M + 4m_0}}.$$

Por consiguiente el efecto del resorte sobre la frecuencia angular ω es equivalente a aumentar la masa del cuerpo en un tercio de la masa del resorte. Esta expresión da la frecuencia fundamental; pero además hay armónicos que no son múltiplos enteros del fundamental (Ver problema 22.43.)

22.6 Ondas electromagnéticas estacionarias

Los fenómenos de interferencia y difracción son tan característicos de las ondas que su presencia ha sido siempre aceptada por los físicos como prueba concluyente para que un proceso sea interpretado como un movimiento ondulatorio. Por esta razón, cuando en el siglo diecisiete Young, Grimaldi y otros observaron interferencia y difracción en sus investigaciones sobre la luz, la teoría ondulatoria de la luz llegó a ser generalmente aceptada. En aquel tiempo las ondas electromagnéticas no eran conocidas y se suponía que la luz era una onda elástica que se propagaba en un medio sutil, llamado éter, que llenaba todo el espacio, pene-

trando incluso la materia. Fue hacia fines del siglo diecinueve que Maxwell predijo la existencia de las ondas electromagnéticas, y Hertz, por medio de experimentos de interferencia que daban lugar a ondas electromagnéticas estacionarias, verificó la existencia de tales ondas en la banda de las radiofrecuencias. Más adelante se midió su velocidad encontrándose que era igual a la de la luz. También se encontró que la reflexión, refracción y polarización de las ondas electromagnéticas eran similares a las de la luz. La conclusión obvia fue identificar la luz con ondas electromagnéticas de ciertas frecuencias. A partir de ese momento, para todos los intentos y propósitos, la óptica dejó de ser una rama independiente de la física y se convirtió simplemente en un capítulo de la teoría electromagnética.

Para comprender la formación de ondas electromagnéticas estacionarias, supongamos que las ondas producidas por un dipolo eléctrico oscilante inciden perpendicularmente sobre la superficie plana de un conductor perfecto (fig. 22-21). Tomando el eje X en la dirección de propagación y los ejes Y y Z paralelos al campo eléctrico y al campo magnético, respectivamente, tenemos una onda polarizada en un plano, con el campo eléctrico oscilando en el plano XY. Entonces el campo eléctrico es paralelo a la superficie del conductor. Pero en la superficie de un conductor perfecto el campo eléctrico debe ser perpendicular al mismo; esto es, el campo eléctrico no puede tener componente tangencial (ver sección 16.5). El único modo de que esta condición sea compatible con la orientación del campo eléctrico de la onda incidente es imponiendo que el campo eléctrico resultante sea cero en la superficie del conductor. Esto significa que el campo eléctrico correspondiente a la onda reflejada en la superficie es igual y opuesto al de la onda incidente, obteniéndose de este modo $\epsilon = 0$ para $x = 0$. Esta condición es matemáticamente equivalente a la encontrada para la reflexión de ondas en una cuerda con un extremo fijo, estudiada en la sección 22.5. Como la matemática es la misma,

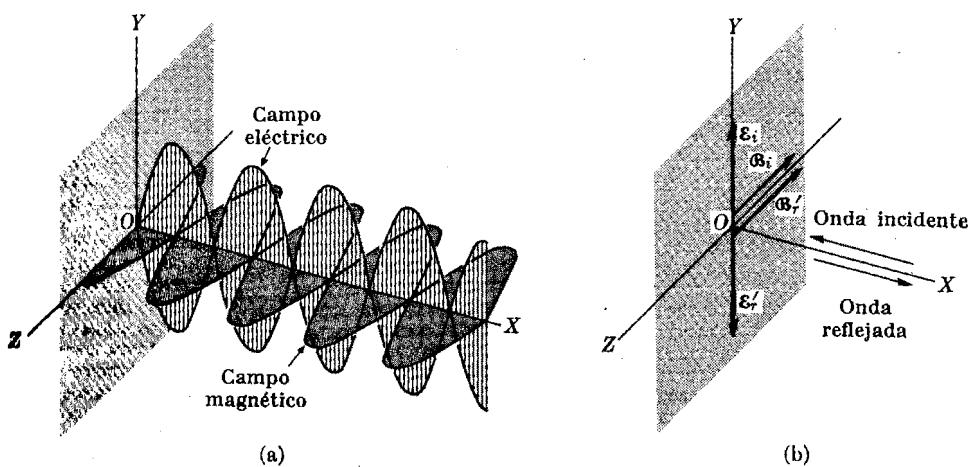


Fig. 22-21. Ondas electromagnéticas estacionarias producidas por reflexión en una superficie conductora.

podemos usar la ec. (22.20) y escribir la expresión para el campo eléctrico resultante,

$$\mathcal{E} = 2\mathcal{E}_0 \operatorname{sen} kx \operatorname{sen} \omega t.$$

El campo magnético oscila en el plano XZ. Usando la ec. (19.4), encontramos que el campo magnético se expresa por

$$\mathcal{B} = 2\mathcal{B}_0 \cos kx \cos \omega t,$$

donde $\mathcal{B}_0 = \mathcal{E}_0 k / \omega = \mathcal{E}_0 / c$. Por consiguiente hay un desfase de $\frac{1}{2}\lambda$ en las variaciones en el espacio y de $\frac{1}{2}P$ en las variaciones en el tiempo de los dos campos. En la expresión matemática de \mathcal{B} se observa que el campo tiene amplitud máxima en la superficie. Se puede deducir esto aplicando las condiciones de contorno en la superficie. Refiriéndonos a la fig. 22-21(b), vemos que si el campo eléctrico de la onda incidente está en la dirección del eje +Y, el campo magnético debe rotar en la dirección del eje -Z, de acuerdo a la orientación relativa de los dos campos con respecto a la dirección de propagación de las ondas incidentes, las cuales están según el eje -X. Para que el campo eléctrico resultante sea cero en la superficie, el campo eléctrico de la onda reflejada debe estar según el eje -Y, y como la onda reflejada se propaga según el eje X, el campo magnético debe estar orientado según el eje -Z. Así, aunque el campo eléctrico interfiere destructivamente en la superficie, el campo magnético lo hace constructivamente.

Las amplitudes de los campos eléctrico y magnético de la onda resultante a la distancia x de la superficie son $2\mathcal{E}_0 \operatorname{sen} kx$ y $2\mathcal{B}_0 \cos kx$. Las mismas limitan, respectivamente, las zonas rayada y sombreada en la fig. 22-21(a). En los puntos

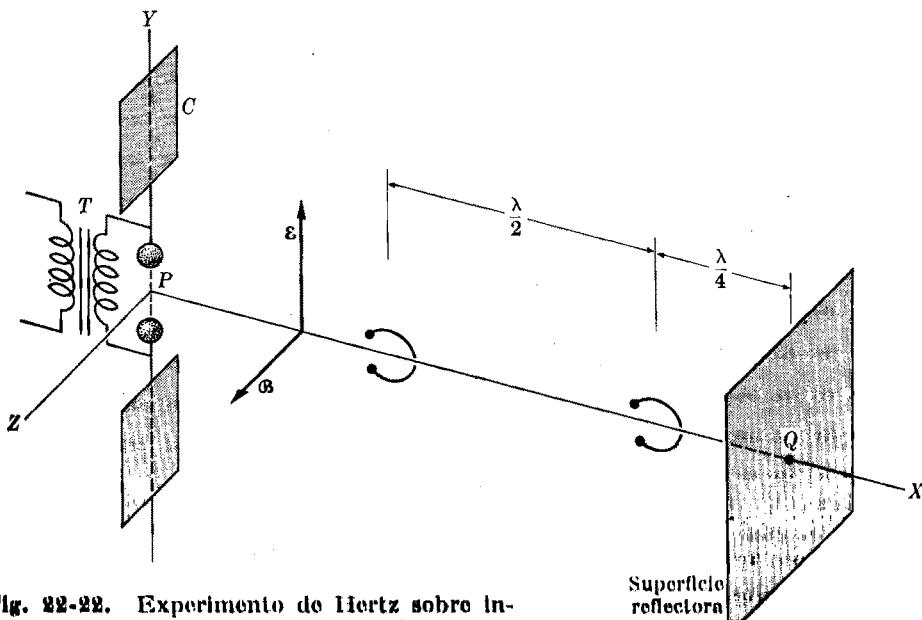


Fig. 22-22. Experimento de Hertz sobre interferencia de ondas electromagnéticas.

donde $kx = n\pi$ ó $x = \frac{1}{2}n\lambda$ el campo eléctrico es cero y el campo magnético es máximo. En los puntos donde $kx = (n + \frac{1}{2})\pi$ ó $x = (2n + 1)\lambda/4$, el campo eléctrico es máximo, pero el campo magnético es nulo.

Es instructivo ver cómo Heinrich Hertz verificó estas predicciones teóricas en 1888 con su equipo primitivo. El oscilador de Hertz se muestra a la izquierda de la fig. 22-22. El transformador T carga las placas metálicas C y C' . Estas placas se descargan a través de la abertura P que se convierte en un dipolo oscilante. También se indican en la figura las direcciones de los campos \mathcal{E} y \mathcal{B} . Para observar las ondas Hertz usó un alambre corto doblado en forma circular, pero con una pequeña abertura. Este dispositivo se denomina *resonador*. El diámetro del resonador usado en esta clase de experimento debe ser muy pequeño comparado con la longitud de onda de las ondas. Si el resonador se coloca con su plano perpendicular al campo magnético de la onda, la variación del campo magnético induce una fem en el resonador, con lo cual se produce una chispa en la abertura. Si el plano del resonador es paralelo al campo magnético, no se induce fem y no se observan chispas en la abertura.

Para producir ondas electromagnéticas estacionarias, Hertz colocó una superficie reflectora (hecha de un buen conductor) en Q . En tal caso, cuando el resonador está en un nodo del campo magnético, no se induce fem, cualquiera sea su orientación. Pero en un antinodo del campo magnético, la chispa más grande se obtiene cuando el resonador se orienta perpendicularmente al campo magnético. Al mover el resonador a lo largo de la linea PQ , Hertz encontró la posición de los nodos y de los antinodos y la dirección del campo magnético. Los resultados obtenidos por Hertz coinciden con el análisis teórico que hemos dado. Midiendo la distancia entre dos nodos sucesivos, Hertz pudo calcular la longitud de onda λ y como conocía la frecuencia v del oscilador, pudo calcular la velocidad c de las ondas electromagnéticas usando la ecuación $c = \lambda v$. Por este medio fue que Hertz obtuvo el primer valor experimental de la velocidad de propagación de las ondas electromagnéticas.

22.7 Ondas estacionarias en dos dimensiones

Consideremos ahora una membrana rectangular estirada sobre un marco de modo que sus bordes estén fijos. Si la superficie de la membrana se perturba, se producen ondas que se propagan en todas direcciones y se reflejan en los bordes, originando interferencia. Consideremos el caso especial en que se generen ondas planas de una sola frecuencia en la membrana. Además supongamos que estas ondas se propagan paralelamente a cada lado del marco, como se indica en la fig. 22-23. En lugar de nodos y antinodos obtenemos líneas nodales y líneas antinodales o ventrales, que se designan por n y v en la fig. 22-23. En la fig. 22-23(a), la membrana está fija a la izquierda ($x = 0$) y a la derecha ($x = a$), pero los otros dos lados están libres. Las ondas se propagan según el eje X en ambos sentidos, con lo cual resulta un sistema de líneas nodales y antinodales paralelas al eje Y . En $x = 0$ y $x = a$ debemos tener líneas nodales. Por consiguiente la condición

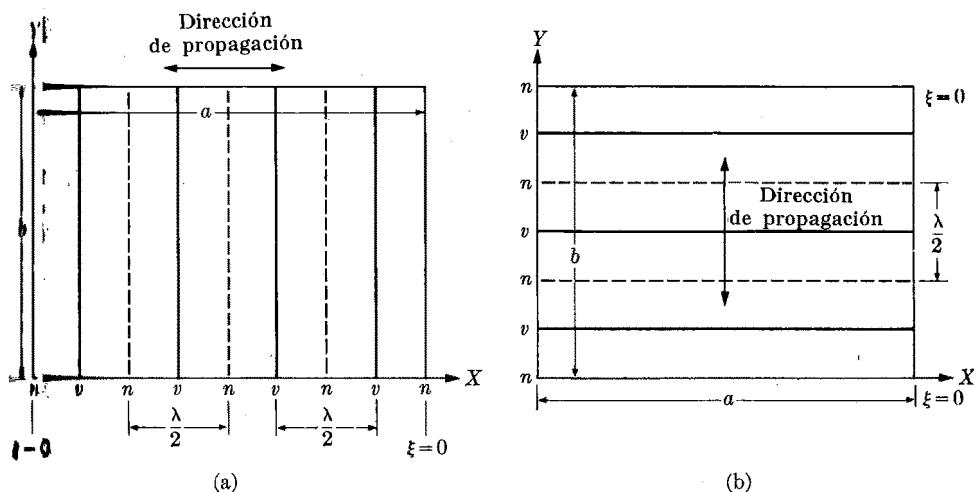


Fig. 22-28. Ondas estacionarias en una membrana.

para ondas estacionarias es similar a la ec. (22.23), esto es,

$$ka = n\pi \quad \text{ó} \quad \lambda = 2a/n. \quad (22.40)$$

Las frecuencias correspondientes son

$$\nu = v/\lambda = n(v/2a), \quad (22.41)$$

donde v es la velocidad de propagación de las ondas en la superficie de la membrana, tal como se obtuvo en el ejemplo 18.12. Estas ondas se describen por una expresión similar a la ec. (22.32),

$$\xi = A \operatorname{sen} kx \operatorname{sen} \omega t, \quad (22.42)$$

ya que el problema es matemáticamente el mismo. La adición de la segunda dimensión no ha cambiado nuestras condiciones de contorno que siguen siendo $\xi = 0$ para $x = 0$ y $x = a$. La simetría sugiere que la coordenada y no desempeña ningún papel hasta tanto no se fije la membrana a lo largo de los lados paralelos a la dirección de propagación.

En la fig. 22-23(b) la membrana está fija abajo ($y = 0$) y arriba ($y = b$). Para las ondas que se propagan paralelamente al eje Y las líneas nodales y antinodales son paralelas al eje X . La condición para las ondas estacionarias es similar a la ec. (22.40), reemplazando a por b , obteniéndose

$$kb = n\pi \quad \text{ó} \quad \lambda = 2b/n, \quad (22.43)$$

con frecuencias

$$\nu = v/\lambda = n(v/2b), \quad (22.44)$$

que son diferentes de las dadas en la ec. (22.41) para ondas paralelas al eje X. La ecuación de las ondas estacionarias es

$$\xi = A \operatorname{sen} ky \operatorname{sen} \omega t.$$

A continuación consideremos una membrana con sus cuatro lados fijos y ondas planas propagándose en una dirección arbitraria sobre su superficie. Recordemos primero que una onda plana en dos dimensiones, haciendo $z = 0$ en la ec. (18.46), se expresa por

$$\xi = \xi_0 \operatorname{sen} [\omega t - (k_1 x + k_2 y)],$$

donde hemos seguido la convención de escribir el factor tiempo primero. Las cantidades k_1 y k_2 son las componentes en el plano XY del vector \mathbf{k} paralelo a la dirección de propagación y de longitud $k = 2\pi/\lambda = \omega/v$. Entonces:

$$k = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}. \quad (22.45)$$

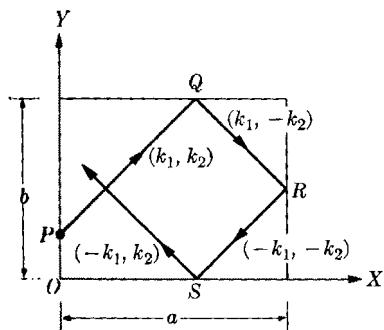


Fig. 22-24. Reflexiones sucesivas de una onda en una membrana rectangular.

Para un rayo inicial PQ (fig. 22-24), caracterizado por las componentes k_1 y k_2 , hay un rayo reflejado QR caracterizado por k_1 y $-k_2$. De R a S el rayo está caracterizado por $-k_1$, $-k_2$, y de S en adelante el rayo se caracteriza por las componentes $-k_1$, k_2 . En las sucesivas reflexiones de este rayo, no aparecen nuevas combinaciones de k_1 y k_2 . Concluimos entonces que a lo largo de la membrana hay un sistema de cuatro ondas, debidas a la reflexión en los cuatro lados. (Esto es diferente de los problemas en una dimensión, en los cuales sólo aparecen dos ondas.) Estas cuatro ondas deben interferir de tal modo que para

$x = 0$ y $x = a$, y para $y = 0$ e $y = b$, el valor resultante de ξ sea cero. Un procedimiento algebraico directo muestra (como veremos en el ejemplo 22.7) que los valores de k_1 y k_2 satisfacen las condiciones

$$k_1 a = n_1 \pi \quad \text{o} \quad k_1 = \frac{n_1 \pi}{a}, \quad (22.46)$$

$$k_2 b = n_2 \pi \quad \text{o} \quad k_2 = \frac{n_2 \pi}{b},$$

donde n_1 y n_2 son enteros. Entonces por la ec. (22.45) tenemos

$$k = \pi \sqrt{\frac{n_1^2}{a^2} + \frac{n_2^2}{b^2}}, \quad (22.47)$$

y para las posibles frecuencias tenemos

$$v = \frac{v}{2} \sqrt{\frac{n_1^2}{a^2} + \frac{n_2^2}{b^2}}. \quad (22.48)$$

Debemos observar ahora que las posibles frecuencias ya no son múltiplos de una frecuencia fundamental, sino que siguen una secuencia más irregular. Las posibles longitudes de onda están dadas por

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{n_1^2}{a^2} + \frac{n_2^2}{b^2}}. \quad (22.49)$$

El diagrama de líneas nodales, obtenido usando la ec. (22.49), está dado por $k_1x = n'_1\pi$ y $k_2y = n'_2\pi$, donde n'_1 y n'_2 son enteros menores que n_1 y n_2 respectivamente, y forman los diagramas rectangulares que se ilustran en la fig. 22-25.

El problema de la membrana circular es matemáticamente más complejo; sin embargo, una vez más encontramos que son posibles sólo ciertas frecuencias.

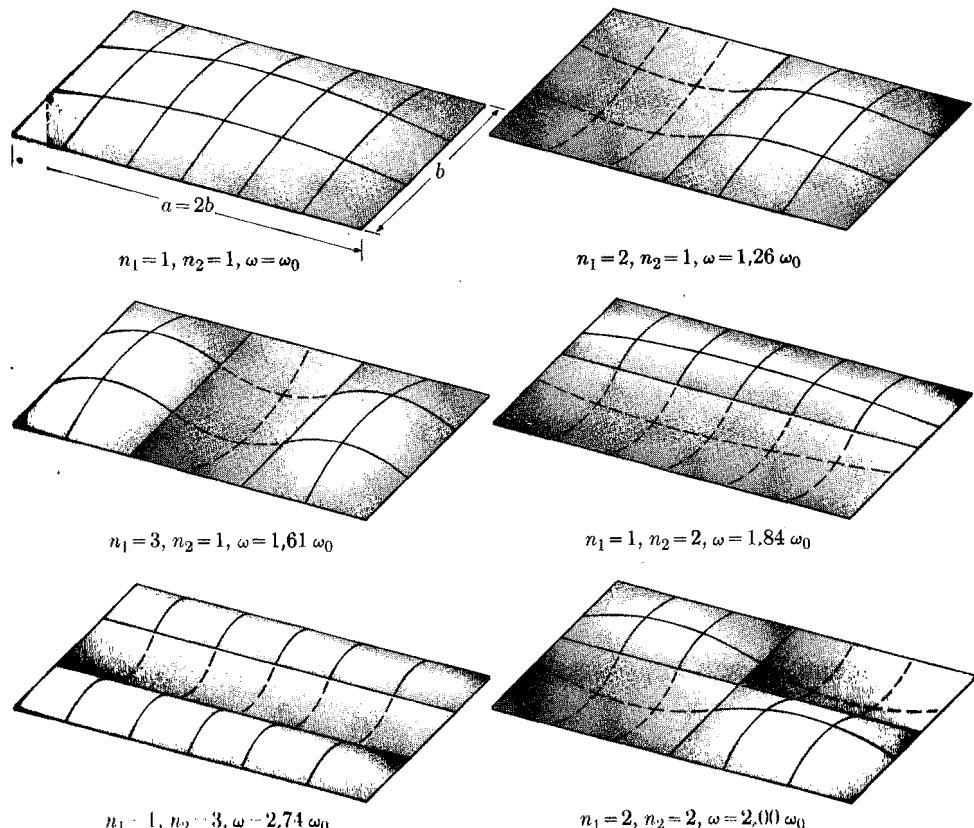


Fig. 22-25. Primeros modos de vibración de una membrana rectangular, mostrando líneas nodales. La frecuencia de cada modo está dada en función de la frecuencia fundamental $\omega_0 = \pi v/b$.

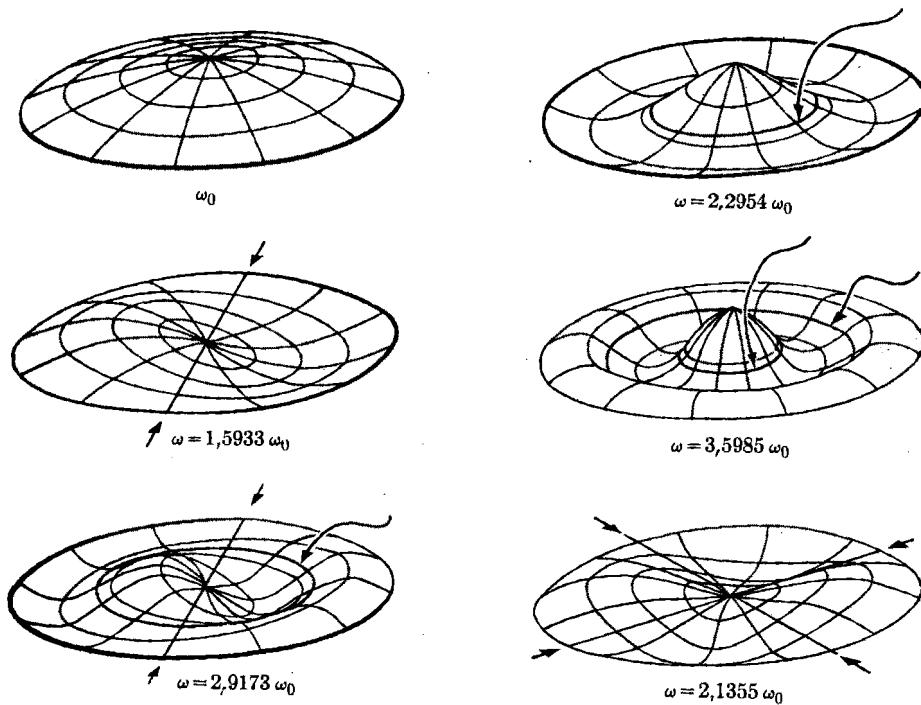


Fig. 22-26. Algunos posibles modos de vibración de una membrana circular. Las líneas nodales se indican con flechas. La frecuencia de cada modo está dada en función de la frecuencia fundamental ω_0 .

La simetría sugiere que en este caso las líneas nodales son circunferencias y radios, como se indica en la fig. 22.26 para algunos de los modos posibles.

EJEMPLO 22.7. Deducir las condiciones (22.46).

Solución: Hemos dicho que sobre la membrana hay una superposición de cuatro ondas que corresponden a las cuatro combinaciones posibles de $\pm k_1$ y $\pm k_2$. El sistema de las cuatro ondas da una resultante ξ , de acuerdo a

$$\begin{aligned} \xi &= \xi_0 \operatorname{sen} [\omega t - (k_1 x + k_2 y)] \\ &+ \xi'_0 \operatorname{sen} [\omega t - (k_1 x - k_2 y)] \\ &+ \xi''_0 \operatorname{sen} [\omega t - (-k_1 x - k_2 y)] \\ &+ \xi'''_0 \operatorname{sen} [\omega t - (-k_1 x + k_2 y)], \end{aligned} \quad (22.50)$$

que es la equivalente de la ec. (22.19) para una dimensión. Ahora bien, para todos los puntos donde $x = 0$, debemos tener $\xi = 0$. Haciendo $x = 0$ en la ec. (22.50) y agrupando los términos equivalentes, podemos escribir

$$\xi = (\xi_0 + \xi''_0) \operatorname{sen} (\omega t - k_2 y) + (\xi'_0 + \xi'''_0) \operatorname{sen} (\omega t + k_2 y) = 0,$$

lo cual requiere que

$$\xi_0 + \xi''_0 = 0, \quad \xi'_0 + \xi'''_0 = 0. \quad (22.51)$$

Además, para todos los puntos donde $y = 0$, debemos tener $\xi = 0$ de modo que la ec. (22.50) produce

$$\xi = (\xi_0 + \xi'_0) \operatorname{sen}(\omega t - k_1 x) + (\xi''_0 + \xi'''_0) \operatorname{sen}(\omega t + k_1 x) = 0,$$

lo que una vez requiere que

$$\xi_0 + \xi'_0 = 0, \quad \xi''_0 + \xi'''_0 = 0. \quad (22.52)$$

Combinando las ecs. (22.51) y (22.52), encontramos

$$\xi_0 = -\xi'_0 = \xi''_0 = -\xi'''_0,$$

que da los cambios de fase correspondientes a cada reflexión, de conformidad con el resultado similar en el caso de una cuerda. Por consiguiente la ec. (22.50) se convierte en

$$\xi = \xi_0 [\operatorname{sen}[\omega t - (k_1 x + k_2 y)] - \operatorname{sen}[\omega t - (k_1 x - k_2 y)] + \operatorname{sen}[\omega t - (-k_1 x - k_2 y)] - \operatorname{sen}[\omega t - (-k_1 x + k_2 y)]].$$

Transformando cada línea de la ecuación anterior en un producto, por medio de la ec. (M.12), tenemos

$$\begin{aligned} \xi &= 2\xi_0 [-\operatorname{sen} k_2 y \cos(\omega t - k_1 x) + \operatorname{sen} k_2 y \cos(\omega t + k_1 x)] \\ &= 2\xi_0 \operatorname{sen} k_2 y [-\cos(\omega t - k_1 x) + \cos(\omega t + k_1 x)]. \end{aligned}$$

Transformando de nuevo la diferencia de los cosenos en un producto, obtenemos

$$\xi = -4\xi_0 \operatorname{sen} k_1 x \operatorname{sen} k_2 y \operatorname{sen} \omega t, \quad (22.53)$$

que es la equivalente en dos dimensiones de la ec. (22.20). El signo negativo al frente carece de importancia y no tiene significado especial. Podemos verificar nuestra primera condición de contorno haciendo $x = 0$ ó $y = 0$, y observando que obtenemos $\xi = 0$, que constituye nuestra condición.

Podemos ahora verificar el segundo grupo de condiciones de contorno; esto es, $\xi = 0$ para $x = a$ ó $y = b$. Estas condiciones requieren que $\operatorname{sen} k_1 a = 0$ ó $\operatorname{sen} k_2 b = 0$ con lo cual resulta $k_1 a = n_1 \pi$ y $k_2 b = n_2 \pi$. Estas son las condiciones (22.46).

22.8 Ondas estacionarias en tres dimensiones; cavidades resonantes

El problema de las ondas estacionarias en tres dimensiones es una simple extensión del caso de dos dimensiones. Consideremos una cavidad rectangular de lados a , b y c , de paredes perfectamente reflectoras (fig. 22-27) de modo que $\xi = 0$ en las seis caras. Una onda plana en el espacio está caracterizada por un vector \mathbf{k} , perpendicular al plano de la onda con tres componentes k_1 , k_2 y k_3 según los tres ejes. Cuando se produce una onda en el interior de la cavidad, se refleja sucesivamente en todas las caras estableciéndose un grupo de ocho ondas que resultan de las diferentes combinaciones posibles entre $\pm k_1$, $\pm k_2$ y $\pm k_3$. La interferencia o superposición de estas ocho ondas da lugar a ondas estacionarias si las componentes k_1 , k_2 , k_3 de \mathbf{k} tienen los valores apropiados. Por analogía con la ec. (22.46), estos valores son

$$k_1 a = n_1 \pi, \quad k_2 b = n_2 \pi, \quad k_3 c = n_3 \pi, \quad (22.54)$$

$$k_1 = n_1 \pi/a, \quad k_2 = n_2 \pi/b, \quad k_3 = n_3 \pi/c,$$

donde n_1, n_2, n_3 son enteros. Como $k = \sqrt{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2}$, podemos escribir

$$k = \pi \sqrt{\frac{n_1^2}{a^2} + \frac{n_2^2}{b^2} + \frac{n_3^2}{c^2}}, \quad (22.55)$$

y las posibles frecuencias de las ondas estacionarias en la cavidad son

$$\nu = \frac{v}{2} \sqrt{\frac{n_1^2}{a^2} + \frac{n_2^2}{b^2} + \frac{n_3^2}{c^2}}. \quad (22.56)$$

Una cavidad tal como la que se muestra en la fig. 22-27 podrá mantener ondas de frecuencias dadas por la ec. (22.56) y será por consiguiente resonante.

En el caso de una cavidad esférica o cilíndrica, el tratamiento matemático es más complejo, pero se encuentra de nuevo que sólo ciertas frecuencias son permitidas.

Los resultados que hemos obtenido para ondas estacionarias en cavidades encuentran muchas aplicaciones. En acústica, por ejemplo, las cavidades resonantes se usan para el análisis del sonido. Las cavidades resonantes para ondas electromagnéticas tienen paredes construidas con materiales de gran conductividad eléctrica, de modo que reflejen lo mejor posible. Estas cavidades pueden sostener ondas electromagnéticas estacionarias de frecuencias definidas, con poca atenuación de las mismas por energía perdida en la reflexión. Esto significa que las

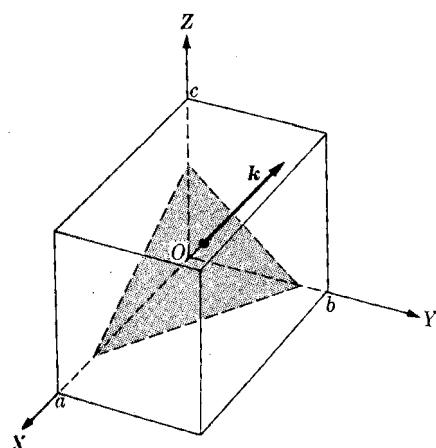


Figura 22-27

cavidades sirven como depósitos de energía electromagnética. La teoría detallada de las ondas electromagnéticas estacionarias en cavidades es ligeramente más complicada de lo que nuestra discusión puede indicar, debido al carácter transversal de las ondas. Pero resultados tales como la ec. (22.56) permanecen iguales. Tales cavidades se usan para análisis o medida de frecuencias (de la misma manera que los resonadores acústicos), como control de frecuencia en circuitos oscilantes y para medir las propiedades de los materiales que llenan la cavidad.

EJEMPLO 22.8. Determinar el número de modos diferentes de oscilación para frecuencias iguales o menores que ν en una cavidad cúbica de lado a .

Solución: Si la cavidad es cúbica, $a = b = c$ en la ec. (22.56), y las frecuencias posibles son

$$\nu = (v/2a) \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}$$

o sea

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 4\nu^2 a^2 / v^2. \quad (22.57)$$

En un sistema de referencia en el cual las coordenadas son n_1, n_2, n_3 (fig. 22-28), la ec. (22.57) representa una esfera de radio $2\nu a/v$. Nuestro problema es hallar todas

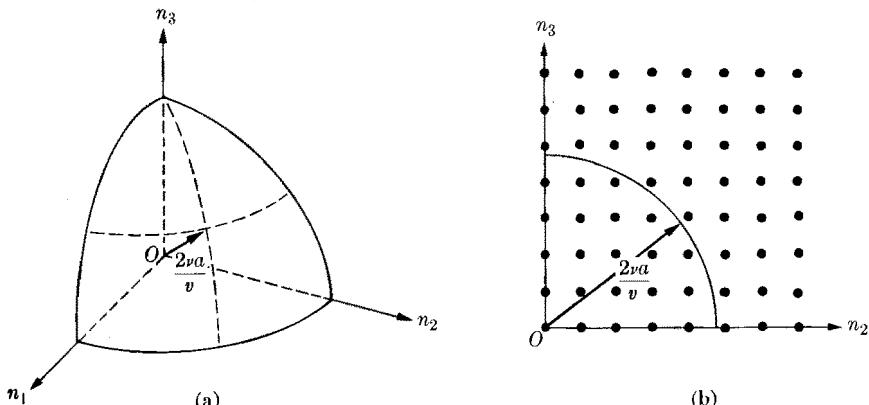


Figura 22-28

las combinaciones posibles de los enteros n_1 , n_2 y n_3 que satisfagan

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 \leq 4\pi^2 a^2/v^2.$$

Si el radio es muy grande, el número de combinaciones posibles es igual al volumen del octante de la esfera que se muestra en la fig. 22-28(a); como a cada conjunto, de enteros n_1 , n_2 y n_3 podemos asociar una celda de volumen unidad, como se indica con puntos en la fig. 22.28(b), entonces el número de modos de oscilación de frecuencia igual o menor que v es

$$N_v = \frac{1}{8} \cdot \frac{4\pi}{3} \left(\frac{2\pi a}{v} \right)^3 = \frac{4\pi a^3 v^3}{3v^3}.$$

Como a^3 es el volumen de la cavidad, si dividimos por este número obtenemos el número de modos por unidad de volumen, o sea

$$n_{v,L} = \frac{4\pi v^3}{3v^3}. \quad (22.58)$$

El subíndice L se agrega porque este resultado sólo es válido para ondas longitudinales. Si las ondas son transversales tenemos para cada modo dos estados de polarización independientes y diferentes, de modo que en lugar de la ec. (22.58), debemos escribir

$$n_{v,T} = \frac{8\pi v^3}{3v^3}. \quad (22.59)$$

Algunas veces es conveniente conocer el número de modos en un intervalo de frecuencias dv lo cual se escribe en la forma $dn_v = g(v)dv$. Diferenciando la ec. (22.58), tenemos

$$dn_{v,L} = g_L(v)dv = \frac{4\pi v^2}{v^3} dv, \quad (22.60)$$

mientras que para ondas transversales se obtiene de la ec. (22.59)

$$dn_{v,T} = g_T(v)dv = \frac{8\pi v^2}{v^3} dv. \quad (22.61)$$

Estos resultados son muy útiles en muchos cálculos.

22.9 Guías de onda

Las cavidades estudiadas hasta ahora permiten sólo ondas estacionarias. Pero hay también la posibilidad de producir ondas viajeras en ciertas regiones llamadas *guías de onda*, que son cavidades largas abiertas en ambos extremos. Las ondas que entran por uno de ellos se reciben en el otro. Discutiremos en detalle un tipo simple de guía que consiste en dos planos paralelos separados una distancia a (fig. 22-29). Si se establece una onda en el interior de la cavidad, formando un ángulo con los planos, determinado por las componentes k_1 y k_2 del vector \mathbf{k} , paralela y perpendicular respectivamente a los planos, esta onda experimenta sucesivas reflexiones en las superficies de la cavidad, rebotando entre ellas. Como el espacio no está limitado en la dirección paralela a los planos (como sucede con las cavidades), la onda continuará progresando hacia la derecha. Tomemos el eje X paralelo a los planos y el eje Y perpendicular a los mismos de modo que

el vector \mathbf{k} quede en el plano XY . En la fig. 22-29 hemos indicado la trayectoria de un rayo particular. A lo largo de PQ el rayo está caracterizado por las componentes k_1 y k_2 ; desde Q hasta R , está caracterizado por las componentes k_1 y $-k_2$. Desde R en adelante de nuevo lo caracterizan k_1 y k_2 . Concluimos entonces que en el espacio entre los planos reflectores tenemos dos grupos de ondas viajeras, correspondientes a k_1 , k_2 y k_1 , $-k_2$ respectivamente. (Recordar que en el caso de ondas estacionarias de dos dimensiones, tales como

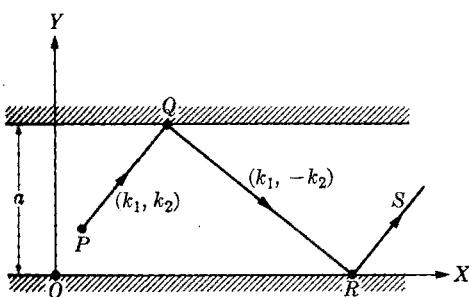


Fig. 22-29. Rayo propagándose entre dos planos reflectores paralelos.

las que se producen en una membrana, tenemos cuatro ondas, debido a las ondas adicionales que se generan por reflexiones en los extremos derecho e izquierdo.) Estas dos ondas interfieren dando lugar al movimiento ondulatorio resultante (como se mostrará en el ejemplo 22.9) descrito por la expresión

$$\xi = -2\xi_0 \operatorname{sen} k_2 y \cos (\omega t - k_1 x), \quad (22.62)$$

donde

$$k_2 = n\pi/a, \quad (22.63)$$

para satisfacer la condición de contorno $\xi = 0$ para $y = a$.

La ec. (22.62) difiere profundamente de los resultados que hemos obtenido para otras clases de ondas estacionarias, en que la coordenada x no está separada, sino que todavía aparece en un término de la forma $\cos(\omega t - k_1 x)$. Este término corresponde a una onda que viaja según el eje X con una velocidad de fase

$$v_p = \frac{\omega}{k_1} = \left(\frac{k}{k_1} \right) v. \quad (22.64)$$

Como k_1 es una componente de \mathbf{k} , entonces $k_1 \leq k$, y la ec. (22.64) indica que la velocidad de fase de la onda que viaja a lo largo de la cavidad es mayor que la velocidad de fase $v = \omega/k$ de la onda en el espacio libre. De modo que para las ondas electromagnéticas, la velocidad de fase será mayor que c . Ahora, de $k^2 = -k_1^2 + k_2^2$ y de la ec. (22.63), tenemos que

$$k^2 = k_1^2 + \frac{n^2\pi^2}{a^2}$$

o bien

$$k_1 = \sqrt{k^2 - \frac{n^2\pi^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{\omega^2}{v^2} - \frac{n^2\pi^2}{a^2}}, \quad (22.65)$$

y que $k = \omega/v$. La velocidad de grupo asociada con la velocidad de fase dada por la ec. (22.64) es, según las ecs. (18.58) y (22.65),

$$v_g = \frac{d\omega}{dk_1} = \frac{k_1}{\omega} v^2 = \left(\frac{k_1}{k} \right) v, \quad (22.66)$$

la cual es menor que v ya que $k_1 \leq k$. Multiplicando las ecs. (22.64) y (22.66), obtenemos $v_p v_g = v^2$, o para las ondas electromagnéticas en el vacío ($v = c$), $v_p v_g = c^2$, resultado encontrado previamente en el ejemplo 19.9 para una situación diferente. Vemos entonces que, aún en el vacío, una guía de onda electromagnética actúa como un medio dispersivo de índice de refracción menor que uno, y por lo tanto una velocidad de fase mayor que c , pero una velocidad de grupo menor que c .

La ec. (22.65) también indica otra propiedad importante de las guías de onda. Como k_1 debe ser un número real, a fin de que una onda se propague a lo largo de la guía de onda, es necesario que $\omega^2/v^2 \geq n^2\pi^2/a^2$, lo cual da

$$\omega \geq n\pi v/a \quad \text{o} \quad v \geq nv/2a. \quad (22.67)$$

En otras palabras, sólo aquellas ondas cuyas frecuencias satisfacen la ec. (22.67) se propagan a lo largo de la guía. Cada modo está determinado por el valor de n , y para cada modo hay una frecuencia de corte igual a $n\pi v/a$ por debajo de la cual la propagación es imposible. Las guías de onda actúan entonces como filtros de frecuencia.

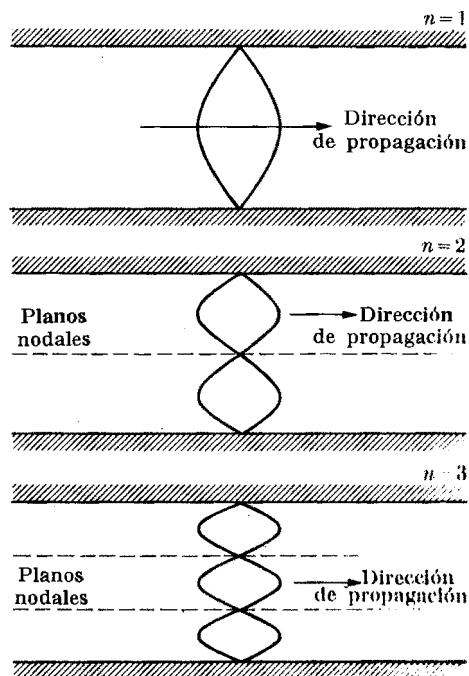


Fig. 22-80. Tres primeros modos de propagación de una onda entre dos planos reflectores paralelos.

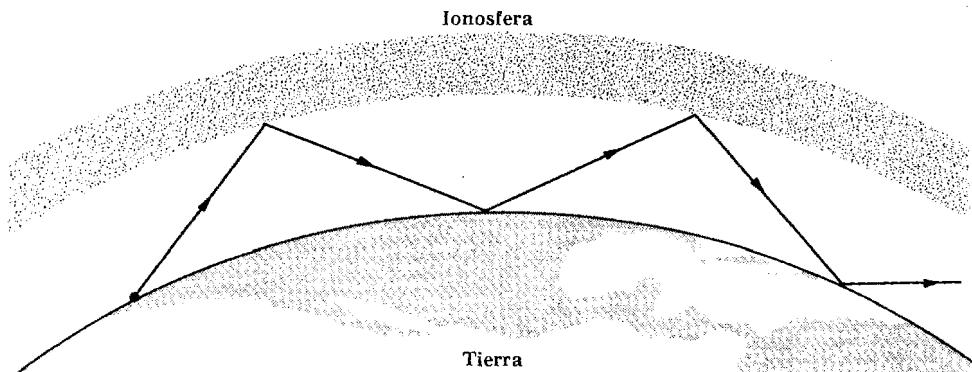


Fig. 22-31. El espacio comprendido entre la ionosfera y la tierra actúa como una guía de onda para las ondas de radio.

Aunque la onda se propaga en el interior de la guía de onda según el eje X, la amplitud está modulada transversalmente en la dirección del eje Y por el factor $\sin k_2 y$ de la ec. (22.62). La variación transversal de la amplitud se indica en la fig. 22-30 para $n = 1, 2$ y 3 . En la práctica las guías de onda tienen en general una sección transversal rectangular o circular. Las dos formas producen resultados similares con respecto a la velocidad de fase a lo largo del eje de la guía y con respecto a la frecuencia de corte.

