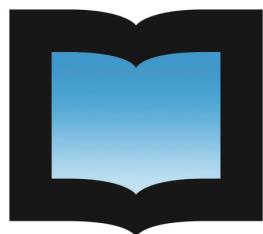
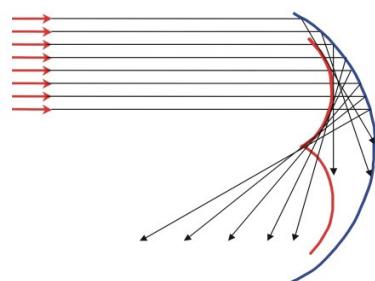
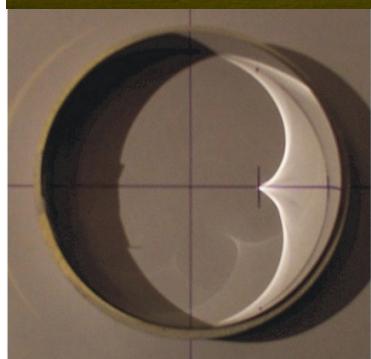


# Experimentos de Física *de bajo costo, usando TIC's*

*S. Gil*



$$\frac{1}{\sqrt{2}}|\!\!\uparrow\!\! \rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|\!\!\downarrow\!\! \rangle$$



**UNSAM**  
UNIVERSIDAD  
NACIONAL DE  
SAN MARTÍN

# *Experimentos de física, De bajo costo usando TIC's*

**Salvador Gil**  
**UNSAM-Buenos Aires - Marzo2016**  
[sgil@unsam.edu.ar](mailto:sgil@unsam.edu.ar)

**Prefacio:** Objetivo del libro. Como usar este libro. A nuestros colegas. Encuadre filosófico, Enfoque pedagógico adoptado en este trabajo, Agradecimientos.

## **Parte I**

### **Módulo I    Introducción a las ciencias experimentales**

- Capítulo 1.** Marco de referencia: Rol del laboratorio en el aprendizaje de las ciencias.  
¿Por qué hacemos experimentos? Redacción de informes de laboratorio. Seguridad en el laboratorio.

### **Módulo II    Análisis de datos y metrología**

- Capítulo 2.** Análisis gráfico de resultados
- 2.1 Importancia de la representación gráfica
  - 2.2 Elección de las variables
  - 2.3 Relación lineal
  - 2.4 Relación potencial
  - 2.5 Relación exponencial
  - 2.6 Transformación de variables – seudovariables
  - 2.7** Sugerencias para generar gráficos
  - 2.8** Ejercicios y problemas

**Capítulo 3. Descubriendo leyes experimentales – Actividades**

- Proyecto. 1 Relación masa – longitud de hojas de una planta.
- Proyecto. 2 Experimentos con plantas reales
- ✓ Relación tamaño de una hoja y su masa.
- ✓ Relación tamaño de una fruta y su masa.
- ✓ Relación tamaño de una especie de mamífero y su longitud
- Proyecto. 3 Buscando leyes de conservación en la naturaleza.
- Proyecto. 4 Importancia del tamaño en Biología
- Proyecto. 5 Frecuencia de aparición de palabras en los idiomas. Ley de Zipf
- Proyecto. 6 ¿Por qué la primera página de una tabla o manual de la biblioteca es en general la más ajada? Ley de Benford

**Capítulo 4.      Introducción a la teoría de errores Conceptos básicos de metrología – Incertidumbres de medición**

- 4.1 Introducción
- 4.2 Sensibilidad, precisión, y exactitud
- 4.3 Fuente de errores: apreciación, exactitud, interacción, definición.
- 4.4 Clasificación de los errores: sistemáticos, estadísticos, espurios

4.5	Cifras significativas
4.6	Determinación de los errores de medición- Resumen
4.7	Nonio, vernier o calibre
✓	Ejercicios y problemas
<b>Capítulo 5.</b>	<b>Tratamiento estadístico de datos, Histogramas y estadística</b>
5.1	Introducción
5.2	Histogramas y distribución estadística
5.3	Parámetros de localización de una distribución
5.4	Parámetros estadísticos de dispersión- desviación estándar
5.5	Distribución Normal o Gaussiana
5.6	Magnitud que se mide N veces
5.7	Número óptimo de mediciones
5.8	Decálogo práctico
5.9	Combinación de mediciones independientes
5.10	Discrepancia
5.11	Resumen de conceptos importantes
✓	Ejercicios y problemas
Proyecto. 7	<b>Construcción de Histogramas y estudio de distribuciones empíricas.</b>
Proyecto. 8	<b>Histograma obtenido artesanalmente</b>
<b>Capítulo 6.</b>	<b>♣ Mediciones indirectas, Propagación de errores</b>
✓	Introducción - Propagación de incertidumbres
✓	Truncamiento de números
✓	Elección de los instrumentos
✓	Propagación de incertidumbres con variable correlacionadas
✓	Resumen de conceptos importantes
✓	Ejercicios y problemas
<b>Capítulo 7.</b>	<b>♣♣ Cuadrados mínimos y regresión lineal</b>
✓	Método de cuadrados mínimos. Regresión lineal
✓	Correlación y causalidad
✓	Incerteza en los parámetros de ajuste
✓	La navaja de Occam o criterio de parsimonia
✓	Resumen de conceptos importantes
✓	Ejercicios y problemas
<b>Módulo III</b>	<b>Experimentos Introductorios</b>
<b>Capítulo 8.</b>	<b>Medición de densidades.</b>
Proyecto. 9	El principio de Arquímedes I- Falsando una hipótesis
Proyecto. 10	Método de Arquímedes para determinar densidades I
Viaje al interior de la Tierra.	
Proyecto. 11	Estudio de la densidad y composición interna de la Tierra
<b>Capítulo 9.</b>	<b>Experimentos introductorios de mecánica: Péndulo simple y caída de los cuerpos- Fotointerruptores</b>
✓	Fotointerruptores
Proyecto. 12	Descubriendo las leyes del péndulo- Dependencia del período en función de la longitud del péndulo
✓	Experimiento de caída libre: Movimiento uniformemente acelerado y determinación de $g$

Proyecto. 13	Estudio del movimiento en caída libre
Proyecto. 14	Determinación de $g$
Proyecto. 15	Conservación de la energía
<b>Anexo B.</b>	Ecuación de movimiento del péndulo simple
<b>Capítulo 10.</b>	<b>La cámara digital como instrumento de medición en el laboratorio</b>
✓	Formas geométricas formadas por la sombra de una lámpara
Proyecto. 16	Estudio de la sombra de una lámpara
Proyecto. 17	Trayectoria de un chorro de agua
Proyecto. 18	♣Uso de video para estudiar la cinemática de un cuerpo - fuerza de roce viscoso en el aire
Proyecto. 19	♣Estudio de la cinemática del tiro oblicuo
(i)	Caso de roce despreciable
(ii)	Caso de roce apreciable – Integración numérica de las ecuaciones de movimiento
<b>Anexo B.</b>	Régimen laminar y turbulento
<b>Anexo C.</b>	Movimiento de caída en un medio fluido con roce proporcional a $v^2$

### **Capítulo 11. La tarjeta de sonido de una PC como instrumento de medición**

✓	Tarjeta de sonido de las computadoras personales
Proyecto. 20	Determinación de la aceleración de la gravedad usando señales de audio
✓	Ondas sonoras
Proyecto. 21	Determinación de velocidad de sonido

### **Capítulo 12. Midiendo el Sistema Solar desde el aula**

Proyecto. 22	Determinación del tamaño de la Luna y su distancia a la Tierra - Aristarco
Proyecto. 23	Estimación del radio terrestre
Proyecto. 24	Determinación del tamaño de la Luna y su distancia a la Tierra – Hiparco
Proyecto. 25	Distancia Tierra-Sol
Proyecto. 26	Distancia Venus-Sol y Mercurio-Sol
Proyecto. 27	Distancia a otros planetas
Proyecto. 28	Aplicaciones a la Astronomía y a la Astrofísica. Leyes de Kepler y Ley de Hubble
Proyecto. 29	Expansión de Universo y Big Bang. ¿Cómo sabemos esto? ¿Cuando ocurrió?
<b>Anexo A.</b>	Trayectoria de un rayo de luz en la atmósfera.
<b>Anexo B.</b>	Períodos de la Luna

## **Parte II**

### **Módulo IV**

<b>Capítulo 13.</b>	Experimentos de Mecánica
	Ley de Hooke
Proyecto. 30	Determinación de la constante de un resorte
Proyecto. 31	Propiedades elásticas de una banda elástica
Proyecto. 32	Sistemas de resorte en serie y paralelo
Proyecto. 33	Sistema elástico no lineal

### **Capítulo 14. Leyes de Newton y fuerza de rozamiento**

Proyecto. 34	Determinación del coeficiente de roce estático, $\mu_e$
Proyecto. 35	Determinación del coeficiente de roce cinético $\mu_d$
<b>Anexo A.</b>	Estudio del movimiento del sistema de dos cuerpos con roce seco
<b>Capítulo 15.</b>	<b>Oscilaciones libres y amortiguadas</b>
✓	Oscilaciones libres y amortiguadas
Proyecto. 36	Estudio del sistema oscilante - Oscilaciones libres
Proyecto. 37	Oscilaciones amortiguadas – roce viscoso
Proyecto. 38	♣ Oscilaciones amortiguadas – roce turbulento
<b>Anexo B.</b>	Oscilador armónico con fuerza de roce turbulento

## **Capítulo 16. Péndulos Físicos**

✓	Período para amplitudes de oscilación pequeñas
Proyecto. 39	Estudio de un anillo oscilante
Proyecto. 40	Péndulo “No-Intuitivo”
✓	Péndulo reversible de Kater
Proyecto. 41	Realización estándar de péndulo de Kater. Medición de $g$
Proyecto. 42	Péndulo de Kater “casero”

## **Capítulo 17. Péndulo cicloidal – Braquistócrona y tautócrona**

✓	Involutas e involutas
✓	Arreglo experimental
Proyecto. 43	Péndulo simple – Variación del período con la amplitud
Proyecto. 44	Péndulo cicloidal
Proyecto. 45	Péndulo cicloidal perturbado- oscilaciones anarmónicas
Proyecto. 46	Péndulo con evoluta semicúbica- Paradoja de la carrera

## **Capítulo 18. Oscilaciones forzadas – Resonancia en sistemas mecánicos**

Proyecto. 47	Oscilaciones forzadas
--------------	-----------------------

## **Capítulo 19. Paráolas y Catenarias**

Proyecto. 48	Cadena simple sujetada por sus extremos
Proyecto. 49	Cadena con cargas

## **Capítulo 20. Propiedades elásticas de los materiales. Módulo de rigidez. Flexión de barras.**

Proyecto. 50	Medición del módulo de Young de alambres de cobre, acero, etc. por método de carga y descarga.
✓	♣ Flexión de barras - Teoría de Euler-Bernoulli
✓	♣ Barra empotrada con un extremo libre
✓	♣ Vibraciones de una barra
Proyecto. 51	Medición del módulo de Young de barras por método estático- Deflexión de barras. Medición cargas y flecha.
Proyecto. 52	Deflexión de barras. Determinación de la forma mediante fotografías digitales cargas y flecha
Proyecto. 53	Deflexión de una barra delgada. Determinación de la forma mediante fotografías digitales
Proyecto. 54	♣ Medición del módulo de Young de barras por método dinámico.
Proyecto. 55	♣♣ Medición del módulo de Young a partir del sonido emitido por la muestra al ser golpeada.

## **Capítulo 21. Dinámica de una cadena en movimiento**

22.1 Cadena colgante del borde de una mesa o a través de un tubo

Proyecto. 56 Cadena colgante del borde de una mesa o a través de un tubo

22.2 Cadena en caída vertical – Estudio del movimiento de un saltador Bungee

Proyecto. 57 Cadena colgante en caída vertical- Saltador Bungee

## **Capítulo 22. Sistemas mecánicos de masa variable-Materiales granulares**

✓ Flujo de materiales granulares

Proyecto. 58 Estudio experimental de los flujos agua y arena

Proyecto. 59 Influencia de la forma del recipiente en los flujos arena Estudio del flujo granular.

Proyecto. 60 Dependencia del flujo de arena con el área del orificio de salida.

Proyecto. 61 Determinación del momento de inercia de una polea.

Proyecto. 62 Máquina de Atwood con masa constante

Proyecto. 63 ♣♣ Máquina de Atwood de masa variable.

✓ Divertimento: Experimento de la taza y la llave

Proyecto. 64 ♣♣ Oscilador armónico de masa variable

Anexo B. Máquina de Atwood con masas constantes

Anexo C. Máquina de Atwood con masa variable

Anexo D. Oscilador de masa variable

## **Capítulo 23. Estudio de una barra en rotación- Estabilidad de las rotaciones**

✓ Consideraciones sobre sistemas rotantes-no inerciales

Proyecto. 65 Estudio de una barra en rotación

Anexo B. Descripción teórica de una barra en rotación

# **Parte III**

## **Módulo V Experimentos de Electricidad y Magnetismo**

### **Capítulo 24. Circuitos simples de corrientes – Ley de Ohm**

✓ Dependencia de la corriente con la tensión- Ley de Ohm

✓ Construcción de un divisor de tensión

Proyecto. 66 Determinación de las características voltaje-corriente de un conductor metálico. Ley de Ohm

Proyecto. 67 Resistencias en serie y en paralelo. Uso de un óhmmetro

✓ Curva V-I usando un sistema de adquisición conectado a una PC.

Proyecto. 68 Determinación de las características voltaje-corriente una resistencia y un diodo.

✓ Entradas en modo común y diferenciales

Proyecto. 69 ¿Las lámparas incandescentes, obedecen la ley de Ohm?

Proyecto. 70 Determinación de las características voltaje-corriente una lámpara usando un sistema de adquisición de datos.

✓ Modelo de una Fuente – Teorema de Thévenin y Norton

Proyecto. 71 Modelo de una fuente

**Anexo B.** ♣ Resistencia interna de Voltímetros y Amperímetros Resistencia interna de los amperímetros.

- ✓ ♣ Error sistemático introducido por los voltímetros.
- ✓ ♣ Error sistemático introducido por los amperímetros.
- ✓ ♣ Determinación de la resistencia interna de amperímetros y voltímetros:

**Capítulo 25. Redes de resistencias**

- Proyecto. 72 Redes de resistencias en 1D – Relación de Fibonacci
- Proyecto. 73 Resistencias de grafito o realizada con una impresora de chorro de tinta
- ✓ Redes de resistencias en 2D-Modelo

Proyecto. 74 Redes de resistencias 2D

**Capítulo 26. Puente de Wheatstone y puente de hilo**

- ✓ Introducción
- Proyecto. 75 Estudio experimental del puente
- ✓ Puente de hilo
- ✓ Precisión del puente de hilo
- ✓ Incertidumbres en las mediciones con puente de hilo:
- Proyecto. 76 Determinación del valor de una resistencia incógnita usando un puente de hilo

**Capítulo 27. Método de las cuatro puntas o método de Kelvin para medir resistencias y resistividad**

- ✓ Determinación de resistencias de bajo valor
- ✓ Método de las cuatro puntas o método de Kelvin
- ✓ Medición de la resistividad de una muestra geometría simple-caso 1D.
- Proyecto. 77 Medición de la resistividad de un alambre por el método de las cuatro puntas
- ✓ Determinación de la resistividad de una muestra bidimensional
- Proyecto. 78 Determinación de la resistividad de una muestra plana
- ✓ Método de van der Pauw- transresistencias – Muestra plana
- Proyecto. 79 Determinación de la resistividad de una muestra plana pequeña
- ✓ Muestra tridimensional grande, método de Wenner

**Capítulo 28. Variación de la resistencia con la temperatura**

- ✓ Modelo simples de conducción en sólidos
- Proyecto. 80 Variación de la resistencia con la temperatura de un alambre metálico por el método de las cuatro puntas
- Proyecto. 81 Variación de la resistencia con la temperatura de una aleación metálica
- Proyecto. 82 Variación de la resistencia con la temperatura de un termistor

**Anexo B.**      Modelo simple de conducción en semiconductores

**Capítulo 29. Conducción en líquidos – Estimación de la carga del electrón**

- ✓ Modelo simples de conducción en líquidos-Electrólisis
- Proyecto. 83 Conductividad de un líquido - estudio semicuantitativo
- Proyecto. 84 Conductividad de un líquido – Relación Voltaje-Corriente
- Proyecto. 85 Conductividad de un líquido – Efecto de la temperatura
- Proyecto. 86 Estimación de la carga del electrón

**Capítulo 30. Condensadores y dieléctricos**

- Proyecto. 87 Condensadores en serie y paralelo, instrumental y mediciones básicas
- Proyecto. 88 Condensador de placas planas paralelas. Variación de la capacidad con la geometría
- Proyecto. 89 Variación de la capacidad con el medio dieléctrico

## **Capítulo 31. Círcito RC**

### **Círcito RC**

✓ Proyecto. 90 Carga y descarga de un condensador usando un sistema de adquisición de datos conectado a una PC

✓ Proyecto. 91 Determinación de la resistencia interna de un voltímetro o sistema de adquisición de datos

✓ Proyecto. 92 Círcito RC Respuesta estacionaria. Señal cuadrada

✓ Círcito RC excitado- repuesta forzada

✓ Proyecto. 93 Círcito RC Respuesta estacionaria. Señal de excitación sinusoidal  
**Anexo B.** Determinación de la diferencia de fases entre dos señales

## **Capítulo 32. Fuerza de Lorentz , ley de Ampère**

✓ Fuerza entre dos espiras circulares

✓ Proyecto. 94 Estudio de la fuerza magnética entre dos espiras circulares

## **Capítulo 33. Ley de Ampère – Ley de Biot-Savart – Mediciones de campo magnético**

✓ Introducción

✓ Proyecto. 95 Campo magnético terrestre (usando una Brújula)

✓ Proyecto. 96 La brújula como magnetómetro. Campo magnético axial de una espira sensor de efecto Hall

✓ Proyecto. 97 Medición de campos magnéticos usando un sensor de efecto Hall

✓ Proyecto. 98 Campo magnético de un imán permanente

✓ Proyecto. 99 Estudio del campo magnético de un par de Helmholtz

## **Capítulo 34. Ley de inducción de Faraday – Inducción mutua**

✓ Proyecto. 100 Ley de Faraday I - Análisis cualitativo

✓ Proyecto. 101 Ley de Faraday II - Análisis cuantitativo

✓ Proyecto. 102 Ley de Faraday III - Variación de número de espiras

✓ Proyecto. 103 Campo magnético de una espira a lo largo de su eje, usando la ley de Faraday

✓ Proyecto. 104 Campo magnético de una espira a lo largo de su eje usando un lock-in amplifier

✓ Proyecto. 105 Ley de Faraday – Paradoja electromagnética o ¿Qué miden los voltímetros?

## **Capítulo 35. Autoinducción y circuito RL**

✓ Autoinducción

✓ Proyecto. 106 Característica voltaje-corriente de una autoinductancia

✓ Circuito RL – repuesta transitoria

✓ Proyecto. 107 Tiempo característico del circuito RL

✓ Circuito RL conectado a una fuente alterna

✓ Proyecto. 108 Respuesta del circuito RL en frecuencia

**Anexo B.** Estimación del valor de la autoinductancia de una bobina

## **Capítulo 36. Caída de un imán permanente por un tubo conductor**

✓ Oscilación de un imán permanente en un campo uniforme

✓ Determinación del momento magnético de un imán permanente

✓ Proyecto. 109 Determinación del momento magnético de un imán permanente dentro de una bobina de Helmholtz

✓ Pulsos inducidos por un imán al atravesar una espira.

✓ Proyecto. 110 Estudio experimental de pulsos inducidos por un imán al atravesar una espira  
Caída de un imán por un tubo conductor

✓ Proyecto. 111 Caída de un imán permanente por un tubo conductor I

✓ Proyecto. 112 ♣ Caída de un imán permanente por un tubo conductor II

<b>Capítulo 37.</b>	<b>Campos y potenciales electrostáticos – Ecuación de Laplace.</b>
✓	Resolución numérica de la ecuación de Laplace, método de relajación
✓	Condiciones de borde de Dirichlet y Neumann
Proyecto. 113	Análisis semi-cuantitativo
Proyecto. 114	Análisis cuantitativo – Método de relajación I
Proyecto. 115	Análisis cuantitativo – Método de relajación II
Proyecto. 116	Estimación del vector campo eléctrico
<b>Capítulo 38.</b>	Oscilaciones eléctricas – Circuitos RLC serie. Oscilaciones libres y forzadas.
✓	Oscilaciones libres
✓	Diagrama de fase
Proyecto. 117	Respuesta del circuito RLC libre subamortiguado
✓	Oscilaciones forzadas
✓	Reactancias e impedancias complejas
Proyecto. 118	Respuesta del circuito RLC forzado
Proyecto. 119	Respuesta del circuito RLC en paralelo – Resonancia
✓	Sistemas Lineales
Proyecto. 120	Respuesta del circuito RLC forzado a una excitación cuadrada y triangular
<b>Capítulo 39.</b>	Circuitos RLC acoplados y circuito no lineales Oscilaciones acopladas.
✓	Circuitos RLC acoplados libres
✓	Circuitos RLC acoplados forzados
Proyecto. 121	Determinación de la inductancia mutua $M(x)$ como función de la separación de las bobinas
Proyecto. 122	Caracterización de la curva de resonancia usando un sistema de adquisición de datos
Proyecto. 123	Caracterización de la curva de resonancia usando un lock-in amplifier
Proyecto. 124	Respuesta del circuito RLC-C
Proyecto. 125	Circuitos RLC acoplados. Efecto Wigner–von Neumann de repulsión de frecuencias
<b>Capítulo 40.</b>	Corrientes de Foucault o corrientes parásitas.
✓	Campos electromagnéticos cuasiestacionarios en conductores
✓	Apantallamiento electromagnético – simetría cilíndrica
Proyecto. 126	Apantallamiento electromagnético I– simetría cilíndrica
Proyecto. 127	Apantallamiento electromagnético II– Lock-In.
Proyecto. 128	Apantallamiento electromagnético III- Placas planas
✓	Efecto piel o pelicular
Proyecto. 129	Variación de la resistencia de un alambre con la frecuencia- I.
Proyecto. 130	Efecto piel en un alambre, expulsión del flujo magnético.
<b>Anexo B.</b>	Teoría del efecto pelicular
<b>Anexo C.</b>	Funciones de Bessel

## Parte IV

### **Módulo VI    Experimentos de Ondas y Óptica**

<b>Capítulo 41.</b>	<b>Ondas estacionarias en una dimensión</b>
✓	Ondas estacionarias en una cuerda

Proyecto. 131	Ondas estacionarias en cuerdas
✓	Ondas estacionarias en tubos (Tubo de Kuntz)
Proyecto. 132	Ondas estacionarias en un tubo semicerrado - Tubo de Kundt
Proyecto. 133	Efecto de la variación de la longitud del tubo
Proyecto. 134	♣♣ Estudio de las resonancias en un tubo usando un Lock-in Amplifier
<b>Anexo B.</b>	Accionador mecánico de frecuencia variable
<b>Anexo C.</b>	Ondas de presión unidimensionales
<b>Capítulo 42.</b>	<b>Interferencia de ondas acústicas. Batido</b>
✓	Principio de superposición
✓	Batido
Proyecto. 135	Escuchando la superposición de ondas-Batidos
Proyecto. 136	Experimentos cuantitativos – Batido
<b>Capítulo 43.</b>	<b>Caja cuadrada - Resonadores de Helmholtz</b>
✓	Ondas estacionarias en una caja cuadrada
Proyecto. 137	Ondas estacionarias en una caja
Proyecto. 138	♣♣ Ondas estacionarias en una caja usando un Lock-in Amplifier
✓	Resonancia de una botella - resonador de Helmholtz
Proyecto. 139	Resonancias en una botella. Resonadores de Helmholtz I
Proyecto. 140	Resonadores de Helmholtz II
<b>Capítulo 44.</b>	Ondas de ultrasonido
✓	Ultrasonido
✓	Par ultrasónico
Proyecto. 141	Respuesta en frecuencia un par ultrasónico
Proyecto. 142	Determinación de la velocidad del sonido
✓	Propiedades físicas de las ondas de ultrasonido
Proyecto. 143	Óptica geométrica y física con ultrasonido
<b>Capítulo 45.</b>	Efecto Doppler
✓	Efecto Doppler –Introducción
✓	Fuente en movimiento circular
Proyecto. 144	Estudio del efecto Doppler de una fuente sonora en movimiento circular
Proyecto. 145	Estudio del efecto Doppler de una observador en movimiento circular
<b>Capítulo 46.</b>	Experimentos de óptica geométrica
✓	Óptica geométrica- Leyes de la reflexión y refracción
Proyecto. 146	Estudio de la reflexión y la refracción
Proyecto. 147	Reflexión total interna
✓	Lentes delgadas
Proyecto. 148	Lentes convergentes – Observaciones cualitativas I
Proyecto. 149	Propiedades de las lentes – Observaciones cualitativas II
Proyecto. 150	Lentes convergentes – Estudio cuantitativo
Proyecto. 151	Método sencillo para estimar $f$ de una lente divergente
Proyecto. 152	Método cuantitativo para estimar $f$ de una lente divergente
<b>Capítulo 47.</b>	Experimentos de óptica física
✓	Difracción e interferencia de la luz. La luz como fenómeno ondulatorio
Proyecto. 153	Difracción por una rendija o un alambre fino
✓	Determinación de intensidad de un patrón
Proyecto. 154	Distribución de intensidad de las figuras de difracción
Proyecto. 155	Interferencia por dos rendijas o más rendijas

✓ Proyecto. 156 Medición de  $\lambda$  usando redes de difracción  
Polarización – Ley de Malus

Proyecto. 157 Ley de Malus

Módulo VII Experimentos con fluidos y física térmica

## **Capítulo 48.** Tensión superficial

- ✓ Fuerzas de cohesión y adhesión
  - ✓ Ascenso capilar
  - Proyecto. 158 Determinación de la tensión superficial por ascenso capilar
  - Proyecto. 159 Ascenso capilar por una pared en forma de cuña
  - Proyecto. 160 Estimación del Número de Avogadro

**Capítulo 49.**

## Experimentos con Fluidos – Experimento de Torricelli

- |                 |   |
|-----------------|---|
| ✓               | Fluidos ideales y teorema de Bernoulli                |
| ✓               | Fluidos viscosos                                      |
| Proyecto. 161   | Forma de un chorro de agua                            |
| ✓               | Experimento de Torricelli                             |
| Proyecto. 162   | Trayectoria de un chorro de agua. Velocidad de salida |
| Proyecto. 163   | Tiempo de vaciamiento de un recipiente                |
| Proyecto. 164   | Experimento de Torricelli                             |
| <b>Anexo B.</b> | Tiempo de evacuación de un recipiente                 |

## Anexo C

Anexo C.

## **Anexo D.**

### **Capítulo**

## Capítulo 50.

- ✓ Proyecto. 165 Termómetros- sensores de temperatura
  - Proyecto. 166 Calibración de un termómetro de gas
  - Proyecto. 166 Calibración de un termopar
  - Proyecto. 167 Calibración de una RTD
  - Proyecto. 168 Termómetro basado en un diodo
  - Proyecto. 169 Termómetro basado en un circuito integrado

## Capítulo 51.

- ✓ Dilatación térmica  
Proyecto. 170 Determinación del coeficiente de dilatación térmica I  
Proyecto. 171 Determinación del coeficiente de dilatación térmica II

Capítulo 52.

- |               |  |
|---------------|--|
| ✓             | Propagación del calor                              |
| ✓             | Enfriamiento de un cuerpo                          |
| Proyecto. 172 | Enfriamiento de un termómetro de vidrio en el aire |
| Proyecto. 173 | Enfriamiento de un cuerpo en el aire y en el agua  |
| Proyecto. 174 | Variación del enfriamiento con la masa             |

Capítulo 53.

## **Conservación de la energía y calorimetría**

- ✓ Conservación de la energía – Primer Principio de la Termodinámica  
✓ Equivalente en agua del calorímetro  
Proyecto. 175 Conservación de la energía en una mezcla de dos masas de agua

Proyecto. 176	Medición del calor específico de un sólido I
Proyecto. 177	Medición del calor específico de un sólido II
✓	Transiciones de fases
Proyecto. 178	Transición líquido-vapor. Calor latente de evaporación I
Proyecto. 179	Transición líquido-vapor. Calor latente de evaporación II
Proyecto. 180	Transición sólido-líquido. Calor latente de fusión

#### **Capítulo 54. Gases ideales - Determinación de pesos moleculares**

✓	Gases ideales
Proyecto. 181	Peso molecular del aire
Proyecto. 182	Medición del peso molecular del butano

#### **Capítulo 55. Teoría cinética de los gases - Relación de calores específicos para gases ideales**

✓	Teoría cinética y capacidad calorífica de gases ideales
✓	Experimentos de Clement-Desormes
Proyecto. 183	Determinación de $\gamma$ por el método de Clement-Desormes
✓	Experimentos de Rüchardt
Proyecto. 184	Determinación de $\gamma$ por el método de Rüchardt

#### **Capítulo 56. Calentamiento Global, temperaturas del pasado y ondas térmicas**

Proyecto. 185	Conducción y pérdida de calor en una barra metálica.
Proyecto. 186	Ondas de calor en el suelo
Proyecto. 187	Temperaturas del pasado

#### **Capítulo 57. Difusión: difusión de permanganato de potasio en agua**

✓	Leyes de Fick de la difusión
✓	Difusión en una y dos dimensiones
✓	Difusión en agua
Proyecto. 188	Difusión del permanganato de potasio o tinta en el agua Difusión: difusión de permanganato de potasio en agua
Proyecto. 189	Variación del coeficiente de difusividad con la temperatura
Proyecto. 190	Difusión del permanganato de potasio o tinta en el agua

### **Módulo VIII Módulo de Física Moderna y astrofísica**

#### **Capítulo 58. Experimento de Michelson**

✓	El interferómetro de Michelson
Proyecto. 191	Determinación de la longitud de onda de un láser
Proyecto. 192	Efecto del estado de polarización
Proyecto. 193	Análogo acústico del interferómetro de Michelson: Tubo de Quincke

#### **Capítulo 59. Transiciones de fases - Materiales ferromagnéticos**

✓	Materiales ferromagnéticos y ferrimanéticos
✓	Curva de histéresis
✓	Determinación de la curva de histéresis
Proyecto. 194	Medición de la curva de histéresis para el hierro
Proyecto. 195	Medición de la curva de histéresis para núcleo de ferrita
Proyecto. 196	Estimación de la temperatura de Curie

Proyecto. 197	Determinación de la temperatura de Curie de una muestra de ferrita
<b>Anexo B.</b>	Número de vueltas de las bobinas del toroide
<b>Anexo C.</b>	Círculo integrador
<b>Capítulo 60.</b>	Naturaleza estadística del decaimiento radioactivo Decaimientos radioactivos
✓	La distribución de Poisson
✓	Proyecto. 198 Estudio experimental de la estadística del proceso radioactivo
<b>Capítulo 61.</b>	Dinámica relativista – Colisiones de electrones y fotones – Efecto Compton Dinámica relativista
✓	Interacción de la radiación con la materia- efecto Compton
✓	Mecanismos de interacción de fotones en un detector de rayos gama
✓	Proyecto. 199 Estudio experimental de la colisión fotón-electrón. Efecto Compton
<b>Capítulo 62.</b>	Interacción de la radiación electromagnética con la materia Pasaje de la radiación electromagnética por la materia
✓	Determinación del coeficiente de absorción
✓	Proyecto. 200 Variación del tiempo muerto del sistema de adquisición
✓	Proyecto. 201 Determinación del coeficiente de absorción lineal
<b>Capítulo 63.</b>	Determinación de la vida media del $^{40}\text{K}$ – Nucleosíntesis Nucleosíntesis
✓	Introducción a la espectroscopía de rayos gama
✓	Eficiencia de un detector de rayos gama
✓	Determinación de vidas medias largas
✓	Proyecto. 202 Vida media del 40K <b>Capítulo 64.</b> Determinación de la banda de energía prohibida de semiconductores
✓	Banda de energía prohibida de semiconductores
✓	Diodos semiconductores
✓	Introducción Determinación de vidas medias largas
✓	Proyecto. 203 Determinación del “band-gap” del Si y del Ge por medio de mediciones eléctricas
✓	Proyecto. 204 Determinación del “band-gap” del Si y del Ge II
<b>Capítulo 65.</b>	Capacidad calorífica de un sólido a bajas temperaturas- Modelos de Einstein y Debye
✓	Capacidad calorífica de un sólido a bajas temperaturas
✓	Fonones en sólidos
✓	Proyecto. 205 Determinación de la Temperatura de Debye I
✓	Proyecto. 206 Determinación del calor de evaporación del nitrógeno líquido
✓	Proyecto. 207 Determinación de la Temperatura de Debye II Efecto Leidenfrost
✓	Proyecto. 208 Observación del efecto Leidenfrost
<b>Capítulo 66.</b>	Estimación de la constante solar, la luminosidad del Sol y atenuación de la luz en la atmósfera
✓	La luminosidad del Sol y la constante solar
✓	Extinción de la luz en la atmósfera
✓	Determinación de la irradiancia solar
✓	Proyecto. 209 Método simple para medir la irradiancia solar.

Proyecto. 210	Atenuación de radiación solar en la atmósfera
Proyecto. 211	Método simple para medir la irradiancia solar
✓	Máxima distancia de visibilidad en el aire, turbidez
Proyecto. 212	Máxima distancia de visibilidad en el aire
<b>Anexo B.</b>	Fotómetros

## Apéndices

- Apéndice A.** Pautas y sugerencias para la redacción de informes
- Apéndice B.** Normas de seguridad en el laboratorio
- Apéndice C.** Método de regresión lineal- Significación de Parámetros de un ajuste
- Apéndice D.** Regresión no-lineal
- Apéndice E.** Introducción a los “Lock in amplifiers”
- Apéndice F.** Sugerencias para la realización de un proyecto experimental

## Prefacio

*Los hombres enseñando, aprenden  
Seneca (4 aC, 65 AD)*

### Objetivo del libro

Hace algunos años, en un texto de mis hijos encontré esta cita de Séneca, que resumía muy adecuadamente mi propia experiencia como docente. Cuanto más me esforzaba por explicar algún tema a mis estudiantes, más profunda era la compresión que yo mismo lograba. En ese sentido, este libro es el diario de un estudiante, ya algo entrado en años, en busca del sentido y armonías en el mundo que nos rodea. Buscar algún orden y regularidad, en el aparente caos en el que muchas veces nos vemos inmersos, es una aventura, que con sus logros y fracasos, ha dado sentido y satisfacción a un faceta importante mi vida y espero compartirla con mis estudiantes y lectores.

Este libro es el resultado de un aprendizaje colectivo, que a lo largo de muchos años realizamos con estudiantes de varias universidades, con los que disfruté largas horas de trabajo. En ese sentido, en este texto he tratado de transcribir parte de esas experiencias, que espero sean utilidad e inspiración a nuevos estudiantes, instructores de física y entusiastas de las ciencias en general. Hace algo más de una década, con E. Rodríguez, publicamos “*Física re-Creativa: Experimentos de física usando nuevas tecnologías*”, que tuvo muy buena acogida en varios países de habla hispana. Desde entonces recibí muchas sugerencias de colegas y alumnos. Asimismo, en estos años, con mis estudiantes, hemos realizado nuevos experimentos e incorporado nuevas tecnologías, que evolucionaron en este trabajo.

En los últimos años la calidad de las computadoras personales (PC) aumentó significativamente, lo que hace posible transformar casi cualquier PC en un mini-laboratorio de cierta sofisticación. En este libro se aprovechan estas ventajas, varios experimentos no requieren más equipos que los dispositivos que regularmente están presentes en las computadoras personales estándares, como ser webcam, tarjetas de sonido, etc. Esto posibilita que muchas escuelas y universidades, aun con muy escasos recursos, puedan realizar experimentos desafiantes y que brinden un aprendizaje significativo, a la par de estimular el goce por la investigación y las ciencias.

El objetivo de este libro es presentar un conjunto de experimentos de física que, haciendo uso de las nuevas Tecnologías de la Información y Comunicación (TIC's), resalten los aspectos

metodológicos de la física y las ciencias en general. Los experimentos están orientados a estudiantes universitarios de ciencia e ingeniería, aunque algunos pueden ser usados en escuelas secundarias. Los proyectos propuestos apuntan a que los estudiantes puedan responder las preguntas: ¿cómo sabemos esto?, ¿por qué creemos en aquello? Estas preguntas ilustran la naturaleza del pensamiento científico. Esta obra se complementa con un portal de Internet ([www.fisicarecreativa.com](http://www.fisicarecreativa.com)) donde se ofrece un conjunto de vínculos a sitios de Internet de interés para estudiantes y docentes de física, como así también a informes de proyectos similares a los propuestos en este libro, realizados por estudiantes de diversas universidades.

### Como usar este libro

Los proyectos experimentales propuestos están organizados alrededor de temas relacionados con: metodología y metrología, mecánica, electromagnetismo, termodinámica, óptica, la física moderna y la astrofísica. En particular, los experimentos propuestos intentan ilustrar los fenómenos que dan sustento a los paradigmas básicos de la física, como son las leyes de la mecánica, los principios de conservación de la energía, las ecuaciones de Maxwell, el concepto de onda, la mecánica cuántica, etc. También se busca que los proyectos sean en su mayoría autocontenidos, es decir, que cada uno de ellos pueda ser desarrollado por los estudiantes sin necesariamente haber hecho los que le preceden en el texto.

En cierto modo los proyectos incluidos pueden pensarse como los platos que se ofrecen en un “buffet libre” o “tenedor libre”, donde cada docente o estudiante puede escoger los que le resulten de mayor interés y que se adecuen mejor a sus objetivos. Esto permite que el libro pueda ser de utilidad para cursos de distintas carreras y para estudiantes con distintos niveles de formación.

Las actividades indicadas con el símbolo ♦ requieren de un nivel de conocimientos comparable a la de estudiantes de un primer curso de física universitario. Las actividades indicadas con ♦♦ denotan experimentos de mayor nivel de complejidad y aquellos con ♦♦♦ incluyen tópicos algo más avanzados, adecuados para estudiantes que buscan un mayor grado de desafío.

Cada capítulo tiene una breve introducción en la que se revisa brevemente el marco conceptual pertinente a los experimentos a desarrollar. Esta discusión es, por razones de espacio, en general escueta, pero en todos los casos se indica la bibliografía donde se puede encontrar una discusión más extensa de cada tema. Asimismo, se citan revistas orientadas a la enseñanza, que por lo

general son accesibles a estudiantes universitarios, tales como American Journal of Physics, European Journal of Physics, The Physics Teacher, Latin-American Journal of Physics Education, entre otras. Se sugiere enfáticamente que estas fuentes sean consultadas frecuentemente y que se usen en el desarrollo de los cursos. Una de las grandes ventajas que brindan las TICs es la accesibilidad a revistas especializadas. El acercamiento a este tipo de bibliografía permite a los estudiantes ponerse en contacto con las fuentes de conocimiento y relacionarse directamente con el proceso de creación y desarrollo de la ciencia. Es posible que muchos estudiantes se vean estimulados a ser ellos mismos protagonistas de este proceso e intenten publicar sus propias ideas. Estas actividades son un aporte muy valioso y significativo para la formación de profesionales, tecnólogos y científicos.

Otro objetivo que se intenta lograr es que los experimentos puedan realizarse con equipos de bajo costo. Esto amplía la posibilidad de realización de los mismos, ya que en muchos lugares de Latinoamérica sólo se dispone de laboratorios con pocos recursos materiales. En este texto mostramos como una gran variedad de experimentos se pueden realizar con recursos muy modestos, que sin embargo proponen interesantes desafíos a los estudiantes y brindan una oportunidad de aprendizaje significativo, útil y placentero. Dada la disponibilidad creciente de algunos equipos modernos y elaborados en muchos ámbitos laborales, también se incluyen varios experimentos que implican el uso de equipos más sofisticados como detectores de radiación gama, multicanales y amplificadores “lock-in”, entre otros.

En los experimentos introductorios, hemos adoptado una aproximación *constructivista*. Varios de estos experimentos están planteados de modo que los estudiantes *descubran los fenómenos*. Asimismo, se induce a los estudiantes, a través de preguntas, a que ellos “construyan” el marco conceptual que explican las observaciones. En algunas actividades se plantean “enigmas” para que los estudiantes, haciendo uso de los paradigmas fundamentales de la física, discutidas en los cursos convencionales, expliquen los resultados que descubren en el laboratorio. Esto permite que los estudiantes experimenten de primera mano los distintos caminos que la ciencia sigue en su desarrollo y evolución. Se busca así que los estudiantes aprendan física por *inmersión* en su dinámica y desarrollo.

El presente libro intenta servir de puente entre los enfoques docentes tradicionales y las nuevas formas de aprendizaje activas o por indagación. El texto está estructurado en módulos que

siguen los bloques en que tradicionalmente se divide la física en las escuelas de ciencia e ingeniería: mecánica, termodinámica, ondas, electromagnetismo, etc. En cada módulo se proponen proyectos que incluyen elementos de un aprendizaje activo o por indagación, pero que se pueden incluir dentro de una curricula convencional en la proporción deseada. Una adecuada articulación de ambos enfoques, los vuelve complementarios y hace que se potencien mutuamente.

Asimismo se persigue desarrollar en los estudiantes:

- ✓ **Habilidades experimentales y analíticas.** Manejo de instrumental de laboratorio, habilidad para medir cuidadosamente una magnitud física, análisis de los errores de medición y la elección de los instrumentos más adecuados para cada fin.
- ✓ **Análisis critico de los resultados, sus implicancias y generalizaciones,** mediante la comparación de los resultados con las expectativas teóricas o *a priori* y la formulación de hipótesis y de nuevos experimentos.
- ✓ **Uso de computadoras** para la toma de datos, control de un experimento y el análisis de los resultados y la confección de informes.
- ✓ **Familiarización de los estudiantes con la literatura actual,** en particular revistas amenas y accesibles como por ejemplo: American Journal of Physics, The Physics Teacher, Latin-American Journal of Physics Education, etc.
  
- ✓ Desarrollo de habilidad para comunicar por escrito los resultados, elaborando informes que siguen los modelos internacionalmente adoptados para publicaciones científicas y técnicas.

## A mis colegas

### Encuadre filosófico

Una de las características distintivas de los tiempos que vivimos es el constante devenir de cambios tanto tecnológicos como económicos, políticos y sociales. También la experiencia de las últimas décadas deja en claro lo terriblemente limitado de nuestra capacidad para predecir el sentido u orientación de estos cambios. Ante estas realidades y limitaciones, surge naturalmente la pregunta: ¿cómo podemos preparar a nuestros estudiantes en ciencias y tecnología, cuando estamos casi seguros de que en su vida profesional usarán técnicas y equipos que hoy nos son desconocidos y que las técnicas y equipos con los que los preparamos seguramente serán obsoletos antes que ellos egresen de nuestras universidades? Desde luego las respuestas a estos interrogantes son muy complejas y difíciles. Sin embargo, el intento de elaborar una respuesta a estos interrogantes es un desafío ineludible para un educador.

Una posible respuesta a este dilema de la educación actual es enfatizar el desarrollo de habilidades y actitudes lo más básicas y amplias posibles, de modo tal que los estudiantes tengan la capacidad de adaptarse a situaciones nuevas y cambiantes. En ese sentido la enseñanza de las ciencias básicas, como la física en este caso, puede hacer un aporte valioso a la formación profesional, siempre y cuando se enfaticen sus aspectos formativos y metodológicos a la par de contenidos de información específicos. Así, por ejemplo, cuando discutimos y estudiamos el péndulo en el laboratorio, está claro que lo esencial no son necesariamente las leyes del mismo. Es poco probable que alguien termine trabajando con un péndulo en su vida profesional y evidentemente existe abundante información sobre este tema en la literatura que puede ser consultada en cualquier momento. Sin embargo, la metodología que usamos para estudiar el comportamiento de un péndulo, poner a prueba nuestras hipótesis, ensayar explicaciones, analizar críticamente nuestros resultados y buscar información para lograr una mayor comprensión del problema, son comunes a muchas áreas del quehacer profesional de ingenieros y tecnólogos actuales y seguramente del futuro. Por lo tanto, lo que se busca en el presente proyecto, además de presentar algunos **contenidos básicos de información**, es desarrollar en los estudiantes la habilidad de enfrentarse a problemas nuevos con apertura y rigurosidad. En otras palabras, lo que se busca es **que sepan cómo aprender cosas nuevas** (aprendan a aprender) y enfrentarse a ellas

con confianza y buen criterio. Si estos objetivos se logran, esta experiencia educativa habrá tenido éxito.

## **Enfoque pedagógico adoptado en este libro**

### *Aprendizaje por inmersión en la física*

Un curso de laboratorio de física no es necesariamente un ámbito donde se ilustran y demuestran todos y cada uno de los conceptos discutidos en un texto o clase teórica. Las limitaciones en tiempo, equipos y personal lo harían seguramente imposible. En ese sentido, los buenos textos, las demostraciones en clases o en videos y las discusiones con los docentes cumplen esa función tal vez con mayor eficacia y economía. Hay sin embargo una misión fundamental e irremplazable del laboratorio en la formación de los estudiantes, mucho más viable y provechosa, que consiste en que los estudiantes aprendan el camino por el cual se genera el conocimiento científico mismo.

Así un objetivo que se consideró importante en esta propuesta, es la introducción de los estudiantes a la **comprensión** y **entendimiento** de la ciencia en general y más específicamente de la física. Se enfatiza aquí el aspecto del *entendimiento* de la ciencia por encima del aspecto de la *información científica*, es decir se privilegian los aspectos procedimentales de la física. Esto parte de la convicción que lo que caracteriza a un científico no es aquello en lo que cree, sino las razones que lo llevan a creer en eso. Cada teoría científica se basa en hechos empíricos. Con el transcurrir del tiempo se descubren nuevos hechos, otros son modificados o inclusive encontrados erróneos. En consecuencia nuestras concepciones científicas deben ser revisadas y modificadas. Por lo tanto, el conocimiento científico es por su propia naturaleza un conocimiento tentativo que puede ser refutado o falseado.

También se considera importante en un programa de educación científica estimular en los estudiantes el desarrollo de una **actitud crítica** frente al conocimiento en general y al conocimiento científico en especial. La ciencia es una herramienta muy poderosa para la comprensión y modificación de nuestro mundo, pero es también limitada. Por lo tanto reconocer sus limitaciones es también una faceta esencial para el entendimiento de la misma.

Para alcanzar estos objetivos sugerimos concentrarse más bien en *pocos tópicos fundamentales* donde los supuestos básicos y hechos empíricos que sostienen las teorías pertinentes son discutidos cuidadosamente. Esto es, privilegiar la profundidad del tratamiento de los temas sobre la extensión y la metodología sobre la mera información.

Un laboratorio es una excelente herramienta pedagógica y en muchos aspectos, un ámbito esencial para la enseñanza de la ciencia en un nivel introductorio. El laboratorio les brinda a los estudiantes la posibilidad de *aprender a partir de sus propias experiencias*. También puede y debe ser usado para *estimular la curiosidad y el placer por la investigación y el descubrimiento*. Brinda a los alumnos la posibilidad de explorar, manipular, sugerir hipótesis, *cometer errores y reconocerlos*, y por lo tanto aprender de ellos.

También se busca estimular la elaboración de conjeturas razonables para explicar las observaciones realizadas (es decir, la elaboración de modelos que puedan explicar las observaciones). Creemos que el encontrar resultados *inesperados* estimula el proceso de aprendizaje y mantiene el interés de los estudiantes. Esto es más constructivo que usar las sesiones de laboratorio simplemente para verificar resultados ya discutidos en los textos o en clases. Las soluciones de los problemas experimentales no pueden ser encontradas al final de un libro. Por lo tanto, es un desafío para los estudiantes que deben confiar en su propio criterio y adquirir confianza en su conocimiento.

Para la realización de varios de los experimentos propuestos se requiere el uso de sistemas de toma de datos y análisis por computadoras. Esta tecnología se ha vuelto muy accesible y prevalente en los últimos años y ofrece la posibilidad de realizar experimentos más cuantitativos y con mayor precisión. Al mejorar la precisión de las mediciones, es fácil apreciar la necesidad de mejorar las teorías establecidas. Asimismo, las limitaciones de los modelos propuestos se vuelven evidentes. Este tipo de vivencia difícilmente pueda ser internalizada en un ámbito distinto del laboratorio.

El estímulo de la *creatividad* es otro objetivo fundamental que puede y debe lograrse en el laboratorio. Al aceptar y alentar las variaciones a los problemas dados, es muy gratificante ver como muchos estudiantes encuentran nuevos caminos para alcanzar un objetivo dado o pueden incluso encontrar un nuevo objetivo tal vez más valioso que el originalmente concebido por el instructor. El análisis y la elaboración de los informes de laboratorio son también muy importantes

en el proceso de aprendizaje. Aquí los estudiantes deben resumir y ordenar sus observaciones y experiencias. En el informe los estudiantes deben describir sus resultados y compararlos con las expectativas teóricas. Asimismo, es importante para los alumnos apreciar el grado de acuerdo o desacuerdo, establecer conclusiones, etc.

Hay, además, importantes subproductos provenientes de este último paso, como ser el desarrollo de la habilidad para escribir informes, mostrar sus resultados en forma gráfica, diseñar presentaciones, etc. Asimismo, los estudiantes aprenden a utilizar computadoras para la adquisición de datos y/o para analizarlos y adquieren experiencia en conceptos básicos de estadística a partir de discusiones sobre los errores experimentales y el nivel de significación de sus observaciones. La utilización de instrumentos que les permita expandir su capacidad de observación y la habilidad de realizar mediciones es en sí misma una experiencia fructífera y útil.

La mayoría de los proyectos experimentales, por su naturaleza, deben ser llevados a cabo por un grupo de personas, lo que promueve la cooperación entre los estudiantes y el *trabajo en equipo*. Muchos de los proyectos experimentales no siempre tienen un “final feliz”, donde todos los datos obtenidos concuerdan con las expectativas teóricas en toda su extensión. Esto ocurre por diversas razones: errores sistemáticos, carácter aproximado de las teorías expuestas en los textos, o complejidades no bien entendidas. Esto puede ser útil para que los estudiantes comprendan el carácter problemático de las ciencias y que las teorías científicas necesitan permanentemente ser corroboradas experimentalmente, ser revisadas a la luz de nuevas evidencias, o ser reemplazadas por otras más generales o racionales.

En resumen, el laboratorio naturalmente brinda una excelente oportunidad para simular situaciones en las cuales no solamente las ciencias se desarrollan sino también un gran número de actividades profesionales y empresariales modernas, y tal vez la vida misma.

**A**

*Rodrigo, Eugenio, Mandy y a la  
memoria de mis padres*

## Agradecimientos

Este libro es el resultado de un esfuerzo cooperativo de muchas personas. Quien escribe estas líneas es en cierto modo un cronista de esta experiencia. Numerosos estudiantes de varias universidades Argentinas han sido los inspiradores y ejecutores de la mayoría de los experimentos que se presentan en este libro. A ellos rindo mi más sincero agradecimiento. Muchos maestros fueron una fuente de inspiración a lo largo de mi carrera. En particular L. C. de Cudmani, R. Vandenbosch, y Alejandro García. Asimismo agradezco al Prof. E. Rodríguez con quién escribimos el un texto que antecede al presente libro. Varios experimentos fueron usados en diversos cursos de física experimental del Departamento de Física de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de Buenos Aires (UBA), en la Universidad Nacional de General San Martín (UNSAM), en la Universidad Favaloro (UF), en la Universidad Nacional de General Sarmiento (UNGS), Universidad Nacional del Sur (UNS), y numeroso talleres de física realizados en Argentina, Uruguay y Colombia. En todos estos cursos he compartido experiencias con numerosos alumnos y colegas. A todos ellos agradezco por haberme brindado su colaboración y apoyo para el emprendimiento de este proyecto educativo y por haberme acercado valiosos aportes. En especial, agradezco a Gerardo García Bermúdez y a Daniel Di Gregorio de la UNSAM, y a Daniel Bes de la UF, a S. Vera y M. Sánchez de la UNS, por su apoyo y estímulo. En particular agradezco a la Comisión Nacional de Energía Atómica de Argentina (CNEA) por haberme brindado la oportunidad de trabajar, crecer e iniciarme en la física experimental. Los años que pasé en el Laboratorio TANDAR de la CNEA dejaron huellas profundas en mi vida que también se reflejan en este libro. Asimismo agradezco los años trabajo y formación en el Nuclear Physics Laboratory de la Universidad de Washington, Seattle.

A lo largo de los años, tuve muchos colaboradores con los que desarrollamos otros tantos experimentos que incluyo en este libro y a quienes agradezco afectuosamente. En especial a Dina Tobia, Martín Saleta, Hernán Reisin, Carlos Sendra, Guillermo Solovey, José Flores, Mariano Mayochi, José di Laccio, Silvia Calderón, Pablo Núñez y Leila Iannelli.

Por último, agradezco a mi familia que me dio comprensión, aliento y mucho afecto a lo largo de todo estos años y a quienes dedico esta obra.

# Capítulo 41

## Ondas estacionarias en una dimensión

### Objetivos

En este capítulo nos proponemos realizar un estudio experimental de las ondas estacionarias en una dimensión. Primero consideramos el caso de una cuerda. Analizamos los modos normales de vibración, frecuencias características del sistema. De estos estudios determinamos la velocidad de las ondas en términos de la tensión y la densidad de la cuerda. Asimismo, realizamos un estudio experimental de ondas sonoras en tubos abiertos, semi-cerrados y cerrados. Resonancias en diversos sistemas, cuantificación, frecuencias características. Determinación de la velocidad del sonido. Estudio de ondas estacionarias.

- ✓ Ondas estacionarias en una cuerda
- ✓ Velocidad de una onda en una cuerda
- ✓ Ondas sonoras en un tubo
- ✓ Tubo de Kundt
- ✓ Velocidad del sonido

### 41.1 Ondas estacionarias en una cuerda

Cuando una cuerda tensa y fija en sus extremos vibra, lo hace a frecuencias bien definidas y se genera un patrón de oscilación que se denomina *onda estacionaria*. Cada frecuencia de vibración determina un patrón o *modo normal de vibración* de la cuerda. Estos modos pueden caracterizarse ya sea por el número  $n$  de nodos entre los extremos fijos, esto es el número de nodos excluyendo los extremos, o la frecuencia de vibración  $f_n$ . La longitud de onda  $\lambda_n$  de cada modo está determinada por la longitud de la cuerda  $L$ , esto es, la distancia entre los extremos fijos. Los modos de vibración se caracterizan por el hecho de que en la longitud  $L$  siempre deben contener un número entero de medias longitudes de onda, es decir:

$$L = n \cdot \frac{\lambda_n}{2}. \quad (41.1)$$

Dado que para una onda el producto de la longitud de onda multiplicada por la frecuencia es igual a la velocidad de propagación de la onda,  $c$ , tenemos la siguiente relación:<sup>1,2,3</sup>

$$c = \lambda_n \cdot f_n = \frac{2 \cdot L}{n} \cdot f_n. \quad (41.2)$$

Esta expresión nos permite medir la velocidad de propagación de la onda en la cuerda, a través de las mediciones de la longitud de onda (o bien el orden  $n$  del modo) y la frecuencia de vibración correspondiente  $f_n$  de la cuerda.

Por otro lado, a partir del estudio dinámico del movimiento de la cuerda, es decir, aplicando las leyes de Newton, se puede probar que la velocidad de propagación de la onda en una cuerda tensa está dada por:<sup>1, 2, 3</sup>

$$c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}, \quad (41.3)$$

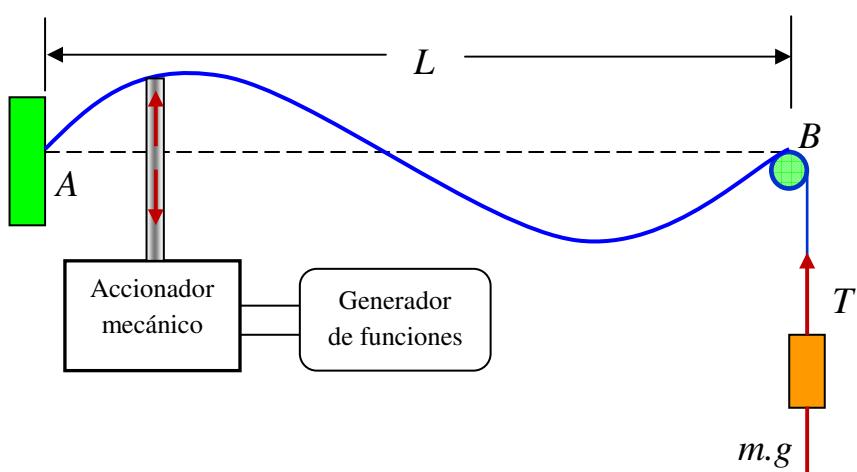
donde  $T$  es la tensión de la cuerda y  $\mu$  es su densidad lineal de masa.

El objetivo de esta actividad es determinar la velocidad de propagación de las ondas en una cuerda tensa y someter a prueba experimental la relación (41.3).

### Proyecto 131. Ondas estacionarias en cuerdas

**Equipamiento básico recomendado:** Una soga de algodón de aproximadamente 2 m de largo y 5 mm de diámetro. Un accionador mecánico capaz de producir impulsos a frecuencia variable. Un generador de funciones. Un juego de masas entre 50 g y 500 g.

Para este estudio se sujeta la soga de dos extremos fijos como se indica esquemáticamente en la Fig. 41.1. Uno de sus extremos está atado a un punto fijo (punto A) y el otro extremo apoya sobre una pequeña barra cilíndrica de aproximadamente 1 ó 2 cm de diámetro, del extremo libre de la soga se cuelga una masa  $m$ . El punto B está a la misma altura que el punto A. La soga tiene una masa por unidad de longitud que llamamos  $\mu$ . Este valor se determina pesando la cuerda de longitud conocida. La tensión de la cuerda,  $T$ , está determinada por el peso  $m.g$  de la masa que cuelga de uno de sus extremos. Un generador de funciones (GF) excita un accionador mecánico a una frecuencia  $f$  determinada por el generador. A su vez este accionador excita a la cuerda a la misma frecuencia  $f$ . En el Anexo A, se dan más detalles sobre cómo construir uno de estos accionadores.



**Figura 41.1** Diagrama esquemático del dispositivo para estudiar la producción de ondas estacionarias en una soga. La cuerda tiene dos puntos fijos, A y B. La tensión está determinada por el peso colgado ( $T = m.g$ ) en uno de sus extremos. Un accionador mecánico excita a la soga a una frecuencia bien definida por el GF.

### Sugerencias de trabajo:

- ✓ Varíe la frecuencia de excitación con el GF y observe la existencia de *frecuencias de resonancia* bien definidas. Esta situación de resonancia se caracteriza por la presencia de vientos y nodos que están bien definidos. En condiciones de resonancia se genera un patrón de vibración estable en la cuerda. Note que al variar finamente la frecuencia de excitación, la amplitud de los vientos pasa por un máximo a la frecuencia de resonancia  $f_n$  que tiene asociada un número  $n$  de nodos entre sus extremos, excluidos estos mismos.
- ✓ Para un determinado valor de  $T$  y  $\mu$  determine las frecuencias  $f_n$  para el mayor número de modos normales de vibración que encuentre. Determine  $\lambda_n (=2L/n)$  y construya un gráfico de  $\lambda_n$  como función de  $(1/f_n)$ . Según la Ec.(41.2) se espera que la relación entre estas variables sea lineal y que su pendiente sea la velocidad  $c$  de la onda. Verifique si sus datos están de acuerdo con lo esperado de la Ec.(41.2). De ser así, determine el mejor valor de  $c$  y su incertidumbre.
- ✓ Para una dada cuerda o soga, realice en mismo estudio anterior para determinar la velocidad de la onda  $c$  para distintas tensiones  $T$ . Para esto varíe la masa  $m$  colgada en uno de sus extremos.
- ✓ Construya un gráfico de  $c$  en función de  $\sqrt{T/\mu}$ . ¿Qué concluye acerca de la validez de la Ec.(41.3)?
- ✓ ♣♣Cuando varía el peso  $m$ , se varía tanto la tensión  $T$  como la densidad de masa  $\mu$ . Demuestre que la relación entre la velocidad de la onda y la masa  $m$  colgada es:

$$v = \sqrt{\frac{m \cdot (L_0 + k \cdot m) \cdot g}{m_c}}. \quad (41.4)$$

Donde  $m_c$  es la masa total de la cuerda,  $L_0$  sus longitud natural y  $k$  la constante de estiramiento de la cuerda. Para calcular su valor, se puede usar una técnica similar a la empleada en el Cap. 13 para determinar la constante elástica de un resorte. Si se cuelga la soga de un soporte fijo y del extremo libre se cuelgan pesos variables, y se mide simultáneamente los estiramientos  $x$  del extremo libre, del grafico de pesos en función de  $x$ , se puede obtener la constante  $k$  de la soga. Con este dato, puede evaluar cuán adecuada es la Ec.(41.4) para explicar sus datos experimentales. ¿Qué concluye de este análisis?