Aunque nuestra discusión sobre la guía de ondas es válida para cualquier clase de ondas, para las ondas electromagnéticas la situación tiene algunas peculiaridades. Debido al carácter transversal de éstas, para cada k hay dos posibles modos, dependiendo de la orientación relativa del campo eléctrico con respecto a los lados de la guía de onda. Las guías de onda para las ondas electromagnéticas se usan extensamente en la región de las microondas con la finalidad de transmitir señales.

Es interesante observar que el espacio entre la superficie de la tierra y la ionosfera, que está aproximadamente a 80 km de altura, forma una guía de onda que

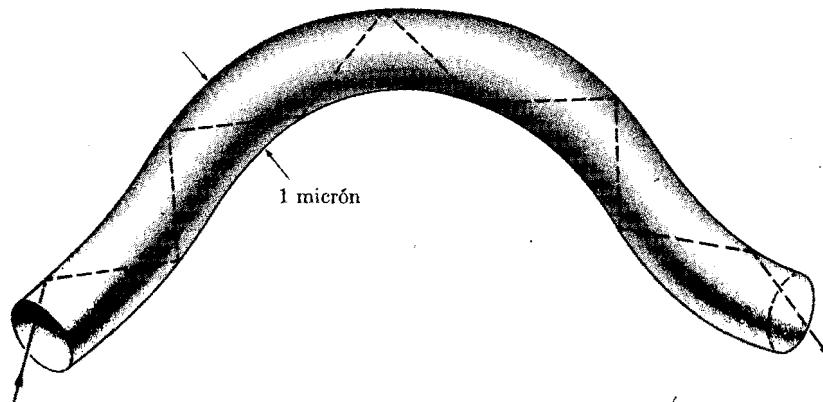


Fig. 22-32. Las fibras ópticas actúan como guías de onda para la luz.

permite la propagación de ondas de radio alrededor de la tierra, como se ilustra en la fig. 22-31.

Un ejemplo simple de guía de onda de planos paralelos en la región óptica, es el de los dos espejos paralelos tales como los que se encuentran en algunas barbillas. Otro tipo de guía de onda óptica consiste en filamentos transparentes con un diámetro de pocos micrones, llamadas fibras ópticas. Estas fibras se hacen de vidrio o cuarzo, aunque se están probando otros materiales, como el nylon. Un rayo que entra por un extremo sigue el eje de la fibra como consecuencia de varias reflexiones y sale por el otro extremo (fig. 22-32). Cuando las fibras disponen en haces, se puede trasmisir una imagen de un punto a otro. Las guías de onda acústicas también son muy comunes. Los conductos de aire del sistema de calefacción de una casa, por ejemplo, actúan como guías de onda acústicas siendo capaces de trasmisir ruidos desde la caldera o sonidos de una habitación a otra. El oído interno es esencialmente una guía de onda acústica.

EJEMPLO 22.9. Deducir las ecs. (22.62) y (22.63).

Solución: Las dos ondas que se propagan a lo largo de la guía dan lugar a una onda resultante descrita por la expresión

$$\xi = \xi_0 \operatorname{sen} [\omega t - (k_1 x + k_2 y)] + \xi'_0 \operatorname{sen} [\omega t - (k_1 x - k_2 y)], \quad (22.68)$$

la cual debe ser comparada con la ec. (22.50). Para determinar ξ'_0 imponemos la condición $\xi = 0$ en todos los puntos de la superficie inferior; esto es, $y = 0$. Haciendo $y = 0$ en la ec. (22.68), tenemos

$$\xi = (\xi_0 + \xi'_0) \operatorname{sen} (\omega t - k_1 x) = 0,$$

de modo que $\xi_0 + \xi'_0 = 0$ ó $\xi'_0 = -\xi_0$, resultado que era de esperar según nuestra experiencia previa para situaciones similares. Entonces la ec. (22.68) se convierte en

$$\xi = \xi_0 \{\operatorname{sen} [\omega t - (k_1 x + k_2 y)] - \operatorname{sen} [\omega t - (k_1 x - k_2 y)]\}.$$

Transformando la diferencia entre los dos senos en un producto, podemos escribir

$$\xi = -2\xi_0 \operatorname{sen} k_2 y \cos (\omega t - k_1 x). \quad (22.69)$$

Haciendo $y = 0$, verificamos que se satisface la condición de contorno en el plano inferior. La condición de contorno en el plano superior ($y = a$) es también $\xi = 0$. Esto requiere que $\operatorname{sen} k_2 a = 0$, con lo cual resulta $k_2 a = n\pi$ ó $k_2 = n\pi/a$. Sin embargo, no hay condición de contorno para la coordenada x .

EJEMPLO 22.10. Discutir las ondas electromagnéticas en una guía de onda de planos paralelos.

Solución: Como quedó explicado, las ondas electromagnéticas en guías tienen sus propias peculiaridades, debidas al carácter transversal de las mismas y a las condiciones de contorno en la superficie del conductor. Estas condiciones de contorno son: (1) el campo eléctrico es normal y (2) el campo magnético es tangencial a la superficie del conductor. Una solución posible de las ecuaciones de Maxwell que satisface estas condiciones para una guía de ondas planas es la dada por la ec. (19.12); esto es, $E_y = E_0 \operatorname{sen} (\omega t - kx)$, $B_z = B_0 \operatorname{sen} (\omega t - kx)$ con $B_0 = E_0/c$. Las líneas de fuerza del campo eléctrico se indican con líneas en la fig. 22-33 y las del campo magnético con puntos y cruces. En este caso la guía de onda no cambia la velocidad de fase de la onda, la cual se propaga con la misma velocidad de fase $c = \omega/k$, co-

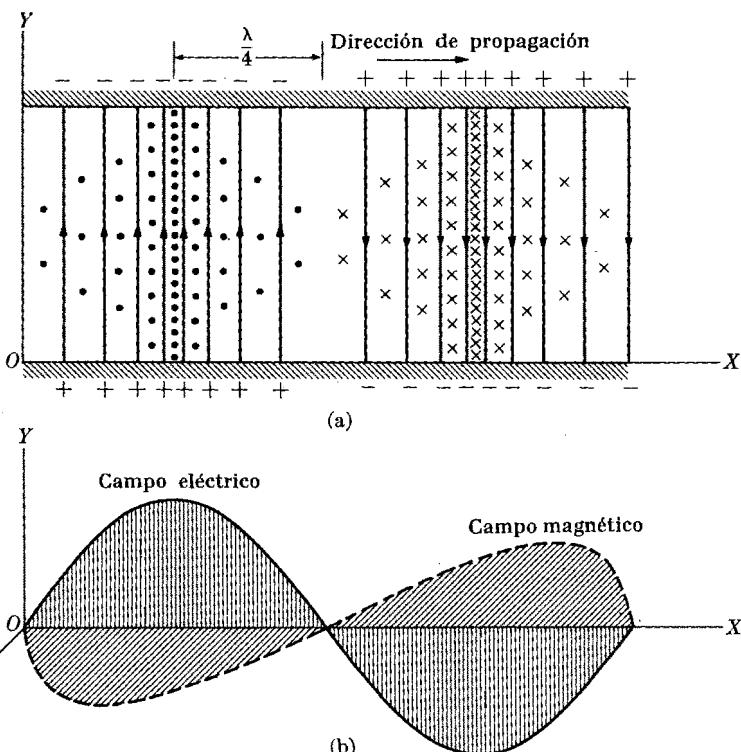


Fig. 22-33. (a) Líneas de fuerza de los campos eléctrico (líneas verticales) y magnético (puntos y cruces) en el plano XY para una onda electromagnética que se propaga paralelamente a los dos planos reflectores paralelos al plano XY . (b) Campos eléctrico y magnético de la onda descrita en la parte (a).

rrespondiente a la propagación en el espacio libre; la guía de onda limita solamente el frente de onda.

Pero las ecuaciones de Maxwell admiten otras soluciones que también satisfacen nuestras condiciones de contorno. Una solución posible es

$$\mathcal{E}_x = \mathcal{E}_y = 0, \quad \mathcal{E}_z = \mathcal{E}_0 \operatorname{sen} k_2 y \cos (\omega t - k_1 x),$$

$$\mathcal{B}_x = -\frac{k_2}{\omega} \mathcal{E}_0 \cos k_2 y \operatorname{sen} (\omega t - k_1 x),$$

$$\mathcal{B}_y = -\frac{k_1}{\omega} \mathcal{E}_0 \operatorname{sen} k_2 y \cos (\omega t - k_1 x), \quad \mathcal{B}_z = 0.$$

Este se puede verificar por sustitución directa en las ecuaciones de Maxwell. Esta solución se llama TE (*transversal eléctrica*), debido a que el campo eléctrico es transversal mientras que el magnético tiene una componente según la dirección de propagación efectiva, o eje X . Los campos eléctrico y magnético son, sin embargo, perpendiculares entre sí. Para satisfacer las condiciones de contorno en ambos planos conductores, debemos hacer $\mathcal{E}_z = 0$ y $\mathcal{B}_y = 0$ para $y = 0$ e $y = a$. La primera se satisface automáticamente, mientras que la segunda requiere que $\operatorname{sen} k_2 a = 0$ o sea $k_2 a = n\pi$, de modo que se obtiene la condición dada por la ec. (22.63). La

Fig. 22-34(a) muestra las líneas de fuerza para el modo mínimo, $n = 1$. Las líneas de fuerza del campo eléctrico son rectas paralelas a los planos (perpendiculares a la página) por lo tanto se indican con puntos o cruces, mientras que las líneas de fuerza del campo magnético son las curvas cerradas. Cada diagrama ocupa la mitad de la longitud de onda efectiva $2\pi/k_1$, y los diagramas sucesivos tienen una diferencia de fase de π . Los diagramas viajan a lo largo de la guía con la velocidad de fase $v_p = \omega/k_1$.

Otra posible solución de las ecuaciones de Maxwell es

$$\mathcal{E}_x = -\frac{k_2}{k_1} \mathcal{E}_0 \operatorname{sen} k_2 y \operatorname{sen}(\omega t - k_1 x),$$

$$\mathcal{E}_y = \mathcal{E}_0 \cos k_2 y \cos(\omega t - k_1 x), \quad \mathcal{E}_z = 0,$$

$$\mathcal{B}_x = \mathcal{B}_y = 0, \quad \mathcal{B}_z = -\frac{\omega}{k_1 c^2} \mathcal{E}_0 \cos k_2 y \cos(\omega t - k_1 x).$$

También se puede verificar esto por sustitución directa en las ecuaciones de Maxwell. Esta segunda solución, se designa TM (*transversal magnética*) y se le da este nombre porque el campo magnético es transversal. El campo eléctrico, sin embargo,

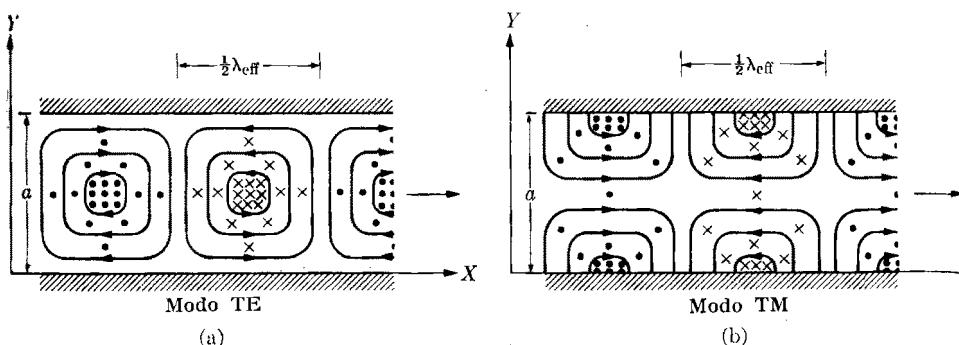


Fig. 22-34. Guías de onda para ondas electromagnéticas. (a) Campo eléctrico perpendicular a la página, o modo TE. (b) Campo magnético perpendicular a la página, o modo TM.

tiene una componente a lo largo de la dirección efectiva de propagación. Ambos campos permanecen perpendiculares entre sí. Para satisfacer las condiciones de contorno en los planos conductores, debemos hacer $\mathcal{E}_z = 0$ para $y = 0$ e $y = a$. La primera se satisface automáticamente, y la segunda requiere, una vez más, que $\operatorname{sen} k_2 a = 0$, o sea $k_2 a = n\pi$, de modo que se obtiene de nuevo la condición dada por la ec. (22.63). Por consiguiente ambos modos tienen la misma frecuencia de corte.

La fig. 22-34(b) muestra las líneas de fuerza para el modo más bajo, $n = 1$. Las líneas de fuerza del campo magnético son ahora líneas rectas paralelas a los planos (perpendiculares a la página) y se indican por puntos o cruces, mientras que las líneas de fuerza del campo eléctrico corresponden a los diagramas que se muestran. Como en el caso TE cada diagrama ocupa la mitad de la longitud de onda efectiva $2\pi/k_1$, y los diagramas viajan a lo largo de la guía con la velocidad de fase $v_p = \omega/k_1$.

La solución general de las ecuaciones de Maxwell que satisface las condiciones de contorno de este problema es una combinación lineal de los modos TE y TM.

Bibliografía

1. "Discovery of Interference by Thomas Young". R. Pohl, *Am. J. Phys.* **28**, 530 (1960)
2. "Microwave Optics", C. Andrews, *The Physics Teacher* **2**, 55 (1964)
3. "Measuring Artificial Star Separation by Interference", M. Pryor, *Am. J. Phys.* **27**, 101 (1959)
4. "The 210-Foot Radio Telescope at Parkes", E. Bowen, *The Physics Teacher* **4**, 99 (1966)
5. "Fiber Optics", N. Kapany, *Sci. Am.*, noviembre 1960, pág. 72
6. *Light: Principles and Experiments*, G. Monk. Dover Press, New York, 1963, caps. 10 y 11
7. *Fundamentos de óptica*, B. Rossi. Reverté, Barcelona, 1966, cap. 3
8. *Great Experiments in Physics*, Morris Shamos, editor. Holt, Rinehart and Winston, 1959, cap. 7 (Young)
9. *Foundations of Electromagnetic Theory*, J. R. Reitz y F. J. Milford. Addison-Wesley, Reading, Mass., 1960, secs. 16-5 a 16-7
10. *The Feynman Lectures on Physics*, R. Feynman, R. Leighton y M. Sands. Addison-Wesley, Reading, Mass., 1963, vol. I, cap. 29; vol. II, caps. 23 y 24
11. *Source Book in Physics*, W. F. Magie. Harvard University Press, Cambridge, Mass., 1963, pág. 315 (Young)
12. *Foundations of Modern Physical Science*, G. Holton y D. H. D. Roller. Addison-Wesley, Reading, Mass., 1958, sec. 30.5

Problemas

22.1 Dos rendijas separadas por una distancia de 1 mm se iluminan con luz roja de longitud de onda $6,5 \times 10^{-7}$ m. Las franjas de interferencia se observan sobre una pantalla colocada a 1 m de las rendijas. (a) Hallar la distancia entre dos franjas brillantes y entre dos franjas oscuras. (b) Determinar la distancia de la tercera franja oscura y de la quinta franja brillante, a partir de la franja central.

22.2 Por medio de un *biprisma de Fresnel* (fig. 22-4) se producen franjas de interferencia sobre una pantalla distante 0,80 m del biprisma, usando luz de longitud de onda igual a $6,0 \times 10^{-7}$ m. Hallar la distancia entre las dos imágenes producidas por el biprisma si 21 franjas cubren una distancia de 2,4 mm sobre la pantalla.

22.3 Demostrar que si se coloca una fuente a una distancia d de un biprisma de Fresnel de índice n y ángulo A muy pequeño, la distancia entre las dos imá-

genes es $a = 2(n - 1)Ad$, donde A se expresa en radianes. Calcular el espaciamiento de las franjas producidas por una fuente de luz verde de longitud de onda 5×10^{-7} m colocada a 5 cm del biprisma, que tiene un índice de 1,5 y un ángulo de 2° . La pantalla está a 1 m del biprisma.

22.4 La fig. 22-35 muestra la disposición llamada *espejo de Lloyd*, el cual produce diagramas de interferencia. Las

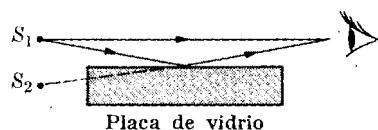


Figura 22-35

fuentes coherentes de luz son S_1 y su imagen S_2 , que se debe a la reflexión en la superficie superior de la placa de vidrio. Por consiguiente los rayos que

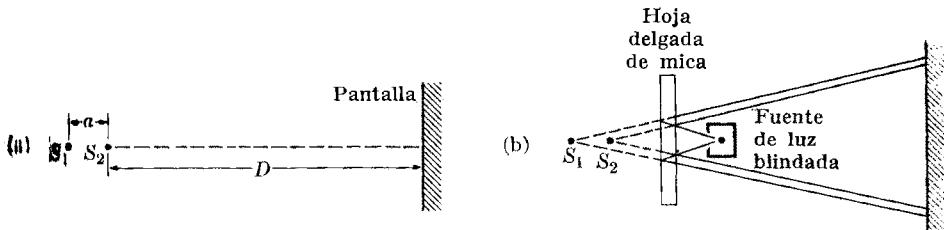


Figura 22-36

Interfieren son los que provienen directamente de la fuente y los reflejados por el vidrio. ¿Qué concluirá ud. acerca del cambio de fase por reflexión si la franja correspondiente a una diferencia de camino igual a cero es (a) brillante, (b) oscura? En el experimento real se obtiene el resultado (b). Es de esperar este resultado en vista de la discusión de la sección 20.7?

22.5 En el espejo de Lloyd, la rendija que actúa como fuente S_1 y su imagen virtual S_2 yacen en un plano situado 20 cm detrás del borde izquierdo del espejo (ver fig. 22-35). El espejo tiene 30 cm de longitud y la pantalla se coloca en el borde derecho. Calcular la distancia desde este borde al primer máximo luminoso, si la distancia perpendicular desde S_1 al espejo es 2 mm y si $\lambda = 7,2 \times 10^{-7}$ m.

22.6 Discutir el diagrama de interferencia que se produce sobre una pantalla cuando las fuentes S_1 y S_2 están separadas una pequeña distancia a y colocadas según una línea perpendicular a la pantalla (fig. 22-36a). Experimentalmente las dos fuentes podrían ser las dos imágenes de una fuente luminosa producidas

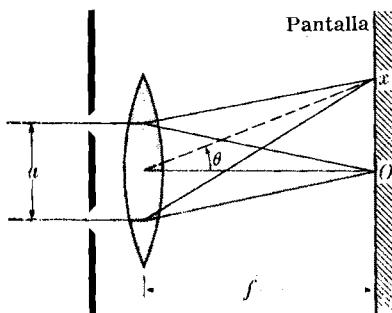


Figura 22-37

por reflexión en las dos caras de una lámina delgada de mica (fig. 22-36b). Esta disposición se llama *interferómetro de Pohl*.

22.7 Dos fuentes de ondas sonoras sincronizadas trasmiten ondas de igual intensidad a una frecuencia de 680 Hz. Las fuentes están separadas 0,75 m. La velocidad del sonido es 340 m s⁻¹. Hallar las posiciones de intensidad mínima: (a) sobre la línea que pasa por las fuentes, (b) en el plano perpendicular bisector de la línea que une las fuentes, (c) en un plano que contiene las dos fuentes. (d) ¿Es nula la intensidad para algún mínimo?

22.8 Una técnica para observar un diagrama de interferencia producido por dos

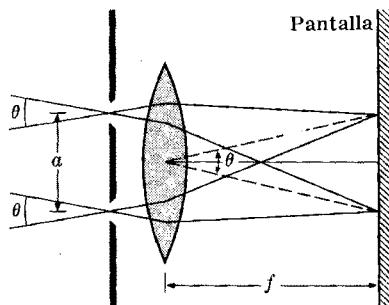


Figura 22-38

rendijas es iluminarlas con rayos de luz paralelos, colocar una lente convergente detrás del plano de las rendijas y observar el diagrama de interferencia sobre una pantalla colocada en el plano focal de la lente (fig. 22-37). Probar que la posición de las franjas brillantes con respecto a la franja central está dada por $x = n(\lambda/a)$ y la de las franjas oscuras corresponde a $x = (2n + 1)(\lambda/2a)$, siendo

do n un entero, f la distancia focal de la lente y a la separación de las rendijas.

22.9 Dos haces paralelos de luz monocromática de la misma longitud de onda y que forman un ángulo pequeño entre ellos, inciden sobre dos rendijas separadas la distancia a y colocadas enfrente de una lente convergente (fig. 22-38). Debido al desplazamiento angular del haz, los dos grupos de franjas que se observan sobre una pantalla colocada en el plano focal de la lente (ver el problema anterior) no son coincidentes. Mostrar que si $\theta = \lambda/2a$, las franjas brillantes de un haz se sitúan sobre las franjas oscuras del otro haz y el diagrama de interferencia desaparece. Este es el método propuesto por Fizeau en 1868 para medir la separación angular de dos objetos distantes, variando la distancia a hasta que el diagrama de interferencia desaparece. Este método se ha usado, por ejemplo, para medir la separación angular entre estrellas; esto se hace colocando una pantalla con dos rendijas en frente del objetivo de un telescopio y variando la separación de las rendijas hasta que el diagrama de difracción desaparece. Encontrar la mínima separación angular que se puede medir con el telescopio de Mount Wilson, cuyo objetivo tiene un diámetro de 100 pulgadas ó 2,54 m. Suponer que la longitud de onda es $5,7 \times 10^{-7}$ m.

22.10 Para aumentar el poder de resolución de un telescopio, Michelson construyó en 1921 un dispositivo interferométrico tal como el que se ilustra en la fig. 22-39, donde las M son cuatro espejos colocados enfrente del objetivo de un telescopio. Por consiguiente lo que se observa a través del telescopio es el diagrama de interferencia de los rayos

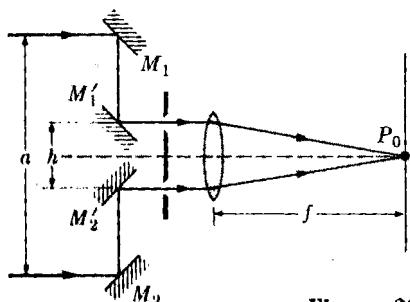
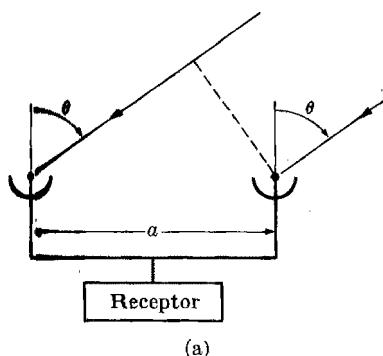


Figura 22-39

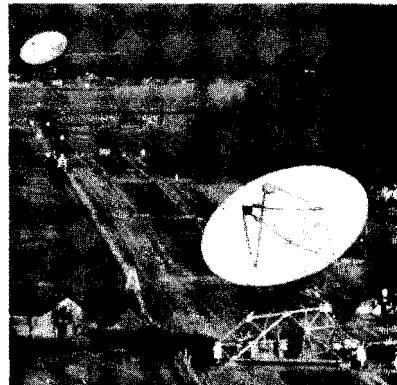
recibidos por los espejos M_1 y M_2 . Este es esencialmente el dispositivo de Fizeau descrito en el problema 22.9. Se puede probar que cuando uno observa una fuente de luz extensa, el diagrama de interferencia desaparece si el ángulo subtendido por la fuente se relaciona con la separación de los espejos por la ecuación $\theta = 1,22 \lambda/a$. Con $a = 121$ pulgadas = 3,07 m y una longitud de onda de $5,75 \times 10^{-7}$ m, Michelson encontró que las franjas que corresponden a la estrella α -Orionis (Betelgeuse) desaparecían. Probar que el diámetro angular de esta estrella es $0,047''$. Con este método se hizo la primera medida del diámetro de una estrella. ¿Cuál deberá ser el diámetro del objetivo de un telescopio para que éste tenga el mismo poder de resolución? Si la distancia a la estrella es $1,80 \times 10^{18}$ m, encontrar el diámetro lineal de la estrella. Comparar este valor con el diámetro del sol y de la órbita terrestre.

22.11 Un arreglo interferométrico usado en radioastronomía consta de dos radiotelescopios separados una cierta distancia. Las antenas de estos telescopios se pueden orientar en diferentes direcciones, pero se mantienen siempre paralelas entre sí. Las señales recibidas por las antenas se transmiten a una estación receptora, donde se mezclan (figura 22.40a). Demostrar que las direcciones de incidencia para las cuales la señal resultante es máxima están dadas por la ec. (22.11), $\sin \theta = n\lambda/a$. [Sugerencia: Observar que la situación es exactamente inversa a la de las dos fuentes, ilustrada en la fig. 22-3.] Usando coordenadas polares hacer un gráfico de la intensidad de la señal en función del ángulo θ . La fig. 22-40(b) muestra el doble interferómetro situado en Green Bank, West Virginia, el cual opera con una longitud de onda de 11 cm. La distancia a entre los dos radiotelescopios se puede ajustar hasta 2700 m. Hallar el ángulo subtendido por el máximo central de intensidad cuando la separación de los dos telescopios es máxima.

22.12 Supongamos que tenemos, en lugar de dos rendijas paralelas como en el experimento de Young, tres rendijas paralelas igualmente separadas por una distancia a . Discutir la distribución de



(a)



(b)

Fig. 22-40. (a) Esquema de un radiointerferómetro. (b) Radiointerferómetro de dos elementos situado en Green Bank, West Virginia. (Fotografía cortesía del National Radio Astronomy Observatory).

Intensidad del diagrama de interferencia que se observa sobre una pantalla distante.

22.13 Hallar las intensidades de los máximos secundarios con respecto a los máximos principales producidos por la disposición de fuentes de la fig. 22-12. [Sugerencia: Se puede probar que el primer máximo secundario ocurre para $\theta \sim 48^\circ$.]

22.14 Hallar la separación entre las fuentes del arreglo de la fig. 22-12 necesario para producir un diagrama “remo de dos palas”; esto es, un diagrama con máximos principales para $\theta = \pm \pi/2$. Determinar la posición de los máximos secundarios. Hacer un gráfico de la distribución angular de la intensidad.

22.15 Estudiar la distribución angular de la intensidad para (a) tres y (b) cinco fuentes idénticas de ondas igualmente separadas la distancia a a lo largo de una recta. Suponer que $a = \lambda/2$.

22.16 En 1961, el prof. W. N. Christiansen construyó en Australia el primer radiointerferómetro múltiple, el cual se muestra en la fig. 22-41. Consta de 32 antenas con una separación de 7 m entre ellas, con sus correspondientes reflectores parabólicos. El sistema está sintonizado para una longitud de onda de 21 cm. Las señales recibidas por las antenas se superponen en la estación de

observación para dar una señal resultante. El sistema es de este modo equivalente a 32 fuentes equidistantes. Hallar (a) el ancho angular del máximo central, (b) la separación angular entre los sucesivos máximos principales.

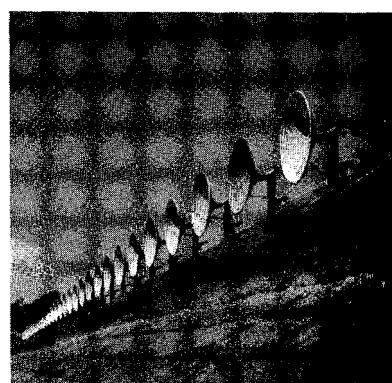


Fig. 22-41. Radiointerferómetro de red ubicado en la Universidad de Sydney, Australia. (Fotografía cortesía del profesor W. N. Christiansen).

22.17 Considerando la interferencia de los movimientos ondulatorios producidos por N fuentes, como se estudió en la sección 22.3, probar que la fase inicial del movimiento resultante está dada por $\delta_N = \frac{1}{2}(N - 1)\delta$, donde δ está dado por

la ec. (22.12). Observar que δ_N es el ángulo que el vector OP forma con el eje X en la fig. 22-9.

22.18 Usando el resultado probado en el problema precedente y la regla de suma de vectores, demostrar las siguientes relaciones trigonométricas:

$$1 + \cos \delta + \cos 2\delta + \cdots + \cos (N-1)\delta = \frac{\sin \frac{1}{2}N\delta}{\sin \frac{1}{2}\delta} \cos \frac{1}{2}(N-1)\delta,$$

$$\begin{aligned} \text{sen } \delta + \text{sen } 2\delta + \cdots + \text{sen } (N-1)\delta \\ = \frac{\sin \frac{1}{2}N\delta}{\sin \frac{1}{2}\delta} \text{sen } \frac{1}{2}(N-1)\delta. \end{aligned}$$

[**Sugerencia:** Notar que en la fig. 22-9 las componentes del vector resultante según los ejes X e Y son iguales a la suma de las componentes de los vectores individuales.]

22.19 Dos pedazos rectangulares de vidrio se disponen uno sobre otro, con una tira de papel colocada entre ellos en uno de los bordes de modo que se forme una delgada cuña de aire. Las placas se iluminan con un haz de luz de sodio ($\lambda = 5,9 \times 10^{-7}$ m) a incidencia normal. Se forman diez franjas de interferencia por centímetro de longitud de la cuña. Hallar el ángulo de la cuña.

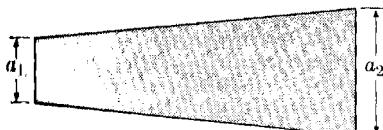


Figura 22-42

22.20 Un pedazo cuadrado de película de celofán con índice de refracción 1,5 tiene una sección en forma de cuña, de modo que su espesor en dos lados opuestos es a_1 y a_2 (fig. 22-42). Si se ilumina con luz monocromática de longitud de onda $6,0 \times 10^{-7}$ m a incidencia normal, aparecen 10 franjas por reflexión sobre la película. ¿Cuál es la diferencia $a_2 - a_1$?

22.21 Sobre una película de 10^{-6} m de espesor y de índice de refracción igual a 1,4 incide perpendicularmente luz de longitud de onda $5,0 \times 10^{-7}$ m. Parte de la luz penetra la película y se refleja en

la segunda cara. (a) ¿Cuántas ondas están contenidas en la película a lo largo del camino de la luz desde el punto de incidencia hasta el punto de emergencia? (b) ¿Cuál es el desfase entre estas ondas cuando abandonan la película y cuando entran a la misma? Repetir el problema para luz con ángulo de incidencia de 30° .

22.22 Dos placas de vidrio que tienen una longitud de 5 cm se colocan en contacto por un extremo y se separan en el otro con una hoja delgada de papel, formando de este modo un prisma de aire. Cuando el prisma se ilumina con luz de longitud de onda $5,9 \times 10^{-7}$ m a incidencia normal, se observan 42 franjas oscuras. Hallar el espesor de la hoja de papel.

22.23 Una película delgada que tiene un espesor de $2,4 \times 10^{-6}$ m y un índice de refracción de 1,4 se ilumina con luz monocromática de longitud de onda $6,2 \times 10^{-7}$ m. Hallar el mínimo ángulo de incidencia para el cual hay un máximo de interferencia (a) constructiva (b) destructiva, por reflexión. Repetir el problema para la luz trasmisida.

22.24 Probar que si una placa de vidrio (índice n_v) se cubre con una película delgada que tiene un índice $n_a = \sqrt{n_v}$ (ver problema 20.18) y de un espesor igual a un cuarto de la longitud de onda de la luz en la película, se observa interferencia destructiva completa entre la luz reflejada en ambas superficies, para incidencia normal. Este es un método efectivo para disminuir la intensidad de la luz reflejada por lentes y placas en instrumentos ópticos. Tal película se llama *revestimiento antirreflexión*.

22.25 Probar que si la película del problema anterior tiene un índice mucho mayor que el del vidrio y un espesor de un cuarto de longitud de onda de la luz (en la película), la intensidad de la luz reflejada por esa longitud de onda particular aumenta.

22.26 Demostrar que si R es el radio del lado convexo de una lente planoconvexa de las que se usan para producir anillos de Newton, los radios de los anillos brillantes están dados por $r^2 = N/\lambda R$ y los radios de los anillos oscuros por $r^2 = (2N+1)(\lambda R/2)$, donde

Nº 26 un entero positivo. Tomar el índice del aire igual a la unidad.

22.27 Se observa anillos de Newton con una lente planoconvexa que descansa sobre una superficie plana de vidrio (ver fig. 22-14). El radio de curvatura de la lente es de 10 m. (a) Hallar los radios de los anillos oscuros de interferencia por reflexión de luz de longitud de onda $4,8 \times 10^{-7}$ m, producidos a incidencia casi normal. (b) ¿Cuántos anillos se ven si el diámetro de la lente es de 4 cm?

22.28 El radio de curvatura de la superficie convexa de una lente planoconvexa es de 1,2 m. La lente se coloca sobre una placa plana de vidrio con el lado convexo hacia abajo y se ilumina desde arriba con luz roja de longitud de onda de $6,5 \times 10^{-7}$ m. Hallar el diámetro del tercer anillo brillante del diagrama de interferencia.

22.29 Un alambre de cobre que tiene un radio de 1 mm y una longitud de 1 m está sujeto a una tensión de 10 000 N. Hallar: (a) la frecuencia fundamental y los dos primeros armónicos, (b) las longitudes de onda correspondientes. (c) Hacer el gráfico del estado vibracional del alambre en cada caso. (d) Escribir la ecuación que describe las ondas estacionarias para cada frecuencia.

22.30 ¿Cómo cambia la frecuencia fundamental de una cuerda cuando se duplica (a) su tensión, (b) su masa por unidad de longitud, (c) su radio, (d) su longitud? Repetir el problema para el caso en que las cantidades enumeradas se reducen a la mitad.

22.31 Un tubo cuya longitud es de 0,60 m está (a) abierto en ambos extremos, y (b) cerrado en uno y abierto en el otro. Hallar la frecuencia fundamental y el primer armónico si la temperatura del aire es de 27°C . Hacer el gráfico de la distribución de amplitud a lo largo del tubo correspondiente a la frecuencia fundamental y al primer armónico.

22.32 Estimar el cambio porcentual de la frecuencia fundamental de una columna de aire por cada grado de variación de la temperatura, a 27°C . [Ver ejemplo 18.6.]

22.33 Una cuerda que vibra a una frecuencia de 256 Hz está en resonancia con un diapasón. Determinar la frecuencia de las pulsaciones producidas si la tensión de la cuerda se aumenta en un 20 %.

22.34 Un diapasón de frecuencia 256 Hz se coloca frente al extremo abierto de un tubo, como se ilustra en la fig. 22-43. La longitud de la columna de aire se puede variar moviendo el recipiente A

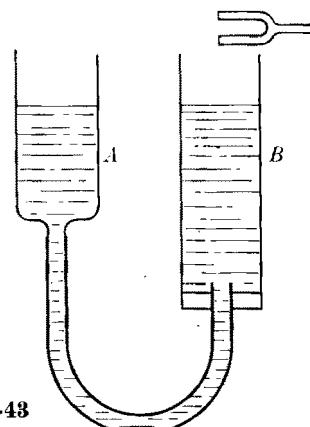


Figura 22-43

hacia arriba o hacia abajo con lo cual se desplaza el nivel de la superficie del agua. Hallar las longitudes de las tres primeras columnas de aire que están en resonancia con el diapasón. Hacer un esquema donde se muestre la posición de los nodos y de los antinodos. Indicar la distribución de amplitud a lo largo del tubo. Suponer una temperatura de 27°C .

22.35 Un tubo en forma de T tiene una de sus ramas cerrada por medio de un pistón móvil, como se muestra en la fig. 22-44. Se coloca un diapasón en uno de sus extremos, A. Probar que la separación entre posiciones sucesivas del pistón para las cuales se recibe intensidad máxima al otro extremo abierto, B, es $x = \frac{1}{2}\lambda$.

22.36 Dos ondas de superficie, $A \sin k(x - vt)$ y $A \sin k(y - vt)$, se propagan sobre una membrana. Discutir el movimiento resultante, probando que estas ondas son equivalentes a una onda modulada que se propaga en una direc-

ción que forma un ángulo de 45° con el eje X y con una velocidad de fase igual a $\sqrt{2}v$. Verificar que la longitud de onda se reduce en el factor $\sqrt{2}$. Probar que la amplitud es cero sobre las líneas $x - y = (2n + 1)\pi/k$.

22.37 Demostrar que para una membrana cuadrada de lado a , si $v_0 = v/2a$ es la frecuencia fundamental, las frecuencias sucesivas son $v = \sqrt{2}v_0$, $2v_0$, $\sqrt{5}v_0$, $2\sqrt{2}v_0$, $3v_0$, $\sqrt{10}v_0$, $\sqrt{13}v_0$, ... Determinar el número de combinaciones

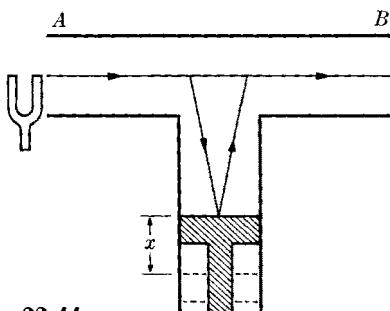


Figura 22-44

diferentes de n_1 y n_2 necesarias para obtener el modo fundamental de vibración y los sucesivos. El número de combinaciones diferentes da la *degeneración* del modo de vibración.

22.38 Repetir el problema anterior para una cavidad cúbica de lado a .

22.39 Una guía de onda consiste en un tubo largo de sección transversal rectangular de lados a y b . Demostrar que la onda resultante está descrita por

$$\xi = 4\xi_0 \operatorname{sen} k_2 y \operatorname{sen} k_3 z \cos(\omega t - k_1 x)$$

y que las frecuencias transmitidas a lo largo de la guía de onda son sólo aquellas que satisfacen $v \geq \frac{1}{2}v \sqrt{n_1^2/a^2 + n_2^2/b^2}$, donde n_1 y n_2 son enteros. Estudiar los

planos nodales en la guía de onda para $n_1 = 2$ y $n_2 = 3$.

22.40 Estimar el número de modos de vibración transversales por unidad de volumen, en el intervalo de frecuencias comprendido entre $1,0 \times 10^{15}$ Hz y $1,2 \times 10^{15}$ Hz, para una onda electromagnética encerrada en una cavidad.

22.41 Dada la ecuación de onda en dos dimensiones

$$\partial^2 \xi / \partial x^2 + \partial^2 \xi / \partial y^2 = (1/v^2) \partial^2 \xi / \partial t^2,$$

probar una solución correspondiente a ondas estacionarias de la forma $\xi = f(x, y) \operatorname{sen} \omega t$. Verificar que $f(x, y)$ satisface la ecuación diferencial

$$\partial^2 f / \partial x^2 + \partial^2 f / \partial y^2 + k^2 f = 0,$$

donde $k = \omega/v$. Determinar las constantes k_1 y k_2 a fin de que

$$f(x, y) = A \operatorname{sen} k_1 x \operatorname{sen} k_2 y$$

sea una solución de la ecuación precedente. Comparar los resultados con los de la sección 22.7.

22.42 Extender la discusión del problema anterior al caso de la ecuación de onda en tres dimensiones. Esta vez la solución a probar es

$$f(x, y, z) = A \operatorname{sen} k_1 x \operatorname{sen} k_2 y \operatorname{sen} k_3 z.$$

22.43 Estudiar gráficamente las soluciones de la ecuación trascendente $x \operatorname{tg} x = C$, donde C es una constante. Proceder de uno cualquiera de los modos siguientes: trazar las curvas $y = \operatorname{tg} x$ e $y = C/x$ y determinar sus intersecciones, o trazar las curvas $y = x$ e $y = C \operatorname{cotg} x$ y determinar sus intersecciones. De todos modos, con excepción de la primera intersección, todas las otras caen poco después de $x = n\pi$. Aplicar los resultados a la discusión del ejemplo 22.6.

DIFRACCION

23.1 Introducción

23.2 Difracción de Fraunhofer por una rendija rectangular

23.3 Difracción de Fraunhofer por una abertura circular

23.4 Difracción de Fraunhofer por dos rendijas paralelas iguales

23.5 Redes de difracción

23.6 Difracción de Fresnel

23.7 Difusión de ondas

23.8 Difusión de rayos X por cristales

23.1 Introducción

Con el nombre genérico de *difracción* se conoce otro tipo de fenómeno característico del movimiento ondulatorio. La difracción se observa cuando se distorsiona una onda por un obstáculo cuyas dimensiones son comparables a la longitud de onda de aquélla. El obstáculo puede ser una pantalla con una abertura pequeña o una rendija que sólo permite el paso de una pequeña porción del frente de onda incidente. El obstáculo puede ser también un pequeño objeto, tal como un alambre o un disco, que impide el paso de una pequeña porción del frente de onda.

Si un haz de partículas incide sobre una pantalla que tiene una abertura pequeña, solamente las que inciden en la abertura son transmitidas y continúan su movimiento sin ser perturbadas (fig. 23-1). Las otras se detienen o rebotan hacia atrás. Inversamente, si se coloca un objeto en un haz de partículas, el objeto impedirá el paso de aquéllas que inciden sobre el haz, mientras que las restantes continuaran su movimiento sin perturbación. Por el contrario, sabemos por experiencia diaria, especialmente en el caso de ondas sonoras y de ondas superficiales en el

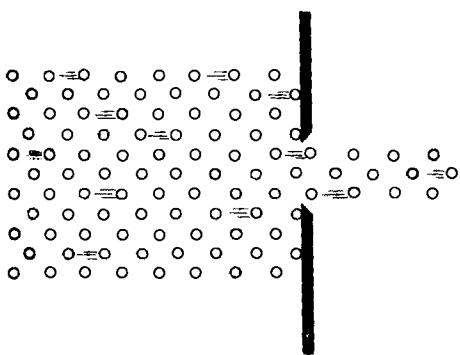


Fig. 23-1. Comportamiento de un chorro de partículas que incide sobre una pantalla que tiene una pequeña abertura.

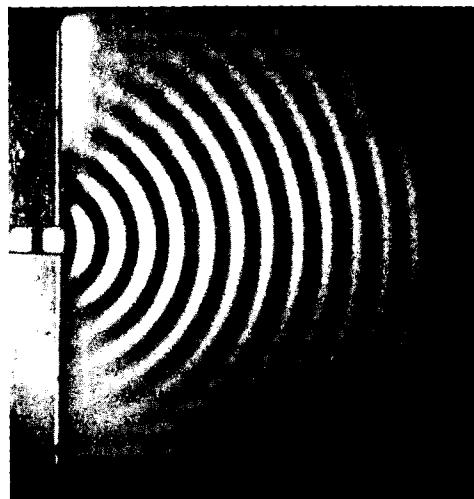


Fig. 23-2. Comportamiento de una onda que incide sobre una pantalla que tiene una pequeña abertura.

agua, que las ondas se comportan de manera diferente y que se extienden alrededor de los obstáculos interpuestos en su camino, como se ilustra en la fig. 23-2. Este efecto se hace más y más notable a medida que las dimensiones de la rendijas o el tamaño de los objetos se aproxima a la longitud de onda de las ondas. Habitualmente, uno no puede a simple vista observar la difracción de la luz, ya que la mayoría de los objetos interpuestos en un haz de luz son mucho mayores que la longitud de onda de las ondas de luz, cuya magnitud es del orden de 5×10^{-7} m.*

* Sugerimos en este punto que el estudiante relea la sección 20.2.

En este capítulo estudiaremos la difracción producida por ciertas aberturas y pantallas de geometría simple, en dos circunstancias especiales. En la *difracción de Fraunhofer* suponemos que los rayos incidentes son paralelos y que observamos el patrón de difracción a una distancia lo suficientemente grande como para que efectivamente recibamos sólo rayos difractados paralelos. Esto se puede también llevar a cabo utilizando una lente que enfoque sobre el mismo punto de una pantalla los rayos difractados en una misma dirección. En la *difracción de Fresnel*, bien los rayos incidentes se originan en una fuente puntual, bien se observan los rayos difractados en un punto determinado del espacio, o bien ambas cosas.

Intimamente relacionada con la difracción está la *difusión*, que tiene lugar cuando los obstáculos interpuestos en la onda se convierten a su vez en fuentes de nuevas ondas. En el capítulo 19 estudiamos la difusión de ondas electromagnéticas por electrones individuales. En este capítulo consideraremos brevemente la difusión desde un punto de vista más general.

23.2 Difracción de Fraunhofer por una rendija rectangular

Como primer ejemplo de difracción, consideraremos una rendija rectangular muy estrecha y larga, de modo que podamos ignorar los efectos en los extremos. Supondremos también que las ondas incidentes son normales al plano de la rendija. Esto simplifica la matemática sin cambiar el contenido físico. De acuerdo con el principio de Huygens, cuando la onda incide sobre la rendija todos los puntos de su plano se convierten en fuentes secundarias de ondas, emitiendo nuevas ondas, que en nuestro caso se denominan ondas *difractadas*, cuya amplitud resultante se calcula usando la ec. (20.2). Observando las ondas difractadas a diferentes ángulos θ respecto a la dirección de incidencia (fig. 23-3), encontramos que para ciertas direcciones su intensidad es nula. Estas direcciones están dadas por la relación

$$b \operatorname{sen} \theta = n\lambda, \quad n \neq 0, \quad (23.1)$$

donde n es un número entero negativo o positivo, b es el ancho de la rendija y λ la longitud de onda de las ondas incidentes. Se excluye el valor $n = 0$ porque corresponde a la observación según la dirección de incidencia, lo cual implica evidentemente un máximo de iluminación.

Según la ec. (23.1), tenemos

$$\operatorname{sen} \theta = n\lambda/b, \quad (23.2)$$

de modo que la intensidad es cero para $\operatorname{sen} \theta = \pm\lambda/b, \pm 2\lambda/b, \pm 3\lambda/b, \dots$. Para justificar la ec. (23.1), recordemos que según la ec. (22.8), cuando la diferencia de camino para dos rayos es $r_1 - r_2 = \text{entero impar} \times (\lambda/2)$, hay interferencia destructiva. Ahora bien, vemos en la fig. 23-3 que para los rayos provenientes de A y del punto medio C tenemos $r_1 - r_2 = CF = \frac{1}{2}b \operatorname{sen} \theta = n(\lambda/2)$; de modo que para $n = 1, 3, 5, \dots$, tanto estos dos rayos como cualquier otro par de rayos provenientes de puntos separados por $\frac{1}{2}b$, interfleren destructivamente y no se

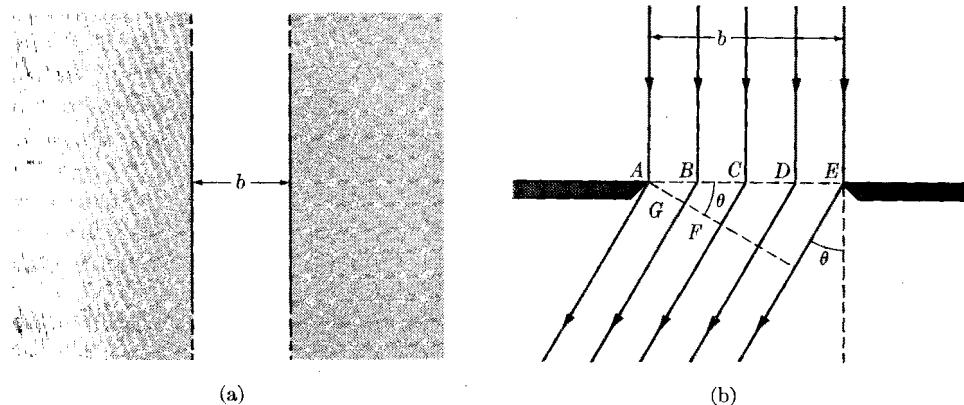


Fig. 23-3. Difracción por una rendija angosta y larga.

observa ninguna onda en la dirección θ . Para n par, consideremos los puntos A y B cuya separación es $b/4$. Tenemos

$$r_1 - r_2 = BG = \frac{1}{4}b \operatorname{sen} \theta = (n/2)(\lambda/2).$$

Por lo tanto, cuando $n/2$ es un entero impar, o $n = 2, 6, 10, \dots$, estos dos rayos, así como cualquier otro par de rayos provenientes de puntos separados por $b/4$, interfieren destructivamente y nuevamente no se observa onda alguna en la dirección correspondiente al ángulo θ . Se puede extender el procedimiento hasta

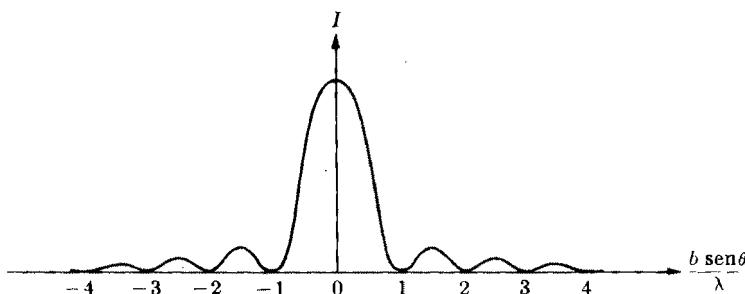


Fig. 23-4. Distribución de intensidad en el diagrama de difracción de una rendija angosta y larga.

Incluir todos los enteros. Para $\theta = 0$, sin embargo, no hay defasaje entre los rayos provenientes de puntos diferentes y la interferencia es constructiva, resultando un máximo pronunciado.

Entre los ceros de intensidad dados por la ec. (23.1) hay máximos cuya intensidad decrece gradualmente, lo cual difiere de lo que ocurre en la interferencia. En la fig. 23-4 se ha representado la intensidad de las ondas difractadas en función de θ . Obsérvese que el máximo central tiene un ancho doble del de los demás.

La fig. 23-5 muestra el diagrama de difracción de una rendija rectangular.

Es a la vez fácil e instructivo calcular la distribución de intensidad que aparece en la fig. 23-4. Si dividimos la rendija en bandas muy angostas de ancho dx , como se muestra en la fig. 23-6(a), podemos considerar cada banda como una fuente secundaria de ondas de amplitud $d\xi_0$, muy pequeña. Si consideramos los rayos

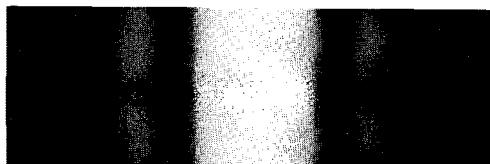


Fig. 23-5. Diagrama de difracción de Fraunhofer producido por una rendija angosta y larga.

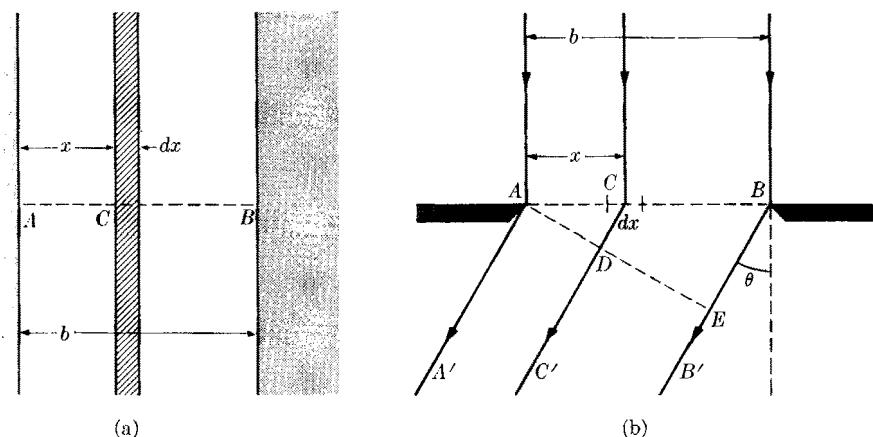


Figura 23-6

emitidos en la dirección correspondiente al ángulo θ (fig. 23-6b), el defasaje entre el rayo CC' y el AA' tomado como referencia, es

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} CD = \frac{2\pi x \operatorname{sen} \theta}{\lambda}, \quad (23.3)$$

y por lo tanto aumenta gradualmente con x . Para obtener la amplitud en la dirección correspondiente al ángulo θ , debemos representar los vectores rotantes correspondientes a las ondas que provienen de todas las bandas entre A y B . Como todas son de amplitud infinitesimal y como el ángulo de fase δ aumenta proporcionalmente a x , los vectores yacen sobre un arco de circunferencia OP cuyo centro está en C y cuyo radio es ρ (fig. 23-7). La amplitud resultante A es la cuerda OP . La pendiente en cualquier punto del arco entre O y P es justamente el ángulo δ .

dado por la ec. (23.3). En P , que corresponde a $x = b$, la inclinación de la tangente es

$$\alpha = \frac{2\pi b \operatorname{sen} \theta}{\lambda}. \quad (23.4)$$

Este es también el ángulo formado por los dos radios CO y CP . Por consiguiente, la amplitud resultante es

$$A = \text{cuerda } OP = 2QP = 2\rho \operatorname{sen} \frac{1}{2}\alpha = 2\rho \operatorname{sen} (\pi b \operatorname{sen} \theta / \lambda). \quad (23.5)$$

Para observación normal, todos los vectores $d\xi_0$ son paralelos y su resultante es simplemente la suma de sus longitudes, que es igual a la longitud del arco desde O hasta P . Llamando A_0 la amplitud resultante para observación normal ($\theta = 0$), tenemos entonces

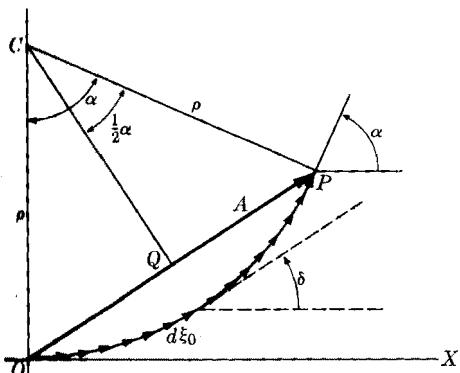


Figura 23-7

$$A_0 = \text{arco } OP = \rho\alpha = \rho(2\pi b \operatorname{sen} \theta / \lambda). \quad (23.6)$$

Dividiendo la ec. (23.5) por la ec. (23.6) obtenemos

$$A = A_0 \left[\frac{\operatorname{sen} (\pi b \operatorname{sen} \theta / \lambda)}{\pi b \operatorname{sen} \theta / \lambda} \right], \quad (23.7)$$

y como las intensidades son proporcionales a los cuadrados de las amplitudes, obtenemos

$$I = I_0 \left[\frac{\operatorname{sen} (\pi b \operatorname{sen} \theta / \lambda)}{\pi b \operatorname{sen} \theta / \lambda} \right]^2 = I_0 \left(\frac{\operatorname{sen} u}{u} \right)^2, \quad (23.8)$$

donde $u = \pi b \operatorname{sen} \theta / \lambda$. Verificamos entonces que los ceros de intensidad ocurren para $u = n\pi$, o sea $b \operatorname{sen} \theta = n\lambda$, de acuerdo con la ec. (23.1), excepto para $n = 0$ porque entonces $(\operatorname{sen} u/u)_{u=0} = 1$. Para obtener los máximos de intensidad, debemos hallar los valores de u que satisfacen $dI/du = 0$ (ver ejemplo 23.1). Sin embargo, estos máximos de intensidad corresponden a valores de u cada vez mayores, por lo que son cada vez menores, resultando el diagrama que se mostró en la fig. 23-4. Cuando λ es muy pequeña respecto a b , los primeros ceros de intensidad a ambos lados del máximo central corresponden al ángulo

$$\theta \approx \operatorname{sen} \theta = \pm \frac{\lambda}{b}, \quad (23.9)$$

que se obtiene haciendo $n = \pm 1$ en la ec. (23.1). Esto se muestra en la fig. 23-8. El poder resolvente de una rendija es un concepto útil; fue definido por el físico inglés Lord Rayleigh como el ángulo mínimo que subtienden dos ondas incidentes

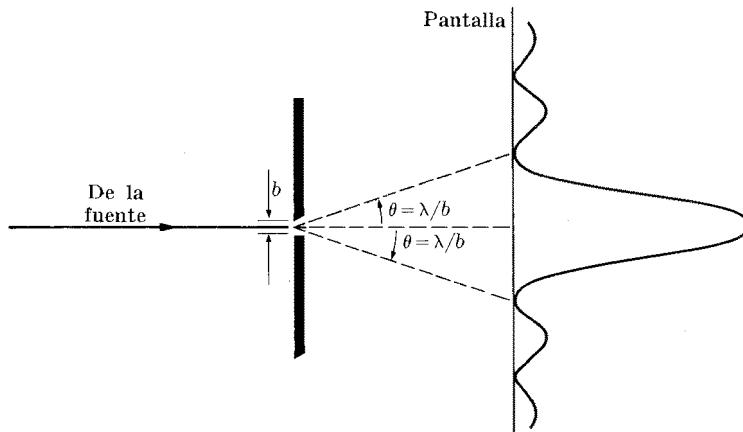


Fig. 28-8. Ángulo subtendido por el pico central de intensidad del diagrama de difracción de una rendija.

provenientes de dos fuentes puntuales distantes que permita distinguir sus respectivos diagramas de difracción. Cuando las ondas provenientes de dos fuentes distantes S_1 y S_2 pasan a través de la misma rendija en dos direcciones que forman un ángulo θ (fig. 23-9), los diagramas de difracción de los dos conjuntos de ondas están superpuestos. Se puede comenzar a distinguirlos cuando el máximo central de uno cae en el primer cero, a un lado u otro del máximo central, del otro, como se indica a la derecha de la fig. 23-9. Pero entonces, teniendo en cuenta la ec. (23.9) y la fig. 23-8, el ángulo θ debe ser

$$\theta = \lambda/b, \quad (23.10)$$

que da el poder resolvente de la rendija conforme a la definición de Rayleigh.

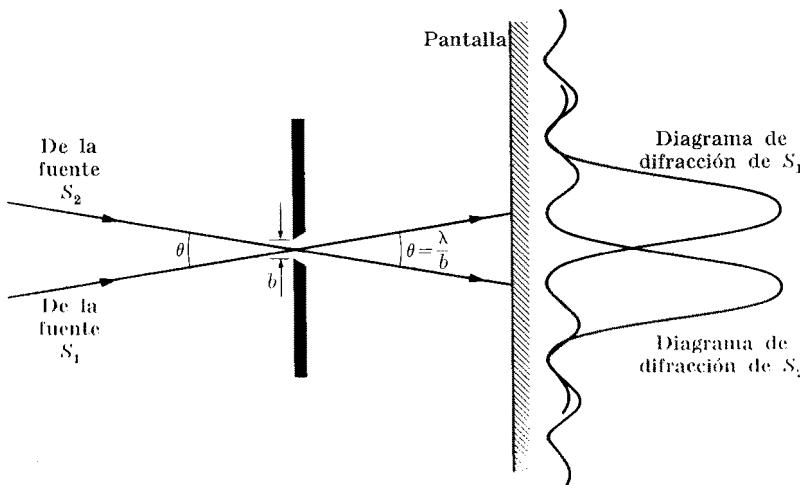


Fig. 23-9. Criterio de Rayleigh para el poder de resolución de una rendija.

Suponiendo que S_1 y S_2 son dos puntos de un objeto distante, la ec. (23.10) da la separación angular mínima entre dichos puntos para que se puedan reconocer como diferentes cuando se observa el objeto a través de la rendija. Si la luz que pasa por la rendija forma una imagen sobre una pantalla y se observa la imagen con un microscopio, por ejemplo, no es posible, cualquiera sea el aumento del microscopio, observar más detalles en la imagen que los permitidos por el poder resolvente de la rendija. Estas consideraciones deben ser tomadas en cuenta en el diseño de instrumentos ópticos.

Si la rendija es un rectángulo de lados a y b de longitud comparable (fig. 23-10), el diagrama de difracción es la combinación de los dos diagramas debidos a cada par de lados. En vez de la serie de bandas mostradas en la fig. 23-5, se obtiene

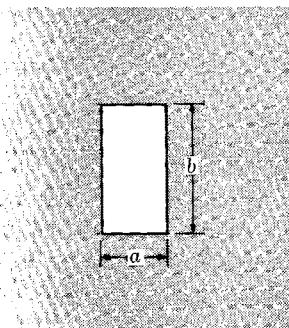


Fig. 23-10. Rendija rectangular.

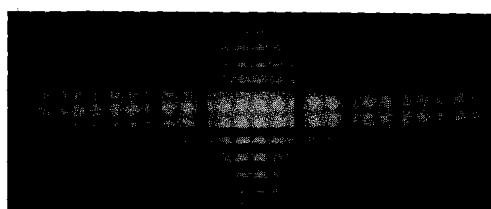


Fig. 23-11. Diagrama de difracción de Fraunhofer de una rendija rectangular cuya altura es el doble de su ancho.

una serie de rectángulos dispuestos en forma de cruz, como en la fotografía de la fig. 23-11.

En nuestro cálculo no hemos tenido en cuenta el factor direccional

$$g = \frac{1}{2}(1 + \cos \theta)$$

que mencionamos en la ec. (20.2) al estudiar el principio de Huygens. Este factor tiende a disminuir aún más la amplitud de los máximos de orden superior.

EJEMPLO 23.1. Estimar la magnitud de los máximos sucesivos en el diagrama de difracción de una rendija.

Solución: De acuerdo con la ec. (23.8), los máximos sucesivos corresponden a los máximos de la fracción $\operatorname{sen} u/u$. Debemos hallar por lo tanto

$$\frac{d}{du} \left(\frac{\operatorname{sen} u}{u} \right) = 0 \quad \text{o} \quad \operatorname{tg} u = u.$$

Esta es una ecuación trascendente de tipo similar a la que apareció anteriormente en el ejemplo 22.6. Sus soluciones se encuentran representando $y = \operatorname{tg} u$ e $y = u$, y hallando los puntos de intersección de ambas curvas; se deja esto para que lo haga el estudiante. Sin embargo, podemos hacer una estimación suponiendo que

los máximos de $\sin u/u$ están muy cerca de los máximos de $\sin u$, es decir cuando $u = (n + \frac{1}{2})\pi$. Los verdaderos valores de u son siempre menores que este estimado. Despreciando esta pequeña diferencia, encontramos que los valores de $\sin u/u$ en los máximos son $1/(n + \frac{1}{2})\pi$, siendo las correspondientes intensidades

$$I = \frac{I_0}{(n + \frac{1}{2})^2 \pi^2} = 0,045 I_0, 0,016 I_0, 0,008 I_0.$$

23.3 Difracción de Fraunhofer por una abertura circular

La difracción de Fraunhofer por una abertura circular presenta muchas de las características ya vistas en el caso de la rendija rectangular, pero en vez de un diagrama rectangular como el que se muestra en la fig. 23-11, el diagrama de difracción consiste en un disco brillante rodeado de anillos alternadamente oscuros y brillantes, como se muestra en la fig. 23-12. Los radios del disco central y de los anillos sucesivos no siguen una secuencia simple. Omitiremos el análisis mate-



Fig. 23-12. Diagrama de difracción de Fraunhofer de una abertura circular.

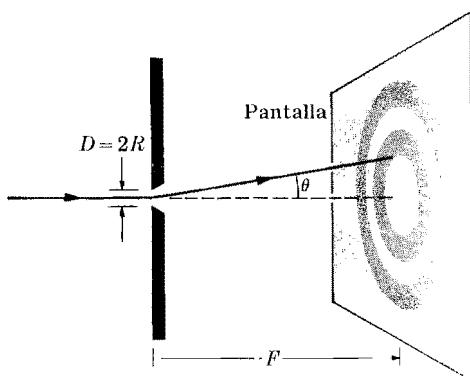


Figura 23-13

mático del problema, que es mucho más complicado que el de la rendija rectangular debido a la forma geométrica. Siendo R el radio de la abertura (fig. 23-13), el ángulo correspondiente al primer disco oscuro está dado por la condición

$$\frac{2\pi R \sin \theta}{\lambda} = 3,8317 \quad (23.11)$$

6

$$\theta \approx \sin \theta = 1,22 \frac{\lambda}{2R} = 1,22 \frac{\lambda}{D}, \quad (23.12)$$

donde $D = 2R$ es el diámetro de la abertura y θ está expresado en radianes. Esta expresión da además el poder resolvente de una abertura circular definida, también según Rayleigh, como el ángulo mínimo entre las direcciones de inciden-

cia de dos ondas planas provenientes de dos fuentes puntuales distantes, que permita distinguir sus respectivos diagramas de difracción. Esto ocurre cuando el centro del disco brillante del diagrama de difracción de una de las fuentes cae en el primer anillo oscuro del diagrama de difracción de la otra (fig. 23-14). La separación angular está dada por la ec. (23.12), es decir, $\theta = 1,22\lambda/D$. Esta expresión se utilizó en la sección 21.5 al estudiar el aumento de un telescopio.

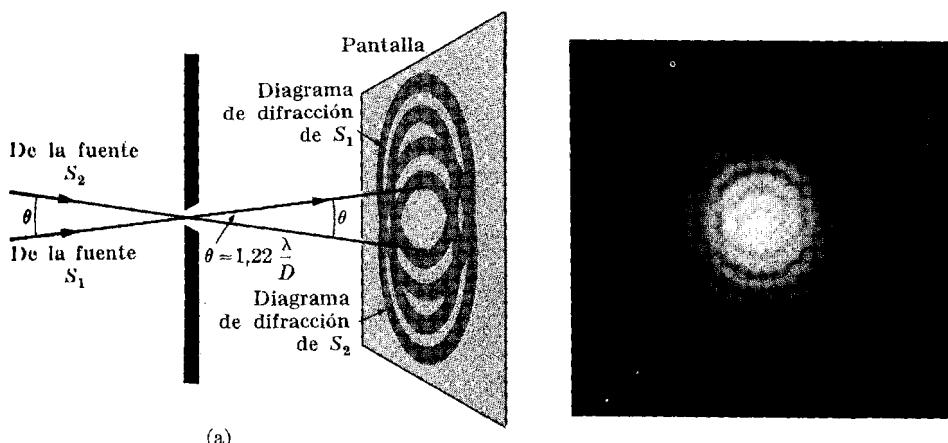


Fig. 23-14. Criterio de Rayleigh para el poder de resolución de una abertura circular. La parte (b) muestra las imágenes de dos fuentes puntuales obtenidas a través de una lente y apenas resueltas.

Una lente es en realidad una abertura circular, por lo que la imagen de un punto, que en el capítulo 21 se supuso que era otro punto, es en realidad un diagrama de difracción. Sin embargo, el radio de una lente es en general tan grande respecto a la longitud de onda de la luz que, para la mayoría de los fines prácticos, se pueden ignorar los efectos de difracción.

EJEMPLO 23.2. Una lente de 2,0 cm de diámetro tiene una distancia focal de 40 cm. Está iluminada con un haz paralelo de luz monocromática de $5,9 \times 10^{-7}$ m de longitud de onda. Hallar el radio del disco central del patrón de difracción observado en un plano que pasa por el foco. Determinar también el poder de resolución de la lente para esta longitud de onda.

Solución: Utilizando la ec. (23.12) encontramos para el ángulo subtendido por el disco central del patrón de difracción,

$$\theta = 1,22 \times \frac{5,9 \times 10^{-7} \text{ m}}{4 \times 10^{-2} \text{ m}} = 1,80 \times 10^{-5} \text{ rad} = 3,71''.$$

Este es también el poder resolvente de la lente. El radio central es, usando la ec. (2.4),

$$r = f\theta = 40 \text{ cm} \times 1,80 \times 10^{-5} \text{ rad} = 7,2 \times 10^{-4} \text{ cm},$$

y en consecuencia podemos decir para los fines prácticos, que la imagen sobre el plano focal es un punto.

88.4 Difracción de Fraunhofer por dos rendijas paralelas iguales

Consideremos ahora dos rendijas, ambas de ancho b , separadas una distancia a (fig. 23-15). Para la dirección correspondiente al ángulo θ , tenemos ahora dos conjuntos de ondas difractadas provenientes de cada rendija. En otras palabras, tenemos ahora una combinación de difracción e interferencia. Para determinar la intensidad de las ondas resultantes en función del ángulo θ , debemos calcular

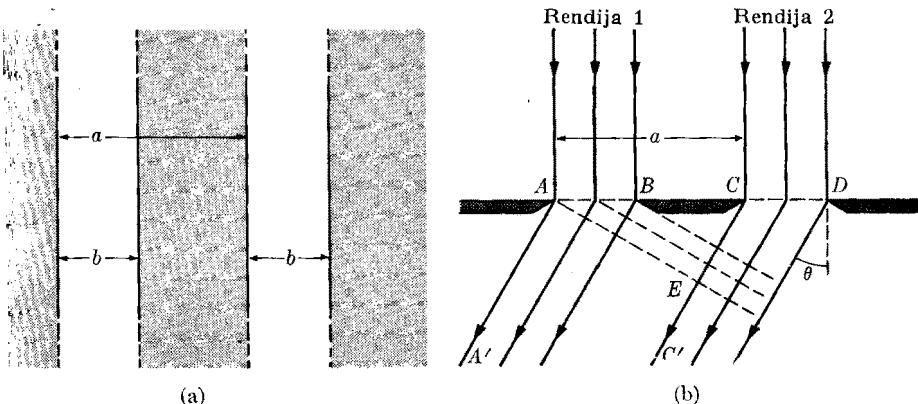


Fig. 28-15. Vista frontal y en corte de dos rendijas paralelas angostas y largas.

la amplitud resultante de cada rendija y combinar las dos amplitudes para obtener la resultante final. Esto se muestra en la fig. 23-16 en la que se ha dibujado los diferentes vectores rotatorios. El ángulo α tiene el valor dado por la ec. (23.4). El vector \vec{OP} da la amplitud A_1 resultante de la rendija 1. El valor de esta amplitud es, según la ec. (23.7),

$$A_1 = A_0 \frac{\sin(\pi b \sin \theta / \lambda)}{\pi b \sin \theta / \lambda}. \quad (23.13)$$

Como las dos rendijas tienen el mismo ancho, la amplitud resultante para la rendija 2 tiene el mismo valor A_1 pero su fase es diferente. En la fig. 23-15 observamos que entre rayos correspondientes de las rendijas 1 y 2, tales como el AA' y el CC' , hay una diferencia de fase constante dada por

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} CE = \frac{2\pi a \sin \theta}{\lambda}. \quad (23.14)$$

En consecuencia las amplitudes o vectores correspondientes de las dos rendijas

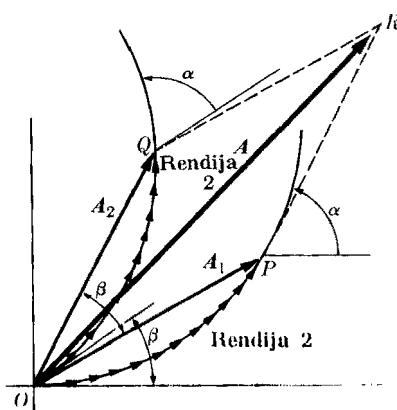


Figura 28-16

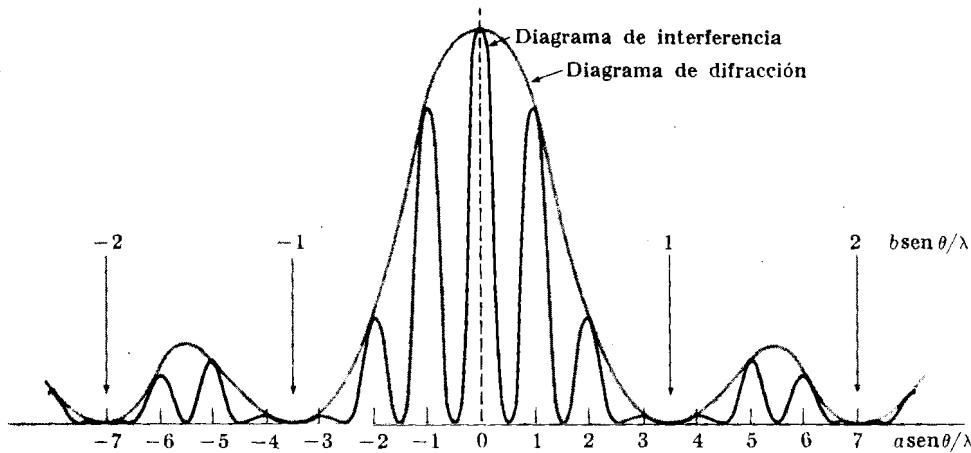


Fig. 23-17. Distribución de intensidad (sobre un plano normal a la luz incidente) proveniente de dos rendijas paralelas angostas y largas.

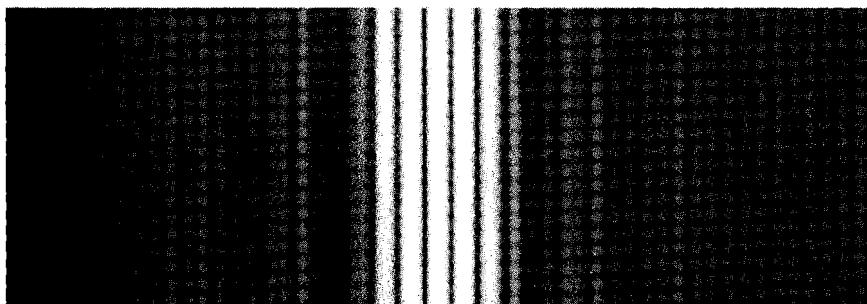


Fig. 23-18. Diagrama de difracción de Fraunhofer debido a dos rendijas paralelas angostas y largas.

forman un ángulo igual a β . De acuerdo con esto, en la fig. 23-16 la linea $OQ = A_2$ correspondiente a la rendija 2 se obtiene rotando en un ángulo β la linea $OP = A_1$, correspondiente a la rendija 1. La amplitud A resultante de ambas es entonces

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos \beta}.$$

Haciendo $A_1 = A_2$ podemos escribir, usando la ec. (M.14),

$$A = A_1 \sqrt{2(1 + \cos \beta)} = 2A_1 \cos \frac{1}{2}\beta.$$

Por lo tanto, empleando las ecs. (23.13) y (23.14), obtenemos

$$A = 2A_0 \frac{\operatorname{sen}(\pi b \operatorname{sen} \theta / \lambda)}{\pi b \operatorname{sen} \theta / \lambda} \cos \frac{\pi a \operatorname{sen} \theta}{\lambda}.$$

La distribución de intensidad que sabemos es proporcional al cuadrado de la

amplitud, es entonces

$$I = I_0 \left[\frac{\sin(\pi b \sin \theta / \lambda)}{\pi b \sin \theta / \lambda} \right]^2 \cos^2 \frac{\pi a \sin \theta}{\lambda}. \quad (23.15)$$

Si comparamos esta ecuación con la ec. (23.8) correspondiente a una sola rendija, vemos que ahora tenemos el factor adicional $\cos^2(\pi a \sin \theta / \lambda)$. Pero si recordamos la ec. (22.10), que da la distribución de intensidad para el diagrama de interferencia de dos fuentes sincrónicas, vemos que las ecs. (22.10) y (23.15) coinciden en lo que respecta al factor de interferencia, ya que en la ec. (23.15) a es la separación de las dos rendijas y en la ec. (22.10) a es la separación de las dos fuentes. Por lo tanto la expresión que describe el diagrama de difracción total de dos rendijas es la expresión que describe el diagrama de interferencia de dos fuentes sincrónicas, modulado por la expresión del diagrama de difracción de una sola rendija. Esto se muestra en la fig. 23-17 y en la fotografía de la fig. 23-18.

Obsérvese que los máximos del diagrama de interferencia se dan para $\pi a \sin \theta / \lambda = -n\pi$, o $\sin \theta = n(\lambda/a)$, mientras que los ceros del diagrama de difracción están dados por la ec. (32.2) o sea, $\sin \theta = n'(\lambda/b)$. Como $a > b$, los ceros del diagrama de difracción están más espaciados que los máximos del diagrama de interferencia. En consecuencia, cuando hay dos rendijas, las franjas brillantes son mucho más angostas y están mucho más juntas que las producidas por una sola rendija.

23.5 Redes de difracción

Lógicamente, el paso siguiente es considerar el diagrama de difracción producido por varias rendijas paralelas de igual ancho b , espaciadas regularmente una distancia a . Sea N el número de rendijas. Vemos en la fig. 23-19 por analogía con el problema de la doble rendija, que en la dirección correspondiente al ángulo θ debemos observar la interferencia debida a N fuentes sincrónicas (una por ren-

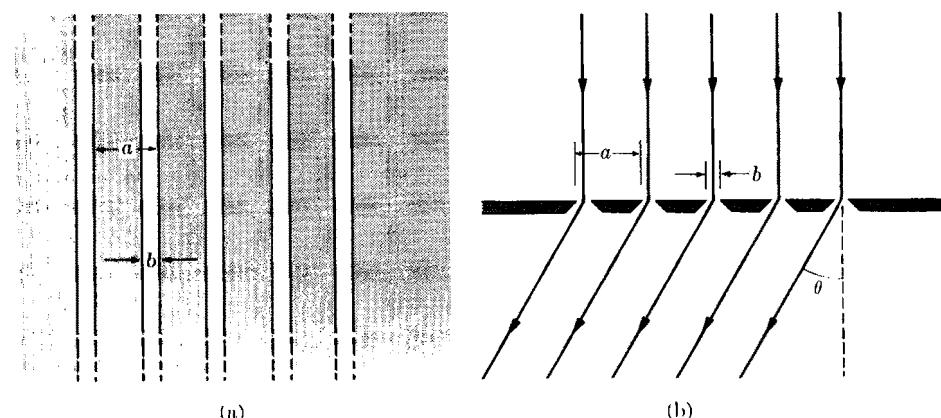


Fig. 23-19. Vista frontal y en corte de una red de difracción.

dija) modulada por el diagrama de difracción de una rendija. Como la separación entre fuentes sucesivas es a , el factor de interferencia en la intensidad es el dado por la ec. (22.14), es decir,

$$\left[\frac{\sin(N\pi a \sin \theta/\lambda)}{\sin(\pi a \sin \theta/\lambda)} \right]^2,$$

mientras que según la ec. (23.8), el factor de difracción es

$$\left[\frac{\sin(\pi b \sin \theta/\lambda)}{\pi b \sin \theta/\lambda} \right]^2.$$

La distribución de intensidad es entonces

$$I = I_0 \left[\frac{\sin(\pi b \sin \theta/\lambda)}{\pi b \sin \theta/\lambda} \right]^2 \left[\frac{\sin(N\pi a \sin \theta/\lambda)}{\sin(\pi a \sin \theta/\lambda)} \right]^2. \quad (23.16)$$

Si el número N de rendijas es grande, el diagrama consistirá en una serie de franjas brillantes angostas correspondientes a los máximos principales del diagrama de interferencia, los cuales, según la ec. (22.15), están dados por

$$a \sin \theta = n\lambda \quad \text{o} \quad \sin \theta = n(\lambda/a), \quad (23.17)$$

donde $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, pero sus intensidades están moduladas por el diagrama de difracción. La fig. 23-20 muestra el caso de ocho rendijas ($N = 8$). Según el valor de n , los máximos principales se denominan primero, segundo, tercero, etc., orden de difracción.

Un sistema tal como el que acabamos de estudiar se denomina *red de difracción por trasmisión*. A los fines de analizar luz infrarroja cercana, visible o ultravioleta, las redes de difracción por trasmisión constan de varios miles de rendijas por centímetro, obtenidas grabando una serie de líneas paralelas sobre una película transparente. Las líneas hacen entonces las veces de los espacios opacos entre

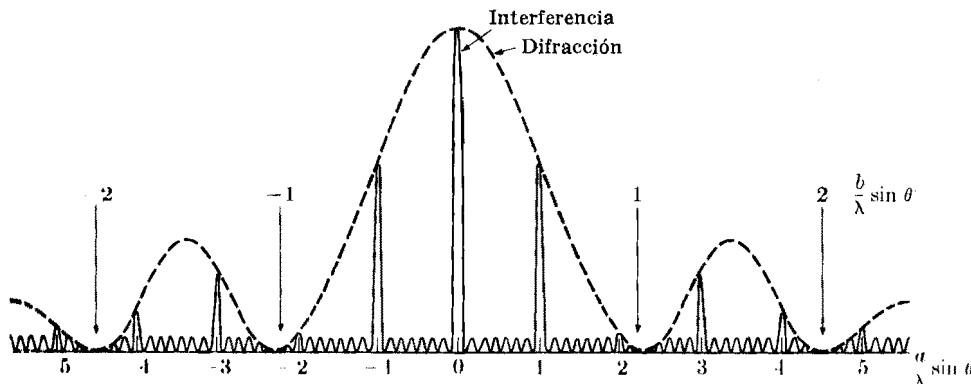


Fig. 23-20. Distribución de intensidad producida por una red de difracción sobre un plano normal a la luz incidente y paralelo a la red.

las rendijas. Una red de difracción puede también trabajar por reflexión: se graba una serie de líneas paralelas sobre una superficie metálica; las bandas estrechas entre las líneas grabadas reflejan la luz produciendo un diagrama de difracción (ver problema 23.31). Algunas veces la superficie se hace cóncava para mejorar el enfoque (ver problema 23.32).

Cuando sobre una red incide luz de diversas longitudes de onda, éstas producen máximos de difracción a ángulos diferentes, excepto para el orden cero, que es el mismo para todas. El conjunto de máximos de un orden dado para todas las longitudes de onda constituye un *espectro*. Tenemos entonces espectros de primero, segundo, tercero, etc., orden. Nótese que cuanto mayor es la longitud de onda, mayor es la desviación para un orden dado del espectro. En consecuencia al rojo se desvía más que el violeta que es lo contrario de lo que ocurre en la dispersión de la luz en un prisma. La *dispersión* de una red se define por $D = d\theta/d\lambda$. De la ec. (23.17) se deduce que $\cos \theta d\theta/d\lambda = n/a$, de modo que

$$D = \frac{d\theta}{d\lambda} = \frac{n}{a \cos \theta}, \quad (23.18)$$

lo cual indica que cuanto mayor es el orden de difracción, mayor es la dispersión. Las redes de difracción son muy importantes para el análisis de espectros y tienen varias ventajas sobre los prismas. Una de las ventajas es que las redes de difracción no dependen de las propiedades dispersivas del material sino solamente de la geometría de la red. La fig. 23-21 muestra los elementos básicos de un espectroscopio de red.

EJEMPLO 23.3. Una red de 20 000 líneas tiene una longitud de 4 cm. Hallar la separación angular de todo el espectro visible para el primero y para el segundo

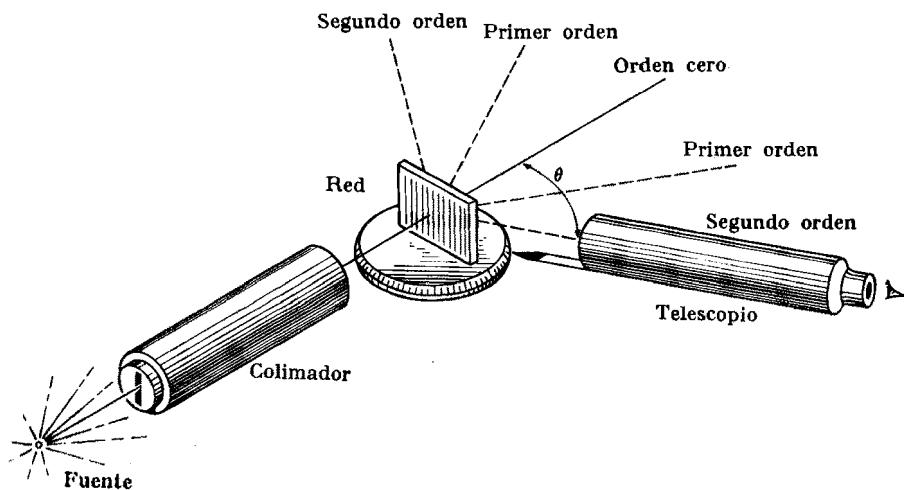


Fig. 23-21. Espectroscopio de red. Se coloca la fuente frente a la rendija del collimador. Se coloca la red perpendicularmente al eje del collimador y se investiga los espectros de órdenes diferentes moviendo el telescopio.

orden. Suponer que las longitudes de onda van de $3,90 \times 10^{-7}$ m (violeta) a $7,70 \times 10^{-7}$ m (rojo), como se mencionó en la sección 19.15.

Solución: Tenemos que $a = 4 \times 10^{-2}$ m/20 000 = 2×10^{-6} m. Por lo tanto, usando la ec. (23.17) tenemos para $n = 1$

$$\operatorname{sen} \theta_{\text{rojo}} = \frac{7,70 \times 10^{-7}}{2 \times 10^{-6}} = 0,335 \quad \text{o} \quad \theta_{\text{rojo}} = 19^\circ 34',$$

$$\operatorname{sen} \theta_{\text{violeta}} = \frac{3,90 \times 10^{-7}}{2 \times 10^{-6}} = 0,195 \quad \text{o} \quad \theta_{\text{violeta}} = 11^\circ 15'.$$

En consecuencia el espectro de primer orden abarca un ángulo de $8^\circ 19'$. Análogamente el ángulo para el espectro de segundo orden es $22^\circ 27'$, como el estudiante puede calcular por si mismo. ¿Es posible un espectro de tercer orden completo?

EJEMPLO 23.4. Estudiar la posición de los máximos cuando el ángulo de incidencia de ondas planas monocromáticas sobre una red de difracción no es cero. En la fig. 23-22 el ángulo de incidencia es i y el de difracción es θ .