## 41.2 Ondas estacionarias en tubos (Tubo de Kundt)

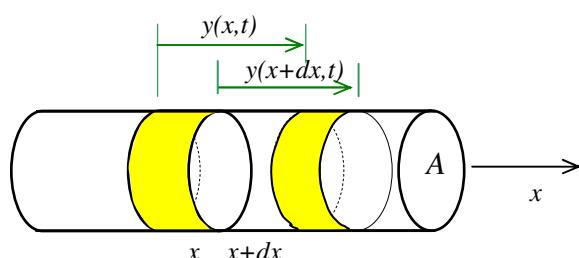
Las *ondas de sonido* son un caso importante de ondas de presión en un fluido compresible. Las ondas de presión con frecuencias en el rango de aproximadamente 20

Hz a 20 kHz pueden excitar nuestros oídos y dan lugar a la sensación *sonora*. Las ondas de presión de más alta frecuencia se denominan *ultrasónicas* y las de menor frecuencia, *subsónicas*.<sup>1,2,3</sup>

Un tubo, cuyo largo es mucho mayor que su diámetro, puede entretener ondas sonoras estacionarias en una dimensión. Un tubo de estas características es el análogo acústico de una cuerda tensa. En un tubo de extremos abiertos las ondas de presión son tales que presentan un nodo en los extremos.<sup>1,4</sup>

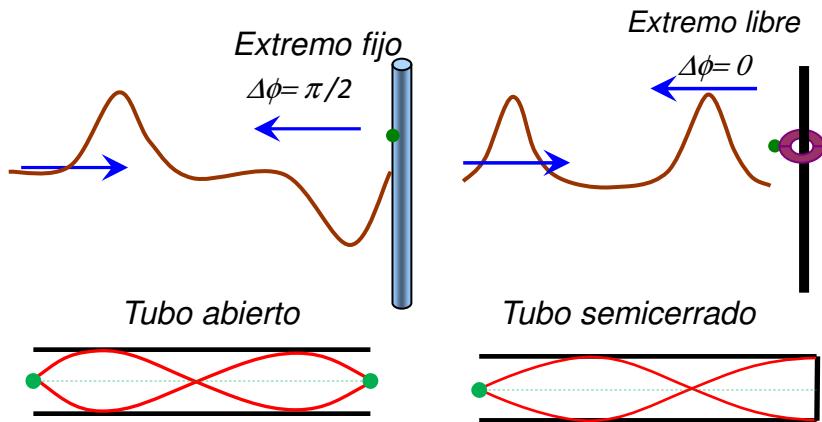
Cuando una onda que viaja por un tubo se encuentra con una frontera a partir de la cual las propiedades del medio (compresibilidad o densidad) cambian o, las restricciones geométricas que se imponen a la onda varían, las ondas parcialmente se transmiten y reflejan según las características de la interfase. La frontera puede ser la superficie de separación entre dos medios tal como aire y sólido o un líquido. Un cambio de restricción geométrica puede ser la finalización de un tubo con el extremo abierto o cerrado o bien un cambio de diámetro del tubo.<sup>5,6</sup>

Consideremos una onda unidimensional que se propaga a lo largo de un tubo uniforme, en la dirección positiva del eje  $x$ , coincidente con el eje del tubo, como se ilustra en la Fig. 41.2. Si llamamos  $y(x,t)$  a la función que describe el desplazamiento a lo largo del eje  $x$  de las partículas que están originalmente en el punto de coordenadas  $x$  en el instante  $t$ , nótese que las partículas se desplazan en la misma dirección de propagación de la onda, eje  $x$ . De manera análoga,  $p(x,t)$  designa la función que describe la variación de presión en el punto de coordenadas  $x$  en el instante  $t$ . Así, las ondas acústicas pueden describirse por medio de las ondas de desplazamiento  $y(x,t)$  o por las ondas de presión,  $p(x,t)$ . Desde luego estas dos descripciones están relacionadas y son complementarias. En el Anexo B se discute esta relación. De dicho análisis se desprende que las ondas sinusoidales de desplazamiento y presión presentan un desfasaje de  $\pi/2$  entre sí.



**FIGURA 41.2.** Volumen cilíndrico de un gas por el que pasa una onda sonora.

Una onda sonora que se propaga a través de un tubo, tendrá un nodo de presión en el *extremo abierto*, pues la presión del aire en esta zona tiende a la presión atmosférica o de equilibrio  $P_0$ .<sup>6</sup> De esta forma, la reflexión de una onda acústica de presión en el extremo abierto de un tubo cilíndrico es similar a las reflexiones que tienen lugar en una cuerda que tiene un extremo fijo. Análogamente el *extremo cerrado* de un tubo, tiene propiedades de reflexión equivalentes a la onda en una cuerda que tiene el extremo libre, como se muestra en la Fig.41.3 (ver Anexo B).



**FIGURA 41.3.** Cuando un pulso que se propaga en una cuerda se refleja en un extremo fijo (nodo), el pulso cambia de fase. Si el extremo es libre, el pulso reflejado tiene igual fase que el incidente. Las ondas de presión, en el extremo abierto de un tubo, se comportan como en el extremo fijo de una cuerda, mientras que en un extremo cerrado del tubo es análogo al extremo libre de la cuerda.

.Sin embargo, cuando se generan ondas de presión en un tubo con el extremo abierto, la presión del mismo no iguala a la presión atmosférica inmediatamente donde el tubo termina. Las ondas de presión emergen hacia el exterior del tubo, estos extremos son zonas de radiación por las que podemos escuchar los sonidos que viajan por el tubo. Tan pronto como una región de compresión o de expansión llega al extremo abierto, el aire puede expandirse hacia los costados, mientras que dentro del tubo, el aire está confinado en una sola dirección. En consecuencia, la compresión o expansión es rápidamente “aliviada” a medida que aumenta la distancia al extremo del tubo. Esta distancia es del orden de un radio del tubo, a medida que nos alejamos del extremo del tubo, la presión tiende a la presión atmosférica.<sup>5,6</sup> De este modo, la longitud efectiva  $L_{ef}$  de un tubo con un extremo abierto es mayor que la longitud nominal  $L_0$  del mismo. Empíricamente se encuentra que la longitud efectiva de un tubo con un extremo abierto es:

$$L_{ef} = L_0 + f \cdot d , \quad (41.5)$$

donde  $d$  es el diámetro del tubo y el coeficiente  $f \approx 0,6 \pm 0,1$ .<sup>6</sup>

La condición de contorno para un extremo abierto es:<sup>1,2,5,6</sup>

$$(p)_{abierta} = 0 . \quad (41.6)$$

La condición de borde para un extremo cerrado es:

$$\left( \frac{\partial p}{\partial x} \right)_{cerrado} = 0 , \quad (41.7)$$

lo que significa que en los extremos cerrados de un tubo, tenemos un viento de presión. Se entiende que la presión a la que estamos haciendo referencia es la presión manométrica, o sea la variación de presión respecto de la presión atmosférica.

Los primeros modos de oscilación de una onda estacionaria en tubos cerrados y semicerrados se ilustran en la Fig. 41.4. A partir de las condiciones de borde en los

extremos, es fácil probar que para un tubo cerrado-cerrado (vientos en ambos extremos), o abierto-abierto (nodos en ambos extremos), las frecuencias de resonancia están dadas por:<sup>1,6</sup>

$$f_n = \left( \frac{c}{2 \cdot L_{ef}} \right) \cdot n . \quad (41.7)$$

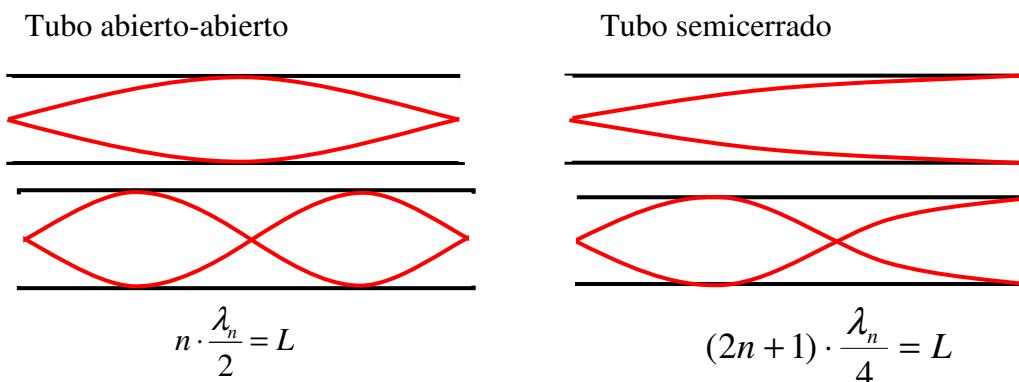
Para tubos semicerrados:<sup>1,6</sup>

$$f_n = \left( \frac{c}{4 \cdot L_{ef}} \right) \cdot (2n + 1) . \quad (41.8)$$

Aplicando las leyes de Newton a una columna de gas, y suponiendo que las compresiones son rápidas, de modo que el proceso de compresión y descompresión sea un proceso adiabático, la velocidad del sonido  $c$  en el gas viene dada por:<sup>1,5,6</sup>

$$c = \sqrt{\frac{\gamma \cdot R \cdot T}{M}} , \quad (41.9)$$

donde  $\gamma = c_p/c_v$  (cociente de la capacidad calorífica a presión constante y la correspondiente a volumen constante) se denomina coeficiente de compresibilidad adiabático;  $T$  es la temperatura absoluta,  $R$  la constante universal de los gases y  $M$  la masa molecular del gas, ver Anexo B.



**Figura 41.4** Primeros modos de oscilación de un tubo abierto-aberto (izquierda) y otro abierto-cerrado (derecha).

### Proyecto 132. Ondas estacionarias en un tubo semicerrado - Tubo de Kundt

**Equipamiento recomendado:** Un tubo de aproximadamente 0,6 m de longitud y 2 a 3 cm de diámetro, de acrílico, PVC o vidrio, en lugar de este tubo se puede usar una probeta. Un parlante pequeño o audífono y un micrófono. Un generador de funciones y un osciloscopio de dos canales, o bien un sistema de adquisición de datos conectados a una PC. También se puede usar una PC con tarjeta de sonido como se indicó en el Cap. 11.

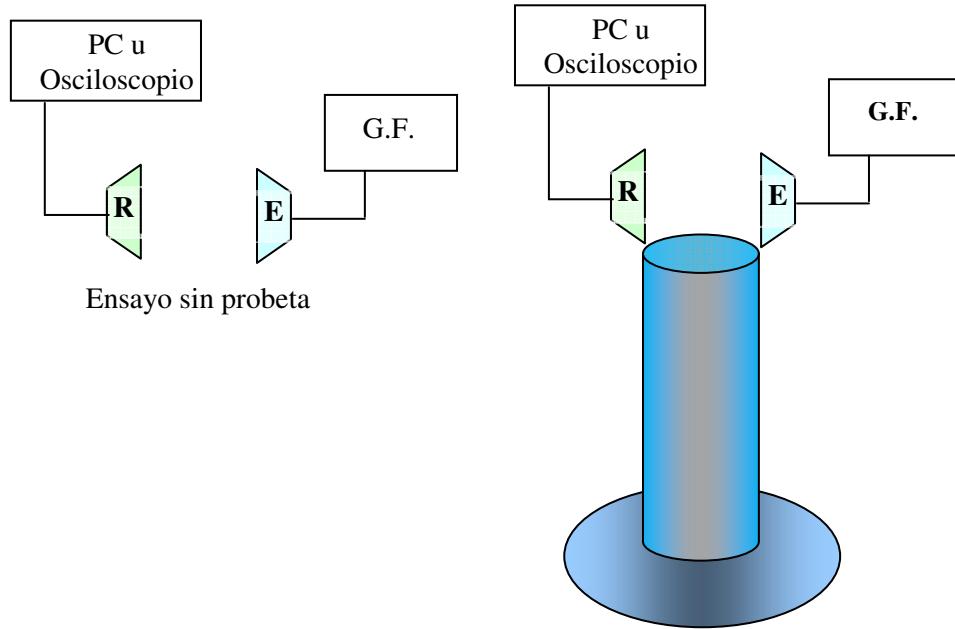
Para este experimento se requiere un emisor acústico (parlante o audífono excitado por un generador de funciones) que pueda emitir sonidos puros, es decir sonidos de frecuencias bien definidas. La frecuencia debe poder variarse dentro del rango de las frecuencias de audio (20 Hz a 10 kHz). También se requiere de detectores de sonido (micrófonos) conectados a un osciloscopio (o sistema de adquisición de datos conectado a una PC o a la tarjeta de sonido de una PC) para estudiar sus respuestas.

Para este experimento se puede utilizar una probeta de vidrio o plástico de 20 a 40 cm de altura y diámetro interno inferior a unos 3 cm. También puede usarse un tubo de acrílico o PVC de aproximadamente 0,6 m de longitud y diámetro entre 1 y 3 cm. Mida cuidadosamente las dimensiones del tubo: longitud  $l$  y diámetro interno  $d$ . Para determinar sin ambigüedad las frecuencias de resonancias asociadas a la presencia del tubo, coloque el emisor y receptor de sonido enfrentados, justo en el borde abierto del tubo o la probeta, como se muestra en lo Fig. 41.5. Realice un barrido en frecuencia y trate de ubicar las frecuencias de resonancia, controlando la frecuencia con el generador de funciones que alimenta el emisor. Cuide que la amplitud del generador sea constante. Las resonancias se manifiestan por un pronunciado aumento de la amplitud de la señal de salida del receptor. En general la resonancia puede percibirse por un claro aumento de la intensidad con que se escucha la vibración. En otras palabras, a las frecuencias de resonancia, para una dada amplitud de la excitación de emisor, la respuesta del receptor tiene un máximo relativo. Si usa un osciloscopio de dos canales y conecta el receptor a un canal y la entrada del emisor al otro canal, opere el osciloscopio en el modo X-Y y la relación de fases entre estas señales en resonancia, muestra una forma característica. Ver Cap. 37. Como se discutió más arriba, Ec.(41.5), debido al diámetro finito de los tubos su *longitud efectiva*  $L_{ef}$  es mayor que su *longitud geométrica*  $L_0$ .

### Sugerencias de trabajo:

- ✓ Determine por lo menos las primeras cinco resonancias en el tubo que use. Represente gráficamente la amplitud del receptor en función de la frecuencia aplicada. Para este estudio, trate de que la geometría del sistema (posiciones relativas del tubo, emisor y receptor) se mantenga invariable a medida que varía la frecuencia (Fig. 41.5).
- ✓ Para verificar que las resonancias encontradas estén efectivamente asociadas al tubo y no a características particulares del sistema emisor-receptor, retire el tubo o probeta y repita el estudio anterior, cuidando de pasar por las mismas frecuencias donde detectó las resonancias. Trate de que la geometría asociada al par emisor–receptor sea la misma que cuando estaba el tubo o probeta.
- ✓ Represente gráficamente las frecuencias de resonancia del tubo en función de orden  $n$  de cada resonancia, es decir el índice que identifica su aparición a medida que se incrementa la frecuencia. A la frecuencia fundamental, es decir la frecuencia de resonancia más baja, le asignamos el orden  $n = 0$ .

- ✓ Represente gráficamente el parámetro:  $z_n = 4L_{ef}f_n$  como función de  $(2n+1)$  y verifique si se cumple la dependencia esperada según la Ec.(41.8). De ser así, determine la velocidad del sonido  $c$  y su incertidumbre.



**Figura 41.5** Dispositivo experimental para estudiar los modos de resonancia en un tubo o probeta.

### Proyecto 133. Efecto de la variación de la longitud del tubo

**Equipamiento recomendado:** Un tubo de aproximadamente 0,6 m de longitud y 2 a 3 cm de diámetro, de acrílico, PVC o vidrio, en lugar de este tubo se puede usar una probeta. Un parlante pequeño o audífono y un micrófono. Un generador de funciones y un osciloscopio de dos canales, o bien un sistema de adquisición de datos conectados a una PC. También se puede usar una PC con tarjeta de sonido como se indicó en el Cap. 11.

Si utiliza una probeta, introduciendo agua en ella se puede variar la longitud de la columna de aire arriba del agua. Si utiliza un tubo, la variación de la longitud se puede lograr introduciendo un tapón rígido deslizable a modo de pistón, por ejemplo de madera o goma. Así se puede variar el largo efectivo del tubo. Haga el mismo estudio que el realizado en el Proyecto anterior para al menos dos alturas de agua en la probeta o longitudes de tubo.

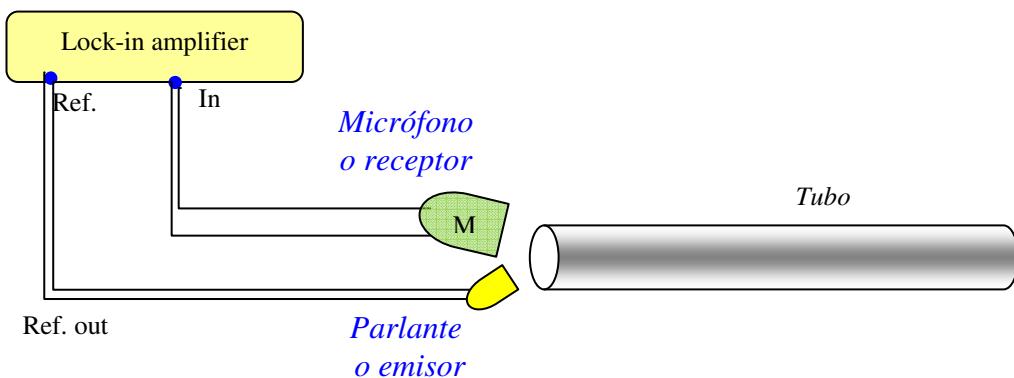
#### Sugerencias de trabajo:

- ✓ Para cada longitud del tubo, o altura de agua en la probeta, determine las frecuencias de resonancia  $f_n$  del tubo en función de orden  $n$  de cada resonancia.
- ✓ Represe gráficamente el parámetro:  $z_n = 4 \cdot L_{ef} \cdot f_n$  como función de  $(2n+1)$  para cada longitud  $L_{ef}$  utilizada. De ser así, represente todos los datos para todas las longitudes utilizadas en la representación  $z_n$  en función de  $(2n+1)$ . Determine la velocidad del sonido  $c$  y su incertidumbre.
- ✓ ¿Cómo se compara sus resultados con los valores aceptados de la velocidad del sonido para la misma temperatura?

### Proyecto 134. ♣♣ Estudio de las resonancias en un tubo usando un Lock-in Amplifier

**Equipamiento recomendado:** Un tubo de aproximadamente 0,6 m de longitud y 2 a 3 cm de diámetro, de acrílico, PVC o vidrio, o una probeta de 40 ó 50 cm. Un parlante pequeño o aurífono y un micrófono. Un generador de funciones y un amplificador *lock-in Amplifier*.

En este proyecto se busca realizar un análisis de las resonancias en un tubo, similar al realizado en los dos proyectos anteriores, utilizando un *lock-in amplifier*. Ver Apéndice E. La ventaja de utilizar este instrumento, es que brinda la posibilidad de hacer un barrido continuo de frecuencias y analizar simultáneamente la amplitud y la relación de fases entre la excitación y la respuesta. Además, usando este instrumento, no es necesario suprimir los ruidos que puedan estar presentes en el laboratorio durante el ensayo. Un posible arreglo experimental se ilustra en la Fig. 41.6. Elija un rango de barrido de frecuencias que cubra al menos las cinco primeras resonancias del tubo. Elija un paso de barrido que le permita determinar la forma de las resonancias.



**Figura 41.6** Arreglo experimental para estudiar las resonancias en un tubo usando un *lock-in amplifier*. La señal de Ref. out alimenta o excita el parlante. La señal del micrófono o detector acústico se conecta a la entrada (in) del Lock-in. Se elige un rango de barrido de frecuencias, y se estudia la respuesta del tubo.

### Sugerencias de trabajo:

- ✓ Para un tubo de una dada longitud, determine las frecuencias de resonancia  $f_n$  del tubo en función de orden  $n$  de cada resonancia.
- ✓ Analice la forma de las primeras dos resonancias, determine sus semianchos correspondientes.
- ✓ Represente gráficamente el parámetro:  $z_n=4L_{ef}f_n$  como función de  $(2n+1)$ . Determine la velocidad del sonido  $c$  y su incertidumbre.
- ✓ **Opcional:** de ser posible, introduzca una tiritita de tela o paño grueso dentro del tubo y estudie cómo varían las frecuencias de resonancia y los semianchos correspondientes.

### Anexo A- Accionador mecánico de frecuencia variable

Existen muchas maneras de construir un accionador o actuador mecánico. También existen versiones comerciales que se pueden adquirir de distribuidores de productos de laboratorio. Un modo simple de construir un accionador adecuado para muchos experimentos de mecánica, consiste en usar un parlante de audio de unos 30 a 100 Watt, de 15 a 40 cm de diámetro. Con cuidado se pega bien centrado con el parlante una tapa cilíndrica de plástico, que sea liviana y rígida. Una tapa de plástico de un frasco de café puede ser adecuada. Esta tapa se pega a una barra plástica rígida de unos pocos centímetros de longitud. En esencia, con esto ya se dispone de un accionador mecánico. Es necesario recordar que por lo general los parlantes de audio tienen muy baja impedancia y que los generadores de funciones no pueden entregar mucha potencia. Por consiguiente, no se debe conectar el generador de funciones directamente al parlante. Una sugerencia es conectar un amplificador de audio entre el generador de funciones y el parlante. Es conveniente verificar antes de la conexión que la potencia del amplificador no sobrepase la potencia máxima que puede soportar el parlante.

### Anexo B. Ondas de presión unidimensionales

Consideremos una onda unidimensional que se propaga a lo largo de un tubo uniforme de sección  $A$ , en la dirección positiva del eje  $x$ , como se ilustra en la Fig. 41.2. Consideremos un pequeño volumen de control  $V=A.dx$ . Aquí  $y(x,t)$  designa la función que describe el desplazamiento a lo largo del eje  $x$  de las partículas en el punto de coordenadas  $x$  en el instante  $t$ . La variación de volumen de control cuando pasa la onda vendrá dado por:

$$\delta V(x,t) = A.(y(x+dx,t) - y(x,t)) \quad (41.10)$$

El coeficiente de compresibilidad  $B$  de un gas se define como:

$$B = -V \frac{dP}{dV} \quad (41.11)$$

donde  $P$  es la presión absoluta del gas. Si  $P_0$ , es presión manométrica del gas, la presión total (o absoluta) del gas es  $P=P_0+p$ , donde  $p$  es la presión en exceso de la atmosférica o sea la debida a la onda de presión.

En una compresión adiabática, se cumple que  $P.V^\gamma=\text{constante}$ , de donde:  $B \approx \gamma P_0$ ,<sup>5,6</sup> aquí  $\gamma$  es el coeficiente adiabático del gas, igual al cociente de las capacidades caloríficas molares del gas a presión y volumen constantes. Por lo tanto,  $\delta V/V=-p/\gamma P_0$  y de las Ecs. (41.10) y (41.11) tenemos:

$$\frac{\delta V(x,t)}{V} = \frac{\partial y(x,t)}{\partial x} = -\frac{p}{\gamma P_0} \quad (41.12)$$

o sea

$$\frac{\partial y(x,t)}{\partial x} \propto -p \quad (41.13)$$

Aplicando la segunda ley de Newton al elemento de volumen  $V$ , resulta:

$$\delta F = A.dp = \rho A \delta x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (41.14)$$

o bien

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (41.15)$$

Combinando las Ecs.(41.12) y (41.15) tenemos:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (41.16)$$

con

$$c = \sqrt{\frac{P_0}{\rho}} = \sqrt{\frac{\gamma \cdot RT}{M}}, \quad (41.17)$$

donde hemos usado la ecuación de estado de los gases ideales  $P_0=\rho.RT/M$  siendo  $R$  la constante universal de los gases,  $M$  la masa molecular del gas y  $T$  su temperatura absoluta. La velocidad del sonido se denota con  $c$ .

De las Ecs.(41.13) y (41.15) vemos que las ondas sinusoidales de desplazamiento y presión presentan un desfasaje de  $\pi/2$  entre sí. En los extremos cerrados, tenemos nodos de desplazamiento ( $y=0$ , la pared impide el desplazamiento del gas) y antinodo de presión ( $dp/dx=0$ ). En los extremos abiertos de un tubo tenemos nodos de presión ( $p=0$ ) y antinodos de desplazamiento ( $dy/dx=0$ ). El oído y los micrófonos piezoelectrónicos y de carbón son sensibles y detectan las variaciones de presión.

La Ec. (41.16) se generaliza para el caso de la onda de presión en tres dimensiones a:

$$\nabla^2 p + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0. \quad (41.18)$$

## Referencias

- 
- <sup>1</sup> M. Alonso y E. J. Finn, *Física Vol.II - Campos y Ondas* - Fondo Educativo Interamericano Ed. inglesa. Addison-Wesley- Reading Mass (1967).
  - <sup>2</sup> H. D. Young, R. A. Freedman, et al., *Física Universitaria: Volumen I*, Addison Wesley, Pearson Ed. México D.F., (2009).
  - <sup>3</sup> R. Halliday, D. Resnick y M. Krane, *Física para estudiantes de ciencias e ingeniería*, Vol. I (México, 2003) (Trad. de Fundamentals of Physics, John Wiley & Sons, Inc. New York, 2002).
  - <sup>4</sup> R.W. Peterson, “*Coupling a speaker to a closed-tube resonator*,” Am. J. Phys. **63**, 489 (1995).
  - <sup>5</sup> R. Feynman , R. Leighton y Sand M. (1971) The Feynman Lectures On Physics, Mecánica, Radiación y Calor. Fondo Educativo Interamericano México.
  - <sup>6</sup> F. Crawford Jr. *Ondas. Berkeley Physics Course*. Volumen III.. Editorial Reverté (1977).

# Capítulo 42

## Interferencia de ondas acústicas. Batido

### Objetivos

El objetivo de este capítulo es estudiar el principio de superposición y el fenómeno de interferencia de ondas. Para ello, estudiaremos la superposición de ondas sonoras generadas con diapasones que vibran a frecuencias audibles. Cuando las frecuencias de vibración son cercanas, se observa (y se oye) el fenómeno de batido.

- ✓ Principio de superposición
- ✓ Interferencia
- ✓ Batido

### 42.1 Principio de superposición

Una característica fundamental y definitoria de las ondas es que satisfacen el principio de superposición.<sup>1</sup> Esto quiere decir que si un punto es perturbado simultáneamente por dos o más ondas del mismo tipo, la amplitud resultante será igual a la suma de las amplitudes individuales mientras que la intensidad, es decir, la energía transportada por la onda por unidad de área y tiempo, es proporcional al cuadrado de la amplitud resultante. Esta propiedad de los movimientos ondulatorios se conoce como principio de superposición y explica los fenómenos más importantes, a veces curiosos, que ocurren con las ondas. El fenómeno de la interferencia es uno de ellos. Debido a este efecto, la intensidad resultante en un punto a veces supera a la de las ondas individuales que la componen y a veces la intensidad resultante puede ser nula.

En este capítulo estudiamos la *interferencia de ondas acústicas* usando sonidos puros de frecuencias cercanas, que da lugar al fenómeno de *batido*. Este efecto puede ser escuchado por nuestros oídos, pero también puede ser registrado usando un sistema de adquisición de datos.



**Figura 42.1.** A la izquierda se puede apreciar un diapasón simple. A la derecha diapasones con cajas de resonancia. En la imagen de la derecha se aprecia que uno de los diapasones tiene un sobrepeso para alterar ligeramente su frecuencia de vibración.

## 42.2 Batido

Una onda plana que viaja en la dirección positiva del eje  $z$  con velocidad  $c$  y frecuencia  $f$  puede representarse por:

$$X(z, t) = A \operatorname{sen} \left[ 2\pi f (t - \frac{z}{c}) \right] = -A \operatorname{sen} [k(z - c t)] . \quad (42.1)$$

En esta expresión,  $A$  es la amplitud y  $k = 2\pi f/c = 2\pi/\lambda$  es el número de ondas.  $\lambda = c/f$  es la longitud de onda y  $t$  es el tiempo. La intensidad de esta onda en un dado punto  $z_0$  es:

$$I(z_0, t) \propto |X(z_0, t)|^2 , \quad (42.2)$$

y la intensidad media, que es lo que el oído percibe como volumen o intensidad sonara, es el promedio temporal de la expresión anterior, o sea:

$$\bar{I}(z_0) = I_0 = \langle I(z_0) \rangle = \frac{|A|^2}{2} . \quad (42.3)$$

Consideremos el caso de dos ondas de igual intensidad y frecuencia ligeramente distinta  $f_1$  y  $f_2$  que se superponen. Por simplicidad, consideramos el caso especial en que ambas ondas tengan la misma amplitud  $A$ . Según el principio de superposición, la amplitud resultante de estas dos ondas será:<sup>2</sup>

$$X_{1,2}(z, t) = X_1 + X_2 = A \operatorname{sen} \left[ 2\pi f_1 (t - \frac{z}{c}) \right] + A \operatorname{sen} \left[ 2\pi f_2 (t - \frac{z}{c}) \right] . \quad (42.4)$$

O también:

$$X_{1,2}(z, t) = 2A \operatorname{sen} \left[ 2\pi \left( \frac{f_1 + f_2}{2} \right) (t - \frac{z}{c}) \right] \cos \left[ 2\pi \left( \frac{f_1 - f_2}{2} \right) (t - \frac{z}{c}) \right] , \quad (42.5)$$

o

$$X_{1,2} = 2A \operatorname{sen} \left[ 2\pi \bar{f} (t - \frac{z}{c}) \right] \cos \left[ 2\pi \frac{\Delta f}{2} (t - \frac{z}{c}) \right] . \quad (42.6)$$

Con:

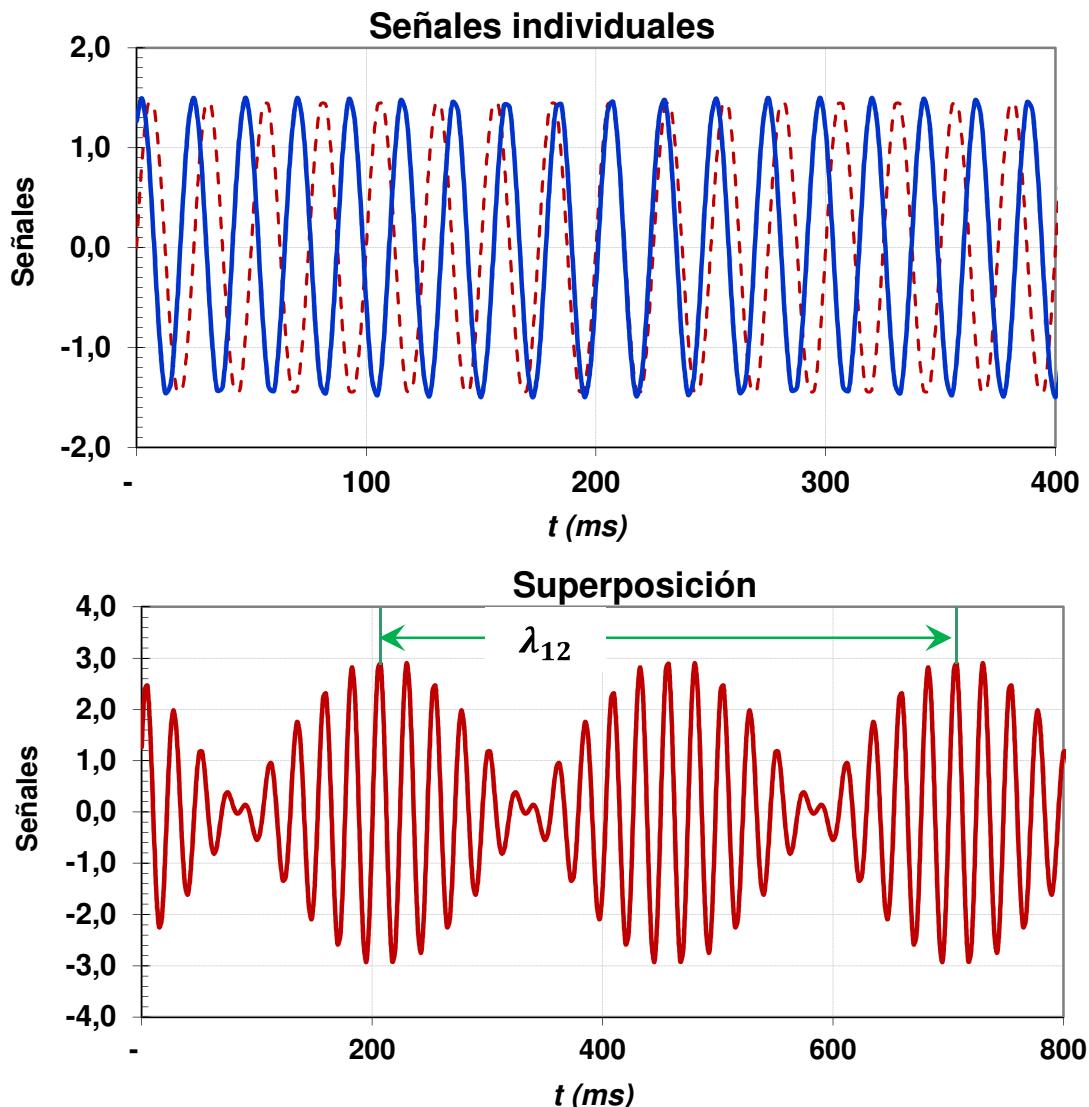
$$\bar{f} = (f_1 + f_2)/2 \quad \text{y} \quad \Delta f = (f_1 - f_2) = c/\lambda_{12} . \quad (42.7)$$

La intensidad media, en un dado punto  $z = z_0$ , será:

$$\bar{I}(z_0, t) = \overline{|X_{1,2}(z_0, t)|^2} = A \cos^2 \left[ 2\pi \frac{\Delta f}{2} (t - \frac{z_0}{c}) \right] = 2I_0 \cos^2 \left[ 2\pi \left( \frac{\Delta f}{2} t - \varphi_0 \right) \right] . \quad (42.8)$$

Este resultado indica que la intensidad resultante, no es más constante, sino que variará en el tiempo con frecuencia  $\Delta f = (f_1 - f_2) = c/\lambda_{12}$ . Aquí  $\lambda_{12}$  es la longitud de onda asociada al batido, ver Figura 42.2. Este efecto producirá una modulación de la intensidad del sonido llamado *batido* y

es fácil de percibir. Este fenómeno es en parte el causante del sonido desagradable que se escucha en instrumentos mal afinados.



**Figura 42.2.** Arriba, dos señales individuales, de igual amplitud y frecuencias ligeramente distintas. Abajo, señal resultante de la suma de ambas señales de arriba. El batido se manifiesta en la variación de amplitud de la señal resultante.

### Proyecto 135. Escuchando la superposición de ondas-Batidos

**Equipamiento recomendado:** Dos diapasones que vibren a la misma frecuencia. También puede usarse un sintetizador de sonido en una PC.

Una manera de producir sonidos puros es mediante diapasones, que son dispositivos usados para afinar instrumentos musicales. Por esta razón son fabricados para emitir sonidos puros correspondientes a notas musicales. Cuando se golpean y vibran producen sonidos de frecuencias muy bien definidas. Algunas veces se montan sobre una caja de resonancia para aumentar su sonoridad.<sup>3</sup> Para este experimento se requiere contar con dos diapasones similares, es decir, que produzcan sonidos de la misma frecuencia; se escuchará mejor si se dispone de

cajas de resonancias donde montarlos, pero esto no es imprescindible. Otro modo de generar sonidos puros es mediante un sintetizador de sonido. Existen muchos programas, varios de ellos de uso libre, por ejemplo Audacity,<sup>φ</sup> Sound Forge,<sup>χ</sup> etc., que permiten generar sonidos de frecuencias puras en cada canal de salida o parlante de una PC.<sup>4</sup> En particular, la Universidad de Colorado, en Boulder, cuenta con un conjunto excelente de simulaciones interactivas PhET,<sup>‡</sup> que son de uso libre. Asimismo, existen aplicaciones para generar interferencias de sonido para teléfonos celulares.<sup>§</sup> Estos programas pueden reemplazar a los diapasones para estudiar los efectos que analizamos aquí.

### Sugerencias de trabajo:

- ✓ Usando un diapasón, genere un sonido puro y escúchelo. “Entrene” su oído para reconocer cómo cambia la intensidad del sonido en función del tiempo, a medida que la vibración del diapasón se amortigua y se apaga. Luego ponga a vibrar los dos diapasones iguales juntos (o dos señales puras de la misma frecuencia en el sintetizador) y escuche el sonido superpuesto. Describa si escucha (observa) cambios sensibles en el sonido resultante respecto de cuando sólo vibraba uno.
- ✓ A continuación añada firmemente sobre un brazo de uno de los diapasones un pequeño peso, por ejemplo, un broche o clip metálico de algunos gramos que se sujeté firmemente al brazo. La adición de este peso producirá un leve cambio en la frecuencia de oscilación del diapasón, y el sonido que generará será de distinta frecuencia que la del sonido puro original. Para cambiar la frecuencia de un diapasón, cambie la ubicación del peso sobre el brazo. Si utiliza un sintetizador, varíe levemente la frecuencia en uno de los canales la frecuencia en unos pocos Hz. En este caso observará, o escuchará, que aparece un batido o variación de intensidad del sonido resultante. Este efecto es consecuencia de la superposición de dos ondas sonoras de frecuencias similares, que se conoce como batido.

## Proyecto 136. Experimentos cuantitativos – Batido

**Equipamiento recomendado:** Dos diapasones que vibren a la misma frecuencia. También puede usarse un sintetizador de sonido en una PC. Un micrófono conectado a un sistema de adquisición de datos por computadora o bien una segunda PC con tarjeta de sonido.

En este proyecto nos proponemos medir lo que hemos observado en el proyecto anterior.

### Sugerencias de trabajo:

- ✓ Con los diapasones operando a frecuencias ligeramente distintas, o bien con un sintetizador operando con dos frecuencias distintas en cada canal, registre el sonido resultante con un sistema de toma de datos o bien con una segunda PC.
- ✓ Con un micrófono puede convertir el sonido a señal eléctrica (voltaje). El micrófono puede conectarse a un sistema de toma de datos por computadora. También puede

<sup>φ</sup> [www.audacity.com](http://www.audacity.com), y <http://en.wikipedia.org/wiki/Audacity>

<sup>χ</sup> [http://en.wikipedia.org/wiki/Sound\\_Forge](http://en.wikipedia.org/wiki/Sound_Forge)

<sup>‡</sup> Simulaciones Interactivas de fenómenos físicos, del proyecto PhET™ de la Universidad de Colorado.

<https://phet.colorado.edu/es/>

<sup>§</sup> Physics Beat Phenomena Simulator By Fadi Shaghil, Apple, iTunes. <https://itunes.apple.com>

conectar el micrófono a la tarjeta de sonido de otra PC y usar algún programa para la digitalización y el análisis del sonido resultante.

- ✓ Una vez logrado el efecto de batido, apague una de las fuentes y para poder registrar cada señal operando por sí sola, registre el sonido que emite cada diapasón o canal y mida sus frecuencias correspondientes. Si usa un sistema de adquisición de datos, la mayoría de ellos disponen de analizadores de frecuencia, del tipo FFT (Fast Fourier Transform) que permiten determinar fácilmente las frecuencias presentes en una señal. También existen muchos programas que pueden hacer esta operación matemática y devolver el espectro de Fourier de la señal registrada. Las frecuencias discretas presentes en el espectro de Fourier, constituyen las frecuencias presentes en la señal analizada. Programas tales como Excel®Microsoft, Matlab® MathWorks, Mathematica ®Wolfram Research, Inc., Origin®OriginLab, entre otros, pueden realizar este tipo de operación.
- ✓ Si usa una tarjeta de adquisición de datos, asegúrese de que la frecuencia de muestreo ( $f_m$ ) de la tarjeta sea lo suficientemente alta para poder medir la onda con mucho detalle (para una onda de frecuencia  $f$  es aconsejable  $f_m > 5f$ ). Conviene realizar el experimento en una habitación sin ruido de fondo, para minimizar los efectos de los sonidos espurios del ambiente. Si usa una segunda PC para registrar el sonido, las tasas de adquisición de las tarjetas de sonido en general son superior a los 40 KHz. Las señales registradas en formato .wav pueden fácilmente ser transformadas a una tabla de números de tiempo y voltaje. De hecho, programas como Matlab u Origin, entre otros, pueden hacer esta transformación.
  - Ajuste una función sinusoidal de la forma de la Ec. (42.1) a sus datos de voltaje en función del tiempo, obtenidos experimentalmente. Varíe manualmente los parámetros ( $A$ ,  $f$  y  $\phi$ ) hasta lograr el mejor ajuste posible. Por lo general, es fácil obtener un valor bien confiable de  $f$  si se tienen varios ciclos de la oscilación y se cuida que en todos ellos los máximos, mínimos y cruces por cero coincidan.
  - Determine por separado las frecuencias  $f_1$  y  $f_2$ .
- ✓ Una vez caracterizadas las frecuencias de cada diapasón o canal, póngalos a oscilar simultáneamente, de modo que escuche los batidos. Registre con el micrófono esta señal y determine la frecuencia del batido.
  - Determine las frecuencias  $\bar{f}$  y  $\Delta f$ .
  - Compare sus resultados experimentales con los esperados según la Ec.(42.7)

## Referencias

<sup>1</sup> R. Feynman, R. B. Leighton and M. Sands, *The Feynman Lectures on Physics*, Vol. I y Vol. III (Addison-Wesley, New York, 1963; versión en español de Addison-Wesley Iberoamericana, 1987).

<sup>2</sup> F. Sears, M. Zemansky, H. Young y R. Freedman, *Física universitaria*, vol. I, ed. 11 (Adison-Wesley Longman, México, 2005).

<sup>3</sup> J. G. Roederer, *Acústica y Psicoacústica de la Música* (Ricordi, Buenos Aires, 1997; versión en español de *The Physycs and Psycophysics of Musics*, Springer-Verlag, New York, 1995).

<sup>4</sup> Software synthesizer, From Wikipedia, the free encyclopedia. [http://en.wikipedia.org/wiki/Software\\_synthesizer](http://en.wikipedia.org/wiki/Software_synthesizer)

# Capítulo 43

## Caja cuadrada - Resonadores de Helmholtz

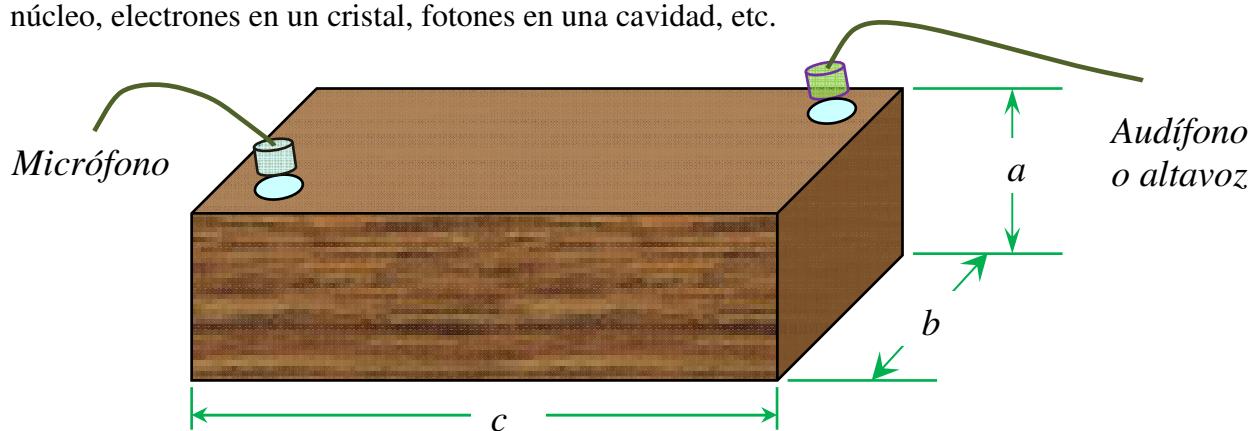
### Objetivos

- ✓ Cavidades resonantes
- ✓ Ondas estacionarias en una caja prismática
- ✓ Resonancia de una botella
- ✓ Resonadores de Helmholtz

Las cavidades resonantes son especialmente interesantes para analizar el comportamiento de las ondas sonoras. Mediante experimentos simples podemos observar el fenómeno de resonancia en distintas cavidades y determinar sus frecuencias características. En el Cap. 41 estudiamos el caso de ondas unidimensionales; en esta sección nos proponemos generalizar este tipo de estudio a sistemas tridimensionales. Estos experimentos también permiten determinar indirectamente la velocidad del sonido. En primer término estudiamos las características de las ondas estacionarias en una caja prismática. Este modelo es particularmente interesante por ser el análogo clásico de una partícula cuántica en una caja cuadrada. Por último, analizamos los modos normales de oscilación de una botella, que es un ejemplo de resonadores de Helmholtz.

### 43.1 Ondas estacionarias en una caja cuadrada

En los capítulos anteriores estudiamos los casos de ondas estacionarias en una dimensión (tubos abiertos y cerrados). Aquí nos proponemos estudiar los distintos modos de oscilación de una caja prismática.<sup>1,2,3</sup> Este problema es de mucho interés e importancia tanto desde el punto de vista teórico como práctico. Por un lado, éste es uno de los pocos sistemas que puede resolverse analíticamente y sus resultados pueden compararse directamente con las mediciones. Por otra parte, este sistema es un paradigma que permite entender muchos otros problemas importantes, como el de los niveles discretos de energías de una partícula confinada en una caja, tan frecuente en los sistemas cuánticos. De hecho, el modelo que analizamos en esta sección es el análogo clásico de una partícula que está confinada en un volumen finito. Por ejemplo, nucleones en un núcleo, electrones en un cristal, fotones en una cavidad, etc.



**Figura 43.1.** Caja cuadrada, de lados  $a \times b \times c$ . La caja tiene dos aberturas que permiten colocar un parlante y un micrófono para estudiar los modos normales de oscilación o las frecuencias propias de la caja.

En este caso suponemos que tenemos una caja prismática de dimensiones  $a$ ,  $b$  y  $c$ . Como vimos en el Cap. 41, la presión del gas en la caja debe satisfacer la ecuación de ondas:<sup>4</sup>

$$\nabla^2 p + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0, \quad (43.1)$$

donde  $c$  es la velocidad del sonido. La presión tiene que cumplir las siguientes condiciones de borde en cada una de las paredes:

$$\left( \frac{\partial p}{\partial x} \right)_{pared(y,z)} = 0, \quad \left( \frac{\partial p}{\partial y} \right)_{pared(x,z)} = 0, \quad \left( \frac{\partial p}{\partial z} \right)_{pared(x,y)} = 0. \quad (43.2)$$

Usando el método de separación de variables, es fácil ver que una solución de la ecuación de ondas (43.1) es:

$$p = A e^{i\omega t} \cos\left(\frac{\pi}{a} n_1 x\right) \cos\left(\frac{\pi}{b} n_2 y\right) \cos\left(\frac{\pi}{c} n_3 z\right), \quad (43.3)$$

con  $n_1, n_2$ , y  $n_3 = 0, 1, 2, 3, \dots$ . Reemplazando la Ec.(43.3) en la Ec.(43.1), se puede comprobar que esta ecuación es efectivamente la solución buscada. Además, satisface la condición de borde de la Ec.(43.2) en todas las paredes del recinto. Reemplazando la Ec.(43.3) en la Ec. (43.1) obtenemos una condición para  $\omega$ , a saber:

$$\omega^2 = \pi^2 c^2 \left[ \left( \frac{n_1}{a} \right)^2 + \left( \frac{n_2}{b} \right)^2 + \left( \frac{n_3}{c} \right)^2 \right], \quad (43.4)$$

o bien, en términos de la frecuencia:

$$f_{1,2,3} = \frac{c}{2} \sqrt{\left( \frac{n_1}{a} \right)^2 + \left( \frac{n_2}{b} \right)^2 + \left( \frac{n_3}{c} \right)^2}. \quad (43.5)$$

Esta relación nos dice que las **frecuencias naturales de oscilación** del gas en la caja están *cuantizadas*, o sea que sólo pueden oscilar con ciertas frecuencias discretas, determinadas por la Ec. (43.5). La tríada de números  $(n_1, n_2, n_3)$  caracteriza la frecuencia posible,  $f_{1,2,3}$  y los modos de oscilación o **modos normales** asociados a estas frecuencias. Un modo de falsar estas predicciones consiste en construir un resonador de caja cuadrada y estudiar sus frecuencias propias.

### Proyecto 137. Ondas estacionarias en una caja

**Equipamiento recomendado:** Una caja prismática de madera, vidrio o acrílico de aproximadamente  $17 \times 25 \times 32 \text{ cm}^3$ , con dos agujeros de unos 2 cm de diámetro en dos de sus esquinas opuestas. Un altavoz pequeño o audífono conectado a un generador de funciones y un micrófono. Un generador de funciones (GF) y un osciloscopio de dos canales o bien un sistema de adquisición de datos conectados a una PC.

Evite que las dimensiones  $a$ ,  $b$  y  $c$  de la caja prismática sean múltiplos unas de otras, para así impedir que las frecuencias propias se puedan superponer. Es conveniente que la tapa superior de la caja tenga dos orificios en extremos opuestos para introducir el emisor y el receptor. Para este experimento se requiere un emisor acústico (altavoz o audífono conectado a un generador de funciones) que puede emitir sonidos puros, es decir, de una frecuencia bien definida. Para determinar las frecuencias de resonancias o modos normales de oscilación del gas dentro de la

caja, coloque el emisor cerca de uno de los orificios y el micrófono en la otra abertura y realice un barrido en frecuencia con el generador de funciones (GF). Trate de ubicar las frecuencias de resonancia, controlando la frecuencia con el generador de funciones. Cuide que la amplitud del generador sea constante. Las resonancias se manifiestan por un pronunciado aumento de la amplitud de la señal de salida del receptor. Si usa un osciloscopio de dos canales, con un canal conectado al receptor y el otro a la entrada del emisor, si se lo opera en modo X-Y, cuando el sistema alcance su resonancia, la representación  $Y(X)$  será una recta, ver. Cap. 41.

### Sugerencias de trabajo:

- ✓ Determine las primeras 10 ó 12 frecuencias de resonancia de la caja.
  - Utilizando una tabla de cuatro columnas, registre:
    - En la primera columna, las frecuencias encontradas experimentalmente, en orden ascendente.
    - En la segunda columna transcriba las correspondientes frecuencias obtenidas usando la Ec. (43.5), tratando de que en cada fila las frecuencias tengan la mejor concordancia.
    - En la tercera columna anote el valor de la tríada  $(n_1, n_2, n_3)$  que caracteriza el modo o frecuencia registrada en la segunda columna.
    - Usando la nueva variable (o seudovariable)  $N$ , definida como:

$$N = \sqrt{\left(\frac{n_1}{a}\right)^2 + \left(\frac{n_2}{b}\right)^2 + \left(\frac{n_3}{c}\right)^2}, \quad (43.6)$$

registre el valor de esta nueva variable en la cuarta columna de la tabla. Realice un gráfico de las frecuencias obtenidas tanto experimentalmente como la calculada con la expresión (43.6) (primera y segunda columna de la tabla) como función de  $N$ . Discuta el grado de concordancia o de discrepancia entre las frecuencias determinadas experimentalmente con las obtenidas por la expresión (43.5). ¿Qué conclusiones obtiene respecto de la validez del modelo propuesto?

- ✓ Usando el gráfico anterior, varíe el valor de la velocidad del sonido  $c$  hasta obtener el mejor acuerdo entre los datos experimentales y teóricos, ver Ec.(43.5). ¿Cuál es el valor de  $c$  que obtiene? ¿Cómo se compara este valor con los valores esperados de  $c$  o los valores tabulados?

### Proyecto 138. Ondas estacionarias en una caja usando un lock-in amplifier

**Equipamiento recomendado:** Una caja prismática de madera, vidrio o acrílico de aproximadamente  $17 \times 25 \times 32 \text{ cm}^3$ , con dos agujeros de unos  $2 \text{ cm}$  de diámetro en dos de sus esquinas opuestas. Un altavoz pequeño o audífono y un micrófono. Un generador de funciones y un amplificador lock-in amplifier.

En este proyecto se busca realizar un análisis de las resonancias en un tubo, similar al realizado en el proyecto anterior, utilizando un *lock-in amplifier* de modo análogo a como se utilizó en el Cap. 41 (ver también Apéndice E). La ventaja de utilizar el *lock-in amplifier* es que brinda la posibilidad de hacer un barrido continuo de frecuencias y analizar simultáneamente la amplitud y la relación de fases entre la excitación y la respuesta. Además, usando este

instrumento, no es necesario suprimir los ruidos que puedan estar presentes en el laboratorio durante el ensayo. Un posible arreglo experimental se ilustra en la Fig. 41.6. Elija un rango de barrido de frecuencias que cubra al menos las 10 ó 12 primeras resonancias de la caja. Elija un paso de barrido que le permita determinar la forma de las resonancias.

### Sugerencias de trabajo:

- ✓ Determine las primeras 10 ó 12 frecuencias de resonancia de la caja.
- ✓ Siguiendo las sugerencias realizadas en el proyecto anterior, analice el grado de concordancia entre las frecuencias propias de la caja determinadas experimentalmente y el modelo propuesto: Ec.(43.5).
- ✓ **Opcional:** Estudie los semianchos de las resonancias estudiadas. Los semianchos se definen como la separación en frecuencia en la que la amplitud cae a la mitad de su valor en resonancia.
- ✓ **Opcional:** De ser posible, introduzca una tiritita de tela o paño dentro de la caja y estudie cómo se modifican las frecuencias de resonancia y los semianchos de frecuencias. Trate de explicar sus resultados, usando como analogía un sistema de masa y resorte con roce.

## 43.2 Resonancia de una botella - resonador de Helmholtz

Es bien conocido el hecho de que al soplar por el borde de un tubo cerrado o una botella es posible lograr que vibren emitiendo un sonido característico.<sup>§</sup> Ésta es una propiedad general de muchos sistemas cerrados, los cuales tienen frecuencias de vibración bien definidas. En especial, algunos instrumentos de viento, como por ejemplo la zampoña,<sup>\*\*</sup> común en algunos países de Latinoamérica, se construyen con tubos huecos tapados (cañas) y basan la generación del sonido en esta característica.

Sin embargo, a diferencia del caso de un tubo, donde es relativamente fácil determinar las frecuencias normales de oscilación, en el caso de una botella en general no es simple determinar las frecuencias de vibración dada la no uniformidad de su sección transversal. Para el caso de osciladores que tengan las características de una botella, es decir, que consistan en un volumen grande (el cuerpo de la botella) y un cuello pequeño, es posible calcular la frecuencia fundamental de oscilación, usando un procedimiento muy ingenioso ideado por Helmholtz, de allí que un resonador de este tipo sea conocido como resonador de Helmholtz.

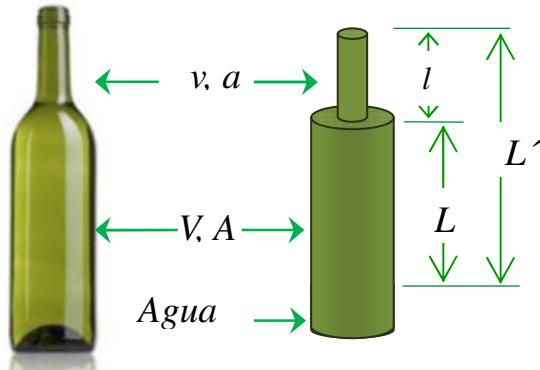
El modelo que usaremos parte de suponer que la botella está compuesta de dos volúmenes, de manera similar a como se indica en la Fig. 43.2. Más precisamente, usaremos como modelo de una botella el sistema que se representa en la parte derecha de dicha figura. Llamamos  $V$  al volumen del cuerpo de la botella, el cilindro mayor, que supondremos tiene una altura  $L$  y una sección transversal de área  $A$ . Similarmente, suponemos que el cuello de la botella, el cilindro menor, tiene un volumen  $v$ , longitud  $l$  y sección de área  $a$ .

Si agregamos agua a la botella, podemos variar en forma simple las dimensiones de su volumen mayor, al mismo tiempo que mantenemos constante la geometría del cuello. Para calcular la frecuencia fundamental de oscilación de este sistema lo asimilaremos a un sistema masa-resorte, en el que la masa que vibra es el volumen del cuello ( $v$ ) y el volumen mayor de aire actúa como resorte. Este sistema tiene una frecuencia de oscilación dada por:

<sup>§</sup> Ver por ejemplo Berlin's Bottles Only Quintet en Youtube: <http://www.youtube.com/watch?v=IAHGtzZY5Yg>

<sup>\*\*</sup> Ver por ejemplo como fabricar una zampoña en Youtube: <http://www.youtube.com/watch?v=Tfx0htExiZ4>

$$\omega_0^2 = (2\pi f_0)^2 = \frac{k}{m} . \quad (43.7)$$



**Figura 43.2** Modelo esquemático (derecha) de una botella real (izquierda). Suponemos que la botella contiene agua, de modo que el modelo se refiere a la región de la botella ocupada por aire.  $A$ ,  $V$  y  $L$  representan el área de la sección transversal, el volumen y la altura del volumen mayor;  $a$ ,  $v$  y  $l$  son los valores análogos para el cuello.

En la Ec. (43.7)  $f_0$  es la frecuencia fundamental,  $k$  es la constante elástica y  $m$  es la masa del volumen de aire del cuello de la botella. Una justificación más detallada de este modelo se puede ver en la bibliografía.<sup>5,6,7</sup> En nuestro caso, evaluaremos la validez del modelo por su grado de acuerdo con los resultados experimentales que obtengamos.

Recordemos que el coeficiente de compresibilidad  $B$  de un gas se define como se puede ver en el Anexo  $B$  del Cap. 41:<sup>1,4</sup>

$$B = -V \frac{\Delta P}{\Delta V} \approx \gamma \cdot P , \quad (43.8)$$

donde  $P$  es la presión y  $\gamma$  el coeficiente adiabático del aire. Asimismo, la velocidad del sonido  $c$  puede expresarse en términos del coeficiente de compresibilidad  $B$  y de la densidad  $\rho$  como:<sup>1,4</sup>

$$c^2 = \frac{B}{\rho} = \frac{\gamma \cdot P}{\rho} = \frac{\gamma \cdot R T}{M} . \quad (43.9)$$

Volviendo a la botella, si el volumen  $v$  se desplaza una distancia  $\Delta x$ , el volumen de aire del volumen inferior (volumen mayor)  $V$  variará en  $\Delta V = a \Delta x$ , y la fuerza  $F$  que actuará sobre el volumen del cuello será, usando la Ec.(43.8):

$$F = -a \Delta P = a \cdot B \cdot \frac{\Delta V}{V} = -\left( B \frac{a^2}{V} \right) \Delta x = -k \Delta x . \quad (43.10)$$

Por lo tanto, de la Ec. (43.7) tenemos:

$$\omega_0^2 = \frac{f_0^2}{4\pi^2} = \frac{B \cdot a^2}{\rho \cdot v \cdot V} = \frac{a^2 c^2}{v V} = \left(\frac{a}{A}\right) \left(\frac{c^2}{l L}\right). \quad (43.11)$$

Esta última expresión también se puede escribir en términos de la altura  $L'$ , medida desde el nivel del agua dentro de la botella al borde del cuello, como indica la Fig. 43.1. Si de la Ec.(43.11) despejamos  $L$ , tenemos:

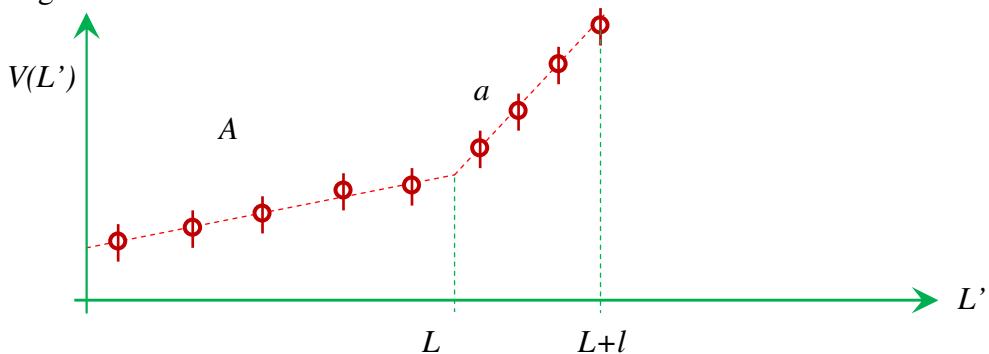
$$L' = L + l = 4\pi^2 \left( \frac{a c^2}{A l} \right) \left( \frac{1}{f_0^2} \right) + l. \quad (43.12)$$

Por lo tanto, para poner a prueba experimental este modelo, lo que podemos hacer es variar el volumen de aire en la botella agregándole agua. Para cada configuración de la botella medimos la altura  $L'$  y la correspondiente frecuencia fundamental  $f_0$  de oscilación. Si realizamos un gráfico de  $L'$  en función de  $(1/f_0^2)$ , y si el modelo es adecuado, los datos experimentales deberían estar alineados en una recta. Además, la pendiente de la recta estará relacionada con la geometría de la botella y con la velocidad de sonido; por lo tanto, podremos determinar esta última magnitud.

### Proyecto 139. Resonancias en una botella. Resonadores de Helmholtz I

**Equipamiento recomendado:** Una botella de vidrio. Un altavoz pequeño o audífono conectado a un generador de funciones y un micrófono. Un osciloscopio de dos canales o bien un sistema de adquisición de datos conectado a una PC.

Para una botella de gaseosa, cerveza o whisky, estudie los modos de resonancia. Una botella de volumen entre  $350 \text{ cm}^3$  y  $1000 \text{ cm}^3$  puede ser adecuada. Para estudiar las frecuencias fundamentales de oscilación de aire de la botella, use el dispositivo ilustrado esquemáticamente en la Fig. 43.3. Preferentemente, elija una botella que en lo posible tenga una forma lo más parecida a la del modelo de la Fig. 43.2, es decir que tenga un cuerpo y un cuello de forma de cilindros regulares.