Solución: Los máximos principales están determinados por el diagrama de interferencia, el cual a su vez está determinado por el desfase entre rayos correspondientes provenientes de rendijas sucesivas. La fig. 23-22 muestra que ese desfase está dado por

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} (AB + BC) = \frac{2\pi a(\operatorname{sen} i + \operatorname{sen} \theta)}{\lambda}.$$

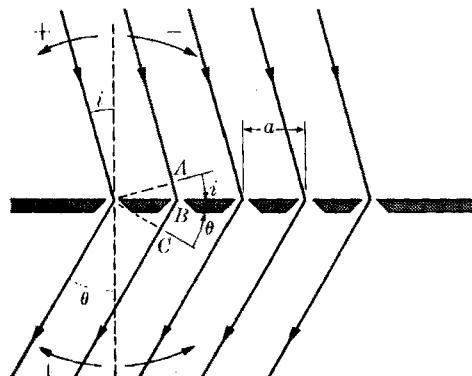
Para que esta expresión tenga validez general, los ángulos i y θ deben tener los signos indicados en la figura. La condición de máximos es entonces

$$a(\operatorname{sen} i + \operatorname{sen} \theta) = n\lambda \quad \text{o} \quad \operatorname{sen} \theta = n\lambda/a - \operatorname{sen} i.$$

Para $n = 0$, tenemos $\operatorname{sen} \theta = -\operatorname{sen} i$ o sea $\theta = -i$, que corresponde a la continuidad del rayo incidente. Si transformamos la condición anterior de máximo en un producto por medio de la ec. (M.7), tenemos

$$2a \operatorname{sen} \frac{1}{2}(i + \theta) \cos \frac{1}{2}(i - \theta) = n\lambda.$$

Por consiguiente $D = i + \theta$ para el máximo de orden n se puede obtener de



$$\operatorname{sen} \frac{1}{2}D = \frac{n\lambda}{2a} \sec \frac{1}{2}(i - \theta)$$

y la desviación es entonces mínima cuando $\theta = i$; el ángulo de incidencia para la desviación mínima en el orden n se obtiene de

$$\operatorname{sen} i = n\lambda/2a.$$

EJEMPLO 23.5. Estudiar el poder resolvente de una red de difracción.

Solución: Cuando dos ondas planas de longitud de onda ligeramente diferente inciden en una red de difracción, los máximos principales del mismo orden para ca-

Fig. 23-22. Red de difracción con incidencia oblicua.

Las longitudes de onda pueden caer tan cerca uno de otro que es imposible distinguir si la luz original es monocromático o no. Para poder distinguir (o resolver) las dos longitudes de onda en un orden determinado, es necesario que el máximo principal correspondiente a una de las longitudes de onda caiga sobre el primer cero a uno u otro lado del primer máximo de la otra longitud de onda. Si $\Delta\lambda$ es la mínima diferencia de longitud de onda para la cual se satisface la condición anterior a una longitud de onda λ , el poder resolvente de la red es

$$R = \lambda/\Delta\lambda.$$

Consideremos, por ejemplo, una longitud de onda λ tal que valga la ec. (23.17). Los máximos de intensidad corresponden a los ángulos dados por $\sin \theta = n\lambda/a$. Luego

$$\cos \theta \Delta\theta = n\Delta\lambda/a.$$

Pero según la ec. (23.16), los ceros a cada lado del máximo de orden n están dados por

$$\frac{N\pi a \sin \theta}{\lambda} = (Nn \pm 1)\pi \quad \text{ó} \quad \sin \theta = \frac{Nn \pm 1}{N} \frac{\lambda}{a}.$$

Llamando θ' y θ'' los dos ángulos dados por esta ecuación, tenemos que

$$\sin \theta' - \sin \theta'' = 2\lambda/Na,$$

o sea, usando la ec. (M.7), $\sin \frac{1}{2}(\theta' - \theta'') \cos \frac{1}{2}(\theta' + \theta'') = \lambda/Na$. Como θ' es casi igual a θ'' , podemos reemplazar $\sin \frac{1}{2}(\theta' - \theta'')$ por $\frac{1}{2}(\theta' - \theta'')$ y $\cos \frac{1}{2}(\theta' + \theta'')$ por $\cos \theta$ y escribir $\frac{1}{2}(\theta' - \theta'') \cos \theta = \Delta\theta \cos \theta = \lambda/Na$. Pero de la ecuación dada más arriba se tiene $\cos \theta \Delta\theta = n\Delta\lambda/a$. Por lo tanto, tenemos finalmente

$$\lambda/N = n\Delta\lambda \quad \text{ó} \quad R = \lambda/\Delta\lambda = Nn.$$

Por consiguiente, a mayor número total de líneas de la red y a mayor orden del espectro, menor es $\Delta\lambda$ y mayor es entonces el poder resolvente de la red. Por otra parte, el poder resolvente es independiente del tamaño y del espaciamiento de las líneas de la red.

EJEMPLO 23.6. Determinar si la red del ejemplo 23.3 puede resolver las dos líneas amarillas del sodio, cuyas longitudes de onda son $5,890 \times 10^{-7}$ m y $5,896 \times 10^{-7}$ m.

Notación: La longitud de onda promedio de las dos líneas es $5,893 \times 10^{-7}$ m y su separación es 6×10^{-10} m. De acuerdo con los resultados del ejemplo 23.5 tenemos que el poder resolvente de la red es $R = Nn = 2 \times 10^4 n$. Para la longitud de onda dada, la diferencia mínima de longitudes de onda en el espectro del primer orden es

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda}{R} = \frac{5,893 \times 10^{-7}}{2 \times 10^4 \times 1} = 2,947 \times 10^{-11} \text{ m},$$

que es un veinteavo de la separación de las dos líneas del sodio. Evidentemente uno podría entonces ver nítidamente las dos líneas *D* en el espectro de primer orden producido por la red.

23.6 Difracción de Fresnel

Como se explicó en la sección 23.1, la difracción de Fresnel tiene lugar cuando, o la fuente puntual de ondas incidentes, o el punto de observación desde el cual se las ve, o ambos, están a una distancia finita de la abertura o del obstáculo. Los cálculos matemáticos correspondientes a la difracción de Fresnel son mucho

más complicados que los correspondientes a la difracción de Fraunhofer, pero las ideas físicas son las mismas. Por lo tanto sólo discutiremos los aspectos fundamentales, suponiendo que la fuente de las ondas está tan lejos de la pantalla que las ondas incidentes son planas, y que se propagan perpendicularmente a la pantalla.

Supongamos que queremos determinar el movimiento ondulatorio en el punto P cuando conocemos el movimiento ondulatorio sobre un cierto frente de onda plano S (fig. 23-23). De acuerdo con el principio de Huygens-Kirchhoff formulado en la sección 20.2, podemos dividir el frente de onda en elementos de superficie. La simetría sugiere que los elijamos en forma de anillos circulares con centro

en la proyección Q de P sobre el plano S . Luego, de acuerdo con la ec. (20.2), la contribución del elemento superficial de área dS al movimiento ondulatorio en P tiene una amplitud proporcional a

$$\frac{dS}{r} g(\theta), \quad (23.19)$$

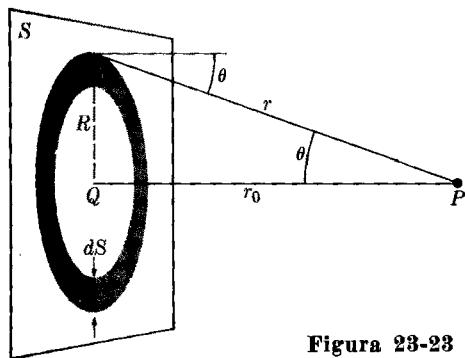


Figura 23-23

donde dS es el área del anillo. En P la fase de la onda producida por dS será

$$\delta = -\frac{2\pi r}{\lambda}. \quad (23.20)$$

Sumando los vectores rotatorios de anillos sucesivos caracterizados por las ecuaciones (23.19) y (23.20), podemos obtener la amplitud resultante en P . A causa de los factores $1/r$ y $g(\theta)$, los vectores se hacen cada vez más pequeños resultando una espiral en vez de una circunferencia, como se muestra en la fig. 23-24.

Para simplificar el cálculo, y en vista de que λ es mucho menor que r_0 , dividiremos la superficie en anillos llamados *zonas de Fresnel* (fig. 23-25), cuyas distancias a P difieren sucesivamente en $\frac{1}{2}\lambda$. Esto es, $r_1 = r_0 + \frac{1}{2}\lambda$, $r_2 = r_1 + \frac{1}{2}\lambda$, $r_3 = r_2 + \frac{1}{2}\lambda$, etc. Esta disposición tiene la propiedad de que las ondas que llegan a P provenientes de zonas sucesivas, tienen un desfase de π e interfieren destructivamente, es decir,

$$\delta_{n+1} - \delta_n = \frac{2\pi}{\lambda} (r_{n+1} - r_n) = \frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{\lambda}{2} \right) = \pi,$$

que corresponde a interferencia destructiva [recordar la ec. (22.7)]. Si ξ_{0n} es la amplitud que la enésima zona produce en P , la cual es proporcional al valor dado en la ec. (23.19), la amplitud resultante en P es

$$\xi_0 = \xi_{00} - \xi_{01} + \xi_{02} - \xi_{03} + \dots \quad (23.21)$$

Podemos también escribir esto en la forma

$$\xi_0 = \frac{1}{2}\xi_{00} + (\frac{1}{2}\xi_{00} - \xi_{01} + \frac{1}{2}\xi_{02}) + (\frac{1}{2}\xi_{02} - \xi_{03} + \frac{1}{2}\xi_{04}) + \dots$$

Las amplitudes provenientes de zonas adyacentes son de magnitud casi igual, aunque disminuyen cuando n aumenta, es decir: $\xi_{00} > \xi_{01} > \xi_{02}, \dots$. Podemos escribir entonces con buena aproximación, que $\frac{1}{2}\xi_{00} - \xi_{01} + \frac{1}{2}\xi_{02} \approx 0$, y en general $\frac{1}{2}\xi_{0(n+1)} - \xi_{0n} + \frac{1}{2}\xi_{0(n-1)} \approx 0$. En consecuencia, la suma de la ec. (23.21) que se extiende a todo el plano, se reduce efectivamente a

$$\xi_0 = \frac{1}{2}\xi_{00}, \quad (23.22)$$

y el movimiento ondulatorio en P procede de la parte del frente de onda directamente en línea con P , siendo igual solamente a la mitad de la primera zona de Fresnel.

Obsérvese que cada zona de Fresnel está compuesta de muchos elementos circulares de superficie como el ilustrado en la fig. 23-23. Para comprender la

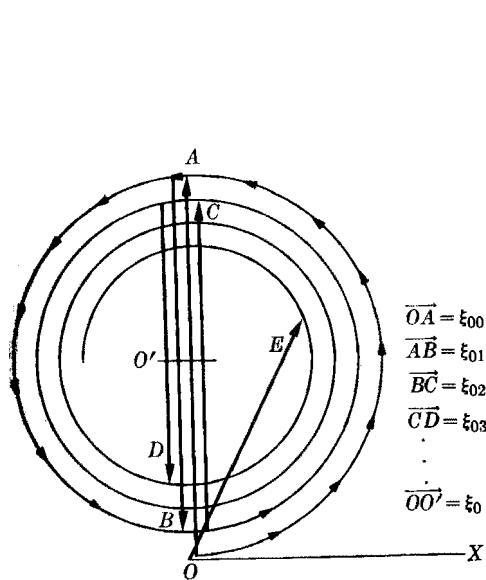


Figura 23-24

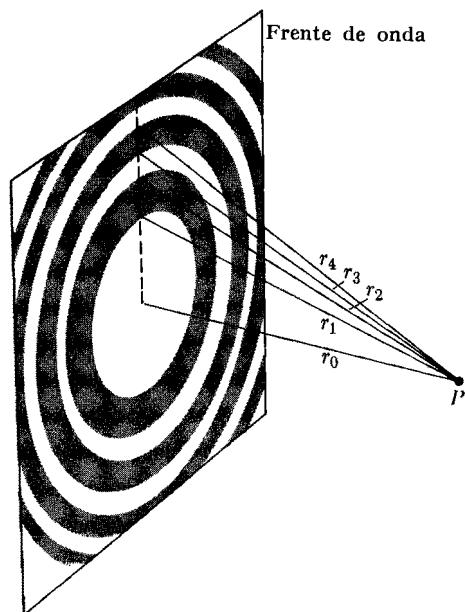


Fig. 23-25. Zonas de Fresnel sucesivas.

situación en función de un diagrama de vectores de amplitud tal como el de la fig. 23-24, hay que tener en cuenta que para la primera zona, la distancia va de r_0 a $r_0 + \frac{1}{2}\lambda$, o sea que la fase va de $2\pi r_0/\lambda$ a $(2\pi r_0/\lambda) + \pi$. Esto significa que cuando dibujamos todos los vectores de amplitud provenientes de todas las fuentes secundarias dentro de esta zona, su defasaje crece gradualmente de cero a π . Estos vectores constituyen el arco desde O hasta A en la fig. 23-24 por lo que la amplitud ξ_{00} de la primera zona es el vector OA . Para la segunda zona, las distancias van de $r_0 + \frac{1}{2}\lambda$ a $r_0 + \lambda$, o las fases de $(2\pi r_0/\lambda) + \pi$ a $(2\pi r_0/\lambda) + 2\pi$, resultando nuevamente un defasaje π entre los extremos, de modo que la segunda zona corresponde al arco desde A hasta B , con su amplitud ξ_{01} igual al vector AB .

Se repite este procedimiento hasta agotar todas las zonas. La espiral converge hacia el punto O' de modo que la amplitud resultante es OO' , que es aproximadamente igual a $\frac{1}{2}OA$, como en la ec. (23.22).

Es conveniente señalar que como $r_n = r_0 + \frac{1}{2}n\lambda$, el radio de la zona n es, según la fig. 23-25, $R_n^2 = r_n^2 - r_0^2 = (r_0 + \frac{1}{2}n\lambda)^2 - r_0^2 = n\lambda r_0 + \frac{1}{4}n^2\lambda^2$. Si n no es muy grande, se puede despreciar el último término (si $\lambda \ll r_0$), de modo que

$$R_n^2 = n\lambda r_0. \quad (23.23)$$

Observemos de paso que todas las zonas de Fresnel tienen la misma área, que es igual a $\pi\lambda r_0$.

Cuando una pantalla impide el avance del frente de onda, la situación es completamente diferente de la indicada en la ec. (23.22), porque entonces algunas zonas sólo contribuyen parcialmente (o no contribuyen) al movimiento oscilatorio en P . Supongamos ahora que una onda incide normalmente sobre una pantalla que tiene una abertura circular de radio a . El punto de observación está sobre una recta perpendicular a la pantalla y que pasa por el centro de la abertura, de modo que las zonas de Fresnel son concéntricas con la abertura. Cuando el punto está a una distancia r_0 tal que $a^2 = \lambda r_0$, solamente una zona pasa a través de la abertura, produciendo en P una amplitud ξ_{00} que es el doble de la obtenida en la ec. (23.22) para todo el frente de onda, resultando que la iluminación en P es ¡cuatro veces mayor que cuando no está la pantalla y está expuesto todo

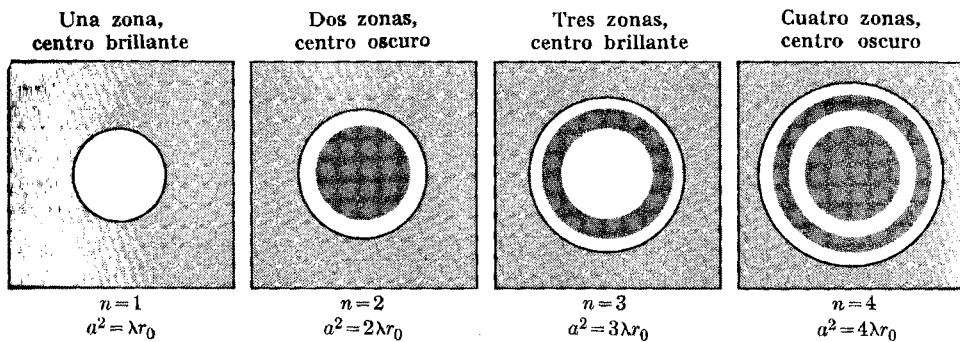


Fig. 23-26. Cambio en las zonas de Fresnel para un punto fijo, que resulta de una variación en el tamaño de la abertura.



Fig. 23-27. Cambio en las zonas de Fresnel que resulta del desplazamiento de un punto paralelamente al plano de la abertura, como se muestra en la fig. 23-28.

al frente de onda! Si la abertura es mayor o el punto está más cerca, de modo que $r < 2\lambda r_0$, las dos primeras zonas pasan a través de la abertura, resultando una amplitud $\xi_{00} - \xi_{01}$ que es prácticamente cero por lo que hay oscuridad en P . En general, mientras nuestra aproximación siga siendo válida, tendremos iluminación u oscuridad máximas en el centro del diagrama de difracción según que n sea impar o par, donde n es el número de zonas de Fresnel que abarca la abertura vista desde el punto donde se observa la difracción. En la fig. 23-26 se muestra la situación para diferentes valores de n .

Empleando el diagrama de la fig. 23-24, vemos que cuando sólo una zona está expuesta, la amplitud resultante es $\vec{OA} = \xi_{00}$. Cuando dos zonas están expuestas, la amplitud resultante es $\vec{OB} = \vec{OA} + \vec{AB} = \xi_{00} - \xi_{01}$. Para tres zonas es

$$\begin{aligned}\vec{OC} &= \vec{OA} + \vec{AB} + \vec{BC} = \\ &= \xi_{00} - \xi_{01} + \xi_{02} \approx \frac{1}{2}(\xi_{00} + \xi_{02}),\end{aligned}$$

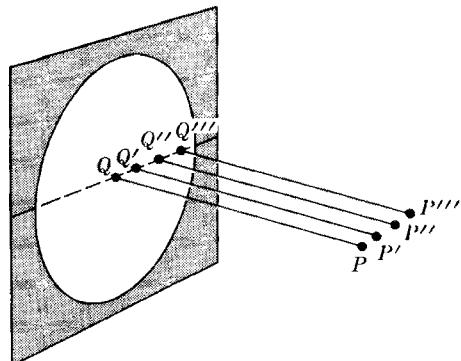


Figura 23-28

y así sucesivamente. En general, cuando está expuesto un número de zonas de Fresnel completas más una fracción, podemos obtener la amplitud resultante dibujando, en un diagrama tal como el de la fig. 23-24, el vector \vec{OE} que va de O al punto E , que corresponde al número de zonas completas más la fracción de la última. En el caso mostrado en la fig. 23-24, E corresponde a cuatro zonas más un quinto de zona.

Cuando el punto de observación se mueve lateralmente paralelo a la pantalla, las zonas de difracción se mueven con él pero ya no son simétricas respecto a la abertura, como se muestra en la fig. 23-27. En esa figura, cada caso corresponde

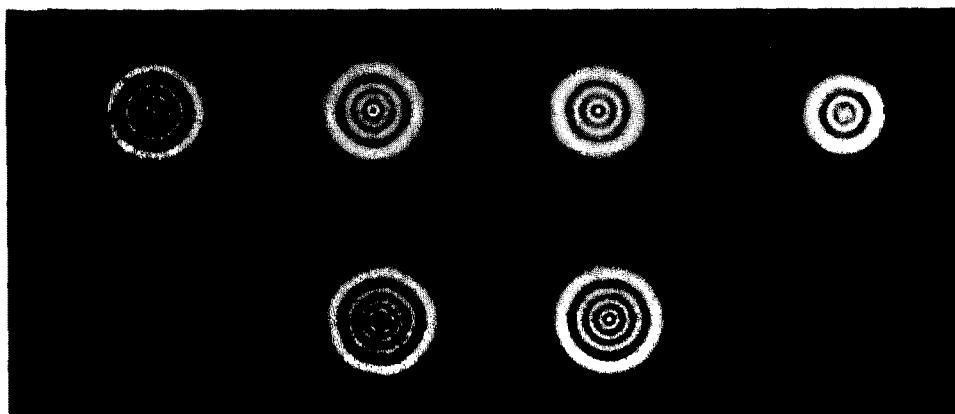


Fig. 23-29. Diagramas de difracción de Fresnel de aberturas circulares de radios diferentes.

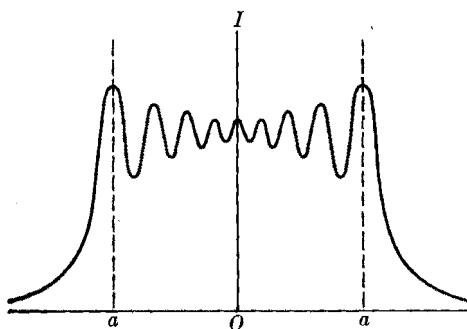


Fig. 23-30. Distribución de intensidad en la difracción de Fresnel producida por una abertura circular.

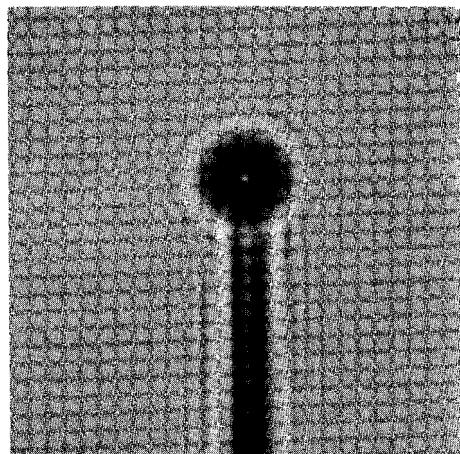


Fig. 23-31. Difracción de Fresnel producida por un pequeño disco circular sostenido por una varilla delgada.

a las diferentes posiciones P, P', P'', P''' del punto de observación, como se muestra en la fig. 23-28, con zonas centradas en Q, Q', Q'', Q''' , respectivamente. El resultado es que las diferentes zonas activas dan contribuciones diferentes al movimiento ondulatorio resultante, obteniéndose un diagrama de difracción compuesto de una serie de anillos concéntricos con P y alternadamente iluminados, como se muestra en la fig. 23-29. La fig. 23-30 muestra la distribución de intensidad en función de la distancia al eje de la abertura para una abertura circular de radio a , comprendiendo varias zonas.

Si en vez de una abertura circular tenemos un disco circular, el diagrama de difracción es similar, excepto que el centro está siempre iluminado. Esto es por-

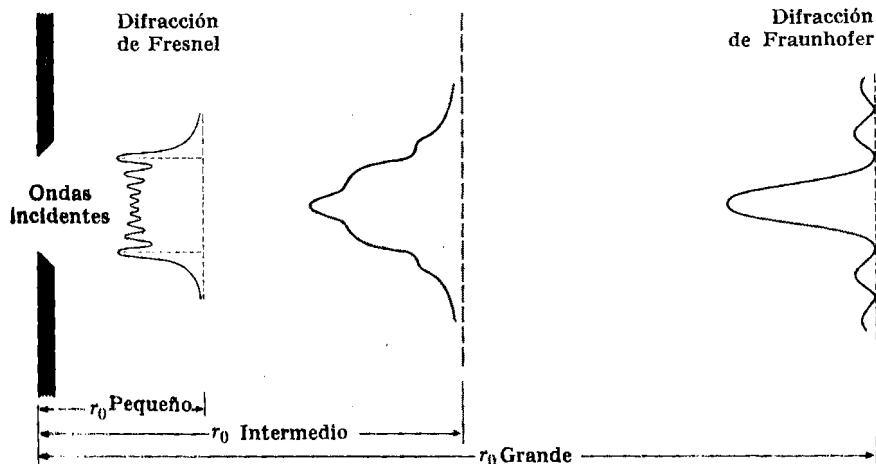


Fig. 23-32. Cambio del diagrama de difracción a medida que varía la distancia del punto a la abertura.

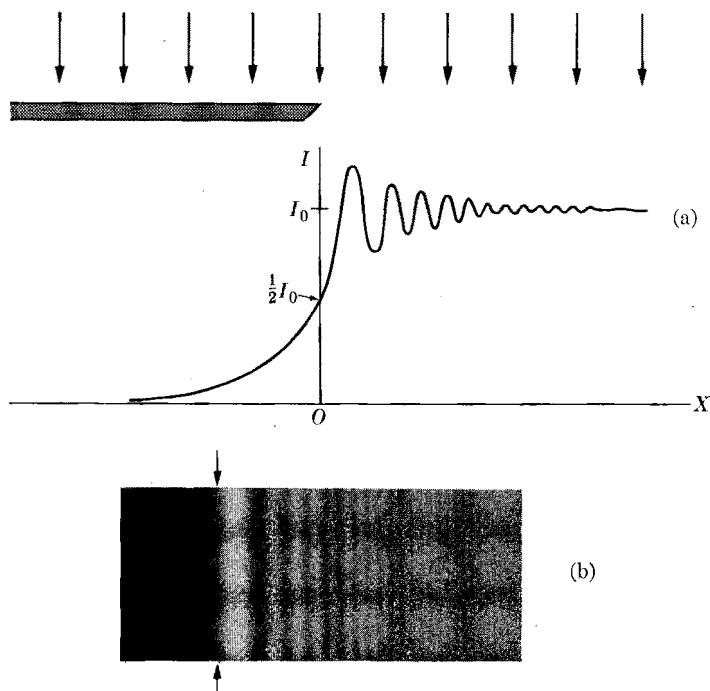


Fig. 23-33. (a) Distribución de intensidad en la difracción de Fresnel producida por un borde recto. (b) Fotografía de la difracción de Fresnel producida por un borde recto.

que la primera zona de Fresnel expuesta siempre da una contribución positiva en el centro, por la misma razón que la da en el caso de un frente de onda plano completamente expuesto (fig. 23-31).

Para una rendija rectangular la situación es muy similar a la de una abertura circular, excepto que en vez de anillos, las zonas de Fresnel son bandas paralelas a la rendija. A medida que nos alejamos de la rendija, el diagrama de difracción evoluciona gradualmente de un diagrama de Fresnel a uno de Fraunhofer, como se indica en la fig. 23-32.

En un borde, el diagrama de difracción tiene la distribución de intensidad mostrada en la fig. 23-33, cayendo la intensidad gradualmente a cero dentro de la sombra geométrica y fluctuando en un intervalo de unas pocas longitudes de onda dentro de la región geométrica de iluminación.

EJEMPLO 23.7. Una pantalla con un pequeño agujero de 1 mm de diámetro se ilumina con luz de $5,9 \times 10^{-7}$ m de longitud de onda. Calcular la distancia según la perpendicular entre la pantalla y el punto de oscuridad más lejano.

Solución: En este caso el radio del agujero es $a = 0,5 \text{ mm} = 5 \times 10^{-4} \text{ m}$ y la longitud de onda es $\lambda = 5,9 \times 10^{-7} \text{ m}$. El punto de oscuridad más lejano es el punto para el cual la abertura abarca sólo dos zonas de Fresnel. Entonces, conforme a la ec. (23.23) con $n = 2$ y a en vez de R_n , tenemos $a^2 = 2\lambda r_0$ o sea $r_0 = a^2/2\lambda \approx 0,21 \text{ m}$,

lo cual significa que el punto de oscuridad más lejano está a 21 cm, aproximadamente, de la pantalla. En general, los puntos sucesivos de oscuridad están a distancias $a^3/2n\lambda$ (donde n es un entero) de la pantalla.

23.7 Difusión de ondas

Hasta ahora hemos supuesto en nuestro estudio de la difracción que los objetos interpuestos en el camino de una onda juegan un papel *pasivo*. Esto es, hemos supuesto que su único papel es interrumpir una parte del frente de onda sin agregar ellos mismos ninguna onda. Con esta suposición, los efectos de difracción observados se deben exclusivamente a la distorsión del movimiento oscilatorio incidente.

Sin embargo, éste no es el cuadro real en muchas situaciones. Supongamos, por ejemplo, que se suspende en el aire una esfera de material elástico y que se produce una onda acústica o de compresión en las cercanías. Cuando la onda pasa alrededor de la esfera, experimenta en primer lugar una difracción del tipo estudiado anteriormente. Pero además la esfera elástica está sometida a deformaciones oscilatorias debidas a las fluctuaciones de presión que acompañan a la onda. Las oscilaciones de la superficie producen a su vez nuevas perturbaciones u ondas en el aire circundante; estas ondas se superponen a la onda inicial. Las nuevas ondas producidas por la esfera oscilante son ondas *difundidas* y el proceso se denomina *difusión*. (NT).

Análogamente, si se coloca una esfera conductora en el camino de una onda electromagnética, los campos eléctrico y magnético de la onda inducen oscilaciones en las cargas libres de la esfera, y estas cargas oscilantes producen, conforme a la teoría de la radiación electromagnética desarrollada en el capítulo 19, una onda electromagnética nueva o difundida.

En el capítulo 19 estudiamos la difusión por un solo electrón, lo cual es un problema puramente dinámico al nivel atómico. La difusión que estamos describiendo aquí es de naturaleza más macroscópica, ya que involucra cuerpos compuestos de muchos átomos o que contienen muchos electrones. Podemos calcular la magnitud de esta difusión macroscópica aplicando ciertas condiciones de contorno en la superficie del cuerpo; estas condiciones determinan la naturaleza de la onda difundida. Por ejemplo, en el caso de una esfera perfectamente conductora, debemos imponer que en la superficie de la esfera la componente tangencial del campo eléctrico resultante (es decir, la suma del campo eléctrico de la onda incidente y el de la difundida) sea cero.

Los procesos de difusión son extremadamente importantes en todos los fenómenos ondulatorios. Sin embargo, un estudio más completo de la difusión exige un tratamiento matemático que está más allá de los fines de este texto.

23.8 Difusión de rayos X por cristales

Las ondas electromagnéticas con longitudes de onda más cortas que la de los rayos ultravioleta, tales como los rayos X y los rayos γ , no son difractadas en forma notable por objetos de las dimensiones usadas en la región óptica. Sin

sin embargo, una red cristalina con átomos o moléculas regularmente espaciados a distancias del orden de 10^{-10} m, constituye un medio excelente para producir difracción de rayos X. Este problema es algo más complicado que los estudiados previamente en este capítulo por dos razones. En primer lugar, como un cristal es un arreglo tridimensional, los centros de difracción en vez de estar distribuidos en una dirección, lo están en el espacio, como se indica en la fig. 23-34, que es un diagrama de un cristal de NaCl. (Las esferas oscuras y claras corresponden a los iones Na^+ y Cl^-). En segundo lugar, bajo la acción del campo eléctrico de una onda electromagnética, los átomos o moléculas del cristal se convierten en fuentes de radiación secundarias, como ya se explicó en la sección 19.9. En consecuencia, tenemos en realidad más bien difusión que difracción.

Cuando los rayos X pasan a través del cristal, la intensidad de los rayos difundidos o difractados es el resultado de la interferencia (en la dirección de observación) de las ondas emitidas por cada átomo o molécula. Cuando el cristal está

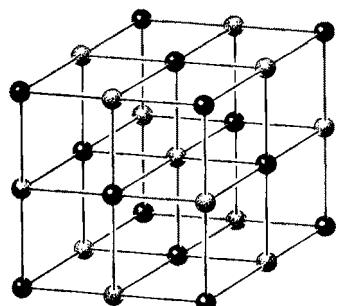


Fig. 23-34. Representación simplificada de un cristal de cloruro de sodio, mostrando la distribución regular de los átomos que forman una red cúbica.

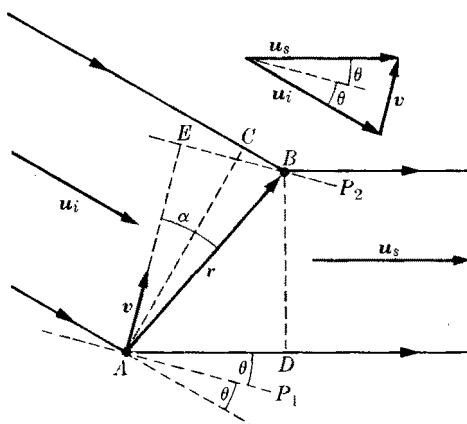


Fig. 23-35. Difusión de rayos X por dos átomos A y B.

compuesto de más de una clase de átomos, cada una contribuye de manera diferente a la difusión de los rayos X. Para simplificar nuestro cálculo, supondremos entonces que tenemos una sola clase de átomos y sólo un átomo por celda unitaria del cristal. Los resultados tienen validez general. La corrección para cuando hay más de una clase de átomos se calcula muy simple y directamente, pero no se discutirá aquí.

Consideremos dos átomos A y B a una distancia r (fig. 23-35). Sea u_i un versor según la dirección de propagación de las ondas incidentes y u_s un versor según la dirección de las ondas difundidas. La diferencia de camino de las ondas incidente y difundida para esos dos átomos es $AD - BC$, y el desfasaje está dado por

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} (AD - BC).$$

Pero $AD = \mathbf{u}_s \cdot \mathbf{r}$ y $BC = \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{r}$. Por lo tanto

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} (\mathbf{u}_s - \mathbf{u}_i) \cdot \mathbf{r} = \frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{v} \cdot \mathbf{r}, \quad (23.24)$$

donde $\mathbf{v} = \mathbf{u}_s - \mathbf{u}_i$. Llamando 2θ al ángulo entre \mathbf{u}_s y \mathbf{u}_i vemos que, según el diagrama inserto en la fig. 23.35,

$$v = 2 \operatorname{sen} \theta. \quad (23.25)$$

La condición para que haya interferencia constructiva en la dirección \mathbf{u}_s es $\delta = -2n\pi$ o sea, en vista de la ec. (23.24),

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{r} = n\lambda, \quad (23.26)$$

donde n es, como en casos anteriores, un entero positivo o negativo. La ec. (23.26) representa un plano perpendicular al vector \mathbf{v} (ver ejemplo 3.11). Por lo tanto, para una longitud de onda y una dirección de incidencia dadas, la ec. (23.26) da una serie de planos paralelos, uno para cada valor de n . La fig. 23-35 muestra dos de esos planos: P_1 y P_2 . La condición (23.26) vale para todos los átomos ubicados sobre estos planos, contribuyendo todos a un máximo de intensidad en la dirección \mathbf{u}_s . En la ec. (23.26), $n = 0$ corresponde al plano que pasa por A , $n = \pm 1$ a los planos más cercanos a cada lado, $n = \pm 2$ al siguiente par de planos y así sucesivamente.

De la fig. 23-35 deducimos, usando la ec. (23.35), que $\mathbf{v} \cdot \mathbf{r} = vr \cos \alpha = 2d \operatorname{sen} \theta$, donde $d = AE = r \cos \alpha$ es la distancia entre los planos P_1 y P_2 . La ec. (23.26) se convierte entonces en

$$"2d \operatorname{sen} \theta = n\lambda," \quad (23.27)$$

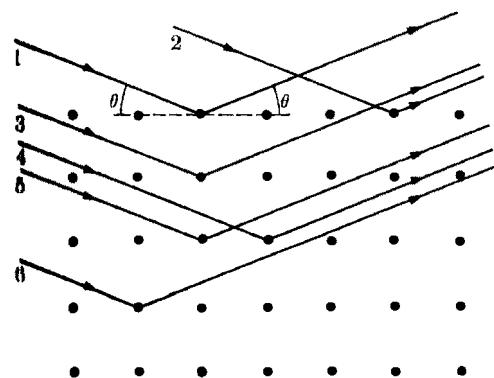


Fig. 23-35. Planos difusores paralelos en un cristal.

expresión que se conoce como *condición de Bragg*. Los valores de n están limitados por la condición de que $\operatorname{sen} \theta$ debe ser menor que la unidad. En la fig. 23-36 se muestra la geometría implicada en esta ecuación. Para los rayos tales como el 1 y el 2 que son difundidos por átomos ubicados en el mismo plano, el desfase es nulo ($n = 0$) e interfieren constructivamente. Esto ocurre sin embargo para cualquier ángulo de incidencia. El hecho importante que implica la condición de Bragg es que los rayos tales como 3, 4, 5, ..., que provienen de planos sucesivos, también interfieren cons-

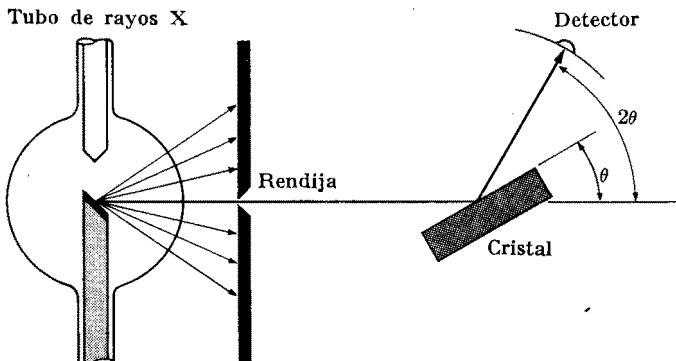


Fig. 23-37. Espectrómetro de cristal para la difracción de rayos X. Los rayos X, generados en el tubo de la izquierda y colimados por una rendija en un bloque de plomo, se difractan en el cristal. Los rayos X difractados se observan por medio de un detector móvil, en general una cámara de iones.

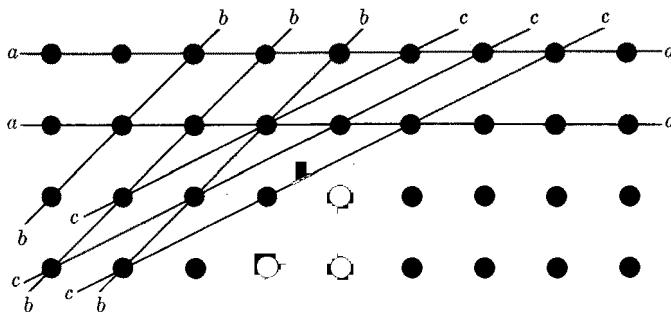


Fig. 23-38. Varios planos difusores paralelos posibles en un cristal.

tructivamente, dando lugar a un máximo muy intenso. En consecuencia, la condición de Bragg expresa una especie de efecto colectivo, en el cual los rayos difundidos por todos los átomos ubicados en determinados planos paralelos interfieren constructivamente. Para planos fijos (o d fija) y longitud de onda λ

dada se producen, al variar el ángulo θ , posiciones alternadas de intensidad máxima y mínima, correspondientes a interferencia constructiva especificada por la ec. (23.27) o destructiva. Nótese que la ec. (23.27) se puede usar para medir la separación d de los planos si se conoce la longitud de onda λ y viceversa. En la fig. 23-37 se muestra un esquema de la disposición experimental para observar la difracción Bragg de rayos X; este dispositivo se denomina *espectrómetro de cristal*.

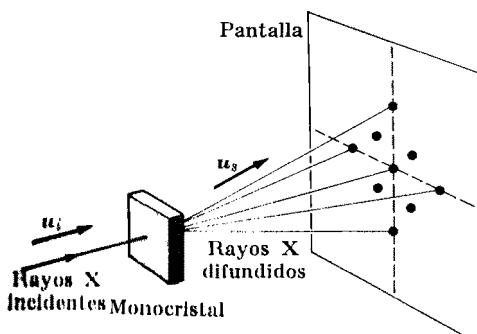


Fig. 23-39. Difracción de Laue de rayos X producida por un monocristal.

Dada una dirección de incidencia \mathbf{u}_i , la ec. (23.26) define una serie de posibles familias de planos paralelos que producen un máximo para la difusión en la dirección \mathbf{u}_s característica de cada familia. La intensidad depende del número de átomos que hay en cada familia de planos. La fig. 23-38 muestra algunas de las familias posibles de planos. Cada plano corresponde a una densidad de centros difusores y a un espaciamiento diferentes. Si se intercala una pantalla en el camino de los rayos difundidos por un monocrystal (ver fig. 23-39), aparece un diagrama regu-

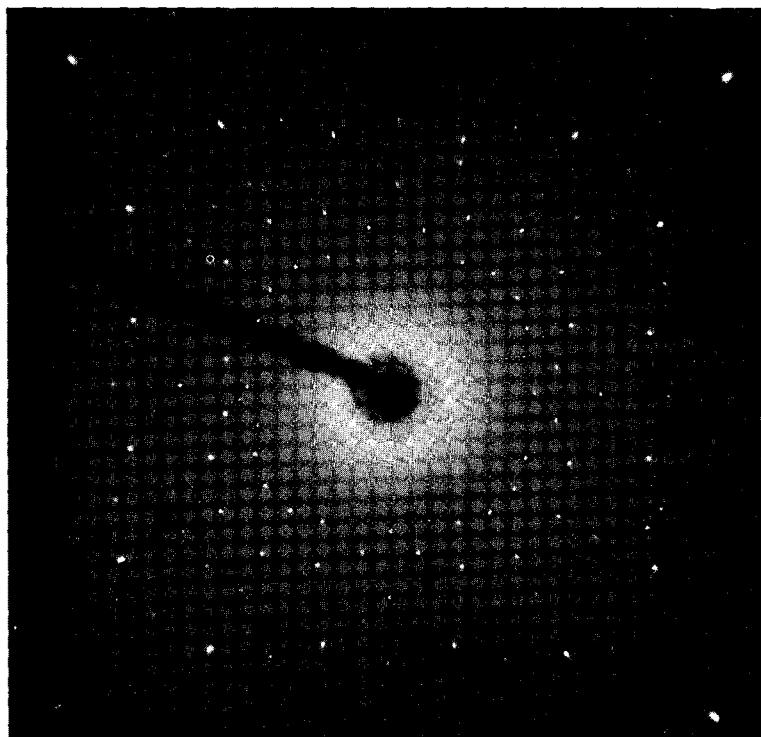


Fig. 23-40. Diagrama de Laue de difracción para un cristal de cuarzo. Se ha intentado disimular el efecto del haz incidente no desviado.

lar característico de la estructura del cristal. Se llama *diagrama de Laue*. Cada punto del diagrama corresponde a la dirección de \mathbf{u}_s relacionada con las diferentes familias de planos ilustrados en la fig. 23-38. La fotografía de la fig. 23-40 muestra un diagrama de Laue.

Si en vez de un monocrystal, el difusor es un polvo que contiene un gran número de cristales pequeños orientados al azar, los correspondientes versores \mathbf{u}_s yacen sobre superficies cónicas con sus respectivos ejes en la dirección de incidencia como se muestra en la fig. 23-41. Cada superficie cónica produce un anillo brillante sobre una película fotográfica como se muestra en la fig. 23-42, resultando el llamado diagrama de *Debye-Scherrer*. Analizando diagramas tales

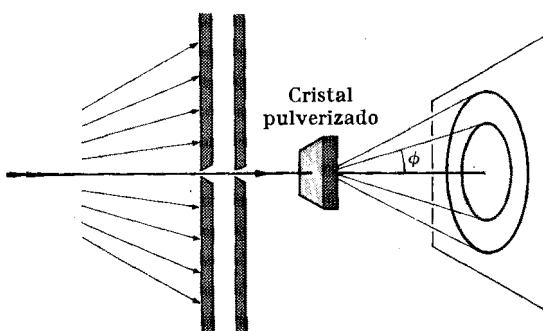


Fig. 23-41. Difracción de rayos X por polvo.