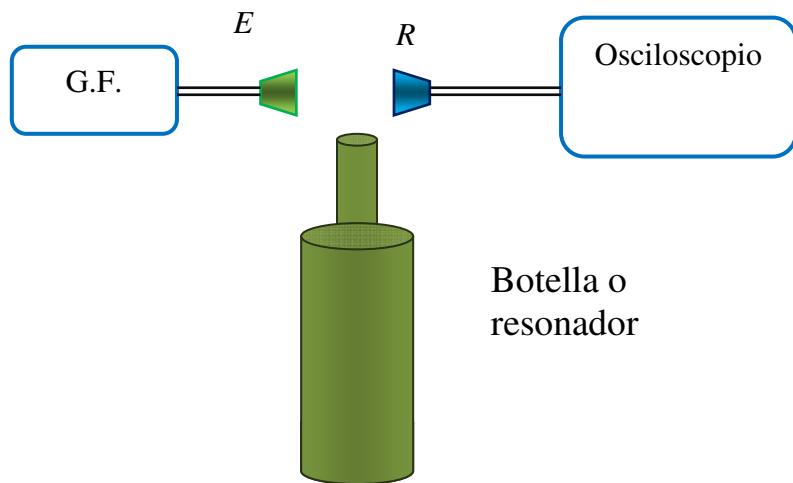
**Figura 43.3** Modelo esquemático para determinar los parámetros de la botella. Las pendientes de las rectas permiten conocer los parámetros  $a$  y  $A$ .

Para determinar los valores de la geometría de la botella,  $a$ ,  $A$ ,  $L$  y  $l$ ; puede medirlos directamente, aunque un método más adecuado es el siguiente: Comenzando con la botella vacía, se van agregando repetidamente volúmenes constantes de agua,  $\Delta V_0$ , y se va midiendo simultáneamente el valor de la altura  $L'$ . Luego se grafica el volumen acumulado de agua  $V(L') =$

$n \Delta V_0$  como función de  $L'$ . Para una botella de geometría simple, es decir formada por dos cilindros regulares, se observará que esta representación gráfica, como se muestra en la Fig. 43.3, puede ser bien caracterizada por dos rectas de pendientes diferentes. Cada una de esas pendientes son directamente:  $a$  y  $A$ : el área del cuello y del volumen inferior, respectivamente. El valor de  $L'$ , donde estas dos rectas se cortan, nos da una buena estimación de  $L$  mientras que el valor del volumen totalmente lleno nos da el valor de  $l$ . Desde luego, el valor de  $L+l$  puede medirse directamente. De manera análoga, los valores encontrados de  $a$  y  $A$  pueden contrastarse con mediciones directas de los diámetros correspondientes.

Para determinar la frecuencia de resonancia fundamental de la botella, puede proceder de modo análogo a como se describe en el Proyecto 132 del Cap. 41. Para ello, con el emisor y el receptor ubicados cerca de la boca de la botella (Fig. 43.4), realice un barrido en frecuencia y trate de ubicar las frecuencias de resonancia, controlando la frecuencia con el generador de funciones que alimenta el emisor. Cuide que la amplitud del generador de funciones sea constante, lo que se puede controlar si se monitorea la amplitud de la señal de entrada al emisor usando el segundo canal del osciloscopio o del sistema de adquisición. Las resonancias se manifiestan por un pronunciado aumento de la amplitud de la señal de salida del receptor. Por lo regular, las frecuencias de resonancia son inferiores a los 2 kHz y, en general, en resonancia puede escucharse con el oído claramente el aumento de la intensidad del sonido.

Con la botella sin agua, estudie las primeras dos o tres resonancias. Luego proceda a agregar agua paulatinamente y, para cada carga de agua, caracterice las dos primeras resonancias y mida las alturas  $L'$ .



**Figura 43.4** Dispositivo experimental para estudiar los modos de resonancia de una botella o un resonador de Helmholtz. El generador de funciones (G.F.) excita al emisor o altavoz ( $E$ ) y un receptor o micrófono ( $R$ ) conectado a un osciloscopio registra la señal de salida.

#### Sugerencias de trabajo:

- ✓ A medida que va cargando la botella con agua, mida el valor de la altura  $L'$  y la frecuencia de resonancia más baja (frecuencia fundamental  $f_0$ ). Realice un gráfico de  $L'$  en función de  $1/f_0^2$ . ¿Qué relación encuentra? ¿Esta representación gráfica está de acuerdo con las expectativas del modelo, Ec. (43.12)?

- ✓ A partir del gráfico de  $L'$  en función de  $1/f_0^2$ , estime el valor de la velocidad del sonido y su incertidumbre. Compare el valor obtenido para  $c$  con los valores de velocidad del sonido obtenidos de tablas, para las mismas condiciones de temperaturas que las usadas en el experimento.

## Proyecto 140. Resonadores de Helmholtz II

**Equipamiento recomendado:** Un modelo de botella formado por dos cilindros de distintos diámetros. Un altavoz pequeño o audífono conectado a un generador de funciones y un micrófono. Un generador de funciones y un osciloscopio de dos canales o bien un sistema de adquisición de datos conectado a una PC.

Una forma de realizar un ensayo más detallado del modelo anterior consiste en fabricar un modelo de botella usando dos tubos de plástico, PVC o acrílico, con una tapa inferior (ver Fig. 43.2, derecha). Además, es conveniente disponer de un sistema que tenga distintos largos de cuello para controlar el efecto de la variación de este parámetro. Un modo alterativo de realizar este experimento es disponer de varias botellas de vidrio de cuello largo y homogéneo, a las que se les va cortando el cuello a distintas longitudes. En este caso debe tenerse mucho cuidado y experiencia para cortar el vidrio. Lo más aconsejable es que esta operación la realice un especialista en un taller de vidrio.

### Sugerencias de trabajo:

- ✓ Para cada largo de cuello, mida la frecuencia de resonancia más baja  $f_0$ . Realice un gráfico de  $L'$  en función de  $1/f_0^2$ .
- ✓ Para cada largo de cuello, realice un gráfico similar al anterior y discuta sus resultados.
- ✓ Discuta la validez del modelo propuesto.

## Referencias

<sup>1</sup> M. Alonso y E. J. Finn, *Física, vol.II, Campos y ondas, y vol. III, Fundamentos cuánticos y estadísticos* (Fondo Educativo Interamericano; ed. inglesa, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1967).

<sup>2</sup> H. L. Armstrong, “An experiment on sound in an enclosure,” *Am. J. Phys.* **51**, 1052 (1983).

<sup>3</sup> U. Ingard and D. C. Galehouse, “Second-order pressure distribution in an acoustic normal mode in a rectangular cavity,” *Am. J. Phys.* **39**, 811 (1971).

<sup>4</sup> F. Sears, M. Zemansky, H. Young y R. Freedman y, *Física universitaria*, vol. 1, ed. 12 (Pearson, Prentice Hall, México, 2009).

<sup>5</sup> P. M. Morse, *Vibration and sound*, 2<sup>nd</sup> ed. (Mc Graw Hill, New York, 1948).

<sup>6</sup> G. Smith and P. D. Loly, “The great bear bottle experiment,” *Am. J. Phys.* **47**, 515 (1979).

<sup>7</sup> M. P. Silverman and E. R. Worthy , “Musical mastery of a Coke bottle: physical modeling by analogy,” *Phys. Teach.* **36**, 70 (1998).

# Capítulo 44

## Ondas de ultrasonido

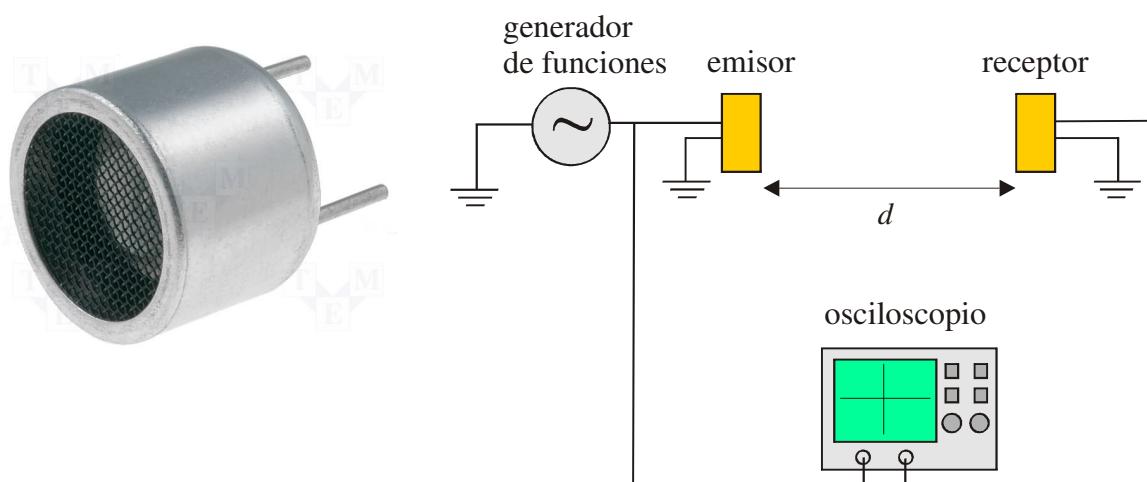
Los transductores ultrasónicos son dispositivos que generan ondas de ultrasonido, de bajo costo y de simple uso, muy adecuados para estudiar las propiedades de las ondas de ultrasonido. En estos experimentos estudiaremos primero la respuesta en frecuencia de un sistema emisor-receptor de ultrasonido. Con este sistema podremos analizar fenómenos generales de los procesos ondulatorios como la reflexión, la interferencia y la difracción de ondas.

### Objetivos

- ✓ Respuesta en frecuencia de un sistema emisor-receptor de ultrasonido
- ✓ Velocidad de las ondas ultrasónicas
- ✓ Reflexión e interferencia de ondas de ultrasonido

### 44.1 Ultrasonido

Las ondas de ultrasonido son un caso especial de ondas de presión en un medio compresible y se generan usando transductores especiales. Estos elementos son esencialmente una membrana metálica vibrante cuyas oscilaciones pueden forzarse a frecuencias bien definidas arriba de los 20 kHz. En la actualidad los sistemas de emisión-detección de ultrasonido tienen amplia aplicación en muchos campos de la ciencia, la técnica y en la vida cotidiana. Son comunes las ecografías en los diagnósticos médicos, las alarmas que detectan movimientos, los ensayos no-destructivos que usan ultrasonido, detectores de movimiento, sonar, etc. Usando ondas de ultrasonido podemos estudiar la propagación de ondas de presión en un gas y también analizar aquellos fenómenos comunes de la propagación de ondas, usualmente estudiados con luz, como la reflexión y la difracción, entre otros.<sup>1,2,3,4</sup>



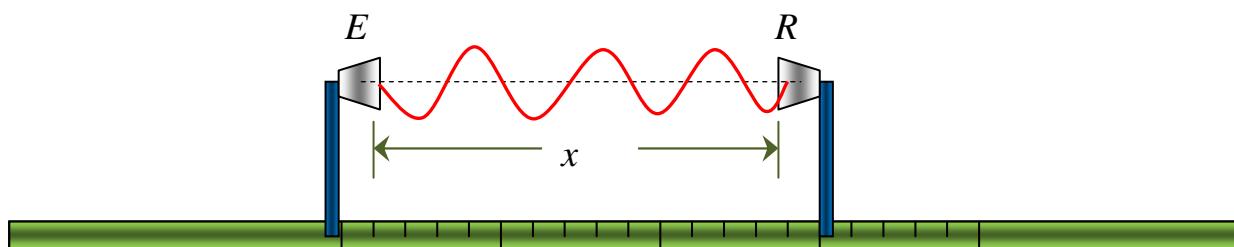
**Figura 44.1** A la izquierda vemos un transductor ultrasónico, con sus conectores. A la derecha se muestra un arreglo experimental para estudiar la propagación de ondas de ultrasonido.

Las ondas sonoras, se reflejan y refractan, al igual que cualquier onda. Por lo tanto, se pueden utilizar para reconstruir imágenes. El problema es que la resolución de una imagen está limitada por la longitud de onda. A 1 kHz, una onda sonora tiene una longitud de onda en el aire ( $c \approx 330$  m/s) de  $\lambda = c/f \approx 33$  cm. Por otra parte, en tejidos humanos blandos, la velocidad del sonido es mucho mayor ( $c \approx 1540$  m/s), por lo tanto a esta frecuencia  $\lambda \approx 1,5$  m. Por esta razón en aplicaciones médicas es necesario usar frecuencias del orden o mayores que 1 MHz para que  $\lambda < 1,5$  mm. La reflexión de ondas sonoras también se usa en sistemas de localización como sonares. Los murciélagos, delfines y otros animales emiten y perciben ultrasonidos, los cuales utilizan como sistema de ecolocación.

Para los experimentos propuestos aquí es necesario un emisor ultrasónico que pueda emitir ondas puras de alta frecuencia (ultrasonido:  $f \geq 20$  kHz) y un receptor capaz de detectar estas mismas ondas. Ambos elementos se usan en un circuito como el que se muestra en la Fig. 44.1. El emisor emite ondas ultrasónicas cuando se lo excita con una señal alterna provista por un generador de funciones. La señal de excitación se deriva a uno de los canales de un osciloscopio y en otro canal se mide la salida del receptor. De esta manera se pueden comparar las formas de onda de las señales y medir sus amplitudes y fases relativas, lo que permite caracterizar el sistema y hacer un estudio completo de la propagación de estas ondas.

## 44.2 Par ultrasónico

En general, el emisor y el receptor que se van a utilizar deben ser mutuamente compatibles, es decir, la frecuencia de máxima respuesta del emisor debe coincidir con la curva de máxima sensibilidad del receptor. En el siguiente experimento estudiaremos la curva de respuesta en frecuencia del sistema receptor-emisor. Al adquirir el par emisor-receptor, asegúrese analizando las hojas de datos provistas por el fabricante, que efectivamente el par es compatible. En las hojas de datos también se puede encontrar el valor de la frecuencia óptima de trabajo, apertura angular del emisor, etc. Para los experimentos descriptos aquí, es conveniente adquirir un par con frecuencia óptima de trabajo en el rango de unos 36 a 45 kHz. En el aire, una onda de unos 40 kHz tiene una longitud de onda  $\lambda \approx 0,85$  cm.



**Figura 44.2** Esquema de funcionamiento de un par emisor-receptor a una dada distancia  $x$  entre ellos. El emisor emite una onda que en cada punto del espacio tiene una relación de fase bien definida respecto de la posición  $x$ , del receptor.

Dado que la onda generada por el emisor, en cada punto del espacio tiene una relación de fase bien definida respecto de la posición  $x$  del receptor, se espera que la fase relativa entre el emisor y el receptor, varíe en  $2\pi$  cada vez que  $x$  se incremente en una longitud de onda  $\lambda$ . Este hecho puede

usarse para determinar la longitud de onda  $\lambda$  y, conociendo la frecuencia  $f$  de la señal, se puede conocer la velocidad del sonido como:  $c = \lambda \cdot f$ .

## Proyecto 141. Respuesta en frecuencia de un par ultrasónico

**Equipamiento básico recomendado:** Un emisor de ultrasonido y un receptor. Un generador de funciones de rango mayor a 45 kHz. Un osciloscopio de dos canales.

Usando el arreglo de la Fig. 44.1, coloque el receptor enfrente al emisor a una distancia de unos pocos centímetros. Excite el emisor con una tensión alterna de variación sinusoidal. Manteniendo constante la amplitud de la tensión, varíe la frecuencia y obtenga la curva de respuesta del par emisor-receptor en función de la frecuencia.<sup>2</sup>

### Sugerencias de trabajo:

- ✓ Determine con el osciloscopio la amplitud de la señal recibida por el receptor,  $V_r$ , y la amplitud de la excitación del emisor,  $V_e$ . Represente gráficamente  $V_r/V_e$  en función de la frecuencia  $f$  de la excitación. Determine la frecuencia óptima de trabajo, que es la frecuencia  $f_0$  para la cual es máxima la respuesta  $V_r/V_e$ . Determine también el semiancho de las curvas, definido como la diferencia  $\Delta f = f_1 - f_2$  de las frecuencias para las que la respuesta alcanza la mitad de su valor máximo a  $f_0$ . Dado que los pares de ultrasonido tienen sus frecuencias óptimas de trabajo entre los 35 y 45 kHz, recorra este intervalo de frecuencia en pasos de 250 Hz.
- ✓ Determine el factor de mérito (o factor de calidad) del sistema, definido como  $Q = f_0 / \Delta f$ . Estudie la respuesta en un rango de frecuencias de unos 20 kHz alrededor de la resonancia. Calcule el valor de  $Q$ . ¿Encuentra alguna otra resonancia en este rango? ¿El factor de calidad es una propiedad del emisor, del receptor o de ambos elementos?
- ✓ Estudie la variación de la fase relativa de las señales  $V_r$  y  $V_e$  alrededor de las frecuencias de resonancia. Usando el osciloscopio en el modo XY, observe la señal  $V_r$  en función de  $V_e$  y discuta la forma de las figuras observadas a distintas frecuencias. Describa estas figuras cuando las señales están en fase ( $\Delta\phi = 0$ ), desfasadas  $\pi/2$  y  $\pi$ . Mida y represente en un gráfico la diferencia de fase de las señales  $\Delta\phi$  en función de la frecuencia (ver Anexo A del Cap. 31).
- ✓ ¿Cuál es el valor de la diferencia de fase para la frecuencia  $f_0$ ?

## Proyecto 142. Determinación de la velocidad del sonido

**Equipamiento básico recomendado:** Un emisor de ultrasonido y un receptor. Un generador de funciones de rango mayor a 45 kHz. Un osciloscopio de dos canales.

Para este experimento es conveniente montar el esquema de la Fig. 44.2 sobre una regla de madera, formando un espacie de banco óptico, de modo que varíe la posición del emisor respecto del receptor a lo largo de una línea y quer se pueda, en cada posición, medir la distancia,  $x$ , entre

ambos componentes con una precisión del orden del milímetro. Debe asegurarse que al alejar el emisor del receptor, sus orientaciones relativas se mantengan constantes. Excite el emisor a la frecuencia óptima  $f_0$  determinada en el proyecto anterior. Conecte el osciloscopio de modo que pueda determinar la diferencia de fase  $\Delta\phi$  entre la señal excitadora del GF y la señal del receptor, como se indicó en el proyecto anterior.

### Sugerencias de trabajo:

- ✓ Estudie la variación de la fase relativa  $\Delta\phi$  al variar la distancia  $x$  entre el emisor y el receptor. Describa cualitativamente lo que observa sobre la base de la periodicidad espacial de los resultados.
- ✓ Represente en un gráfico la distancia emisor-receptor,  $x$ , para la que se verifica que ambas señales están en fase ( $\Delta\phi = 0$ ), en función del orden  $n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) al que se cumple tal condición. Recuerde que cada vez que  $\Delta\phi = 0$ , significa que la fase varió en  $2\pi$ . ¿Cómo puede determinar la longitud de onda  $\lambda$  de la onda de ultrasonido a partir de este gráfico?
- ✓ Del gráfico de  $x$  en función de  $n$  determine la longitud de onda  $\lambda$  de las ondas de ultrasonido. Usando la relación  $c = \lambda f$ , donde  $f$  es la frecuencia del GF, determine la velocidad del sonido. Estime la incertidumbre de la determinación de la velocidad.

## 44.3 Propiedades físicas de las ondas de ultrasonido

Como se indicó previamente, el emisor y el receptor que se van a utilizar deben ser mutuamente compatibles. Por lo general tanto el emisor como el receptor son muy direccionales en su funcionamiento. Se debe analizar esta propiedad en las hojas de datos para ver cómo funcionan estos pares de dispositivos. Las propiedades de reflexión de ultrasonidos pueden ser estudiadas fácilmente, usando un reflector o espejo, que puede ser una placa de cartón, madera o cualquier placa de material sólido. Además, como en todas las ondas en general, se cumple la Ley de la reflexión que establece que el ángulo de reflexión es igual al de incidencia.<sup>2,5</sup> En los siguientes proyectos nos proponemos estudiar algunas propiedades físicas de las ondas de ultrasonido. En primer término analizamos la reflexión y luego, la interferencia.<sup>1,3,4</sup>

### Proyecto 143. Óptica geométrica y física con ultrasonido

**Equipamiento básico recomendado:** Dos emisores de ultrasonido y un receptor compatibles. Un generador de funciones. Un osciloscopio de dos canales.

El objetivo de esta actividad es estudiar la reflexión y la interferencia de las ondas ultrasónicas en el par emisor-receptor ultrasónico.

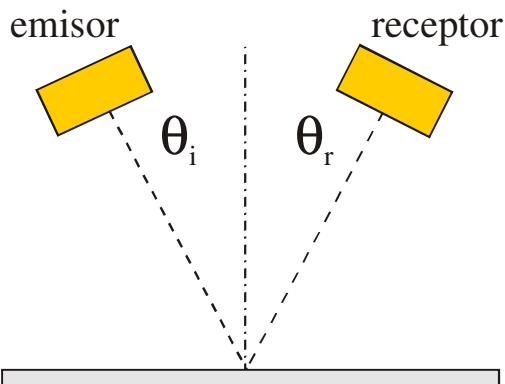
#### Reflexión de ondas

Para este experimento es necesario disponer de una pantalla plana, consistente en una placa dura de al menos 40 cm x 40 cm. Marque el centro de la placa de modo bien visible. Ubique el emisor enfrentado a una pantalla plana y del mismo lado coloque el receptor a una distancia entre 30 a 50

cm de la pantalla. Ver Fig. 44.3. En cada caso, apunte tanto el emisor como el receptor a la marca colocada en el centro de la placa. Observe con el receptor la onda reflejada en la pantalla. Un modo de determinar los ángulos de incidencia y de reflexión, consiste en colocar el emisor y el receptor apuntando al centro de la pantalla y aproximadamente a la misma distancia de este punto. Se rota la pantalla alrededor de un eje vertical que pasa por el centro y se busca el ángulo en que maximiza la señal del receptor. Esta situación indica que la señal del emisor está llegando al receptor.

### Sugerencias de trabajo:

- ✓ Estudie cómo varía el ángulo de reflexión  $\theta_r$  en función del ángulo de incidencia  $\theta_i$  (ver Fig. 44.3).
- ✓ ¿La reflexión de ondas de ultrasonido cumple la Ley de la reflexión  $\theta_r = \theta_i$ ?



**Figura 44.3** Ubicación del emisor y del receptor respecto de una pantalla y definición de ángulos para estudiar la reflexión de las ondas.

### Sugerencias de trabajo:

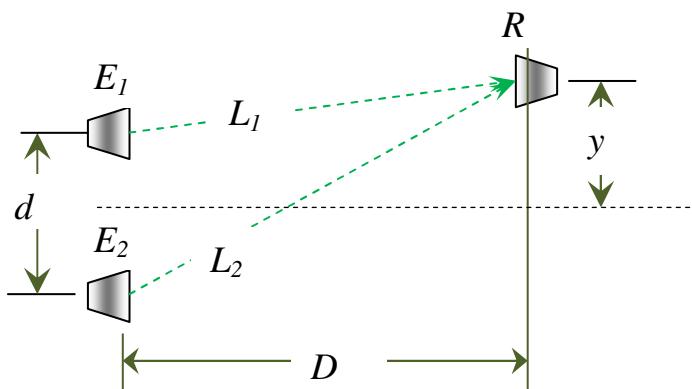
Para este experimento es necesario disponer de dos emisores y de un receptor compatible. El GF se conecta a los dos emisores en paralelo. Se debe tener cuidado con las conexiones, de modo que ambos oscilen en fase. Para ello las dos tierras (*gnd*) de los emisores deben conectarse a la tierra del GF. Si se invierte la conexión en uno de ellos, pueden llegar a oscilar en contrafase. El arreglo experimental se ilustra en la Fig. 44.4. La distancia  $d$  entre los emisores debe ser del orden  $2\lambda$  ó  $3\lambda$  aproximadamente ( $d \approx 3$  a  $5$  cm). La distancia  $D$  debe ser  $D \approx 25$  a  $45$  cm. La idea es desplazar el receptor a lo largo del eje  $y$ . Se determinan los mínimos de recepción. Estos mínimos se producen cada vez que la diferencia de  $|L_1 - L_2| = n\lambda/2$ , o sea:

$$|L_1 - L_2| = \left| \sqrt{D^2 + (y - d/2)^2} - \sqrt{D^2 + (y + d/2)^2} \right| = n \cdot \frac{\lambda}{2}, \quad (44.1)$$

donde  $n$  es un entero que designa el orden de los mínimos. La técnica consiste en registrar cuidadosamente los primeros 4 ó 6 mínimos en recepción tanto de un lado como del otro de la mediatrix de los dos emisores. En cada caso se registran el orden  $n$  de los mínimos, y los correspondientes valores de  $y$ . Usando la expresión (44.1) se representa  $|L_1 - L_2|$  como función de  $n$ . Si los resultados experimentales se alinean en una recta, su pendiente nos brinda el valor de  $\lambda/2$ .<sup>1,3,4</sup>

### Sugerencias de trabajo:

- ✓ Con el arreglo experimental de la Fig. 44.4, identifique unos 4 a 5 mínimos en el receptor. Registre los órdenes  $n$  de los mínimos y los correspondientes valores de  $y$ .
- ✓ Usando la Ec.(44.1), represente  $|L_1 - L_2|$  como función de  $n$ . Verifique si los resultados experimentales se alinean en una recta. De ser así obtenga la pendiente y su incertezza.
- ✓ Obtenga el mejor valor de  $\lambda$  y su incertezza.
- ✓ Compare este valor con el obtenido usando la velocidad del sonido a la temperatura de trabajo y la frecuencia usada en el GF.
- ✓ Repita el experimento anterior usando otra distancia  $d$ . ¿Cómo se comparan los resultados para la longitud de onda con los obtenidos a la distancia anterior?



**Figura 44.4** Esquema del sistema para estudiar la interferencia de ondas ultrasónicas.

### Referencias

- 
- <sup>1</sup> T. B. Greenslade Jr., “Experiment with ultrasonic transducers,” *Phys. Teach.* **32**, 392-298 (1994).
  - <sup>2</sup> E. Hecht, *Optics* (Addison-Wesley Pub. Co., New York, 1990).
  - <sup>3</sup> T. B. Greenslade Jr., “Ultrasonic interferometers,” *Phys. Teach.* **36**, 249–252 (1998).
  - <sup>4</sup> T. B. Greenslade Jr., “Ultrasonic Interferometers Revisited,” *Phys. Teach.* **45**, 145 (2007).
  - <sup>5</sup> F. Sears, M. Zemansky, H. Young y R. Freedman y, *Física universitaria*, vol. 1, ed. 12 (Pearson, Prentice Hall, México, 2009).

## Capítulo 45

### Efecto Doppler

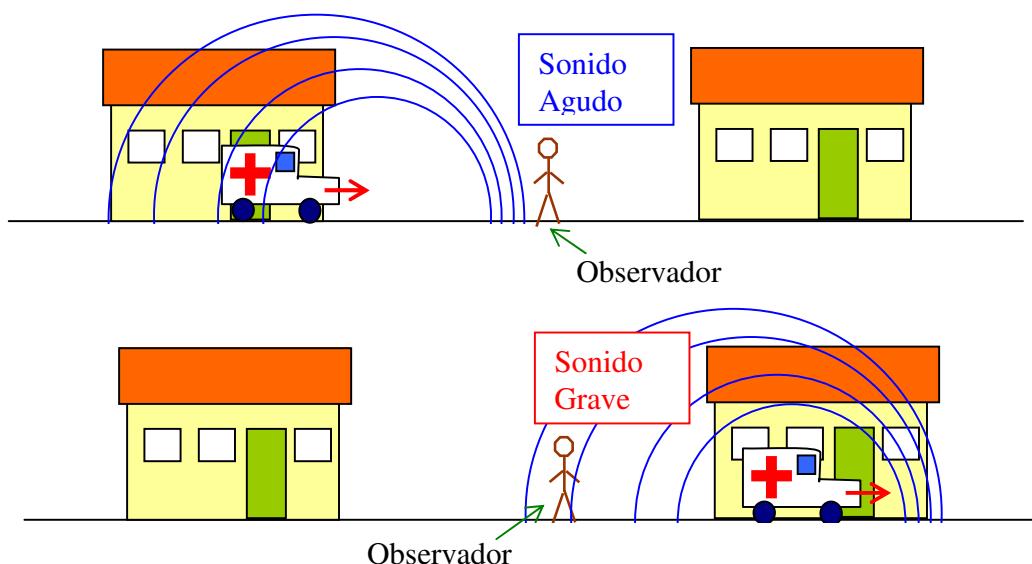
En este capítulo nos proponemos estudiar experimentalmente el efecto Doppler. Este fenómeno es muy fácil de percibir en la vida cotidiana y tiene muchísimas aplicaciones prácticas, tanto en la ciencia como en tecnología y medicina. El experimento que proponemos es de fácil implementación y de muy bajo costo y permite estudiar el efecto en forma cuantitativa.

### Objetivos

- ✓ Efecto Doppler
- ✓ Análisis del efecto Doppler con una fuente sonara que rota

#### 45.1 Efecto Doppler - Introducción

Cuando estamos parados al borde de una ruta y escuchamos pasar un vehículo que toca una bocina o una ambulancia con sirena, se percibe que el timbre del sonido va cambiando a medida que el vehículo se nos acerca y pasa. Precisamente cuando el vehículo nos pasa, es que notamos un claro cambio en la altura o tonalidad del sonido, yendo de uno agudo a otro más grave. Si estuviésemos viajando en el auto que toca la bocina o en la ambulancia, no habríamos notado este cambio. Este fenómeno se conoce como el **efecto Doppler** y ocurre con todo tipo de ondas. Fue descubierto por el matemático y físico austriaco Christian Doppler (1803-1853).



**Figura 45.1.** Cuando escuchamos el sonido de la sirena de una ambulancia que pasa, la altura o frecuencia del sonido cambia, de agudo, cuando se acerca a nosotros, a grave, cuando se aleja. En cambio el conductor de la ambulancia no nota ningún cambio. Para él el sonido de la sirena es siempre igual. En esta figura los círculos centrados en las posiciones instantáneas de la fuente (ambulancia), indican la posición de los distintos frentes de onda vistos por un observador en reposo.

Actualmente este efecto tiene muchísimas aplicaciones prácticas tanto en las ciencias como en la tecnología y la medicina.<sup>1,2,3,4</sup> Este fenómeno también se produce con las ondas electromagnéticas como lo son la luz, las ondas de radio, la TV, etc. Si una fuente de luz amarilla en movimiento (a grandes velocidades, o sea, cercanas a la velocidad de la luz) se nos acerca, observamos un aumento de la frecuencia (los colores se vuelven más azules) y si se aleja, el color de la fuente se vuelve más rojizo.

Edwin Hubble, usando el telescopio del monte Wilson en California, hizo uno de los descubrimientos más notables de la historia aprovechando este efecto. Hubble estudiaba las propiedades de las *cefeidas*<sup>‡</sup>, que son estrellas de intensidad variable cuyas distancias son conocidas. Esta técnica permitió conocer cómo se distribuían las galaxias en el espacio. En 1929 Hubble descubrió que los espectros de los elementos, provenientes de las nebulosas extragalácticas lejanas presentaban un corrimiento hacia rojo, tanto mayor cuanto más lejos estaba la nebulosa (galaxia). Esto condujo a Hubble a inferir que la velocidad de recesión o alejamiento de las galaxias lejanas aumentaba con su distancia a la nuestra. Al graficar las velocidades de alejamiento unas 24 nebulosas (obtenidas de los enrojecimientos de sus espectros) en función de sus distancias, encontró una sugestiva relación lineal entre la velocidad de alejamiento,  $v$ , de las galaxias y su distancia a nosotros,  $d$ , es decir:  $v=H.d$ . Esta ley constituye una de las piedras fundamentales de la Teoría del Big Bang.<sup>5</sup> La constante  $H \approx 1/1,4 \times 10^{10}$  años, se conoce como la constante de Hubble y está relacionada con la edad del universo.

El cambio de frecuencia  $f$  o longitud de una onda  $\lambda$  debido al efecto Doppler es simple de comprender. Consideremos el caso de una onda sonora que tiene una velocidad de propagación en el aire denotada con  $c$ . Esta velocidad es constante y no varía si el emisor u observador se mueven o no.<sup>1,2</sup> Para fijar ideas, consideremos los frentes consecutivos de ondas que tengan la misma fase, es decir que están separados por una distancia igual a la longitud de onda  $\lambda$ . Si la fuente está en reposo en el punto  $P$  (ver Fig. 45.2 A), estos frentes de ondas son esferas concéntricas (centradas en  $P$ ) con una distancia entre ellas igual a  $\lambda$ . Si la fuente sonora se mueve hacia el observador con velocidad  $u_s$ , y esta velocidad se mide respecto a un sistema fijo al medio (ver Fig. 45.2 B), el frente de onda que se emitió cuando la fuente estaba en  $P$ , se propaga como antes, formando una esfera centrada en  $P$ . El próximo frente de onda se emite cuando la fuente está en  $P'$  y forma una esfera centrada en este punto. La distancia entre  $P$  y  $P'$  es igual a  $u_s.T$ , donde  $T (=1/f)$  es el período de la onda. La distancia entre los dos frentes de onda para el observador será la longitud de onda  $\lambda'$  dada por:

---

<sup>‡</sup> Las cefeidas son estrellas pulsantes cuya importancia radica en que presentan una relación definida entre su luminosidad media (potencia que irradian) y el período de pulsación. Esta relación fue descubierta en 1912 por la astrónoma estadounidense Henrietta S. Leavitt. Así, los astrónomos pueden determinar la luminosidad intrínseca o absoluta de una cefeida midiendo el período de pulsación. La luminosidad aparente de una estrella en el cielo (la intensidad de la misma que se observa con un telescopio) depende además de su distancia a la Tierra. Comparando esta luminosidad aparente con su luminosidad intrínseca se puede determinar la distancia a la que se encuentra. De este modo, las cefeidas pueden utilizarse como indicadores de distancias tanto dentro de la Vía Láctea como fuera de ella. Claramente, las más lejanas se verán menos brillantes que las más cercanas. De este modo el brillo aparente nos permitiría conocer sus distancias.

$$\lambda' = \lambda \mp u_s T. \quad (45.1)$$

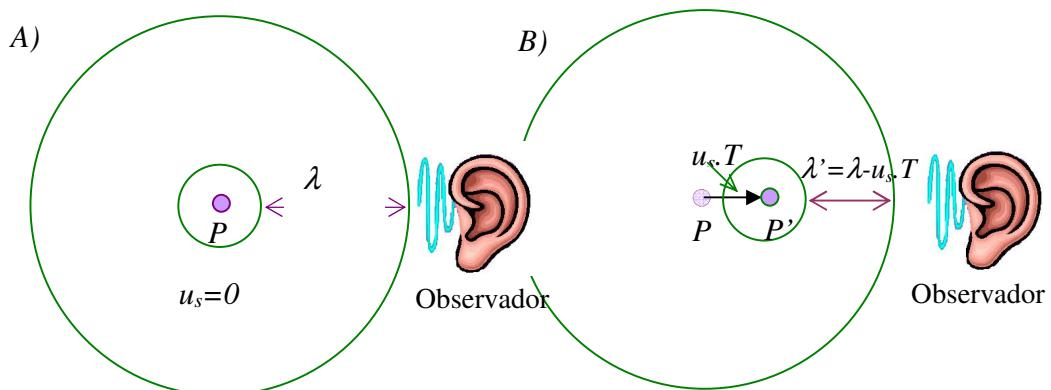
El signo depende de si la fuente se acerca (-) o se aleja (+) del observador. En cuanto a la frecuencia  $f'$  que el observador percibe:

$$f' = c / \lambda' = \frac{c}{\lambda \mp u_s T} = \frac{f}{1 \mp u_s / c}. \quad (45.2)$$

En general, si tanto la fuente como el observador se mueven a lo largo de una recta, se puede probar que la frecuencia que percibe el observador es:<sup>1,2,3</sup>

$$f' = f \frac{1 \mp u_o / c}{1 \mp u_s / c}. \quad (45.3)$$

Aquí  $u_s$  y  $u_o$  son las velocidades de la fuente y del observador respectivamente, respecto del medio (aire), considerando el signo (-) si el observador se mueve hacia la fuente y (+) si se aleja de ésta.



**Figura 45.2.** Cambio en la longitud de onda que un observador percibe por movimiento de la fuente emisora, con velocidad  $u_s$ . A) A la izquierda vemos dos frentes de ondas consecutivas con la misma fase, o sea espaciadas por una longitud de onda  $\lambda$ . B) La fuente se mueve con velocidad  $u_s$ . El primer frente de ondas, que fue emitido cuando la fuente estaba en  $P$ , es el mismo de antes, pero cuando el siguiente se emite, la fuente se desplaza una distancia  $u_s T$ . Por lo tanto la distancia entre dos frentes de ondas de la misma fase será  $\lambda' = \lambda - u_s T$ , siendo  $T$  es el período de la onda.

Si la velocidad  $u_s$  es pequeña comparada con  $c$ , la expresión (45.3) se puede aproximar como:

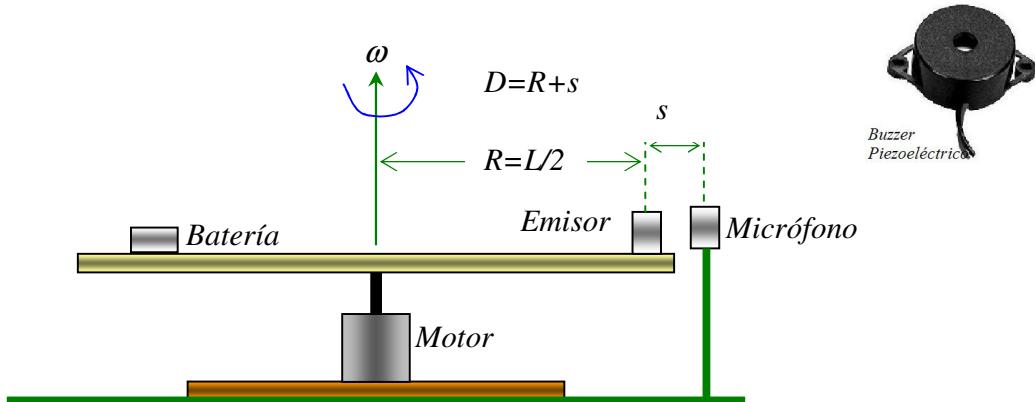
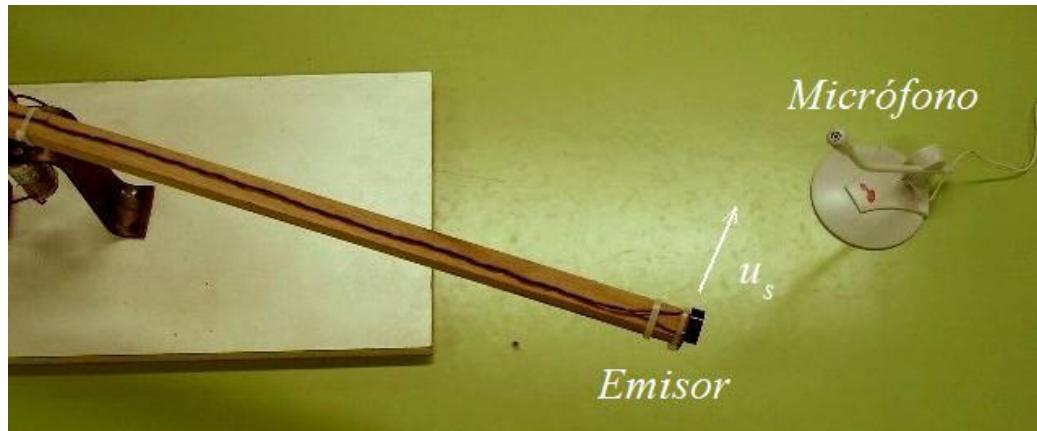
$$f' = f (1 \mp u_o / c) (1 \mp u_s / c). \quad (45.4)$$

## 45.2 Fuente en movimiento circular

Un arreglo conveniente para estudiar el efecto Doppler en el laboratorio consiste en conectar una fuente sonora “monocromática” (que emite una frecuencia  $f_0$ ) en el extremo de una barra que gira, como se ilustra en la Fig. 45.3. Este tipo de fuente “monocromática” se puede lograr con un zumbador piezoelectrónico tipo *bu45er*. Estos dispositivos se usan como vibradores en muchos dispositivos electrónicos y son de muy bajo costo. Además, conectándolo a una batería de 9 V, generan un sonido de frecuencia bien definida de un semiancho muy pequeño, es decir son

fuentes sonoras casi monocromáticas.<sup>§</sup> Como fuente sonora monocromática, también se puede usar un celular, como se discutió en el Proyecto 135.

El detector puede ser un simple micrófono conectado a una tarjeta de sonido de una PC. Ver Cap.11. El sonido se puede grabar como un archivo .wav usando cualquier utilitario: Grabador de sonido de Windows, Audacity,<sup>6</sup> etc.

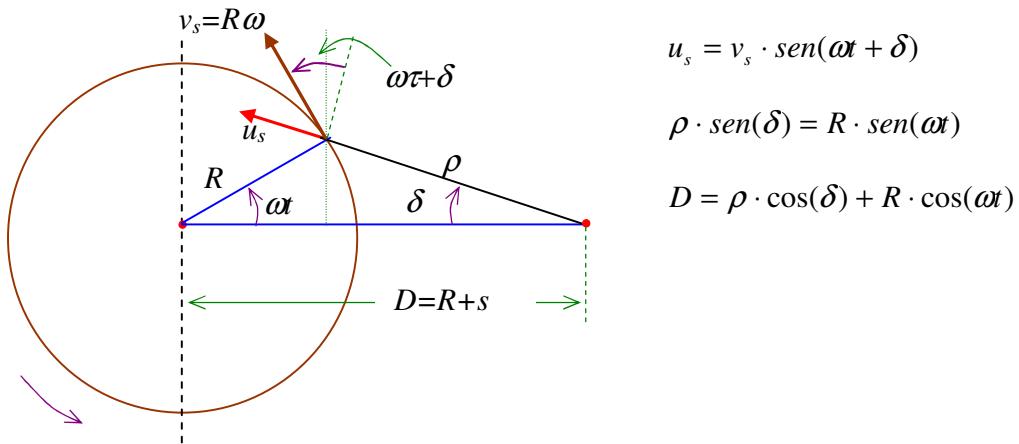


**Figura 45.3.** Vista superior: foto de un arreglo experimental posible. Abajo: diagrama esquemático del dispositivo para lograr tener una fuente en movimiento circular. El motor determina la frecuencia angular  $\omega$  de giro de la barra.

El movimiento de la fuente respecto del detector se ilustra en la Fig. 45.4. La velocidad tangencial de la fuente es  $v_s = R\omega$ . Para calcular la variación de la frecuencia del emisor, lo que importa es la componente de la velocidad de la fuente,  $v_s$ , en la dirección fuente-observador o sea  $u_s$ . De la Fig. 45.4:

$$u_s = -v_s \cdot \operatorname{sen}(\omega t + \delta) = -R\omega \cdot (\cos(\delta)\operatorname{sen}(\omega t) + \operatorname{sen}(\delta)\cos(\omega t)). \quad (45.5)$$

<sup>§</sup> Los buzzer emiten sonidos a una frecuencia especificada,  $f_0$  con un semiancho  $\Delta f$  del orden de  $\Delta f/f_0 \approx 10\%$ . A veces, si la tensión es alta, se observan dos o más frecuencias, en general múltiplos de la principal y, por lo tanto, muy fáciles de diferenciar de la principal. La frecuencia fundamental de estos dispositivos es de unos pocos kHz y su costo es del orden de 1 U\$S.



**Figura 45.4.** Vista superior del dispositivo experimental.

El signo (-) en esta ecuación indica que la fuente se está alejando del observador, y está relacionado con el sentido de giro considerado. Si el sentido de giro fuese opuesto, el signo cambiaría. De la Fig.45.4 tenemos:  $\rho \cdot \sin \delta = R \cdot \sin(\omega t)$ . Por lo tanto:

$$u_s = -R\omega \cdot \sin(\omega t) \left( \cos(\delta) + \frac{R}{\rho} \cos(\omega t) \right). \quad (45.6)$$

Como  $D = \rho \cdot \cos \delta + R \cdot \cos(\omega t)$ ,

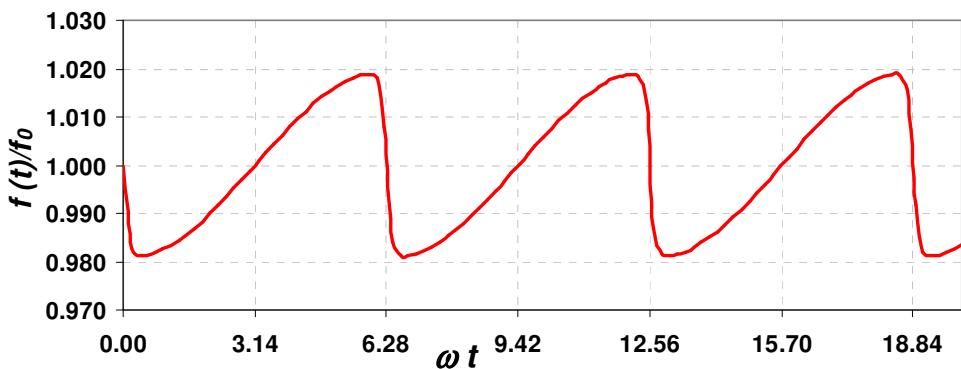
$$u_s = -R\omega \cdot \frac{D}{\rho} \sin(\omega t). \quad (45.7)$$

De la Fig.45.4,  $\rho^2 = R^2 + D^2 - 2RD \cos(\omega t)$ . De donde:

$$u_s = -R\omega \cdot \sin(\omega t) \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 - 2\varepsilon \cos(\omega t)}}, \quad (45.8)$$

con  $\varepsilon \equiv R/D = R/(R+s)$ . El signo (-) está relacionado con el sentido de giro considerado. Si el sentido de giro fuese opuesto, el signo cambiaría. Si en el instante  $t=0$  la fuente no estuviese enfrente del detector, se debería cambiar la fase  $\omega t$  en la Ec.(45.8) por  $\omega t + \phi$ , donde  $\phi$  es un factor de fase que depende de la posición de la fuente en el instante  $t=0$ . Combinando este resultado con el hecho de que  $u_0=0$ , y la Ec.(45.4) tenemos:

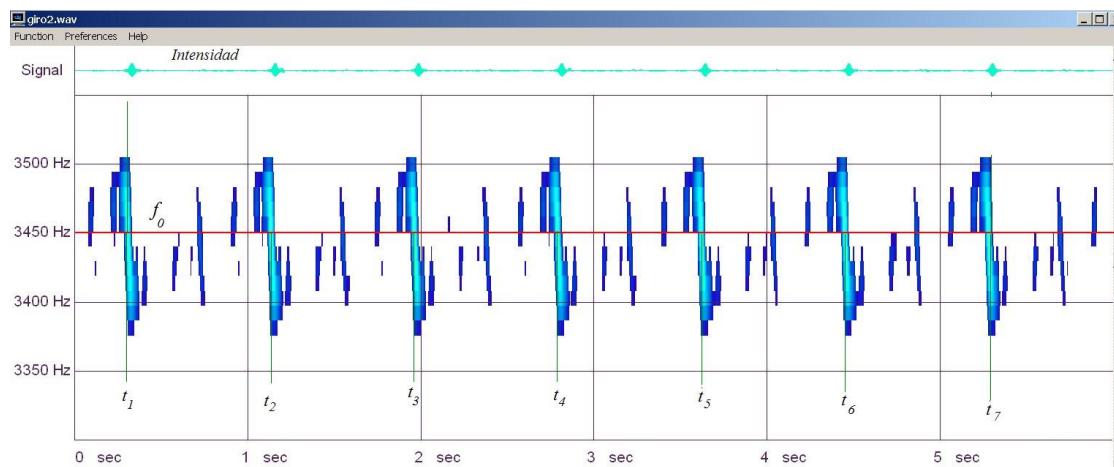
$$f'(t) \approx f_0 \left( 1 - \frac{R\omega}{C} \cdot \sin(\omega t + \phi) \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 - 2\varepsilon \cos(\omega t + \phi)}} \right). \quad (45.9)$$



**Figura 45.5.** Variación de la frecuencia de la señal sonora detectada por el observador, según la predicción teórica de la Ec.(45.9). En este ejemplo,  $L \approx 1.8\text{m}$ ,  $\varepsilon \approx 0.99$ ,  $\phi = 0$  y a una frecuencia de giro de  $1.2\text{Hz}$ , las variaciones de frecuencia son del orden del 2%.

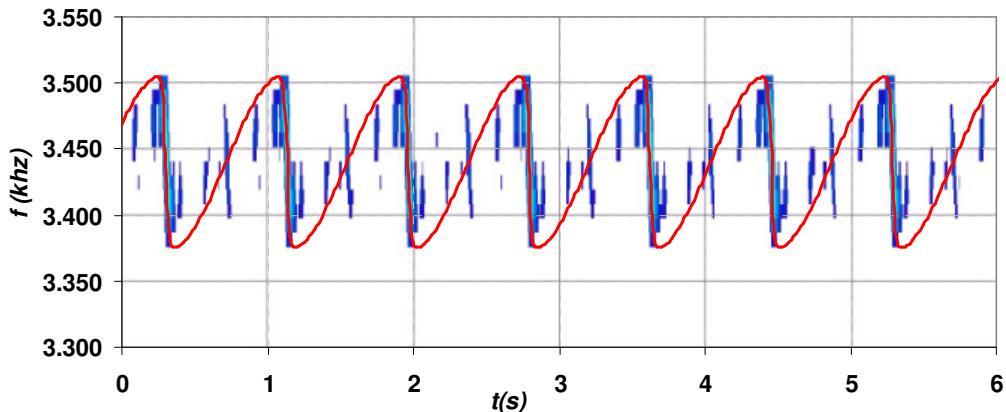
En la Fig.45.5 se ilustra esquemáticamente la variación de frecuencia esperada según el modelo teórico descripto por la Ec.(45.9). Cuando la fuente pasa frente al micrófono,  $\omega t = n\pi$  ( $\phi = 0$ ) con  $n=0,1,2,\dots$  la frecuencia presenta los saltos bruscos que se observan en el gráfico, que corresponden a las variaciones de frecuencia cuando la velocidad de la fuente pasa de máximo acercamiento a máximo alejamiento respecto del micrófono (observador).

Para realizar este experimento es necesario contar con un programa de análisis de Fourier,<sup>7,8</sup> que permite determinar la frecuencia de la señal detectada por el micrófono. El análisis de Fourier permite encontrar las frecuencias presentes en la señal registrada.<sup>4</sup> Más específicamente, lo que deseamos es un programa que pueda realizar un análisis de Fourier-tiempo, o sea, un **sonograma** del archivo .wav grabado. Hay muchos programas que pueden hacer esta operación como Mathematica (R) Wolfrang Research, Matlab (R) MathWorks, Audacity, etc.<sup>9</sup> Varios de estos programas pueden descargarse de Internet. En la Fig. 45.6 se ilustra un sonograma obtenido de un experimento similar al descripto aquí usando el programa SpectroGram.<sup>9</sup> El eje vertical da la frecuencia de la señal detectada por el micrófono y el horizontal es el tiempo. En general este tipo de programas, en sus versiones más simples, sólo brindan un gráfico similar al ilustrado en la Fig. 45.6. Sin embargo es posible extraer de ellos los valores de la frecuencia más representativa a cada tiempo, usando programas de digitalización gráfica como los discutidos en el Cap. 10.<sup>10</sup>



**Figura 45.6.** Espectrograma o sonograma de una señal detectada por el micrófono en un experimento similar al discutido aquí. El eje vertical da la frecuencia de la señal detectada por el micrófono y el horizontal es el tiempo. Variación de la frecuencia de la señal sonora detectada por el observador, según la predicción teórica de la Ec.(45.9).

También se puede recortar el espectrograma e introducirlo como fondo de un gráfico generado con una hoja de cálculo, tal como se discutió en el Cap.10. De este modo se pueden comparar los resultados experimentales con el modelo teórico, en forma similar a como se ilustra en la Figura 45.7



**Figura 45.7.** Espectrograma o sonograma de la señal ilustrada en la Fig.45.6, introducido como fondo de un gráfico generado con una hoja de cálculo. La línea continua es el resultado de usar un modelo teórico para explicar los datos.

#### Proyecto 144. Estudio del efecto Doppler de una fuente sonora en movimiento circular<sup>11</sup>

**Equipamiento recomendado:** Una barra liviana de longitud  $L \approx 1,5$  m que gire alrededor de su centro en un plano horizontal. . Es preferible que el motor que genera la rotación tenga frecuencia de giro variable, entre 1 a 5 Hz. Un *bu45er* piezoelectrónico de frecuencia  $f_0$  de unos pocos kHz, o bien un celular con una aplicación que emita señales monocromáticas, como se discutió en el Proyecto 135. Un micrófono conectado a la tarjeta de sonido de una PC con capacidad de grabar archivos .wav o similares. Un programa de análisis de Fourier de tiempo o sonograma.

El arreglo experimental propuesto se ilustra en la Fig. 45.3. El micrófono graba la señal sonora en un archivo para su posterior análisis. La distancia  $s$  puede variarse, aunque es recomendable que sea lo menor posible para lograr saltos de frecuencias bien notables, pero compatibles con la integridad del experimento, es decir, sin que toque con la barra giratoria. También es conveniente que el sistema se ubique lejos de paredes, o sea, a algunos metros de la más próxima. Esto es de importancia para evitar que el sonido emitido por la fuente rebote en una pared y sea detectado. Esto generaría una señal espuria en el experimento.

#### Sugerencias de trabajo:

- ✓ Para el arreglo construido, mida los parámetros característicos del arreglo experimental, esto es:  $L$  y  $s$ .

- ✓ Posicione el micrófono cerca de la fuente sonora (*bu45er*) y grabe el sonido emitido cuando la fuente está estacionaria. Analice el espectro de la señal obtenida y determine la frecuencia característica  $f_0$  de la fuente y su semiancho  $\Delta f$ . Si la tensión aplicada al *bu45er* es grande, es posible que observe algunas armónicas en el espectro ( $2f_0$ ,  $3f_0$ , etc.). En este caso seleccione la señal de más baja frecuencia y trabaje con ella. También puede usar una de las armónicas; solo es importante seleccionar la frecuencia sobre la que se va a trabajar.
- ✓ Ponga la barra a rotar y asegúrese de que la velocidad alcanzó condiciones de régimen estable. En estas condiciones, grabe el sonido emitido por la fuente después de dar unas 5 ó 6 vueltas. Analice el sonograma, concentrando su atención en la frecuencia seleccionada para el estudio.
- ✓ Del sonograma, ubicando los tiempos en que la frecuencia pasa por su valor de reposo,  $f_0$ , llamamos a estos valores  $t_i$ . Ver Fig.45.6. Graficando estos valores de tiempo,  $t_i$ , en función de su orden de ocurrencia  $i$ , determine el período de rotación  $T_{rot}$ , de la fuente y su incertezza. También estime la frecuencia angular de rotación  $\omega$  y su incerteza.
- ✓ Del sonograma obtenido, determine la variación de la frecuencia detectada por el micrófono como función del tiempo,  $f_{exp}(t)$ , de modo análogo a la Fig. 45.6. En el mismo gráfico, incluya los valores experimentales  $f_{exp}(t)$  como función de  $t$  y la predicción teórica, Ec.(45.9), de modo similar a la Fig. 45.7. Varíe la fase  $\phi$  de la Ec.(45.9) hasta lograr el mejor ajuste.
- ✓ Repita el experimento y análisis para por lo menos 3 ó 4 velocidades de rotación de la barra.
- ✓ Discuta el grado de acuerdo o no entre los resultados obtenidos y el modelo teórico. ¿Cuán adecuado es el modelo para describir sus mediciones?
- ✓ ¿Qué puede concluir respecto de la expresión (45.3) para describir el efecto Doppler?.

## Proyecto 145. Estudio del efecto Doppler de un observador en movimiento circular

**Equipamiento recomendado:** Una barra liviana de longitud  $L \approx 1.5$  m que gire alrededor de su centro en un plano horizontal. Es preferible que el motor que genera la rotación tenga frecuencia de giro variable, entre 1 a 5 Hz. Un *bu45er* piezoeléctrico de frecuencia  $f_0$  de algunos kHz. Un micrófono inalámbrico conectado a la tarjeta de sonido de una PC con capacidad de grabar archivos .wav, o un celular que grabe sonido. Un programa de análisis de Fourier de tiempo o sonograma.

El arreglo experimental propuesto se ilustra en la Fig. 45.3, excepto que esta vez lo que rota es el micrófono inalámbrico y la fuente sonora permanece en reposo. El micrófono o celular graban la señal sonora en un archivo para su posterior análisis. Aquí también es conveniente que el sistema se ubique lejos de paredes.

### Sugerencias de trabajo:

- ✓ Usando como punto de partida la expresión (45.4) desarrolle un modelo teórico que permita describir la variación de la frecuencia detectada por el observador como función de  $t$ , cuando es el observador el que se mueve.

- ✓ Para el arreglo construido, mida los parámetros característicos del arreglo experimental, esto es:  $L$  y  $s$ .
- ✓ Analice el espectro de la señal obtenida para el sistema estático y determine la frecuencia característica  $f_0$  de la fuente.
- ✓ Ponga la barra a rotar y una vez que alcanzó velocidad de régimen estable, grabe el sonido emitido por la fuente después de dar unas 5 ó 6 vueltas. Analice el sonograma, concentrando su atención en la frecuencia seleccionada para el estudio.
- ✓ Del sonograma obtenido, determine la variación de la frecuencia detectada por el micrófono como función del tiempo,  $f_{exp}(t)$ . En el mismo gráfico, represente la predicción teórica, Ec.(45.9). Varíe la fase  $\phi$  de la Ec.(45.9) hasta lograr el mejor ajuste.
- ✓

## Referencias

---

- <sup>1</sup> R. Halliday, D. Resnick y M. Krane, Física para estudiantes de ciencias e ingeniería, Vol. I (México, 2003) (Trad. de Fundamentals of Physics, John Wiley & Sons, Inc. New York, 2002).
- <sup>2</sup> H. D. Young, R.A. Freedman, et al., Física Universitaria: Volumen I (Addison Wesley, Pearson Ed. México D.F., 2009).
- <sup>3</sup> R. Feynman, R. Leighton y M. Sands, Física Volumen I-, Editorial Addison-Wesley Iberoamericana, México 1987.
- <sup>4</sup> F. Crawford Jr, Ondas - Berkeley Physics Course Vol 3 Ed Reverte .Barcelona 1974.
- <sup>5</sup> Teoría del Big Bang Wikipedia, [http://es.wikipedia.org/wiki/Teor%C3%A9tica\\_del\\_Big\\_Bang](http://es.wikipedia.org/wiki/Teor%C3%A9tica_del_Big_Bang)
- <sup>6</sup> Audacity (disponible en <http://audacity.sourceforge.net/download/?lang=es>)
- <sup>7</sup> C. R. Wylie, *Matemáticas Superiores para Ingeniería*, 2ºEd. Mc Graw - Hill, Mexico, 1996.
- <sup>8</sup> L. A. Pipes, *Matemáticas superiores para Ingenieros y Científicos* - Mc Graw-Hill NY 1970.
- <sup>9</sup> Existen muchos programas que generan un sonograma a partir de un archivo wav. Por ejemplo Audacity (disponible en <http://audacity.sourceforge.net/download/?lang=es>) o programa SpectroGram versión 11.2 (by Richard Horne <http://www.visualizationsoftware.com/gram.html>). Ver también: What are spectrograms? <http://cslu.cse.ogi.edu/tutordemos/SpectrogramReading/spectrogram.html>
- <sup>10</sup> xyExtract Graph Digitizer, <http://www.gold-software.com/download5149.html>
- <sup>11</sup> M.M. F. Saba and R. A. da S. Rosa ,”The Doppler Effect of a Sound Source Moving in a Circle,”Phys. Teach. **41** 89 (2003).

# Capítulo zz

## Experimentos de óptica geométrica

### Objetivos

En este capítulo nos proponemos estudiar experimentalmente las leyes básicas de la óptica geométrica y las leyes de reflexión y refracción de la luz. También analizaremos el fenómeno de reflexión total interna. Seguidamente, estudiaremos las propiedades de lentes delgadas y diversos métodos para determinar las distancias focales de diferentes lentes. Analizaremos las propiedades de una lente convergente y divergente y los modos de determinar sus distancias focales.

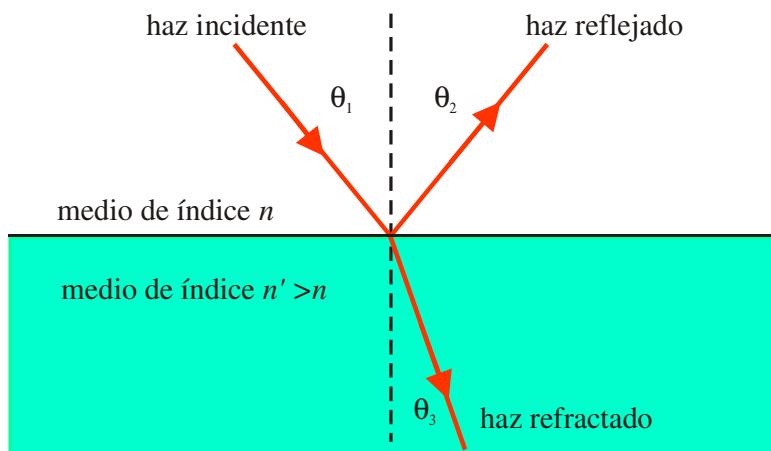
- ✓ Óptica geométrica
- ✓ Reflexión y refracción de la luz- Ley de Snell
- ✓ Lentes delgadas
- ✓ Determinación de la distancia focal de una lente

### zz.1 Óptica geométrica- Leyes de la reflexión y refracción

Cuando un haz de luz incide sobre la superficie que separa dos medios ópticos distintos, en los cuales la luz se propaga a diferentes velocidades, una parte se transmite y otra parte se refleja,<sup>1</sup> como se indica esquemáticamente en la Fig. zz.1. Para un medio cualquiera, el índice de refracción  $n$  se define como:

$$n = \frac{c}{V} , \quad (\text{zz.1})$$

donde  $c$  es la velocidad de la luz en el vacío ( $c = 2,99792458 \times 10^8$  m/s) y  $V$  la velocidad de la luz en ese medio.



**Figura zz.1** La luz se refleja y se refracta.

En un medio homogéneo e isotropo, la luz se propaga en línea recta en forma de rayos de luz. En todo lo que sigue, supondremos que los medios materiales tienen estas características. Hay una gran variedad de fenómenos que pueden explicarse por medio de rayos, como la formación de sombras, imágenes, etc. La óptica geométrica trata los fenómenos que pueden explicarse usando el concepto de rayos.

Las leyes básicas de la óptica geométrica son:

- **Ley de la reflexión:** Cuando un rayo de luz se refleja en la superficie plana que separa dos medios de distintos índices de refracción, el *rayo incidente*, la *normal a la superficie* y el *rayo reflejado* están en el mismo plano, como se indica en la Fig. zz.1, y se cumple que:

$$\theta_1 = \theta_2. \quad (\text{ZZ.2})$$

- **Ley de Snell:** Cuando la luz pasa de un medio a otro separado por una superficie plana, el rayo incidente, la normal a la superficie y el rayo transmitido o refractado están en un mismo plano y se cumple que el ángulo incidente ( $\theta_1$ ) y el refractado ( $\theta_3$ ) están relacionados por:

$$n_1 \operatorname{sen}(\theta_1) = n_3 \operatorname{sen}(\theta_3), \quad (\text{ZZ.3})$$

donde  $n_1$  es el índice de refracción del medio donde se propaga el rayo incidente y  $n_3$  es el índice de refracción correspondiente al medio donde se propaga el rayo transmitido, ver Fig. zz.1.

Una consecuencia de estas leyes es el fenómeno de la *reflexión total*, cuando el rayo luminoso pasa de un medio más refringente (mayor  $n$ ) a otro menos refringente (menor  $n$ , o sea,  $n_1 > n_2$ ), en este caso el rayo refractado se aleja de la normal. El ángulo incidente,  $\theta_c$  para el que  $\theta_3=90^\circ$ , se denomina *ángulo límite o ángulo crítico*, si  $\theta_1 > \theta_c$ , no hay transmisión y se produce una reflexión total de la luz. Este fenómeno se utiliza en las fibras ópticas para confinar un haz de luz en su interior y tiene mucha utilidad para la transmisión de información a través de estas fibras.

El objetivo de los siguientes experimentos es falsar estas leyes y estudiar las propiedades generales de la reflexión y refracción de la luz.

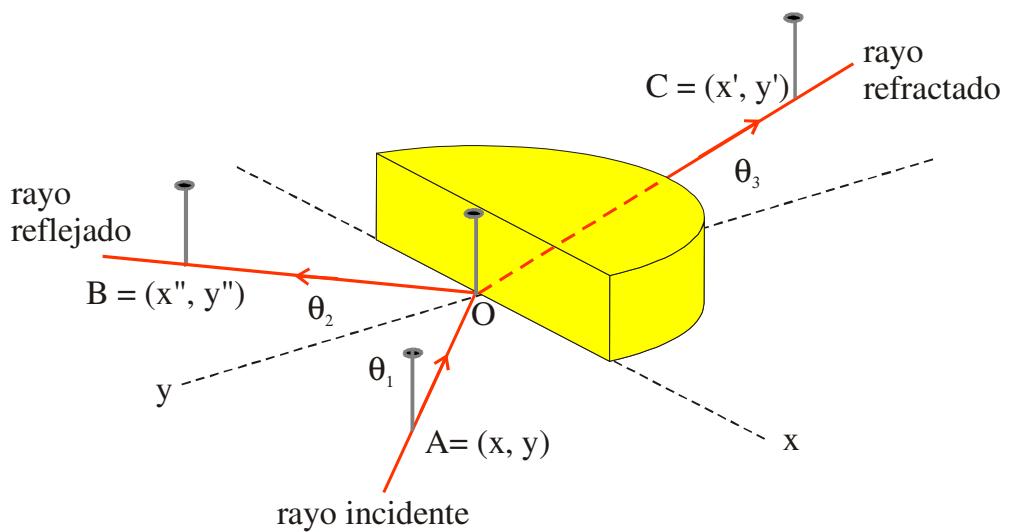
**NOTA:** Cuando utilice un láser, sea cauteloso en su uso. Evite que los rayos o sus reflexiones incidan en su cara o en la de alguna otra persona. El haz de un láser puede producir daños irreversibles en la retina. Lea las recomendaciones de seguridad del Apéndice B y las normas de seguridad de su institución o país relativa al uso de láseres.<sup>‡</sup>

### Proyecto 146. Estudio de la reflexión y la refracción

**Equipamiento recomendado:** Un semicilindro de vidrio o acrílico (media caña) de aproximadamente 15 cm de diámetro y 3 cm de altura. Éste puede ser macizo o bien hueco en el que se puede verter agua u otro líquido. Alfileres y una placa de madera blanda o cartón donde clavarlos alfileres. Opcional: un puntero láser.

El objetivo de este experimento es investigar la relación entre el ángulo de reflexión,  $\theta_2$ , y el ángulo de refracción,  $\theta_3$ , en función del ángulo de incidencia  $\theta_1$ , todos ellos definidos respecto de la línea normal de la superficie de separación entre los dos medios. Para la realización de este experimento se sugiere usar el dispositivo indicado esquemáticamente en la Fig. ZZ.2.<sup>2</sup>

<sup>‡</sup> Safety Recommendations for Laser Pointers – University of Princeton, NJ .  
<http://web.princeton.edu/sites/ehs/labpage/laserpointersafety.htm>



**Figura zz.2** Dispositivo sugerido para estudiar las leyes de la reflexión y la refracción.

**Refracción:** Tomamos el punto  $O$ , coincidente con el centro del semicilindro como origen de coordenadas. Elegimos el eje  $x$  de modo que coincidiendo con la cara plana del semicilindro y tomamos la normal a dicha cara como el eje  $y$ , respecto del cual medimos los ángulos. El semicilindro se apoya en una superficie plana, sobre la que colocamos un papel milimetrado o cuadriculado para determinar las coordenadas de cada punto del plano. Un modo simple de determinar la dirección de los rayos de luz consiste en usar tres alfileres, uno de los cuales se mantiene fijo en el centro  $O$ . Para determinar la dirección de los rayos incidentes y refractados, se coloca un alfiler en la posición  $A$  (cuyas coordenadas son  $(x, y)$ ) otro en  $O$  (centro del semicilindro, justamente fuera del éste) y el tercero en la posición  $C$  (cuyas coordenadas son  $(x', y')$ ). La posición de este último alfiler se elige de modo tal que al observar horizontalmente, los tres alfileres aparezcan todos alineados. Es decir, la luz que parte del alfiler en  $C$  pasa por  $O$  y por  $A$  y finalmente llega a nuestros ojos. Nótese que la luz que llega a nuestros ojos, no siempre sigue una línea recta.

#### Sugerencias de trabajo:

- ✓ Coloque sobre la tabla un papel cuadriculado, marcando claramente los ejes  $x$  e  $y$  (normal). Mantenga fijo el alfiler del centro del semicilindro, punto  $O$ . El alfiler en la posición  $A$  define el ángulo de incidencia.
- ✓ Mirando desde la línea formada por los alfileres  $A$  y  $O$ , coloque el tercer alfiler en  $C$  de modo que los tres estén alineados. Cuando se haya logrado tal alineación, registre los valores de las coordenadas  $(x, y)$  y  $(x', y')$  y se determinan los ángulos  $\theta_1$  y  $\theta_3$ . Es conveniente que el ángulo de incidencia  $\theta_1$  varíe desde  $0^\circ$  hasta  $80^\circ$  en pasos de aproximadamente  $10^\circ$ . Si dispone de un puntero láser (o un láser común) es posible visualizar la marcha de los rayos. Para ello haga incidir el láser de modo que el haz incida en la dirección definida por  $AO$  a través de los alfileres. Verifique que el haz refractado pasa efectivamente por el punto  $C$ .
- ✓ Represente gráficamente  $\theta_3$  en función de  $\theta_1$  y también represente  $\sin(\theta_1)$  en función de  $\sin(\theta_3)$ . Analice las distintas dependencias. Verifique si esta última representación gráfica puede ser descrita por una recta. En tal caso, determine su pendiente en incertidumbre.

- ✓ ¿Sus resultados experimentales se pueden explicar por la Ley de Snell? De ser así determine el índice de refracción del material del semicilindro ( $n_3$ ). Compare el valor obtenido en su experimento con los valores de tablas para el material en estudio. Recuerde que el índice de refracción del aire en condiciones normales de presión y temperatura es:  $n_1 = 1,00029$ . Usando la Ec.(ZZ.1) determine la velocidad de propagación de la luz usada en el medio del índice  $n_3$ .
- ✓ ♣♣ Invierta la dirección de incidencia del haz de láser, es decir, haga que el haz incida pasando por la dirección  $CO$  y verifique que el que éste pasa por  $A$ . Igualmente, si el rayo incidente sigue la dirección  $BO$ , verifique que el reflejado sigue la dirección  $OA$ . Esta propiedad notable de la luz se conoce como el *principio de reversibilidad óptica*, que establece que, en ausencia de absorción, si se invierten las direcciones de la marcha de los rayos de luz, las trayectorias no se alteran. Más generalmente, este principio es una consecuencia del *principio de reversibilidad temporal* de las ecuaciones de la física.<sup>3</sup>

**Reflexión:** Realice el mismo estudio anterior pero con el rayo reflejado. Para ello puede usar un puntero láser que incida en la dirección  $AO$  y determinar las coordenadas ( $x'', y''$ ) del punto  $B$ . Para esta parte, quizás sea conveniente remover el alfiler ubicado delante de  $O$ . Una pequeña marca sobre el acrílico lo ayudará a ubicar este punto  $O$  adonde apuntar el haz del láser. Para determinar las coordenadas de  $B$  puede usar un papel donde incida la luz reflejada, de este modo puede localizar el punto  $B$  más fácilmente.

#### Sugerencias de trabajo:

- ✓ Represente gráficamente  $\theta_2$  en función de  $\theta_1$ .
- ✓ ¿Sus datos están de acuerdo con la ley de la reflexión, Ec. (zz.1)?

### Proyecto 147.      Reflexión total interna

**Equipamiento recomendado:** Un semicilindro de vidrio o acrílico (media caña) de aproximadamente 15 cm de diámetro y 3 cm de altura. Un puntero láser.

Como se indicó más arriba, el fenómeno de reflexión total interna ocurre cuando la luz incide desde el medio de mayor índice de refracción a otro de menor índice.

Para esta investigación, haga incidir un láser por el lado de la superficie curva del montaje de la Fig. ZZ.2 y que pase por el punto  $O$  (dirección radial). La luz llegará a la cara plana del semicilindro radialmente desde el acrílico, que tiene un índice de refracción ( $n_3$ ) mayor que el aire ( $n_1$ ). Observe la transmisión de la luz del semicilindro al aire mientras va cambiando el ángulo de incidencia ( $\theta_3$ ) de la luz sobre la interfaz acrílico-aire. Cuando el rayo refractado en el aire sea próximo a  $90^\circ$  notará que el rayo reflejado se intensifica. Determine el ángulo crítico,  $\theta_c$ , con la mayor precisión que le sea posible y compare con el valor esperado de la Ec. (zz.2), es decir:

$$\operatorname{sen}(\theta_c) = n_1 / n_3. \quad (\text{ZZ.3})$$

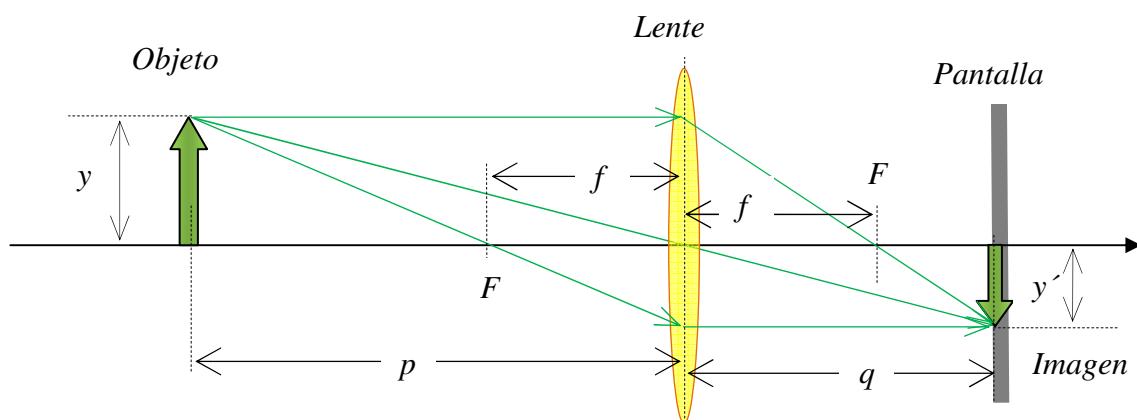
#### Sugerencias de trabajo

- ✓ Usando el puntero láser, estime en forma directa el valor del *ángulo crítico* (*o límite*)  $\theta_c$ , para el cual deja de existir el rayo transmitido.
- ✓ Otro modo de determinar el valor de  $\theta_c$  consiste en representar gráficamente  $\sin(\theta_3)$  en función de  $\sin(\theta_I)$ . A partir de la recta que mejor ajusta los datos experimentales, determine el valor de  $\theta_3$  para el cual  $\sin(\theta_I) = 1$ . Este valor de  $\theta_3$  es  $\theta_c$ .
- ✓ Para  $\theta_3 > \theta_c$  no hay rayo transmitido. Usando el puntero láser, compruebe que esta condición se cumple en el caso en estudio y compruebe también que toda la luz incidente se refleja en la cara interna del semicilindro.
- ✓ Estime el valor de  $\theta_c$  usando la Ec. (zz.3) con el valor de  $n_3$  encontrado en el proyecto anterior. ¿Cómo se compara este valor con el obtenido de la presente medición?

## zz.2 Lentes delgadas

Una lente es un sistema óptico con dos o más superficies refractantes. Las lentes son elementos esenciales de muchos instrumentos ópticos: microscopios, telescopios, cámaras fotográficas, etc.<sup>1,3,4</sup> Su funcionamiento puede entenderse usando las leyes de la óptica geométrica. Si un haz de luz paralelo, después de pasar por un lente, converge hacia un punto, la lente se dice convergente. La distancia de la lente al punto de convergencia define su distancia focal. Si los rayos paralelos divergen después de pasar por la lente, la lente es divergente.<sup>1,3,4</sup>

Un modo de estudiar las propiedades de una lente es usar un banco óptico, con los elementos ubicados como se muestra esquemáticamente en la Fig. ZZ.3.



**Figura ZZ.3** Disposición en un banco óptico de una lente delgada y de un objeto y definición de las distancias importantes.

El banco consiste en un riel horizontal, con una escala graduada adosada para registrar las posiciones de los distintos elementos, los cuales pueden deslizarse a lo largo del eje del banco. Por lo regular los bancos ópticos cuentan con soportes que sostienen los elementos que se van a usar: lentes, pantallas, fuentes de luz, objetos, diafragmas, etc. Como *objeto* se puede utilizar una pantalla opaca —que puede construirse con cartón duro o con una chapa metálica— con una abertura en forma de cruz (por ejemplo, con flechas se puede indicar sin ambigüedad la orientación del objeto), detrás de la cual se coloca una fuente luminosa. También se puede usar una lámpara eléctrica incandescente (por ejemplo, una lamparita de 12 V con filamento recto para faros de

automóvil, es adecuada). Una forma simple de construir un banco óptico consiste en usar una regla de 1 metro de longitud graduada en milímetros sobre la que se desplacen los elementos ópticos. En caso de no contar con monturas adecuadas para sostener los elementos ópticos, éstos se pueden sostener con bollitos de masilla o plastilina. La imagen queda formada sobre una pantalla que tiene que poder desplazarse. Se debe tener cuidado de que los ejes de los elementos ópticos estén bien alineados.

## Proyecto 148. Lentes convergentes – Observaciones cualitativas I

**Equipamiento recomendado:** Una lente convergente o lupa común.

El objetivo de este proyecto es realizar algunas observaciones cualitativas usando una lente convergente.

**Observación de la imagen que forma una lente convergente:** Observe algún objeto a través de una lente convergente. Observe objetos cercanos (la escritura de un texto, por ejemplo) y objetos lejanos (un paisaje, un edificio o un árbol). Describa cualitativamente sus observaciones.

- ✓ Describa cómo varían las características de lo que observa al variar la distancia observador-objeto. ¿La imagen es más grande, más pequeña o igual que el objeto mismo? ¿La imagen es derecha o invertida? ¿Varían estas imágenes al variar la distancia observador-lente?
- ✓ Otra propiedad interesante de las lentes convergentes es que forman *imágenes reales*,<sup>1,3</sup> es decir, imágenes que pueden proyectarse en una pantalla. Para realizar esta observación es conveniente disponer de un objeto bien iluminado, por ejemplo un árbol o un paisaje. También será conveniente que usted, con su lente y una pantalla, se coloque en un lugar con mucha sombra, pero que le permita ver claramente el objeto iluminado. Interponga la lente entre el objeto y la pantalla y varíe la distancia lente-pantalla hasta que aparezca una imagen nítida del objeto. La imagen en la pantalla aparecerá invertida. Este es el principio de funcionamiento de una cámara fotográfica, en la cual la película fotográfica constituye la “pantalla” donde se forma la imagen.

**Determinación de la distancia focal de una lente convergente:** El *foco* de una lente convergente es el punto sobre el eje óptico a una distancia  $f$  de la lente, donde convergen todos los rayos incidentes paraxiales (paralelos y cercanos al eje) luego de la refracción.<sup>1,3,4</sup> Una manera simple de determinar  $f$ , llamada *distancia focal* de la lente, consiste en formar sobre una pantalla una imagen de una fuente de luz que se encuentre muy alejada de la lente. Con esta condición, los rayos incidentes podrán considerarse como paralelos y la imagen puntual de esta fuente lejana estará a una distancia de la lente igual a  $f$ .

- ✓ Elija una fuente de luz lejana, por ejemplo el Sol o una lámpara de alumbrado lejana, y coloque su lente convergente entre esta fuente y una pantalla. Varíe la distancia lente-pantalla hasta que sobre la pantalla aparezca en forma nítida una imagen puntual (o lo más pequeña que sea posible). En estas condiciones, la distancia lente-pantalla es la distancia focal de la lente. Para lograr imágenes bien nítidas es importante que el plano de la lente esté paralelo a la pantalla y ambos con sus planos perpendiculares a la dirección determinada por la pantalla y la fuente de luz.
- ✓ Estime la distancia focal de su lente usando este procedimiento.

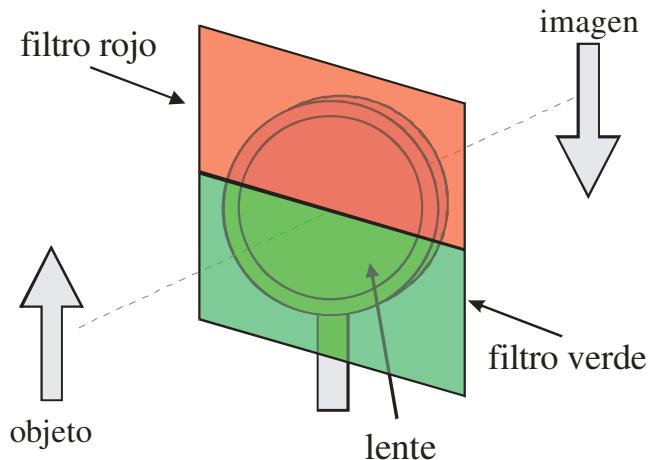
**Nota:** Si usa al Sol como fuente de luz lejana, note que en este caso la lente concentra en su foco toda la luz del Sol que incide sobre ella. En una demostración de esto último se trata de quemar papel (se quema a aproximadamente 230 °C) usando el calor producido por esta alta concentración de luz en un solo punto. Para encender el papel se necesita cierto tiempo de exposición (mantener el pulso y esperar que no se nuble).

### Proyecto 149. Propiedades de las lentes – Observaciones cualitativas II

**Equipamiento recomendado:** Una lente convergente de distancia focal entre 5 cm y 10 cm. Una lámpara incandescente u otro objeto luminoso. Láminas transparentes de color para usar como filtros. Una regla de 1 m o banco óptico.

Una propiedad interesante de las lentes y de otros sistemas ópticos es la siguiente. Imagine que usted tiene un objeto, el cual, mediante una lente convergente, forma una imagen real sobre una pantalla como se esquematiza en la Fig. ZZ.4. Sin hacer el experimento, prediga cómo variará la imagen si se cubre la mitad superior de la lente con una máscara opaca (que no permite el paso de la luz) y cómo será la imagen si se tapa la mitad izquierda. Realice un diagrama ilustrando la forma del objeto y su imagen en cada caso. ¿Cómo sería la imagen si se cubren tres cuartas partes de la lente?

Luego, realice el experimento y compare sus predicciones con sus observaciones. ¿Cómo se explican estos resultados? Trate de entender sus observaciones usando el principio de Fermat.<sup>1,3,4</sup> Para ello recuerde que, según este principio, el camino (o caminos) que sigue la luz para ir de un punto *A* hasta otro *B* son aquellos que hacen mínimo, máximo o estacionario el tiempo de tránsito entre *A* y *B*. En una lente ideal, el tiempo de tránsito de la luz desde un punto del objeto al correspondiente punto en su imagen es el mismo para todos los rayos (paraxiales) que pasan por la lente. En otras palabras, los rayos llegan a cualquier punto de la imagen, provenientes del punto correspondiente del objeto, y pasan por todos los puntos de la lente. Esta propiedad de las lentes es similar a la relación entre imagen y objeto en el caso de espejos elípticos. Si colocamos un objeto en uno de los focos de la elipse, la imagen se producirá en el otro foco. Como la distancia foco-espejo-foco es la misma para todos los puntos de la elipse, también lo será el tiempo que emplea la luz para ir de un foco (objeto) al otro (imagen). Por consiguiente, los rayos que llegan a la imagen provienen de todos los puntos de la elipse; si se obstruye una parte del espejo elíptico, la imagen se sigue formando igualmente completa en el otro foco, sólo que la cantidad de luz que llegaría será menor.



**Figura ZZ.4** Explorando propiedades de las lentes.

### Sugerencias de trabajo

- ✓ Obstruya distintas partes de la lente y observe cómo afecta esto a la imagen. Describa sus conclusiones.
- ✓ Otra propiedad interesante de las lentes puede apreciarse cubriendo la mitad superior de la lente con un filtro rojo y la mitad inferior con uno verde.<sup>5</sup> Dos trozos de papel transparente de estos colores pueden servir de filtros o bien dos trozos de acrílico coloreados. Antes de hacer el experimento conjeture sobre lo que espera observar (en cuanto al color de la imagen que se formará). Luego, realice el experimento y discuta sus resultados.
- ✓ ¿Cuál es la diferencia entre una imagen real y una imagen virtual? Para establecer una comparación: ¿qué tipo de imagen es la que se observa en un espejo plano? ¿Y en uno cóncavo?
- ✓ ¿Qué tipo de imagen puede ser proyectada sobre una pantalla: una imagen real o una virtual? ¿Dónde debe ubicarse el objeto respecto de la lente para obtener una imagen que pueda observarse sobre una pantalla? Investigue estos puntos trabajando sobre el banco óptico.

### Proyecto 150. Lentes convergentes – Estudio cuantitativo

**Equipamiento recomendado:** Una lente convergente de distancia focal entre 5 cm y 10 cm. Una lámpara incandescente u otro objeto luminoso. Láminas transparentes de color para usar como filtros. Una regla de 1 metro aproximadamente o banco óptico.

A continuación estudiaremos cuantitativamente lo elaborado en el proyecto anterior. Use un banco óptico para alinear los elementos (objeto, lente, pantalla), como se describe en la Fig. ZZ.3.

### Sugerencias de trabajo

- ✓ Para diversas distancias objeto-pantalla, encuentre todas las imágenes que pueda variando la posición de la lente. ¿Para cuántas posiciones de la lente ve imágenes nítidas en la pantalla? Cada vez que observe imágenes nítidas, mida:
  - la distancia objeto-lente ( $p$ ),
  - la distancia pantalla-lente ( $q$ ),
  - los tamaños de objeto e imágenes y sus respectivas orientaciones (derecho o invertido).
- ✓ Represente  $q^{-1}$  en función de  $p^{-1}$ . ¿Qué relación encuentra entre estas variables? Discuta si sus datos pueden describirse con la **ecuación de las lentes delgadas**:<sup>1,3,4</sup>

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}, \quad (\text{ZZ.5})$$

donde  $f$  es la distancia focal de la lente.

- ✓ Del gráfico  $q^{-1}$  en función de  $p^{-1}$  encuentre la distancia focal  $f$  de la lente. Determine la incertidumbre de la determinación de  $f$ . Una forma de estimar las incertidumbres de las distancias  $p$  y  $q$  consiste en desplazar la lente mientras se mantiene fija la distancia objeto-pantalla ( $D = p + q$ ). Al variar la posición de la lente se determina el rango de posiciones

para el cual la nitidez de la imagen no varía. Este rango permite estimar las incertidumbres de las distancias  $p$  y  $q$ . Si hay varios factores que inciden en la determinación de las distancias, indíquelos y discuta su peso en la determinación de las incertidumbres finales.

- ✓ Se define el aumento lateral  $m$  como la razón entre el tamaño de la imagen y el tamaño del objeto. Determine experimentalmente el aumento de la imagen que resulta para distintas posiciones relativas entre objeto y lente. Compare el resultado de sus mediciones con las predicciones de la óptica geométrica. Represente gráficamente  $m$  y el cociente  $q/p$  en función de  $p$  en un mismo gráfico y discuta sus resultados.
- ✓ Otra propiedad interesante de las lentes convergentes es que sólo forman imagen de un objeto sobre una pantalla cuando la distancia objeto-pantalla,  $D = p + q$ , cumple la condición  $D > 4f$  (Fig. ZZ.3), donde  $f$  es la distancia focal.
  - Investigue experimentalmente la validez de esta afirmación usando un banco óptico y una lente de distancia focal  $f$  conocida.
  - Usando la Ec. (ZZ.4) es posible demostrar que si  $D > 4f$ , la lente no forma imagen. Para ello escriba la Ec. (ZZ.4) en términos de  $D$  y  $q$  y obtenga  $q$  en función de los otros parámetros (resulta una ecuación cuadrática en  $q$ ). Analice la solución y demuestre que no es posible la formación de la imagen si  $D < 4f$ . Analice el caso particular de  $D = 4f$ . ¿Dónde se forma la imagen y con qué aumento en este caso?

## Proyecto 151. Método sencillo para estimar $f$ de una lente divergente

**Equipamiento recomendado:** Una lente divergente.

Las lentes divergentes no forman imagen real de un objeto, pero la *imagen virtual* formada sí puede observarse. Un método sencillo para estimar el valor de la distancia focal de una lente divergente consiste en usar un conjunto de líneas paralelas y equiespaciadas,<sup>6</sup> como indica la Fig. ZZ.5 y verlas a través de la lente. Interponga entre sus ojos y el papel la lente divergente y trate de ver simultáneamente parte del objeto en forma directa y parte a través de la lente; con un poco de práctica pronto se logra esta situación. Varíe la distancia objeto-lente hasta que el aumento (de la imagen virtual) sea  $\frac{1}{2}$ , lo cual se caracteriza por el hecho de que en esta condición (aumento  $\frac{1}{2}$ ) tres líneas paralelas de la imagen virtual coinciden con dos del objeto. En esta situación, la distancia objeto-lente es la distancia focal de la lente divergente.

### Sugerencias de trabajo

- ✓ Usando la fórmula de las lentes, Ec. (zz.4), justifique el procedimiento descrito para determinar la distancia focal de una lente divergente.
- ✓ Usando una lente divergente (puede usar las gafas de alguna persona con miopía), determine la distancia focal de ésta. Compare con el valor nominal de la dioptría prescripta por el oftalmólogo al dueño de los anteojos. Recuerde que la dioptría es la inversa de la distancia focal medida en metros.



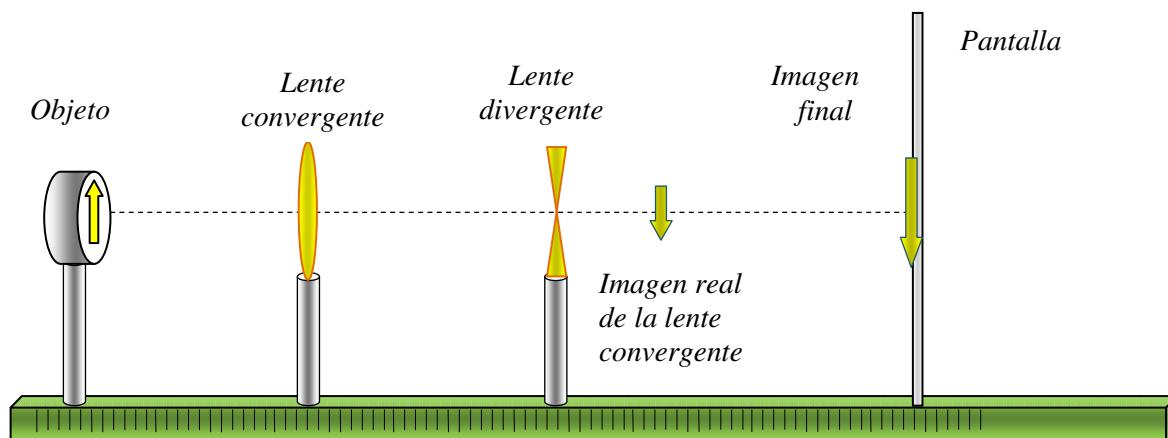
**Figura ZZ.5** Tres líneas paralelas equiespaciadas que sirven para estimar la distancia focal de una lente convergente.

### Proyecto 152.

### Método cuantitativo para estimar $f$ de una lente divergente

**Equipamiento básico recomendado:** Una lente divergente y una convergente. Un banco óptico.

Un método más elaborado para determinar la distancia focal de una lente divergente consiste en medir las distancias objeto-imagen, como en el caso de las lentes convergentes. Como para determinar la distancia lente-imagen,  $q$ , es necesario que la imagen sea real para poder recogerla sobre una pantalla, se utiliza un *objeto virtual*, producido por la imagen real formada por una lente convergente. La disposición experimental es la que se muestra en la Fig. ZZ.6.<sup>7</sup>



**Figura ZZ.6** Una manera de medir la distancia focal de lentes divergentes

#### Sugerencias de trabajo

- ✓ Recoja en la pantalla la imagen real del objeto formada por la lente convergente sola. Lea la posición de dicha imagen sobre la regla del banco óptico y estime la incertidumbre de esa posición.
- ✓ Intercale la lente divergente entre la lente convergente y la imagen real producida por ella, como indica la Fig. ZZ.6. Determine la posición del objeto virtual, respecto de la lente divergente y de la imagen resultante o final de las dos lentes combinadas.
- ✓ Regule la posición de la pantalla hasta que la imagen formada se vea nítida. Lea la posición de la imagen final sobre la regla del banco óptico. Con las lecturas efectuadas determine  $p$  y  $q$  correspondientes a la lente divergente, y con estos valores estime la

distancia focal  $f$  de la lente divergente, usando la Ec. (zz.4). Estime la incertidumbre de esta magnitud.

- ✓ ¿Cómo se compara esta medición de  $f$  con la realizada usando el método del proyecto anterior?

## Referencias

- 
- <sup>1</sup> F. Sears, M. Zemansky, H. Young y R. Freedman, *Física universitaria*, vol. 2 (Addison-Wesley Longman, México, 1999).
- <sup>2</sup> *Guía del laboratorio de física* (Physical Science Study Committee, Reverté, Madrid, 1972).
- <sup>3</sup> E. Hecht, *Óptica* (Pearson Educación, México, 2000).
- <sup>4</sup> D. Halliday, R. Resnick y J. Walker, *Física para estudiantes de ciencias e ingeniería*, 4<sup>a</sup> ed., traducido de *Fundamentals of Physics* (John Wiley & Sons, Inc., New York, 1993).
- <sup>5</sup> H. Drewit and D. Heckathorn, “Figuring Physics,” *Phys. Teach.* **37**, 104 (1999).
- <sup>6</sup> S. C. Dudley, “Tick of the trade – How to quickly estimate the focal length of a diverging lens”, *Phys. Teach.* **37**, 94 (1999).
- <sup>7</sup> Se pueden consultar otros métodos para medir la distancia focal de lentes divergentes en: H. Roy, “A new method for measuring the focal length of a diverging lens”, *Am. J. Phys.* **40**, 1869 (1972); D. A. Crandles and R. P. Kauffman, “Locating images formed by diverging lenses”, *Phys. Teach.* **35**, 369 (1997).

# Capítulo 47

## Experimentos de óptica física

Nos proponemos analizar los fenómenos de interferencia y difracción de la luz usando un láser como fuente de luz coherente y monocromática. Los estudios abarcarán: difracción de la luz por una rendija y por un objeto sólido opaco, y con ellos tendremos la oportunidad de investigar el Principio de Babinet. Asimismo, analizaremos la interferencia y la difracción en un par de rendijas próximas y en una red de difracción. Los experimentos pueden utilizarse para determinar la longitud de onda de un láser o para medir longitudes pequeñas mediante técnicas ópticas. Este capítulo complementa los fenómenos que comenzamos a estudiar en el Cap. 42. También investigaremos algunas propiedades de la luz polarizada: en particular, la Ley de Malus, que caracteriza las ondas transversales, como es la luz.

### Objetivos

- ✓ Óptica física
- ✓ Interferencia y difracción en rendijas y en una red
- ✓ Experimento de Young
- ✓ Determinación de la longitud de ondas
- ✓ Ley de Malus

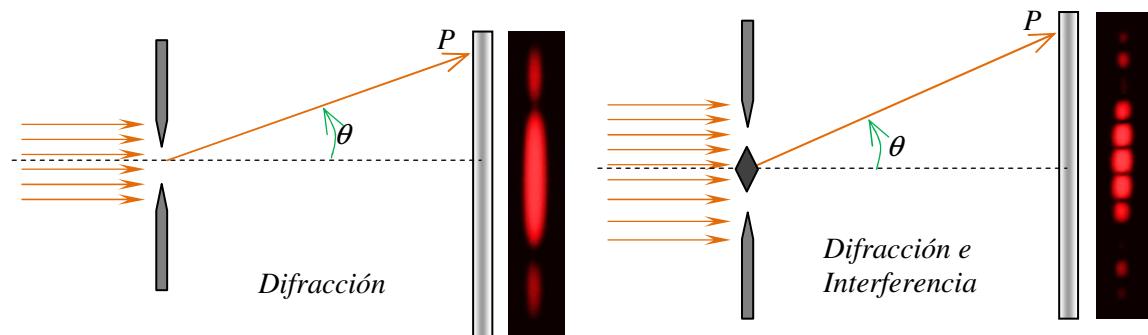
### 47.1 Difracción e interferencia de la luz. La luz como fenómeno ondulatorio

En la Física clásica hay dos maneras en que puede transmitirse energía de un punto a otro. Una está asociada con el transporte de materia, y la otra, con la propagación de ondas.<sup>1</sup> Un ejemplo del primer caso es la energía cinética asociada a una partícula o a un cuerpo que se mueve. En cambio, la energía de un sonido que llega a nuestros oídos, por ejemplo, lo hace a través de vibraciones que se propagan en el aire, es decir, a través de ondas acústicas.

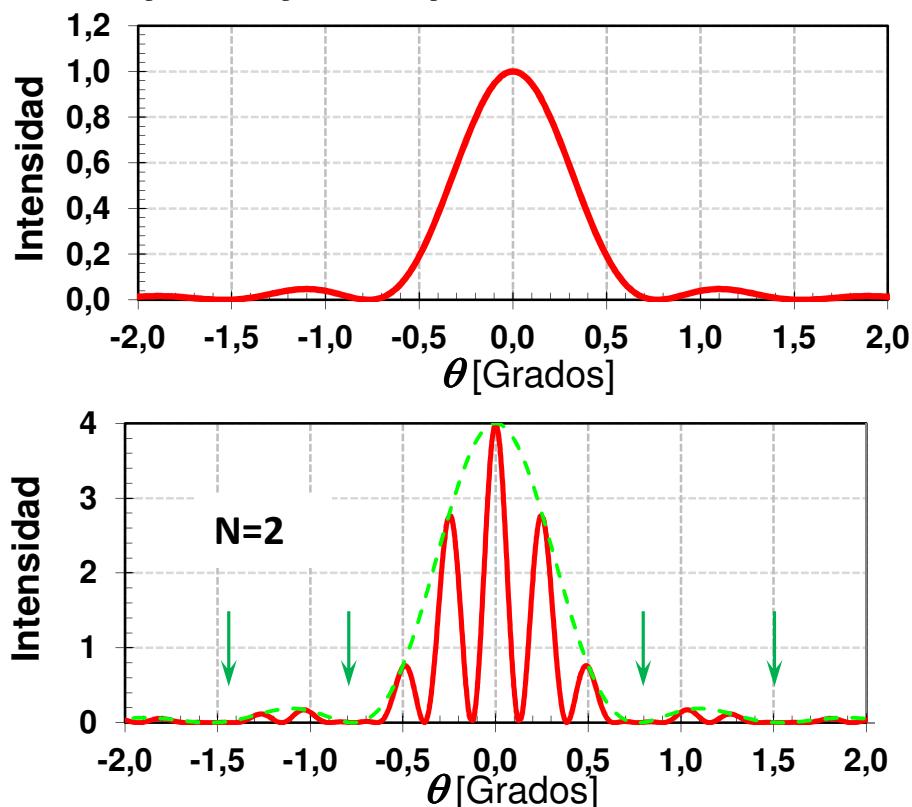
La característica distintiva entre estos dos modos de transmisión de la energía, radica en el modo en que se suman las intensidades asociadas a la energía que propagan. En el caso de las partículas, las intensidades siempre se suman. Por ejemplo, si sobre un blanco arrojamos  $N$  dardos, acumularemos  $N$  impactos sobre éste. Si identificamos la intensidad de impactos sobre el blanco con el número de dardos recibidos, es claro que la intensidad será mayor cuando más dardos arrojemos. En cambio, cuando se superponen dos o más ondas no ocurre lo mismo. De acuerdo al principio de superposición, como discutimos en el Cap. 42, lo que se suman son las amplitudes de las ondas y la onda resultante tiene una amplitud que es la suma de las amplitudes individuales. Para obtener la intensidad de la onda resultante (energía que llega por unidad de área y por unidad de tiempo) tenemos que elevar al cuadrado la amplitud resultante. De este modo, cuando superponemos dos o más ondas es posible que aparezcan zonas donde la intensidad de las ondas se refuerce y otras donde la intensidad disminuya o se anule dado que las ondas pueden tener la misma fase o no.

Este fenómeno de *interferencia* es una propiedad característica de las ondas, y es consecuencia del principio de superposición. En la teoría clásica la interferencia es usada para diferenciar operacionalmente las ondas de las partículas. Si estamos ante una situación en la que no sabemos si la naturaleza del fenómeno es “corpuscular” u “ondulatoria”, realizamos un experimento de superposición: si observamos interferencia estamos en presencia de ondas; en caso contrario se trata de partículas.

Fue Thomas Young, alrededor de 1800, quien, con su experimento de interferencia, produjo resultados inexplicables en términos de la “teoría corpuscular” de la luz, prevalente en la época. A partir de esos experimentos se dedujo que la luz es un fenómeno ondulatorio.<sup>1,2,3,4</sup> En su experimento, Young observó la imagen que producía la luz al pasar primero a través de una rendija y luego a través de otras dos rendijas muy cercanas entre sí. Utilizó luz filtrada de un arco de mercurio para asegurarse de que trabajaba con luz lo más monocromática posible.



**Figura 47.1** A la izquierda, difracción por unas ranuras de ancho  $a$ . A la derecha el efecto combinado de difracción e interferencia, generado por dos rendijas de ancho  $a$ , separadas por una distancia  $d$ . En todos los casos supondremos que la distancia de la ranura a la pantalla, es mucho mayor que las otras dimensiones,  $a$  o  $d$ . El ángulo  $\theta$  determina la posición del punto  $P$  en la pantalla.



**Figura 47.2** Arriba, distribución de intensidad producida por una rendija de ancho  $a$ . Abajo, patrón de interferencia generado por dos rendijas de ancho  $a$ , separadas por una distancia  $b$ . Superpuesto al patrón de intensidad generado por la difracción (línea de trazos); se observa el patrón de interferencia.

Como resultado del experimento, observó una serie de áreas iluminadas y oscuras, y observó además que un cierto punto en la pantalla se iluminaba cuando una de las rendijas era tapada mientras que se convertía en un punto oscuro cuando ambas rendijas estaban descubiertas. En otras palabras, observó que “luz + luz” a veces produce “luz” (una zona iluminada) y otras veces “oscuridad” (una zona oscura). Si la luz tuviese una naturaleza corpuscular, como sostenían las ideas de esa época, no hubiera sido posible explicar este fenómeno, puesto que las intensidades individuales se sumarían y siempre habría luz.

Una condición fundamental para observar los fenómenos de difracción e interferencia, es que el haz de luz incidente sobre las rendijas sea coherente, es decir, que la relación de fase entre dos puntos cualesquiera del frente de onda guarde una relación de fase constante. Esto puede lograrse fácilmente usando un láser como fuente del haz incidente.

Si un haz de luz coherente, de longitud de onda  $\lambda$ , pasa por una rendija de ancho  $a$ , de tamaño comparable a  $\lambda$ , se producirá en la pantalla un patrón de difracción cuya intensidad puede describirse por:<sup>1,2,3,4</sup>

$$I_d(\theta) = I_0 \left( \frac{\operatorname{sen}(z)}{z} \right)^2, \quad (47.1)$$

donde:

$$z(\theta) = \pi \frac{a}{\lambda} \operatorname{sen}(\theta). \quad (47.2)$$

El ángulo  $\theta$  determina la posición del punto en la pantalla donde estamos calculando la intensidad, punto  $P$  de la Fig.47.1. Si tenemos dos rendijas de ancho  $a$  separadas a una distancia  $d$ , el patrón de intensidad viene descrito por:<sup>1,2,3,4</sup>

$$I_I(\theta) = I_d(\theta) \cos^2 u_\theta, \quad (47.3)$$

con

$$u_\theta = \pi \frac{d}{\lambda} \operatorname{sen}(\theta). \quad (47.4)$$

Por su parte, el valor de  $I_d(\theta)$  en la Ec.(47.3) viene dado por la Ec.(47.1). En la Fig.47.2 se muestran los patrones resultantes. Estas ecuaciones son válidas siempre y cuando la distancia a la pantalla sea mucho mayor que  $\lambda$ ,  $a$  y  $d$ . Esta condición caracteriza la difracción de Fraunhofer.

El experimento de interferencia por una rendija doble, se conoce como el experimento de Young. En 1801, Thomas Young comprobó que la luz procedente de una fuente lejana al pasar por una rendija doble, producía un patrón de interferencia similar al ilustrado en la Fig.47.1, con lo que demostraba la naturaleza ondulatoria de la luz. De hecho este tipo de experiencias, - la interferencia y la difracción- son consideradas las signaturas fundamentales que ponen de manifiesto la naturaleza ondulatoria de una onda o partícula. Este experimento se realizó con electrones, protones y neutrones, y se produjeron patrones de interferencia similares a los de la luz.

El propósito de los siguientes proyectos es estudiar fenómenos en los que la luz revela su naturaleza ondulatoria. Analizaremos la interferencia y difracción de la luz usando un láser

como fuente monocromática y coherente. También discutiremos algunas aplicaciones de los efectos de interferencia y difracción.<sup>4</sup>

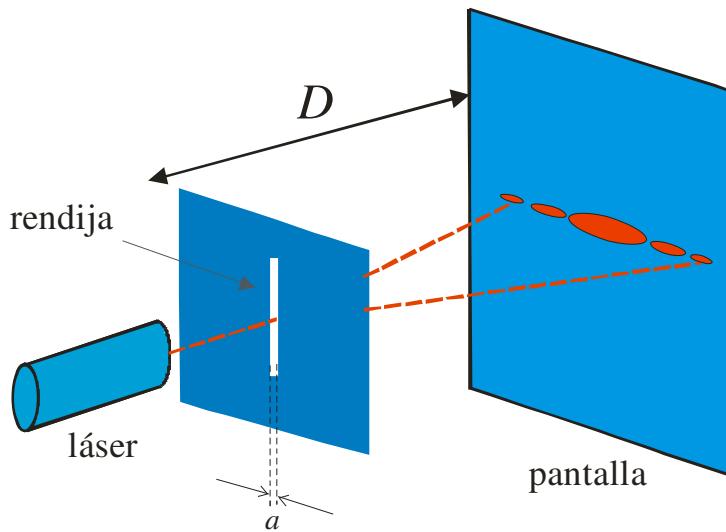
### Proyecto 153. Difracción por una rendija o un alambre fino

**Equipamiento recomendado:** Un puntero láser y un conjunto de rendijas de varios espesores, entre 150 y 20  $\mu\text{m}$ , o un porta–objeto con alambres de cobre de varios diámetros.

Usando un láser y una rendija de abertura de pequeño espesor (entre 150 y 20  $\mu\text{m}$ ) se puede construir un dispositivo como el ilustrado en la Fig. 47.3. Nuestro objetivo es estudiar las características de la distribución de intensidad que se observa en una pantalla colocada a una distancia entre 50 cm a algunos metros de la rendija. Las dimensiones de las ranuras deben ser de algunas decenas o centenas de micrones. Este tipo de rendijas pueden adquirirse de varios proveedores comerciales<sup>5</sup> o bien realizarse a partir de figuras impresas, con una impresora de buena calidad en una escala 10 veces más grande. Para esto último se toma una fotografía de los dibujos realizados usando una película litográfica de alto contraste<sup>6</sup> y luego se la reduce a las dimensiones deseadas. De este modo, es posible obtener figuras de bordes bien definidos que resultan muy adecuadas para estos experimentos. Otra alternativa consiste en usar alambres finos de cobre u otro metal, de espesores comparables, adheridos a un porta–objeto de microscopio o colocados bien tensos en un marco de diapositiva.

Un hecho notable del fenómeno de difracción de la luz, es que las figuras o patrones que se observan en una pantalla son iguales, ya sea que se ilumine una rendija o un alambre de igual espesor. Esta característica notable de la difracción, de formar patrones iguales cuando se usan figuras complementarias, es decir figuras tales que al superponerse forman una placa opaca, se conoce como **principio de Babinet**.<sup>3</sup> Este fenómeno sugiere que la figura de difracción depende fundamentalmente de las ubicaciones de *los bordes* de los obstáculos que producen difracción.<sup>7</sup>

Para realizar el experimento, ubique el láser a unos pocos centímetros de la rendija y mantenga la distancia entre la rendija y la pared,  $D(> 50 \text{ cm})$ , constante durante todo el experimento. Al hacer la distancia entre la rendija y la pantalla mucho más grande que la rendija, ( $D \gg a$ ) nos aseguramos de que los frentes de ondas que llegan a la pantalla son planos, o sea, que se cumple la condición de interferencia de Fraunhofer.



**Figura 47.3** Dispositivo experimental que consta de un banco óptico, un láser, una rendija y una pantalla de proyección.

### Sugerencias de trabajo

- ✓ Observe cómo se distribuye la intensidad de la luz sobre la pantalla. Varíe el ancho de la rendija y estudie cómo se modifica la imagen de difracción. Observe cómo al disminuir el ancho de la rendija, la zona central de máxima intensidad aumenta, contrariamente a lo que ocurriría con la sombra de una rendija de gran tamaño, es decir, de algunos milímetros o centímetros.
- ✓ Coloque una escala que le permita medir distancias en la pantalla de proyección. Determine la posición de los máximos ( $y_n^{(máx)}$ ) y mínimos ( $y_n^{(mín)}$ ) de intensidad sobre la pantalla como función del orden  $n$  en que aparecen a partir del máximo central ( $y = 0$ ). Es decir, haga corresponder el primer mínimo hacia un lado con el orden  $n = 1$ , el segundo con  $n = 2$ , etc.
- ✓ Construya en un gráfico la posición de los mínimos ( $y_n^{(mín)}$ ) de intensidad sobre la pantalla como función del orden  $n$  y un segundo gráfico de los máximos como función de  $n$ .
- ✓ Demuestre teóricamente que las posiciones de los máximos y mínimos vienen dadas aproximadamente por:<sup>2, 3</sup>

$$y_n^{(máx)} = \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{D \lambda}{a}, \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (47.5)$$

y

$$y_n^{(mín)} = n \frac{D \lambda}{a}, \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (47.6)$$

donde  $n$  es el orden del  $n$ -ésimo mínimo o máximo,  $D$  es la distancia rendija–pantalla,  $a$  es el ancho de la rendija y  $\lambda$  es la longitud de onda del láser utilizado.

- ✓ Usando este marco teórico y los datos obtenidos experimentalmente de  $y_n^{(máx)}$  y  $y_n^{(mín)}$  en función de  $n$ , intente ajustar una línea recta a través de los datos. Según las Ecs. (47.5) y (47.6) la pendiente de  $y_n$  en función de  $n$ , *conociendo D y a*, nos permite determinar  $\lambda$ . Determine  $\lambda$  y estime su incertidumbre.

- Este procedimiento es adecuado para determinar la longitud de onda si se conoce el espesor  $a$  de la rendija.
  - Si conoce la longitud de onda  $\lambda$ , se puede usar la figura de difracción para conocer  $a$ . Este procedimiento es adecuado cuando se usa, por ejemplo, un láser de He-Ne para el que se conoce con precisión su longitud de onda ( $\lambda = 632,8 \text{ nm}$ ).
- ✓ Discuta la validez del modelo propuesto para explicar sus observaciones. ¿Qué puede concluir acerca de la validez de la teoría ondulatoria de la luz?
- ✓ **•• Principio de Babinet.** Si dispone de una ranura y de un hilo o alambre de diámetro igual o comparable al ancho de la ranura, estudie las figuras de difracción producidas por ambos sistemas. Estos sistemas, que cuando se superponen completan una pantalla opaca, se denominan sistemas complementarios. Una característica notable de ellos es que forman figuras de difracción similares.
- ✓ ¿Obedecen al Principio de Babinet las figuras de difracción producidas por los sistemas complementarios que usó en sus experimentos (rendija y alambre)?

## 47.2 Determinación de intensidad de un patrón

Muchas veces es útil determinar la variación de intensidad de un patrón de difracción o interferencia que se genera en una pantalla. Este tipo de estudio permite realizar un análisis más cuantitativo de los fenómenos en estudio. Hay varios modos de lograr un espectro de intensidades de determinado patrón. Un modo de realizar este tipo de medición, consiste en utilizar un fotómetro de dimensiones reducidas y medir la distribución de intensidades en función de la posición. Estos dispositivos pueden adquirirse de proveedores comerciales<sup>8</sup> o bien construirse artesanalmente.<sup>9</sup>

Otro método para obtener la distribución de intensidades de un determinado patrón, consiste en usar una cámara digital.<sup>10</sup> En este caso se captura la imagen completa de la figura de difracción o interferencia sobre una pantalla con la cámara. Como se discutió en el Cap. 10, es conveniente colocar sobre la pantalla una regla graduada en escala métrica (mm). La imagen digitalizada puede ser analizada usando algún programa para analizar intensidades de los pixeles a lo largo de una línea (Intensity Profile). Este tipo de análisis puede realizarse con programas tales como Matlab®MathWorks<sup>10</sup> o con programas específicos como Pixel Profiles de efg's Computer Lab<sup>‡</sup>, entre otros. La escala en la pantalla, permite convertir la escala de pixeles en distancias reales. Los programas como Matlab o Pixel Profile, permiten obtener la intensidad de los pixeles a lo largo de una línea en la imagen. De este modo es posible transformar la imagen en un gráfico de intensidad en función de la posición. Para lograr una imagen adecuada conviene hacer varias tomas del patrón de interferencia o difracción, variando el tiempo de exposición. Con un poco de práctica se puede lograr imágenes adecuadas para lograr buenos espectros de intensidades.<sup>10</sup>

Actualmente hay equipos comerciales que permiten realizar un barrido o “scan” de un patrón y determinar el valor de la intensidad como función de la posición en forma directa.<sup>§</sup>

### Proyecto 154. Distribución de intensidad de las figuras de difracción

---

<sup>‡</sup> Pixel Profiles es un shareware de efg's Computer Lab: ([www.efg2.com/Lab/index.html](http://www.efg2.com/Lab/index.html)).

<sup>§</sup> La empresa Pasco Inc. ([www.pasco.com](http://www.pasco.com)) provee uno de estos equipos: Linear Translator tracks for light sensor.

**Equipamiento recomendado:** Un puntero láser y un conjunto de rendijas de varios espesores, entre 150 y 20  $\mu\text{m}$ . Un fotómetro calibrado de área sensible reducida ( $\phi_{\text{senc}} \approx 1\text{mm}$ ), montado sobre una escala lineal, o bien una cámara digital.

Con el analizador de intensidad elegido (fotómetro o cámara digital) determine la distribución de intensidad que se forma en la pantalla por difracción en una rendija. El objetivo es logar un gráfico de intensidad en función de la posición a lo largo de una línea del patrón en estudio.

### Sugerencias de trabajo

- ✓ Siguiendo las indicaciones del proyecto anterior, obtenga un patrón de difracción bien nítido sobre la pantalla. Coloque una escala graduada sobre la pantalla.
- ✓ Si usa un fotómetro, es conveniente que el fotómetro se desplace sobre una montura móvil a lo largo de una línea. Otra posibilidad es colocar el detector sobre una regla y en cada posición del detector, determinar la intensidad y su posición  $x$ . De este modo logramos la variación experimental de la intensidad en función de la posición  $I_{\text{ex}}(x)$ . Si utiliza una cámara digital, experimente tomar la imagen del patrón en estudio con distintas condiciones de exposición hasta lograr las condiciones más apropiadas para determinar  $I_{\text{ex}}(x)$ .
- ✓ Represente en un mismo gráfico los datos medidos de intensidad  $I_{\text{ex}}(x)$  y la predicción del modelo teórico para la difracción de la luz por una rendija,  $I(x)$ , Ec. (47.1), utilizando los valores de  $a$ ,  $\lambda$  y  $D$  característicos de su experimento. El ángulo  $\theta$  viene dado por  $\tan(\theta) = x/D$ , siendo  $x$  la coordenada sobre la pantalla.
- ✓ ¿Qué puede concluir de esta comparación?, ¿es adecuado el modelo propuesto para explicar sus resultados experimentales?
- ✓ **♣♣ Principio de Babinet** Si dispone de una figura complementaria a la rendija, por ejemplo un alambre fino de diámetro igual a la apertura de la rendija, mida la distribución de intensidad de luz en la pantalla y compare las figuras de difracción obtenidas con la rendija y el alambre.
  - Realice un gráfico que muestre la intensidad en función de la posición para los dos sistemas.
  - Analice los resultados y discuta la validez del Principio de Babinet en este caso.

## Proyecto 155. Interferencia por dos rendijas o más rendijas – Experimento de Young

**Equipamiento recomendado:** Un puntero láser y una pantalla con una, dos o más rendijas paralelas y de igual dimensión. También puede usarse un conjunto de alambres de cobre dispuestos paralelamente sobre un porta-objeto de microscopio.

Utilizando una pantalla con dos rendijas paralelas se puede reproducir el experimento de interferencia de Young usando un láser como fuente de luz. La apertura  $a$  de las rendijas debe

estar entre 20 y 150  $\mu\text{m}$ . Es conveniente que la separación  $d$  entre las rendijas sea entre 2 a 6 veces mayor que el espesor  $a$ . Estas pantallas pueden adquirirse a proveedores comerciales de instrumental para laboratorio o construirse artesanalmente.<sup>9,10</sup>

### Sugerencias de trabajo

- ✓ Estudie la figura de difracción de una sola de estas rendijas. Realizando marcas sobre un papel milimetrado colocado como pantalla, obtenga la posición de los máximos y mínimos del patrón de difracción.
- ✓ Sin modificar la geometría, coloque el sistema de doble rendija en el lugar de la rendija anterior. Usando la misma técnica descrita, obtenga la posición de los máximos y mínimos de la figura de interferencia.
- ✓ Si dispone de pantallas con más rendijas, estudie la interferencia producida por más de dos rendijas. Obtenga la posición de máximos y mínimos de la figura de interferencia observada.
- ✓ Compare los diagramas de las figuras de interferencia obtenidas para una, dos y más rendijas.
- ✓ En el caso del experimento de las dos rendijas, de la posición de los máximos y mínimos estime el valor de la longitud de onda  $\lambda$  del láser usado y su incertidumbre. Si conoce su valor por las especificaciones del equipo, compare el valor medido con el reportado para su láser.
- ✓ Usando las Ecs. (47.1) a (47.4) intente explicar sus resultados experimentales.

### Proyecto 156. Medición de $\lambda$ usando redes de difracción

**Equipamiento recomendado:** Un puntero láser y una red de difracción de dimensiones conocidas.

Usando un láser y una red de difracción con espaciamiento  $d$  entre líneas conocido, determine la longitud de onda  $\lambda$  de un láser. Si usa una *red de transmisión*, haga incidir el láser sobre la red calibrada usando la disposición de los elementos indicada en la Fig. 47.3. Si usa una *red de reflexión*, haga incidir el láser sobre la red con un cierto ángulo de incidencia de modo que, después de la reflexión en la red, la imagen de difracción se pueda proyectar sobre una pared o pantalla.

### Sugerencias de trabajo

- ✓ Estudie la figura de difracción del láser al pasar o reflejarse en la red de difracción.
- ✓ A partir de las mediciones de la posición angular del máximo central y de los primeros máximos (primer orden, segundo orden, etc.) y usando la expresión:<sup>2, 3, 4</sup>

$$\operatorname{sen} \theta_{\max} = m \frac{\lambda}{d}, \quad \text{con } m = 0, 1, 2, \dots (\text{orden}), \quad (47.7)$$

que relaciona la ubicación de los máximos con los distintos órdenes  $m$  de difracción, determine el valor de la longitud de onda de la luz y estime su incertidumbre.

### 47.3 Polarización – Ley de Malus

Cuando la propiedad que vibra en una onda tiene carácter vectorial y lo hace en una dirección perpendicular a la dirección de propagación, decimos que la onda es transversal. Por el contrario, si la vibración se realiza en la dirección de propagación, decimos que la onda es longitudinal. Si en una onda transversal la vibración se realiza de un modo predecible, decimos que la onda está polarizada: por ejemplo, si la vibración es siempre paralela a una dirección fija, tenemos polarización lineal. Si el vector que describe la vibración rota a una frecuencia dada perpendicular a la dirección de propagación, tenemos una onda con polarización circular; otro caso simple es el de la polarización elíptica. Es claro que sólo las ondas transversales pueden polarizarse. Si una onda es de carácter escalar, como las ondas de presión o temperatura, no puede ser clasificada como transversal o longitudinal. Así el sonido, como onda de desplazamiento, es una onda longitudinal, pero como onda de presión no es ni longitudinal ni transversal.

La luz, como todas las ondas electromagnéticas, es transversal, con los campos eléctricos y magnéticos perpendiculares entre sí y perpendicular a la dirección de propagación. En general, en las fuentes comunes de luz, como el Sol, una lámpara, etc. la luz es emitida por un gran número de átomos y moléculas que actúan independientemente unos de otros, es decir en modo incoherente. Así, los planos de vibración de estas fuentes varían al azar. En estos casos decimos que la luz no está polarizada. Existen cristales y láminas (cristales dicroicos, polaroides, etc.) que sólo dejan pasar las vibraciones de la luz en una sola dirección. Si un haz de luz no polarizado incide sobre este tipo de láminas, sólo se transmite la componente de la luz que tiene vector eléctrico paralelo a la dirección polarizada de esta lámina. De este modo, es posible polarizar la luz proveniente de cualquier fuente. Si la fuente original no estaba polarizada, la intensidad de la luz transmitida no varía si rotamos la dirección de polarización de la lámina. Sin embargo, si usamos dos polarizadores colocados secuencialmente a lo largo del haz de luz, al rotar uno respecto del otro se observa una variación de intensidad.