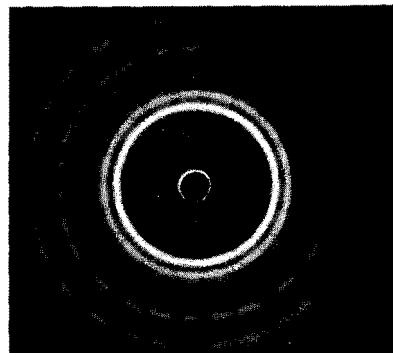


Fig. 23-42. Diagrama de difracción de rayos X para aluminio pulverizado.

como los de las figs. 23-40 y 23-42, se puede deducir la estructura interna de un cristal o, inversamente, hallar la longitud de onda de los rayos X.

Es interesante señalar que cuando Roentgen observó los rayos X por primera vez a fines del siglo diecinueve, se originó una gran discusión acerca de su naturaleza. ¿Eran ondas o partículas? Para responder esta pregunta, los físicos efectuaron experimentos de interferencia y de difusión usando aparatos similares a los empleados en experimentos sobre la luz. Existía la tendencia a descartar cualquier interpretación ondulatoria hasta que von Laue, Bragg y otros estudiaron el pasaje de rayos X a través de cristales y obtuvieron los resultados que hemos estado discutiendo, los cuales ofrecieron una prueba concluyente de la naturaleza ondulatoria de la radiación X.

EJEMPLO 23.8. Un cristal de sal gema difracta un haz de rayos X. El espectro en primer orden corresponde a un ángulo de $6^{\circ}50'$ y la distancia entre los planos es $2,81 \times 10^{-10}$ m. Determinar la longitud de onda de los rayos X y la posición del espectro de segundo orden.

Solución: Utilizando la relación de Bragg (23.27) con $d = 2,81 \times 10^{-10}$ m, $\theta = 6^{\circ}50'$ y $n = 1$, encontramos que

$$\lambda = 2d \operatorname{sen} \theta = 6,69 \times 10^{-11} \text{ m.}$$

Para hallar la posición del espectro de segundo orden, hacemos $n = 2$. Entonces, tenemos $0 = n\lambda/2d = 0,238$ o sea $\theta = 13^{\circ}46'$. Nótese que el orden máximo de difracción está limitado por la condición $n\lambda/2d < 1$, que en nuestro caso es $n < 8,4$ o sea $n_{\max} = 8$.

Bibliografía

1. "A Student Experiment in Fresnel Diffraction", P. Young, *Am. J. Phys.* **32**, 367 (1964)
2. "Crystals", E. Wood, *The Physics Teacher* **3**, 7 (1965)
3. "Early Studies in X-Ray Crystallography", A. Hull y C. Burdick, *Physics Today*, octubre 1958, págs. 18

4. "Undergraduate Research Project: Photon Diffraction", R. Bisser, *Am. J. Phys.* **31**, 29 (1963)
5. *Light: Principles and Experiments*, G. Monk. Dover Press, New York, 1963, cap. 12
6. *Fundamentos de óptica*, B. Rossi. Reverté, Barcelona, 1966, cap. 4
7. *Great Experiments in Physics*, Morris Shamos, editor. Holt, Rinehart and Winston, 1959, cap. 8 (Fresnel); cap. 14 (Roentgen)
8. *The Feynman Lectures on Physics*, R. Feynman, R. Leighton y M. Sands. Addison-Wesley, Reading, Mass., 1963, vol. I, cap. 30; vol. II, cap. 30
9. *Source Book in Physics*, W. F. Magie. Harvard University Press, Cambridge, Mass., 1963, pág. 294 (Grimaldi); pág. 318 (Fresnel); pág. 365 (Rowland)
10. *Foundations of Modern Physical Science*, G. Holton y D. H. D. Roller. Addison-Wesley, Reading, Mass., 1958, secs. 30.2, 30.3 y 30.6

Problemas

23.1 Rayos paralelos de luz verde de mercurio, cuya longitud de onda es $5,6 \times 10^{-7}$ m, pasan a través de una rendija de 0,4 mm de ancho que cubre una lente de 40 cm de distancia focal. ¿Cuál es la distancia entre el máximo central y el primer mínimo sobre una pantalla colocada en el plano focal de la lente?

23.2 El diagrama de difracción de Fraunhofer de una rendija, ampliado al doble de su tamaño en la fig. 23.5, se formó sobre una película fotográfica ubicada en el plano focal de una lente de 0,60 m de distancia focal. La longitud de onda de la luz que se usó era de $5,9 \times 10^{-7}$ m. Calcular el ancho de la rendija. [Sugerencia: medir (sobre la fotografía) la distancia entre mínimos correspondientes a derecha y a izquierda del máximo central.]

23.3 Se usa un telescopio para observar dos fuentes puntuales distantes que están a 30 cm una de otra. El objetivo del telescopio está cubierto por una pantalla que tiene una rendija de 1 mm de ancho. ¿Cuál es la distancia máxima en metros a la cual se puede resolver las dos fuentes? Suponer $\lambda = 5,0 \times 10^{-7}$ m.

23.4 En el plano focal de una lente de 1 m de distancia focal, se observa el diagrama de difracción de Fraunhofer de una rendija. El ancho de la rendija es 0,4 mm. La luz incidente contiene dos longitudes de onda λ_1 y λ_2 . El cuarto

mínimo correspondiente a λ_1 y el quinto mínimo correspondiente a λ_2 coinciden a 5 mm del máximo central. Calcular λ_1 y λ_2 .

23.5 Una onda plana monocromática de longitud de onda λ incide a un ángulo de 30° sobre una pantalla plana opaca que tiene una rendija larga y angosta de ancho a (fig. 23-43). Detrás de la pantalla hay una lente convergente

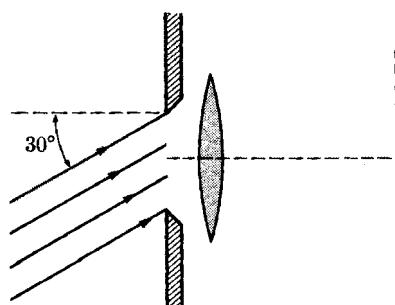


Figura 23-43

cuyo eje principal es perpendicular al plano de la pantalla. Describir el diagrama de difracción que se observa en el plano focal de esta lente.

23.6 Discutir la distribución de intensidad de la difracción de Fraunhofer por tres rendijas idénticas igualmente espaciadas. Suponer incidencia normal sobre las rendijas.

23.7 Una onda plana monocromática de $6,0 \times 10^{-7}$ m de longitud de onda incide perpendicularmente sobre una pantalla opaca que tiene una abertura rectangular de 0,5 mm \times 1,0 mm. (a) Dibujar el diagrama de difracción que se observa en el plano focal de una lente convergente de 2,0 m de distancia focal colocada directamente detrás de la abertura. (b) Hallar los lados del rectángulo formado por las líneas negras que rodean el máximo central.

23.8 En un diagrama de difracción de dos rendijas falta el tercer máximo principal porque el mismo coincide con el primer mínimo de difracción. (a) Hallar el cociente a/b . (b) Representar la distribución de intensidad abarcando varios máximos a cada lado del máximo central. (c) Hacer un esquema sombreado de las franjas tal como aparecerían sobre la pantalla.

23.9 Calcular el radio del disco central del diagrama de difracción de Fraunhofer de la imagen de una estrella formada por (a) una lente de cámara fotográfica de 2,5 cm de diámetro y 7,5 cm de distancia focal, (b) un objetivo de telescopio de 15 cm de diámetro con una distancia focal de 1,5 m. Suponer que la luz es de $5,6 \times 10^{-7}$ m de longitud de onda.

23.10 Frente a una fuente brillante de luz hay dos agujeros muy pequeños a 1,5 mm uno de otro y se los mira a través de una lente cubierta por una pantalla que tiene un agujero (una abertura) central circular de 4 mm de diámetro. ¿Cuál es la distancia máxima a la cual se puede resolver los agujeritos? Suponer una longitud de onda de $5,5 \times 10^{-7}$ m.

23.11 La difracción de Fraunhofer de dos rendijas se observa en el plano focal de una lente de 50 cm de distancia focal. La luz monocromática incidente tiene una longitud de onda de $5,0 \times 10^{-7}$ m. Se encuentra que la distancia entre los dos mínimos adyacentes al máximo de orden cero es 0,5 cm y que falta el máximo de cuarto orden. Calcular el ancho de las rendijas y la distancia entre sus centros.

23.12 Los faros delanteros de un automóvil que se acerca están a 1,3 m uno

de otro. Estimar la distancia a la cual se puede resolver los dos faros a ojo desnudo si el poder resolvente del ojo está determinado sólo por la difracción. Suponer una longitud de onda media de $5,5 \times 10^{-7}$ m y que el diámetro de la pupila del ojo es 5 mm. Comparar con el resultado que se obtiene usando el poder resolvente del ojo dado en la sección 21.5.

23.13 En la fig. 23-44, dos fuentes puntuales de luz S_1 y S_2 situadas a 50 m de la lente L y a 6 mm una de otra,

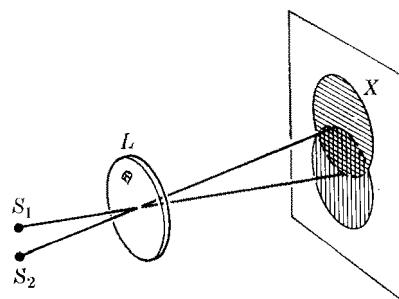


Figura 23-44

producen imágenes apenas resueltas según el criterio de Rayleigh. La distancia focal de la lente es 20 cm. ¿Cuál es el diámetro de cada uno de los primeros anillos de difracción?

23.14 Dos estrellas igualmente brillantes subtienen un ángulo de un segundo. Suponiendo una longitud de onda de $5,5 \times 10^{-7}$ m, (a) ¿cuál es el diámetro mínimo de la lente de un objetivo de telescopio para poder resolver estas estrellas? (b) ¿Cuál debiera ser el aumento del telescopio? (c) Calcular la distancia focal del ocular que se debe usar si la distancia focal del objetivo es 1,8 m.

23.15 Se puede demostrar que en el caso de la difracción de Fraunhofer, la amplitud de las ondas difractadas por una abertura circular de radio R es proporcional a la función de Bessel $J_1(x)$ (ver Chemical Rubber Company's Standard Mathematical Tables, duodécima edición, página 317), donde, para incidencia normal, $x = (2\pi R/\lambda) \sin \theta$, siendo θ el ángulo que los rayos difractados forman con el eje de la abertura (fi-

gura 23-45). (a) Demostrar que las direcciones para las cuales las ondas difractadas tienen amplitud nula corresponden a las raíces de la ecuación $J_1(x) = 0$. (b) Recurriendo a una tabla de las raíces de $J_1(x) = 0$ (*loc. cit.*, página 318), obtener los valores de $\sin \theta$ para las tres primeras direcciones de

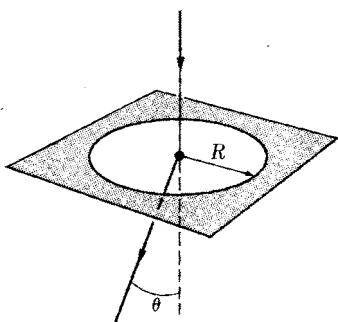


Figura 23-45

amplitud nula, verificando la ec. (23.11). (c) Suponiendo que mediante una lente de distancia focal f se enfoca los rayos difractados sobre una pantalla colocada en el plano focal de la lente, dar la expresión para el radio de los tres primeros anillos oscuros que se forman. (Notar que en este problema se puede reemplazar $\sin \theta$ por θ). (d) Obtener los valores de θ y del radio de cada uno de los anillos, si $R = 0,10$ mm, $\lambda = 5,9 \times 10^{-7}$ m y $f = 20$ cm.

23.16 A través de una abertura circular pasa luz monocromática de $6,0 \times 10^{-7}$ m proveniente de una fuente puntual distante. El diagrama de difracción de Fresnel se observa sobre una pantalla a 1 m de la abertura. Determinar el diámetro de la abertura circular si expone (a) sólo las zonas de Fresnel centrales, (b) las cuatro primeras zonas de Fresnel.

23.17 Se coloca un punto a 1,0 cm de una abertura circular iluminada con luz de $5,0 \times 10^{-7}$ m de longitud de onda. Si la abertura corresponde a 10 zonas de Fresnel, determinar su radio.

23.18 Sobre una abertura circular de 0,1 mm de radio incide luz de 5×10^{-7} m. ¿A qué distancia de la abertura se debería colocar un punto para que la aber-

tura correspondiera a (a) tres zonas de Fresnel, (b) cuatro zonas de Fresnel? Estimar en cada caso si en ese punto habrá iluminación o sombra.

23.19 Una onda luminosa plana y monocromática de longitud de onda $\lambda = 5,0 \times 10^{-7}$ m incide perpendicularmente sobre una pantalla opaca que tiene una abertura de la forma que se muestra en la fig. 23-46. El radio del círculo interior es 1 mm y el del exterior 1,41 mm. (a) Calcular la amplitud y la intensidad relativas de la perturbación óptica en un punto P sobre el eje de los círculos a 2 m de la pantalla, respecto a los valores que se obtendrían si no estuviera la pantalla. (b) Determinar la

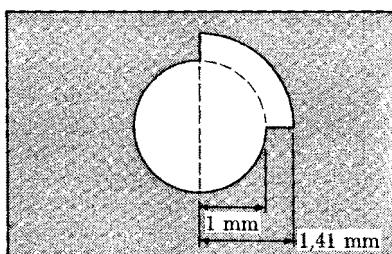


Figura 23-46

fase de esta perturbación respecto a la de la que se observaría en P sin la pantalla.

23.20 A través de una abertura circular de 2,6 mm de diámetro pasan ondas luminosas paralelas de $5,6 \times 10^{-7}$ m de longitud de onda. Se observa el diagrama de difracción de Fresnel sobre una pantalla a 1,0 m de la abertura. (a) El centro del diagrama de difracción, ¿será brillante u oscuro? (b) ¿Qué distancia mínima se debería mover la pantalla para invertir la situación encontrada en (a)?

23.21 Una onda luminosa plana y monocromática de longitud de onda $\lambda = 5,0 \times 10^{-7}$ m incide perpendicularmente sobre una pantalla que tiene una abertura circular de 0,40 cm de diámetro. (a) Determinar los puntos de intensidad máxima y mínima a lo largo del eje de la abertura. (b) ¿A qué distancia de la pantalla se presenta el último mínimo?

23.22 Una pantalla con una abertura circular de 0,40 cm de radio se ilumina con ondas luminosas planas que inciden perpendicularmente. Suponer que la luz incidente es una mezcla de dos haces monocromáticos de longitudes de onda $\lambda_1 = 6,0 \times 10^{-7}$ m y $\lambda_2 = 4,0 \times 10^{-7}$ m respectivamente. Determinar los puntos sobre la perpendicular a la abertura en su centro en los cuales se observa sólo una de las dos longitudes de onda.

23.23 Sobre una red plana de difracción por transmisión que tiene 500 líneas por mm inciden normalmente ondas planas monocromáticas de $6,0 \times 10^{-7}$ m. Determinar los ángulos de desviación para los espectros de primero, segundo y tercero orden.

23.24 Una red de difracción por transmisión tiene grabadas 4000 líneas por cm. Calcular en el espectro de segundo orden, la separación angular en grados entre las líneas α y β del hidrógeno atómico, cuyas longitudes de onda son $6,56 \times 10^{-7}$ m y $4,10 \times 10^{-7}$ m respectivamente. Suponer incidencia normal.

23.25 (a) Una red de difracción por transmisión que tiene 6000 líneas por cm desvía cierta luz en un ángulo de 20° en el primer orden; ¿cuál es la longitud de onda de la luz? (b) ¿Cuál es la desviación de esta longitud de onda en el segundo orden? Suponer incidencia normal.

23.26 ¿Cuál es la máxima longitud de onda que se puede observar en el cuarto orden con una red que tiene 5000 líneas por cm? Suponer incidencia normal.

23.27 Suponiendo que los límites del espectro visible están en las longitudes de onda 4×10^{-7} m y 7×10^{-7} m, hallar los ángulos subtendidos por los espectros de primera y segundo orden producidos por una red plana que tiene 8000 líneas por cm. Suponer incidencia normal.

23.28 Demostrar que en una red que tiene un gran número de líneas, la intensidad del primer máximo secundario a un lado o a otro del primer máximo principal es igual a alrededor de 4 % de la intensidad del máximo principal.

23.29 Una red de difracción por transmisión de 4 cm de longitud tiene 4000 líneas por cm. Calcular el poder resolvente de la red para una longitud de onda de $5,9 \times 10^{-7}$ m en el espectro de primer orden. ¿Separa la red las dos líneas de $5,890 \times 10^{-7}$ m y $5,896 \times 10^{-7}$ metros de longitud de onda que constituyen el doblete amarillo del sodio? Calcular también la desviación mínima y la correspondiente dispersión de la red para la longitud de onda considerada.

23.30 Demostrar que cualquiera sea el espaciado de las líneas en una red, el violeta del espectro de tercer orden se superpone al rojo del espectro de segundo orden. Suponer incidencia normal.

23.31 Una red de difracción por reflexión se hace grabando, con una punta de diamante, líneas finas sobre una superficie pulida de metal (fig. 23-47). Los espacios pulidos que quedan entre líneas adyacentes son el equivalente de las

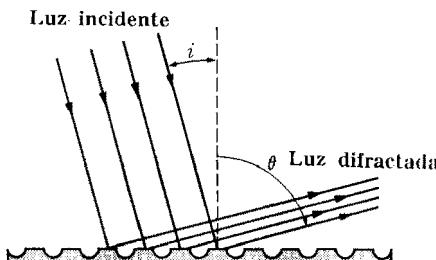


Figura 23-47

rendijas en una red de difracción por transmisión. Demostrar que los máximos principales se obtienen de la condición $a(\operatorname{sen} i - \operatorname{sen} \theta) = n\lambda$, donde a es la separación entre líneas consecutivas.

23.32 Para asegurar un enfoque apropiado en las redes de difracción, el físico norteamericano H. A. Rowland construyó redes cóncavas de gran radio. En la fig. 23.48 C es el centro de curvatura de la red y el diámetro de la circunferencia de trazos es igual al radio de la red. Demostrar que para cualquier fuente S colocada sobre esa circunferencia (a) todos los rayos llegan a la red con el mismo ángulo de incidencia, (b) todos los rayos difractados por la red con el mismo ángulo convergen en un punto O situado

en la circunferencia de trazos. De este modo, si en O se coloca una placa fotográfica tangente a la circunferencia, se puede registrar el espectro de difracción correspondiente a ese ángulo de difracción. Esta disposición se denomina *montaje de Rowland* y se usa extensamente

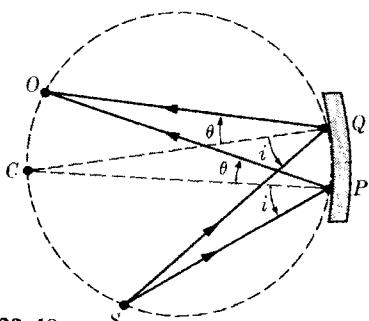


Figura 23-48

en los laboratorios de física en que se hace investigación espectroscópica. [Sugerencia: Tener en cuenta que la normal a la red en el punto de incidencia de un rayo pasa por C y que la superficie de la red se aparta muy poco de la circunferencia de trazos.]

23.33 La separación entre los planos principales de un cristal de NaCl es $2,82 \times 10^{-10}$ m. Se encuentra que una reflexión de Bragg de primer orden de un haz monocromático de rayos X ocurre a un ángulo de 10° . (a) Calcular la longitud de onda de los rayos X. (b) ¿Qué ángulo corresponde al espectro de segundo orden?

23.34 El ioduro de potasio, KI, es un cristal cúbico cuya densidad es $3,13$ g/cm³. Hallar la mínima distancia entre planos, o sea la longitud de una celda unitaria. Determinar los ángulos correspondientes a las dos primeras reflexiones de Bragg para rayos X de $3,0 \times 10^{-10}$ m de longitud de onda.

23.35 Un tubo de rayos X acelera electrones por medio de una diferencia de potencial de 10^5 V. Los rayos X producidos se examinan mediante el cristal descrito en el problema 23.33. Hallar el ángulo al cual aparece el espectro de primer orden de la longitud de onda más corta que produce el tubo.

23.36 Un haz de rayos X de 5×10^{-11} m de longitud de onda incide sobre un polvo formado por cristales microscópicos de KCl orientados al azar. El espaciamiento de la red cristalina es $3,14 \times 10^{-10}$ m. Se coloca una película fotográfica a $0,1$ m del blanco de polvo. (a) Hallar el radio de las circunferencias correspondientes a los espectros de primero y segundo orden provenientes de planos que tienen el mismo espaciamiento que la red. (b) Determinar el radio de las circunferencias que resultan de planos que forman un ángulo de 45° con los de (a).

23.37 Una red cristalina se puede caracterizar por tres vectores fundamentales \mathbf{a}_1 , \mathbf{a}_2 y \mathbf{a}_3 , de modo que la estructura del cristal es periódica para desplazamientos que son combinaciones lineales de múltiplos enteros de esos tres vectores (fig. 23-49). (a) Demostrar que el vector de posición relativa de dos puntos que ocupan posiciones similares en dos celdas diferentes está dado por $\mathbf{r} = \gamma_1 \mathbf{a}_1 + \gamma_2 \mathbf{a}_2 + \gamma_3 \mathbf{a}_3$, donde γ_1 , γ_2 y γ_3

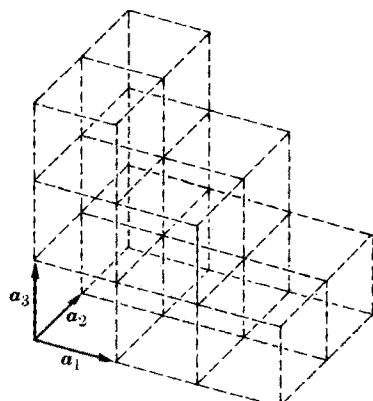


Figura 23-49

son enteros negativos o positivos. (b) Demostrar que los átomos que participan en el espectro de difracción de orden n de rayos X están dados por los enteros que satisfacen la ecuación $\mathbf{v} \cdot (\gamma_1 \mathbf{a}_1 + \gamma_2 \mathbf{a}_2 + \gamma_3 \mathbf{a}_3) = n\lambda$, donde \mathbf{v} está definido en la ec. (23.24). (c) Demostrar que la intensidad de la radiación difundida en la dirección asociada con \mathbf{v} es proporcional a $(A_1 A_2 A_3)^2$, donde $A_i = \sin(N_i \pi \mathbf{v} \cdot \mathbf{a}_i / \lambda) / \sin \pi \mathbf{v} \cdot \mathbf{a}_i / \lambda$ y N_i es el número de celdas del cristal en la

dirección \mathbf{a}_i . (d) A partir del resultado obtenido en (c), demostrar que los máximos principales aparecen en una dirección que satisface las relaciones $\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}_1 = -n_1\lambda$, $\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}_2 = n_2\lambda$, $\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}_3 = n_3\lambda$, donde n_1 , n_2 y n_3 son enteros. Estas se denominan *ecuaciones de Laue*. (e) Empleando los vectores recíprocos \mathbf{a}^1 , \mathbf{a}^2 ,

\mathbf{a}^3 (ver problema 3.29), demostrar que

$$\mathbf{u}_s = \mathbf{u}_i + (n_1\mathbf{a}^1 + n_2\mathbf{a}^2 + n_3\mathbf{a}^3)\lambda.$$

Esta ecuación determina la posición de los puntos brillantes en un diagrama de Laue como el que se muestra en la figura 23-40.

FENOMENOS DE TRANSPORTE

24.1 Introducción

24.2 Difusión molecular; ley de Fick

24.3 Conducción térmica; ley de Fourier

24.4 Transporte con producción y absorción

24.5 Viscosidad

24.6 Camino libre medio, frecuencia de colisión
y sección eficaz de colisión

24.7 Teoría molecular de los fenómenos de transporte

24.8 Conclusión

24.1 Introducción

En los capítulos 18 a 23 estudiamos una cantidad de fenómenos importantes que entran en la categoría general de *movimiento ondulatorio*. Aunque estas ondas corresponden a una amplia gama de fenómenos físicos, desde las ondas elásticas en un medio material hasta las ondas electromagnéticas en el vacío, tienen todas una característica común: los campos asociados con ellas satisfacen la ecuación de onda (18.11),

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \quad (24.1)$$

y esto permite una descripción común de muchas de sus propiedades, independientemente de su naturaleza física específica. Una de estas propiedades es la propagación de la perturbación física *sin distorsión*, puesto que en todos los casos la forma de la onda permanece igual y se puede expresar, especialmente para una onda en un medio no dispersivo, por $f(x \pm vt)$.

Una ecuación tal como la (24.1) describe la distribución de un campo ξ en el espacio y su evolución en el tiempo. Pero hay otros campos que se describen por medio de ecuaciones diferentes y que dependen del espacio y del tiempo de manera diferente. La propagación de estos campos puede estar acompañada de distorsión o de atenuación y no se pueden expresar mediante una función de la forma $f(r \pm vt)$. No obstante, en algunos casos se puede aún hablar de una velocidad de propagación. Consideraremos aquí sólo un tipo especial de estos otros campos, el cual corresponde a un grupo de problemas físicos importantes que tienen ciertos rasgos comunes y que caen en la designación general de *fenómenos de transporte*. Los fenómenos de transporte son aquellos procesos en los cuales hay una transferencia neta (o transporte) de materia, de energía o de momentum en cantidades grandes o macroscópicas. Los rasgos físicos comunes de estos fenómenos se pueden describir con técnicas similares, estando caracterizados por una ecuación de "propagación" de primer orden en el tiempo que, en los casos más simples, es de la forma

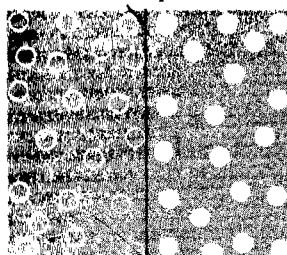
$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}, \quad (24.2)$$

donde a es una constante característica de cada situación y ξ es el campo correspondiente al fenómeno de transporte de que se trata. Debemos señalar que muchos fenómenos de transporte obedecen ecuaciones más complicadas que la ec. (24.2), la cual se debe considerar sólo como una primera (aunque satisfactoria) aproximación. En este capítulo trataremos brevemente tres tipos de problemas de transporte: (a) difusión molecular y neutrónica, (b) conducción térmica y (c) viscosidad.

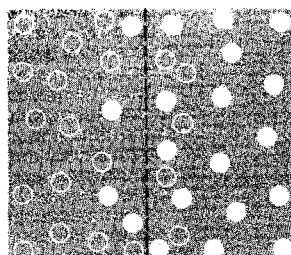
24.2 Difusión molecular; ley de Fick

Sabemos que cuando abrimos un frasco de perfume o de cualquier otro líquido que tenga un olor bien definido, como el amoniaco, podemos sentirlo rápidamente en toda una pieza cerrada. Decimos que las moléculas del líquido, después de

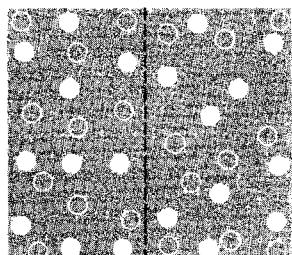
Gas 1 Tabique Gas 2



(a)



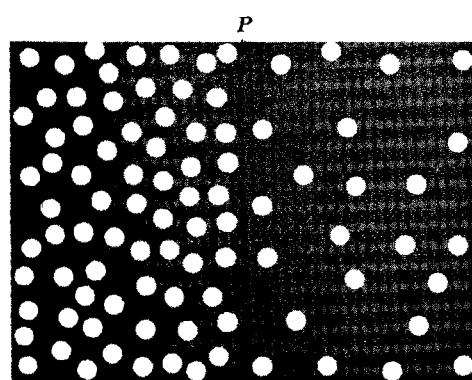
(b)



(c)

Fig. 24-1. Difusión gaseosa. (a) Los dos gases están separados por medio de un tabique. (b) Poco después de retirar el tabique algunas moléculas de cada gas se encuentran del lado del otro. (c) Despues de un cierto tiempo la mezcla de los dos gases es homogénea y no hay más difusión.

evaporadas, se difunden por el aire, distribuyéndose en todo el espacio circundante. Lo mismo ocurre si colocamos un terrón de azúcar en un vaso de agua. El azúcar se disuelve gradualmente pero al mismo tiempo las moléculas de azúcar disueltas se difunden en el agua, quedando eventualmente distribuidas en toda ella. Como ejemplo final tomemos el de dos gases contenidos en un recipiente y separados por un tabique, como se muestra en la fig. 24-1; si retiramos el tabique encontraremos que los dos gases se difunden uno en el otro y después de cierto tiempo nos encontramos con una mezcla homogénea.



Concentración mayor Concentración menor

Fig. 24.2. La corriente de difusión es diferente en los dos sentidos.

Estos y muchos otros ejemplos familiares al estudiante ilustran una característica fundamental del proceso de difusión:

Para que tenga lugar la difusión, la distribución espacial de las moléculas no debe ser homogénea.

Llámemos n al número de moléculas por unidad de volumen de la sustancia que se difunde; el mismo se denomina *concentración* de la sustancia. De acuerdo con el enunciado anterior, este número debe variar de un lugar a otro para que haya difusión. Una segunda característica es que

la difusión tiene lugar en la dirección en que la concentración disminuye,

tendiendo por lo tanto a igualar en todo el espacio la distribución molecular de la sustancia que se difunde. Hay entonces una tendencia bien definida para que

haya difusión. Sin embargo, se debe considerar esta tendencia de un modo estadístico o macroscópico, porque puede haber fluctuaciones locales que durante cortos intervalos de tiempo produzcan una inversión del flujo molecular en ciertos lugares.

La difusión es en general el resultado de que la agitación molecular produce choques frecuentes entre las moléculas que, en consecuencia, se dispersan. Supongamos que tenemos un gas que ocupa una región separada en dos secciones por un tabique (fig. 24-2), de modo que a ambos lados su densidad es diferente aunque la temperatura, y por lo tanto las velocidades moleculares, son las mismas. Si retiramos el tabique, tenemos dos corrientes de moléculas en la superficie de separación, indicadas por las flechas horizontales, que resultan de las colisiones y las dispersiones que ocurren a ambos lados. Pero la corriente de izquierda a derecha es mayor porque la frecuencia de colisión es mayor a la izquierda, donde la concentración es mayor. En consecuencia hay una corriente neta hacia la derecha, dando lugar a una difusión de izquierda a derecha, o sea de la región de concentración mayor a la de concentración menor.

En lo que sigue consideraremos sólo la difusión de una sustancia en sí misma o en otro medio (un gas, un líquido o un sólido) que es homogéneo y cuyas moléculas están esencialmente fijas. No trataremos el caso de dos sustancias que se difunden una en otra, ya que ello requiere un tratamiento algo diferente. Ignoraremos también el efecto de las fuerzas intermoleculares.

Supongamos que la concentración de la sustancia varía en cierta dirección, que tomaremos como eje X (fig. 24-3), pero que es la misma en todos los planos perpendiculares a esa dirección. Luego, el número de átomos o de moléculas por unidad de volumen (o sea la concentración) es función de la coordenada x solamente, es decir $n = n(x)$. Se expresa en m^{-3} . La difusión ocurre entonces en la dirección del eje X . Llamemos j a la *densidad de corriente de partículas*, es decir al número efectivo de partículas que atraviesan en la unidad de tiempo un área unitaria perpendicular a la dirección de difusión. Esta densidad de corriente de

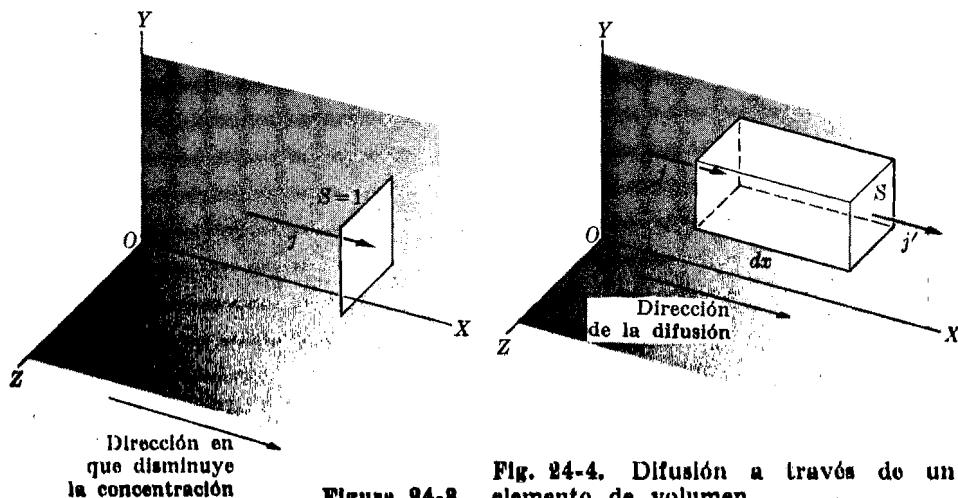


Figura 24-8

Fig. 24-4. Difusión a través de un elemento de volumen.

partículas se expresa en $\text{m}^{-2} \text{s}^{-1}$. Cuando la sustancia es homogénea (esto es, cuando n es constante), la densidad j de corriente es cero porque el número de partículas que pasa en un sentido es igual al que pasa en el opuesto, no habiendo transporte neto de masa. Pero cuando la sustancia no es homogénea, variando n de un punto a otro, resulta una corriente, o transporte de masa, neto. La intuición física, confirmada por los experimentos, sugiere que la densidad de corriente es tanto mayor cuanto mayor es la variación de la concentración $n(x)$ en la unidad de longitud, o gradiente de concentración (esto es, cuanto mayor es $\partial n / \partial x$). Los experimentos muestran también que hay una relación de proporcionalidad entre la densidad de corriente j y la variación $\partial n / \partial x$ de concentración por unidad de longitud, es decir,

$$j = -D \frac{\partial n}{\partial x}, \quad (24.3)$$

donde la constante D de proporcionalidad depende de la sustancia y se denomina *coeficiente de difusión*. El signo menos indica que el flujo neto es en el sentido en que n disminuye.

La mayoría de los procesos de difusión satisfacen bastante bien la relación (24.3), excepto cuando la concentración n es extremadamente baja, cuando es muy alta o cuando varía rápidamente en una distancia corta, casos en los cuales ya no se aplica el razonamiento estadístico. La ec. (24.3), que se denomina *ley de Fick*, fue propuesta en 1855 por el fisiólogo alemán Adolf Fick (1829-1901). El *coeficiente de difusión* D está relacionado con el estado de las moléculas de la sustancia que se difunde (como se mostrará en el caso de los gases en la sección 24.7) y se expresa en $\text{m}^2 \text{s}^{-1}$ para que en la ec. (24.3) haya compatibilidad de unidades. Supondremos que D es independiente de la concentración; esta condición es válida dentro de una amplia gama de condiciones. La ley de Fick establece una relación entre la densidad de corriente y la variación por unidad de longitud (o gradiente) de la concentración de la sustancia.

Combinando la ley de Fick con el principio de conservación de las moléculas (el número de moléculas debe permanecer constante), obtenemos una relación en la cual sólo aparece la concentración. Para este fin consideremos un elemento de volumen paralelo a la dirección de difusión, como se muestra en la fig. 24-4, de longitud dx y base de área S . Su volumen es

$$dV = \text{área de la base} \times \text{longitud} = S dx.$$

El número de partículas que hay dentro del volumen en un instante dado es $n dV = nS dx$. El flujo entrante (el número de partículas que entran por la base izquierda en la unidad de tiempo) es jS y el flujo que sale por la base de la derecha es $j'S$. La ley de conservación del número de moléculas exige que la acumulación por unidad de tiempo sea igual a la diferencia entre el flujo entrante y el saliente, es decir,

$$\text{acumulación por unidad de tiempo} = \text{flujo entrante} - \text{flujo saliente}.$$

Tenemos entonces:

$$\text{acumulación por unidad de tiempo} = jS - j'S$$

$$= -(j' - j)S = -(dj)S = -\frac{\partial j}{\partial x} S dx,$$

donde $dj = j' - j$ es la diferencia entre las densidades de corriente a un lado y al otro. Pero la rapidez de acumulación es igual al aumento por unidad de tiempo del número de partículas por unidad de volumen ($\partial n / \partial t$), multiplicado por el volumen ($S dx$), es decir,

$$\text{acumulación por unidad de tiempo} = \frac{\partial n}{\partial t} S dx.$$

Igualando las dos expresiones de la acumulación y cancelando el factor común $S dx$, obtenemos

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\frac{\partial j}{\partial x}.$$

Usando la ley de Fick, $j = -D(\partial n / \partial x)$, para eliminar j , tenemos

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2}. \quad (24.4)$$

Esta es la ecuación de difusión, que es del tipo indicado en la ec. (24.2). Llamada algunas veces segunda ley de Fick, expresa la conservación del número de partículas. Esta ecuación contiene la segunda derivada con respecto a las coordenadas espaciales como la ecuación de onda, pero sólo la primera derivada respecto al tiempo. Esto refleja una diferencia importante, tanto en los aspectos físicos como en los matemáticos, entre los procesos de difusión y la propagación de ondas, que se rige por la ec. (18.11).

Consideremos una situación especial: la de un *estado estacionario*, o sea un estado en el que la concentración permanece constante en el tiempo. Entonces $\partial n / \partial t = 0$ por lo que, eliminando el factor constante D , la ec. (24.4) se convierte en

$$\partial^2 n / \partial x^2 = 0. \quad (24.5)$$

Integrando, tenemos

$$\partial n / \partial x = \text{const.} \quad (24.6)$$

Pero cuando $\partial n / \partial x = \text{const}$, la ec. (24.3) da $j = \text{const}$. Por lo tanto, en condiciones estacionarias, la densidad de corriente es la misma en cualquier sección transversal, lo cual es físicamente evidente. Una densidad constante de corriente significa que en cualquier elemento de volumen, tal como el que se muestra en la fig. 24-4, el número de partículas disfundidas que entran en la unidad de tiempo por un extremo, es el mismo que el de las que salen en la unidad de tiempo por

el otro extremo. Esto significa que no hay acumulación de partículas o cambio de concentración en ningún punto del medio, lo cual está de acuerdo con el concepto de condiciones estacionarias. De la ec. (24.3) obtenemos

$$\partial n / \partial x = -j/D.$$

Integrando esta ecuación, tenemos

$$\int_{n_0}^n dn = \int_0^x -\frac{j}{D} dx,$$

donde n_0 es la concentración de partículas en $x = 0$. Luego, como j/D es constante en este caso, obtenemos

$$n = -\frac{j}{D} x + n_0, \quad (24.7)$$

resultado que indica que la concentración de partículas disminuye linealmente con la distancia en la dirección de difusión, como se muestra en la fig. 24-5. También se puede escribir la ec. (24.7) en la forma

$$j = D \frac{n_0 - n}{x}.$$

Esta expresión es equivalente a la ley de Fick, dada por la ec. (24.3), pero es válida sólo cuando la corriente es constante; en otro caso, da la corriente media entre dos puntos a una distancia x uno de otro.

Obsérvese que en condiciones estacionarias, es necesario introducir partículas a razón constante por un lado y sacarlas en la misma proporción por el otro lado. Esto significa que, cuando se mantiene constante la concentración en ambos extremos del tubo de longitud L mostrado en la parte inferior de la fig. 24-5, se debe

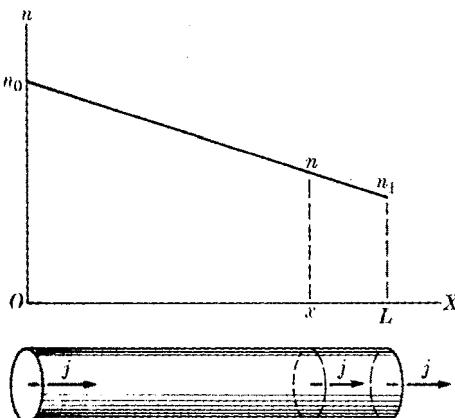


Fig. 24-5. Variación de la concentración debida a la difusión estacionaria a lo largo de una barra.

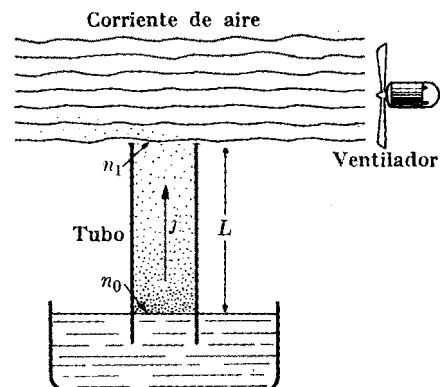


Fig. 24-6. Difusión de vapor de agua a lo largo de una columna.

variar por $x = L$ en la unidad de tiempo el mismo número de partículas que entran por $x = 0$ en la unidad de tiempo. Si n_1 es la concentración en $x = L$, la ecuación anterior da

$$j = D \frac{n_0 - n_1}{L}. \quad (24.8)$$

Por ejemplo, supongamos que tenemos un tubo vertical abierto en ambos extremos. Un extremo del tubo está en un líquido que se evapora, de modo que las moléculas del mismo se difunden por el aire dentro del tubo (fig. 24-6). En el otro extremo, una corriente de aire extrae las moléculas que llegan al mismo resultando un estado estacionario: el número de moléculas que entran por evaporación por la parte inferior es igual al número de moléculas que salen por la parte superior debido a la corriente de aire. De hecho, éste es un método para medir el coeficiente de difusión D . Podemos hallar la cantidad j midiendo la cantidad de líquido que se evapora en un intervalo dado de tiempo. Podemos determinar experimentalmente la concentración n_0 en el fondo y la n_1 arriba. Luego aplicamos la ec. (24.8) para calcular D .