De hecho un experimento clave para poner a prueba el carácter transversal de una onda, consiste en utilizar dos polarizadores en forma consecutiva, formando un ángulo  $\theta$  entre sus direcciones de polarización (Fig. 47.4) y medir la intensidad de la onda que se transmite como función de  $\theta$ . La primera lámina polariza linealmente la onda incidente; la segunda lámina, denominada *analizador*, deja pasar la componente del campo alineada con su dirección de polarización. Si designamos como  $E_0$  a la amplitud de la onda polarizada a la salida del primer polarizador, la amplitud transmitida por el analizador será  $E_0 \cos(\theta)$ , ya que sólo la componente del campo eléctrico en la dirección del eje de polarización del analizador, será transmitida. Como la intensidad de la onda (energía por unidad de área y tiempo) es proporcional al cuadrado de la amplitud, tendremos que la intensidad transmitida variará con el cuadrado de  $\cos(\theta)$ , o sea:

$$I(\theta) = I_0 \cos^2 \theta. \quad (47.8)$$

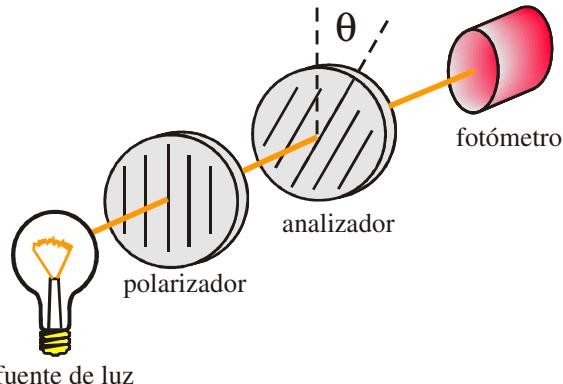
Esta relación se conoce como Ley de Malus.

El objetivo de los siguientes experimentos es estudiar las propiedades y características básicas de la luz polarizada y falsar la Ley de Malus. A partir de estas observaciones, se conectan los fenómenos ópticos con los electromagnéticos.

## Proyecto 157. Ley de Malus

**Equipamiento recomendado:** Dos láminas polarizadoras (polaroides). Una lámpara incandescente. Un fotómetro calibrado.

Un experimento clave para detectar el carácter transversal de una onda es comprobar si la luz obedece a la Ley de Malus. De hecho, ésta es una forma operacional de saber si una onda es transversal o no.



**Figura 47.4** Esquema del dispositivo experimental con una fuente de luz, un polarizador, un analizador y un fotómetro.

Para estudiar este fenómeno empleamos dos *polarizadores*. Si bien existen muchos tipos de polarizadores, las láminas polaroides son muy adecuadas para este experimento y además son de muy bajo costo.<sup>\*\*</sup> También es necesario usar un fotómetro calibrado para medir la intensidad luminosa.

El dispositivo experimental se muestra esquemáticamente en la Fig. 47.4. La fuente de luz puede ser una lámpara incandescente y un fotómetro, entre los cuales se colocan dos polarizadores. El primer polarizador (más cercano a la fuente) se denomina *polarizador*. Esta lámina define el estado de polarización de la luz. Uno de los dos polarizadores debe tener un goniómetro para medir su posición angular relativa a la dirección de transmisión del otro. Debe cuidarse de que exista una buena alineación de todos estos elementos.

Estos experimentos también pueden realizarse usando un láser de estado sólido como fuente de luz. Estos láseres emiten luz polarizada linealmente, de modo que puede prescindirse de uno de los polarizadores, aunque conviene verificar esta cualidad previamente. Los láseres de He-Ne no siempre generan luz linealmente polarizada. Aún aquellos que tienen dispositivos de polarización, ventanas Brewster, pueden tener variaciones al azar del plano de polarización durante el período de calentamiento del láser, que puede ser de varios minutos, por lo que en estos casos es conveniente utilizar un polarizador y analizador.

### Sugerencias de trabajo

- ✓ Usando el esquema de la Fig. 47.4 y un fotómetro calibrado, estudie cómo varía la intensidad luminosa transmitida en función del ángulo entre los dos polarizadores. Para ello, mantenga constante la distancia fuente-detector y rote el polarizador (o el analizador) hasta observar que la intensidad transmitida es máxima (máxima respuesta del fotómetro). Tome este

<sup>\*\*</sup> Hay varios proveedores de láminas polaroides, entre otros: Physics Today Buyer Guide: <http://physicstodaybuyersguide.com/>, Edmund Optics, <http://www.edmundoptics.com/>,

ángulo como origen para medir el ángulo entre ellos ( $\theta = 0^\circ$ ). Verifique que cuando rota el polarizador  $180^\circ$  la intensidad es la misma que cuando  $\theta = 0^\circ$ . Si observa una asimetría significativa entre estas intensidades, es aconsejable que revise el dispositivo; por ejemplo, revise la alineación de los elementos, fíjese si no hay fuentes de luz espurias, etc.

- ✓ Mida con un fotómetro la intensidad luminosa,  $I$ , en función de  $\theta$ . De ser posible, varíe  $\theta$  entre  $0^\circ$  y  $360^\circ$  en pasos de  $\approx 5^\circ$ .
- ✓ Represente gráficamente la intensidad de luz transmitida  $I$ :
  - en función del  $\cos(\theta)$ ,
  - en función del  $\cos^2(\theta)$ .
- ✓ Discuta, a partir estos gráficos, si la luz obedece a la Ley de Malus.

## Referencias

- 
- <sup>1</sup> R. P. Feynman, R. B. Leighton and M. Sands, *The Feynman lectures on Physics* (Addison-Wesley New York, 1965).
  - <sup>2</sup> D. Halliday, R. Resnick y J. Walker, *Física para estudiantes de ciencias e ingeniería*, 4<sup>a</sup> ed., traducido de *Fundamentals of Physics* (John Wiley & Sons, Inc., New York, 1993).
  - <sup>3</sup> E. Hecht, *Óptica* (Pearson Educación, México, 2000).
  - <sup>4</sup> F. Sears, M. Zemansky, H. Young y R. Freedman, *Física universitaria*, vol. 2, ed. 11 (Addison Wesley Longman, México, 2005).
  - <sup>5</sup> Existen muchos proveedores de redes y pantallas de difracción. En el sitio de Internet <http://www.aip.org/pt/guide> puede obtenerse una lista extensa de proveedores de estos elementos. Algunos de ellos son: Edmund Sientific: <http://www.edsci.com>, y Pasco: <http://www.pasco.com>.
  - <sup>6</sup> Se-yuen Mak, "Mass production of optical gratings," *Phys. Teach.* **34**, 214 (1996).
  - <sup>7</sup> A. Hitachi and M. Takata, "Babinet's principle in the Fresnel regime studied using ultrasound," *Am. J. Phys.* **78**, 678 (2010).
  - <sup>8</sup> Para buscar proveedores de fotómetros consultar <http://www.aip.org/pt/guide>. Algunos de ellos son: Vernier Software: <http://www.vernier.com>, Edmund Sientific: <http://www.edsci.com> y Pasco: <http://www.pasco.com>.
  - <sup>9</sup> M. G. C. Peiris and I. K. Perera, "A simple and inexpensive photometer using a light-dependent resistor," *Am. J. Phys.* **55**, 1147 (1987); M. D. Levenson, "Sensitive small area photometer," *Am. J. Phys.* **38**, 1987 (1970).
  - <sup>10</sup> A. Ramil, A. J. López, and F. Vincitorio, "Improvements in the analysis of diffraction phenomena by means of digital images," *Am. J. Phys.* **75**, 999 (2007).

# Capítulo 48

## Tensión superficial

En esta sección estudiaremos la tensión superficial de un líquido. Discutiremos un modo simple de medir la tensión superficial de un líquido y analizaremos cómo la presencia de un detergente modifica esta propiedad. Por último, presentamos un modelo simple, que permite determinar el Número de Avogadro y el tamaño molecular del valor de la tensión superficial y el calor latente de vaporización.

### Objetivos

- ✓ Tensión superficial de un líquido
- ✓ Ascenso capilar
- ✓ Determinación de la tensión superficial
- ✓ Estimación del Número de Avogadro

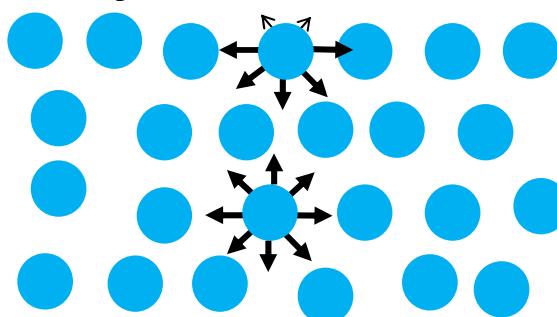
### 48. 1 Fuerzas de cohesión y adhesión

La tensión superficial es una propiedad de la superficie de separación de dos medios y es causada por la atracción entre moléculas del mismo tipo que interactúan mediante las diversas fuerzas intermoleculares.<sup>1</sup> Entre las moléculas y los átomos hay en general una interacción (fuerza) de muy corto alcance que se conoce como fuerzas de van der Waals. Estas fuerzas deben su origen a las polarizaciones fluctuantes y correlacionadas entre partículas cercanas,<sup>2</sup> y en general son distintas para moléculas o átomos de la misma especie que entre átomos y moléculas de distintas especies. A las fuerzas de atracción que ejercen las moléculas del mismo tipo las llamamos **cohesión**, la fuerza entre moléculas o átomos distintos la denominamos **adhesión**.

El fenómeno es más visible en una interfase líquido-gas, por ejemplo agua y aire. En la superficie del líquido las moléculas son atraídas hacia el seno del líquido por moléculas análogas y hacia afuera por las moléculas presentes en la fase gaseosa (ver Figura 48.1). Como la cohesión de las moléculas del líquido es más fuerte, las moléculas de la superficie líquida son atraídas más intensamente por sus vecinas de la fase líquida, que por las de la fase gaseosa, donde hay menos moléculas por unidad de volumen y están más alejadas entre sí. Como resultado de estas interacciones, la superficie se parece a una “membrana tensa” y adquiere propiedades semejantes a esta membrana. En particular, adquiere una forma tal que minimiza su área, compatible con los vínculos presentes; de esta forma disminuye la energía de superficie. Para deformar esa superficie se requiere hacer trabajo; el trabajo por unidad de área se denomina tensión superficial  $\gamma$ . De manera análoga,  $\gamma$  puede definirse como la fuerza resultante que por unidad de longitud actúa sobre las moléculas en la superficie:

$$\gamma = \frac{F}{l} = \frac{\Delta W}{\Delta A}, \quad (48.1)$$

donde  $F$  es la fuerza sobre una longitud  $l$  de su superficie. Similarmente  $\Delta W$  es el trabajo necesario para aumentar el área de una membrana en  $\Delta A$ . Esta expresión puede usarse como definición operacional de tensión superficial.



499

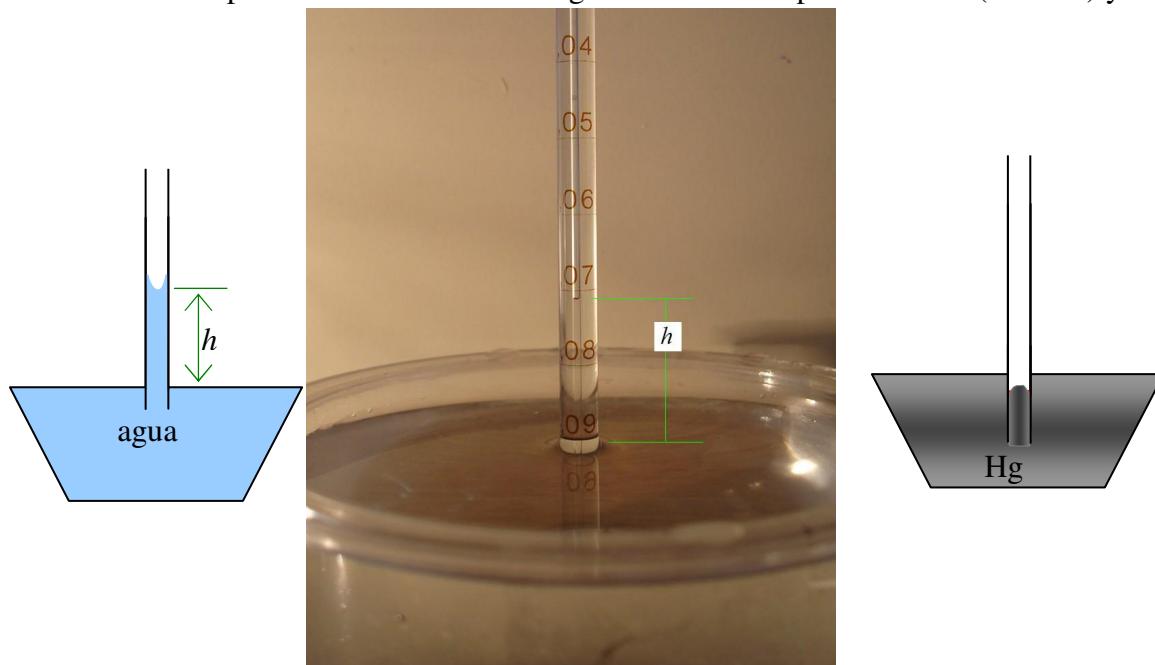
**Figura 48.1** Esquema de las fuerzas intermoleculares sobre moléculas en el seno y en la superficie de un líquido.

La adhesión de las moléculas de un líquido a las paredes sólidas de un recipiente que lo contiene determina la facilidad que tiene el líquido para mojar a este sólido. Las propiedades de “mojado” pueden modificarse incorporando surfactantes al líquido, por ejemplo jabones o detergentes. Estas sustancias esencialmente disminuyen la cohesión superficial y por lo tanto el valor de  $\gamma$ . Esta propiedad de los detergentes o jabones mejoran las propiedades humectantes y limpiadoras del agua pura.

Existen varios métodos para medir la tensión superficial de un líquido.<sup>3,4,5</sup> Algunos de ellos usan el ascenso (o descenso) de un líquido por un tubo capilar, otros miden la fuerza de la tensión superficial. En las Refs.(6,7) se describen varias técnicas experimentales. También existen equipos comerciales que pueden hacer estas mediciones en forma rápida y precisa, como el tensiómetro de Du Nouy.

## 48.2 Ascenso capilar

Cuando un líquido está en contacto con un sólido, si prima la cohesión, decimos que el líquido no moja la superficie (ejemplo de este caso es el mercurio en vidrio). Si prima la adhesión, entonces el líquido moja la superficie, como en el caso del agua en un recipiente de vidrio. Si se introduce un tubo capilar (diámetro submilimétrico) en agua, se observa que ésta moja el tubo y el líquido asciende por el tubo hasta una cierta altura  $h$ . Ver Fig. 48.1. Por el contrario, si no moja el material del tubo, se produce un descenso del nivel del líquido dentro del tubo. Con un tubo capilar de vidrio dentro del agua se observa el primer efecto (ascenso) y con el



misma tubo en mercurio se observa el segundo (descenso).

**Figura 48.3** Ejemplo de ascenso (agua) izquierda y centro. A la derecha, descenso capilar (mercurio).

En el caso del ascenso capilar, si suponemos que, en equilibrio, el peso de la columna de agua que asciende se equilibra con la fuerza que realiza la tensión superficial en el contorno del tubo, tenemos:

$$\pi d \gamma = Peso = \rho g \frac{\pi}{4} d^2 h , \quad (48.2)$$

o bien:

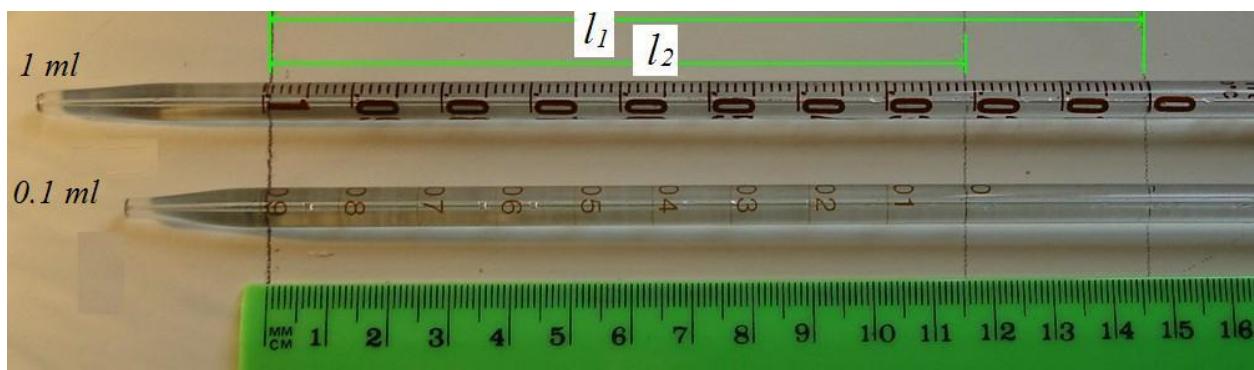
$$\gamma = \frac{\rho g}{4} dh , \quad (48.3)$$

donde  $g$  es la aceleración de la gravedad,  $\rho$  es la densidad del líquido,  $d$  es el diámetro interno del tubo capilar y  $h$  es la altura a la que asciende el líquido. Implícitamente, suponemos que el ángulo de contacto del líquido<sup>‡</sup> con el tubo es cero<sup>8,9</sup>.

Una dificultad frecuente en este método es la determinación de  $d$  y de  $h$ . No es simple conseguir tubos de pequeño diámetro y determinar su diámetro interno,  $d$ , con precisión. Una solución a ambos problemas se puede lograr usando pipetas de vidrio de pequeños volúmenes, por ejemplo 0,1 ó 1 ml, que son fáciles de conseguir y de muy bajo costo, véase Fig. 48.4. Si medimos con una regla la distancia  $l$  correspondiente a un volumen conocido de la misma  $V$ , el diámetro de interior será:

$$d = \sqrt{\frac{4 V}{\pi l}} . \quad (48.4)$$

Además, esta medición nos permite “calibrar” las divisiones de la pipeta en unidades de longitud. Si se toma una foto digital de la pipeta dentro del líquido, ver Fig.48.3, usando las técnicas discutidas en el Capítulo 10, podemos determinar el valor de  $h$  en cada caso. Una precaución importante en todos estos métodos para medir la tensión superficial de un líquido, es limpiar cuidadosamente todos los elementos que se van a usar: recipientes, pipetas, etc. enjuagando varias veces con agua destilada. De igual modo, los líquidos a utilizar deben tener la menor contaminación posible. En el caso de agua use agua destilada de buena calidad.



**Figura 48.4** Ejemplo de pipetas de vidrio de 0,1 y 1 ml. Midiendo con una regla las longitudes  $l_1$  y  $l_2$  de los volúmenes  $V_1$  y  $V_2$ , podemos obtener los correspondientes diámetros internos y a la vez obtener una calibración en centímetros de las marcas de división en las pipetas.

### Proyecto 158. Determinación de la tensión superficial por ascenso capilar

**Equipamiento básico recomendado:** Dos pipetas de 1 ml y 0,1 ml. Una bandeja con agua. Opcionalmente se puede usar una cámara digital.

Teniendo las precauciones de limpieza indicadas más arriba y usando dos pipetas (no es imprescindible tener dos, pero ayuda a comparar resultados), construya un dispositivo similar al

<sup>‡</sup> Contact angle, Wikipedia, the free encyclopedia, [http://en.wikipedia.org/wiki/Contact\\_angle](http://en.wikipedia.org/wiki/Contact_angle)

ilustrado en la Fig. 48.3, que le permita introducir las dos pipetas en un mismo recipiente. Un pie de laboratorio con una pinza de agarre común puede servir para este efecto.

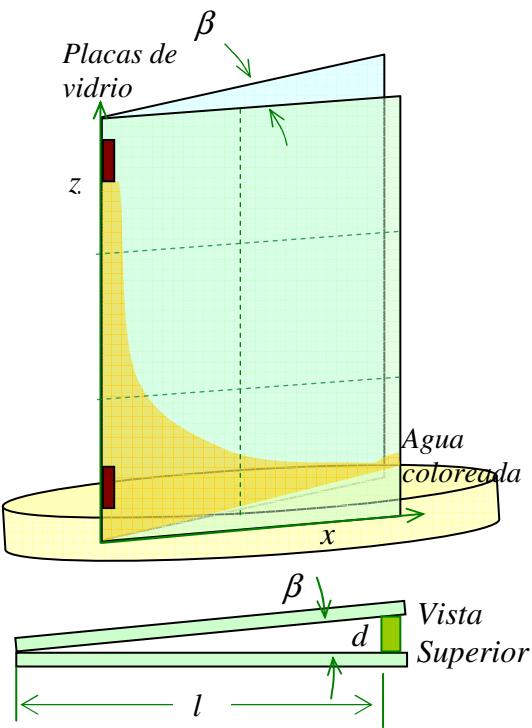
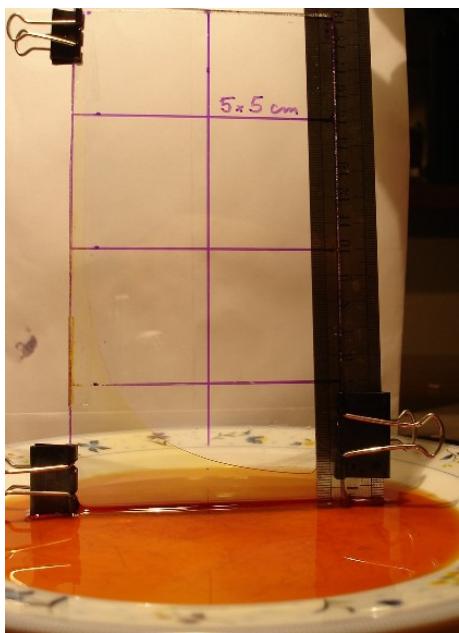
### Sugerencias de trabajo

- ✓ Mida la temperatura del agua.
- ✓ Determine los diámetros internos de cada pipeta que se van a usar y sus correspondientes incertezas.
- ✓ Introduzca las pipetas en el agua y asegúrese de que el nivel del agua coincida con alguna división de la escala y registre este valor.
- ✓ Si dispone de una cámara digital registre varias fotografías del sistema, similares a las de la Fig. 48.3. Varíe las condiciones de iluminación hasta obtener fotogramas que muestren claramente el menisco del agua.
- ✓ Determine las alturas  $h$  de cada tubo usado y sus correspondientes incertidumbres.
- ✓ Determine el valor del coeficiente de tensión superficial usando la Ec.(48.6), para cada pipeta usada y sus correspondientes incertezas. Obtenga el mejor valor de  $\gamma$  y su incerteza. Tenga en cuenta que los errores de las dos determinaciones no son iguales, por lo tanto, los valores se “pesan” en forma diferente. Ver Cap. 5.
- ✓ Compare sus resultados con los valores de tablas correspondientes. ¿Qué puede concluir del método usado?
- ✓ Prepare varias soluciones de agua y detergente o lavavajilla, por ejemplo, al 0,5%, 1%, 2%, 3%, 5%, 10%, 20%. Mida en cada una la tensión superficial a la temperatura ambiente.
- ✓ Represente  $\gamma$  como función de la concentración del lavavajillas. ¿Qué observa? Describa cómo cambia el valor de  $\gamma$  con el agregado de lavavajillas. Investigue en la bibliografía y discuta por qué esta propiedad mejora las propiedades limpiadoras del agua.

### Proyecto 159. Ascenso capilar por una pared en forma de cuña

**Equipamiento básico recomendado:** Una bandeja playa, con agua. Dos placas de vidrio de 3 ó 4 mm de espesor y 20 cm x 15 cm, aproximadamente. Una cámara digital.

Un antiguo dispositivo,<sup>10</sup> muy fácil de construir, ilustra un aspecto interesante de la ascensión capilar. Se construye con dos vidrios de 10 cm x 15 cm aproximadamente en forma de cuña como se muestra en la Figura 48.4. Las placas se colocan de tal modo que formen una cuña de separación angular  $\beta$ . Para ello se coloca un separador de espesor conocido  $d$  a una distancia  $l$  de la línea de unión. Por lo tanto,  $\tan\beta = d/l$ . Conviene que este separador sea del orden de 1 mm si  $l$  es del orden de 10 cm, para así lograr una cuña de dimensiones “capilares.”



**Figura 48.5.** Dos placas de vidrio en forma de cuña. A la derecha se ve un esquema del arreglo y a la izquierda una foto de una realización concreta. Los vidrios se pueden sellar con cemento para vidrio o simplemente con soportes unidos con prensas para papel.

Para tener una escala de referencia, se puede trazar en la placa más próxima al observador (cámara) una retícula de dimensiones conocidas. Asimismo, conviene colorear el agua con tinta azul u otro colorante para hacer más fácilmente visible el menisco. Definimos al eje de la arista vertical como el eje  $z$  y al horizontal como  $x$ . Si tomamos un elemento de volumen prismático infinitesimal, de base  $x \tan(\beta)$  y  $dx$  cuya altura es  $z$ , tendrá un peso  $(\rho \cdot \tan(\beta) \cdot x \cdot dx) \cdot g$ . La fuerza debida a la tensión superficial que sostiene esta columna es:  $\gamma 2dx$ . Del balance de estas fuerzas tenemos:

$$z = \left( \frac{2\gamma}{\rho g \cdot \tan \beta} \right) \frac{1}{x}. \quad (48.5)$$

En este experimento deseamos falsar esta expresión. Como se ve, la Ec.(48.5) predice un llenado de la cuña con forma de hipérbola.

Construya el dispositivo indicado en forma de cuña e intodúzcalo dentro de un plato con agua coloreada.

### Sugerencias de trabajo

- ✓ Mida la temperatura del agua.
- ✓ Determine el ángulo  $\beta$  de la cuña.
- ✓ Con el método de ascensión capilar o por medición de fuerzas, determine la tensión superficial del agua coloreada.

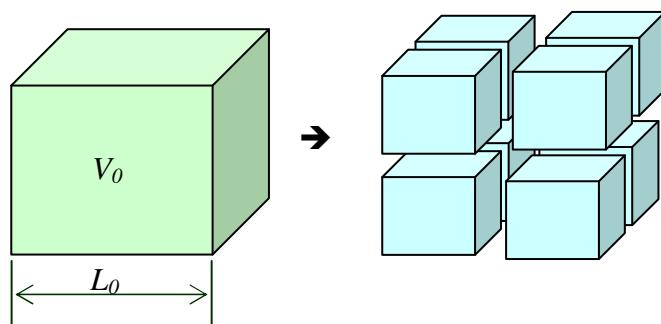
- ✓ Obtenga un fotograma de la cuña en agua. Varíe las condiciones de iluminación hasta obtener una fotografía donde se vea lo más nítidamente posible la forma del líquido entre las placas.
- ✓ A partir de estas imágenes, y usando las técnicas de análisis de imágenes discutidas en el Capítulo 10, verifique en qué medida sus datos están de acuerdo o no con la predicción de la Ec. (48.5). Discuta sus resultados.

## Proyecto 160.

## Estimación del Número de Avogadro

Una aplicación interesante de lo discutido hasta aquí sobre el fenómeno de la tensión superficial, es la estimación del Número de Avogadro.<sup>11</sup> Como vimos anteriormente, el trabajo necesario para incrementar el área de una superficie de un líquido en  $dA$  es  $\gamma dA$ . Consideremos un mol de líquido. Su volumen será:  $V_0 = M_{mol} / \rho$ , donde  $M_{mol}$  es la masa de un mol de esa sustancia. Si originalmente suponemos que este volumen tiene la forma de un cubo regular, su lado será  $L_0 = (M_{mol}/\rho)^{1/3}$ . Si cada uno de los lados del cubo se divide en  $n$  partes iguales, de modo análogo a como se ilustra en la Fig. 48.6, se generan  $n^3$  particiones del cubo original, el incremento de área será:

$$\Delta A = n^3 6(L_0/n)^2 - 6(L_0)^2 = 6L_0^2 \cdot (n-1). \quad (48.6)$$



**Figura 48.6.** Partición de un cubo en ocho partes iguales.

Si el número total de particiones coincide con el número de moléculas, es decir, si  $n^3 = N_A$  (Número de Avogadro), la energía necesaria para generar esta partición será:

$$\Delta E = \gamma \Delta A = \gamma 6L_0^2 (n-1) \approx 6\gamma N_A^{1/3} (M_{mol} / \rho)^{2/3}. \quad (48.7)$$

Por otra parte, la energía necesaria para llevar el sistema desde su forma líquida original a moléculas individuales es justamente lo que llamamos el calor latente de vaporización por mol, o sea,  $L_v$ .<sup>§</sup> Por lo tanto:

$$L_v \approx N_A^{1/3} [6\gamma(M_{mol} / \rho)^{2/3}], \quad (48.8)$$

o bien:

---

<sup>§</sup> En este punto es importante distinguir el calor latente de vaporización  $L_v$ , del cambio de entalpía  $\Delta H_v$ , que en general se indica en las tablas.<sup>12</sup> Este último valor incluye tanto el calor latente como el trabajo que hace el vapor al expandirse en el aire, esto es  $\Delta H_v = L_v + P\Delta V$ , para un mol ( $P\Delta V \approx RT_v$ ). Por lo tanto,  $L_v \approx \Delta H_v - RT_v$ , donde  $T_v$  es la temperatura de ebullición en Kelvin. Asimismo, el valor de la tensión superficial que deberíamos usar es un valor cercano a  $T_v$ .

$$N_A \approx \left( \frac{L_v}{6\gamma} \right)^3 \left( \frac{\rho}{M_{mol}} \right)^2. \quad (48.9)$$

Asimismo, una estimación del tamaño, o distancia intermolecular,  $d$ , puede expresarse como:

$$d \approx \sqrt[3]{V_0 / N_A}. \quad (48.10)$$

Combinando estas dos últimas expresiones, obtenemos:

$$d \approx \left( \frac{6\gamma}{L_v} \cdot \frac{M_{mol}}{\rho} \right). \quad (48.11)$$

Es interesante notar, que aunque los antiguos filósofos griegos ya especulaban sobre la naturaleza atómica de la materia, fue Thomas Young (1773-1829) quien, utilizando este tipo de argumentos, pudo realizar una de las primeras estimaciones de las dimensiones moleculares.<sup>11</sup>

### Sugerencias de trabajo

Para un conjunto de sustancias simples, que a temperatura ambiente sean líquidas, por ejemplo agua, tetracloruro de carbono, acetona, cloroformo, metanol, etanol, hexano, neón, argón, etc., obtenga los valores de  $\gamma$ ,  $L_v$ ,  $\rho$  y  $M_{mol}$ . Recuerde corregir el valor de  $\Delta H_v$  para obtener  $L_v$ .

- ✓ Usando la expresión (48.9) estime el valor de  $N_A$  en cada uno de estos casos.
- ✓ ¿Cómo se comparan los valores y órdenes de magnitud de  $N_A$  con el valor aceptado para este parámetro:  $N_A = 6,022 \times 10^{23}$ . ¿Qué puede concluir acerca del modelo planteado para conectar la tensión superficial con el calor latente de un líquido?
- ✓ Usando la expresión (48.11) estime el valor de  $d$  para cada una de las sustancias estudiadas.
- ✓ ¿Cómo se comparan los valores y órdenes de magnitud de  $d$  con los valores aceptados para estos parámetros?

### Referencias

---

<sup>1</sup> Irving H. Shames, *Mecánica de fluidos*, McGraw-Hill, 3ra Ed., 1995.

<sup>2</sup> W. C. Thoburn, "Role of Intermolecular Attractions in Liquids and Gases," Am. J. Phys. **34**, 132 (1966).

<sup>3</sup> Algunos de estos métodos están comentados en: J. R. Grigera, *Elementos de biofísica*, Editorial Hemisferio Sur S.A., Buenos Aires, 1980.

<sup>4</sup> S. Y. Mak and K. Y. Wong, "The measurement of surface tension by the method of direct pull," Am. J. Phys. **58** 791 (1990).

<sup>5</sup> F. L. Román, J. Faro, and S. Velasco, "A simple experiment for measuring the surface tension of soap solutions", Am. J. Phys. **69** (8), 920, (2001).

<sup>6</sup> Measurement of surface tension, The Kibron Inc. 2013, <http://www.kibron.com/surface-tension/measurement-techniques>

<sup>7</sup> F. Behroozi and P. S. Behroozi, "Determination of surface tension from the measurement of internal pressure of mini soap bubbles," Am. J. Phys. **79**, 1089 (2011).

<sup>8</sup> J. E. Fernández y E. Galloni, *Trabajos prácticos de física* (Editorial Nigar, Buenos Aires, 1968).

<sup>9</sup> B. L. Worsnop y H.T. Flint, *Curso superior de física práctica* (Eudeba, Buenos Aires, 1964). Original en Inglés Advance Practical Physics for Students (Mathhuen C., London, 1957).

<sup>10</sup> M. Piva, "Capillary Rise in a Wedge", Phys. Teach. 47, 528, (2009).

<sup>11</sup> F. R. Stauffer, "An estimate of Avogadro's Number," Phys. Teach. **29**, 252 (1991), V. F. Weisskopf, "Search for Simplicity," Am. J. Phys., **53**, 19-20. (1985), Am. J. Phys., **53**, 618. (1985), R. E. Crandall and T. G. Dunne, "Heuristic methods for counting and sizing of molecules in the liquid state," Am. J. Phys. **57**, 346 (1989).

## Capítulo 49

### Experimentos con fluidos – Experimento de Torricelli

#### Objetivos

En este capítulo deseamos estudiar algunas propiedades de los líquidos en movimiento. En particular, estudiamos una aplicación del Teorema de Bernoulli al caso del desagote de un líquido a través de un orificio, una versión actualizada del experimento clásico de Torricelli. Para explicar cuantitativamente el fenómeno, veremos que es necesario introducir los efectos de pérdidas en la ecuación de Bernoulli. Finalmente, se exploran las características del movimiento de los fluidos en régimen laminar y turbulento.

- ✓ Forma de un chorro de agua
- ✓ Experimento de Torricelli.
- ✓ Teorema de Bernoulli
- ✓ Tiempo de evacuación de un recipiente por un orificio
- ✓ Régimen laminar y turbulento

#### 49. 1 Fluidos ideales y teorema de Bernoulli

El movimiento de los fluidos es uno de los fenómenos físicos de mayor complejidad en la naturaleza. Sin embargo, es posible comprender muchas de sus características usando las leyes de Newton y las leyes de conservación: conservación de la masa, del momento, de la energía, etc.<sup>1,2,3,4</sup>

Definimos el flujo,  $Q$ , como el volumen del fluido que cruza una determinada área transversal del ducto por unidad de tiempo. Si el fluido es un líquido, podemos tratarlo como un fluido incompresible dado que, por lo general, su densidad a una temperatura dada es constante. El principio de conservación de masa, aplicado a un fluido que se mueve por el tubo de sección transversal variable, implica que:

$$Q_1 = v_1 \cdot A_1 = Q_2 = v_2 \cdot A_2 , \quad (49.1)$$

donde  $v_1$ ,  $A_1$ ,  $v_2$  y  $A_2$  son las velocidades y áreas de las secciones transversales en los puntos 1 y 2, respectivamente, a lo largo del tubo. Lógicamente, se supone que no hay pérdidas o fugas de fluido entre los puntos 1 y 2. La Ec.(49.1) es una forma de escribir la *ecuación de continuidad* para un fluido incompresible, unidimensional, y estacionario, que permite conocer la velocidad de un fluido en distintos puntos de un ducto de sección variable,

Otra expresión de mucha utilidad en varias áreas de la ciencia y la ingeniería es la ecuación de Bernoulli. En su forma más simple, la ecuación de Bernoulli es básicamente una formulación de la conservación de la energía mecánica por unidad de volumen a lo largo de una línea de fluido, que se expresa como:<sup>1,2,4</sup>

$$P_1 + g\rho \cdot h_1 + \frac{1}{2} \rho \cdot v_1^2 = P_2 + g\rho \cdot h_2 + \frac{1}{2} \rho \cdot v_2^2 . \quad (49.2)$$

Aquí,  $\rho$  es la densidad del fluido,  $P_1$  y  $P_2$  son las presiones en dos puntos 1 y 2, respectivamente, a lo largo de una línea de corriente. Con  $g$  denotamos a la aceleración

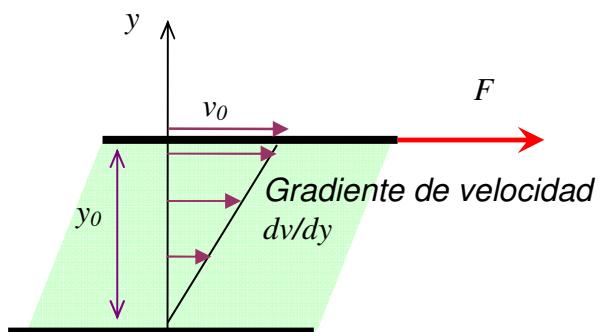
de la gravedad,  $v_1$  y  $v_2$  designan las velocidades del fluido en los puntos 1 y 2 respectivamente,  $h_1$  y  $h_2$  son las alturas de cada punto. Esta expresión es aplicable a fluidos ideales (incompresibles y no viscosos).

## 49. 2 Fluidos viscosos

La viscosidad es una propiedad de los fluidos asociada a la resistencia a moverse o fluir. Por eso decimos que el agua es poco viscosa, mientras que la miel tiene una viscosidad alta. Más específicamente, si tenemos un fluido confinado entre dos capas sólidas paralelas separadas por una distancia  $y_0$ , como se ve en Fig. 49.1, para mover la placa superior con velocidad  $v_0$  respecto de la inferior, se debe ejercer una fuerza (de corte)  $F$ , que es proporcional a  $v_0$ , al área  $A$  de la placa e inversamente proporcional a  $y_0$ . La constante de proporcionalidad,  $\eta$ , es la viscosidad dinámica del fluido, esto es:

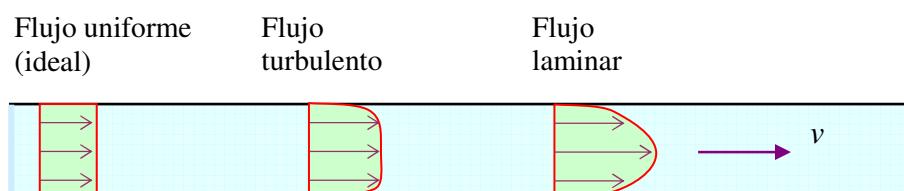
$$F = \eta \cdot A \cdot \frac{v_0}{y_0} , \text{ o bien} \quad F = \eta \cdot A \cdot \frac{dv}{dy} . \quad (49.3)$$

En otras palabras, el esfuerzo de corte  $F/A$  necesario para mover una capa de fluido respecto de otra, es proporcional a la viscosidad y al gradiente de la velocidad,  $dv/dy$ , en la dirección perpendicular a las capas.<sup>2,4</sup>



**Figura 49.1:** Para mantener la placa superior en movimiento con velocidad  $v_0$  se requiere una fuerza  $F$  (de corte), que es proporcional al área de la placa y al gradiente de velocidad.

En el caso de líquido real que fluye por el interior de un tubo o en un canal, hay dos efectos importantes que surgen como consecuencia de la viscosidad: la velocidad del fluido en la superficie del sólido es cero, y la energía mecánica no se conserva. Como consecuencia de esto, el perfil de velocidad tiene un máximo en el centro del tubo y es nulo sobre las paredes del tubo, como se ilustra en el extremo derecho de la Fig. 49.2. De otro modo, el gradiente de velocidad y el esfuerzo cortante serían infinitos.



**Figura 49.2:** Perfiles de velocidad en un tubo por el que fluye un líquido. En el extremo izquierdo vemos un perfil uniforme correspondiente a un fluido ideal. En el extremo derecho, mostramos un perfil característico de un fluido viscoso en régimen laminar. En el centro vemos la forma del perfil de la velocidad media de un flujo turbulento.

Como se discutió en el Anexo A del Cap. 10, en el movimiento de los fluidos se distinguen dos regímenes, el flujo laminar y el flujo turbulento. En el primer caso, las partículas de fluido se mueven ordenadamente siguiendo trayectorias estables y aproximadamente paralelas entre sí. Éste es el régimen que se observa en el flujo de un canal en el que el fluido se mueve lentamente, ver Fig. 10.10. En el régimen turbulento, las partículas de fluido se mueven de un modo desordenado, cambiando su trayectoria en forma irregular o en torbellinos; el fluido en un dado punto del espacio parece variar constantemente en el tiempo. Estos dos regímenes se pueden observar fácilmente en el humo de un sahumerio o de un cigarrillo encendido. Al principio, el flujo es laminar pero, al ir ascendiendo el humo, el flujo se va transformando en turbulento en forma paulatina. El valor del número de Reynolds ( $Re$ ), que representa el cociente entre las fuerzas iniciales y viscosas, permite diferenciar estos dos regímenes.

### Proyecto 161. Forma de un chorro de agua

**Equipamiento recomendado:** Una cámara digital, acceso a un grifo de agua.

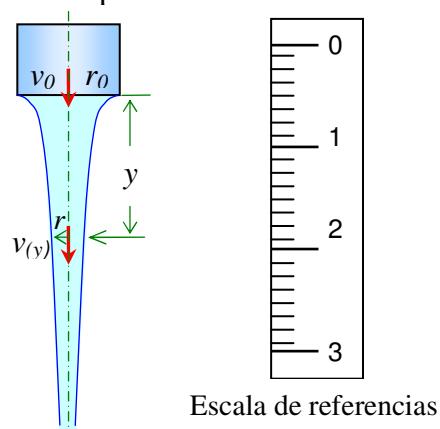
Cuando se abre un grifo poco a poco, se forma un chorro de agua de forma cónica. Su diámetro va disminuyendo a medida que aumenta la distancia a la boca del grifo. Finalmente, el chorro comienza a romperse en gotas. Supongamos que la velocidad de salida del chorro de agua en la boca del grifo es  $v_0$ ; ver la Fig. 49.3. Si el área de salida del grifo es  $A_0 = \pi \cdot r_0^2$ , el flujo inicial es  $Q_0 = A_0 v_0$ , que se conserva a lo largo del chorro. Debido a la aceleración de la gravedad, la velocidad del chorro va aumentando, y por conservación de la energía tenemos:

$$v^2(y) = v_0^2 + 2g \cdot y , \quad (49.4)$$

Aquí  $y$  representa la distancia desde la boca del grifo, ver Fig. 49.3. Por la conservación de la masa, Ec.(49.1), tenemos:

$$v(y) \cdot \pi \cdot r^2 = v_0 \cdot \pi \cdot r_0^2 , \quad (49.5)$$

Diseño experimental



**Figura 49.3:** Izquierda, esquema del dispositivo experimental propuesto. Derecha: imagen de un chorro de agua vertical.

por lo tanto:

$$r^2 = \frac{v_0 r_0^2}{v(y)} = \frac{v_0 r_0^2}{\sqrt{v_0^2 + 2gy}} , \text{ o bien} \quad r(y) = r_0 \cdot \left[ \frac{v_0^2}{v_0^2 + 2gy} \right]^{1/4}. \quad (49.6)$$

Esta expresión permite formular un modelo de la variación del radio del chorro con la distancia de caída,  $y$ , del chorro. Para calcular  $v_0$  se mide el caudal  $Q_0$  como el volumen vertido  $\Delta V$  en un dado intervalo de tiempo  $\Delta t$ , o sea:

$$Q_0 = v_0 \cdot \pi \cdot r_0^2 = \frac{\Delta V}{\Delta t} . \quad (49.7)$$

Por otro lado, el radio  $r_0$  de salida se puede medir directamente del pico del grifo o de una foto digital del chorro. Para la segunda opción se deberá incluir en el fotograma una regla en escala milimetrada ubicada cerca del pico del grifo para calibrar las distancias en la foto digital, siguiendo las recomendaciones discutidas en el Capítulo 10. Más detalles sobre este experimento se puede encontrar en Ref.[<sup>5</sup>]

### Sugerencias de trabajo:

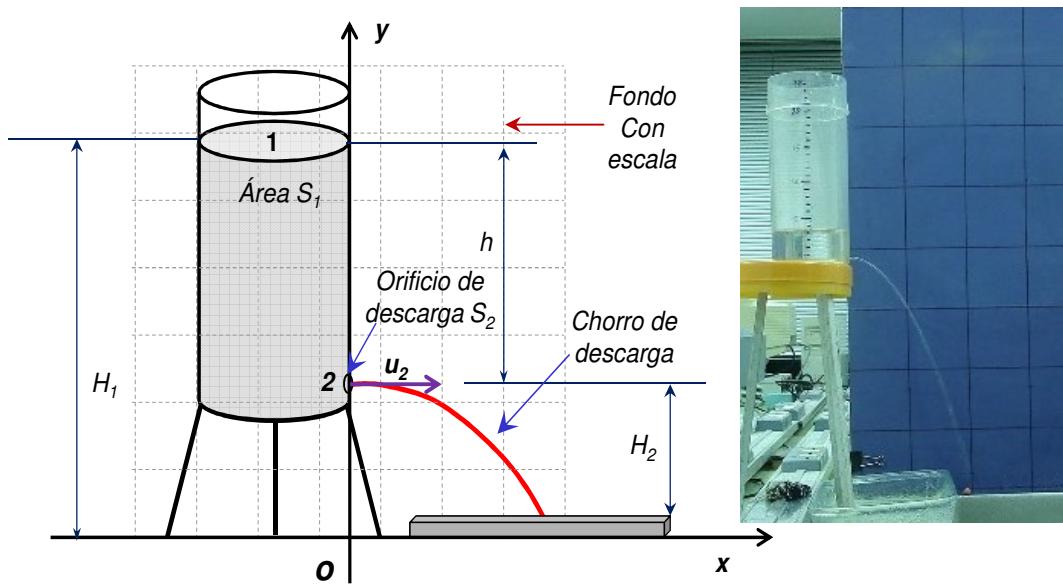
- ✓ Seleccione un grifo que le permita obtener chorros de agua uniformes (sin turbulencias) y elija las condiciones de iluminación y fondo que le permitan obtener fotos nítidas del chorro de agua.
- ✓ Para el caudal elegido, determine el flujo de agua, Ec. (49.7) y el diámetro inicial del chorro ( $2 r_0$ ).
- ✓ Obtenga al menos un par de fotos digitales de los chorros. Trate de lograr que la imagen contenga a la escala de calibración, como se indica en la Fig. 49.3, y que la escala aparezca nítida.
- ✓ Para cada caudal, intente describir la forma del chorro de agua usando el modelo propuesto, Ec. (49.6). Grafique sus observaciones y predicciones teóricas en una misma figura.
- ✓ Varíe el caudal, y repita este análisis para cada caso, usando pequeños caudales para los que se pueda ver claramente el chorro sin romperse y lo valores más altos que pueda lograr en condiciones de flujo laminar.
- ✓ ¿Qué puede concluir acerca de la bondad del modelo propuesto para describir sus datos? Discuta sus resultados.
- ✓ Enumere las suposiciones y leyes físicas implícitas en el modelo, Ec.(49.6).

**Reflexión adicional:** Considere un chorro de agua que es lanzado verticalmente hacia arriba. Su velocidad decrece a medida que sube, y a cierta altura la componente vertical de la velocidad será nula. Según la ecuación de continuidad, Ecs.(49.1) y (49.7), se llega a la conclusión de que el chorro debería tener un radio infinito cuando alcanza el punto más alto. Si observa el chorro de agua de la fuente, como el ilustrado en la Fig. 49.3, rápidamente se da cuenta de que esto no es así.

- ✓ ¿Cómo resuelve usted esta paradoja? Discuta distintos argumentos físicos que le permitan explicar este fenómeno.

### 49. 3 Experimento de Torricelli

Consideremos el caso de un recipiente cilíndrico de diámetro  $d_1$ , cuya área transversal es  $S_1$ , que contenga un fluido hasta cierto nivel  $h$ , como se indica esquemáticamente en la Fig. 49.4. Nuestro recipiente drena por un pequeño orificio en la parte inferior de diámetro  $d_2$  y sección  $S_2$  ( $S_2 \ll S_1$ ). A la velocidad de evacuación del fluido a la salida de este orificio la llamamos  $u_2$ . En esta sección discutiremos las características de un modelo idealizado (líquido ideal) y por lo tanto emplearemos la ecuación de Bernoulli estándar dada por la Ec.(49.2). En el Anexo A, mejoramos el modelo para introducir los efectos que surgen de la no conservación de la energía mecánica en el fluido.



**Figura 49.4** Experimento de Torricelli. A la izquierda, esquema del dispositivo experimental propuesto. A la derecha, imagen de un dispositivo real, con la escala en el fondo, que sirve de referencia para determinar las distancias.

Aplicando el Teorema de Bernoulli en los puntos 1 y 2, podemos escribir:

$$P_1 + g\rho \cdot H_1 + \frac{1}{2} \rho \cdot u_1^2 = P_2 + g\rho \cdot H_2 + \frac{1}{2} \rho \cdot u_2^2 . \quad (49.8)$$

La presión en la interfase aire-agua superior (punto 1) es la atmosférica ( $P_1=P_{atm}$ ). De igual modo, es posible identificar  $P_2$  con  $P_{atm}$ , o sea:

$$P_1 = P_2 = P_{atm} . \quad (49.9)$$

Por lo tanto, la Ec. (49.8) puede escribirse como:

$$gH_1 + \frac{1}{2}u_1^2 = gH_2 + \frac{1}{2}u_2^2 . \quad (49.10)$$

De la ecuación de continuidad tenemos que:

$$u_1 S_1 = u_2 S_2 , \quad (49.11)$$

o en términos de los diámetros tenemos:

$$u_2 = u_1 (d_1 / d_2)^2 . \quad (49.12)$$

Combinando este resultado con la Ec. (49.10), vemos que la velocidad de evacuación viene dada por:

$$u_2 = \sqrt{\frac{2g(H_2 - H_1)}{(1 - (d_2/d_1)^4)}} = \gamma \cdot \sqrt{2gh} , \quad (49.13)$$

con:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (d_2/d_1)^4}} . \quad (49.14)$$

El modelo de Torricelli consiste en realizar la aproximación:  $d_2 \ll d_1$ , con lo cual  $\gamma \approx 1$ . Este resultado aproximado se conoce como el Teorema de Torricelli.<sup>1,2;Error! No se encuentra el origen de la referencia.<sup>3</sup></sup>

En el Anexo B generalizamos este resultado para incluir los efectos de la viscosidad y de otras pérdidas de energía.

### Proyecto 162. Trayectoria de un chorro de agua. Velocidad de salida

**Equipamiento recomendado:** Una cámara digital. Un recipiente transparente de agua con un orificio lateral.

Considere un chorro de agua disparado horizontalmente como el que se muestra en el dispositivo de la Figura 49.4. La velocidad de evacuación del fluido,  $u_2$ , puede obtenerse midiendo el caudal de descarga y el diámetro de salida del recipiente, Ec. (49.7).

Considerando que las partículas de agua se comportan como partículas sólidas, las cuales siguen las ecuaciones de movimiento en las direcciones  $x$  (horizontal) e  $y$  (vertical) dadas por:

$$x(t) = u_2 t \quad \text{e} \quad y(t) = y_0 + \frac{1}{2}at^2 , \quad (49.15)$$

en donde  $a = -g$  y  $y_0 = H_2$ , tenemos:

$$y(x) = H_2 - \frac{g}{2 \cdot u_2^2} \cdot x^2 . \quad (49.16)$$

Por lo tanto, la distancia  $x_f$  donde el flujo de fluido baja una altura  $H_2$  desde el orificio (Fig. 49.4) viene dada por:

$$x_f^2 = \left( \frac{2 \cdot u_2^2}{g} H_2 \right) . \quad (49.17)$$

Una manera de poner a prueba las hipótesis de nuestro estudio de la trayectoria del chorro de agua, consiste en comparar la imagen digital de un chorro con la predicción teórica, Ec. (49.16). Más específicamente, lo que se busca constatar es si la trayectoria del líquido vertido por una abertura lateral es efectivamente parabólica, como indica la Ec.(49.16). Si lo fuese, del ajuste de esta curva se puede obtener el valor de  $u_2$ , que se puede comparar con el valor obtenido midiendo el caudal combinado con la Ec.(49.7). Incidentalmente, la validez de las Ecs. (49.15) sugiere que la cinemática de un fluido es equivalente a la de los sólidos, o sea que los líquidos y los sólidos siguen las mismas leyes físicas.

### Sugerencias de trabajo:

- ✓ Con un recipiente transparente que tenga un orificio lateral de diámetro bien conocido, construya un dispositivo experimental como se ilustra en la Figura 49.4. Es conveniente que el diámetro del tubo sea de 10 cm o mayor para evitar que el flujo de líquido varíe rápidamente. El tamaño del orificio puede variar entre un par de milímetros a unos 5 mm aproximadamente.
- ✓ En el mismo plano del chorro de agua coloque una regla o un fondo con escala bien visible, que servirá de referencia para transformar los pixeles de la imagen en distancias reales; ver Cap. 10. También es conveniente marcar las alturas en el recipiente para que en cada fotograma quede registrada la altura  $h$  y la trayectoria del líquido. Preferiblemente, use un trípode para posicionar la cámara.
- ✓ Llene el recipiente de agua y obtenga imágenes del chorro para distintas alturas  $h$  del nivel de agua en el recipiente.
- ✓ Usando los fotogramas del chorro, superponga en un mismo gráfico esta imagen y la forma teórica de su trayectoria, Ec.(49.16), como se discutió en el Cap.10. Varíe el valor del parámetro  $u_2$  hasta lograr el mejor ajuste o coincidencia entre la trayectoria real y la teórica.
- ✓ Para algunas alturas  $h$  de agua en el recipiente, estime el caudal de salida recogiendo el líquido vertido en una probeta graduada. Como el caudal varía con la altura, elija un volumen de agua por recoger tal que durante su descarga  $h$  no varíe más de 1 cm aproximadamente. Usando la Ec. (49.7) determine el caudal y estime el valor de  $u_2$  y su incertidumbre. ¿Cómo se comparan los valores de  $u_2$  obtenidos con los dos procedimientos usados?. Discuta la bondad del modelo propuesto representado por la Ec. (49.16) para determinar el valor de  $u_2$

### Proyecto 163. Tiempo de vaciamiento de un recipiente

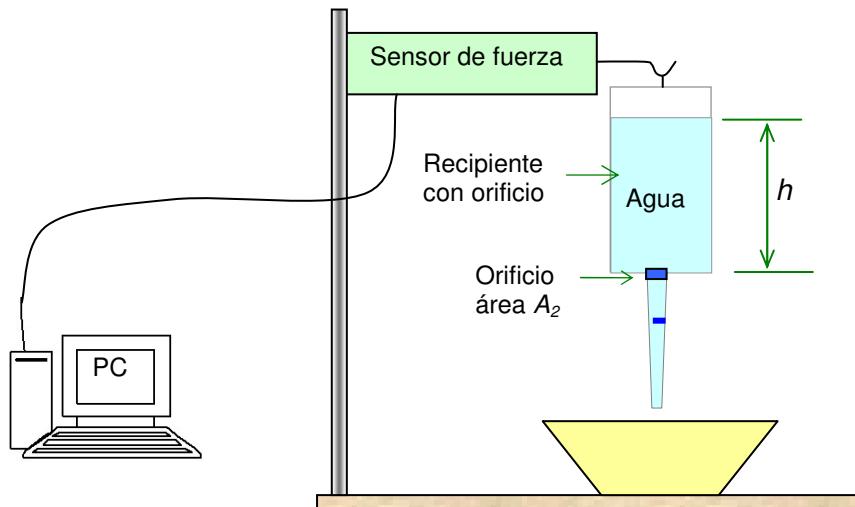
**Equipamiento recomendado:** Un recipiente transparente de agua con un orificio en su parte inferior. Un cronómetro y/o una cámara digital. Alternativamente, este experimento también puede realizarse con un recipiente cilíndrico que tenga un orificio de salida en su parte inferior, colgado de un sensor de fuerzas.

Consideremos un recipiente de forma cilíndrica con un orificio de diámetro conocido en su parte inferior. Se llena el recipiente hasta una cierta altura con agua u otro líquido. A medida que se pierde líquido, la altura  $h$  del líquido irá variando con el tiempo. Nuestro objetivo en esta actividad es estudiar experimentalmente la variación de  $h$  con el tiempo y tratar de construir un modelo teórico que explique los resultados experimentales.

Un arreglo experimental posible puede lograrse utilizando un recipiente cilíndrico como el ilustrado en la Figura 49.4, en el cual se marcaron las alturas cada centímetro o medio centímetro. Un observador provisto de un cronómetro registra las alturas  $h_i$  y los tiempos  $t_i$  a medida que el nivel del líquido desciende. Con esta tabla de valores, obtenemos la información buscada, o sea,  $h$  como función de  $t$ . Otra forma de realizar este experimento, consiste en usar un sensor de fuerzas conectado a una PC. El recipiente con agua cuelga del sensor de fuerzas. Si se tapa el orificio de salida, y se llena de agua el recipiente, se puede realizar una calibración de la altura  $h$  como función de la masa o el peso del recipiente con agua, ya que:

$$P = m_0 \cdot g + \rho g A_2 \cdot h, \quad (49.18)$$

donde  $\rho$  es la densidad del líquido,  $g$  es la aceleración de la gravedad,  $A_2$  es el área de la base del recipiente cilíndrico y  $h$  es la altura del nivel del líquido;  $P$  es la fuerza o peso registrada por el sensor de fuerzas y  $m_0$  es la masa del recipiente. Una vez calibrado el sensor de fuerzas para medir  $h$ , la computadora registra los datos de  $h(t)$ . Este arreglo experimental se ilustra esquemáticamente en la Fig.49.5.



**Figura 49.5:** Una posible realización del experimento propuesto para estudiar el vaciamiento del recipiente. En este arreglo se usa el sensor de fuerza para medir la masa de agua como función del tiempo. De este dato puede obtenerse el valor de la altura  $h(t)$ .

En el Anexo A se presenta un posible modelo para determinar teóricamente la función  $h(t)$ , y con ella obtener el tiempo de evacuación de un recipiente.<sup>6</sup>

### Sugerencias de trabajo:

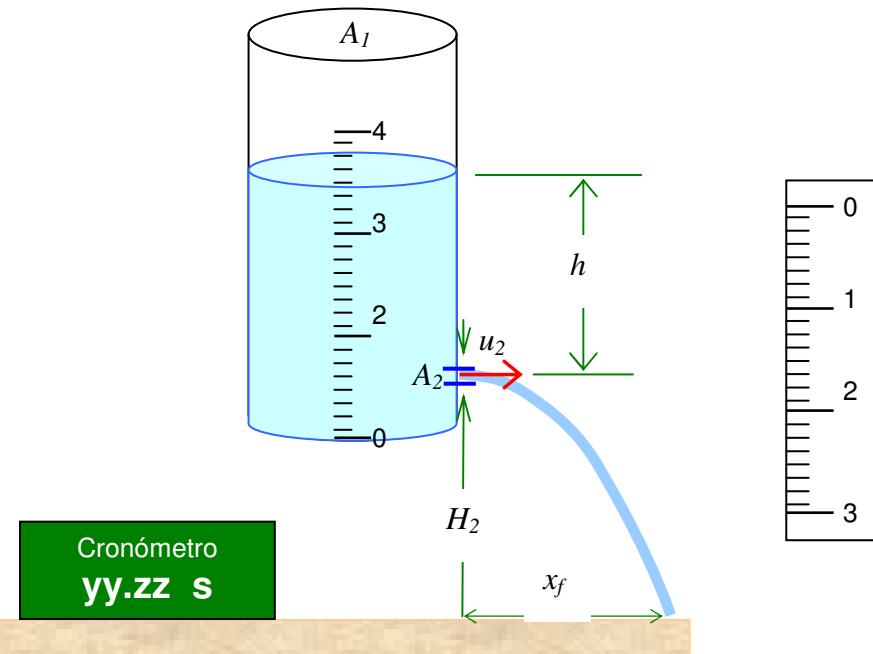
- ✓ Para el recipiente elegido, mida cuidadosamente el diámetro interior del recipiente cilíndrico y el diámetro del orificio de salida. Para cada una de estas cantidades

estime las incertidumbres y calcule las áreas de la base del recipiente,  $A_1$ , y el área del orificio de salida,  $A_2$ . Estime las incertidumbres de estas áreas.

- ✓ Con el arreglo experimental elegido, mida la variación experimental de  $h$  como función de  $t$ .
- ✓ En una misma figura, grafique los valores medidos de  $h(t)$  y la correspondiente predicción, Anexo A. Varíe el tamaño del orificio de desagote y repita la comparación de los datos experimentales con la teoría.
- ✓ Grafique los valores medidos  $\sqrt{h(t)/h_0}$  como función de  $t$ . ¿Muestran estos datos una tendencia lineal? De ser así, ajuste una recta a los datos y extraiga del ajuste el tiempo de desagote  $t_e$ ; ver Anexos A y C.
- ✓ ¿Cómo se comparan los valores medidos de  $h(t)$  y  $\sqrt{h(t)/h_0}$  en función de  $t$  con los predichos por su modelo?

### Proyecto 164. Experimento de Torricelli

**Equipamiento recomendado:** Una cámara digital. Un cronómetro. Un recipiente transparente de agua con un orificio lateral.



**Figura 49.6:** Esquema del dispositivo experimental propuesto. La escala de la izquierda sirve de calibración de las dimensiones del chorro. El cronómetro indica el tiempo en que se toma cada fotograma.

Se propone construir un dispositivo como el de la Figura 49.6. La cámara digital captura las imágenes del dispositivo experimental. El cronómetro en cada fotograma indicará el tiempo  $t_i$  y las alturas  $h_i$  del líquido quedarán registradas en cada toma de la cámara.

### Sugerencias de trabajo:

- ✓ Tome fotos cuando el nivel del líquido esté a distintas alturas, lo que va a registrar simultáneamente el tiempo  $t_i$  y la altura  $h_i$  de la superficie libre del líquido. Un modo de lograr toda esta información consiste en incorporar un reloj o cronómetro al lado del dispositivo experimental, de modo que cada fotografía contenga el tiempo. La altura  $h_i$  también se puede obtener de la foto, al igual que las coordenadas del chorro.
- ✓ A partir de la Ec. (49.16) se calcula la velocidad  $u_2$  para cada altura  $h$ . Para esto último, es conveniente graficar  $[H_2 - y(x)]$  como función de  $x^2$ .
- ✓ Luego, con los datos obtenidos, grafique  $u_2^2$  en función de  $h$  y estudie si es válida la aproximación realizada por Torricelli, Ec.(49.13).
- ✓ Un modelo más elaborado del desagote se discute en el Anexo C. o Ec.(49.37). Compare ambos modelos y discuta cuál describe mejor los datos.
- ✓ Del ajuste de  $u_2^2$  en función de  $h$ , determine el valor de  $\mu$ . Del punto anterior ya se conoce  $u_1$  por lo tanto se puede calcular  $Re$  y de las Ecs. (49.23) y (49.24) se puede estimar este valor de  $\mu$ . Compare si estos valores de  $\mu$  obtenidos por ambos métodos coinciden o no.
- ✓ ¿Qué puede concluir de este estudio respecto de Teorema de Torricelli y el teorema de Bernoulli?
- ✓ Grafique  $\sqrt{h}$  como función de  $t$ , tomando como origen de tiempo el inicial de la medición, es decir, para  $t = 0, h = h_0$ . ¿Se verifica que la relación es lineal? Si lo es, obtenga el valor de  $t_e$ ,  $\mu$  y  $g_{ef}$ , Ec. (49.29), para cada orificio usado en el experimento, y compárela con el efectivamente observado, o sea el tiempo que el sistema demoró en vaciarse efectivamente.
- ✓ Grafique  $u_1^2$  como función de  $h$ . Si la dependencia entre estas variables es lineal, utilizando las Ecs. (49.38) y (49.39) obtenga los valores de  $\Delta Z$ ,  $\mu$  y  $k$ . ¿Qué puede decir del modelo planteado en el Anexo B para interpretar sus resultados experimentales?
- ✓ Grafique  $\sqrt{h - \Delta Z} / \sqrt{h_0 - \Delta Z}$  como función de  $t$ , tomando como origen de tiempo el inicial de la medición ( $t = 0, h = h_0$ ). ¿Se verifica que la relación es lineal? Si lo es, obtenga el valor de  $t_e$ ,  $\mu$  y  $k$ , Ec. (49.43). En este mismo gráfico indique cómo sería la dependencia de  $\sqrt{h - \Delta Z} / \sqrt{h_0 - \Delta Z}$  con el  $t$ , si fuese  $C_v = 1$ .

Del análisis anterior, estime el valor del coeficiente de *vena contracta*  $C_v$ , Ec. (49.44) y compare con la predicción  $C_v \approx 0,5$  a  $0,6$ .

### Anexo A. Tiempo de evacuación de un recipiente

Se desea estimar el tiempo de vaciado,  $t_e$ , de un recipiente que tiene una abertura de área  $A_2$ , como se ilustra en las Figs. 49.5 o 49.6. Para ello partimos de la Ec.(49.13), que nos da el valor de la velocidad de salida  $u_2$ . El flujo saliente,  $Q_2$ , será:

$$Q_1 = A_1 \cdot u_1 = \mu \cdot A_2 \cdot u_2. \quad (49.19)$$

En esta ecuación hemos introducido un coeficiente  $\mu$  para tener en cuenta el posible estrechamiento del chorro de agua a la salida del orificio así como las pérdidas de energía, que analizaremos en el Anexo C. En el caso ideal  $\mu=1$ , como veremos en un modelo más elaborado su valor puede resultar diferente. Referido a las Fig.49.5 o 49.6,  $u_1 = dh/dt$ , por lo tanto, haciendo uso de la Ec.(49.13) tenemos:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{A_2}{A_1} \cdot \mu \cdot \gamma \cdot \sqrt{2gh}. \quad (49.20)$$

Integrando esta última expresión resulta:

$$\sqrt{h} - \sqrt{h_0} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{A_2}{A_1} \cdot \gamma \cdot \mu \cdot \sqrt{2g} \cdot t. \quad (49.21)$$

Aquí  $h_0$  es el valor de  $h$  para  $t=0$ . De donde que el tiempo de vaciado  $t_e$  se obtiene calculando el valor de  $t$  para  $h=0$ , que viene dado por:

$$t_e = \sqrt{\frac{2 \cdot h_0}{g}} \cdot \frac{A_1}{A_2} \cdot \frac{1}{\gamma \cdot \mu} = \sqrt{\frac{2 \cdot h_0}{g_{ef}}}, \quad (49.22)$$

donde hemos definido:

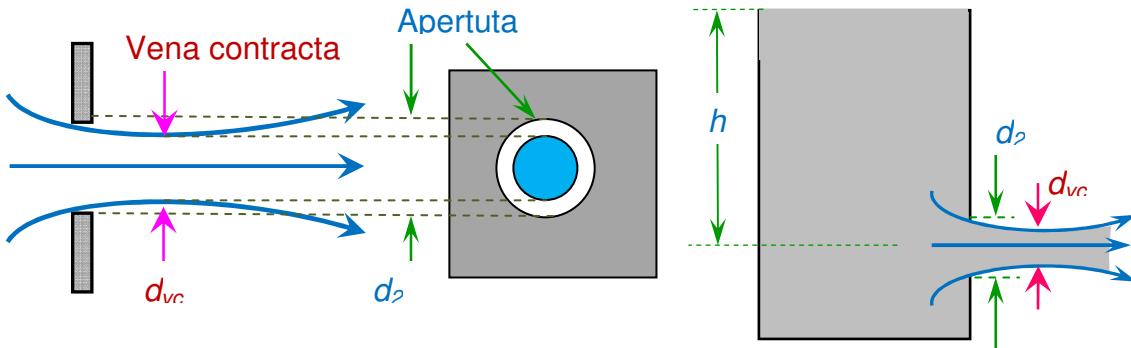
$$g_{ef} = \frac{g \cdot \mu^2}{[1 - (A_2/A_1)^2]} \left( \frac{A_2}{A_1} \right)^2 = \frac{g \cdot \mu^2}{[(d_1/d_2)^4 - 1]} = \frac{d^2 h}{dt^2}. \quad (49.23)$$

De este modo,  $g_{ef}$  representa la aceleración efectiva con la que desciende la superficie libre del líquido en el recipiente. Con la introducción de este parámetro  $g_{ef}$ , la Ec. (49.22) es similar a la expresión que describe la caída libre de un cuerpo desde una altura  $h_0$ . Sin embargo, hay una diferencia notable: mientras un cuerpo en caída libre se acelera al descender, la superficie libre de un líquido va disminuyendo su velocidad al ir bajando.<sup>6</sup> Físicamente, esto se corresponde con la disminución de la presión hidrostática que “empuja” al líquido a través del orificio.

Usando esta definición de  $t_e$ , la expresión (49.22) puede escribirse como:

$$h(t) = h_0 \cdot \left( 1 - \frac{t}{t_e} \right)^2 \quad o \quad \sqrt{h(t)/h_0} = \left( 1 - \frac{t}{t_e} \right). \quad (49.24)$$

Por lo tanto, si las hipótesis aquí formuladas son correctas, graficando la raíz cuadrada de la altura  $h/h_0$  en función del tiempo deberíamos obtener una recta, cuya pendiente nos brindaría el valor de  $t_e$ , que a su vez nos permite estimar  $g_{ef}$  y  $\mu$ .



**Figura 49.7:** Vena contracta. Esquema de las características de un flujo de un fluido al salir por un orificio. El coeficiente de vena contracta  $C_v = A_{vc}/A_2 = (d_2/d_{vc})^2$ .

### Anexo B. Vena contracta

Cuando un fluido sale por un orificio, en general se produce una contracción de su sección transversal, como se ilustra esquemáticamente en la Figura 49.7. Este fenómeno se conoce como “vena contracta”.<sup>4,6,7,8</sup> La relación entre el área del estrechamiento del chorro y el área del orificio es denominada coeficiente de vena contracta  $C_v (=A_{vc}/A_2)$ . Su valor, depende del número de Reynolds<sup>4,6,7</sup>  $Re$ . En general  $C_v \leq 1$ , y para muchos líquidos  $C_v \approx 0,5$  a  $0,6$ . Una justificación heurística para entender por qué se produce esta contracción se puede lograr refiriéndonos a la Fig. xx.7. La variación del momento lineal del chorro en la descarga, a lo largo del eje horizontal, es  $dp/dt = Q_2 \cdot u_2 \cdot \rho$ , donde  $Q_2 = C_v \cdot A_2 \cdot u_2$ , es el flujo de salida y  $A_2$  el área del orificio. La fuerza responsable de este cambio de momento se puede asociar con la presión hidrostática,  $F = P \cdot A_2 = \rho \cdot g \cdot h \cdot A_2$ . Por lo tanto:

$$\rho \cdot g \cdot h = C_v \cdot \rho \cdot u_2^2. \quad (49.25)$$

Combinando esta expresión con la Ec.(49.13), tenemos:

$$C_v = \gamma^2 \frac{1}{2} \approx 0,5. \quad (49.26)$$

### Anexo C . Teorema de Torricelli, modelo teórico

La ecuación de Bernoulli, en su forma más simple, es una manera de escribir la conservación de la energía mecánica en un fluido. En fluidos reales, la energía mecánica no se conserva debido a efectos viscosos, pequeñas pérdidas en estrechamientos, etc. En presencia de viscosidad, la energía mecánica no se conserva y la ecuación de Bernoulli

se convierte en una expresión del balance de energía. En estos casos, las pérdidas de energía se pueden escribir como la suma de dos términos: un término dependiente de la velocidad, llamado usualmente “pequeñas pérdidas”<sup>4,5</sup> y otro independiente de la velocidad, esto es:

$$\Delta w_{loss} = \frac{\rho}{2} k \cdot u_1^2 + \rho g \Delta Z, \quad (49.27)$$

donde  $g$  es la aceleración de la gravedad,  $k$  es el coeficiente de pérdida y  $\rho$  es la densidad del fluido.

Teniendo en cuenta estas pérdidas, la ecuación de Bernoulli para los puntos 1 y 2 de un flujo de fluido puede escribirse como:<sup>7,8</sup>

$$\frac{1}{2} \alpha_1 u_1^2 + \frac{P_1}{\rho} + g z_1 = \frac{1}{2} \alpha_2 u_2^2 + \frac{P_2}{\rho} + g z_2 + \Delta w_{loss}. \quad (49.28)$$

Aquí  $u_i$  y  $z_i$  designan las velocidades medias del fluido y las alturas en el punto  $i$  ( $= 1, 2$ ). La velocidad media se define en términos del flujo  $Q$  como:

$$Q = \iint_S \vec{v} \cdot d\vec{S} = u \cdot A, \quad (49.29)$$

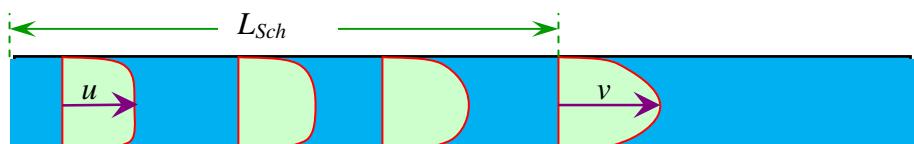
donde  $A$  es el área de la sección transversal del flujo (normal al flujo) y  $\vec{v}$  es la velocidad local que puede variar punto a punto. La Ec. (49.29) puede considerarse como la definición de la velocidad media  $u$ , que representa la velocidad en promedio que debería tener el fluido (de perfil uniforme) para que el flujo sea el mismo que el real. Los coeficientes  $\alpha_i$  en la Ec.(49.28) representan la relación entre la energía cinética del fluido que pasa por la superficie de control del tubo y la del mismo fluido si se moviese con un perfil uniforme de velocidad ( $u$ ) y que transporta el mismo flujo. Más concretamente:

$$\alpha = \iint_S v^3 \cdot dS / u^3 \cdot A. \quad (49.30)$$

De modo que el término  $\alpha u^2/2$  en la Ec.(49.28), representa la energía cinética por unidad de masa a través de una superficie normal al caño. Para un perfil parabólico de velocidades dentro del tubo (en régimen laminar)  $\alpha=2$ . Para un perfil uniforme (flujo turbulento),  $\alpha=1$  y en general  $\alpha>1$ . Si aplicamos estas consideraciones al recipiente de la Fig.49.4, tenemos:

$$\frac{1}{2g} \alpha_1 u_1^2 + \frac{1}{2g} k u_1^2 + \Delta Z = h + \frac{1}{2g} \alpha_2 u_2^2, \quad (49.31)$$

donde  $h$  es la variación de la altura del fluido entre los puntos 1 y 2  $u_1$  y  $u_2$  son las velocidades medias de estos mismos puntos. Los coeficientes de  $\alpha$  vienen dados por la Ec. (49.30).



**Figura 49.8:** Esquema de cómo se transforma un flujo turbulento en otro laminar.  $L_{Sch}$  (longitud de Schiller) es la longitud característica donde esta transición ocurre.

Cuando un fluido sale por un tubo en régimen laminar,<sup>4,6,7</sup> adquiere el perfil de velocidad parabólico en forma paulatina, como se indica esquemáticamente en la Fig. 49.8. La longitud característica **en la que el flujo cambia su perfil de velocidades** de plano a laminar se denota como  $L_{Sch}$  (**longitud de Schiller**). Esta longitud se puede calcular por la siguiente relación empírica:<sup>4,6,9,10</sup>

$$L_{sch} = 0.029 \text{ Re}.d , \quad (49.32)$$

donde  $Re$  es el número de Reynolds y  $d$  es el diámetro del orificio. En general, el valor de  $L_{Sch}$  es mucho mayor que el espesor del recipiente. Esto indica que el perfil de velocidades a la salida de la abertura es en general plano, es decir, que la velocidad es constante a lo largo del orificio. El hecho de que el perfil sea plano nos permite considerar al coeficiente  $\alpha_2$  del orden de uno ( $\alpha_2 \approx 1$ ). Además, como en general la boca del recipiente muy ancha y como la interfase aire-agua muy baja velocidad, podemos suponer que el otro coeficiente,  $\alpha_l$ , también es del orden de la unidad ( $\alpha_l \approx 1$ ).

Por otro lado, si se tiene en cuenta la conservación de la masa, o conservación del caudal, para superficies de sección circular tenemos la siguiente relación:

$$d_1^2 \cdot u_1 = d_2^2 \cdot u_2 \cdot C_v , \quad (49.33)$$

donde  $d_1$  y  $d_2$  son el diámetro superior e inferior respectivamente y el coeficiente  $C_v$  es el llamado coeficiente de *vena contracta*, que discutimos en el Anexo B.<sup>11</sup>

De la Ec. (49.33) se puede despejar el valor de la velocidad con la que cambia la altura del líquido en función de la geometría del recipiente, la velocidad de evacuación  $u_1$  y el coeficiente  $C_v$ :

$$u_1 = \left( \frac{d_2}{d_1} \right)^2 \cdot u_2 \cdot C_v . \quad (49.34)$$

Si reemplazamos el valor encontrado para  $u_1$  en la ecuación de Bernoulli con pérdida, Ec. (49.31), podemos escribir la siguiente expresión:

$$\frac{1}{2g} u_2^2 \left[ 1 - \left( \frac{d_2}{d_1} \right)^4 C_v^2 + k \right] = h - \Delta Z , \quad (49.35)$$

de donde podemos obtener el valor de la velocidad de evacuación como:

$$u_2^2 = \frac{2g \cdot (h - \Delta Z)}{\left[ 1 - \left( \frac{d_2}{d_1} \right)^4 C_v^2 + k \right]} . \quad (49.36)$$

Como  $d_1$  es en general significativamente mayor que  $d_2$ ,  $d_2/d_1 \approx 0$ , y al elevar éstos a la cuarta potencia queda  $(d_1/d_2)^4 \ll 1$ . Además, como  $C_v < 1$ , el término  $C_v^2(d_1/d_2)^4 \approx 0$  y es despreciable frente a los demás. Ello permite escribir, a primer orden, la velocidad de evacuación como:

$$u_2^2 = \frac{2g}{[1+k]}(h - \Delta Z). \quad (49.37)$$

A partir de esta ecuación se puede despejar el valor del coeficiente de pérdida  $k$  y la pérdida de energía  $\Delta Z$ .

Asimismo, este problema puede ser abordado desde el punto de vista del tiempo de evacuación del fluido contenido en el recipiente. Este análisis se puede hacer partiendo de los resultados anteriores. Si en la Ec. (49.20) reemplazamos  $\mu = \frac{1}{1+k}$ , podemos escribir la velocidad de evacuación como:

$$u_2^2 = 2g\mu \cdot (h - \Delta Z). \quad (49.38)$$

Por lo tanto, graficando  $u_2^2$  como función de  $h$ , podemos obtener los coeficientes,  $\mu$ ,  $\Delta Z$  y  $k$ . Por otro lado, la velocidad de la interfase,  $u_1$ , se puede escribir como:

$$u_1 = \frac{dh}{dt} = -C_v \left( \frac{d_2}{d_1} \right)^2 \sqrt{2g\mu} \sqrt{h - \Delta Z}, \quad (49.39)$$

donde se usó la ecuación de continuidad y se reemplazó el valor de  $u_1$  por el obtenido en la Ec. (49.38). El signo menos en esta ecuación está asociado al hecho de que  $u_1$  y  $h$  están orientados en sentido contrario.

Para simplificar el análisis, introducimos el parámetro  $\Lambda$ , el cual está definido como:

$$\Lambda = C_v \left( \frac{d_2}{d_1} \right)^2 \sqrt{2g\mu}, \quad (49.40)$$

con lo cual podemos escribir la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{dh}{\sqrt{h - \Delta Z}} = -\Lambda \cdot dt. \quad (49.41)$$

Integrando y defiendo  $t_e$  (tiempo de vaciado) como el tiempo transcurrido desde  $h = h_0$  (recipiente lleno) hasta tener  $h=0$  (vacío), podemos escribir la siguiente ecuación que permite calcular la altura del fluido en función del tiempo:

$$\frac{\sqrt{h - \Delta Z}}{\sqrt{h_0 - \Delta Z}} = \left( 1 - \frac{t}{t_e} \right). \quad (49.42)$$

De este análisis podemos escribir el valor del tiempo de vaciado como:

$$t_e = \frac{\sqrt{h_0 - \Delta Z}}{C_v \left( \frac{d_2}{d_1} \right)^2 \sqrt{2g\mu}}. \quad (49.43)$$

Lo cual nos permite, a partir de las ecuaciones anteriores y de los valores de  $\Delta Z$  y  $\mu$  hallados por el análisis anterior, Ec. (49.39), calcular el valor del coeficiente de *vena contracta*:

$$C_v = \frac{\sqrt{h_0 - \Delta Z}}{t_e \left( \frac{d_1}{d_2} \right)^2 \sqrt{2g\mu}}. \quad (49.44)$$

## Referencias

- 
- <sup>1</sup> R. Halliday, D. Resnick y M. Krane, *Física para estudiantes de ciencias e ingeniería*, 4<sup>a</sup> ed., vol. II (México, 1992).
  - <sup>2</sup> Sears, F. et al., *Física Universitaria: Volumen I* (Addison Wesley Longman, México D.F., 1999).
  - <sup>3</sup> D. Giancoli, *Física: Principios y aplicaciones*, Prentice Hall, México, 1997.
  - <sup>4</sup> D. F. Young, B. R. Munson and T. H. Okiishi, *A Brief Introduction to Fluid Mechanics*, (J. Wiley & Son, N.Y., 1997).
  - <sup>5</sup> T. Massalha and R. M. Digilov, "The shape function of a free-falling laminar jet: Making use of Bernoulli's equation," *Am. J. Phys.* **81**, 733 (2013).
  - <sup>6</sup> J. N. Libii, "Mechanics of the slow draining of a large tank under gravity," *Am. J. Phys.* **71**, 1204 (2003).
  - <sup>7</sup> M. E. Saleta, D. Tobia, and S. Gil , "Experimental study of Bernoulli's equation with losses," *Am. J. Phys.* **73** (7) 598 (2005).
  - <sup>8</sup> P. L. L. Escamilla , "Surface tension influence in vessel discharge", comment on M. E. Saleta, D. Tobia, and S. Gil , "Experimental study of Bernoulli's equation with losses," by," *Am. J. Phys.* **77** (5) 477 (2009)
  - <sup>9</sup> B. Nekrasov, *Hidráulica*, Ed. Mir Moscú 1968.
  - <sup>10</sup> I. H. Shames, *Mechanics of fluids*, 1<sup>st</sup> edition (Mc Graw-Hill Book Company, USA, 1962), Chap. 10.
  - <sup>11</sup> V. L. Streeter and E. D. Wylie, *Fluid Mechanics*, 8<sup>th</sup> edition (Mc Graw-Hill, New York, 1985), Chap.

# Capítulo 50

## Termometría – Sensores de temperatura

### Objetivos

En este capítulo se propone estudiar las características básicas de distintos termómetros y sensores de temperatura de uso habitual en el laboratorio tales como termistores, termopares, y resistencias eléctricas de metales puros (RTD), circuitos integrados para medir temperaturas y también diodos usados para este fin. Asimismo, se realizarán calibraciones de algunos de ellos. Se describe el diseño de un termómetro de gas, en el cual se puede estudiar la dependencia de la presión con la temperatura.

- ✓ Termómetros
- ✓ Sensores de temperatura.
- ✓ RTD
- ✓ Termopares
- ✓ Integrados para medir temperaturas

### 50. 1 Termómetros - sensores de temperatura

Cualitativamente, la temperatura está asociada a la sensación de frío y calor. Sin embargo, para poder definir operacionalmente este concepto es necesario disponer de alguna propiedad termométrica, es decir, una propiedad que varíe con la temperatura y nos permita definir una escala de temperaturas. De modo que podemos definir la temperatura como “aquella propiedad que miden los termómetros”. Seguidamente, debemos definir la propiedad física que se adoptará como termómetro. Por ejemplo, el volumen de un líquido, la resistencia de un conductor, la tensión eléctrica generada por un par termoeléctrico (termopar), entre otros, son ejemplos de propiedades termométricas. En la actualidad existen numerosos tipos de termómetros o sensores de temperatura que pueden ser usados para diferentes aplicaciones. En la Tabla 50.1 se indican algunos tipos de termómetros usuales junto a algunas de sus características más notables. Una lista más completa puede encontrarse en las Refs.[1,2].

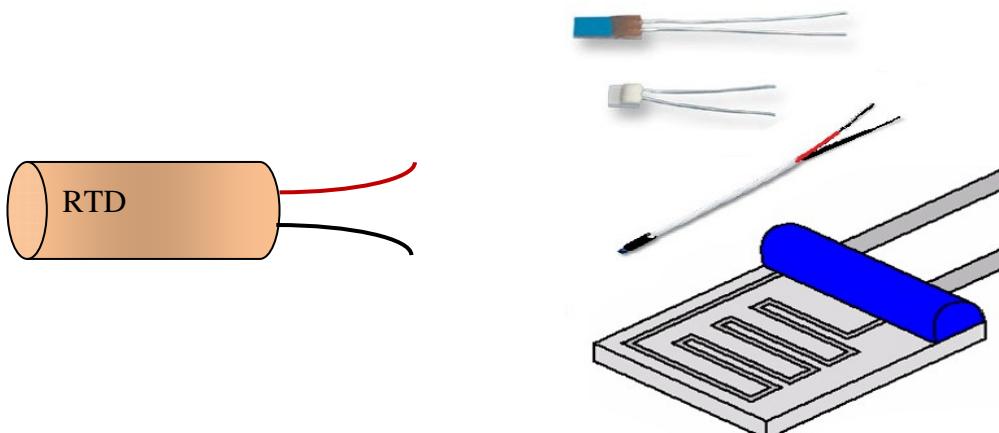
**Tabla 50.1** Tipos de termómetros y sus características básicas

Tipo de termómetro	Rango [°C]	Costo	Linealidad	Características notables
Termómetro de mercurio en vidrio	-10 a 300	Bajo	Buena	Simple, lento y de lectura manual
Termorresistencia RTD	-100 a 600	Medio	Alta	Exactitud
Termopar o termocupla	-150 a 1500	Bajo	Alta	Requiere referencia
Termistor	-15 a 115	Medio	No lineal	Muy sensible
Integrado lineal	-15 a 120	Medio	Muy alta	Fácil conexión , bajo costo
Termómetro de gas	-20 a 100	Medio	Buena	No muy versátil
Diodos	-200 a 50	Bajo	Alta	Bajo costo

En los experimentos propuestos en esta sección se busca estudiar y calibrar alguno de estos termómetros respecto de un *termómetro de referencia* o *patrón*. Supondremos que para estos experimentos se dispone en el laboratorio de un termómetro bien calibrado. Por ejemplo un buen termómetro de mercurio puede servir de patrón secundario para estos experimentos.

Las termorresistencias o RTD (Resistance Temperature Devices) son sensores de temperatura basados en la variación de la resistencia eléctrica con la temperatura. Un material muy empleado para este fin es el platino, pues tiene una gran estabilidad, alto coeficiente de variación de la resistencia con la temperatura, alta repetitividad y puede usarse en un amplio rango de temperatura. Las RTD pueden construirse con otros metales por ejemplo paladio, níquel, molibdeno, cobre, etc. Estos dispositivos están construidos con un alambre fino de metal, protegidos por una cápsula de alúmina ( $\text{Al}_2\text{O}_3$ ), de donde sobresalen dos alambres más gruesos para su conexión. Una técnica de construcción reciente de estos dispositivos consiste en depositar películas delgadas de alguno de los metales usados. Utilizando técnicas de láser para dar a la película la geometría justa, se ajusta el valor de resistencia al valor deseado. Estos dispositivos se consiguen de distintos tamaños y formas, ver Fig. 50.1, y sirven para aplicaciones en un amplio rango de temperaturas, que van desde temperaturas cercanas a la de la ebullición del nitrógeno líquido (77 K) hasta la temperatura de un horno (unos 1000 K). Las RTD se clasifican por su resistencia nominal a 0 °C. Los valores típicos están entre 10 Ω, 100 Ω y 1000 Ω. La relación entre resistencia y temperatura es casi lineal. Los más comunes se denominan Pt-100, que significa que están hechos de platino y tienen una resistencia eléctrica de 100 Ω a 0 °C. La variación de la resistencia con la temperatura se expresa por un polinomio cuyos coeficientes vienen provistos por el fabricante.

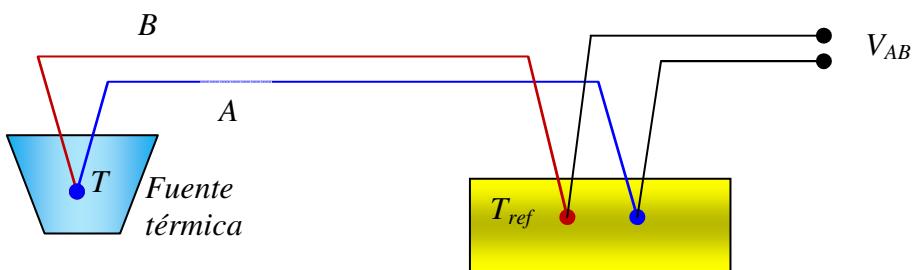
Las RTD presentan una gran repetitividad. En el rango de temperaturas entre -20 °C y 200 °C, la dependencia de la resistencia del Pt con la temperatura es altamente lineal, y para calibrarlos en general es suficiente usar dos temperaturas: la de fusión,  $T_f \approx 0$  °C y las de ebullición,  $T_e \approx 100$  °C, del agua. Para medir la resistencia de una RTD se sugiere usar un método de medición que mida la resistencia a “cuatro cables” como el que se discutió en el Cap. 27.



**Figura 50.1** RTD, a las salidas de la resistencia, se conecta un circuito de medición de cuatro cables.

Como se vio en el Cap.28, donde estudiamos características de un termistor. Como se vio en ese capítulo, estos dispositivos tienen una gran sensibilidad y son de bajo costo, pero son altamente no lineales.

Un termopar o termocupla o par termoeléctrico está constituido por dos alambres metálicos diferentes soldados en un punto denominado “unión”. Los otros extremos del par se mantienen a una temperatura de referencia común, pero aislados eléctricamente entre sí. Cuando la unión se encuentra a una temperatura,  $T$ , distinta que la temperatura de referencia,  $T_{ref}$ , de los extremos libres, se desarrolla una diferencia de potencial eléctrica (*fem*) que depende de la diferencia de temperaturas ( $T-T_{ref}$ ). Esta diferencia de potencial se mide con un voltímetro de alta impedancia conectado a los extremos libres. Se suelen fabricar termopares con metales puros o aleaciones (caso más común). Una característica importante es que además de ser de muy bajo costo, pueden ser empleados para medir temperaturas en un rango muy grande comparado con el de otros termómetros. Los valores típicos del rango de temperatura son entre 70 K y 1700 K, y se puede llegar con aleaciones especiales hasta los 2000 K.



**Figura 50.2** Diagrama esquemático de un termopar, incluyendo el instrumento de medición y la temperatura de referencia. Para evitar el contacto eléctrico en el baño térmico, se puede usar un recipiente con aceite dentro de una caja con hielo.

El empleo de termopares para medir temperaturas está fundamentado en el efecto Seebeck.<sup>3</sup> Un termopar, en rigor, mide diferencias de temperaturas y no temperaturas absolutas. Esto hace necesario el uso de una temperatura de referencia,  $T_{ref}$ , por lo que suele emplearse un baño de agua con hielo ( $T_R = 0^\circ\text{C}$ ). Puede demostrarse que la *fem*  $V_{AB}$  que se genera en un par termoeléctrico, con la unión a la temperatura  $T$  y un punto de referencia a  $T_{ref}$  (ver Fig. 50.2) es:

$$V_{AB} = a_0 + a_1(T - T_{ref}) + a_2(T - T_{ref})^2 + \dots, \quad (50.1)$$

donde los valores de  $a_0, a_1, a_2, \dots$  de la expansión en potencias de  $T - T_{ref}$  dependen de las características de los materiales. Estos valores en general están tabulados para distintos pares de metales.<sup>4</sup>

Un modo simple y económico de medir temperaturas consiste en usar un diodo.<sup>5</sup> La característica básica de un diodo es que permite el paso de corriente eléctrica en una sola dirección. La diferencia de potencial,  $V$ , entre los bornes del diodo está relacionada a la corriente,  $I$ , que lo atraviesa y a la temperatura (absoluta)  $T$  que viene dada por la Ecuación de Shockley:<sup>5,6</sup>

$$I = I_0 \exp\left(-\frac{eV_0}{kT}\right) \left[ \exp\left(\frac{eV}{kT}\right) - 1 \right]. \quad (50.2)$$

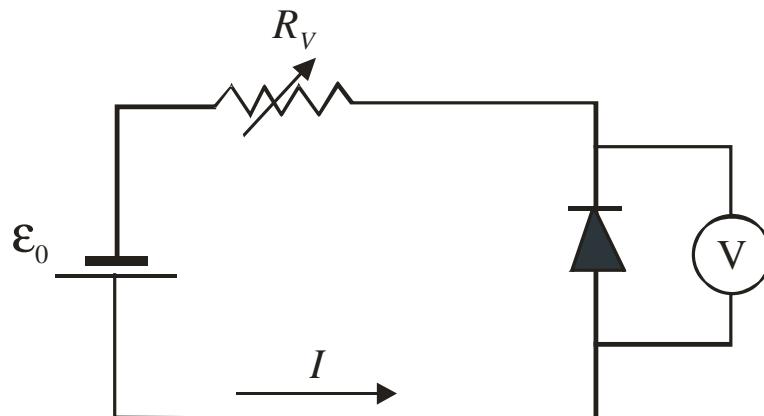
En esta expresión  $I_0$  y  $V_0$  son dos constantes,  $e$  es la carga del electrón,  $k$  es la constante de Boltzmann y  $T$  es la temperatura absoluta.<sup>5</sup> Cuando  $eV >> kT$  (caso usual a temperaturas inferiores a 500 °C) tenemos:

$$I \approx I_0 \left[ \exp\left(\frac{e(V - V_0)}{kT}\right) \right]. \quad (50.3)$$

Si por el diodo circula una  $I$  constante,  $V$  deberá ser proporcional a  $T$ , o sea:

$$V = V_0 - bT. \quad (50.4)$$

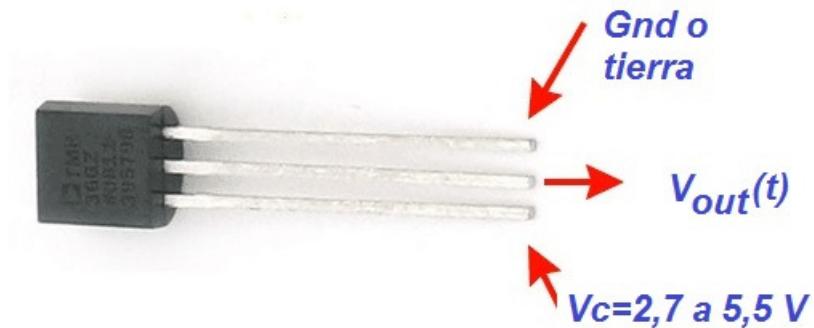
Un modo de lograr que la corriente sea constante es conectar el diodo a una fuente de corriente estable, o simplemente conectándolo a una fuente de tensión en serie, con un resistor de resistencia varios órdenes de magnitud mayor que la resistencia del diodo. En la Fig. 50.3 se indica esquemáticamente el circuito que puede usarse en este último caso. Una corriente entre 0,01 mA a 1 mA es adecuada.



**Figura 50.3** Diagrama esquemático del circuito para medir la variación del voltaje de un diodo con la temperatura.

En el mercado existen varios circuitos integrados para medir temperaturas en aplicaciones industriales. Estos circuitos se adaptan muy bien a un sistema de toma de

datos conectado a una computadora. Por lo general, estos dispositivos tienen tres bornes: uno es la conexión a tierra, en otro se conecta la alimentación del voltaje ( $V_c$  entre 2,7 V y 5 V) y el tercero es una salida del voltaje,  $V_{out}(T)$ , que cambia con la temperatura,  $T$  (ver Fig. 50.4). Estos circuitos generan una señal muy lineal, proporcional a la temperatura. Por lo general, producen entre 1 y 10 mV/K en un rango usual de  $-10^{\circ}\text{C}$  a  $120^{\circ}\text{C}$ . También existen integrados con sus calibraciones expresadas en los diversos sistemas de unidades ( $^{\circ}\text{F}$ ,  $\text{K}$ ,  $^{\circ}\text{C}$ ).

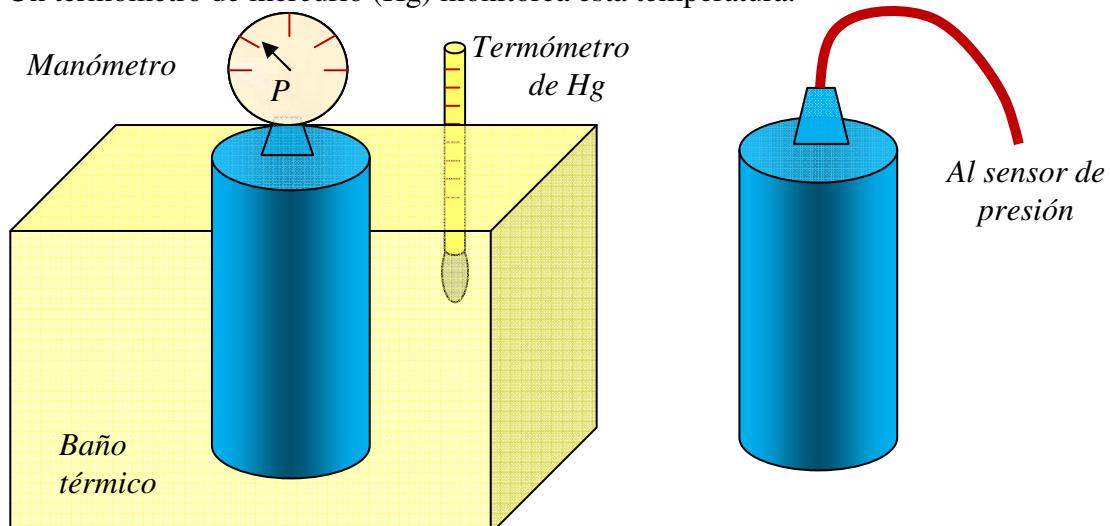


**Figura 50.4** Termómetro de estado sólido basado en un circuito integrado.

### Proyecto 165. Calibración de un termómetro de gas

**Equipamiento básico recomendado:** Un recipiente metálico de unos  $250\text{ cm}^3$ . Un termómetro calibrado y/o un termistor. Un manómetro capaz de medir presiones manométricas en el rango de 0 a 0,3 atm o un sensor de presión conectado a una PC.

Para este experimento se usa un recipiente metálico de aproximadamente  $250\text{ cm}^3$ , que contiene aire u otro gas, estanco y conectado a un manómetro o a través de un tubo flexible, a un sensor de presión, como se indica en la Fig. 50.5. La señal de presión puede leerse con una PC conectada al sensor de presión. Se requiere además un baño térmico, por ejemplo un recipiente con agua que cubra al recipiente por completo, de modo que nos asegurarnos de que en el equilibrio la temperatura del recipiente sea la del agua. Un termómetro de mercurio (Hg) monitorea esta temperatura.



**Figura 50.5** Diagrama esquemático de un termómetro de gas. El baño térmico es un recipiente con agua, cuya temperatura se puede variar. Con el sensor de presión y el termómetro de Hg se mide la presión y la temperatura del baño.

Es conveniente que el recipiente que contiene el gas sea de un metal de buena conductividad térmica, de modo que se logren condiciones de equilibrio rápidamente. Para evitar la presencia de vapor en el gas, es conveniente calentar el recipiente y desalojarlo de toda humedad. Asimismo, se puede conectar una válvula de neumático de automóvil o de bicicleta al recipiente, de modo que se pueda presurizar con un inflador. Conviene que inicialmente la presión dentro de recipiente sea algo mayor que la barométrica del lugar. Los experimentos pueden realizarse usando como gas: aire, argón, nitrógeno, helio, etc. Recuerde que en general los manómetros miden la presión manométrica,  $P_m$ , la presión absoluta  $P$  es:

$$P = P_m + P_{bar}, \quad (50.5)$$

donde  $P_{bar}$  es la presión atmosférica local o presión barométrica del lugar.

### Sugerencias de trabajo:

- ✓ Mida la presión en el recipiente,  $P_m$ , en función de la temperatura del gas,  $T$ .
- ✓ Represente gráficamente la presión absoluta  $P$  en función de la temperatura absoluta  $T$  y analice la dependencia encontrada. ¿Es lineal la dependencia de  $P$  con  $T$ ? De ser así, determine la pendiente y ordenada al origen y sus incertidumbres. Discuta el significado físico de la ordenada al origen.
- ✓ Compare sus resultados con la predicción que da la ley de los gases ideales,  $PV = nRT$ , cuando el número de moles de gas  $n$  y el volumen del recipiente  $V$  son constantes.

## Proyecto 166. Calibración de un termopar

**Equipamiento básico recomendado:** Un termopar. Un voltímetro que aprecie mV. Un termómetro calibrado. Un baño térmico.

Para este experimento es necesario disponer de un arreglo similar al indicado en la Fig. 50.2. Para evitar el contacto eléctrico en el baño térmico, se puede usar un recipiente con aceite dentro de una caja con hielo como  $T_{ref}$ . Estudie cómo varía la tensión  $V_{AB}$  a medida que varía la temperatura  $T$  de la fuente térmica.

### Sugerencias de trabajo:

- ✓ Coloque una unión del termopar en contacto con una fuente térmica y coloque en la fuente un termómetro calibrado. Represente gráficamente la fem  $V_{AB}$  generada por el

par como función de la temperatura  $T$  medida con el termómetro. Varíe  $T$  entre la menor temperatura posible y la máxima que pueda lograr con su fuente térmica. Para extender el rango de temperatura, puede usar como fuente térmica un recipiente con aceite de motor de automóvil. Cuide que el aceite no entre en ebullición o se queme. También puede usar agua en la fuente, pero en este caso el rango de temperatura será de 0°C a 100°C.

- ✓ Represeñe gráficamente  $V_{AB}$  como función de  $T$ . Para este ensayo la temperatura puede estar en grados centígrados. Ajuste un polinomio de grado 1 y 2. Discuta la significación de los parámetros de estos polinomios, ver Cap. 7 y Apéndice C.
- ✓ Obtenga los primeros coeficientes de variación de la tensión con la temperatura, representados por:  $a_0, a_1, a_2, \dots$  y compare con los valores de tablas para el par usado.<sup>4</sup>

**Nota:** Para una calibración más precisa, se usan puntos fijos de temperaturas bien definidos por los puntos de fusión de metales puros o por los puntos de fusión de algunas sustancias puras.

### Proyecto 167. Calibración de una RTD

**Equipamiento básico recomendado:** Un sensor de temperatura RTD. Un circuito para medir resistencias por el método de cuatro puntas.

Construya un circuito para medir resistencias usando el método de Kelvin o de cuatro puntas, discutido en el Cap. 27. Coloque el RTD en un recipiente con agua con un termómetro de mercurio bien calibrado.

#### Sugerencias de trabajo:

- ✓ Mida el valor de la resistencia del RTD en función de la temperatura para el mayor rango posible.
- ✓ Determine la recta de calibración del RTD, válida en el rango aproximado  $0^\circ\text{C} < T < 100^\circ\text{C}$ .
- ✓ Determine el coeficiente de variación de la resistencia con la temperatura y su incertidumbre para el material del RTD y compare con su valor de tabla.
- ✓ Compare el valor de los parámetros de su recta con las especificaciones del RTD provisto por el fabricante. ¿Qué puede concluir de esta comparación?

### Proyecto 168. Termómetro basado en un diodo

**Equipamiento básico recomendado:** Un diodo. Una fuente de corriente hasta 1 mA o de tensión de 5 V. Una resistencia variable de 1–10 kΩ. Un voltímetro que mida mV. Un termómetro calibrado. Un baño térmico.

Para este experimento puede usar una resistencia de unos 5 kΩ conectado en serie con el diodo, polarizado de modo que permita el paso de la corriente, como se

indica en la Fig. 50.3. Conecte un milivoltímetro a los bornes del diodo para medir su caída de tensión como función de la temperatura.

#### Sugerencias de trabajo:

- ✓ Estudie la respuesta en temperatura de un diodo. Para ello coloque el diodo junto a un termómetro calibrado en el mismo baño térmico. Represente gráficamente la tensión del diodo  $V$  como función de la temperatura medida,  $T$ . Midiendo la caída de tensión en la resistencia determine la corriente por el circuito.
- ✓ Construya un gráfico de  $V$  como función de  $T$ . ¿Sus datos están de acuerdo con la expectativa teórica dada por la Ec.(50.4)?
- ✓ Varíe el valor de  $R$ , en al menos un 20 % y repita el análisis anterior.
- ✓ ¿Varía el valor de la pendiente de la recta de  $V$  en función de  $T$  con el valor de la corriente que pasa por el diodo? Explique sus resultados.

### Proyecto 169. Termómetro basado en un circuito integrado

**Equipamiento básico recomendado:** Un circuito integrado que se use como sensor de temperaturas (LM35, AD590 u otro). Un termómetro calibrado. Un baño térmico.

Conecte el circuito integrado del que dispone, según las especificaciones del fabricante que seguramente serán similares a la configuración indicada en la Fig. 50.4. Una precaución que debe tener al utilizar este tipo de dispositivo es que no se pueden introducir en agua común, ya que el agua produciría un corto circuito entre sus terminales. Por lo tanto, se debe usar una muy buena aislación eléctrica, pero evitando que no genere demasiada aislación térmica. Una posibilidad es usar aceite o agua destilada en el baño térmico. Un termómetro bien calibrado puede dar la temperatura del baño térmico. Mida la tensión de la terminal que da la tensión proporcional a la temperatura con un buen milivoltímetro.

#### Sugerencias de trabajo:

- ✓ Mida la tensión de salida,  $V_{out}$ , del integrado como función de  $T$  para un rango de 5°C a 95°C aproximadamente. Consulte las especificaciones del integrado y no exceda los límites permitidos.
- ✓ Represente gráficamente la tensión  $V_{out}$  de salida del integrado como función de la temperatura medida con el termómetro calibrado.
- ✓ Usando dos recipientes (uno con agua fría y otro con agua caliente), estudie la “constante de tiempo” del integrado. Para esto sumerja el integrado en el agua fría (temperatura  $T_1$ ) y espere a que se estabilice la lectura de la tensión de salida  $V_S$ . Luego retírelo y páselo al recipiente con agua caliente (temperatura  $T_2$ ). Mida  $V_S$  en función del tiempo hasta que el termómetro haya alcanzado una temperatura final de equilibrio (temperatura del agua caliente). La constante de

tiempo,  $\tau$  puede definirse, por ejemplo, como el tiempo que tarda el termómetro en cambiar su temperatura desde su temperatura inicial  $T(t = 0) = T_1$  hasta una temperatura  $T(t = \tau)$  tal que cumpla con  $T(t = \tau) - T_1 \approx 0,7 (T_2 - T_1)$ . Compare el tiempo de respuesta de este termómetro con el tiempo de respuesta de un termopar.

## Referencias

- 
- <sup>1</sup> P. R. N. Childs, J.R. Greenwoods and C.A. Long, "Review of temperature measurement," Rev. Sc. Instrum. **71**, 2959 (2000).
  - <sup>2</sup> *Introduction to Temperature Measurement*, Omega Complete Temperature Measurement Handbook and Encyclopedia (Volume 29), OMEGA Engineering inc., <http://www.omega.com/>
  - <sup>3</sup> Shawn Carlson, "Tackling the triple point," *Scientific American* (Feb. 1999).
  - <sup>4</sup> David R. Lide (Editor) "Handbook of Chemistry and Physics (The Chemical Rubber Co.), 81st Edition," by CRC Pr; ISBN: 0849304814. N.Y. (2000).
  - <sup>5</sup> F. W. Inman and D. Woodruff, "The thermometric properties of a diode," Phys. Teach. **33**, 120 (1995).
  - <sup>6</sup> S. M. Sze, K. K. Ng, *Physics of Semiconductor Devices*, John Wiley & Sons, NY, 2006.

# Capítulo 51

---

## Dilatación térmica de sólidos

El objetivo de esta actividad es estudiar cómo varían las dimensiones de un sólido cuando cambia su temperatura. De las diversas posibilidades que existen para estudiar la dilatación térmica de un sólido, hemos elegido dos variantes sencillas. En la primera, el efecto de la pequeña dilatación térmica de un tubo de metal se visualiza a través de un dispositivo mecánico amplificador. En la segunda versión, los cambios de longitud se miden directamente con un comparador micrométrico. De ambos experimentos puede determinarse el coeficiente de dilatación lineal  $\alpha$  del metal usado.

### Objetivos

- ✓ Dilatación térmica
- ✓ Medición del coeficiente de dilatación térmica

### 51. 1 Dilatación térmica

En general los sólidos se expanden cuando se los calienta y se contraen cuando se los enfriá. La expansión lineal de una dimensión de un sólido viene dada por:<sup>1</sup>

$$\Delta L = L_0 \alpha (T_f - T_0), \quad (51.1)$$

donde  $\Delta L$  es el cambio de longitud de una dada dimensión de un cuerpo al incrementarse la temperatura de  $T_0$  a  $T$ ; la variación de temperatura es:  $\Delta T = T - T_0$ .  $L_0$  es su longitud a  $T_0$  y  $\alpha$  es el coeficiente de dilatación lineal, dependiente del material del que está compuesto el cuerpo. La longitud  $L(T)$  se puede escribir como:

$$L(T) = L_0 (1 + \alpha \Delta T). \quad (51.2)$$

En general, el coeficiente  $\alpha$  depende de la temperatura, aunque en un intervalo de temperatura no muy grande puede tomarse como constante. Este coeficiente se determina con mucha precisión usando dispositivos conocidos como dilatómetros.<sup>2</sup> En esta actividad proponemos determinar el coeficiente de dilatación lineal de algunos metales usando un dispositivo de fácil implementación y muy accesible en el laboratorio. Desde luego, hay muchas otras técnicas experimentales para determinar el coeficiente de dilatación lineal que se pueden consultar en la bibliografía.<sup>3</sup>

## Proyecto 170. Determinación del coeficiente de dilatación térmica I

**Equipamiento básico recomendado:** Un tubo metálico (Cu, Al u otro material) de unos 100 cm de longitud, de paredes de espesor menor a 2 mm. Una termocupla. Una pistola de aire caliente o un generador de vapor.

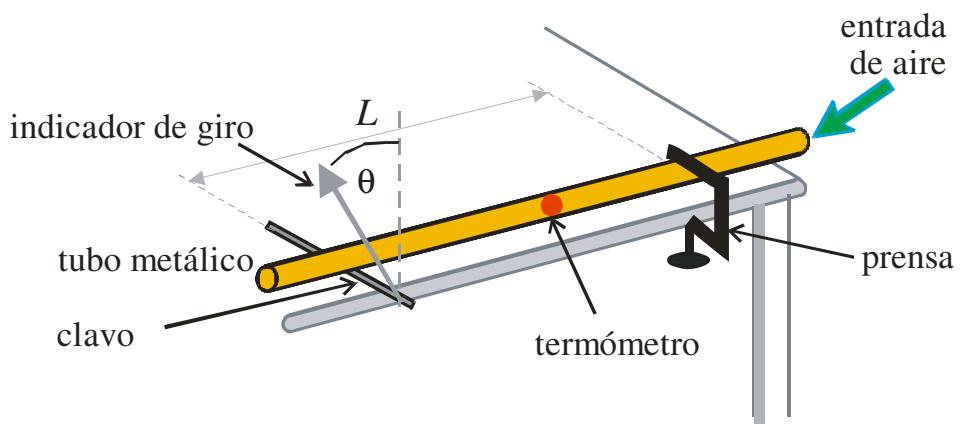
Para estudiar la dilatación térmica de un sólido se propone usar un dispositivo como se muestra en la Figura 51.1.<sup>4</sup> El sólido que se va a estudiar es un tubo de aluminio, cobre u otro metal de unos 100 cm de longitud aproximadamente. Es aconsejable un tubo de paredes delgadas (no más de 2 mm de espesor) y cuyo diámetro esté aproximadamente entre 10 mm y 30 mm. Un clavo o alfiler fino (de diámetro  $d \approx 1-2$  mm) se coloca debajo del tubo cerca de un extremo de éste. El otro extremo del tubo se fija a la mesa con una prensa. Por este extremo se insufla aire caliente o vapor. Para ello es conveniente colocar a la entrada del tubo un embudo metálico, de modo que se logre que una fracción importante del aire producido por una pistola de aire caliente penetre por el tubo.

Cuando el tubo se dilata debido a un aumento de temperatura, el cambio de longitud hará que el clavo gire (para esto debe asegurarse de que el clavo quede bien apretado por el tubo). El clavo debe tener adosado un fiel construido con una varilla plástica o de madera liviana, que dé cuenta del cambio de longitud con la temperatura. Detrás del fiel es útil colocar un goniómetro (transportador) para medir el ángulo  $\theta$  entre el fiel y la vertical. El clavo funciona como “amplificador de la variación de longitud”. Si el alargamiento del tubo es  $\Delta L$  y  $d$  es el diámetro del clavo, el ángulo  $\theta$  que gira el clavo es:

$$\theta = \frac{\Delta L}{d}. \quad (51.3)$$

Esto significa que si  $d \approx 1$  mm, para una variación de  $\Delta L \approx 0,1$  mm, el ángulo  $\theta$  es aproximadamente  $5^\circ$ .

En el punto medio entre la prensa y el clavo se fija un sensor de temperatura (termopar calibrado u otro termómetro de pequeñas dimensiones) con el que se mide la temperatura media,  $T$ , del tubo. Se debe asegurar de que el termómetro se mantenga haciendo un buen contacto térmico con el tubo durante todo el experimento. Esto puede lograrse cubriendo o envolviendo el sensor de temperatura y el tubo con una cinta de cobre, con silicona térmica o masilla térmica, de modo que mejore el contacto del tubo con el sensor.



**Figura 51.1** Dispositivo para estudiar la dilatación térmica de un metal. El tubo está fijo a una mesa por medio de una prensa y se calienta con aire caliente o vapor.

#### Sugerencias de trabajo:

- ✓ Demuestre que con el dispositivo de la Figura 51.1, si  $d$  es el diámetro del clavo, combinando las Ecs. (51.1) y (51.3) tenemos:

$$\theta = \frac{L_0}{d} \alpha \Delta T = \frac{L_0}{d} \alpha (T_f - T_0), \quad (51.4)$$

donde  $L_0$  es el largo del tubo.

- ✓ Caliente el tubo con un chorro continuo de aire caliente (con pistola de aire o un secador de cabellos) o bien usando vapor de agua (producido por un generador de vapor) que circule por el interior del tubo.
  - Mida  $\theta$  en función de la temperatura medida,  $T$ .
  - Construya un gráfico de  $\theta$  en función de  $T$ .
  - ¿Qué relación encuentra entre estas variables?
- ✓ Si la relación entre  $\theta$  y  $T$  es lineal, se puede usar la Ec. (51.4) para determinar el coeficiente de expansión térmica  $\alpha$  del metal. Detemine la pendiente del gráfico del  $\theta$  en función de  $T$  y su incertidumbre.
- ✓ Mida  $L_0$  (distancia prensa-clavo) y  $d$  y sus respectivas incertidumbres. A partir de estos valores, determine  $\alpha$  a partir de la Ec. (51.4) y su incertidumbre. Compare su resultado con el valor tabulado para el material que usó.
- ✓ Otra manera de proceder consiste en calentar homogéneamente el tubo echándole aire caliente por fuera con la pistola de aire o secador de cabellos y elevar la temperatura del tubo hasta un valor de unos 40 °C por encima de la temperatura ambiente. Luego, a medida que el tubo se enfríe lentamente, puede hacerse la lectura del ángulo  $\theta$  para distintas temperaturas decrecientes. Por ejemplo, puede medirse la temperatura del tubo cada vez que  $\theta$  varíe 1° ó 2° para así tomar un buen número de datos.

Un aspecto interesante del estudio de la dilatación térmica es su conexión con las propiedades atómicas y moleculares del sólido. Es posible conectar el coeficiente de dilatación lineal con el parámetro que mide la asimetría del potencial de interacción interatómico. Una discusión detallada de este tópico puede obtenerse de las Refs. [5,6].

## Proyecto 171. Determinación del coeficiente de dilatación térmica II

**Equipamiento básico recomendado:** Un tubo metálico (Cu, Al u otro material) de 50 cm de longitud o más, con paredes de espesor entre 1 y 2 mm. Un termistor o termocupla. Una pistola de aire caliente o un sistema que produzca vapor de agua a un ritmo aproximadamente constante (generador de vapor). Un comparador micrométrico.

Este experimento es en esencia igual al anterior, excepto que esta vez se propone usar un comparador micrométrico para medir el alargamiento  $\Delta L$  de manera directa. Para este experimento es conveniente que, cerca del extremo libre del tubo, éste tenga atravesado un clavo u perno de acero inoxidable. Este clavo o perno se apoya en el comparador. El otro extremo del tubo está fijado a la mesa por medio de una prensa (ver Figura 51.1). La utilidad del clavo o perno radica en que de este modo es posible medir el alargamiento del tubo sin que el aire caliente o el chorro de vapor incida directamente sobre el comparador. Esto es importante para no dañar el instrumento y permitir mediciones más precisas. Las temperaturas se miden igual que antes.

- ✓ Usando este dispositivo represente gráficamente  $\Delta L$  en función de  $T$ .
- ✓ Determine  $\alpha$  con este procedimiento y estime la incertidumbre de esta determinación.
- ✓ Discuta cómo se comparan sus resultados experimentales de  $\alpha$  con los valores tabulados para el material del tubo.

## Referencias

- 
- <sup>1</sup> F. Sears, M. Zemansky, H. Young y Freedman, *Física Universitaria*, vol. 1 (Addison Wesley, México, 1999).
  - <sup>2</sup> M. Zemansky, *Calor y termodinámica* (Aguilar, Madrid, 1973).
  - <sup>3</sup> D.R. Dounas-Frazer, P.R. Gandhi y G.Z. Iwata, “Uncertainty analysis for a simple thermal expansion experiment”, *Am.J. Phys.* 81, (5) 338, (2013).
  - <sup>4</sup> *700 Science experiments for everyone – A double book for young readers* (Unesco, New York, 1962).
  - <sup>5</sup> D. Thompson, “Thermal expansion in a symmetrical environment”, *Am. J. Phys.* **62**, 728 (1994).
  - <sup>6</sup> V.F. Weisskopf y H. Bernstein, “Search for Simplicity: Thermal Expansion”, *Am. J. Phys.* **53**, 1140 (1985).

## Capítulo 52

### Experimentos enfriamiento de un cuerpo – Decaimiento exponencial Objetivos

En este capítulo estudiamos los procesos de enfriamiento y calentamiento de un cuerpo cuando se encuentra sumergido en un fluido, ya sea en el seno de un líquido como la atmósfera o un fluido. Estos procesos físicos ilustran algunas características del proceso de convección natural. En particular, analizamos la Ley de enfriamiento de Newton.

- ✓ Procesos convección natural
- ✓ Ley de enfriamiento de Newton

#### 52.1 Propagación del calor

El calor se transfiere básicamente por tres procesos distintos; conducción, convección y radiación. En la naturaleza, todos los mecanismos de transmisión intervienen simultáneamente con distintos grados de importancia. Sin embargo, diseñando los experimentos adecuadamente, es posible lograr que sólo uno de estos mecanismos sea el dominante.

La propagación del calor a través de la **conducción** se caracteriza por la presencia de un medio material a través del cual se propaga el calor. Aquí el calor se transmite sin transporte de materia.<sup>1,2</sup> Aunque los líquidos y los gases no suelen ser muy buenos conductores de calor, pueden transmitirlo eficientemente por convección. La propagación del calor a través de la **convección** se caracteriza por la existencia de un medio material fluido a través del cual se propaga el calor. Aquí el calor se transmite con transporte de materia, la densidad del medio varía con la temperatura y la gravedad juega un rol importante: sin ella no hay convección. Un ejemplo de convección es el que se produce en una habitación en la que existe una estufa o radiador. Al calentarse, el aire que rodea al radiador se expande, su densidad disminuye y se eleva, esto genera un flujo macroscópico de corrientes de aire que calientan la habitación. Las corrientes oceánicas, calientes o frías, como la corriente del Golfo, son un ejemplo de convección natural a gran escala. El viento es otro ejemplo de convección.

En el caso de la convección natural, alrededor del objeto caliente se forma una capa delgada de aire (capa límite) que es la que por conducción propaga el calor de la superficie caliente al medio. Es posible escribir la potencia disipada por convección natural como:

$$P_{\text{conv}} = A \cdot h \cdot (T_{\text{sup}} - T_{\text{medio}}), \quad (52.1)$$

donde  $A$  es la superficie del cuerpo expuesta al medio,  $h$  es una constante característica, *coeficiente de convección*, que depende del régimen de disipación (laminar, turbulento, etc.) de la conductividad térmica del medio fluido y del estado de las superficies.  $T_{\text{sup}}$  y  $T_{\text{medio}}$  designan a las temperaturas de la superficie del cuerpo y del medio fluido, respectivamente.

En la conducción y la convección es necesaria la presencia de un medio material para la propagación del calor. Sin embargo, la vida sobre la Tierra depende de la transferencia de energía que nos llega desde el Sol, la cual atraviesa el espacio esencialmente vacío. Esta forma de transferencia de energía se denomina radiación. La propagación del calor a través de la radiación se caracteriza por: a) sin necesidad de un medio *material* y b) el calor se transmite *sin transporte de materia*. En la radiación la energía se transmite por medio de ondas electromagnéticas.<sup>1,2</sup>

## 52.2 Enfriamiento de un cuerpo

Si tenemos un cuerpo de masa  $m$ , y área  $A$ , a una cierta temperatura inicial  $T_i$ , en el seno de un fluido (aire o agua) a una temperatura  $T_f$  (que suponemos es inferior a  $T_i$ ), dicho cuerpo se enfriará. Si  $T(t)$  representa la temperatura del cuerpo como función del tiempo  $t$ , según la Ec. (52.1) tenemos:

$$P_{\text{conv}} = m.c \cdot \frac{dT}{dt} = A \cdot h \cdot (T(t) - T_f), \quad (52.2)$$

donde  $c$  es el calor específico de cuerpo. Por lo tanto podemos escribir:

$$\frac{dT(t)}{dt} = -k \cdot (T(t) - T_f), \quad \text{con} \quad k = \frac{A \cdot h}{m.c}. \quad (52.3)$$

Esta relación se conoce como la *ley de enfriamiento de Newton* y describe en forma aproximada cómo se enfriá (o calienta) un cuerpo que está a una temperatura  $T$  cuando el medio circundante está a una temperatura  $T_f$ . Las Ecs. (52.1) y (52.3) son expresiones empíricas aproximadas y sostienen que la velocidad con que un cuerpo cambia su temperatura en el tiempo, es decir,  $dT/dt$ , es proporcional a la diferencia de temperatura entre el cuerpo y su medio, o sea,  $(T - T_f)$ . La Ec.(52.3) presupone que los efectos de pérdida de calor por radiación son despreciables frente a los de convección. Esto será cierto siempre y cuando la diferencia de temperatura entre el cuerpo y el medio no sea muy grande, típicamente  $\Delta T < 100$  K.

Es fácil verificar que:

$$T(t) = T_f + B \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad (52.4)$$

satisface la Ec.(52.3), donde  $B$  es una constante que depende de las condiciones iniciales. El parámetro  $\tau \equiv k^{-1} = m.c / A.h$ , se mide en unidades de tiempo y representa el “tiempo característico” del enfriamiento. Si suponemos que inicialmente el cuerpo está a una temperatura  $T_i$ , es decir para  $t = 0$ ,  $T(t) = T_i$ , la expresión (52.4) se reduce a:

$$T(t) - T_f = (T_i - T_f) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (52.5)$$

Observe que si se toma el logaritmo natural a ambos miembros de la Ec. (52.5) se obtiene:

$$\ln(T(t) - T_f) = \ln(T_i - T_f) - \frac{1}{\tau} t. \quad (52.6)$$

La Ec. (52.6) indica que un *gráfico semilogarítmico* de  $(T(t) - T_f)$  en función del tiempo  $t$  nos da una recta, cuya pendiente es  $-1/\tau$ .