La situación que acabamos de considerar presupone que ya se ha alcanzado un estado estacionario. Determinar cómo se alcanza este estado estacionario es otro problema importante. Consideraremos nuevamente el tubo mostrado en la fig. 24-5. Supongamos que inicialmente no hay en el tubo moléculas del gas que se difunde. A un tiempo dado, $t = 0$, se conecta un extremo a una fuente de gas de concentración constante n_0 . Las moléculas se sacan por el otro extremo en una proporción dada. Si medimos la concentración de moléculas a lo largo

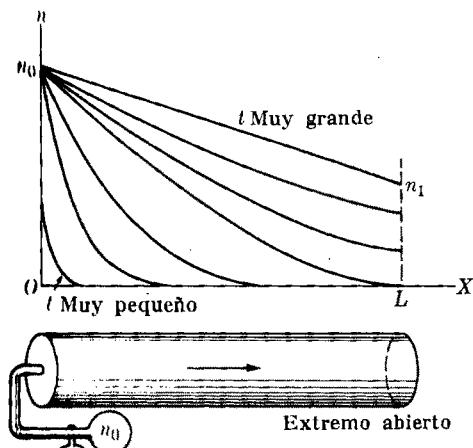


Fig. 24-7. Cambio de concentración en el tiempo por difusión a lo largo de una tubería con un extremo abierto. En cada punto, la concentración varía hasta que se alcanza un estado estacionario (la línea recta).

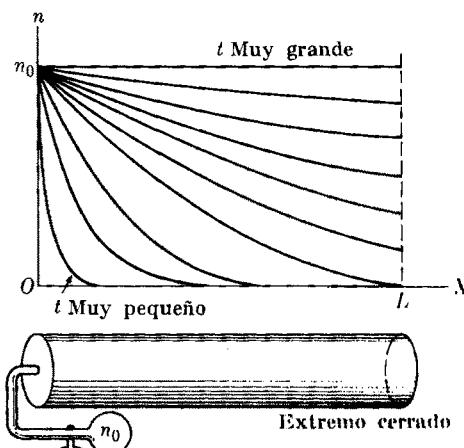


Fig. 24-8. Cambio de concentración en el tiempo por difusión a lo largo de una tubería con un extremo cerrado. Se alcanza el estado estacionario cuando la concentración es uniforme.

del tubo en tiempos diferentes después de hacer la conexión, obtenemos las diversas curvas que se muestran en la fig. 24-7. Sólo después de un largo tiempo se alcanza el estado estacionario, cuando la proporción de moléculas que se sacan por $x = L$ es igual a la de moléculas que se suministran por $x = 0$, y la concentración a lo largo del tubo está dada por la ec. (24.7). Si se cierra el otro extremo del tubo, el cambio de concentración será como se muestra en la fig. 24-8, correspondiendo el estado estacionario a una concentración uniforme. Todos estos resultados se pueden obtener resolviendo la ecuación dependiente del tiempo (24.4). La discusión matemática es más difícil que la del caso estacionario y será omitida.

EJEMPLO 24.1. Cuando el vapor de agua se difunde en el aire, el coeficiente de difusión es $2,19 \times 10^{-5} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ a presión normal y temperatura de $20,0^\circ \text{ C}$. En un experimento tal como el de la fig. 24-6, el tubo tiene $1,00 \text{ m}$ de longitud y $20,0 \text{ cm}^2$ de sección. Hallar la cantidad de agua que se evapora por segundo a través del tubo.

Solución: Debemos determinar primero la densidad de corriente dada por la ec. (24.8). Suponiendo que el proceso es suficientemente lento como para que la región en la parte inferior del tubo se pueda considerar saturada en todo instante, encontramos que la densidad del vapor de agua a 20° C es $1,73 \times 10^{-2} \text{ kg m}^{-3}$; si m es la masa de una molécula, el número de moléculas por unidad de volumen en la base del tubo es $n_0 = (1,73 \times 10^{-2}/m) \text{ m}^{-3}$. Podemos suponer también que la concentración en la parte superior es tan pequeña que podemos poner $n_1 = 0$. Luego, $j = Dn_0/L$ por lo que

$$j = \frac{(2,19 \times 10^{-5})(1,73 \times 10^{-2}/m)}{1,0} = \frac{3,78 \times 10^{-7}}{m} \text{ m}^{-2} \text{ s}^{-1}.$$

La masa evaporada por segundo a través del tubo es

$$M = jSm = (3,78 \times 10^{-7})(2 \times 10^{-3}) = 7,56 \times 10^{-10} \text{ kg s}^{-1}.$$

En una hora, la masa evaporada es aproximadamente $2,73 \times 10^{-6} \text{ kg}$, o sea $2,73 \text{ mg}$. Como la masa de una molécula de agua es $2,98 \times 10^{-26} \text{ kg}$, el número de moléculas evaporadas por segundo es $2,54 \times 10^{16}$, o sea $1,27 \times 10^{15}$ moléculas por cm^2 por segundo.

24.3 Conducción térmica ; ley de Fourier

La conducción térmica es otro fenómeno de transporte en el que la energía debida a la agitación molecular se transfiere de un lugar a otro con un cambio correspondiente de la temperatura. La conducción térmica ocurre cuando la temperatura varía de un punto a otro en una sustancia, es decir, cuando la energía media de las moléculas es diferente en puntos diferentes de la sustancia. Esta diferencia de temperatura da lugar a un flujo neto de energía, por lo que podemos definir la conducción térmica como una transferencia de energía por diferencia de temperatura.

La conducción térmica tiene lugar en el sentido en que disminuye la temperatura,

por lo que la conducción térmica tiende a igualar la temperatura en toda la sustancia. El mecanismo de la conducción térmica es diferente en los sólidos, los

Líquidos y los gases, debido a la diferencia de movilidad molecular en los tres estados. En los gases, y hasta cierto punto en los líquidos, podemos decir que la conducción térmica es el resultado de las colisiones entre moléculas rápidas y lentas, que dan lugar a una transferencia de energía cinética de las moléculas más rápidas a las más lentas. En los sólidos, el mecanismo de la conducción térmica es más complejo.

Consideremos una cámara llena de un gas que tiene un gradiente de temperatura en su volumen. En los lugares en que la temperatura es más alta, las moléculas tienen, en promedio, velocidades mayores que en los lugares en que la temperatura es menor. Por ejemplo, supongamos en la fig. 24-9 que el gas de la izquierda está más caliente que el de la derecha. Debido a las colisiones moleculares en la separación de ambos y a la difusión de las moléculas "calientes" de izquierda a derecha y de las "frías" de derecha a izquierda, hay una transferencia neta de energía de izquierda a derecha, que llamamos calor. (Recordamos al estudiante la discusión del concepto de calor hecha en la sección 9.10.)

En los sólidos no hay tal transferencia de energía por medio del movimiento de moléculas, ya que el único movimiento en un sólido es la vibración de las mismas alrededor de sus posiciones de equilibrio; por ello el proceso es más bien el transporte de esta energía vibracional a lo largo de la red cristalina del sólido. En los metales hay un efecto adicional ya que los electrones de conducción (que están en equilibrio térmico con los iones positivos del metal) son libres de moverse por todo el volumen del metal. Los electrones de conducción se comportan de una manera similar a la de las moléculas de un gas y tienden a difundirse a través del metal de la región caliente a la fría, transfiriendo energía por colisión con otros electrones y con los iones de la red en la región más fría.

En los gases y líquidos puede haber también una transferencia macroscópica de materia debido a las diferencias de densidad creadas por las diferencias de temperatura. Este proceso, llamado *convexión*, no es del mismo tipo que los tratados aquí porque no se debe esencialmente a la agitación molecular sino a una condición macroscópica de inestabilidad.

Llamemos j_E a la *densidad de corriente de energía* debida a la diferencia de temperatura, es decir la energía que atraviesa en la unidad de tiempo un área unitaria perpendicular a la dirección en que tiene lugar el flujo de energía. Supondremos que esta dirección es el eje X. Según nuestra discusión anterior, este flujo de energía tiene lugar en un sentido bien definido que es aquél en que la temperatura disminuye. Llamemos T a la temperatura. El cambio de temperatura por unidad de longitud (o gradiente de temperatura) del material es entonces $\partial T / \partial x$. Se ha encontrado experimentalmente, que, a menos que la temperatura

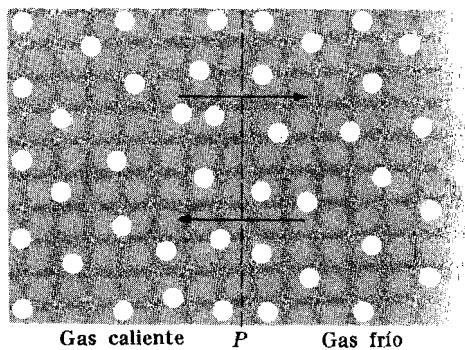


Figura 24-9

varíe muy rápidamente en una distancia corta, j_E es proporcional a $\partial T/\partial x$, es decir,

$$j_E = -K \frac{\partial T}{\partial x}, \quad (24.9)$$

donde K es un coeficiente característico de cada material que se denomina *conductividad térmica*. El signo negativo indica que la energía fluye en el sentido en que la temperatura disminuye. Esta ley, conocida como *ley de Fourier*, fue propuesta alrededor de 1815 por el científico francés Joseph Fourier (1768-1830). Obsérvese que j se expresa en $J \text{ m}^{-2} \text{ s}^{-1}$ y que $\partial T/\partial x$ se expresa en $^{\circ}\text{C m}^{-1}$, por lo que K se expresa en $\text{J m}^{-1} \text{ s}^{-1} ^{\circ}\text{C}^{-1}$ o en $\text{m kg s}^{-3} ^{\circ}\text{C}^{-1}$. A veces, K se expresa en $\text{cal m}^{-1} \text{ s}^{-1} ^{\circ}\text{C}^{-1}$. La ley de Fourier para la conductividad térmica es muy similar

a la ley de Fick para la difusión. De hecho, hay una relación entre la conductividad térmica K y el coeficiente de difusión D de la cual hablaremos en la sección 24.7. Aunque el mecanismo de la conducción térmica es diferente en gases, líquidos y sólidos, la ley de Fourier se aplica a estos tres estados de la materia.

Nuestro próximo paso es obtener una relación en la que sólo aparezca la temperatura. Podemos hacer esto aplicando el principio de la conservación de la energía. Consideraremos un elemento de volumen paralelo a la dirección del flujo de energía, como se muestra en la fig. 24-10, de longitud dx y sección S . Su volumen es $dV = S dx$. Si ρ es la den-

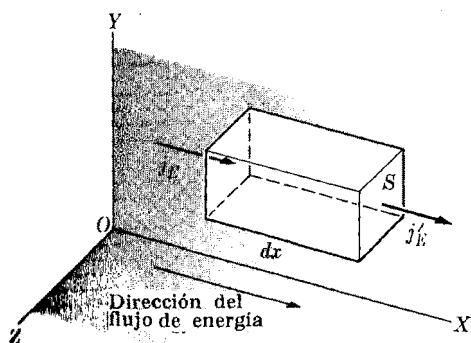


Fig. 24-10. Conducción térmica a través de un elemento de volumen.

sidad del material, la masa contenida en el elemento de volumen dV es $dm = \rho dV = \rho S dx$. La energía que entra al elemento de volumen en la unidad de tiempo por el lado izquierdo (llamada *flujo entrante de energía*) es $j_E S$ y la energía que sale del volumen por el lado derecho también en la unidad de tiempo (llamada *flujo saliente de energía*) es $j'_E S$. Luego, la ganancia de energía por unidad de tiempo dentro del volumen es

ganancia de energía por unidad de tiempo =

$$\begin{aligned} &= \text{flujo entrante} - \text{flujo saliente} \\ &= j_E S - j'_E S = -(j'_E - j_E)S \\ &= -d(j_E S) = -\frac{\partial j_E}{\partial x} S dx, \end{aligned}$$

donde $d(j_E) = j'_E - j_E$ es la diferencia entre las densidades de corriente de energía en los extremos del elemento de volumen. Pero si no tiene lugar otro proceso,

una ganancia de energía significa un aumento en la energía de las moléculas contenidas en el volumen y esto significa una elevación de la temperatura.

Se define el *calor específico* c de una sustancia como la energía absorbida por la sustancia por unidad de masa para aumentar su temperatura en un grado. Se expresa en $\text{J kg}^{-1} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$ (o en $\text{cal kg}^{-1} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$). En consecuencia, si se aumenta en dT la temperatura de la sustancia, la energía absorbida por unidad de masa es $c dT$. Si el aumento de temperatura ocurre en el intervalo dt , la energía absorbida por unidad de masa y por unidad de tiempo es $c(\partial T/\partial t)$. Como la masa de nuestro elemento de volumen es $\rho S dx$, podemos escribir para la energía que gana por unidad de tiempo

$$\begin{aligned} \text{aumento de energía por unidad de tiempo} &= (\rho S dx) \left(c \frac{\partial T}{\partial t} \right) = \\ &= \rho c S \frac{\partial T}{\partial t} dx. \end{aligned}$$

Igualando ambas expresiones del aumento de energía por unidad de tiempo y cancelando el factor común $S dx$, obtenemos

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = - \frac{\partial j_E}{\partial x}.$$

Usando la ley de Fourier, ec. (24.9) (y si suponemos que la conductividad térmica K es constante), la ecuación se convierte en

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{K}{\rho c} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (24.10)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2},$$

donde

$$a^2 = K/\rho c. \quad (24.11)$$

La ec. (24.10) para la conducción térmica es por lo tanto del mismo tipo que la ec. (24.4) para la difusión molecular, pero expresa la conservación de la energía en vez de la conservación del número de partículas. Sus soluciones son matemáticamente idénticas a las de la ec. (24.4), pero se refieren a la distribución de temperatura en lugar de una distribución de concentración. Para el estado estacionario, $\partial T/\partial t = 0$, por lo que

$$\frac{\partial j_E}{\partial x} = 0 \quad \text{o} \quad j_E = \text{const.}$$

En otras palabras: la densidad de corriente de energía a través de cualquier sección de la sustancia es constante. Por ejemplo, supongamos que tenemos una varilla rodeada de un material aislante que impide la pérdida de energía por las

superficies laterales (fig. 24-11). El estado estacionario requiere que para una cantidad dada de energía suministrada por unidad de tiempo por el extremo izquierdo que está a temperatura mayor, se debe sacar por unidad de tiempo la misma cantidad de energía por el extremo derecho que está a temperatura menor.

Si $j_E = \text{const}$, obtenemos, integrando la ec. (24.9),

$$T = -\frac{j_E}{K}x + T_0, \quad (24.12)$$

donde T_0 es la temperatura en $x = 0$. En la parte superior de la fig. 24-11 se mues-

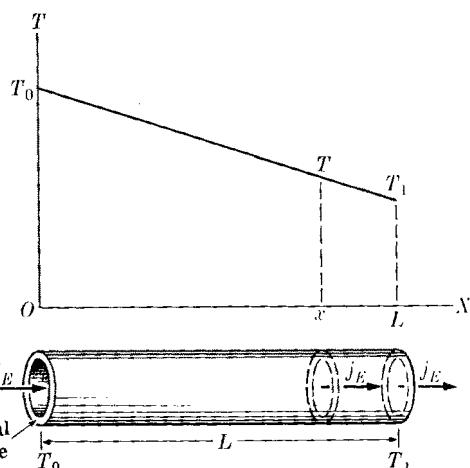


Fig. 24-11. Distribución estacionaria de temperatura a lo largo de una varilla aislada térmicamente estando sus extremos a temperatura constante.

tra el gráfico de T en función de x conforme a la ec. (24.12). La ec. (24.12) se puede escribir en la forma equivalente

$$j_E = K \frac{T_0 - T}{x}. \quad (24.13)$$

Obsérvese que si $T = T_1$ para $x = L$, obtenemos de la ec. (24.13)

$$j_E = K \frac{T_0 - T_1}{L}, \quad (24.14)$$

que da la densidad de corriente de energía a lo largo de la varilla aislada en función de la temperatura de ambos extremos.

EJEMPLO 24.2. Dos paredes de espesor L_1 y L_2 y conductividad térmica K_1 y K_2 están en contacto (fig. 24-12). Las temperaturas de las superficies externas son T_1 y T_2 . Calcular la temperatura de la pared común. Suponer condiciones estacionarias.

Solución: Como el flujo de energía es el mismo para ambas paredes, tenemos que, según la ec. (24.13), $j_E = K_1(T_1 - T)/L_1$ y $j_E = K_2(T - T_2)/L_2$ de modo que $K_1(T_1 - T)/L_1 = K_2(T - T_2)/L_2$.

o sea

$$T = \frac{K_1 T_1 L_2 + K_2 T_2 L_1}{K_1 L_2 + K_2 L_1}, \quad (24.15)$$

que es la temperatura de la pared común.

EJEMPLO 24.3. Un tubo tiene un radio interno r_1 a temperatura T_1 y radio externo r_2 a temperatura T_2 . Obtener la distribución de temperatura en cualquier sección y el flujo de calor a través de ella por unidad de longitud (fig. 24-13). Suponer que $T_1 > T_2$.

Solución: La ley de Fourier, ec. (24.9), nos permite escribir el flujo de energía en cualquier dirección. En nuestro problema, como el tubo tiene simetría cilíndrica,

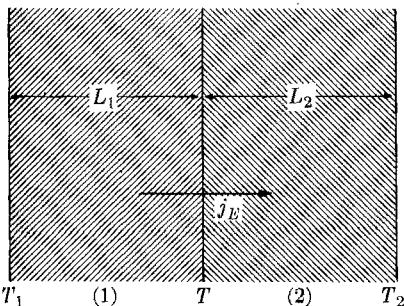


Fig. 24-12. Flujo de calor a través de dos porciones de materiales diferentes en contacto.

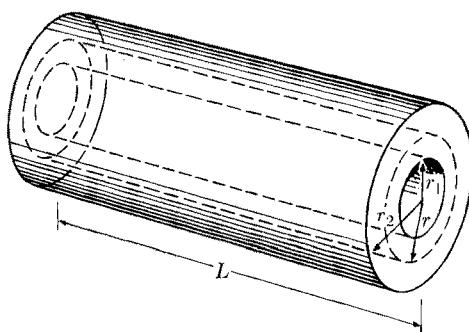


Fig. 24-13. Flujo radial de calor en una tubería gruesa.

el flujo de energía es radial, por lo que la ec. (24.9) es

$$j_E = -K(\partial T / \partial r).$$

La energía que pasa a través de cualquier capa del tubo de radio r y área $(2\pi r)L$ es entonces

$$\Phi_E = \text{flujo radial de energía} = j_E \times \text{área} = -2\pi L K r (\partial T / \partial r).$$

En condiciones estacionarias, este flujo de energía debe ser el mismo en cualquier capa, es decir que debe ser independiente de r . En consecuencia $\Phi_E = \text{const}$, por lo que $r \partial T / \partial r = C$, donde C es una constante, o sea $dT = C dr/r$. Integrando, resulta

$$\int_{r_1}^r dT = C \int_{r_1}^r \frac{dr}{r} \quad \delta \quad T - T_1 = C \ln \frac{r}{r_1}.$$

Para $r = r_2$ tenemos $T = T_2$, de modo que

$$T_2 - T_1 = C \ln \frac{r_2}{r_1} \quad \delta \quad C = \frac{T_2 - T_1}{\ln(r_2/r_1)},$$

que da, para la temperatura a la distancia r ,

$$T = T_1 + (T_2 - T_1) \frac{\ln r/r_1}{\ln r_2/r_1}, \quad (24.16)$$

y para el flujo de energía

$$\Phi_E = \frac{2\pi LK(T_1 - T_2)}{\ln r_2/r_1}.$$

EJEMPLO 24.4. La temperatura de la superficie de un cierto cuerpo está variando en la forma periódica dada por

$$T = T_0 \operatorname{sen} \omega t, \quad (24.17)$$

donde T_0 es la amplitud de las fluctuaciones de temperatura en la superficie. Determinar la distribución de temperatura dentro del cuerpo. (Este problema se puede aplicar, por ejemplo, al análisis de las variaciones de temperatura bajo la superficie terrestre. La superficie de la tierra está sujeta a fluctuaciones de temperatura más o menos regulares en el período de un día, con una fluctuación anual superpuesta a este ciclo.)

Solución: La condición en la superficie del cuerpo es similar a la de un extremo de una cuerda que es forzado a oscilar, resultando una onda que se propaga por la cuerda. En consecuencia podemos suponer para empezar que nuestro problema también tiene una solución de la forma

$$T = T_0 \operatorname{sen}(\omega t - kx). \quad (24.18)$$

Si esta solución fuera la correcta, la ecuación anterior representaría una "onda térmica". Se reduciría a la ec. (24.17) para $x = 0$, satisfaciendo por lo tanto nuestra condición de contorno. Sin embargo, la ec. (24.18) no puede ser una solución de nuestra ecuación de propagación (24.10) porque $\partial T / \partial t = \omega T_0 \cos(\omega t - kx)$ y $\partial^2 T / \partial x^2 = -k^2 T_0 \operatorname{sen}(\omega t - kx)$, por lo que cualquiera sea el valor que demos a k , no podemos satisfacer la ec. (24.10) porque en un miembro tenemos $\cos(\omega t - kx)$ y en el otro $\operatorname{sen}(\omega t - kx)$. Pero si recordamos nuestra discusión de la propagación de una onda electromagnética en un conductor (sección 20.12), donde también aparecía una derivada de primer orden en t y resultaba una onda atenuada, podemos esperar que nuestro problema actual también pueda ser descrito suponiendo una solución en forma de onda atenuada. El estudiante puede verificar por sustitución directa en la ec. (24.10) que

$$T = T_0 e^{-(\sqrt{\omega/2}/a)x} \operatorname{sen}\left(\omega t - \frac{\sqrt{\omega/2}}{a} x\right) \quad (24.19)$$

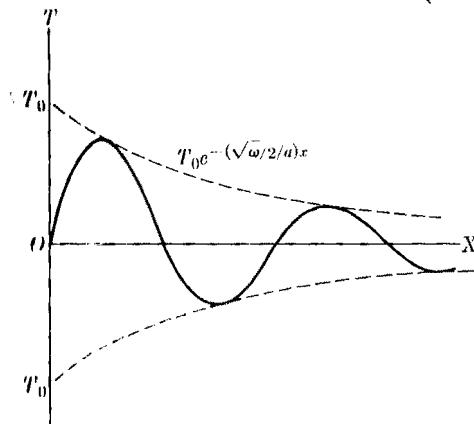
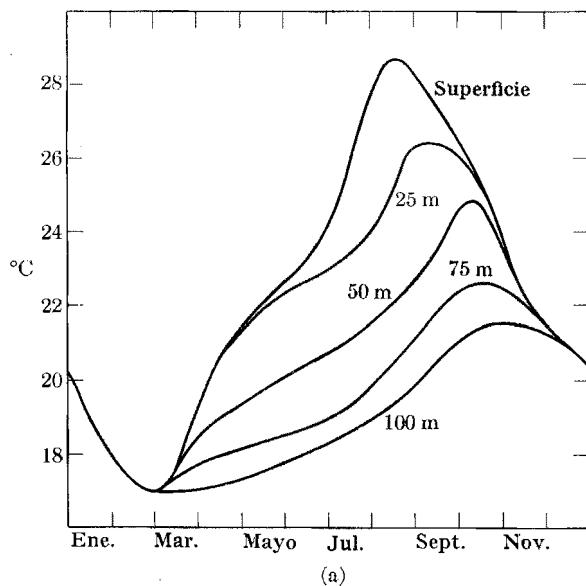


Fig. 24-14. Onda de temperatura.

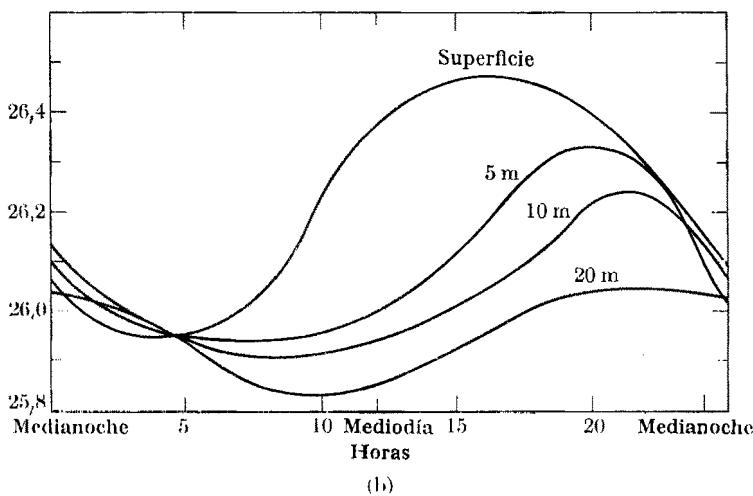
es una solución. Se reduce a la ec. (24.17) para $x = 0$ satisfaciendo entonces la condición de contorno del problema. En consecuencia la ec. (24.19) describe una "onda térmica atenuada" que se propaga en el medio, como se ilustra en la fig. 24-14. Teniendo en cuenta que en la ec. (24.19) $k = \sqrt{\omega/2}/a$, la velocidad de fase de la onda térmica es $v = \omega/k = a\sqrt{2\omega}$, que aumenta con la frecuencia. La atenuación también aumenta con la frecuencia.

Este problema sugiere que la temperatura a grandes profundidades debajo de la corteza terrestre o en los océanos permanece prácticamente constante todo el año, lo cual está apoyado por los experimentos. Las figs. 24.15(a) y (b) muestran

las variaciones anual y diurna de la temperatura en un punto del Atlántico medio a diferentes profundidades. Obsérvese que la amplitud de la onda térmica disminuye al aumentar la profundidad y que hay un retraso de fase debido a la velocidad finita de propagación de la onda térmica desde la superficie hacia adentro del agua.



(a)



(b)

Fig. 24-15. (a) Variación anual de temperatura a varias profundidades en el Océano Atlántico medio. (b) Variación diurna de temperatura a varias profundidades en el Océano Atlántico medio durante el verano.

24.4 Transporte con producción y absorción

Cuando en la sección 24.2 tratamos el proceso de difusión, llegamos a la ec. (24.4) que expresa la conservación del número de partículas. Esta conservación requiere que la diferencia entre los flujos entrante y saliente a través de la superficie de un elemento de volumen sea igual a la acumulación por unidad de tiempo en dicho elemento de volumen. Se da una situación más general cuando — además de la difusión pura, que proviene del movimiento molecular — son posibles otros procesos.

Supongamos, por ejemplo, que un gas, al mismo tiempo que se difunde en otro gas, sufre algún proceso, tal como una reacción química, por el cual algunas de sus moléculas desaparecen de la fase gaseosa. Entonces, cuando hagamos el balance del número total de moléculas contenidas en un volumen dado, debemos tener en cuenta el número de moléculas que desaparecen como resultado de ese proceso adicional. Puede ocurrir la situación inversa: puede haber *producción de moléculas* debido a algún proceso que tiene lugar en el elemento de volumen dado donde está ocurriendo la difusión. La expresión para el balance del número de partículas cuando hay producción y absorción debe ser ahora

$$\text{acumulación} = \text{ganancia por difusión} + \text{producción} - \text{absorción},$$

donde todos los términos son por unidad de volumen y por unidad de tiempo. La acumulación es $\partial n / \partial t$. La ganancia por difusión es $D(\partial^2 n / \partial x^2)$ conforme al razonamiento usado para obtener la ec. (24.4). Si llamamos P a la producción y A a la absorción, la ecuación de balance es

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + P - A. \quad (24.20)$$

Para resolver esta ecuación tenemos que conocer en cada caso la naturaleza de la producción P y de la absorción A . Como ilustración, aplicaremos esta ecuación al caso de neutrones en un reactor nuclear térmico.

Un reactor nuclear térmico es un aparato en el cual se producen neutrones por medio de la fisión (o división) de átomos de uranio, que constituyen lo que se denomina combustible. Los átomos de uranio están distribuidos en todo el volumen del reactor.

Cuando un átomo de uranio se fisiona o se parte en dos fragmentos como resultado de la captura de un neutrón, se producen nuevos neutrones que son muy rápidos. En un reactor nuclear térmico, se agrega una sustancia llamada moderador. En la mayoría de los reactores el moderador es grafito o agua. Cuando los neutrones rápidos producidos por la fisión del uranio chocan con los átomos del moderador, pierden energía (ver el ejemplo 9.13) y eventualmente llegan a un equilibrio energético con los átomos del moderador. Los neutrones se denominan entonces *neutrones lentos o térmicos*. Estos neutrones se usan para producir nuevas fisiones de átomos de uranio. Los neutrones térmicos se difunden por el reactor hasta que son absorbidos (capturados) por los átomos de los diversos materiales que forman el reactor, o escapan a través de las paredes del mismo. En conse-

cuencia, un reactor nuclear térmico funciona por el proceso de difusión de neutrones, combinado con la producción y absorción de los mismos.

En un reactor homogéneo, el combustible de uranio y el moderador están mezclados uniformemente en todo el volumen del reactor. En este caso se puede demostrar que la diferencia $P - A$ entre la producción y la absorción es proporcional a n , es decir, $P - A = Cn$, donde C es una constante relacionada con los parámetros involucrados en el diseño del reactor. La ec. (24.20) se convierte entonces en

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + Cn. \quad (24.21)$$

En un estado estacionario, $\partial n / \partial t = 0$ por lo que la ec. (24.21) se reduce a

$$D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + Cn = 0 \quad (24.22)$$

o sea

$$\frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + B^2 n = 0,$$

donde $B^2 = C/D$ se denomina *pandeo*. La solución de la ec. (24.22) es de la forma

$$n = n_0 \operatorname{sen} Bx + n_1 \cos Bx, \quad (24.23)$$

como se puede verificar por sustitución directa, donde n_0 y n_1 son dos constantes a determinar a partir de las condiciones de contorno.

Suponiendo que el reactor tiene la forma de una losa de espesor a , la intuición física nos dice que, aunque los neutrones se generan en todo el volumen, escapan a través de las dos superficies que limitan la losa. En consecuencia, la densidad es máxima en el centro de la losa y disminuye hacia los lados produciendo dos corrientes de difusión, como se sugiere en la fig. 24-16. Podemos imponer entonces que $n = 0$ para $x = a$. Haciendo $x = 0$ en la ec. (24.23) obtenemos $n_1 = 0$, de modo que la misma se reduce a $n = n_0 \operatorname{sen} Bx$. Haciendo $x = a$ obtenemos $\operatorname{sen} Ba = 0$, o sea $Ba = (\text{entero}) \times \pi$. Como n no puede ser negativo, ya que representa el número de neutrones por unidad de volumen, concluimos que el único resultado posible para el estado estacionario es $Ba = \pi$, obteniéndose para el pandeo

$$B = \pi/a. \quad (24.24)$$

Esta ecuación establece una relación entre el tamaño de un reactor en forma de

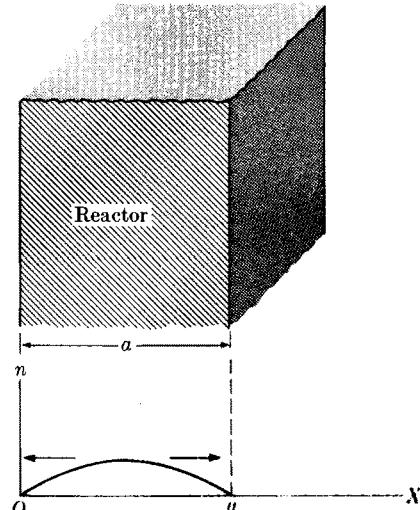


Fig. 24-16. Distribución de neutrones en un reactor nuclear.

losa y la producción y absorción de neutrones, expresada por B . Los que diseñan reactores emplean por ello esa ecuación para determinar la composición correcta del reactor que asegure que funcionará en condiciones estacionarias. Para otras formas de reactores se obtienen resultados correspondientes.

Se puede presentar una situación similar en la conducción térmica cuando hay fuentes de energía distribuidas en el volumen de la sustancia, o cuando hay pérdidas de energía en su superficie. Consideremos, por ejemplo, la distribución de temperatura en condiciones estacionarias en una barra cuya superficie no está

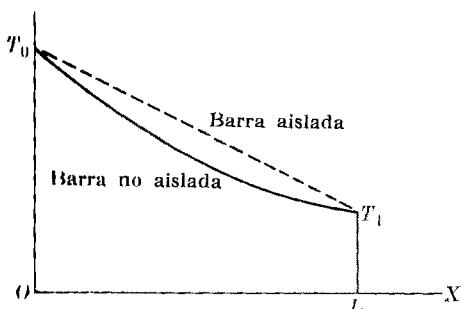


Fig. 24-17. Distribución de temperatura a lo largo de una barra no aislada cuyos extremos se mantienen a temperatura fija.

aislada térmicamente, de modo que a través de ella se pierde energía en forma de calor que pasa al medio circundante. La pérdida de energía por unidad de tiempo es proporcional al área de la superficie y se puede considerar proporcional a la diferencia de temperatura entre la barra y el medio, en tanto esta diferencia no sea muy grande. Este enunciado, llamado *ley de enfriamiento de Newton*, vale sólo en forma aproximada. Suponiendo que la temperatura del medio es cero, tenemos que la pérdida de energía en cada punto de la superficie es proporcional a T . Aunque la barra está rodeada de un material aislante, siempre se pierde algo

de calor a través de su superficie ya que ninguna aislación es perfecta; podemos ver entonces que, conforme al resultado del ejemplo 24.3, la energía que se pierde es proporcional a la diferencia de temperatura entre las superficies interna y externa del aislador. El resultado de esta pérdida superficial de energía es que, en el estado estacionario, la temperatura decrece exponencialmente a lo largo de la barra, como se muestra en la fig. 24-17, en vez de linealmente como en el caso de la barra perfectamente aislada.

24.5 Viscosidad

Como se mencionó al comienzo de este capítulo, hay un tercer fenómeno de transporte que ocurre en los gases (y en los fluidos en general), que está íntimamente relacionado tanto con la difusión molecular como con la conducción térmica: la *viscosidad*. En la sección 7.10, al tratar el movimiento de un cuerpo a través de un fluido, introdujimos un *coeficiente de viscosidad* η pero no lo definimos en términos precisos.

Consideremos un fluido en el que hay, además de la agitación térmica de las moléculas, un movimiento de masa o corriente de convección de todo el fluido. Ejemplos de ello son una corriente de aire en un túnel de viento o el agua que corre en un canal o en una tubería. Supongamos que el fluido se mueve como se muestra en la fig. 24-18, en la que la velocidad de convección v_y yace según el

eje Y pero su módulo es función de la distancia según el eje X , como se indica en la parte inferior de la fig. 24-18. Consideremos el plano P perpendicular al eje X y por lo tanto paralelo a la dirección del movimiento de convexión del fluido. No obstante, las moléculas no se mueven únicamente en forma paralela al eje Y porque tienen un movimiento térmico y además chocan entre sí. En consecuencia, las moléculas están cruzando continuamente el plano P , tanto de izquierda a derecha como de derecha a izquierda. Cada molécula lleva consigo su momentum de convexión (paralelo al eje Y). En la situación ilustrada en la fig. 24-18, las moléculas que atraviesan de izquierda a derecha tienen un momentum de convexión mayor que el de las que cruzan de derecha a izquierda. Esta diferencia de momentum origina un aumento de momentum de convexión a la derecha de P y una disminución a la izquierda.

La densidad de corriente de momentum j_p , es la cantidad de momentum de convexión (paralelo al eje Y) transferido por unidad de tiempo a través de un área unitaria perpendicular a la dirección según la cual cambia la velocidad; en nuestro caso ésta es la dirección definida por el eje X . Los experimentos muestran que j_p es proporcional a la variación de la velocidad de convexión v_y por unidad de longitud en la dirección del eje X , o sea al gradiente de la velocidad de convexión (es decir, $\partial v_y / \partial x$), de modo que podemos escribir la expresión

$$j_p = -\eta \frac{\partial v_y}{\partial x}, \quad (24.25)$$

que es muy similar a la ley de Fick para la difusión molecular y a la ley de Fourier para la conducción térmica. El signo negativo en la ec. (24.25) se debe a que la transferencia de momentum tiene lugar en el sentido en que la velocidad de convexión disminuye. El factor de proporcionalidad η es el coeficiente de viscosidad del fluido. Obsérvese que j_p se expresa en $(\text{m kg s}^{-1}) \text{ m}^{-2} \text{ s}^{-1}$ o $\text{m}^{-1} \text{ kg s}^{-2}$ y que $\partial v_y / \partial x$ se expresa en s^{-1} ; en consecuencia el coeficiente de viscosidad se expresa en $\text{m}^{-1} \text{ kg s}^{-1}$. La décima parte de esta unidad se denomina *poise* y se abrevia P (ver tabla 7-2).

Podemos encarar este tema desde un punto de vista diferente. Ya que en nuestro ejemplo el fluido que está a la derecha del plano P gana momentum de convexión (pa-

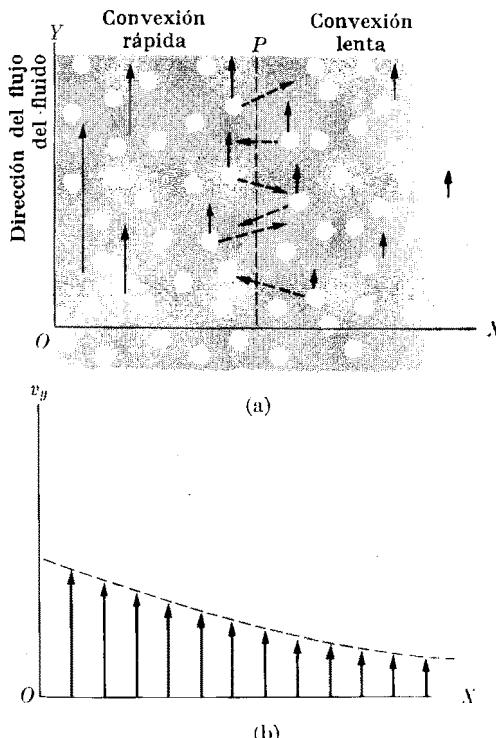


Fig. 24-18. Fluido en el que hay movimiento de masa y agitación térmica de las moléculas.

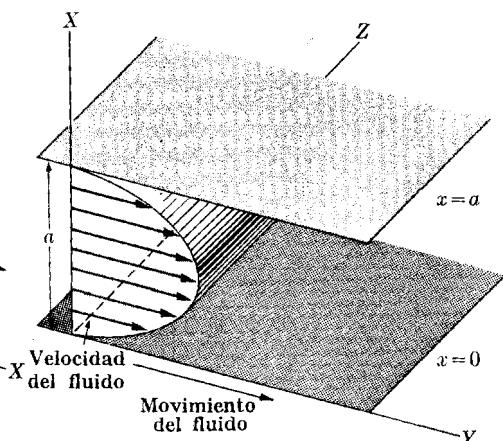
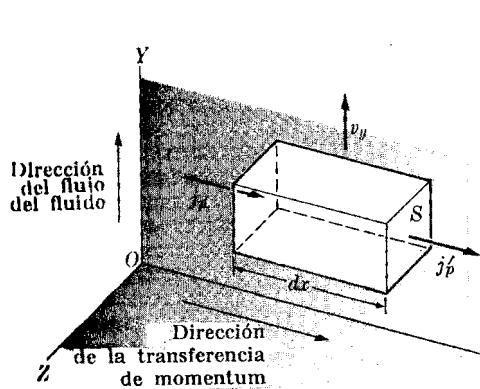


Fig. 24-19. Transferencia de momentum a través de un elemento de volumen.

Fig. 24-20. Distribución de velocidades en el flujo viscoso de un fluido entre dos planos paralelos.

ralelo al eje Y) y el que está a la izquierda de P pierde momentum de convección (paralelo al eje Y), podemos decir que a la derecha de P el fluido está sujeto a una fuerza paralela a la dirección del flujo y que a la izquierda de P está sujeto a una fuerza igual y contraria. El valor de esta fuerza por unidad de área se denomina *esfuerzo de corte* y se designa por τ . Como fuerza es igual a la derivada del momentum respecto al tiempo, concluimos que $\tau = j_p$. Podemos ver que las unidades son compatibles en esta relación, ya que τ (siendo una fuerza por unidad de área) se expresa en $N m^{-2}$ ó $m^{-1} kg s^{-2}$, que son las mismas unidades que se encontraron anteriormente para j_p . La ec. (24.25) se puede escribir entonces en la forma equivalente $\tau = \eta \frac{\partial v_y}{\partial x}$.

Aplicaremos ahora al fluido el principio de conservación del momentum. Consideremos un elemento de volumen de longitud dx y sección S (fig. 24-19). El elemento de volumen tiene una velocidad de convección v_y . Las moléculas que entran al elemento de volumen por la izquierda producen una ganancia de momentum por unidad de tiempo (llamada flujo entrante de momentum), que es paralela al eje Y e igual a $j_p S$. Las moléculas que salen por el extremo derecho producen una pérdida de momentum por unidad de tiempo (llamada flujo saliente de momentum), que es paralela al eje Y e igual a $j'_p S$. En consecuencia la ganancia neta de momentum por unidad de tiempo dentro del elemento de volumen es

$$\begin{aligned}
 &\text{ganancia de momentum por unidad de tiempo} = \text{flujo entrante} - \\
 &\quad \text{flujo saliente} \\
 &= j_p S - j'_p S = \\
 &= -(j'_p - j_p) S \\
 &= -\frac{\partial j_p}{\partial x} S dx.
 \end{aligned}$$

Si se designa con p_y el momentum de convención por unidad de volumen del fluido, el momentum por unidad de tiempo que gana el fluido contenido en el elemento de volumen también se puede escribir en la forma

$$\text{ganancia de momentum por unidad de tiempo} = \frac{\partial p_y}{\partial t} S dx.$$

Luego, igualando ambos resultados y cancelando el factor común $S dx$, obtenemos

$$\frac{\partial p_y}{\partial t} = - \frac{\partial j_p}{\partial x}.$$

Obsérvese que el primer miembro de esta ecuación representa una fuerza por unidad de volumen por lo que el segundo miembro se puede llamar *fuerza de viscosidad* que actúa sobre el fluido por unidad de volumen.

Puede haber otras fuerzas que actúen sobre el fluido según el eje Y. Por ejemplo, un fluido que se mueve en un canal o una tubería inclinados está también sujeto a su propio peso. Llámemos f a estas fuerzas adicionales por unidad de volumen. Las mismas representan una ganancia adicional de momentum por unidad de volumen y por unidad de tiempo y la ecuación anterior se puede escribir en la forma

$$\frac{\partial p_y}{\partial t} = - \frac{\partial j_p}{\partial x} + f.$$

Combinando este resultado con la ec. (24.25) y teniendo en cuenta que $p_y = \rho v_y$, donde ρ es la densidad del fluido, tenemos

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} = \frac{\eta}{\rho} \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{1}{\rho} f, \quad (24.26)$$

que es la ecuación de movimiento del fluido viscoso. Expresa la conservación del momentum del fluido. Vemos que la misma también es análoga a la ec. (24.2) si agregamos el término f/p , que juega el mismo papel que $P - A$ en la ec. (24.20), y que puede interpretarse como un aumento (o disminución) de momentum por unidad de masa y por unidad de tiempo (o sea producción o absorción de momentum) debida a las interacciones externas del fluido. En ausencia de fuerzas externas, la ec. (24.26) se reduce a

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} = \frac{\eta}{\rho} \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2},$$

que es idéntica a la ecuación de difusión (24.4) con η/ρ en vez de D y v_y en vez de n .

Es importante señalar que la ec. (24.26) es válida sólo para fluidos incompresibles con velocidad de convención pequeña; en el caso de fluidos que no satisfacen estas condiciones aparecen otros términos en la ecuación.

EJEMPLO 24.5. Determinar la distribución de velocidades en un fluido viscoso que se mueve entre dos paredes planas y paralelas, como en un canal. Suponer que

la fuerza por unidad de volumen es constante y que el fluido se encuentra en condiciones estacionarias.

Solución: Como las condiciones son estacionarias, tenemos que $\partial v_y / \partial t = 0$, por lo que la ec. (24.26) se reduce a

$$\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} = -\frac{f}{\eta}.$$

Como en este problema f/η es constante, tenemos (después de integrar respecto a x),

$$\frac{\partial v_y}{\partial x} = -\frac{f}{\eta} x + c_1,$$

donde c_1 es la constante de integración. Integrando nuevamente, obtenemos

$$v_y = -\frac{f}{2\eta} x^2 + c_1 x + c_2.$$

Para determinar las constantes de integración c_1 y c_2 debemos usar las condiciones de contorno. Como un fluido viscoso tiende a adherirse a las paredes, el fluido en contacto con las dos paredes debe tener una velocidad muy pequeña que podemos suponer nula. Luego, con referencia a la fig. 24-20, debemos tener como condiciones de contorno que $v_y = 0$ para $x = 0$ y $x = a$. Estas condiciones dan $c_1 = fa/2\eta$ y $c_2 = 0$, de donde

$$v_y = \frac{f}{2\eta} (ax - x^2).$$

Esta expresión da la velocidad de convención del fluido en función de la distancia al plano $x = 0$. Representa una parábola, como se indica en la fig. 24.20. La velocidad es máxima en el plano medio. Si el fluido se mueve en dirección vertical, f puede ser el peso del fluido por unidad de volumen, que es igual a ρg . Cuando el fluido se mueve entre dos planos horizontales, la fuerza f se produce aplicando un gradiente de presión en la dirección del movimiento. En este caso, conforme a la sección 9.14, $f = -\partial p / \partial x$; si p_1 y p_2 son las presiones en dos puntos a una distancia l , tenemos que $f = (p_1 - p_2)/l$ y

$$v_y = \frac{p_1 - p_2}{2\eta l} (ax - x^2).$$

24.6 Camino libre medio, frecuencia de colisión y sección eficaz de colisión

Estudiaremos ahora algunos conceptos que son importantes para describir fenómenos de transporte en gases desde el punto de vista molecular. Como las moléculas de un gas están en movimiento, chocan frecuentemente por lo que sus trayectorias son en zigzag (fig. 24.21). Se han introducido tres conceptos útiles para describir el movimiento de estas moléculas: el *camino libre medio de colisión*, la *frecuencia de colisión* y la *sección eficaz de colisión*.

El *camino libre medio de colisión*, que se designa con l , es la distancia media que una molécula del gas recorre entre colisiones. Se puede determinar siguiendo una molécula durante un tiempo suficientemente grande y calculando la longitud media de las trayectorias entre choques sucesivos. También se puede calcular

observando, en un instante determinado, un gran número de moléculas que acaban de sufrir una colisión y calculando la distancia media recorrida por las moléculas hasta la colisión siguiente. Los dos métodos son equivalentes estadísticamente.

La *frecuencia de colisión*, que se designa con Γ , es el número de colisiones que experimenta una molécula en la unidad de tiempo. El camino libre medio y la *frecuencia de colisión* están íntimamente relacionadas porque, si \bar{v} es la velocidad media de una molécula, el tiempo medio entre dos colisiones es $t = l/\bar{v}$, por lo que el número de colisiones por unidad de tiempo, o sea la *frecuencia de colisión* Γ , está dado por $1/t$, es decir

$$\Gamma = \bar{v}/l. \quad (24.27)$$

La *frecuencia de colisión* Γ se expresa en s^{-1} . Evidentemente, si tenemos N moléculas en un volumen dado, el número total de colisiones por unidad de tiempo de todas las moléculas contenidas en este volumen es NT .

Otro concepto útil es la *sección eficaz macroscópica de colisión* Σ , definida como el número de colisiones de una molécula por unidad de longitud, estando dada entonces por

$$\Sigma = 1/l. \quad (24.28)$$

Se expresa en m^{-1} .

El camino libre medio l está relacionado con las dimensiones de la molécula de la siguiente manera. Llamemos n al número de moléculas por unidad de volumen y r al "radio" de cada molécula. Cuando usamos la palabra "radio", no queremos implicar que las moléculas son esféricas. Sin embargo, debido a su movimiento rotacional rápido, se comportan efectivamente como esferas. Despreciando las fuerzas intermoleculares y suponiendo que las moléculas actúan

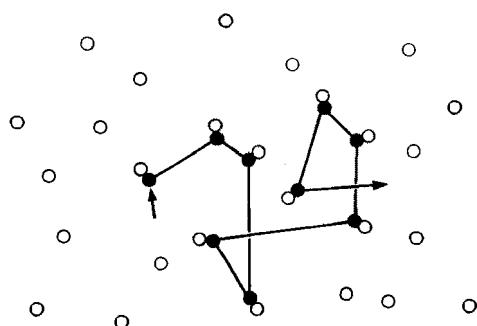
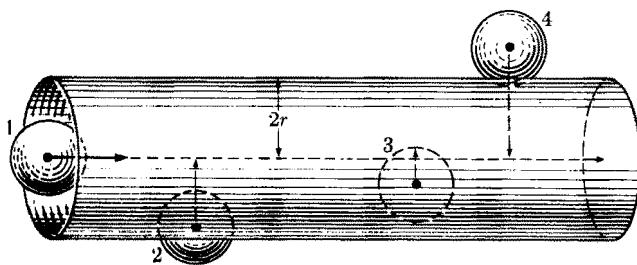
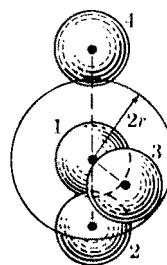


Fig. 24-21. Caminos libres moleculares



(a)



(b)

Fig. 24-22. Cilindro de colisión barrido por una molécula. Las moléculas cuyos centros están dentro del cilindro chocarán con la molécula 1. (a) Vista lateral, (b) vista frontal del volumen excluido.

como bolas de billar, tenemos que para que dos moléculas choquen, la distancia entre los dos centros proyectada sobre un plano perpendicular a la dirección del movimiento relativo, debe ser menor que $2r$ (fig. 24-22). Luego, si suponemos que la molécula 1 se mueve hacia la derecha, la región efectiva alrededor de 1 dentro de la cual debe estar el centro de otra molécula para que haya choque, es un cilindro de radio $2r$. Si la separación entre los centros es menor que $2r$, como

ocurre para las moléculas 2 y 3, hay colisión. Si es mayor que $2r$, como en el caso de la molécula 4, no hay colisión.

Consideraremos ahora una porción de gas de espesor dx y área S (fig. 24-23). El número total de moléculas contenido dentro de esa porción es $nS dx$. Cada molécula forma una pantalla de radio $2r$, esto es, impide el libre pasaje de la molécula M . Esta área se expresa por

$$\sigma = \pi(2r)^2 = 4\pi r^2. \quad (24.29)$$

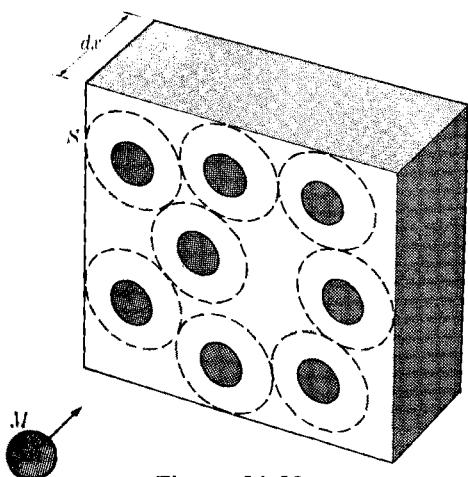


Figura 24-23

grande y dx es muy pequeña). Luego, la probabilidad de que M sufra una colisión al pasar a través de la porción es

$$\frac{(nS dx)\sigma}{S} = n\sigma dx.$$

Por lo tanto el número de colisiones de M por unidad de longitud es $n\sigma$. Esto es lo que anteriormente definimos como *sección eficaz macroscópica de colisión*. Luego,

$$\Sigma = n\sigma, \quad (24.30)$$

y el camino libre medio de colisión de la molécula es

$$l = \frac{1}{\Sigma} = \frac{1}{n\sigma}. \quad (24.31)$$

El hecho de que el camino libre medio l esté relacionado con el radio molecular permite estimar las dimensiones moleculares midiendo l .

Cuando tenemos en cuenta las interacciones moleculares, las moléculas se dispersan o "chocan" con un cambio consecuente en la dirección de su movimiento aún cuando su separación sea mayor que sus diámetros, tal como cuando discutimos en el ejemplo 7.16 la dispersión bajo la acción de una fuerza proporcional a la inversa del cuadrado de la distancia. En este caso más general, σ está aún

relacionada con Σ y l por las ecs. (24.30) y (24.31), que en realidad son sus definiciones, pero ya no se aplica la ec. (24.29).

Obsérvese que la ec. (24.31) es correcta en tanto consideremos que las moléculas de la porción de gas de la fig. 24-23 están fijas. Si están en movimiento, como lo están realmente en un gas, la probabilidad de una colisión puede ser mayor por lo que el camino libre medio es menor. Por ejemplo, un razonamiento que tenga en cuenta la distribución de velocidades en un gas da

$$l = \frac{1}{\sqrt{2} n \sigma},$$

donde σ está dado por la ec. (24.29). Esto es equivalente a $\Sigma = \sqrt{2} n \sigma$ y es lo mismo que decir que la sección eficaz efectiva por molécula es $\sqrt{2} \sigma$ en vez de σ .

Los conceptos de sección eficaz y de camino libre medio se pueden extender a otros procesos, además de las colisiones, tales como la absorción o captura. Por ejemplo, si una molécula puede, mientras se difunde, ser capturada por otra molécula, el camino libre medio de absorción l_a da la distancia media que recorre una molécula antes de ser capturada (o absorbida). Análogamente, la *sección eficaz macroscópica de absorción* Σ_a está definida por

$$\Sigma_a = 1/l_a,$$

y da la probabilidad por unidad de longitud de que la molécula sea absorbida.

EJEMPLO 24.6. Estudiar la difusión de neutrones en un medio no multiplicativo, o sea un medio como el agua o el grafito en el cual los neutrones son absorbidos pero no producidos. Esta es, por ejemplo, la situación en la columna térmica de un reactor nuclear, la cual consiste en una masa de agua o de grafito adyacente a uno de los lados del reactor. Se permite a los neutrones producidos dentro del reactor que se difundan a lo largo de la columna térmica, pudiéndose usar esos neutrones para diversos experimentos. La columna se llama térmica porque los neutrones que emergen de ella están en equilibrio térmico con los átomos del material que compone la columna.

Solución: En la fig. 24-24 se ilustra el arreglo experimental. Los neutrones provenientes del núcleo del reactor, penetran en la columna térmica por la izquierda y se difunden a través de ella. Durante el proceso de difusión, los neutrones chocan con los átomos del material de la columna. En algunos casos, el neutrón es capturado por un átomo del material como resultado de la colisión. Llamemos l_a al camino libre medio de absorción, es decir, la distancia media que recorre el neutrón antes de ser capturado. Luego, la sección eficaz macroscópica de absorción en el material es $\Sigma_a = 1/l_a$. Para neutrones térmicos Σ_a es aproximadamente 22 m^{-1} en agua y $0,037 \text{ m}^{-1}$ en grafito, que muestra que los neutrones lentos son capturados más fácilmente por el agua que por el grafito.

Consideremos ahora la rebanada de espesor dx y sección S mostrada en la fig. 24-24. El número total de neutrones contenidos en ella es $nS dx$. La distancia total que recorren por unidad de tiempo es $(nS dx)v$, donde v es la velocidad media de los neutrones. El número de neutrones absorbidos por el material en la unidad de tiempo es entonces $(nS dx)v \Sigma_a$ y por unidad de volumen es $v \Sigma_a n$. En consecuencia, si en la ec. (24.20) eliminamos el factor de producción e introducimos el valor ante-

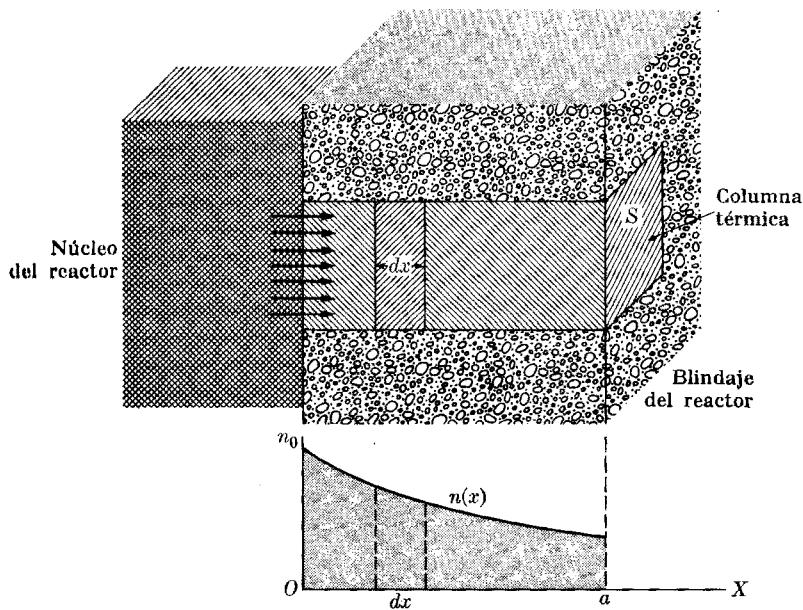


Fig. 24-24. Concentración de neutrones a lo largo de una columna térmica en un reactor nuclear.

ríor de la absorción, obtenemos

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} - \bar{v}\Sigma_a n.$$

En condiciones estacionarias, $\partial n / \partial t = 0$ y

$$D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} - \bar{v}\Sigma_a n = 0 \quad \text{o} \quad \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} - \alpha^2 n = 0,$$

donde $\alpha^2 = \bar{v}\Sigma_a/D$. La solución de esta ecuación diferencial es $n = n_0 e^{-\alpha x} + n_1 e^{\alpha x}$, donde n_0 y n_1 se determinan mediante las condiciones de contorno en ambos extremos de la columna térmica. Como para los neutrones térmicos en agua y en grafito, D/\bar{v} es igual a 0,0084 m y 0,0092 m respectivamente, tenemos que $\alpha = 51,2 \text{ m}^{-1}$ para el agua y $2,01 \text{ m}^{-1}$ para el grafito. A veces se usa la cantidad $L = 1/\alpha$, llamada *longitud de difusión*. Los valores de L para neutrones térmicos en agua y en grafito son entonces $1,95 \times 10^{-2} \text{ m}$ y $0,50 \text{ m}$ respectivamente. Cuando la columna térmica es muy larga en comparación con L , debemos tener $n = 0$ para x muy grande. Esto exige que $n_1 = 0$ por lo que $n = n_0 e^{-\alpha x}$, resultando una disminución exponencial del número de neutrones térmicos a medida que se mueven a lo largo de la columna. En este caso, la longitud de difusión, $L = 1/\alpha$, da la distancia en la cual el número de neutrones disminuye a $1/e$, o 36 %, de su valor inicial.

24.7 Teoría molecular de los fenómenos de transporte

En la primera parte de este capítulo hemos estudiado los fenómenos de transporte desde un punto de vista general o macroscópico, sin referirnos al movimiento molecular responsable de los mismos. Nuestra presentación se ha basado en la

ley de Fick para la difusión,

$$j = -D \frac{\partial n}{\partial x}, \quad (24.32)$$

la ley de Fourier para la conducción térmica,

$$j_E = -K \frac{\partial T}{\partial x}, \quad (24.33)$$

y la ley de flujo viscoso,

$$j_p = -\eta \frac{\partial v_y}{\partial x}. \quad (24.34)$$

Todas estas leyes tienen una base experimental y son válidas dentro de los límites indicados en cada caso. Nuestro propósito es ahora correlacionar las cantidades D , K y η con las propiedades moleculares. Nos limitaremos únicamente a los gases.

Como ya hemos mencionado, los tres fenómenos de transporte estudiados se deben a la agitación molecular. La difusión molecular se debe a la transferencia de *moléculas* de una región en la que están más concentradas a otra en la que están menos concentradas. La conducción térmica se debe a la transferencia de *energía* de una región en la que las moléculas se mueven rápidamente, por lo que la temperatura es alta, a otra en que se mueven más lentamente, por lo que la temperatura es menor. Análogamente, la viscosidad se debe a la transferencia del *momentum* asociado con el movimiento de convección desde un lugar en que la convección es rápida hacia otro en que es más lenta.

Nuestro próximo paso debiera ser obtener estas leyes a partir de nuestro modelo molecular. La derivación es muy instructiva como ilustración del razonamiento físico, pero es matemáticamente complicada, por lo que presentaremos únicamente una descripción del procedimiento. El razonamiento a usar es el que sigue: Consideremos primero la difusión. Refiriéndonos a la fig. 24-25, el problema consiste en hallar el número neto de moléculas que atraviesan (por unidad de tiempo) un área dS perpendicular a la dirección en que tiene lugar la difusión. Hemos convenido en que esta dirección es el eje X.

Consideremos a continuación un volumen dV a una distancia r de dS . El número de moléculas que hay en este volumen es $n dV$ y el número de colisiones que sufren por unidad de tiempo es $l n dV$. Después de la colisión, cierto número

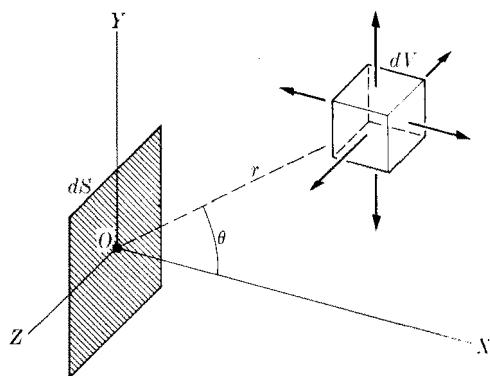


Figura 24-25

de estas moléculas se dirigen hacia dS , pero no todas llegan a dS porque pueden experimentar una nueva colisión que las desvíe de su camino. Debemos entonces determinar cuántas de estas moléculas, después de chocar dentro del volumen dV , atraviesan el área dS por unidad de tiempo. Si integramos sobre todo el espacio para tomar en consideración todas las regiones de la sustancia, obtenemos la corriente neta en dS . Evidentemente, para que haya una corriente neta es necesario que n varíe con x de modo tal que el número de partículas que atraviesa dS desde la derecha sea diferente del de las que la atraviesan desde la izquierda. La simetría indica que de otro modo la corriente sería cero. Comparamos la expresión resultante para la corriente neta en dS con la ley de Fick para la difusión, ec. (24.32). De este resultado podemos entonces obtener el valor del coeficiente de difusión D en función de las constantes moleculares. Para la conducción térmica debemos tener en cuenta la energía que lleva cada molécula que atraviesa dS . Para la viscosidad debemos tener en cuenta el momentum de convexión que llevan las moléculas.

El resultado de todos estos cálculos es que hallamos que el coeficiente de difusión molecular está relacionado con la dinámica molecular mediante la expresión

$$D = \frac{1}{2} \bar{v} l, \quad (24.35)$$

donde \bar{v} es la velocidad media y l es el camino libre medio de colisión de las moléculas. Para el coeficiente de conducción térmica tenemos la relación

$$K = D(\frac{1}{2}kn) = \frac{1}{2}nk\bar{v}. \quad (24.36)$$

Finalmente, el coeficiente de viscosidad está expresado por

$$\eta = D(nm) = \frac{1}{2}nm\bar{v}l. \quad (24.37)$$

TABLA 24-1 Valores experimentales del coeficiente de difusión D , de la conductividad térmica K y de la viscosidad η , todos a temperatura y presión normales

Sustancia	$D \times 10^6$, $\text{m}^2 \text{s}^{-1}$	$K \times 10^2$, $\text{m kg s}^{-3} \text{K}^{-1}$	$\eta \times 10^6$, $\text{m}^{-1} \text{kg s}^{-1}$	$r \times 10^{10}$, *
He		14,3	1,86	0,90
Ne	4,52	4,60	2,97	1,06
A	1,57	1,63	2,10	1,50
Xe	0,58	0,52	2,10	2,02
H ₂	12,8	16,8	0,84	1,12
O ₂	1,81	2,42	1,89	1,51
N ₂	1,78	2,37	1,66	1,54
CO ₂	0,97	1,49	1,39	1,89
NH ₃	2,12	2,60	0,92	1,83
CH ₄	2,06	3,04	1,03	1,70

* Los radios moleculares se han calculado a partir de los valores experimentales de la viscosidad.

Las expresiones (24.35), (24.36) y (24.37) muestran la íntima relación que existe entre los tres fenómenos de transporte.

La teoría de los fenómenos de transporte que hemos esbozado es lo que se podría llamar *aproximación de difusión*. Una teoría más refinada debe tener en cuenta ciertos factores adicionales que dan lugar a ecuaciones más complejas.

Si tomamos en consideración el efecto de las fuerzas intermoleculares, los valores medidos de D , K y η nos permiten obtener los parámetros que definen el potencial intermolecular. Un resultado inmediato es que podemos estimar las dimensiones moleculares. Midiendo cualquiera de estos coeficientes, podemos calcular el camino libre medio y de él podemos obtener la sección eficaz σ y el radio molecular. Debemos tener en cuenta, no obstante, que los valores calculados del camino libre medio y del radio molecular sólo indican órdenes de magnitud. En la tabla 24-1 se dan valores experimentales para algunos gases monoatómicos, diatómicos y poliatómicos; también se dan los radios moleculares calculados a partir de los datos sobre viscosidad.

EJEMPLO 24.7. Estimar los coeficientes D y K para el hidrógeno a temperatura y presión normales. Comparar con los resultados experimentales.

Solución: Debemos determinar las cantidades \bar{v} , l , n y m para el hidrógeno en tales condiciones. La masa de una molécula de hidrógeno es $3,33 \times 10^{-27}$ kg. El número de moléculas por unidad de volumen a $T = 273$ K y $p = 1,01 \times 10^5$ N m⁻² es, usando la ley de los gases ideales $pV = NkT$, ec. (9.62), $n = V/N = 2,68 \times 10^{26}$ m⁻³. Se puede demostrar que la velocidad media de una molécula está dada por $\bar{v} = \sqrt{8kT/\pi m}$. Luego, en nuestro caso: $\bar{v} = 1,69 \times 10^3$ m s⁻¹. Finalmente, si tomamos $r = 1,12 \times 10^{-10}$ m para el radio de una molécula de hidrógeno, obtenemos el camino libre medio $l = 1/\sqrt{2}n\sigma = 1,68 \times 10^{-7}$ m.

Con los valores anteriores, usando las ecs. (24.35) y (24.36), encontramos que

$$D = 9,42 \times 10^{-5} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}, \\ K = 5,25 \times 10^{-2} \text{ m kg s}^{-3} \text{ K}^{-1}.$$

Los valores experimentales correspondientes son $D = 12,8 \times 10^{-5}$ y $K = 16,8 \times 10^{-2}$. Por lo tanto, se puede obtener por lo menos los órdenes de magnitud correctos por medio de nuestra teoría simplificada, que se basa en un gas ideal monoatómico. Una extensión de la teoría que tiene en cuenta la energía transportada por los movimientos internos, tales como la rotación y la vibración, mejora el acuerdo entre los valores teóricos y los experimentales. En particular, la conductividad térmica se verá aumentada en un factor 3,3.

24.8 Conclusión

Los fenómenos físicos descritos en este capítulo pueden parecer algo desconectados de los descritos anteriormente en la Parte 3, y por lo tanto un poco apartados de la línea principal de razonamiento seguida hasta entonces. Esto es cierto en alguna medida. Pero por otra parte, dejando de lado la importancia intrínseca de los fenómenos de transporte, nuestra discusión de ellos como manifestación de la agitación molecular ha cumplido un propósito muy útil, en el sentido de que ha demostrado que no todos los campos se propagan necesariamente en la forma ondulatoria típica $f(x + vt)$, siguiendo la ecuación (18.11), y que la naturaleza presenta otros tipos de propagación.

Bibliografía

1. "Density Gradients", G. Oster, *Sci. Am.*, agosto 1965, pág. 70
2. "The Conduction of Heat in Solids", R. Sproull, *Sci. Am.*, diciembre 1962, pág. 92
3. "Measurement of Molecular Diameters and Average Velocities", R. Warner, *Am. J. Phys.* **29**, 736 (1961)
4. "Development of the Kinetic Theory of Gases. VI. Viscosity", S. Brush, *Am. J. Phys.* **30**, 269 (1962)
5. "Heat Waves and Angström's Method", H. Bryant, *Am. J. Phys.* **31**, 325 (1963)
6. "Variation of Air Viscosity with Temperature", M. McInally, *Am. J. Phys.* **31**, 732 (1964)
7. "Transport Properties of a Gas Mixture", E. Desloge, *Am. J. Phys.* **32**, 733 y 742 (1964)
8. "Temperature and Pressure Dependence of the Viscosity of Gases", D. Cronin, *Am. J. Phys.* **33**, 835 (1965)
9. *The Feynman Lectures on Physics*, vol. I, R. Feynman, R. Leighton y M. Sands. Addison-Wesley, Reading, Mass., 1963, cap. 43
10. *Source Book in Physics*, W. F. Magie. Harvard University Press, Cambridge, Mass., 1963, pág. 377 (Stefan)
11. *Foundations of Modern Physical Science*, G. Holton y D. H. D. Roller. Addison-Wesley, Reading, Mass., 1958, cap. 25

Problemas

24.1 Si el coeficiente de difusión D , dependiera de la concentración y por lo tanto de x , ¿cómo se debería modificar la ec. (24.4)?

24.2 Demostrar que en tres dimensiones la ecuación que expresa la conservación del número de partículas se convierte en $\partial n / \partial t = -\text{div } j$. ¿Cómo se debería escribir la ec. (24.4) en este caso?

24.3 El gradiente de temperatura en una varilla aislada de cobre es $-2,5^\circ\text{C}$ por cm. (a) Calcular la diferencia de temperatura entre dos puntos separados 5 cm. (b) Determinar la cantidad de calor que atraviesa (por segundo) un área unitaria perpendicular a la varilla. La conductividad térmica del cobre es

$$3,84 \times 10^2 \text{ m kg s}^{-3} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$$

24.4 La conductividad térmica de la plata es aproximadamente $1 \text{ cal cm}^{-1} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$. Calcular la cantidad de calor que

fluye a través de un disco de plata de 0,1 cm de espesor y 2 cm^2 de superficie si la diferencia de temperatura entre las dos caras del disco es 10°C .

24.5 Una habitación tiene tres ventanas con un área de 3 m^2 . El espesor del vidrio es 0,4 cm. La temperatura interior es 20°C y la exterior 10°C . Calcular la cantidad de calor que pasa por las ventanas por segundo y por hora. La conductividad térmica del vidrio es $5,85 \times 10^{-1} \text{ m kg s}^{-3} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$.

24.6 Dos varillas, una de cobre y otra de acero, ambas de 1 m de longitud y 1 cm^2 de sección están soldadas por un extremo. El extremo libre de la varilla de cobre se mantiene a 100°C y el extremo libre de la de acero se mantiene a 0°C . Calcular (a) la temperatura en el extremo común, (b) el gradiente de temperatura en la varilla de cobre y en la de acero, (c) la cantidad de calor que atraviesa cualquier sección de la varilla por unidad de tiempo, (d) ilustrar un

24.6 Calcular el gradiente de la temperatura a lo largo de una varilla. Las conductividades térmicas del cobre y del acero son $3,84 \times 10^2$ y $40 \times 10^1 \text{ m kg s}^{-3} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ respectivamente.

24.7 Una barra de 2 m de longitud tiene un alma de acero de 1 cm de diámetro rodeada por una camisa de cobre cuyo diámetro externo es 2 cm. La superficie exterior de la barra está aislada térmicamente y uno de los extremos se mantiene a 100°C y el otro a 0°C . (a) Calcular la corriente total de calor en la barra, en el estado estacionario final. (b) ¿Qué fracción transporta cada material? Las conductividades térmicas están dadas en el problema 24.6.

24.8 Una barra aislada térmicamente tiene una temperatura inicial T_1 . Se lleva rápidamente un extremo a la temperatura T_0 más alta manteniendo el otro extremo a la temperatura T_1 . Mostrar, por medio de una serie de curvas, la variación de temperatura a lo largo de la barra hasta que se alcanza el estado estacionario final representado en la figura 24.11.

24.9 Los extremos de una barra metálica aislada de longitud L se mantienen a 0°C , aunque la temperatura inicial de la barra es $T = 50 \sin \pi x/L$, donde T está en $^\circ\text{C}$. (a) Mostrar, en un diagrama, la temperatura inicial de la barra y varias curvas que representen la distribución de temperatura en tiempos sucesivos. ¿Cuál es la distribución de temperatura después de un tiempo muy largo? (b) Mostrar el sentido del flujo de calor en diferentes lugares de la varilla. (c) Representar la corriente inicial de calor y comparar con el resultado obtenido en (b). Indicar también la corriente de calor en varios instantes sucesivos.

24.10 Una tubería de vapor de 2 cm de radio está forrada con material aislante de 2 cm de espesor. La temperatura de la tubería de vapor es 100°C y la de la superficie externa de la camisa es 20°C . La conductividad térmica del aislante es $8,4 \times 10^{-4} \text{ m kg s}^{-3} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$. (a) Calcular el gradiente de temperatura dT/dr en las superficies interna y externa de la camisa. (b) Hacer un gráfico esquemático de T en función de r . (c) Calcu-

lar el calor que se pierde a través del aislante por unidad de tiempo y por metro de longitud de la tubería.

24.11 Una esfera hueca tiene un radio interno R_1 y temperatura T_1 , y radio externo R_2 y temperatura T_2 . Demostrar que la cantidad de calor que atraviesa cualquier superficie esférica concéntrica con la esfera y con un radio entre R_1 y R_2 es

$$\Phi_Q = \frac{4\pi K(T_1 - T_2)R_1 R_2}{R_2 - R_1}.$$

Demostrar también que la temperatura dentro de la esfera en función de la distancia al centro es $T = C/r + C'$, donde

$$C = \frac{(T_1 - T_2)R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

y

$$C' = \frac{2T_1 R_2 - T_1 R_1 - T_2 R_2}{R_2 - R_1}.$$

24.12 La ley de enfriamiento de Newton (ver sección 24.4) se puede expresar en la forma $j_E = h(T - T_m)$, donde T es la temperatura del cuerpo, h una constante llamada *coeficiente de transferencia térmica* y j_E la energía que pasa del cuerpo al medio circundante por unidad de área y unidad de tiempo. (a) Obtener las unidades de h . (b) Escribir una ecuación que exprese la variación de energía interna por unidad de tiempo de un cuerpo de área S , como resultado del enfriamiento.

24.13 Considerar un pequeño cuerpo de área S , masa M y calor específico c , inicialmente a temperatura T_0 y rodeado de un medio a temperatura T_m . Demostrar que la temperatura del cuerpo en función del tiempo es $T = T_m + (T_0 - T_m)e^{-At}$, donde $A = hS/Mc$ y h es el coeficiente de transferencia térmica (ver problema 24.12). Representar T en función de t para T_0 mayor, igual y menor que T_m .

24.14 Un tubo cilíndrico de metal de radio interno R_1 , radio externo R_2 y conductividad térmica K está rodeado de una camisa de radio externo R_3 y conductividad térmica K' . Si se mantiene la temperatura de la superficie interna del tubo en el valor T_1 y la temperatura ex-

terior es T_3 , demostrar que la temperatura T_2 en la superficie común al tubo y la camisa es

$$\frac{T_1 K \ln(R_3/R_2) + T_3 K' \ln(R_2/R_1)}{K \ln(R_3/R_2) + K' \ln(R_2/R_1)}.$$

24.15 Demostrar que la velocidad de grupo de la onda térmica discutida en el ejemplo 24.4 es el doble de la velocidad de fase.

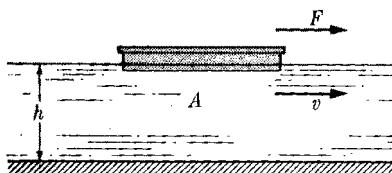


Figura 24-26

24.16 Una barca de área A navega en agua con movimiento uniforme de velocidad v siendo h la profundidad del agua. Demostrar que para remolcarla se necesita una fuerza $F = \eta A v / h$, donde η es la viscosidad del agua. (Ver fig. 24.26).

24.17 Demostrar que la cantidad de fluido que atraviesa por unidad de tiempo una superficie perpendicular a los planos de la fig. 24-20 y de ancho unitario según el eje Z es

$$(p_1 - p_2) a^3 / 12 \eta l.$$

24.18 Un fluido viscoso (de viscosidad η) se mueve en forma estacionaria por

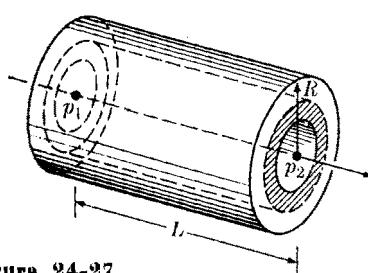


Figura 24-27

una tubería de radio R y longitud L (fig. 24-27). La presión en los extremos es p_1 y p_2 , siendo p_1 mayor que p_2 . Demostrar que (a) la velocidad del fluido a una distancia r del eje es $v = (p_1 - p_2)(R^2 - r^2)/4\eta l$, (b) el volumen de fluido

que atraviesa por unidad de tiempo cualquier sección de la tubería es

$$V = (\pi R^4 / 8\eta) (p_1 - p_2) / L,$$

resultado que se conoce como *fórmula de Poiseuille*. [Sugerencia: Considerar las fuerzas que actúan sobre una capa cilíndrica de radios r y $r + dr$; suponer también que para $r = R$ la velocidad del fluido es cero.]

24.19 Se conecta un tubo capilar de 10 cm de longitud y 1 mm de diámetro a un surtidor de agua que tiene una presión de 2 atm. El otro extremo del tubo capilar está a una presión de 1 atm. El coeficiente de viscosidad del agua es 0,01 poise. ¿Cuánta agua entrega el tubo en 1 s? ($1 \text{ atm} \approx 10^5 \text{ N m}^{-2}$). [Sugerencia: Usar el resultado del problema 24.18.]

24.20 Considerar el flujo de un fluido en una funda cilíndrica de radio interno R_1 y radio externo R_2 . La presión en los extremos es p_1 y p_2 , siendo p_1 mayor que p_2 . Determinar la velocidad del fluido a una distancia r del eje y el volumen de fluido que atraviesa por unidad de tiempo cualquier sección de la funda. Comparar con el resultado del problema 24.18 cuando $R_1 = 0$ y $R_2 = R$. [Sugerencia: Notar que la velocidad del fluido es cero para $r = R_1$ y $r = R_2$.]

24.21 En la fig. 24.28 se ilustra un viscosímetro típico. Consiste en un bulbo B que se continúa en un tubo capilar C .

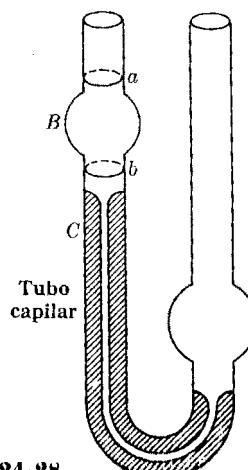


Figura 24-28

Se llena el bulbo con un líquido y se mide el tiempo que tarda la superficie del líquido en pasar de la marca *a* a la *b*. Se encuentra para dos líquidos de densidad ρ_1 y ρ_2 que los tiempos son t_1 y t_2 ; demostrar que el cociente entre sus viscosidades es $\eta_1/\eta_2 = \rho_1 t_1/\rho_2 t_2$.

24.22 Las densidades de la acetona y del agua a 20° son 0,792 y $0,9982 \text{ g cm}^{-3}$ respectivamente. La viscosidad del agua es $1,005 \times 10^{-2} \text{ poise}$ a 20° C . Si el agua tarda 120,5 s en correr entre las marcas de un viscosímetro y la acetona tarda 49,5 s, ¿cuál es la viscosidad de la acetona? [Sugerencia: Ver el problema 24.21.]

24.23 La viscosidad de la acetona a varias temperaturas se muestra en la tabla:

Temp., $^\circ\text{C}$	— 60	— 30	0	30
$\eta \times 10^2$, poise	0,932	0,575	0,399	0,295

Representando $\ln \eta$ en función de $1/T$, donde T es la temperatura absoluta de la acetona, mostrar que $\ln \eta = a + b/T$ representa la variación de η con T . Encontrar las constantes a y b .

24.24 Determinar, a partir de la ec. (24.31), el camino libre medio de las moléculas de un gas ideal en función de la temperatura y de la presión. Calcular el camino libre medio de las moléculas de hidrógeno a 100° C y 10^{-6} atm . ¿Cuál es el valor para el oxígeno? Repetir para ambos gases a temperatura y presión normales.

24.25 Si el diámetro molecular de H_2 es $2,2 \times 10^{-10} \text{ m}$, calcular el número de colisiones que experimenta una molécula de hidrógeno en 1 s si (a) $T = 300 \text{ K}$ y $p = 1 \text{ atm}$, (b) $T = 500 \text{ K}$ y $p = -1 \text{ atm}$, (c) $T = 300 \text{ K}$ y $p = 10^{-4} \text{ atm}$. (d) Calcular el número total de colisiones por segundo que tienen lugar en 1 cm^3 en cada uno de los casos (a), (b) y (c).

24.26 El diámetro molecular de N_2 (nitrógeno) es aproximadamente $3 \times 10^{-10} \text{ metros}$. (a) Calcular el camino libre medio de N_2 a 300 K y 1 atm y a $0,01 \text{ atm}$.

(b) Un sistema de vacío razonablemente bueno alcanza una presión de alrededor de 10^{-6} atm . ¿Cuál es el camino libre medio de N_2 a esta presión? (c) Si el diámetro de un tubo en el que se ha hecho vacío hasta una presión de $10^{-6} \text{ atmósferas}$ es 5 cm, ¿cuántas veces choca una molécula de N_2 contra las paredes entre dos colisiones sucesivas con otras moléculas del gas N_2 ?

24.27 Se puede demostrar que de las N_0 moléculas de un gas que experimentan una colisión en un instante dado, solamente el número $N = N_0 e^{-x/l}$ recorrerá la distancia x sin sufrir otra colisión (l es el camino libre medio). Hallar el porcentaje de moléculas que aún tienen que sufrir su próxima colisión en $x = 0,5l$, l , $2l$ y $10l$. Determinar qué valor debe tener x para que N sea igual al 50 % de N_0 .

24.28 Un grupo de moléculas de oxígeno comienzan su camino libre medio al mismo tiempo a una temperatura de 300 K y a una presión tal que el camino libre medio es 2,0 cm. Después de un cierto intervalo de tiempo, la mitad de las moléculas ha experimentado una segunda colisión y la otra mitad no. Determinar este intervalo de tiempo. Suponer que todas las moléculas se mueven con la velocidad media \bar{v} . [Para el valor de \bar{v} , ver el ejemplo 24.7.]

24.29 ¿Cómo varían con la temperatura y la presión los coeficientes D y K de un gas ideal?

24.30 Examinando la ec. (24.37) probar que el coeficiente de viscosidad de un gas ideal depende sólo de la temperatura. Determinar, si es posible, cómo y cuánto depende de la temperatura.

24.31 En la tabla siguiente se da la viscosidad del dióxido de carbono para diversas temperaturas. Representar η en función de \sqrt{T} , donde T es la temperatura absoluta. Calcular el cociente η/\sqrt{T} . Teniendo en cuenta el problema 24.30, cuál es su conclusión?

Temp., $^\circ\text{C}$	— 21	0	100	182	302
$\eta \times 10^6$, poise	12,9	13,0	18,6	22,2	26,8

24.32 Calcular los coeficientes D , K y η para el helio y el oxígeno a temperatura y presión normales y comparar con los resultados experimentales.

24.33 Obtener los valores teóricos de los cocientes K/D y η/D para un gas ideal. Compara estos cocientes con los datos experimentales para gases reales que aparecen en la tabla 24-1.

24.34 Se mantiene dos placas paralelas a 0,5 cm una de otra a 298 K y 301 K. El espacio entre las dos placas está lleno de H_2 . Calcular, en $J\ m^{-2}\ s^{-1}$, el flujo de calor entre las dos placas.

24.35 El coeficiente de viscosidad del amoníaco a 0° C es $9,2 \times 10^{-5}$ poise. Calcular el camino libre medio y la fre-

cuencia de colisión de una molécula de amoníaco a temperatura y presión normales. Estimar también su radio.

24.36 El coeficiente de viscosidad del metano a 0° C es $10,3 \times 10^{-5}$ poise. Calcular el diámetro molecular.

24.37 A 25° C, el H_2 tiene una viscosidad de $8,2 \times 10^{-5}$ poise. Si un tubo de 1 m de longitud permite el flujo de 1 litro/min bajo la acción de una diferencia de presión de 0,3 atm, ¿cuál es el diámetro del tubo? [Sugerencia: Usar la fórmula de Poiseuille dada en el problema 24.18.]

24.38 Comparar las conductividades térmicas del O_2 y del H_2 ; ignorar la diferencia de diámetro molecular.

**RESPUESTAS A LOS PROBLEMAS
CON NUMERO IMPAR**

CAPITULO 14

14.1 $4,21 \times 10^{-8} \text{ N}$; $1,16 \times 10^{36}$

14.3 $4,14 \times 10^{44}$; $1,16 \times 10^{36}$

14.5 $(d + 2l \operatorname{sen} \theta)^2 \operatorname{tg} \theta = 9 \times 10^9 (q^2/mg)$

14.7 (a) $4,8 \times 10^{-15} \text{ N}$; (b) $5,28 \times 10^{15} \text{ m s}^{-2} = 5,38 \times 10^{14} g$

14.9 (a) $1,011 \times 10^8 \text{ N C}^{-1}$; (b) $2,67 \times 10^5 \text{ m s}^{-1}$

14.11 (a) $5,69 \times 10^{-9} \text{ s}$; (b) $1,42 \times 10^{-2} \text{ m}$; (c) $9,86 \times 10^{-2} \text{ m}$

14.13 2

14.15 (a) $2,5 \times 10^{-4} \text{ m s}^{-1}$;

(b) $0,984 \times 10^{-4}$, $1,571 \times 10^{-4}$, $2,159 \times 10^{-4}$, $3,333 \times 10^{-4}$,
 $5,095 \times 10^{-4} \text{ m s}^{-1}$;

(c) $3,484 \times 10^{-4}$, $4,071 \times 10^{-4}$, $4,659 \times 10^{-4}$, $5,833 \times 10^{-4}$,
 $7,595 \times 10^{-4} \text{ m s}^{-1}$;

(d) la constante es $0,587 \times 10^{-4}$ y la carga en exceso es 6, 7, 8, 10 y 13,
respectivamente; (e) $1,6017 \times 10^{-19} \text{ C}$.