El objeto de esta sección es estudiar experimentalmente el proceso de enfriamiento de un cuerpo en el seno del aire y del agua con el fin de poner a prueba las Ecs. (52.1) y (52.5).

### Proyecto 172. Enfriamiento de un termómetro de vidrio en el aire

**Equipamiento recomendado:** Un termómetro de vidrio con rango de medición entre 0°C y 100°C y un reloj. Un recipiente de agua de unos 250 ml.

En esta actividad se propone usar un termómetro y observar cómo se enfria una vez que se lo retira de un recipiente con agua caliente ( $T \approx 90^\circ\text{C}$ ). El termómetro se enfriará hasta alcanzar, después de un cierto tiempo, la temperatura del ambiente. Caliente agua hasta que hierva y coloque unos 200 ml aproximadamente en un recipiente de agua.

#### Sugerencias de trabajo:

- ✓ Sumerja el termómetro en agua caliente hasta que su temperatura se equilibre con el agua. Registre este valor  $T_i$ , la temperatura inicial de termómetro. Retírela del agua para que se enfríe hasta una temperatura cercana a la de la habitación donde se encuentra. Cuando saque el termómetro del agua caliente, trate de no moverlo para que no agite el aire circundante y no se ponga en contacto con otro objeto. Puede colgarlo de un hilo. Lea el termómetro cada dos o tres segundos durante el primer minuto y luego cada 10 s, hasta que la temperatura alcance un valor final estable y cercano a  $T_f$ , de la habitación.
- ✓ Represente los datos de la temperatura,  $T(t)$ , en función del tiempo,  $t$ , en un gráfico con escalas lineales.
- ✓ Usando los valores medidos  $T_i$  y  $T_f$ , represente en un gráfico semilogarítmico  $(T(t) - T_f)$  en función del tiempo  $t$  y observe si se linealiza el gráfico. En caso de ser así, construya un gráfico de  $\ln(T(t) - T_f)$  como función de  $t$ . Si la tendencia de los datos es lineal, ajuste los mismos con una recta y obtenga la constante  $k$ , Ec.(52.3) y su error, ver Cap. 7. También determine el tiempo característico  $\tau$  y su incertidumbre. Verifique que la ordenada al origen corresponde a  $\ln(T_i - T_f)$ ; ver Ec. (52.6).
- ✓ ¿La Ley de enfriamiento de Newton es una buena representación del enfriamiento estudiado?

#### Preguntas

- 1) ¿Se puede medir con el termómetro que usó, la temperatura de un animal como por ejemplo una paloma? ¿Y la temperatura de un mosquito? Explique sus respuestas.

### Proyecto 173. Enfriamiento de un cuerpo en el aire y en el agua

**Equipamiento recomendado:** Un termómetro de vidrio con rango de medición entre 0°C y 100°C. Un termómetro conectado a un sistema de adquisición de datos conectado a una PC y cuyo rango sea de 0°C a 100°C. Unos 300 g de masilla o plastilina. Dos recipientes de agua de unos 250 ml aproximadamente.

El objetivo de este experimento es estudiar cómo varía el enfriamiento de un cuerpo en al aire y en el agua. Con la masilla o plastilina construya una bolita de unos 50 g aproximadamente e inserte el termómetro como se ilustra en la Fig.52.1. Asegúrese de que haya un cierre bien hermético entre el termómetro y la bola de masilla o plastilina. Esto posibilita un buen contacto entre ambos objetos y evita que entre aire o agua entre ellos.



**Figura 52.1.** Arreglo para estudiar la ley de enfriamiento. La masilla o plastilina agregada al termómetro hacen que el proceso sea más lento y simple de estudiar.

En esta actividad nos proponemos estudiar cómo se enfria un cuerpo dado en el seno del aire y en el agua. Coloque agua caliente ( $T \approx 40$  a  $50$  °C) en uno de los recipientes. En el otro, agua a temperatura ambiente. Elija una tasa de medición en el sistema de adquisición de aproximadamente 0,1 Hz, esto es, una medición de temperatura cada 10 segundos y un rango de medición de unos 30 minutos. Coloque el cuerpo (masilla) con el termómetro en agua caliente hasta que se llegue al equilibrio térmico. Con el termómetro de vidrio, mida la temperatura del agua caliente. Inicie la toma de datos.

#### Sugerencias de trabajo:

- ✓ Retire el cuerpo con el termómetro, cuidando que la masa no se desprenda de éste. Deje que el sistema se enfríe en el aire. Mientras espera que el cuerpo llegue a la temperatura ambiente, con el termómetro de vidrio mida la temperatura ambiente  $T_f$ .
- ✓ Construya un gráfico de  $T(t) - T_f$  como función de  $t$  en escala lineal y semilogarítmica. ¿Alguno de estos gráficos muestra una tendencia lineal?
- ✓ Construya un gráfico de  $(\ln(T(t) - T_f))$  como función de  $t$ . Si los datos muestran una tendencia lineal, ajuste una recta a través de ellos. Obtenga el tiempo característico  $\tau$  y su incertidumbre.
- ✓ Repita el experimento anterior, pero esta vez, en lugar de que el cuerpo se enfríe en el aire, una vez retirado del agua caliente, sumérjalo en agua fría y deje que se enfríe en

este medio. Para que la temperatura del medio no varíe significantemente, es conveniente que el recipiente de agua fría tenga una masa 10 veces mayor a la del cuerpo que se estudia (masilla). Mientras espera que el cuerpo llegue a la temperatura del agua, con el termómetro de vidrio mida la temperatura del agua fría contenida en el recipiente,  $T_f$ .

- ✓ Represente los datos de,  $T(t)$ -  $T_f$ , en función del tiempo,  $t$ , en un gráfico de escala semi-logarítmica.
- ✓ Construya un gráfico de  $(\ln(T(t) - T_f))$  como función de  $t$  y ajuste una recta a los datos. Obtenga el tiempo característico  $\tau$  y su incertidumbre.
- ✓ Compare los valores de  $\tau$  obtenidos para el enfriamiento en el aire y en el agua.
- ✓ Con base a sus observaciones, explique por qué una persona puede sobrevivir sin mayores problemas a una temperatura de 5°C en el aire, pero si cae al agua a esta temperatura su sobrevivencia es sólo de algunos minutos.

### Proyecto 174. Variación del enfriamiento con la masa

**Equipamiento recomendado:** Un termómetro de vidrio con rango de medición entre 0°C y 100°C. Un termómetro conectado a un sistema de adquisición de datos conectado a una PC, cuyo rango sea de 0°C a 100°C. Unos 500 g de masilla o plastilina. Una balanza de rango 0 a 300g @ 1g o mejor. Dos recipientes de agua de unos 250 ml aproximadamente.

El objetivo de esta actividad es estudiar cómo varía el enfriamiento de un cuerpo con su masa. Con la masilla o plastilina construya unas 4 ó 5 bolitas de unos 50 g a 300 g aproximadamente. Trate de que sean aproximadamente esféricas y para cada una de ellas mida sus masas. En cada caso, inserte el termómetro como se ilustra en la Fig.52.1. Asegúrese de que haya un cierre bien hermético entre el termómetro y la bola de masilla o plastilina.

Si suponemos que para cada bolita vale la Ley de enfriamiento de Newton, Ec.(52.3), si  $\rho$  designa la masa del cuerpo, tenemos:

$$k = \frac{A \cdot h}{m \cdot c} = \frac{h}{c} \frac{4\pi \cdot a^2}{4\pi\rho \cdot a^3 / 3} = \frac{h}{c\rho} \frac{3}{a} \propto \frac{1}{a} \propto \frac{1}{m^{1/3}}, \quad (52.7)$$

donde  $a$  designa el radio medio de la bolita de masilla o plastilina; por lo tanto la constante característica de enfriamiento será:

$$\tau = \frac{c\rho}{h} \frac{a}{3} \propto a \propto m^{1/3}. \quad (52.8)$$

Coloque agua caliente ( $T \approx 50$  °C) en uno de los recipientes. En el otro, agua a temperatura ambiente. Elija una tasa de medición en el sistema de adquisición de aproximadamente 0,1 Hz y un rango de medición de unos 30 minutos. Coloque cada uno de los cuerpos con el termómetro en agua caliente hasta que se llegue al equilibrio térmico. Con el termómetro de vidrio, mida la temperatura del agua caliente. Inicie la toma de datos.

### **Sugerencias de trabajo:**

- ✓ Para cada bolita, mida la temperatura de enfriamiento como función del tiempo. Con el termómetro de vidrio mida la temperatura del agua fría  $T_f$ .
- ✓ Represente  $(\ln(T(t) - T_f))$  como función de  $t$  y ajuste los datos con una recta. Obtenga el tiempo característico  $\tau$  y su incertidumbre para cada bolita.
- ✓ Seguidamente, represente los valores de  $\tau$  como función de  $m$  y como función de  $m^{1/3}$ .
- ✓ Discuta si sus datos pueden ser explicados por el modelo descrito por la Ec.(52.7).

### **Referencias**

---

<sup>1</sup> Física para Estudiantes de Ciencias e Ingeniería- D. Halliday, R. Resnik y J. Walker. 4ta. Ed. (Trad. de Fundamentals of Physics – John Wiley & Sons, Inc. New York 1993).

<sup>2</sup> Física - Principios con aplicaciones - D. C. Giancoli - Prentice Hall México 1997 (Trad. de Physics, Principles and Applications 4/E – Prentice Hall. New York 1995).

# Capítulo 53

## Conservación de la energía y calorimetría

### Objetivos

En este capítulo estudiamos algunos procesos de transferencia de calor y la aplicación del Principio de Conservación de la Energía o Primer Principio de la Termodinámica. Utilizamos este principio para estimar la temperatura de equilibrio a la que llega una mezcla de dos líquidos que originalmente estaban a distintas temperaturas. Seguidamente usaremos la conservación de la energía para medir el calor específico de algunos materiales. También proponemos dos experimentos para determinar el calor latente de vaporización y fusión del agua.

- ✓ Calorímetros
- ✓ Calor específico de sólidos y líquidos
- ✓ Transiciones de fases
- ✓ Calor latente de fusión y vaporación

### 53.1 Conservación de la energía – Primer Principio de la Termodinámica

El Primer Principio de la Termodinámica establece que la energía ni se crea ni se destruye, sólo se transforma.<sup>1,2</sup> Cuando dos sistemas a diferentes temperaturas se ponen en contacto térmico, se transfiere energía en forma de calor del sistema más caliente al más frío. La transferencia de energía térmica cesa una vez que ambos sistemas alcanzan una temperatura común de equilibrio, y esta temperatura depende de las masas y de los calores específicos de los cuerpos involucrados. En esta sección nos proponemos analizar el intercambio de calor entre dos sistemas en contacto térmico.

El calor específico,  $c_{sus}$ , de una sustancia es la cantidad de calor requerida para aumentar la temperatura de una unidad de masa de la sustancia en un grado Celsius.

Como primer ejemplo consideramos dos masas de agua: una caliente a una temperatura inicial  $T_{cal}$  y otra fría a una temperatura inicial  $T_{fría}$ . Ambas masas de agua se mezclan en un calorímetro y la mezcla llega a una temperatura final  $T_{final}$ . Aplicando el Primer Principio, los intercambios de calor que sufren estas masas de agua son:<sup>3</sup>

$$\Delta Q_{cal} = M_{agua\_cal} c_{agua} \Delta T_{cal} = M_{agua\_cal} c_{agua} (T_{cal} - T_{final}), \quad (53.1)$$

$$\Delta Q_{fría} = M_{agua\_fría} c_{agua} \Delta T_{fría} = M_{agua\_fría} c_{agua} (T_{final} - T_{fría}), \quad (53.2)$$

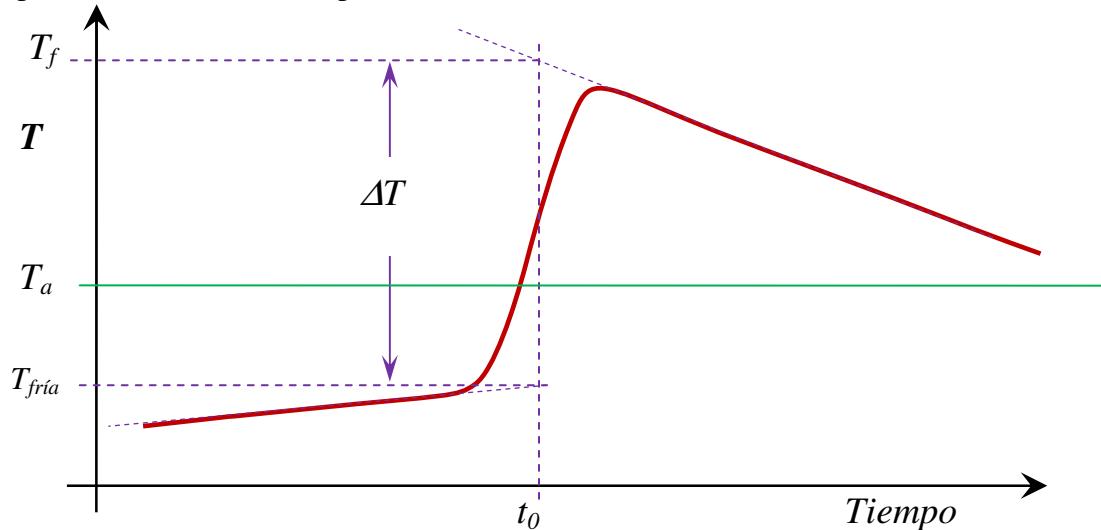
donde  $c_{agua}$  es el calor específico del agua, que supondremos independiente de la temperatura e igual a 1 cal/(g.°C).  $M_{agua\_cal}$  y  $M_{agua\_fría}$  son las masas de agua caliente y fría respectivamente.  $\Delta Q_{cal}$  y  $\Delta Q_{fría}$  son las variaciones de calor de cada masa de agua por separado. Si la energía se conserva tenemos:

$$\Delta Q_{cal} = \Delta Q_{fría}. \quad (53.3)$$

Dado que todos los parámetros involucrados en las ecuaciones anteriores se pueden medir en forma directa, es posible verificar experimentalmente si la Ec.(53.3) se cumple o no.

En varios de los experimentos que discutimos en este capítulo haremos uso de un **calorímetro**. Estos dispositivos son recipientes con una buena aislación térmica. Un calorímetro puede construirse con un recipiente de poliuretano expandido, de un volumen de unos  $250 \text{ cm}^3$  y un espesor de pared de aproximadamente 1 cm, como los envases de cremas heladas. La baja conductividad térmica del poliuretano expandido, que es básicamente aire encapsulado, inhibe el intercambio de calor con el medio exterior.

En muchos experimentos se requiere conocer el salto de temperatura de un proceso. Si puede seguir la evolución de la temperatura como función del tiempo, puede usar el siguiente método gráfico para determinar los cambios de temperaturas cuando existen efectos de disipación o pérdidas de calor. Imaginemos por ejemplo que en el sistema de dos masas de agua estamos midiendo la temperatura de la masa de agua fría, a la que hemos agregado la caliente. La evolución de la temperatura esperada será similar a como se ilustra en la Fig. 53.1. Debido a las posibles pérdidas de calor, la temperatura de la mezcla no permanecerá constante.



**Figura 53.1.** Procedimiento gráfico para determinar el cambio de temperatura  $\Delta T$  en un experimento con efectos de disipación térmica. La línea continua gruesa indica la evolución de la temperatura en el tiempo. Las líneas punteadas son extrapolaciones lineales de las tendencias antes y después del cambio, producido en el instante  $t_0$ .  $T_a$  representa la temperatura ambiente. Este tiempo  $t_0$  se toma como el instante en que ocurre el cambio y el salto de temperatura inferido a este instante es  $\Delta T$ .

El procedimiento para determinar el salto de temperatura,  $\Delta T$ , y la temperatura final de la mezcla,  $T_f$ , se describe en la Fig. 53.1. El instante nominal en el que se genera la mezcla es  $t_0$ . El salto de temperatura inferido a este instante se toma como  $\Delta T$ . También usaremos este procedimiento en el intercambio de calor entre cuerpos sólidos metálicos y agua para determinar el calor específico de algunos metales.

## 53.2 Equivalente en agua del calorímetro

En varios experimentos haremos uso de calorímetros que, como indicamos más arriba, son recipientes con buena aislación térmica. Sin embargo, frecuentemente es necesario disponer de termómetros u otros dispositivos en su interior que hacen que la participación del calorímetro y los elementos que lo constituyen no puedan despreciarse en el balance energético. En este caso es útil introducir el concepto de **equivalente en agua del calorímetro**,  $M_{EA}$ , que se define como una masa de agua cuya capacidad calorífica es equivalente al calorímetro y los elementos que contiene. Consideramos, al igual que antes, dos masas de agua: una caliente a una temperatura inicial  $T_{cal}$  y otra fría a una temperatura inicial  $T_{fría}$ , que suponemos se encuentra en el calorímetro, cuya equivalente en agua deseamos determinar. Ambas masas de agua se mezclan en este calorímetro y la mezcla llega a una temperatura final  $T_f$ . El balance térmico esta vez es:

$$(M_{agua\_fría} + M_{EA})c_{agua} (T_f - T_{fría}) = M_{agua\_cal} c_{agua} (T_{cal} - T_f). \quad (53.4)$$

De donde,

$$M_{EA} = M_{agua\_cal} \left( \frac{T_{cal} - T_f}{T_f - T_{fría}} \right) - M_{agua\_fría}. \quad (53.5)$$

### Proyecto 175. Conservación de la energía en una mezcla de dos masas de agua

**Equipamiento básico recomendado:** Un calorímetro. Dos termómetros estándares o sensores de temperatura conectados a una PC, que midan en el rango 0-100 °C

El objetivo de esta actividad es falsar la conservación de la energía en una mezcla de dos volúmenes de agua a temperaturas iniciales diferentes. En otras palabras, queremos someter a prueba experimental el resultado de la Ec.(53.4).

Para ello se sugiere determinar las masas de los calorímetros: vacío y seco. Luego se llena cada uno con agua fría y caliente respectivamente hasta aproximadamente un tercio de su capacidad y se determinan sus masas nuevamente. Por diferencia se pueden obtener los valores de  $M_{agua\ cal}$  y  $M_{agua\ fría}$ . Conviene que el agua caliente esté unos 20°C por encima de la temperatura ambiente y el agua fría, unos 10°C por debajo de la temperatura ambiente, pero superior a 0°C. Mida las temperaturas correspondientes  $T_{fría}$  y  $T_{cal}$ . Inmediatamente después, *añada el agua caliente al agua fría* y revuelva, hasta que se establezca la temperatura del termómetro. Mida la temperatura final de la mezcla,  $T_f$ .

Si dispone de un sensor de temperatura conectado a una computadora, mida continuamente la temperatura del calorímetro del agua fría donde se realizará la mezcla y obtenga un gráfico de temperatura en función del tiempo con los valores de la temperatura inicial y final. De estas mismas curvas evalúe cualitativamente las pérdidas

de calor del calorímetro observando la variación de la temperatura en el tiempo. Si puede seguir la evolución de la temperatura como función del tiempo, puede usar este gráfico para determinar los cambios de temperaturas cuando existen efectos de disipación usando el procedimiento descripto en la Fig. 53.1. A partir de este gráfico también puede determinar el valor de  $T_f$ , la temperatura final de equilibrio.

### Sugerencias de trabajo:

- ✓ Determine el valor de  $T_f$  para la mezcla de agua. Usando las Ecs.(53.1) y (53.2), calcule  $\Delta Q_{cal}$  y  $\Delta Q_{fría}$  usando sus datos experimentales.
- ✓ Repita el experimento para distintas masas de agua a diferentes temperaturas iniciales.
- ✓ Construya un gráfico de  $\Delta Q_{cal}$  en función de  $\Delta Q_{fría}$ . Si la energía se conserva, o sea, si se verifica la Ec.(53.4), esperaríamos que los datos se distribuyan alrededor de una recta a  $45^\circ$ .
- ✓ ¿Puede concluir de su experimento que “la energía se conserva” en el proceso estudiado?
- ✓ Determine el equivalente en agua de su calorímetro. Repita el análisis anterior usando los mismos datos, pero esta vez realice un gráfico de  $\Delta Q_{cal}$ , Ec.(53.1), en función de  $\Delta Q_{fría}$ , sólo que esta vez modificamos de la Ec.(53.2) por:

$$\Delta Q_{fría} = (M_{agua\_fría} + M_{EA}) \cdot c_{agua} \cdot (T_f - T_{fría}). \quad (53.6)$$

- ✓ ¿Cómo se modifican sus conclusiones por la incorporación del equivalente en agua?

### Proyecto 176. *Medición del calor específico de un sólido I*

**Equipamiento básico recomendado:** Un calorímetro. Dos termómetros estándares o sensores de temperatura conectados a una PC, que midan en el rango 0–100 °C. Bloques de Cu, Fe, Al u otros metales, de masas entre 400 y 500 g.

En este experimento nos proponemos medir el calor específico de algunos metales (Al, Cu, Fe, etc.). Para ello debemos conocer la masa  $M_{muestra}$  de cada una de las muestras metálicas que se van a usar y la masa  $M_{cal}$  de un calorímetro (seco y vacío) y su equivalente en agua,  $M_{EA}$ . Coloque agua caliente en el recipiente, de modo tal que cuando el cuerpo en estudio se coloque en su seno, quede totalmente sumergido. Con un termómetro, registre la temperatura del agua caliente. Asimismo, determine la temperatura de equilibrio de esta agua,  $T_{cal}$ , con el cuerpo en estudio totalmente sumergido en ella. Llene un calorímetro hasta la mitad con agua fría, algunos grados más bajos que la temperatura ambiente. Para tener mayor sensibilidad, es conveniente que la masa de agua fría y la del cuerpo sean comparables, es decir, que ninguna de ellas sea mucho mayor que la otra, pero suficiente para que el agua cubra totalmente el cuerpo cuando se lo introduzca en su seno. Pese el calorímetro vacío y con agua. Determine por diferencias la masa de agua fría,  $M_{agua\_fría}$ , que contiene el calorímetro. Mida la temperatura del agua,  $T_{fría}$  y, de ser posible, use un sensor de temperatura que le permita registrar la evolución térmica como función del tiempo. Una vez que el cuerpo esté en equilibrio con el agua caliente, retire la muestra, séquela rápidamente y

sumérjala completamente en el agua fría. De ser posible, coloque la muestra sin que toque las paredes ni el fondo del calorímetro. Para esto puede suspender la muestra de un hilo previamente a su inmersión en el agua caliente, lo que facilitará las subsiguientes operaciones. Mezcle el agua lentamente y mida la evolución de la temperatura. Determine la temperatura más alta alcanzada por el agua fría con el cuerpo en ella,  $T_f$ . Para ello, puede usar la técnica experimental indicada en la Fig. 53.1

Por la conservación de la energía, tenemos:

$$M_{muestra} c_{muestra} (T_{cal} - T_f) = (M_{agua\_fría} + M_{EA}) c_{agua} (T_f - T_{fría}), \quad (53.7)$$

donde  $c_{muestra}$  es el calor específico de la muestra y  $c_{agua}$  el calor específico del agua. De aquí puede deducirse el calor específico  $c_{muestra}$  para cada muestra utilizada, como:

$$c_{muestra} = c_{agua} (M_{agua\_fría} + M_{EA}) \left( \frac{\Delta T}{T_{cal} - T_f} \right). \quad (53.8)$$

### Sugerencias de trabajo:

- ✓ Para cada una de las muestras, determine su calor específico usando la Ec.(53.8) y compare los valores que obtenga con los valores tabulados para cada una de ellas.

## Proyecto 177. *Medición del calor específico de un sólido II*

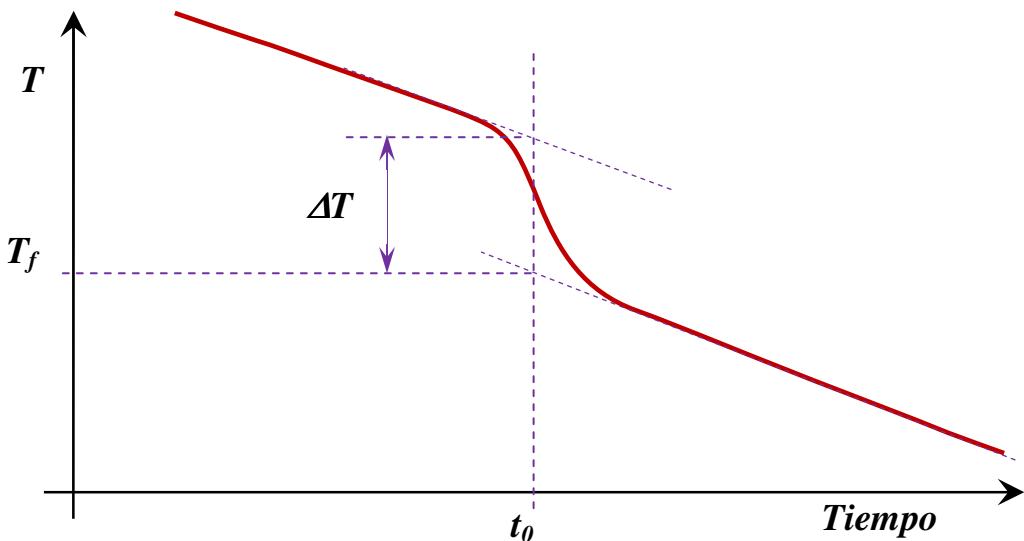
**Equipamiento básico recomendado:** Dos vasos de precipitación de unos 250 cm<sup>3</sup>. Un termómetro y sensores de temperatura conectados a una PC, que midan en el rango 0–100 °C. Bloques de Cu, Fe, Al u otros metales, de masas entre 400 y 500 g.

En este experimento nos proponemos medir el calor específico de algunos metales con un método ligeramente diferente al anterior, haciendo uso de un termómetro conectado a un sistema de adquisición de datos.<sup>4</sup> Este método explota el enfriamiento que tiene lugar cuando dejamos un recipiente de agua caliente a la temperatura ambiente. Suponemos que conocemos la masa  $M_{muestra}$  de cada una de las muestras metálicas que vamos a usar y la masa  $M_{agua\_cal}$  que colocamos en un vaso de precipitación. La masa de agua caliente en el vaso debe cubrir totalmente el cuerpo en estudio que se coloque en su seno. Coloque un termómetro conectado a un sistema de toma de datos por computadora en el agua caliente y estudie la evolución térmica del sistema. Llene un segundo vaso con agua fría, algunos grados más bajos que la temperatura ambiente. Asegúrese de que el agua fría cubra totalmente el cuerpo cuando se lo introduzca en su seno. Cuando el agua y el cuerpo sumergido en su seno hayan llegado al equilibrio térmico, mida esta temperatura de equilibrio,  $T_{fría}$ . Cargue un calorímetro con agua caliente y determine su masa,  $M_{agua\_cal}$ . Monitoree la temperatura de este calorímetro con el termómetro conectado al sistema de adquisición de datos. Es suficiente tomar un dato de temperatura por minuto. Una vez que haya registrado la

variación de la temperatura del agua caliente por unos 15 min. aproximadamente, remueva el cuerpo del agua fría, séquelo rápidamente e intodúzcalo en el vaso del agua caliente y continúe midiendo esta temperatura por otros 20 min. más. En el gráfico resultante observará un descenso de la temperatura debido a la introducción del cuerpo,  $\Delta T$ . Ver Fig. 53.2. Del balance energético, podemos escribir:

$$M_{muestra} c_{muestra} (T_f - T_{fría}) = (M_{agua\_cal} + M_{EA}) c_{agua} \Delta T, \quad (53.9)$$

donde  $c_{muestra}$  es el calor específico de la muestra que deseamos determinar y  $M_{EA}$  es el equivalente en agua del calorímetro con el agua caliente. De la Fig. 53.2 podemos determinar  $\Delta T$  y  $T_f$ .



**Figura 53.2.** Evolución de la temperatura de un volumen de agua caliente cuando se introduce en su interior un cuerpo frío. Las líneas punteadas son extrapolaciones lineales de las tendencias antes y después del cambio producido en el instante  $t_0$ . El salto de temperatura inferido a este instante se toma como  $\Delta T$ .

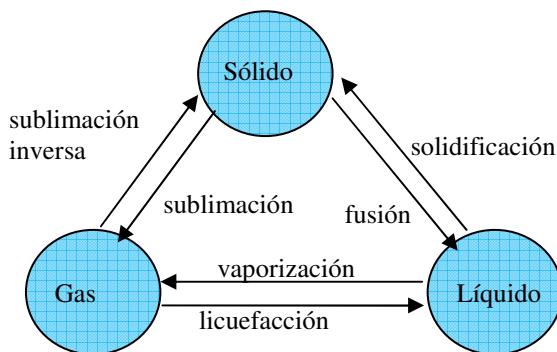
#### Sugerencias de trabajo:

- ✓ Para cada una de las muestras, determine su calor específico usando la Ec.(53.9) y compare los valores que obtenga con valores tabulados para cada una de ellas.

### 53.3 Transiciones de fases

Cuando una sustancia cambia su estado de agregación, por ejemplo de líquido a vapor o de sólidos a líquido, decimos que experimenta una transición de fases. El calor que es liberado o absorbido durante esta transición, a temperatura constante, se denomina calor latente. El concepto de transición de fases es más amplio que el de cambio de estado de agregación, incluyendo otros tipos de transformaciones de la materia, por ejemplo entre distintos estados cristalinos, de paramagnético a ferromagnético, cuando un metal pasa de estado normal a superconductor, etc. La Fig. 53.3 ilustra los cambios de estado de agregación de una sustancia. Para sustancias

simples, estas transiciones ocurren a una temperatura bien definida, que en general depende de la presión.<sup>3,5</sup>



**Figura 53.3** Transiciones de fase de una sustancia, asociadas a cambios en estado de agregación.

En particular, cuando una sustancia sólida se calienta pasa del estado sólido al estado líquido en un proceso denominado *fusión*, que ocurre, para una dada presión, a una *temperatura de fusión*  $T_f$ . De manera similar, si se enfriá el líquido por debajo de  $T_{fus}$ , pasará al estado sólido en un proceso que se denomina *solidificación*. Cuando se calienta un líquido hasta su *temperatura de ebullición*  $T_{eb}$ , el líquido sufre una transición al estado de vapor denominada *vaporización*. De manera inversa, si un vapor que está a temperatura mayor que  $T_{eb}$  se enfriá, pasa al estado líquido y el proceso se denomina *licuefacción*. Otro tipo de transición es la *sublimación*, que es el cambio de estado sólido-vapor, sin pasar por un estado líquido intermedio. En todos estos procesos está involucrada una cantidad de calor que se denomina calor latente de transformación. El calor latente está asociado a la energía requerida para que la sustancia realice el cambio de fase desde un estado a otro. En este capítulo estudiaremos algunos métodos para determinar los calores latentes de vaporización y fusión de una sustancia.

Sustancia	Calor latente de fusión kJ/kg	Punto de fusión °C	Calor latente de vaporización kJ/kg	Punto de vaporización °C
Alcohol etílico	108	-114	855	78,3
Agua	334	0	2260	100
Nitrógeno	12,87	-210	198,9	-197

**Tabla 53.1** – Datos de algunas sustancias simples.

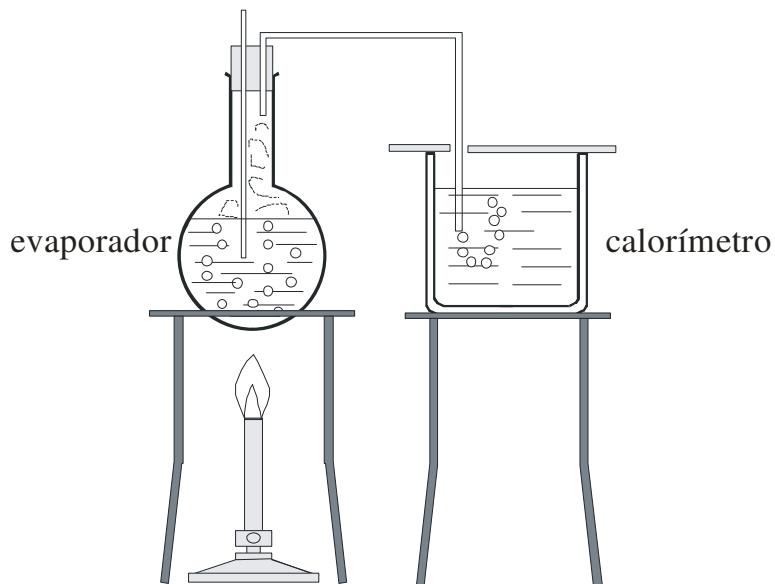
### Proyecto 178. Transición líquido-vapor. Calor latente de evaporación I

**Equipamiento básico recomendado:** Un generador de vapor. Un calorímetro. Un termómetro de vidrio y un sensor de temperatura conectados a una PC, que midan en el rango 0–105°C.

El propósito de este proyecto es medir el calor latente de evaporación  $L_v$  del agua, asociado a la transición líquido-vapor. El calor latente  $L_v$  se define alternativamente como la cantidad de calor  $Q$  que hay que suministrar a una unidad de masa de líquido a la temperatura de ebullición,  $T_{eb}$ , para pasar al estado de vapor, es decir:

$$L_v = \frac{\Delta Q}{\Delta m} \quad \text{a } T = T_{eb}. \quad (53.10)$$

Hay varias maneras de realizar esta determinación. Un diseño clásico se muestra en la Fig.53.4. En este método se usa un dispositivo que genere vapor de agua. Esto puede lograrse con, por ejemplo, una cafetera donde hierva agua y que tenga una manguera de un material resistente al calor para conducir el vapor producido, hasta un calorímetro colocado en su adyacencia. También puede usarse un generador de vapor comercial como los que se usan para humedecer ambientes o los provistos por fabricantes de equipos de laboratorios.<sup>6</sup>



**Figura 53.4.** Diagrama esquemático del experimento de determinación del calor de evaporación del agua.

El vapor generado se conduce hasta el calorímetro que contiene una masa  $M_{agua\_fría}$  de agua fría a la temperatura inicial  $T_{fría}$ . Cuando el vapor se condensa en el agua del calorímetro, la energía calórica del vapor se libera en el agua de dos maneras. Una parte de la energía es aportada por la condensación del vapor a la temperatura  $T_{vapor}$ . Si la masa de vapor condensado es  $M_{vapor}$ , según la Ec. (53.10) este calor es:

$$Q_1 = M_{vapor} L_v. \quad (53.11)$$

La otra parte de la energía la aporta el agua condensada, que baja su temperatura desde la temperatura  $T_{vapor}$  a la temperatura final  $T_f$ , que será la temperatura final de toda el agua en el calorímetro:

$$Q_2 = M_{vapor} c_{agua} (T_{vapor} - T_f), \quad (53.12)$$

donde  $c_{agua}$  es el calor específico del agua. De la conservación de la energía tenemos:

$$M_{vapor} L_v + M_{vapor} c_{agua} (T_{vapor} - T_f) = (M_{agua\_fria} + M_{EA}) c_{agua} (T_f - T_{fria}), \quad (53.13)$$

donde  $M_{EA}$  es el equivalente en agua del calorímetro. De esta expresión podemos obtener  $L_v$  midiendo  $M_{vapor}$ ,  $M_{agua\_fria}$ ,  $T_{fria}$  y  $T_f$ .

### Sugerencias de trabajo:

- ✓ Coloque en el calorímetro aproximadamente 250 cm<sup>3</sup> de agua fría a unos 10°C por debajo de la temperatura ambiente. Mida la masa de esta agua fría y su temperatura inicial,  $M_{agua\_fria}$  y  $T_{fria}$ . Para ello, pese el calorímetro vacío y con el agua fría. Obtenga  $M_{agua\_fria}$  por diferencia.
- ✓ Encienda el generador de vapor y espere que entre en régimen de producción. Mida la temperatura del agua hirviendo,  $T_e$ . Cuando la producción de vapor se estabilice y éste fluya continuamente por unos 5 min. aproximadamente, recién entonces introduzca la manguera de vapor en el calorímetro con el agua fría.
- ✓ Usando un termómetro en el calorímetro, preferentemente conectado a una computadora (aunque esto no es imprescindible), siga la evolución de la temperatura del calorímetro. Cuando la temperatura del agua,  $T$ , suba por sobre la temperatura ambiente una magnitud tal que:

$$T - T_{agua\ fria} \approx T_{amb} - T_{agua\ fria}, \quad (53.14)$$

retire la manguera y deje de aportar vapor. Continúe agitando el agua y registre la temperatura final que alcanza el agua,  $T_f$ .

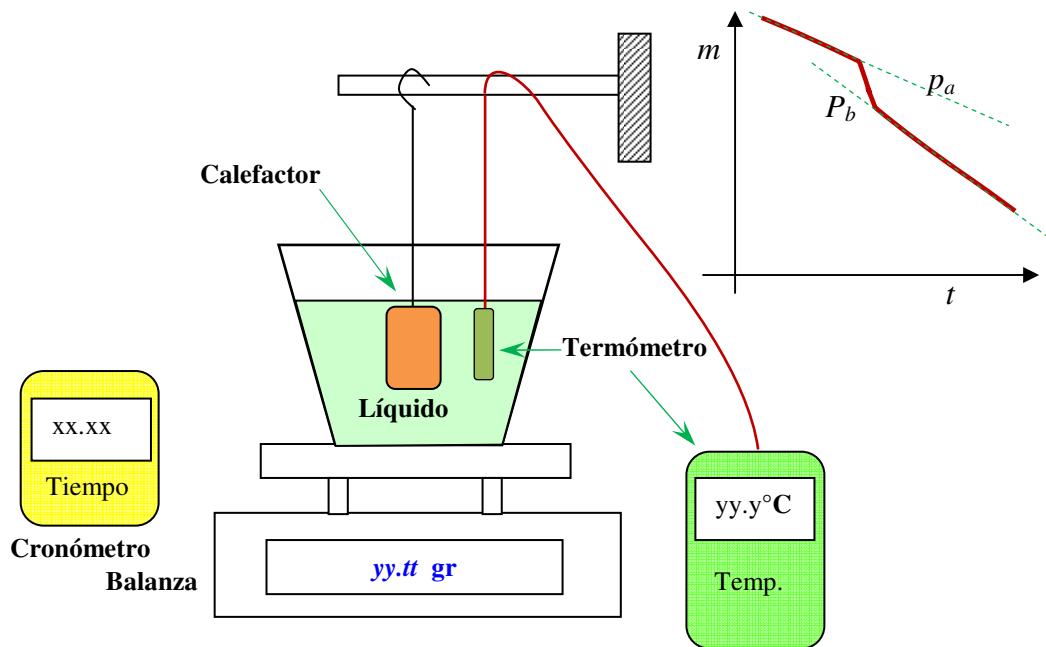
- ✓ Por último, pese nuevamente el calorímetro con el agua. Obtenga por diferencia el valor del agua aportada por la condensación del vapor,  $M_{vapor}$ .
- ✓ Usando la Ec. (53.13) y los valores medidos de masas y temperaturas, obtenga el valor de  $L_v$  para el agua y estime la incertidumbre de la determinación.
- ✓ Compare el valor obtenido con el valor de tabla de  $L_v$  para la misma temperatura  $T_{eb}$  que midió en el generador de vapor.

## Proyecto 179. Transición líquido-vapor. Calor latente de evaporación II

**Equipamiento básico recomendado:** Un calorímetro. Un sensor de temperatura que mida en el rango 0–105°C. Una balanza electrónica con sensibilidad de 1 g o mejor y rango de unos 600 g aproximadamente. Un cronómetro. Un calefactor eléctrico de inmersión o resistencia eléctrica de potencia. Un medidor de potencia eléctrica.

El propósito de este proyecto es medir el calor latente de evaporación  $L_v$  del agua, nitrógeno u otro líquido no inflamable. El arreglo experimental se ilustra en la Fig. 53.5. Básicamente el experimento consiste en medir la variación de masa del líquido, cuando se enciende el calefactor eléctrico y entra en ebullición. En primer lugar ilustramos este arreglo para el caso en que tengamos nitrógeno líquido ( $NL$ ). La idea es caracterizar la potencia de la resistencia calefactora que se introduce en el líquido. Para el caso de  $NL$ , suponemos que inicialmente tenemos unos 250 g de este líquido, y usamos una

resistencia de  $10 \Omega$  y  $10 \text{ W}$ . Midiendo la caída de tensión en ésta y la corriente que circula por ella, podemos conocer la potencia  $P_R$  suministrada a la resistencia. En el caso del *NL*, hay una tasa de evaporación debida al flujo de calor del medio ambiente, caracterizada por la pendiente  $p_a$  de la masa como función del tiempo, antes de encender la calefacción. La tasa de evaporación, una vez encendida la calefacción, vendrá dada por la diferencia de pendientes ( $p_a - p_b$  ).



**Figura 53.5.** Arreglo experimental para medir el calor latente de evaporación de un líquido. En el inserto superior derecho vemos un diagrama esquemático de la variación de la masa como función del tiempo, antes y después de encender el calefactor.

De este modo podemos asociar la tasa de evaporación  $dm/dt = (p_a - p_b)$  con la energía suministrada por la resistencia, es decir:

$$\frac{dm}{dt} L_v = (p_a - p_b) L_v = P_R, \quad (53.15)$$

de donde, midiendo las pendientes antes ( $p_a$ ) y después ( $p_b$ ) de encender el calefactor, y la potencia del calefactor ( $P_R$ ), podemos estimar  $L_v$ . Para determinar estas pendientes, lo que se mide es la variación de la masa (balanza) como función del tiempo (cronómetro). El termómetro sirve para determinar cuándo el líquido comienza a hervir. Esta técnica también puede usarse para el agua. En este caso, la pendiente  $p_a=0$ . Al mismo tiempo, el calefactor debe ser del orden de  $0,5 \text{ kW}$ , para tener una tasa de evaporación del orden de  $10 \text{ g}$  por minuto. En este caso, para medir la potencia del calefactor de inmersión es conveniente usar un medidor de potencia, wattómetro, que habitualmente se usa para medir potencias de artefactos domésticos.

#### Sugerencias de trabajo:

- ✓ **Caso de NL:** Coloque en el calorímetro aproximadamente  $250 \text{ cm}^3$  de nitrógeno líquido.

- ✓ Usando una resistencia de  $10 \Omega$  y  $10 \text{ W}$ , regule la corriente en la resistencia de modo que entregar unos  $10 \text{ W}$ . Determine esta potencia  $P_R$  con la mayor precisión posible y su incertidumbre.
- ✓ Mida la masa del  $NL$  como función del tiempo, a una tasa de aproximadamente una cuarta por minuto. Mida la variación de masa como función del tiempo por unos 15 min. sin hacer pasar corriente por el resistor. Una vez que la pendiente  $p_a$  quede bien definida, encienda la corriente en el resistor y mida la masa en función de  $t$  por otros 15 ó 20 min. Construya un gráfico y determine  $p_a$  y  $p_b$ , así como sus incertidumbres.
- ✓ Usando la Ec. (53.15) obtenga el valor de  $L_v$  para el  $NL$  y estime la incertidumbre de la determinación.
- ✓ Compare el valor obtenido con el valor de tabla de  $L_v$  para el  $NL$ .
  
- ✓ **Caso del agua:** Coloque en el calorímetro aproximadamente  $300 \text{ cm}^3$  de agua caliente, a una temperatura cercana a la ebullición.
- ✓ Use una resistencia capaz de entregar unos  $500 \text{ W}$  o una potencia de este orden de magnitud. De ser necesario, puede regular la tensión de entrada usando un Variac. Determine esta potencia  $P_R$  con un wattómetro o midiendo la corriente y la tensión. Estime su incertidumbre. Sea cuidadoso con este tipo de resistencia, pues en general trabaja a tensiones próximas a las tensiones de línea y se sumerge en agua. De ser posible, use un calentador de agua que opere a baja tensión y evite el contacto eléctrico con el agua.
- ✓ Mida la masa del agua como función del tiempo a una tasa de aproximadamente una cuarta por minuto. Después de unos 15 min. sin hacer pasar corriente por el resistor, encienda la fuente de alimentación para que circule corriente por la resistencia, al mismo valor medido ( $P_R$ ) previamente. Cuando el agua comience a hervir, registre el tiempo y la temperatura del agua. Continúe midiendo la masa del agua como función del tiempo por unos 20 min. más o hasta que el agua remanente deje de cubrir totalmente el resistor. De este gráfico determine  $p_b$  y su incertidumbre
- ✓ Usando la Ec. (53.15) obtenga el valor de  $L_v$  para el *agua* y estime la incertidumbre de la determinación.
- ✓ Compare el valor obtenido con el valor correspondiente de tabla.

## Proyecto 180. Transición sólido–líquido. Calor latente de fusión

**Equipamiento recomendado:** Un termómetro de vidrio con rango de medición entre  $-5^\circ\text{C}$  y  $100^\circ\text{C}$  y un reloj. Un recipiente de agua de unos 250 ml. Una cantidad similar de hielo. Una balanza que aprecie 0,1 g.

El propósito de este experimento es medir el calor latente de fusión  $L_{fus}$  del agua, es decir, la cantidad de calor  $Q$  necesaria para que un gramo de hielo, a la temperatura de fusión  $T_{fus}$  pase al estado líquido a la misma temperatura. Este experimento es similar al del Proyecto 175, excepto que esta vez usaremos hielo, que mezclaremos con el agua líquida contenida en un calorímetro. Si mezclamos una masa  $M_{hielo}$  de hielo con una

masa  $M_{agua}$  de agua líquida que se encuentre a una temperatura  $T_{cal}$  mayor que la temperatura ambiente, ésta le entregará una cantidad de calor al hielo que lo fundirá y, una vez líquido, lo calentará hasta una temperatura final de mezcla  $T_f$ . Si aplicamos el principio de conservación de la energía a este proceso, tenemos:

$$M_{hielo} L_{fus} + M_{hielo} c_{agua} (T_f - T_{hielo}) = (M_{agua\ cal} + M_{EA}) c_{agua} (T_{cal} - T_f), \quad (53.16)$$

donde el primer término es el calor que recibe el hielo para fundirse a  $T_{hielo} = T_{fus}$  y calentarse hasta  $T_f$ . El segundo término es el calor que entrega el agua para fundir el hielo, y llegar a la temperatura final,  $T_f$ . Como siempre,  $M_{EA}$  es el equivalente en agua del calorímetro. De esta expresión puede obtenerse el valor de  $L_{fus}$  para el agua.

### Sugerencias de trabajo:

- ✓ Coloque en el calorímetro aproximadamente 250 cm<sup>3</sup> de agua a una temperatura unos 20 °C por encima de la temperatura ambiente. Coloque el hielo en otro recipiente. Para medir  $T_{fus}$  puede mezclar el hielo con agua fría y esperar a que exista equilibrio térmico en esta mezcla, *sin que se funda totalmente el hielo*. Esta mezcla en equilibrio estará a la temperatura  $T_{fus}$  que puede medirse con un termómetro sumergido en el agua.
- ✓ Mida la masa de agua  $M_{agua\ cal}$  colocada en el calorímetro y también su temperatura  $T_{cal}$ .
- ✓ Mida la temperatura del hielo,  $T_{hielo} = T_{fus}$ .
- ✓ Proceda a agregar lentamente pequeños trozos de hielo en el agua mientras la agita continuamente. Trate de que sea sólo hielo lo que agrega; para esto es conveniente que escurra el exceso de agua líquida de cada trozo de hielo antes de agregarlo al calorímetro. Mida la evolución de la temperatura de la mezcla. Puede ser útil usar un termómetro conectado a una PC para tener una lectura continua. Cuando la temperatura de la mezcla  $T$  sea tal que:

$$T_{amb} - T \approx T_{cal} - T_{amb}, \quad (53.17)$$

y todo el hielo esté fundido, mida la temperatura final de la mezcla (ahora todo es agua líquida),  $T_f$ .

- ✓ Pese el calorímetro para determinar por diferencia la masa de hielo agregado,  $M_{hielo}$ .
- ✓ Usando la Ec.(53.16) obtenga el valor de  $L_{fus}$  para el agua y estime su incertidumbre. Compare el valor obtenido con el valor correspondiente de tabla.

### Referencias

- 
- <sup>1</sup> D. Halliday, R. Resnik y J. Walker, *Física para Estudiantes de Ciencias e Ingeniería*. 4ta. Ed. (Trad. de Fundamentals of Physics – John Wiley & Sons, Inc. New York 1993).
  - <sup>2</sup> D. C. Giancoli, *Física - Principios con aplicaciones* - Prentice Hall México 1997 (Trad. de Physics, Principles and Applications 4/E – Prentice Hall. New York 1995).
  - <sup>3</sup> M. W. Zemansky, *Calor y termodinámica* (Aguilar, Madrid, 1973).
  - <sup>4</sup> C. R. Mattos and A. Gaspar, “Introducing Specific Heat Through Cooling Curves,” Phys. Teach. **40**, 415 (2002).
  - <sup>5</sup> S. Glasstone, *Termodinámica para químicos*, Ed. Aguilar, Madrid 1978.

---

<sup>6</sup>Pasco, Roseville, CA 95747 USA, www.pasco.com

# Capítulo 54

## Gases ideales - Determinación del peso molecular

### Objetivos

- ✓ Gases ideales
- ✓ Densidad de gases
- ✓ Peso molecular del aire
- ✓ Peso molecular del butano

El objetivo de este capítulo es revisar las propiedades de los gases ideales y discutir algunas técnicas de determinación del peso molecular y de la densidad de un gas. Para ello proponemos estudiar cómo varía la presión de un gas con el número de moléculas presentes (masa) a volumen y temperatura constantes. Estos experimentos nos permiten poner a prueba cuan adecuada resulta la ecuación de estado de los gases ideales para describir observaciones reales.

### zz. 1 Gases ideales

La mayoría de los gases reales a presiones moderadas ( $P \leq 5$  bar) y temperaturas no muy altas ( $T \leq 1000$  K) tienen un comportamiento similar, que puede ser descrito por la ecuación de estado de los *gases ideales*,<sup>1,2</sup>

$$PV = nRT, \quad (54.1)$$

aquí,  $n$  es el número de moles del gas,  $V$  es el volumen,  $P$  es su presión absoluta,  $T$  es la temperatura absoluta (en Kelvin) y  $R$  es la constante universal de los gases.<sup>‡</sup> A su vez, el número de moléculas en el gas,  $N$ , se relaciona con  $n$  mediante:

$$N = nN_A, \quad (54.2)$$

donde  $N_A$  ( $=6.022 \times 10^{23}$  1/mol) es el número de Avogadro. Por su parte, la densidad  $\rho$  de un gas, o sea, su masa por unidad de volumen se puede escribir como:

$$\rho = nM_R/V = M_R \frac{P}{RT}, \quad (54.3)$$

donde  $M_R$  es la masa molecular del gas. Es importante tener en cuenta que la presión que miden los manómetros convencionales es la presión manométrica,  $P_m$ , o sea relativa a la presión atmosférica o barométrica,  $P_{bar}$ . La presión absoluta  $P$  que interviene en las Ecs.(54.1) y (54.3) es:

$$P = P_m + P_{bar}. \quad (54.4)$$

En muchos casos se trabaja con gases que son mezclas de varias componentes simples. Por ejemplo, el aire está compuesto de  $N_2$  (78,08%),  $O_2$  (20,946%),  $Ar$  (0,946%),  $CO_2$  (0,35%), y otras trazas. En estos casos, la presión total del gas es la suma de las presiones parciales y el peso molecular y la densidad se obtienen de un promedio pesado de sus componentes, esto es:

<sup>‡</sup> La constante universal de los gases se puede expresar en términos de la Constante de Boltzmann,  $k_B$ , y el Número de Avogadro,  $N_A$ .  $R=N_A \cdot k_B=0,082057$  atm.l/mol.K= $8,3145$  J/mol.K.

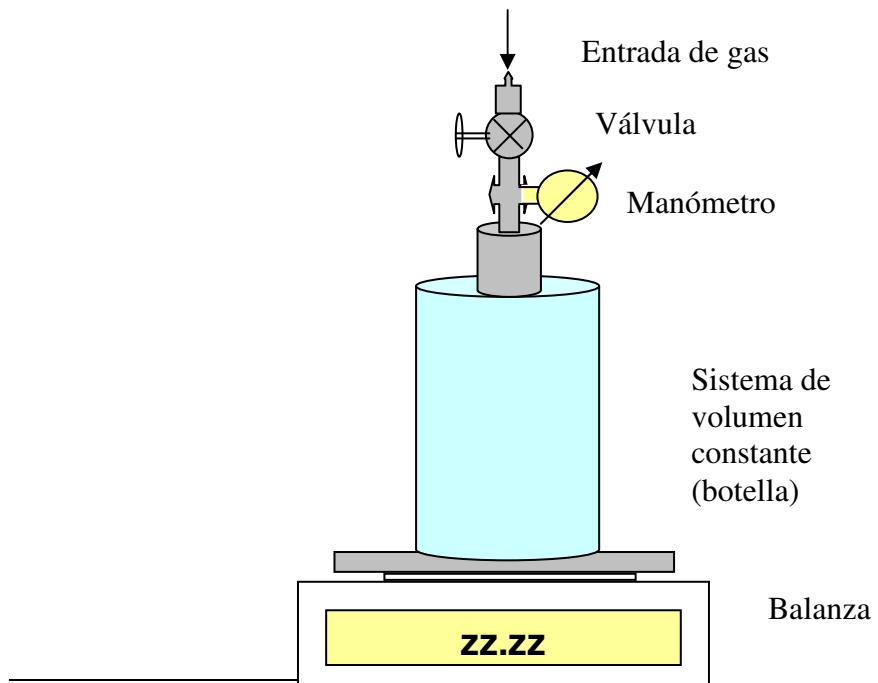
$$M_R(\text{aire}) = q_{N_2} M_R(N_2) + q_{O_2} M_R(O_2) + q_{Ar} M_R(Ar) + \dots , \quad (54.5)$$

donde  $q_{N_2}$  es la fracción molar del  $N_2$ ,  $q_{O_2}$  es la fracción molar del  $O_2$ , y así sucesivamente. De este modo, el peso molecular del aire seco resulta aproximadamente 28,84 g/mol.

### Proyecto 181. *Peso molecular del aire*

**Equipamiento recomendado:** Balanza de precisión de rango 300 g o más y sensibilidad 0,1 g o mejor. Un recipiente de aproximadamente 2 litros con manómetro y válvula para presurizar. Una bomba o inflador para presurizar aire o tubos presurizados que contengan gases como aire,  $N_2$ , He o  $CO_2$ .

En este experimento nos proponemos medir la densidad del aire por un método casi directo, esto es, medir su masa y su volumen. En la Fig. 54.1 se muestra un diagrama esquemático del dispositivo propuesto para la determinación del peso molecular y de la densidad del aire.<sup>3</sup> El diseño experimental consiste en una botella de plástico (de soda o gaseosa), preferiblemente de paredes rígidas, de modo que su volumen no varíe apreciablemente al presurizarla. Una botella de aproximadamente 2 litros es adecuada. También se requiere un manómetro que nos permita medir la presión interior. El manómetro puede ser del tipo de Bourdon o simplemente un manómetro para neumáticos de auto. Es necesario disponer de un mecanismo para presurizar la botella hasta aproximadamente 3 atm,<sup>§</sup> una presión que está por debajo de la presión de rotura de la botella. Si se desea experimentar con aire, para introducirlo en la botella puede usarse aire comprimido de un compresor o una bomba manual para inflar neumáticos. Si el gas fuera otro, como por ejemplo  $N_2$ , He o  $CO_2$ , debería contarse con tubos (tanques) con estos gases comprimidos y tener cuidado con el uso de las válvulas de estos sistemas presurizados en la maniobra de llenado de la botella.



<sup>§</sup> La presión se mide en pascales (Pa), bares (bar) o atmósferas entre otras unidades. 1 bar = 0,987 atm =  $10^5$  Pa = 1,0197 kg/cm<sup>2</sup> = 14,50377 PSI.

**Figura 54.1.** Diagrama esquemático del dispositivo experimental.

**NOTA:** Previo al inicio del experimento, presurice la botella hasta unas 4 atm, usando una barrera protectora y antiparras. Una vez que haya verificado que la botella resiste esta presión, continúe con el experimento. Si desea mayor protección puede usar una malla protectora de tela rodeando la botella. Para retener el gas en el interior es necesario contar con una válvula (unidireccional) como la de neumático de auto o de bicicleta. Para despresurizar usar una llave de paso o simplemente afloje levemente la tapa.

El objetivo de este experimento es medir la masa del gas en el interior de la botella como función de la presión del gas en su interior. Para medir la masa se puede usar una balanza, preferiblemente electrónica, con sensibilidad 0,1 g o mejor. También necesitamos conocer el volumen  $V_0$  total de la botella (incluyendo las conexiones y válvula). Para ello se puede llenar con agua y pesar antes y después de colocar el agua. Conociendo la densidad del agua podemos calcular el volumen  $V_0$ .

Llamamos  $T_0$  a la temperatura (absoluta) ambiente donde se realiza el experimento y que se tomará como la temperatura del gas. A la masa del gas a presión atmosférica ( $P_{bar}$ ) la designamos con  $m_0 = m_{gas}(P_{bar})$ . En este experimento medimos la masa del gas,  $m_{gas}(P_m)$ , como función de la presión manométrica,  $P_m$ . Cuando trabajamos con masas de aire, es importante tener en cuenta el empuje del aire. Como vimos en el Cap. 7, el empuje del aire puede escribirse como  $E = m_E \cdot g$ , donde  $m_E$  representa la masa equivalente del empuje,

$$m_E = E/g = \rho_{aire}^0 V_0, \quad (54.6)$$

aquí  $\rho_{aire}^0$  es la densidad del aire a la presión barométrica. Si  $M_{Bot}$  representa la masa del sistema: la botella con manómetro, válvula y gas; a la presión  $P_m$ , tenemos:

$$m_{Sistema}(P_m) = M_{Bot} + m_{gas}(P_m) - m_E. \quad (54.7)$$

Definimos:

$$\Delta m(P_m) = m_{Sistema}(P_m) - m_{Sistema}(P_m = 0) = m_{gas}(P_m). \quad (54.8)$$

Es decir,  $\Delta m(P_m)$  representa la variación de masa de la botella presurizada a  $P_m$  respecto del mismo sistema a  $P_m = 0$ . Nótese que al hacer esta diferencia el empuje del aire se cancela, o sea:

$$\Delta m(P_m) = m_{gas}(P) - m_{gas}(P_{bar}) = M_R(V_0/R.T_0)(P - P_{bar}) = M_R(V_0/R.T_0).P_m. \quad (54.9)$$

Usando la Ec.(54.1) podemos escribir:

$$n = m_{gas}(P)/M_R = (P.V_0/R.T_0), \quad (54.10)$$

o también:

$$m_{gas}(P_m) = \Delta m(P_m) = M_R \left( \frac{V_0}{R.T_0} \right) \cdot P_m. \quad (54.11)$$

Por lo tanto, si graficamos  $\Delta m(P_m)$  en función de  $P_m$ , de ser válida la Ec.(54.1), se espera una relación lineal. La pendiente de esta recta permite calcular la masa molecular del gas,  $M_R$ . Por otro lado, de la Ec.(54.10) tenemos:

$$\rho_{aire}^0 = \frac{m_0}{V_0} = \frac{M_R}{RT_0} \cdot P_{bar}. \quad (54.12)$$

O sea, que conociendo la presión barométrica podemos estimar la densidad del aire a la presión barométrica del laboratorio. Si no se dispone de un barómetro localmente, puede usar los datos del servicio meteorológico más próximo. En general, los datos de presión atmosférica y temperatura se difunden por Internet.

### Sugerencias de trabajo:

- ✓ Usando un arreglo experimental como el indicado en la Fig.54.1, mida la variación de  $\Delta m(P_m)$  como función de  $P_m$ , para  $0 \leq P_m < 3$  atm. Construya un gráfico de  $\Delta m(P_m)$  como función de  $P_m$ . Evalúe y discuta su linealidad.
- ✓ De ser este gráfico consistente con una relación lineal, determine su pendiente y su correspondiente incertidumbre, Ver Cap.7 y Apéndice C.
- ✓ A partir de sus resultados, determine la masa molecular del aire  $M_R$  y su densidad  $\rho_{aire}^0$ . Estime las incertidumbres en estos resultados.
- ✓ Compare sus resultados experimentales con los valores de tabla, a la temperatura de trabajo,  $T_0$ .
- ✓ Determine analíticamente la masa molecular (promedio) del aire y su densidad a temperatura y presión ambiente, Ec.(54.5). Compare este valor con los obtenidos experimentalmente y los de tabla.
- ✓ ♣♣ Si dispone de otro gas, por ejemplo He, N<sub>2</sub> o Ar, realice el mismo experimento con ellos. Procure purgar cuidadosamente su sistema, de modo que minimice la contaminación del aire.
- ✓ ♣♣ Compare sus resultados experimentales con los valores correspondientes de tabla.

### Proyecto 182. *Medición del peso molecular del butano*

**Equipamiento recomendado:** Balanza de precisión de rango 300 g o más y sensibilidad 0,1 g o mejor. Un recipiente con agua, balde, de aproximadamente 5 litros. Una probeta de aproximadamente 1 litro, transparente. Un encendedor descartable a gas butano, de plástico.