14.17 951 V

14.19 (a) $-4,5 \times 10^{-8} \text{ N}$ (atract.), $9 \times 10^{-8} \text{ N}$ (hacia la carga de $3 \times 10^{-7} \text{ C}$),
 $-13,5 \times 10^{-8} \text{ N}$ (atract.); (b) $9 \times 10^{-4} \text{ J}$, $-45 \times 10^{-4} \text{ J}$, 0 J;
(c) $-18 \times 10^{-4} \text{ J}$, que es la mitad de la suma resultante en (b) porque allí
se consideró cada par dos veces.

14.21 $8,59 \times 10^{28} \text{ m s}^{-2}$, $4,88 \times 10^{-12} \text{ J}$; (b) $3,82 \times 10^7 \text{ m s}^{-1}$

14.23 $2 \times 10^{-7} \text{ C}$, 3 m

14.25 $2,88 \times 10^8 \text{ V}$

14.27 (a) $-1,8 \times 10^4 \text{ V}$, $-3,6 \times 10^5 \text{ V}$; (b) $4,22 \times 10^5 \text{ V}$, $1,123 \times 10^8 \text{ N C}^{-1}$;
(c) $1,04 \times 10^8 \text{ V}$, $1,125 \times 10^8 \text{ N C}^{-1}$; (d) $-9 \times 10^3 \text{ V}$, $2,38 \times 10^6 \text{ N C}^{-1}$,
formando un ángulo de $19,1^\circ$ hacia abajo respecto a la línea que une las
cargas;

(d) según la línea que une las cargas, en un punto externo a las mismas
y a 0,445 m de la carga menor.

14.29 (b) $2q/4\pi\epsilon_0$; (e) $x = \pm \sqrt{4 - a^2}$; (f) $2q/4\pi\epsilon_0 x(a^2 + x^2)^{3/2}$

14.33 (a) $u_e 50 \text{ N C}^{-1}$; (b) $u_e 10,8 \text{ N C}^{-1}$

14.37 (a) $-4,858 \times 10^{-18} \text{ J}$; (b) $2,179 \times 10^{-18} \text{ J}$; (c) $-2,179 \times 10^{-18} \text{ J}$;
(d) $6,56 \times 10^{18} \text{ Hz}$

14.39 (a) $(e^2/4\pi\epsilon_0)(-8/r + 1/R)$; (b) $(e^2/4\pi\epsilon_0)(-4/r + 1/R + 1/R_0)$, donde r es
la distancia electrón-núcleo, R es la distancia electrón-electrón y R_0 es la
distancia internuclear.

A-18 *Respuestas a los problemas con número impar*

14.41 En forma no relativística:

$$v_e = 5,931 \times 10^5 \sqrt{V} \text{ m s}^{-1} \quad y \quad v_p = 1,384 \times 10^4 \sqrt{V} \text{ m s}^{-1},$$

donde V está en voltios.

14.43 Para el electrón: (a) $4,662 \times 10^4$ V; (b) $2,945 \times 10^5$ V; (c) $7,86 \times 10^5$ V;
para el protón: (a) $8,56 \times 10^7$ V; (b) $5,407 \times 10^8$ V; (c) $1,443 \times 10^9$ V

14.45 0,215c

14.47 (b) $(1/v)\sqrt{(2e/m)} V_0$; (c) neV_0 ; (d) $L_1\sqrt{n[1 + (nv^2L_1^2/2c^2)]^{-1/2}}$

14.49 1,44 MeV

14.51 16,02 MeV, 1,001 MeV/núcleo; 80,09 MeV, 2,002 MeV/núcleo; 250,0 MeV,
2,747 MeV/núcleo; 486,8 MeV, 3,380 MeV/núcleo; 779,0 MeV, 3,895 MeV/núcleo;
973,7 MeV, 4,091 MeV/núcleo

14.53 (a) $11,5 \times 10^{-14}$ m; (b) aprox. 11,5 radios

14.55 (a) $3,52 \times 10^6$ m s⁻¹, $3,52 \times 10^{-3}$ m; (b) 17,9 cm

14.57 (b) $2,52 \times 10^6$ m s⁻¹; (c) $2,29 \times 10^6$ m s⁻¹; $6,0 \times 10^8$ N C⁻¹,
 $1,0 \times 10^3$ N C⁻¹; (e) $1,056 \times 10^{18}$ m s⁻², $1,76 \times 10^{17}$ m s⁻²

14.59 (a) $1,22 \times 10^7$ m s⁻¹, $3,783 \times 10^7$ m s⁻¹; (b) $3,975 \times 10^7$ m s⁻¹, aprox. 18°
con la dirección del campo; (c) $6,10 \times 10^{-1}$ m, $7,695 \times 10^{-1}$ m;
(d) $7,195 \times 10^{-16}$ J ó $4,49 \times 10^8$ eV

14.61 $5,57 \times 10^{-15}$, $1,02 \times 10^{-15}$

14.63 $q\sigma/2m\epsilon_0$; $\sqrt{2az}$; $\sqrt{2z/a}$

14.65 (a) Una parábola; (b) $(v_0 \operatorname{sen} \alpha)^2/2a = z_{\max}$; (c) $2v_0 \cos \alpha \sqrt{2z_{\max}/a}$, donde α
es el ángulo inicial por encima de la horizontal y $a = \sigma/2m\epsilon_0$

14.67 $(-\frac{q^2}{\pi\epsilon_0 a}) \left\{ \ln 2 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{t=1}^{n-1} \left(\frac{1}{\sqrt{8n^2}} + \frac{-1^{n-t}}{\sqrt{n^2 + t^2}} \right) \right\} \approx 0,56(-\frac{q^2}{\pi\epsilon_0 a})$

14.69 $(\sigma/2\epsilon_0)(\sqrt{R^2 + r^2} - r)$; $(a/4\epsilon_0) \ln(R^2/r^2 + 1)$

14.71 (b) $\mathcal{E}_{\perp} = (2/4\pi\epsilon_0 R) \operatorname{sen} \theta$; $\mathcal{E}_{||} = 0$

14.73 $\sigma/2\epsilon_0$; $-\frac{1}{2}(\sigma/\epsilon_0)z$

14.77 Respecto al eje Y: $Q = -3qa^2$, $V = -Q/12\pi\epsilon_0 y^3$, $\mathcal{E} = -Q/3\pi\epsilon_0 y^4$;
respecto al eje Z lo mismo que lo anterior, excepto que todas las cantidades son
positivas e y se reemplaza por z.

14.79 arc sen $(e^2/4\pi\epsilon_0)(1/\alpha E_k)$, donde E_k es la energía cinética del protón

14.83 (b) $4,8 \times 10^{-10}$ stC; (c) $K_e = 1$ dyn cm² stC⁻², $\epsilon_0 = (\frac{1}{4}\pi) \text{ stC}^2 \text{ dyn}^{-1} \text{ cm}^{-2}$;
(d) $\frac{1}{2} \times 10^{-4}$ dyn stC⁻¹ = 1 N C⁻¹

14.85 $K_e = 9 \times 10^{20}$ dyn cm² abcoulomb⁻²; $\epsilon_0 = (\frac{1}{4}\pi) (\frac{1}{8}) \times 10^{-20}$ dyn⁻¹ cm⁻²
abcoulomb⁴; 1 abcoulomb = 3×10^{10} stC

14.87 $V = 9 \times 10^9 q/r$; $\mathcal{E} = 9 \times 10^9 q/r^2$

14.89 Para el hidrógeno: — 13,598 eV, — 3,3995 eV, — 1,511 eV, — 0,8499 eV;
10,2 eV; para el ion de helio: — 54,392 eV, — 13,598 eV, — 6,039 eV,
— 3,3995 eV; 40,794 eV

CAPITULO 15

15.1 $5,68 \times 10^{-6}$ T; 10^7 s⁻¹

15.3 (a) $3,48 \times 10^{-2}$ m; (b) $3,79 \times 10^{-1}$ m; (c) $1,44 \times 10^8$ s⁻¹

15.5 (a) 0,528 m, $43,7 \times 10^{-8}$ s; (b) 1,74 m, $1,43 \times 10^{-8}$ s

15.7 $2,13 \times 10^{-8}$ m

- 15.9** (a) $3,2 \times 10^{-3}$ m; (b) $6,4 \times 10^{-3}$ m
- 15.11** $\mathbf{F}_1 = \mathbf{u}_z q v \mathcal{B}$; $\mathbf{F}_2 = 0$; $\mathbf{F}_3 = \mathbf{u}_z q v \mathcal{B} / \sqrt{2}$; $\mathbf{F}_4 = -\mathbf{u}_z q v \mathcal{B} / \sqrt{2}$; $\mathbf{F}_5 = -\mathbf{u}_z q v \mathcal{B}$; $\mathbf{F}_6 = -\mathbf{u}_z q v \mathcal{B} / \sqrt{3} + \mathbf{u}_z q v \mathcal{B} / \sqrt{3}$
- 15.13** 2×10^{-1} T en la dirección negativa de Y
- 15.15** (a) $1,7 \times 10^7$ m s⁻¹; (c) $4,83 \times 10^{-2}$ m
- 15.17** (a) $1,0206R$; (b) 960 V
- 15.21** $1,24 \times 10^{-3}$ m
- 15.25** Para el deuteron: (a) $2,087 \times 10^{-1}$ T; (b) 4×10^6 m s⁻¹; (c) 0,17 MeV; (d) 9 (8,5)
Para la partícula alfa: (a) $2,074 \times 10^{-1}$ T; (b) 4×10^6 m s⁻¹; (c) 0,33 MeV; (d) 8 (8,2)
- 15.27** (a) 0,209 T; (b) 0,136 MeV, $3,2 \times 10^6$ m s⁻¹
- 15.29** 1,57 m
- 15.33** (a) $d^2\mathbf{r}/dt^2 = (q/m)(\mathcal{E} + \mathbf{v} \times \mathcal{B})$; (c) $x = (v_0 m / q \mathcal{B}) \operatorname{sen}(q \mathcal{B} / m)t$, $y = \frac{1}{2}(q \mathcal{E} / m)t^2$, $z = -(m / q \mathcal{B}) \cos(q \mathcal{B} / m)t$; (e) aceleración rectilínea constante
- 15.39** $3,78 \times 10^8$ A m⁻²
- 15.41** (a) $4,5 \times 10^{-3}$ N m; (b) 4×10^{-2} A m²; (c) $8,07 \times 10^{-2}$ N m
- 15.43** (a) $\mathbf{u}_y (1,32 \times 10^{-2})$ T; (b) el momento dipolar magnético y el campo tienen la misma dirección; en consecuencia el torque es nulo.
- 15.45** 0,3 rad
- 15.47** (a) $-\mathbf{u}_z (10^{-2})$ N; (b) $\mathbf{u}_x (-5 \times 10^{-4}) + \mathbf{u}_y (10^{-3})$ N m
- 15.49** (a) $8,804 \times 10^{10}$ s⁻¹; (b) $1,337 \times 10^8$ s⁻¹
- 15.51** 1
- 15.59** $2,403 \times 10^{-20}$ N
- 15.63** (a) $\mu_0 I / \pi a$; (b) $\mu_0 I / 3\pi a$; (c) 0, $2\mu_0 I / 3\pi a$
- 15.65** (b) $\mathbf{u}_x (\mu_0 I a / \pi r^2)$ donde $r^2 = a^2 + x^2$; (d) $x = 0$. Para los puntos del ej
(b) $\mathbf{u}_y (\mu_0 I a / \pi r^2)$ donde $r^2 = a^2 - y^2$; (d) $y = \pm a$
- 15.67** 15
- 15.69** (a) $(\mu_0 j / \pi) \operatorname{arctg}(w/2d)$; (b) $\frac{1}{2}\mu_0 j$
- 15.71** $1,02 \times 10^{-2}$ m
- 15.73** 46,26 A
- 15.75** $F'_1 = F_1$, $F'_2 = -F'_1$ cuando las cargas están sobre el eje X; cuando las cargas están sobre el eje Y', $F_1 = \sqrt{1 - v^2/c^2} F'_1$
- 15.77** 1; 1,005; 1,15; 2,29
- 15.79** (a) $2,31 \times 10^{-20}$ N repulsión, $2,57 \times 10^{-25}$ N atracción; (b) $2,31 \times 10^{-20}$ N repulsión; (c) $3,85 \times 10^{-20}$ N, $2,46 \times 10^{-20}$ N

CAPITULO 16

16.1 Para el campo eléctrico:

$$q/4\pi\epsilon_0 r^2, (q/4\pi\epsilon_0 r^2) \frac{r^2 - R_2^2}{R_1^2 - R_2^2}, 0;$$

para el potencial eléctrico:

$$q/4\pi\epsilon_0 r, (q/8\pi\epsilon_0 r) \left(\frac{3R_1^2 r - r^2 - 2R_2^2}{R_1^2 - R_2^2} \right), 0$$

A-20 *Respuestas a los problemas con número impar*

- 16.3** (a) $-e/\pi a_0^2$; (b) $-0,424 e$; (c) $(-e/4\pi\epsilon_0 r^3) [1 + e^{-2r/a_0} - 2(1 + r/a_0)^2 e^{-2r/a_0}]$; (d) $x^2 + 4x + 2 = 2 \times 10^{-2} e^x$, de donde $x = r/a_0 = 4,48$
- 16.5** (a) ca^3 , $\epsilon_0 ca^3$, $2\epsilon_0 c x$; (b) 0, 0, 0
- 16.7** (a) $(10/13) \times 10^{-9}$ C y $(3/13) \times 10^{-9}$ C; (b) $4,5 \times 10^{-9}$ J; (c) $3,46 \times 10^{-9}$ J
- 16.9** (c) $4\pi\epsilon_0\mathcal{E}_0 a^3$; (d) $\mathcal{E}_0 \cos \theta (1 + 2a^3/r^3)$; — $\mathcal{E}_0 \sin \theta (1 - a^3/r^3)$; (g) $-(6\mathcal{E}_0\epsilon_0/a) \cos \theta$
- 16.11** (a) 16,5; (b) 15,5
- 16.15** (a) $0,484 \text{ m}^2$; (b) 10^8 V
- 16.17** (a) 380 nF ; (b) $7,6 \times 10^8 \text{ V}$; (c) $1,443 \times 10^{-3} \text{ J}$; (d) $1,37 \times 10^{-3} \text{ J}$
- 16.21** En serie: (a) $\frac{2}{3}\mu F$; (b) $\frac{4}{3} \times 10^{-5} \text{ F}$, $80/9$, $60/9$ y $40/9 \text{ V}$; (c) $\frac{4}{3} \times 10^{-4} \text{ J}$; en paralelo: (a) $6,5 \mu\text{F}$; (b) 3×10^{-5} , 4×10^{-5} , y $6 \times 10^{-6} \text{ F}$, 20 V ; (c) $13 \times 10^{-4} \text{ J}$
- 16.23** (a) $C_1 : 6 \times 10^{-4} \text{ C}$, 200 V ; $C_2 : 2 \times 10^{-4} \text{ C}$, 100 V ; $C_3 : 4 \times 10^{-4} \text{ C}$, 100 V ; (b) $9 \times 10^{-2} \text{ J}$
- 16.27** (a) $-(\epsilon_0 S/x^2) dx$; (b) $\frac{1}{2}(Q^2/\epsilon_0 S) dx$; (c) $\frac{1}{2}(Q^2/\epsilon_0 S)$. Cuando se mantiene constante el potencial: (a) como antes; (b) $\frac{1}{2}(\epsilon_0 S V^2/x) dx$; (c) $\frac{1}{2}(\epsilon_0 S V^2/x)$
- 16.31** $2,06 \times 10^{-14} \text{ s}$
- 16.33** (a) 9Ω ; 3Ω : 48 A, 144 V; 12Ω : 8 A, 96 V; 6Ω : 16 A, 96 V; 4Ω : 24 A, 96 V; 20Ω : 12 A, 240 V; 5Ω : 60 A, 300 V; (b) 10Ω ; 7Ω : 24 A, 168 V; 12Ω : 6 A, 72 V; 3Ω : 4 A, 12 V; 6Ω : 2 A, 12 V; 10Ω : 6 A, 60 V; 18Ω : 4 A, 72 V; 9Ω : 8 A, 72 V; (c) $7,5\Omega$; 4Ω : 9 A, 36 V; 9Ω : 6 A, 54 V; 16Ω : 3 A, 48 V; 3Ω : 2 A, 6 V; 30Ω : 3 A, 90 V; (d) por cada resistor circula una corriente de 10 A, excepto por el resistor central, entre cuyos extremos no hay diferencia de potencial.
- 16.35** (a) 32Ω ; (b) 20 V
- 16.37** 90 W
- 16.41** (a) Se duplica; (b) se reduce a la mitad; (c) se reduce a la cuarta parte
- 16.43** (a) No; (b) $1,48\Omega$; (c) $1,24\Omega$
- 16.47** (a) $2,8286 \text{ V}$; (b) $1,33 \text{ V}$
- 16.49** (a) 1 A; (b) 8 V; (c) $12\Omega : \frac{1}{18} \text{ A}$; $6\Omega : \frac{1}{9} \text{ A}$; $4\Omega : \frac{1}{6} \text{ A}$; $22\Omega : \frac{1}{3} \text{ A}$; $8\Omega : \frac{3}{8} \text{ A}$; $5\Omega : \frac{1}{3} \text{ A}$; $20\Omega : \frac{2}{15} \text{ A}$
- 16.51** (a) $-\frac{2}{3} \text{ V}$; (b) $\frac{13}{38} \text{ A}$
- 16.55** (a) $5 \times 10^{-5} \Omega$; (b) $2,5 \times 10^6 \Omega$
- 16.59** Para $r < R_1$, $(\mu_0/2\pi) (Ir/R_1^2)$; para $R_1 < r < R_2$, $(\mu_0/2\pi) I/r$; para $R_2 < r < R_3$, $(\mu_0 I/2\pi r) (R_3^2 - r^2)/(R_3^2 - R_2^2)$; para $r > R_3$, 0
- 16.67** (a) $-0,24 \text{ Wb}$; (b) 0; (c) $0,24 \text{ Wb}$

CAPITULO 17

- 17.1** (a) $-16\pi \text{ V}$; (b) $+16\pi \text{ V}$; (c) $+32\pi \text{ V}$; (d) $16\pi \text{ V}$; (e) $32\pi \text{ V}$
- 17.5** (a) Circunferencias concéntricas, en el mismo sentido de las agujas del reloj; (b) $5 \times 10^{-3} \text{ N C}^{-1}$, $\pi \times 10^{-3} \text{ V}$; (c) $1,57 \times 10^{-3} \text{ A}$; (d) 0; (e) el concepto de diferencia de potencial sólo es realmente útil en condiciones estacionarias; (f) $3,14 \times 10^{-3} \text{ V}$
- 17.7** (a) 2 V; (b) $2t \text{ V}$; (c) 0, 0; (d) 1 A, $t \text{ A}$
- 17.9** 3 V; el extremo a está a potencial más alto
- 17.13** (a) $7,2 \times 10^{-2} \text{ Wb A}^{-1}$; (b) $2,9 \times 10^{-1} \text{ Wb}$; (c) $4,8 \times 10^{-1} \text{ V}$
- 17.19** $\mu_0 N A/2\pi R$, donde A es el área de la sección transversal de las bobinas y R es el radio del torolde

- 17.23 $\mu_0 I abv / 2\pi(r + vt)(r + a + vt)$
- 17.27 (b) $q = (B/A)(e^{At/R} - 1)$, $I = (B/R)e^{At/R}$, donde $A = (C_2 - C_1)/C_1 C_2$ y $B = q_0/C_2$
- 17.31 (a) $I = C\omega_f V_{\infty} \cos \omega_f t$
- 17.33 (a) 5×10^{-4} A; (b) 5×10^{-2} A; (c) 5 A
- 17.35 (a) 5×10^{-2} A; (b) 5×10^{-3} A; (c) 5×10^{-4} A
- 17.39 (a) $0,38\pi \operatorname{sen} 20\pi t$ V; (b) $0,19\pi \operatorname{sen}(20\pi t - \pi \times 10^{-2})$ A
- 17.41 (a) 98,21 A, $10,9^\circ$; (b) $98,21 \operatorname{sen}(120\pi t - 10,9^\circ)$ V, $35,35\pi \operatorname{sen}(120\pi t - 79,1^\circ)$ V, $(409,2/\pi) \operatorname{sen}(120\pi t - 100,9^\circ)$ V
- 17.43 (a) 0 A; (b) 1 A; (c) 9,804 A; (d) 50 A; (e) 9,804 A; (f) 1 A
- 17.45 Circuito 1: $1/Z = \sqrt{1/R^2 + \omega_f^2/C^2}$, $\operatorname{arctg}(-\omega_f R/C)$; Circuito 2: $1/Z = (1/\omega_f L) - \omega_f/C$, 90° ; Circuito 3: $1/Z = \sqrt{1/R^2 + (1/\omega_f L - \omega_f/C)^2}$, $\operatorname{arctg}(R/\omega_f LC)$; $(C - \omega_f^2 L)$
- 17.47 Impedancia infinita
- 17.53 q/ϵ_0

CAPITULO 18

- 18.3 (a) 10 m; (b) 0,5 m; (c) 100 Hz; (d) 50 m s^{-1}
- 18.9 (a) $8,86 \times 10^{-8}$ m, $1,69 \times 10^{-2}$ m, $2,35 \times 10^{-2}$ m; (b) $8,86 \times 10^{-3}$ m, $2,99 \times 10^{-3}$ m, $-2,99 \times 10^{-3}$ m; (c) $-0,06 \cos(3x - 2t)$, $6 \times 10^{-2} \text{ m s}^{-1}$; (d) $0,667 \text{ m s}^{-1}$
- 18.11 (a) $\xi = 10^{-4} \operatorname{sen} 2\pi(1,98 \times 10^{-3}x - 10t)$; (b) $1,56\pi^2 \times 10^{-2} \text{ J m}^{-2}$; (c) $3,16\pi^3 \times 10^{-6} \text{ W}$; (d) aproximadamente 1 mW
- 18.13 $15,6 \text{ m s}^{-1}$
- 18.15 $3,20 \times 10^3 \text{ m s}^{-1}$
- 18.17 (a) aumenta en $\sqrt{2}$; (b) disminuye en $1/\sqrt{2}$; (c) aumentar cuatro veces; (d) disminuir en $\frac{1}{4}$
- 18.19 99 m s^{-1}
- 18.21 (a) $12,8 \text{ m s}^{-1}$; (b) $0,268 \text{ m s}^{-1}$; (c) $\xi = 10^{-3} \operatorname{sen} 2\pi(\frac{1}{2}x - 4,3t)$; (d) $5,5 \times 10^{-2} \text{ W}$
- 18.23 (a) $1,25 \times 10^{-2}$ m; (b) $6,25 \times 10^{-3}$ m, $4,9 \times 10^2 \text{ N}$; (c) $5,06 \times 10^3 \text{ m s}^{-1}$, $1,60 \times 10^5 \text{ m s}^{-1}$
- 18.27 $0,579 \text{ m s}^{-1} \text{ K}^{-1}$
- 18.29 (a) $\rho = \rho_0[1 + (\rho_0/k) \operatorname{sen} 2\pi(x/\lambda - t/P)]$; $\xi = \rho_0(\lambda/k2\pi) \operatorname{cos} 2\pi(x/\lambda - t/P)$
- 18.31 Para el sonido más débil: $4,49 \times 10^{-13} \text{ W m}^{-2}$, $-3,5 \text{ db}$, $1,43 \times 10^{-11} \text{ m}$; para el sonido más fuerte: $0,881 \text{ W m}^{-2}$, 119 db , $2,00 \times 10^{-6} \text{ m}$
- 18.33 (a) Aumenta en un factor de 4; (b) aumenta en un factor de $\sqrt{10}$
- 18.35 (a) 57,9; (b) $2,98 \times 10^{-2}$
- 18.37 (a) $1,869 \times 10^2 \text{ m s}^{-1}$; (b) $18,75 \text{ m s}^{-1}$; (c) $7,342 \text{ m s}^{-1}$; (d) $7,089 \text{ m s}^{-1}$
- 18.41 $\xi = \xi_0 \{2 \operatorname{cos} \frac{1}{2}[(k - k')x - (\omega - \omega')t] + 1\} \operatorname{sen}(kx - \omega t)$
- 18.43 $3v_g - 2\sqrt{Y/\rho}$; $\sqrt{Y/\rho}$
- 18.47 (a) 529,2 Hz; (b) 470,4 Hz
- 18.49 (a) $1,088 \times 10^3 \text{ Hz}$; (b) $9,117 \times 10^2 \text{ Hz}$
- 18.55 $\sigma = \frac{1}{2}(1 - Y/3k)$
- 18.57 0,2902, $2,54 \times 10^{10} \text{ N m}^{-2}$; $-0,1007$, $1,44 \times 10^{10} \text{ N m}^{-2}$
- 18.59 (a) $v = k/\omega$ (ω es imaginaria); (b) no; (c) no

CAPITULO 19

- 19.1** (a) 3 m, polarizada linealmente en el plano $X Y$, se propaga en la dirección $+X$;
 (b) $\mathcal{B}_x = \mathcal{B}_y = 0$, $\mathcal{B}_z = \frac{1}{2} \times 10^{-8} \cos [2\pi \times 10^8(t - x/c)]$;
 (c) $3,316 \times 10^{-4} \text{ W m}^{-2}$
- 19.3** (a) $\mathcal{E}_x = 0$, $\mathcal{E}_y = \mathcal{E}_z = \mathcal{E}_0 \sin(kx - \omega t)$, $\mathcal{B}_x = 0$, $\mathcal{B}_y = -\mathcal{E}_z/c$, $\mathcal{B}_z = \mathcal{E}_z/c$;
 (b) $\mathcal{E}_z = 0$, $\mathcal{E}_y = -\frac{1}{2}\mathcal{E}_0 \sin(kx - \omega t)$, $\mathcal{E}_x = \sqrt{3}/2\mathcal{E}_0 \sin(kx - \omega t)$, $\mathcal{B}_y = 0$,
 $\mathcal{B}_x = -\mathcal{E}_z/c$, $\mathcal{B}_z = \mathcal{E}_y/c$; (c) $\mathcal{E}_x = 0$, $\mathcal{E}_y = \mathcal{E}_0 \cos(kx - \omega t)$, $\mathcal{E}_z = \mathcal{E}_0 \sin(kx - \omega t)$, $\mathcal{B}_x = 0$, $\mathcal{B}_y = -\mathcal{E}_z/c$, $\mathcal{B}_z = \mathcal{E}_y/c$; (d) $\mathcal{E}_x = 0$, $\mathcal{E}_y = \mathcal{E}_0 \cos(kx - \omega t)$, $\mathcal{E}_z = \frac{1}{2}\mathcal{E}_0 \sin(kx - \omega t)$, $\mathcal{B}_x = 0$, $\mathcal{B}_y = -\mathcal{E}_z/c$, $\mathcal{B}_z = \mathcal{E}_y/c$
- 19.5** (a) Polarización circular derecha; (b) polarización lineal formando un ángulo de 315° con el plano $X Y$; (c) polarización elíptica, formando el eje mayor un ángulo de 315° con el plano $X Y$; (d) polarización elíptica izquierda, formando el eje mayor un ángulo de 45° con el plano $X Y$; en cada caso $\mathcal{B}_y = -\mathcal{E}_z/c$ y $\mathcal{B}_z = \mathcal{E}_y/c$.
- 19.7** $\mathcal{E}_y = \sqrt{24\pi} \cos[4\pi \times 10^6(x - ct)] \text{ N C}^{-1}$; $\mathcal{B}_z = (\mathcal{E}_y/c) \text{ T}$
- 19.9** $1,15 \times 10^4 \text{ N C}^{-1}$, $3,84 \times 10^{-6} \text{ T}$
- 19.11** $\frac{1}{2} \times 10^{-7} \text{ T}$, 133 W
- 19.13** (a) $\frac{1}{2} \times 10^{-9} \text{ T}$; (b) $1,33 \times 10^{-6} \text{ W m}^{-2}$; (c) $4,42 \times 10^{-15} \text{ J m}^{-2}$; (d) 167 W
- 19.21** (a) 796 W m^{-2} ; (b) $7,75 \times 10^2 \text{ N C}^{-1}$, $2,58 \times 10^{-6} \text{ T}$; (c) $2,652 \times 10^{-6} \text{ J m}^{-2}$, $8,84 \times 10^{-15} \text{ m}^{-2} \text{ kg s}^{-1}$
- 19.23** (a) $2,02 \times 10^{-12} \text{ W}$; (b) $4,95 \times 10^{11} \text{ moléculas}$ (alrededor de $8 \times 10^{-11} \%$ de un mol)
- 19.27** (a) $4,01 \times 10^{11} \text{ eV s}^{-1}$, $0,563 \text{ eV}$ por revolución (clásicamente la órbita del electrón duraría entonces sólo $10^{11}s$ más o menos); (b) $1,10 \times 10^{-2} \text{ eV s}^{-1}$, $5,22 \times 10^{-10} \text{ eV rev}^{-1}$; (c) $3,26 \times 10^{-9} \text{ eV s}^{-1}$, $6,63 \times 10^{-15} \text{ eV rev}^{-1}$
- 19.31** $2,11 \times 10^{16} \text{ s}^{-1}$; $3,80 \times 10^{25}$, que se compara con aproximadamente 10^{25} por m^3
- 19.33** $1,82 \times 10^{16} \text{ s}^{-1}$; $n = 1 + 6,05 \times 10^{28}/(3,29 \times 10^{32} - \omega^2)$; $1,00019$, $1,000018$
- 19.35** (a) $1,24 \times 10^{-9} \text{ m}$; (b) $1,24 \times 10^{-6} \text{ m}$; (c) $1,24 \times 10^{-4} \text{ m}$
- 19.37** (a) 274 MeV ; (b) 40 MeV
- 19.39** Para el electrón: $5,402 \times 10^{-23} \text{ kg m s}^{-1}$, 10^4 eV ; para el protón: $4,868 \times 10^{-23} \text{ kg m s}^{-1}$ (en dirección opuesta), $2,8 \text{ eV}$
- 19.41** (a) $4,555 \times 10^{14} \text{ Hz}$; (b) $1,88 \text{ eV}$; (c) $4,1274 \times 10^{-15} \text{ J s C}^{-1}$
- 19.43** (a) $1,704 \times 10^{10} \text{ electrones m}^{-2} \text{ s}^{-1}$; (b) $3,0 \times 10^{-9} \text{ W m}^{-2}$
- 19.45** (a) $98,81 \text{ eV}$, $2,39 \times 10^{16} \text{ Hz}$, $1,21 \times 10^{-12} \text{ m}$; (b) $98,81 \text{ eV}$, $5,37 \times 10^{-24} \text{ kg m s}^{-1}$, $60,5^\circ$
- 19.47** (a) $1,012 \times 10^{-10} \text{ m}$, 59° ; (b) $143,2 \text{ eV}$

CAPITULO 20

- 20.3** Del cobre al acero: $1,0327$ y $0,3269$; $\xi_t = 2 \sin 20\pi(t - x/42,31) \text{ cm}$, $\xi_r = -2,0654 \sin 20\pi(t - x/45,17) \text{ cm}$, $\xi'_r = 0,6538 \sin 20\pi(t - x/42,31) \text{ cm}$. Del acero al cobre: $0,9673$ y $-0,3269$, $\xi_t = 2 \sin 20\pi(t - x/45,17) \text{ cm}$, $\xi_r = -1,9346 \sin 20\pi(t - x/42,31) \text{ cm}$, $\xi'_r = -0,6538 \sin 20\pi(t - x/45,17) \text{ cm}$
- 20.5** (a) $-0,0791$ y $0,7194$; (b) $-0,3033$ y $0,6966$
- 20.7** (a) $R_\pi = R_\sigma = -0,2$, $T_\pi = T_\sigma = 0,2$; (b) $R_\pi = R_\sigma = 0,2$, $T_\pi = T_\sigma = 0,3$; (c) el único cambio de fase ocurre en la reflexión en el aire sobre el vidrio
- 20.9** $56,4^\circ$, $33,6^\circ$
- 20.11** (a) $36,9^\circ$; (b) perpendicular al plano de incidencia
- 20.15** Primer caso: $R_\pi = -0,1289$, $R_\sigma = 0$; $T_\pi = 0,8468$, $T_\sigma = 0$; segundo caso: $R_\pi = 0$, $R_\sigma = -0,1567$; $T_\pi = 0$, $T_\sigma = 0,8433$; tercer caso: $R_\pi = 0,3311$,

$$\mathbf{R}_\sigma = 0; \quad \mathbf{T}_\pi = 0,4980, \quad \mathbf{T}_\sigma = 0; \quad \text{cuarto caso:} \quad \mathbf{R}_k = 0, \mathbf{R}\sigma = -0,5604; \\ \mathbf{T}_\pi = 0, \mathbf{T}_\sigma = 0,4395$$

- 20.17 Para el haz reflejado, $\mathbf{R}_\pi = -0,1033$, $\mathbf{R}_\sigma = -0,3046$; el haz está polarizado elípticamente, siendo el sentido de rotación opuesto al del haz incidente; para el haz refractado, $\mathbf{T}_\pi = 0,7259$, $\mathbf{T}_\sigma = 0,7050$; el haz está polarizado elípticamente en el mismo sentido que el haz incidente.
- 20.21 $3,82 \times 10^{-7}$ m, $3,80 \times 10^{-7}$ m, $5,085 \times 10^{14}$ Hz
- 20.23 (a) $8,726 \times 10^{-7}$ m; (b) $1,7452 \times 10^{-6}$ m; (c) $3,490 \times 10^{-6}$ m
- 20.27 En (2) la luz está polarizada linealmente en la dirección del eje de trasmisión de A ; en (3) la luz está en general polarizada elípticamente, como se discutió en el ejemplo 20.4; en (4) la luz está polarizada linealmente en la dirección del eje de trasmisión de C
- 20.29 (a) A 45° en sentido contrario al de las agujas del reloj respecto al eje Y; (b) a 45° en el sentido de las agujas del reloj respecto al eje Y; (c) 5,828: 1
- 20.31 (a) Sí; (b) brillante; (c) oscuro
- 20.33 1,194 g
- 20.35 (a) $\Delta\theta = 2,4 \times 10^{-4}(pT/p_0 T_0) \operatorname{tg} \theta$, donde p_0 y T_0 son la presión y la temperatura normales; (b) 1 minuto de arco
- 20.37 $n(y) = n_0 \sqrt{[B^2 + A^2 \cos^2(y/B)]/(B^2 + A^2)}$

CAPITULO 21

- 21.3 (a) 0,778 m, —0,556; (b) 1 m, —1,0; (c) 1,33 m, —1,67; (d) ∞ , ∞ ; para un objeto virtual, 0,270 m, —0,901
- 21.5 (a) 0,48 m, convergente; (b) 1,92 m, convergente; (c) 1,2 m, divergente; (d) 0,80 m, convergente; (e) 2,4 m, convergente; (f) 0,3 m, convergente; (g) 0,60 m, divergente
- 21.7 8 cm, 2,1
- 21.9 40 cm ó 37,5 cm
- 21.11 3,2 cm, comparada con la distancia focal de 5 cm
- 21.19 Desde el lado en que está más cerca: 0,4 cm de la superficie, 0,8; desde el lado en que está más lejos: 2 cm de la superficie, 1,33
- 21.21 (a) 43,8 cm, a la izquierda de la cara plana; (b) 1,71
- 21.23 (a) 20 cm; (b) virtual y erecto; (c) 1 mm
- 21.25 20 cm dentro de la lente medidos desde la superficie de 20 cm de radio; 5 cm fuera de la lente medidos desde la superficie de 10 cm de radio
- 21.27 2R
- 21.35 (a) 0,24 m; (b) —1,2 m, 6; (b) 0,15 m, 0,375; (d) 0,109 m, 0,545
- 21.37 5,38 cm
- 21.39 (a) 1,07 m, real; (b) 0,67 m, real; (c) 0,8 m, real; (d) 0,27 m, virtual; (e) —0,1 m, real
- 21.41 (a) 0,48 m, convergente; (b) 1,92 m, convergente; (c) 1,2 m, divergente; (d) 0,8 m, convergente; (e) 2,4 m, convergente; (f) 0,3 m, convergente; (g) 0,6 m, divergente
- 21.43 —18 cm, —60 cm; (a) 10 cm; (b) 11,7 cm
- 21.47 4,84 cm; 5,16 cm; —4,84 cm; —5,16 cm
- 21.51 1,521, 40°
- 21.55 54° ; el rayo experimenta reflexión total; $63,2^\circ$, el rayo se desvía $24,4^\circ$
- 21.57 $1,19 \times 10^{-9}$ rad ó $41'$
- 21.59 $F_1 = 4,17$ cm; $F_2 = -1,67$ cm
- 21.61 21,1°

CAPITULO 22

- 22.1** (a) 0,64 mm; (b) 1,62 mm, 3,25 mm
22.3 0,286 mm
22.5 9×10^{-5} m = 0,09 mm
22.7 (a) Comenzando en el punto medio entre las fuentes, los primeros mínimos están a 0,25 m a cada lado, luego cada 0,5 m; (b) a lo largo de las hipérbolas: $r_1 - r_2 = \pm \frac{1}{4}n$ m; (c) también hipérbolas de la misma ecuación; (d) no
22.9 $1,122 \times 10^{-7}$ rad = 0,024 segundos de arco
22.11 Aproximadamente 4 segundos de arco
22.13 — 12 db
22.19 $2,95 \times 10^{-4}$ rad
22.21 (a) 5,6; (b) $0,2\pi$; para la luz que incide a 30° : (a) 6,0; (b) π
22.23 Para la luz reflejada: (a) $20,3^\circ$; (b) $37,7^\circ$; para la luz trasmisida: (a) $37,7^\circ$; (b) $20,3^\circ$
22.27 (a) $2,19\sqrt{N} \times 10^{-8}$ m; (b) 182
22.29 (a) 299,2 Hz, 598,4 Hz, 899,6 Hz; (b) 2 m, 1 m, 0,67 m;
(d) $\xi_1 = 2\xi_0 \operatorname{sen} \pi x \cos 600\pi t$, $\xi_2 = 2\xi_0 \operatorname{sen} 2\pi x \cos 1200\pi t$,
 $\xi_3 = 2\xi_0 \operatorname{sen} 3\pi x \cos 1800\pi t$.
22.31 (a) 289,6 Hz, 579,2 Hz; (b) 145,8 Hz, 437,4 Hz
22.33 24,43 Hz
22.37 Para el fundamental: 1, 0 y 0, 1; doblemente degenerado; para el primer armónico: 1, 1; para el segundo armónico: 2, 0 y 0, 2; doblemente degenerado; para el tercero: 2, 1 y 1, 2; para el cuarto, 2, 2; para el quinto: 3, 0 y 0, 3; para el sexto: 3, 1 y 1, 3; para el séptimo: 3, 2 y 2, 3. Obsérvese que el duodécimo armónico, $v = 5v_0$, tiene degeneración cuádruple proveniente de las combinaciones 4, 3 y 3, 4 como así también 5, 0 y 0, 5.
22.41 $k^2 = k_1^2 + k_2^2$

CAPITULO 23

- 23.1** 0,56 mm
23.3 $6,0 \times 10^2$ m
23.7 (b) 0,48 mm \times 0,24 mm
23.9 (a) $2,05 \times 10^{-6}$ m; (b) $7,03 \times 10^{-6}$ m
23.11 $1,25 \times 10^{-5}$ m, 5×10^{-6} m
23.13 $2,4 \times 10^{-5}$ m
23.15 (b) $1,22\lambda/D$, $2,233\lambda/D$, $3,239\lambda/D$; (c) $(1,22\lambda/D)f$, $(2,233\lambda/D)f$, $(3,239\lambda/D)f$
23.17 $2,24 \times 10^{-4}$ m
23.19 (a) 1,5 por la amplitud sin pantalla y 2,25 por la intensidad sin pantalla; (b) $\frac{1}{4}\pi$
23.21 (a) $(800/n)$ m; (b) 400 m
23.23 $17,5^\circ$, $36,9^\circ$, $64,2^\circ$
23.25 (a) $5,70 \times 10^{-7}$ m; (b) $43,1^\circ$
23.27 $12,0^\circ$, $28,5^\circ$
23.29 16,000; sí; aproximadamente 7° ; $4,11 \times 10^5$ m $^{-1}$
23.31 (a) $9,791 \times 10^{-11}$ m; (b) 20,3°
23.35 1,3°

CAPITULO 24

- 24.1 Agregar el término $(\partial D/\partial n)(\partial n/\partial x)^2$ en el segundo miembro de la ecuación (24.4)
- 24.3 (a) — 12,5 °C; (b) $9,6 \times 10^2 \text{ J m}^{-2} \text{ s}^{-1}$
- 24.5 $4,38 \times 10^3 \text{ J s}^{-1}$ (4,38 kW) ó $15,8 \times 10^6 \text{ J hr}^{-1}$
- 24.7 (a) $1,5\pi \text{ J s}^{-1}$ ó $1,125 \text{ cal s}^{-1}$; (b) 96 % en el cobre, 4 % en el acero
- 24.19 $2,45 \times 10^{-5} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$
- 24.23 $a = -8,520$; $b = 815$
- 24.25 (a) $6,00 \times 10^9$; (b) $4,65 \times 10^8$; (c) $6,00 \times 10^5$; $1,46 \times 10^{29}$, $6,80 \times 10^{29}$, $1,46 \times 10^{21}$
- 24.27 60,6 %, 36,8 %, 13,5 %, $4,5 \times 10^{-3}$ %; $x = l \ln 2$
- 24.29 $D \propto T/p$; $K \propto \sqrt{T}$
- 24.31 $1,76 \times 10^{-6} \text{ P K}^{-1/2}$
- 24.33 $K/D = \frac{4}{3}p/T = 555$ a temperatura y presión normales;
 $\eta/D = pm/kT = 4,45 \times 10^{-2}m$ a temperatura y presión normales (m en una)
- 24.35 $6,25 \times 10^{-8} \text{ m}$, $9,321 \times 10^9 \text{ s}^{-1}$; $1,83 \times 10^{-10} \text{ m}$
- 24.37 0,654 mm