El objetivo de esta experiencia consiste en determinar la masa molecular  $M_R$  y la densidad del gas butano contenido en un encendedor comercial a gas descartable. El butano a temperatura ambiente es un vapor y puede ser licuado por simple compresión.<sup>4,5,6</sup> Su punto de ebullición a presión atmosférica es de  $\sim 0^\circ\text{C}$  y su temperatura crítica es de  $152^\circ\text{C}$ . Cuando el butano está a presiones cercanas a la presión atmosférica y a temperatura ambiente,  $T > 10^\circ\text{C}$ , sus propiedades pueden ser descritas por la ecuación de estado de los gases ideales, Ec.(54.1). A presión y temperatura constantes, Ec.(54.10), el volumen del gas es proporcional a su masa. Si el butano obedece a la Ec. (54.1), graficando  $m_{gas}(P_{bar})$  en función del volumen  $V$ , a la presión barométrica  $P_{bar}$  y temperatura ambiente  $T_0$ , esperamos una relación lineal:

$$m_{gas}(P_{bar}) = M_R(P_{bar}/R.T_0) \cdot V, \quad (54.13)$$

cuya pendiente vendrá dada por  $k = M_R(P_{bar}/RT_0)$ , de donde podremos obtener  $M_R$ .

Para la realización de este experimento se propone usar un encendedor de gas descartable como fuente de butano, una probeta graduada de aproximadamente 1 litro y con una apreciación de 10 ml o mejor, y una balanza digital con una apreciación de 0,1 g o mejor, ver Fig.54.2.

La presión atmosférica puede medirse con un barómetro u obtenerse del servicio meteorológico local y la temperatura ambiente  $T_0$  se mide con un termómetro común, pero expresada en Kelvin,  $T(K) = T(^\circ C) + 273,15$ .



**Figura 54.2.** Elementos necesarios para este experimento: probeta, encendedor descartable a gas y balanza.

Se sugiere llenar completamente la probeta con agua y colocarla cuidadosamente invertida dentro de un recipiente mayor, con agua hasta la mitad, como se indica esquemáticamente en la Figura 54.3. Seguidamente, se introduce el encendedor, previamente pesado, en el interior del agua y se oprime la llave de paso para que salga butano.

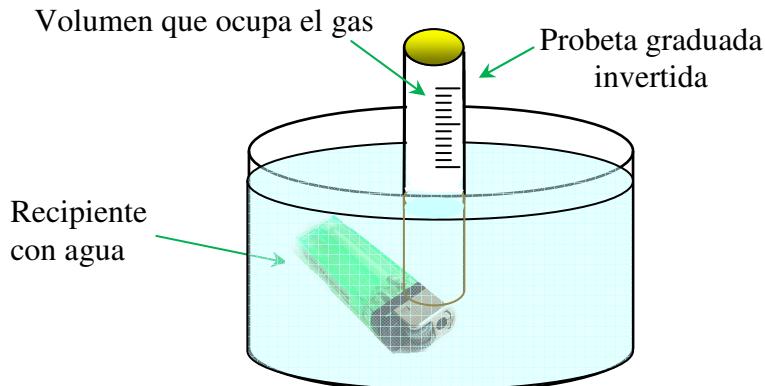
El gas debe burbujejar dentro de la probeta invertida. Cuando se haya desplazado un volumen del orden de  $\frac{1}{2}$  litro, que pueda medirse fácilmente, se retirar el encendedor del agua. Desplace con cuidado y verticalmente la probeta hasta que los niveles del agua en su interior y exterior queden nivelados. En estas condiciones podemos asegurar que la presión dentro de la probeta es igual a la presión exterior, o sea, la presión atmosférica  $P_{bar}$ . En esta situación, determine el volumen,  $V$ , del gas en la probeta.

Seguidamente, seque lo mejor posible el encendedor y vuelva a pesarlo. Para secarlo puede usar un secador de pelo o un trozo de papel toalla. Por diferencia de pesadas, obtenga la masa de gas faltante,  $m_{gas}$ . Esta masa de gas es la que quedó dentro de la probeta. Para minimizar las incertidumbres de medición de las masas, es conveniente medirlas unas cuantas veces, del orden de 3 ó 5 veces, tanto antes de introducir el encendedor al agua como también luego de secarlo. Evite liberar gas del encendedor al realizar estas muletillas. El promedio de estas mediciones de masa disminuye los errores estadísticos en la determinación. De la Ec.(54.13) tenemos:

$$M_R = \frac{m_{gas}}{P_0 \cdot V} R \cdot T_0, \quad (54.14)$$

donde  $m$  corresponde a la disminución del peso del encendedor,  $V$  designa al volumen de agua desplazada por el gas y  $T_0$  es la temperatura ambiente en Kelvin. El valor de  $P_0$  es la presión barométrica del gas corregida por la presión del vapor de agua:

$$P_0 = P_{bar} - P_{vapor\ agua}(T_0). \quad (54.15)$$

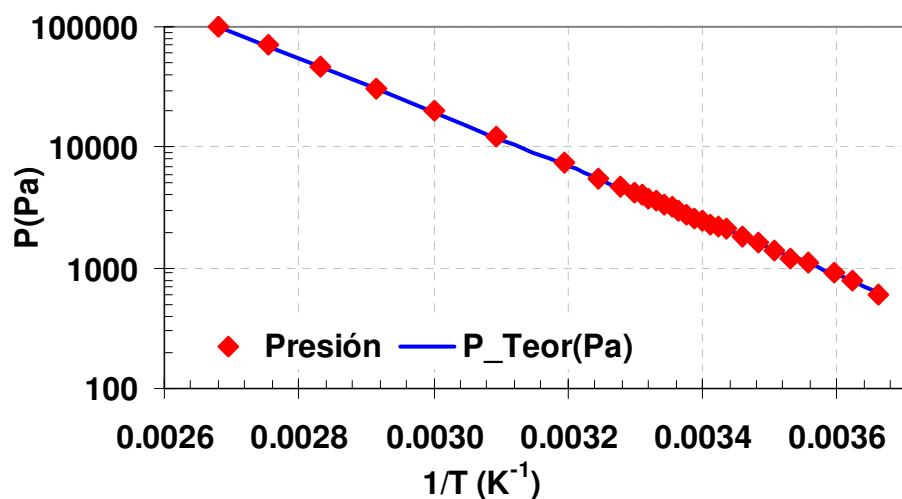


**Figura 54.3.** Dispositivo para medir el volumen de agua desplazado por el gas.

Aquí,  $P_{vapor\ agua}(T_0)$  es la presión del vapor de agua a la temperatura de trabajo,  $T_0$ . El valor de la presión de vapor puede obtenerse de tablas, o también puede calcularse usando la ecuación de Clausius-Clapeyron.<sup>4,6</sup>

$$P_{vapor}(T) = P_{00} \exp\left(\frac{L_v}{R}\left[\frac{1}{T} - \frac{1}{T_{00}}\right]\right) = P_{00} \exp\left(\beta \cdot \left[\frac{1}{T} - \frac{1}{T_{00}}\right]\right), \quad (54.16)$$

donde  $P_{00}$  es la presión de vapor a la temperatura  $T = T_{00}$ .  $L_v$  representa el calor latente de vaporización del agua por mol. La Figura 54.4 muestra en un gráfico semilogarítmico la calidad con que esta expresión describe los datos de la presión de vapor del agua.



**Figura 54.4.** Presión de vapor del agua en kPa como función de la inversa de la temperatura absoluta, para temperaturas comprendidas entre 0 °C y 370 °C. Los símbolos representan los datos medidos de la presión de vapor y la línea de tendencia la predicción de la ecuación de Clausius-Clapeyron, con los parámetros  $P_{00}=101,3$  kPa,  $T_{00}=273,15\text{K}$ ,  $\beta=5160\text{ K}$  y  $L_v=42,9\text{ kJ/mol}$ . Los datos experimentales fueron tomados de la Ref.(7).

## Sugerencias de trabajo:

- ✓ Una vez medidos los volúmenes de gas para varias masas de gas usadas, realice un gráfico de la masa del gas  $m_{gas}$  en función del volumen  $V$ . ¿Es la relación entre las variables  $m_{gas}$  y  $V$  lineal? Si lo es, determine la pendiente  $k_{pen}$  de este gráfico y su incertidumbre.
- ✓ Mida la temperatura del agua y use ese valor como la temperatura  $T_0$  del gas. A partir de sus mediciones y de la Ec. (54.14) determine la masa molecular del butano:

$$M_R = \frac{k_{pen}RT_0}{P_0}. \quad (54.17)$$

- ✓ A partir de sus mediciones y de la determinación de la pendiente  $k_{pen}$  obtenida con el método de cuadrados mínimos, estime el mejor valor de  $M_R$  y su incertidumbre.
- ✓ Compare el valor obtenido para  $M_R$  con el valor esperado a partir de la fórmula química del butano: C<sub>4</sub>H<sub>10</sub>. ¿Qué puede concluir de este método de estimación de la masa molecular de este gas o vapor?
- ✓ Determine la densidad del butano y estime su correspondiente error. Compare su valor con los correspondientes de tabla para el butano en las mismas condiciones de medición.

## Referencias

- 
- <sup>1</sup> M. Zemansky, *Calor y termodinámica*, Bilbao, Ed. Aguilar (1964), p. 136–138.
  - <sup>2</sup> F. Sears, M. Zemansky, Fredman y Young, *Física universitaria*, vol. 1, 9a edición, México, 1999.
  - <sup>3</sup> J. Houser, D. Johnson and P. Siegel "Getting pumped up on the ideal gas law", *Phys. Teach.* **40**, 396 (2002).
  - <sup>4</sup> R. Chang, *Química*, Cap.5 (El estado gaseoso), 1<sup>a</sup> edición en español, MacGraw-Hill, México (1992).
  - <sup>5</sup> Butano en Wikipedia: <http://es.wikipedia.org/wiki/Butano>
  - <sup>6</sup> S. Glasstone, *Termodinámica para Químicos*, Aguilar, Madrid (1970). (Trad. de: Thermodynamics for Chemist, 5th Ed., Van Nostrand Co., N.Y., 1947).
  - <sup>7</sup> <http://intro.chem.okstate.edu/1515sp01/database/vpwater.html>

# Capítulo 55

## Teoría cinética de los gases - Relación de calores específicos para gases ideales

El objetivo de este capítulo es estudiar experimentalmente algunas consecuencias de la teoría cinética de los gases. En particular, buscamos determinar el cociente de la relación de los calores específicos a presión ( $C_p$ ) y volumen constante ( $C_v$ ) para el aire y otros gases. Para gases ideales este cociente puede calcularse por medio de la teoría cinética de los gases. Por lo tanto, este experimento permite poner a prueba un resultado importante de esta teoría y muestra cómo las propiedades moleculares tienen directa influencia en propiedades macroscópicas de un gas, como su compresibilidad. Asimismo, este experimento ilustra cómo el cociente  $\gamma=C_p/C_v$  determina las propiedades de compresibilidad de un gas.

### Objetivos

- ✓ Calores específicos de gases ideales
- ✓ Relación  $C_p/C_v$
- ✓ Experimento de Clement-Desormes
- ✓ Experimento de Rüchardt

### 55. 1 Teoría cinética y capacidad calorífica de gases ideales

Como vimos en el capítulo anterior, la mayoría de los gases reales a presiones moderadas ( $P \leq 5$  bar) y temperaturas no muy altas ( $T \leq 1000$  K) tienen un comportamiento similar, que se puede describir por la ecuación de los *gases ideales*.<sup>1,2</sup>

$$\frac{PV}{T} = k_B N, \quad (55.1)$$

donde  $k_B$  es una constante universal conocida como la constante de Boltzmann,  $k_B = 1,38 \times 10^{-23}$  J/K,  $N$  es el número de moléculas en el volumen  $V$ ,  $P$  es su presión total y  $T$  es la temperatura absoluta (en Kelvin). La teoría cinética de los gases fue desarrollada originalmente con el fin de dar una explicación microscópica de la ecuación de estado de los gases ideales, y fue una de las primeras teorías moleculares que dieron cuenta en forma cuantitativa de resultados experimentales. Las hipótesis básicas de esta teoría son:

- Los gases están constituidos de moléculas que están en constante movimiento y que chocan elásticamente entre ellas y con las paredes del recipiente que las contiene.
- La presión sobre las paredes se debe a estas colisiones.

Para poder establecer esta conexión entre las propiedades mecánicas de las moléculas, la teoría cinética introduce el *principio de equipartición de la energía*. Este principio asocia a cada grado de libertad de las moléculas una energía media igual a  $1/2 k_B T$ . De este modo, para una molécula con  $f$  grados de libertad tendremos una energía interna por mol,  $U$ :

$$U = \frac{f}{2} \cdot N_A \cdot k_B \cdot T = \frac{f}{2} \cdot R \cdot T. \quad (55.2)$$

En particular; para moléculas diatómicas tendremos 5 grados de libertad (3 de traslación y 2 de rotación). La *energía interna* por mol de este tipo de moléculas será:<sup>1</sup>

$$U = \frac{5}{2} \cdot R \cdot T . \quad (55.3)$$

La capacidad calorífica molar a volumen constante se define como,  $C_V = (\partial U / \partial T)_{V,mol}$ . Por lo tanto:<sup>2</sup>

$$C_V = \frac{f}{2} \cdot R . \quad (55.4)$$

Asimismo, la capacidad calorífica molar a presión constante,  $C_p$ , es el calor necesario para incrementar en un grado Kelvin la temperatura de un mol de gas a presión constante. Se demuestra<sup>1,2</sup> que para gases ideales se cumple que:

$$C_p = C_V + R = \left(1 + \frac{f}{2}\right) \cdot R . \quad (55.5)$$

El coeficiente adiabático  $\gamma = C_p / C_v$ , según la teoría cinética de los gases ideales, viene dado por:

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} = 1 + \frac{2}{f} \quad y \quad f = \frac{2}{\gamma - 1} . \quad (55.6)$$

El coeficiente  $\gamma$  se denomina “*coeficiente adiabático del gas*”. Por lo tanto, si somos capaces de medir  $C_v$ ,  $C_p$  o  $\gamma$ , tenemos un modo directo de comparar las predicciones de la teoría cinética con resultados experimentales.

Cuando un gas realiza un proceso en el que no hay intercambio de calor entre el gas y el medio que lo rodea, decimos que realiza un proceso adiabático. Para un gas ideal, que realiza un proceso adiabático reversible, su trayectoria en el plano  $PV$  se puede describir por la *ecuación de Poisson*:<sup>1,2</sup>

$$PV^\gamma = \text{Constante} , \quad (55.7)$$

donde el exponente  $\gamma$  es el *coeficiente adiabático del gas*. Para un gas monoatómico, cuya molécula tiene solamente tres grados de libertad translacionales,  $f = 3$  y  $\gamma = 5 / 3 = 1,66$ . Para un gas diatómico,  $f = 5$  ya que las moléculas diatómicas tienen tres grados de libertad translacionales y dos rotacionales, por lo que resulta  $\gamma = 7 / 5 = 1,4$ .

Hay muchos experimentos que permiten medir el coeficiente adiabático de un gas.<sup>1,3,4</sup> De hecho, en los capítulos 11 y 41, cuando medíamos la velocidad del sonido, indirectamente estábamos determinando  $\gamma$ . En este capítulo discutiremos dos técnicas experimentales: el método de Clement-Desormes y el de Rüchardt, para determinar el cociente entre los calores específicos de un gas.<sup>1,5</sup> Aquí presentamos las versiones modernizadas de estos experimentos,<sup>4,5</sup> usando un sensor de presión conectado a un sistema de adquisición de datos. El experimento de Rüchardt nos permitirá integrar conceptos de mecánica estudiados previamente (oscilaciones libres y amortiguadas) con conceptos de termodinámica (calor específico, procesos termodinámicos) mediante un experimento simple y a la vez vistoso y elegante. Asimismo, este capítulo ilustra con dos ejemplos, los múltiples e interesantes experimentos de termodinámica que pueden realizarse usando una jeringa conectada a un sensor de presión.<sup>6</sup>

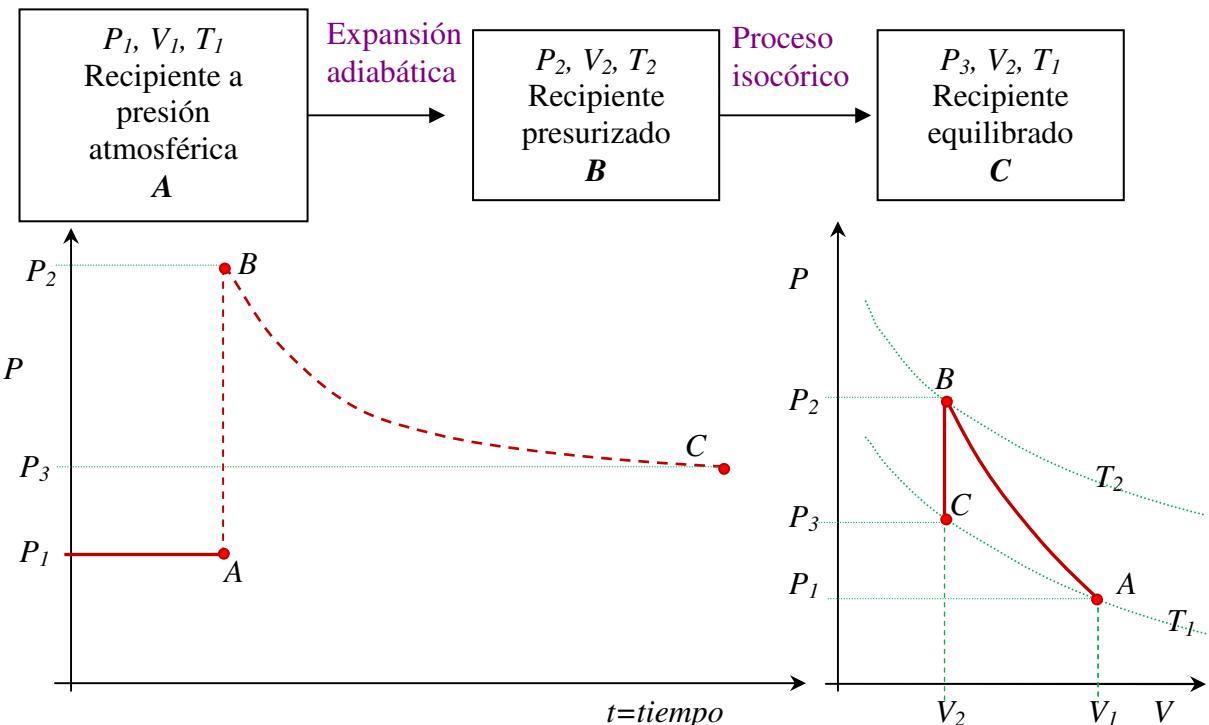
## 55.2 Experimento de Clement-Desormes

Éste es un experimento clásico muy adecuado para determinar  $\gamma$  usando un manómetro, una jeringa de plástico y un frasco de vidrio.<sup>1,4</sup> El frasco tiene un tapón de goma con dos salidas: una se conecta con una manguera a la jeringa que se encuentra expandida a su máximo volumen y la otra, al manómetro, ver Fig. 55.2. En condiciones de equilibrio con el medio circundante a la temperatura  $T=T_1$ , se mide la presión  $P_1$ . En un determinado instante,  $t=0$ , el pistón de la jeringa se comprime rápidamente, en un proceso adiabático.



**Figura 55.1.** Dos posibles configuraciones para realizar el experimento de Clement Desormes. A la izquierda, una jeringa conectada a un frasco de vidrio y a un sensor de presión. A la derecha, el arreglo incluye una jeringa conectada a un sensor de presión.

La presión se eleva instantáneamente al valor  $P_2$  y la temperatura del gas también se eleva a  $T=T_2$ . Luego a medida que vuelve a termalizarse con el medio ambiente, la presión decrece al valor de equilibrio  $P_3$ . De este modo la presión  $P_1$  y  $P_3$  están sobre una misma isoterma en un diagrama  $PV$ , como el que se ilustra esquemáticamente en la Figura 55.2.



**Figura 55.2.** El experimento de Clement Desormes. Arriba esquema conceptual del experimento; abajo izquierda: variación de la presión con el tiempo y diagrama  $PV$  de proceso físico. Abajo derecha, diagrama  $PV$  del proceso realizado. A representa el estado inicial, B es el punto inmediatamente después de la compresión adiabática y C es el estado final de equilibrio.

En referencia al diagrama  $PV$  de proceso físico, ilustrado en la parte inferior derecha de la Fig. 55.2, si llamamos  $V_1$  al volumen original y  $V_2$  al final, para el proceso adiabático  $AB$  tenemos:

$$PV_1^\gamma = P_2 V_2^\gamma . \quad (55.8)$$

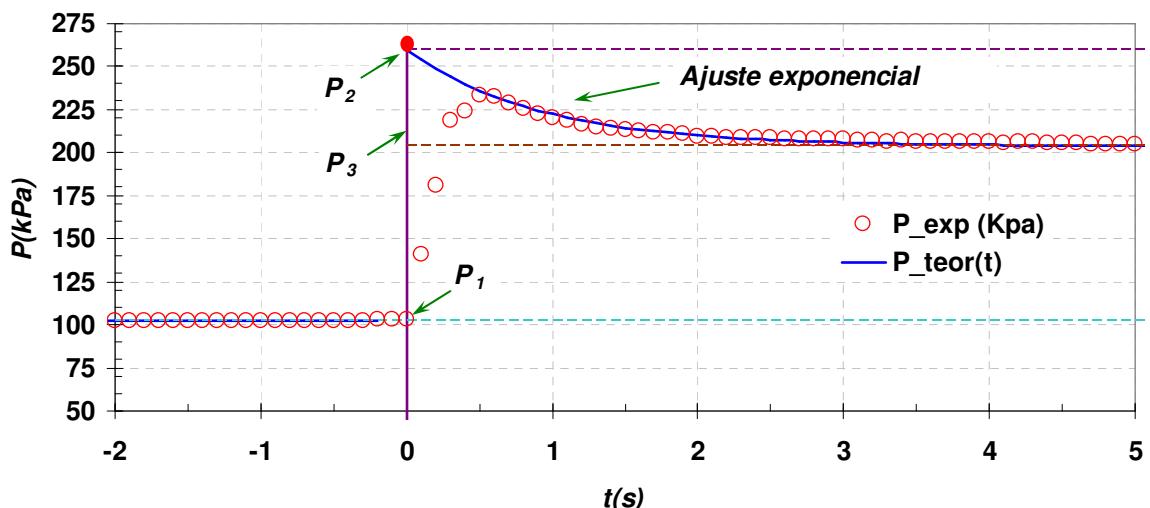
Como  $A$  y  $C$  están sobre una misma isoterma ( $T=T_1$ ):

$$P_1 V_1 = P_3 V_2 . \quad (55.9)$$

Combinando estas dos últimas expresiones tenemos:

$$\gamma = \frac{\ln(P_2/P_1)}{\ln(P_3/P_1)} . \quad (55.10)$$

Por lo tanto, midiendo las presiones  $P_1$ ,  $P_2$  y  $P_3$  podemos determinar  $\gamma$  del gas contenido en el recipiente.



**Figura 55.3.** Diagrama esquemático de la variación de la presión con el tiempo en un típico experimento de Clement Desormes. Los círculos corresponden a los datos de presión. La presión  $P_2$  puede obtenerse extrapolando a  $t=0$  un ajuste exponencial a los datos de presión durante el proceso de termalización de  $P_2$  a  $P_3$ , o sea del punto  $B$  al  $C$ .

En este experimento, las presiones  $P_1$  y  $P_3$  pueden determinarse sin mayores inconvenientes, por medición directa. Sus valores son el promedio de las presiones medidas antes de comprimir la jeringa y luego de que se llegó a equilibrio. Sin embargo, determinar  $P_2$  es más complejo. Dado que es difícil lograr un proceso suficientemente adiabático y rápido, la compresión siempre toma alguna fracción de segundo. Como se ilustra en la Figura 55.3, los datos experimentales no brindan directamente el valor de  $P_2$ . No obstante, su valor puede

obtenerse por extrapolación del comportamiento de la presión como función del tiempo entre  $t=0$  y la situación de equilibrio, puntos B y C en la Figura 55.2.<sup>7</sup> Si suponemos que el recipiente se enfriá siguiendo la ley de enfriamiento de Newton, podemos suponer que la forma de la curva de  $P$  como función del tiempo es también exponencial. Por lo tanto, si ajustamos una función exponencial a la forma:

$$P(t) = (P_{20} - P_3) \cdot \exp(-\lambda \cdot t) + P_3, \quad (55.11)$$

con  $P_3$  en valor de la presión de equilibrio y  $P_{20}$  y  $\lambda$  son dos parámetros cuyos valores se determinan del mejor ajuste que pueda hacerse de los datos experimentales de  $P_{exp}(t)$  como se muestra en al Figura 55.3. El valor de  $P_2$  puede obtenerse extrapolando la Ec.(55.11) para  $t=0$ .

### Proyecto 183. Determinación de $\gamma$ por el método de Clement-Desormes

**Equipamiento recomendado:** Sensor de presión conectado a un sistema de adquisición de datos. Un recipiente de vidrio o plástico de unos 250 ml a 1 l, dotado de un tapón con conexión para el sensor de presión y jeringa plástica para presurizar. Alternativamente, el experimento se puede hacer con una jeringa de unos 25 a 50 ml que se conecta a un sensor de presión asociado a un sistema de toma de datos por PC.

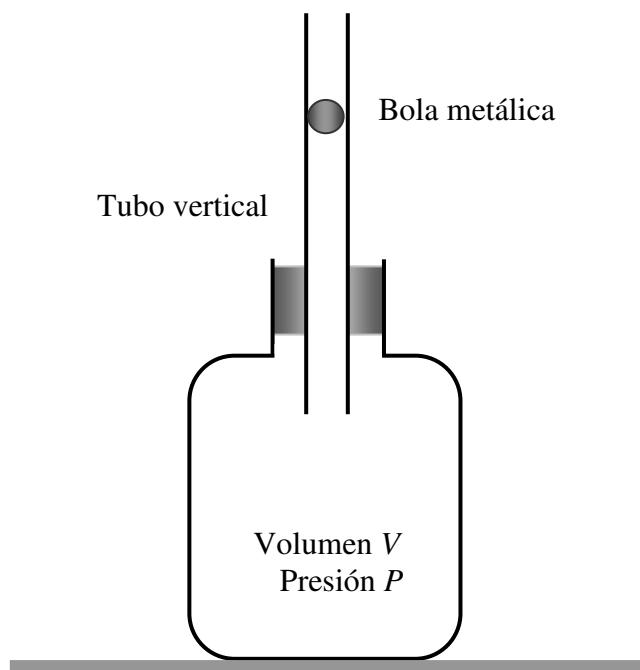
Existen muchos arreglos experimentales posibles para realizar este experimento. Aquí nos concentraremos en uno de los más simples, que consiste en una jeringa conectada al sensor de presión, como se ilustra en el panel derecho de la Figura 55.1. Inicialmente, la jeringa tiene su émbolo expandido a su máximo volumen y a la presión inicial (atmosférica)  $P_1$ . El sistema de adquisición de datos se configura para tomar unas 100 mediciones por segundo y con un rango de tiempo a unos 120 s. Se registra la presión inicial por unos 10 s y rápidamente se comprime el émbolo hasta aproximadamente la mitad de su volumen inicial. Se mantiene el émbolo en esta posición hasta que se llegue a una presión de equilibrio  $P_3$ . Esto es cuando la temperatura del gas regresa a su valor inicial  $T_1$  (la temperatura ambiente). En la Figura 55.3 se muestra un esquema de los resultados esperados. Extrapolando los datos medidos, obtenga el mejor valor de  $P_2$ .

#### Sugerencias de trabajo:

- ✓ Realice por lo menos 5 determinaciones de  $\gamma$  para el aire. Obtenga el mejor valor y realice una estimación de sus errores.
- ✓ Compare sus resultados experimentales con los valores de tabla.

## 55.2 Experimento de Rüchardt

El experimento de Rüchardt<sup>1,3,5,8,9</sup> tiene como objetivo la determinación del coeficiente adiabático de un gas,  $\gamma$ . En el diseño original de Rüchardt, una bola de metal se inserta en un tubo de vidrio vertical conectado con un recipiente de mayor volumen, ver Figura 55.4. Si el ajuste entre la bola y el tubo es hermético y tiene poco roce, condiciones no siempre fáciles de lograr en la práctica, la bola realiza una serie de oscilaciones antes de alcanzar su posición de equilibrio.



**Figura 55.4.** Experimento original de Rüchardt

La dificultad con el arreglo experimental original, Figura 55.4, es que requiere de un tubo de vidrio rectificado con mucha precisión y de una masa, cilíndrica o esférica, elaborada con similar precisión para lograr un ajuste que sea hermético y de poco roce al mismo tiempo. Estas condiciones se pueden lograr, con una jeringa de vidrio de uso común, que en general, tienen resueltos estos dos aspectos simultáneamente: hermeticidad y poco roce; además son de muy bajo costo. Por lo tanto, vamos a usar una jeringa de vidrio en el presente experimento, en un arreglo similar al ilustrado en el panel derecho de la Figura 55.1.

Un diagrama esquemático del experimento se ilustra en la Figura 55.5, tomando el eje horizontal como  $x$  con su origen ubicado de modo que coincida con la posición de equilibrio del émbolo o pistón de la jeringa. Si el émbolo se desplaza una distancia  $x$ , la presión interna en la jeringa aumentará a un cierto valor  $P$ . La fuerza recuperadora sobre el pistón será:

$$F = (P - P_0).A = \Delta P.A , \quad (55.12)$$

donde  $P_0$  es la presión barométrica externa y  $A$  es el área transversal del émbolo. Esta fuerza tiende a restituir el émbolo a su posición de equilibrio, de modo análogo a un resorte. La variación de volumen producida por el desplazamiento del pistón en una distancia  $x$  es:

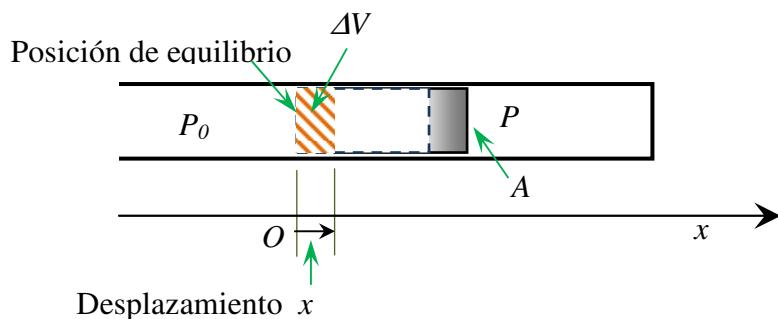
$$\Delta V = x A . \quad (55.13)$$

Si la compresión se realiza muy rápidamente, sin que haya flujo de calor entre el gas en el sistema (jeringa) y el medio, por el primer principio de la termodinámica:

$$\Delta Q = \Delta U + \Delta W = 0 . \quad (55.14)$$

Es decir, el proceso es adiabático y todo el trabajo realizado sobre el gas se transforma en energía interna y viceversa. Para un proceso reversible, la relación entre volumen y presión viene descrita por la ecuación de Poisson, Ec.(55.7), que podemos expresar en forma diferencial como:

$$dP = -(\gamma P / V)dV . \quad (55.15)$$



**Figura 55.5.** Diagrama de fuerzas sobre el pistón en el tubo.

La fuerza  $F$  que actúa sobre el pistón puede escribirse como:

$$F = AdP = -A(\gamma P/V)dV = -A^2(\gamma P/V)x . \quad (55.16)$$

Esta fuerza recuperadora elástica tiene la forma  $F = -kx$ , donde la “constante elástica” es  $k = \gamma A^2 P / V$ . El parámetro  $k$  no es estrictamente una constante porque depende del cociente  $P/V$ , pero si los cambios relativos  $dP$  y  $dV$  son pequeños,  $P/V \approx P_0/V_0$ , donde  $V_0$  es el volumen del sistema en condiciones de equilibrio. La ecuación de movimiento del pistón es en esta aproximación:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\gamma PA^2}{V} x = -m\omega_0^2 x , \quad (55.17)$$

donde la frecuencia natural de oscilación  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$  es:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\gamma P A^2}{mV}} . \quad (55.18)$$

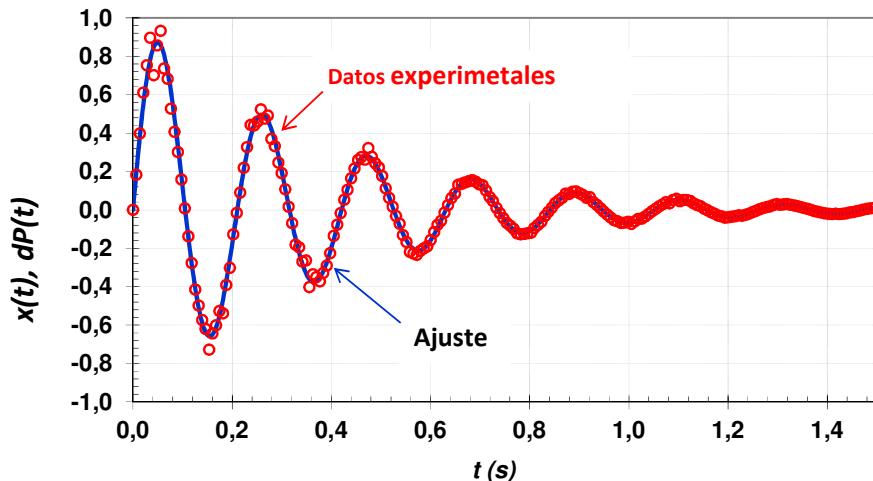
En general, el sistema tiene fricción, si podemos aproximar este roce por  $F_{roce} = b \cdot v$ , donde  $b$  es una constante y  $v$  es la velocidad, definiendo  $\beta = b/2m$ , la ecuación de movimiento resultante es:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 . \quad (55.19)$$

Como vimos en los capítulos 15 y 38, la solución de esta ecuación diferencial es de la forma:

$$x(t) = A_0 \text{Exp}(-\beta \cdot t) \sin(\omega t + \phi) , \quad (55.20)$$

con:  $\omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2$ . Al igual que antes,  $A_0$  y  $\phi$  dependen de las condiciones iniciales del sistema. La forma de esta solución se ilustra esquemáticamente en la Figura 55.6. Si se mide ya sea  $x(t)$  o  $dP(t)$ , del ajuste de los datos experimentales, se pueden obtener los parámetros:  $A_0$ ,  $\omega$ ,  $\beta$  y  $\phi$  de la Ec.(55.20).



**Figura 55.6.** Variación de la posición  $x(t)$  o de la diferencia de presión  $dP(t)$  dentro de la jeringa. Del ajuste de los datos experimentales, círculos, se pueden obtener los parámetros:  $A_0$ ,  $\omega$ ,  $\beta$  y  $\phi$  de la Ec.(55.20).

Una vez determinados los parámetros:  $\omega$  y  $\beta$ , usando alguna de las técnicas discutidas en los capítulos 15 ó 38, tenemos que:

$$\omega_0^2 = \omega^2 + \beta^2 \approx \gamma(P_0 \cdot A^2)/(mV_0) . \quad (55.21)$$

De donde podemos obtener:

$$\gamma \approx \frac{mV_0}{A^2 P_0} \cdot \omega_0^2 = \frac{mV_0}{A^2 P_0} \cdot (\omega^2 + \beta^2) . \quad (55.22)$$

Así podemos calcular  $\gamma$  a partir del estudio de las oscilaciones mecánicas del émbolo de una jeringa de vidrio. Este experimento ilustra cómo se relacionan propiedades mecánicas de un sistema con las propiedades termodinámicas del medio elástico que vibra. De hecho, se deja como ejercicio para el lector discutir qué pasaría si se infla un balón de fútbol con un gas

monoatómico como He o Ar o si se lo inflase con CO<sub>2</sub>. ¿Cómo espera que se comporte dicho balón?

### Proyecto 184. *Determinación de γ para gases ideales- Experimento de Rüchardt*

**Equipamiento recomendado:** Sensor de presión conectado a un sistema de adquisición de datos. Una jeringa de vidrio de 20 a 50 ml con poco roce entre sus partes.

Para este experimento podemos usar una jeringa<sup>4,6</sup> de vidrio, con poco roce, de unos 20 a 50 ml, con divisiones de graduación de volumen bien visibles. Conecte la jeringa al sensor de presión como se indica en el panel derecho de la Figura 55.1.

Para este experimento podemos usar aire, el cual es diatómico, por ser una mezcla de ≈80% de nitrógeno y ≈20% de oxígeno, ambos gases diatómicos. Otros gases posibles son: argón o helio (gases monoatómicos), CO<sub>2</sub>, butano (el gas que hay en un encendedor) que son poliatómicos, etc.<sup>8</sup>

Con un dispositivo típico ( $V \approx 30$  ml,  $m \approx 5$  g,  $A \approx 1$  cm<sup>2</sup>) logramos oscilaciones con un período del orden de  $T \approx 0,1$  s, o sea, aproximadamente 10 oscilaciones por segundo, que son lo suficientemente rápidas como para mantener dentro de la jeringa las condiciones de “adiabaticidad” que supusimos en el desarrollo de la Ec.(55.22). Para este tipo de experimento es conveniente adquirir datos a una frecuencia del orden de unos 500 a 3000 Hz.

Para la jeringa seleccionada, mida cuidadosamente el diámetro y masa del émbolo, de modo de conocer  $A$  y  $m$  de la Ec.(55.22). Obsérvese que el diámetro interviene a la potencia 4, por lo tanto, es necesario conocer este parámetro con buena precisión. Asimismo, determine la presión atmosférica  $P_0$  en su laboratorio. Si no tiene un barómetro, puede consultarla por Internet del servicio meteorológico más próximo.

Tenga en cuenta que  $V_0$  de la Ec.(55.22) es el volumen indicado por la jeringa misma  $V_j$ , más el volumen de la manguera,  $\Delta V$ , que la conecta al sensor presión. Un modo de conocer  $\Delta V$  consiste en usar una segunda jeringa pequeña de plástico, que puede ser de 1 a 5 ml. Se conecta esta jeringa al sensor de presión con la misma manguera y se mide el volumen cuando el sistema está a la presión atmosférica y también cuando se duplica la presión. Llamamos  $V_m^{(i)}$  al volumen inicialmente medido por la jeringa pequeña conectada al sensor de presión, cuando la presión es la barométrica  $P_0$ . De manera análoga,  $V_m^{(f)}$  es el volumen final de la jeringa cuando la presión es  $2P_0$ . De la Ley de Boyle:  $P_0 \cdot (V_m^{(i)} + \Delta V) = 2P_0 \cdot (V_m^{(f)} + \Delta V)$ , de donde:  $\Delta V = (V_m^{(i)} - 2 \cdot V_m^{(f)})$ . La ventaja de usar una jeringa pequeña es que puede medir volúmenes chicos con mucha precisión.<sup>6</sup>

Conecte nuevamente la jeringa de vidrio al sensor de presión y practique dar un impulso inicial al émbolo para que comience a oscilar. Esto se puede lograr ya sea comprimiendo o expandiendo el pistón. Pruebe hacerlo con la jeringa en posición horizontal y vertical. Por lo general, en posición vertical, se logran más oscilaciones.

## Sugerencias de trabajo:

- ✓ Comenzando con aire en la jeringa, determine el volumen  $V_0$  que ocupa el gas en condiciones de equilibrio. Tenga en cuenta que  $V_0$  incluye el volumen de la jeringa  $V_j$  y  $\Delta V$ , ( $V_0 = V_j + \Delta V$ ).
- ✓ Comprima el gas empujando o jalando el émbolo. Inicie la adquisición de datos. Inmediatamente después, deje en libertad el émbolo para que oscile horizontalmente. Cuando llegue a su posición de reposo, mida el volumen del gas en la jeringa,  $V_j$ .
- ✓ Construya un gráfico de los valores medidos de  $P(t)$  como función del tiempo.
- ✓ En este mismo gráfico, incluya el mejor ajuste de los datos de la presión en función del tiempo con una ecuación que tenga en cuenta el amortiguamiento, de la forma:

$$P(t) = P_0 + P_{20} e^{-\beta t} \cos(\omega t + \phi). \quad (55.23)$$

En esta ecuación  $P_0$  es la presión de equilibrio,  $P_{20}$  es la amplitud de la oscilación,  $\beta$  la constante del amortiguamiento,  $\omega$  es la frecuencia angular de oscilación y  $\phi$  la fase inicial. Varíe estos cuatro parámetros de modo que pueda lograr el mejor ajuste posible de los datos experimentales, como se ilustra en la Figura 55.6.

- ✓ Del mejor ajuste de la Ec. (55.23) a sus datos experimentales, determine  $\omega$  y la constante de amortiguación  $\beta$ . A partir de estos resultados, y usando la Ec. (55.22), obtenga el valor de  $\gamma$ .
- ✓ Varíe el valor inicial de  $V_0$ , repita el experimento y obtenga un nuevo valor de  $\gamma$ . ¿Cómo espera que se compare este valor con el medido previamente? ¿Qué indican sus resultados experimentales? ¿Se cumple sus expectativas preliminares?
- ✓ Compare sus resultados experimentales de  $\gamma$  para el aire con los de la bibliografía y con las predicciones de la teoría cinética.
- ✓ ♣♣ Del ajuste a sus datos, estime la incertidumbre en los parámetros  $\beta$  y  $\omega$ . De los errores estimados de los otros parámetros medidos, que intervienen en la Ec.(55.22), estime la incerteza en el valor de  $\gamma$  obtenido en este experimento.
- ✓ ♣♣ Usando otro gas, como los indicados más arriba, repita el experimento. Para cada uno de ellos, repita la medición variando el volumen inicial  $V_0$ .
- ✓ ♣♣ Para cada gas usado, obtenga el mejor valor de  $\gamma$  y su incertidumbre. Compare sus resultados con datos de la bibliografía y con las predicciones de la teoría cinética.

## Referencias

- 
- <sup>1</sup> M. Zemansky, *Calor y termodinámica*, Bilbao, Ed. Aguilar, 1964, p. 136–138.
  - <sup>2</sup> F. Sears, M. Zemansky, Fredman y Young, *Física universitaria*, vol. 1, 9a edición, México, 1999.
  - <sup>3</sup> D. G. Smith, “Simple  $c_p/c_v$  resonance apparatus suitable for the physics teaching laboratory”, Am. J. Phys. **47**, 1979, p. 593–596.
  - <sup>4</sup> J. L. Hunt, “Accurate experiment for measuring the ratio of specific heats of gases using an accelerometer”, Am. J. Phys. **53**, 1985, p. 696–697.
  - <sup>5</sup> G. D. Severn and T. Steffenson, “A simple extension of Rüchardt’s method for measuring the ratio of specific heats of air using microcomputer-based laboratory sensors”, Am. J. Phys. **69**, 2001, p. 387–388.

---

<sup>6</sup> D. P. Jackson and Priscilla W. Laws “Syringe thermodynamics: The many uses of a glass syringe,” *Am. J. Phys.* **74** (2), 2006, p. 94–101.

<sup>7</sup> J. Chamberlain, “*Determination of the Specific Heat Ratio of a Gas in a Plastic Syringe*,” *Phys. Teach.* **48**, 233 (2010).

<sup>8</sup> O. L. de Lange and J. Pierrus, “*Measurement of bulk moduli and ratio of specific heats of gases using Rüchardt’s experiment*,” *Am. J. Phys.* **68**, 265 (2000).

<sup>9</sup> G. Torzo, et Al.”*A new microcomputer-based laboratory version of the Rüchardt experiment for measuring the ratio  $\gamma=C_p/C_v$  in air*,” *Am. J. Phys.* **69**, 1205 (2001).

# Capítulo 56

## Conducción y convección térmica - ondas de calor

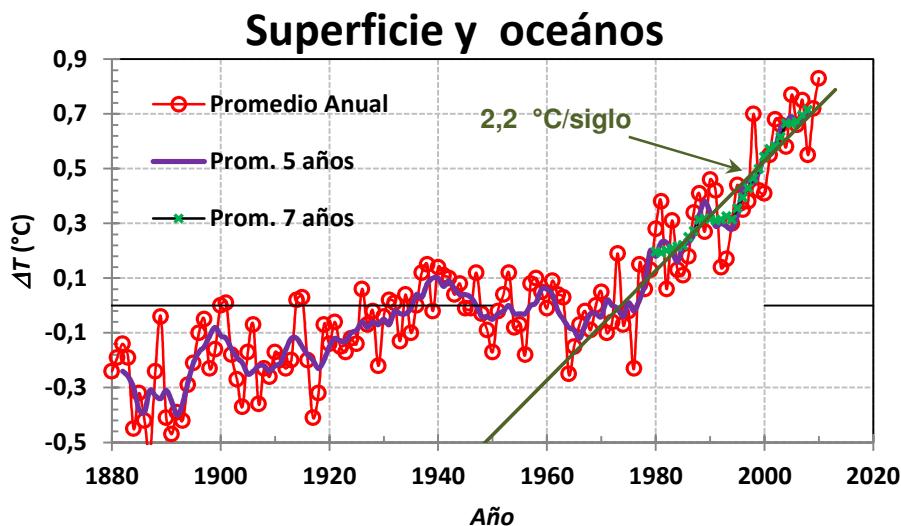
### Objetivos

En este capítulo estudiamos la propagación de calor, y más especialmente la conducción y la convección. En particular, cuando una fuente de calor actúa intermitentemente, se generan patrones de propagación de la temperatura que se pueden describir como ondas de calor. Usaremos estos mecanismos de propagación para determinar la conductividad térmica de un material y su constante de difusividad. Estos mismos mecanismos de propagación del calor, que nos permiten conocer las propiedades térmicas del suelo y cómo las variaciones seculares de la temperatura superficial quedan registradas en el interior de la Tierra. De hecho, éste es un modo de determinar temperaturas del pasado, de gran interés para evaluar la ocurrencia y posibles causas del calentamiento global.

- ✓ Temperaturas del pasado
- ✓ Ondas de calor
- ✓ Determinación de la conductividad térmica
- ✓ Ondas térmicas en el suelo
- ✓ Conducción y convección

### 56.1 Temperaturas del pasado

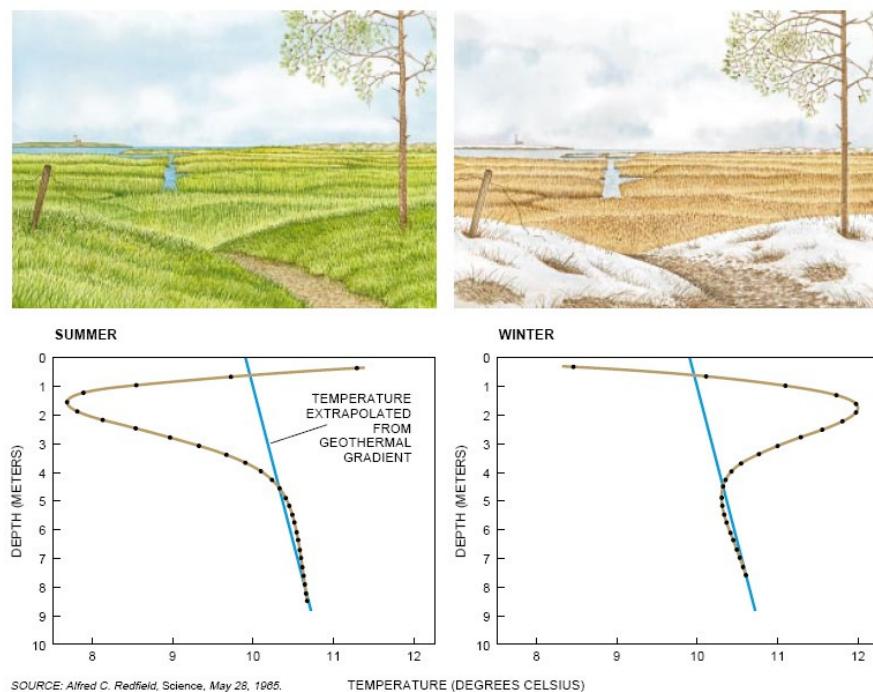
Uno de los desafíos científicos de mayor interés y relevancia en esta primera parte del tercer milenio, es poder predecir la evolución de las condiciones climáticas del planeta y dilucidar con la mayor certeza posible el origen y las causas del calentamiento que ha venido ocurriendo en la Tierra durante el último siglo. Nuestra civilización se desarrolló durante los últimos milenios que sucedieron a la última glaciación, ocurrida hace unos 10 000 años. Durante ese período la temperatura media de la Tierra era de unos 5 °C más baja que en la actualidad. La tendencia de las temperaturas de los últimos 50 años indica que la temperatura se está elevando a razón de unos  $2,3 \pm 0,3$  °C/siglo.<sup>1,2</sup> De persistir esta tendencia, en dos siglos habrá ocurrido un incremento de temperatura de magnitud comparable a la ocurrida en unos 10 000 años. Esta posibilidad podría constituir una seria amenaza para la humanidad.



**Figura 56.1** Variación de las temperaturas globales. El aumento de temperatura media en el mundo en los 50 años posteriores a 1965 fue de unos 2,2 °C/siglo<sup>3,4,5,6</sup>.

Es crucial para el futuro de nuestra civilización, dilucidar si estas tendencias térmicas (ver la Figura 56.1) son consecuencia de la actividad humana o se produce por causas naturales.<sup>4,5</sup>

Existe un creciente consenso en la comunidad científica que el incremento de CO<sub>2</sub> y otros Gases de Efecto Invernadero (GEI) como el metano (CH<sub>4</sub>), óxidos de nitrógeno (NO<sub>x</sub>), clorofluorocarbonos, ozono, etc. en la atmósfera, está relacionado con este calentamiento. El aumento de CO<sub>2</sub> en la atmósfera es consecuencia del uso intensivo de combustibles fósiles, que ha tenido lugar a partir del inicio de la revolución industrial, más notablemente a partir de la segunda mitad del siglo XX. Es decir, hay fundadas sospechas de que el incremento de las temperaturas medias globales es consecuencia, en gran medida, de la actividad humana.<sup>6,7</sup>



**Figura 56.2** Perfil de temperaturas en función de la profundidad para dos momentos del año, verano e invierno. La superficie del suelo sigue la temperatura ambiente, pero entre 1 y 2 m la temperatura es representativa de la estación anterior. De igual modo, las variaciones térmicas de un siglo de oscilación están registradas en los perfiles térmicos de unos 100m de profundidad y así sucesivamente. Las líneas rectas representan el gradiente térmico de la Tierra de unos  $9,2 \times 10^{-2} \text{ }^{\circ}\text{C/m}$ .<sup>8,9</sup>

Desde luego, también se sabe que existen causas naturales que afectan el clima de la Tierra; la ocurrencia de la última glaciación es una evidencia de ello. Entre las causas naturales que pueden afectar el clima de la Tierra tenemos: variaciones en la emisión energética del Sol; erupciones volcánicas, que con sus cenizas o aerosoles, afectan el balance energético de la Tierra; y variaciones en el movimiento de la Tierra alrededor del Sol. Hay muchas evidencias que indican que la Tierra tiene oscilaciones cuasiperiódicas de cambios climáticos. En otras palabras, los períodos de glaciaciones se han venido produciendo con cierta regularidad durante los últimos 2 millones de años. Milutin **Milankovitch** (1879-1958) propuso un modelo astronómico para explicar sus causas. Esta teoría se basa en que la Tierra, además de su movimiento de rotación y traslación, se mueve en una órbita elíptica que tiene una variación en su excentricidad de unos 100 ka (1 ka = 1000 años). Además, el eje de la Tierra tiene una inclinación de unos 23° respecto de la normal al plano de la eclíptica, lo que genera las estaciones del año; el eje de la Tierra tiene una *precesión* de unos 26 ka. Esto es, cada 13 ka las estaciones se invierten, o sea, a veces enero es verano en el sur y en la otra parte del

ciclo es invierno. Por otro lado, el ángulo de inclinación de la Tierra (respecto de la normal de la eclíptica) oscila entre 21,5° y 24,5° en unos 41 ka, movimiento que se denomina *nutación*. Como es de suponer, estos movimientos presentan acoplamientos entre ellos que generan los llamados ciclos de Milankovitch, que tienen períodos de aproximadamente 22 ka, 41 ka y 98 ka, en los que se han observado alteraciones importantes del clima. Esta teoría no está libre de críticas y dista de ser una teoría universalmente aceptada, pero tiene una importante apoyatura observacional.

Para poder poner a prueba los modelos de clima es necesario poder determinar las temperaturas del pasado. Los registros térmicos estándares, basados en observatorios meteorológicos terrestres, son confiables a partir de fines del siglo XIX y para pocos sitios, principalmente de Europa.<sup>2,7</sup> Por lo tanto, conocer temperaturas del pasado se ha transformado en un desafío de gran importancia e interés científico. Afortunadamente, existen varios métodos para estudiar las temperaturas pasadas. Uno de ellos se basa en la abundancia isotópica del oxígeno (relación  $\delta^{18}\text{O} = ^{18}\text{O}/^{16}\text{O}$ ) e hidrógeno (relación  $\delta^2\text{H} = ^2\text{H}/^1\text{H}$ ) en grandes bloques de hielo (Groenlandia, Antártida, etc.).<sup>\*</sup> En estas regiones de la Tierra, la nieve que cae no se derrite, sino que se acumula por capas. Éstas capas, varían con las estaciones del año y forman estratificaciones similares a las capas de la corteza de un árbol. Contando estas capas, puede conocerse la época en que se produjo la precipitación. Además, en estas capas se acumula aire representativo de esa época, lo que permite conocer la concentración de GEI del pasado. Por otro lado, el agua formada con isótopos más pesados ( $\text{H}_2^{18}\text{O}$  o DHO) tiene un punto de evaporación más alto que el del agua común. De este modo, la concentración de estos isótopos ( $\delta^2\text{H}$  o  $\delta^{18}\text{O}$ ) en las nubes varía con la temperatura ambiente; por lo tanto, las concentraciones de los isótopos  $^2\text{H}$  y  $^{18}\text{O}$  en las distintas capas de hielo de la Antártida y Groenlandia dan información de las temperaturas planetarias existentes en el pasado. Las proporciones de los isótopos naturales en la Tierra es conocida: la abundancia natural de  $^{18}\text{O}$  es de 0,24% de todo el oxígeno y la abundancia de  $^2\text{H}$  es de 0,015% de todo el hidrógeno.

Otro método para determinar las temperaturas del pasado consiste en estudiar perfiles térmicos de temperaturas a grandes profundidades. En la Figura 56.2 se ilustra cómo las temperaturas del pasado dejan una clara firma que permite caracterizarlas.<sup>8</sup>

En este capítulo estudiaremos un análogo unidimensional que ilustra gran parte de la física involucrada en este problema.

## 56.2 Transmisión de calor

El calor se transfiere básicamente por tres procesos distintos: conducción, convección y radiación.<sup>10,11,12</sup> En la naturaleza, todos los mecanismos de transmisión intervienen simultáneamente con distintos grados de importancia.

Los líquidos y los gases no son, en general, buenos conductores de calor. Sin embargo, pueden transmitirlo eficientemente por convección. Un calentador de aire forzado, en el que el aire se calienta y luego se distribuye mediante un ventilador, es un ejemplo de *convección forzada*. La convección también ocurre en forma natural o

\* En geoquímica y paleoclimatología se designa con  $\delta^{18}\text{O}$  a una medida de la variación isotópica de una muestra. Más específicamente,  $\delta^{18}\text{O}$  mide la variación isotópica de una muestra respecto de otra tomada como referencia:  $\delta^{18}\text{O} = ((^{18}\text{O}/^{16}\text{O})_{\text{muestra}})/((^{18}\text{O}/^{16}\text{O})_{\text{referencia}}) - 1 \times 1000$ . Así,  $\delta^{18}\text{O}$  mide la variación isotópica de la proporción de isótopos estables  $^{18}\text{O}$  a  $^{16}\text{O}$ , en partes por mil. De manera análoga se define  $\delta^2\text{H}$ .

espontánea: por ejemplo, en el aire caliente que se eleva. Las corrientes oceánicas, como la corriente del Golfo, son un ejemplo de *convección natural* a gran escala. El viento es otro ejemplo de convección. En el caso de la convección natural, alrededor del objeto caliente se forma una capa delgada (capa límite) de aire, que es la que por conducción propaga el calor de la superficie caliente al medio. Es posible escribir el flujo de calor disipado por convención natural como:

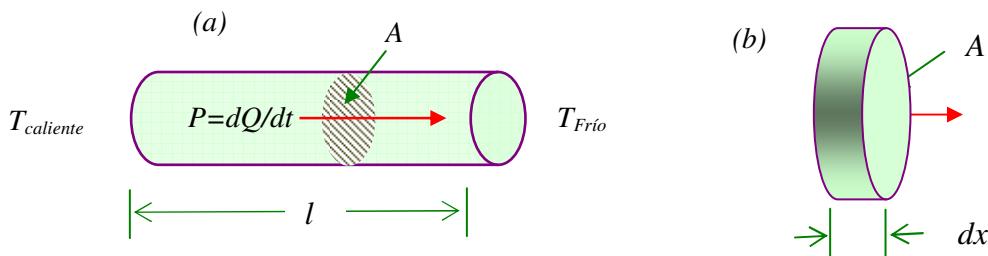
$$H_{conv} = \frac{dQ_{conv}}{dt} = A_s \cdot h \cdot (T_{sup} - T_e), \quad (56.1)$$

que es la *Ley de enfriamiento de Newton*. Aquí  $A_s$  es la superficie del cuerpo expuesta al medio,  $h$  es el *coeficiente de convección*, una constante característica que depende del régimen de disipación (laminar, turbulento, etc.), de la conductividad térmica del medio fluido y del estado de las superficies.<sup>12</sup> Con  $T_{sup}$  y  $T_e$  se designan a las temperaturas de la superficie del cuerpo y del medio fluido, respectivamente (ver Tabla 56.1, Anexo A).

En los sólidos la conducción del calor es el mecanismo más común de transmisión, que viene descrita por la *Ley de Fourier*. Para problemas unidimensionales, esta ley se escribe:<sup>10,11</sup>

$$P = \frac{dQ}{dt} = -K \cdot A \frac{dT}{dx}, \quad (56.2)$$

aquí  $P = dQ/dt$  es la potencia transferida a través del área  $A$ , transversal al eje de la muestra (Figura 56.3),  $dT/dx$  es el gradiente térmico y  $K$  es la constante de conductividad térmica de la barra (ver Tabla 56.2, Anexo A).



**Figura 56.3** (a) Transmisión del calor a lo largo de una barra, asilada por los lados laterales, de longitud  $l$  con un extremo caliente ( $T_{Caliente}$ ) y el otro frío ( $T_{Frío}$ ). (b) Transmisión de calor a través de un elemento de materia de espesor infinitesimal  $dx$ .

Si consideramos el elemento infinitesimal ilustrado en la Figura 56.3(b), suponemos que en su interior hay una fuente de energía, que genera calor a una potencia  $g(x,t)$  por unidad de volumen y que su temperatura es  $T(x,t)$ . Suponemos además que el único mecanismo de transmisión de calor es la conducción. Aquí denotamos con  $\rho$  y  $c$  a la densidad y al calor específico de la muestra, respectivamente. Realizando un balance de energía tenemos:

$$\frac{dQ}{dt} = (\rho Adx)c \frac{dT}{dt} = -K \cdot A \left[ \frac{dT}{dx} \Big|_x - \frac{dT}{dx} \Big|_{x+dx} \right] + (\rho Adx)g(x,t), \quad (56.3)$$

la cual puede reescribirse como:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{K}{\rho \cdot c} \cdot \left[ \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right] + g(x,t), \text{ o bien } \frac{\partial T}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + g(x,t). \quad (56.4)$$

Aquí  $k = K/c.\rho$  es la *difusividad* del material que, como vemos, depende de la conductividad térmica, de la densidad y del calor específico. En el caso tridimensional, esta expresión puede generalizarse a:

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = k \nabla^2 T(x,t) + g(x,t). \quad (56.5)$$

Ésta es la ecuación fundamental de conducción del calor, con fuentes, en tres dimensiones, conocida como la ecuación de Fourier-Biot.<sup>12</sup>

La ecuación fundamental- Ec. (56.5)-, sin fuentes,  $g=0$ , en una dimensión puede escribirse como:<sup>12</sup>

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{k} \cdot \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (56.6)$$

con  $k = K/(c \rho)$ .

### 56.3 Ondas de calor en una dimensión

#### 56.3.1 Modelo I

Consideremos el caso de una barra cuya longitud  $L$  sea mucho mayor que su diámetro  $d=2a$ . En esta sección supondremos que el único mecanismo de transmisión es el de conducción a lo largo de la barra, es decir, no hay pérdidas de calor por su cara lateral. Si su extremo izquierdo se encuentra en contacto con una fuente térmica que tiene una temperatura que varía sinusoidalmente como:

$$T_a(t) = T_a^0 \cos(\omega_0 t + \phi_0) + T_{00} = T_a^0 \cos\left(\frac{2\pi}{p_0} t + \phi_0\right) + T_{00}, \quad (56.7)$$

donde  $T_a^0$  es la amplitud de la oscilación térmica alrededor del valor medio  $T_{00}$ ,  $\omega_0 = 2\pi/p_0$  es la frecuencia angular de la variación térmica,  $p_0$  es su período y  $\phi_0$  es la fase inicial de la oscilación.

Si  $T_a^0 = 0$  ( $T_a = \text{constante}$ ) y el extremo izquierdo está a una temperatura constante e igual a  $T_{00}$ , la barra tendrá una temperatura  $T_b(x)$  dada por:

$$T_b(x) = T_{00} - \frac{(T_{00} - T_e)}{L} x = T_{00} - m \cdot x, \quad (56.8)$$

donde  $T_e$  es la temperatura del extremo derecho. En este análisis hemos despreciado las pérdidas de calor por otros mecanismos, como convección o radiación. Este modelo unidimensional se puede aplicar a un sistema semi-infinito unidimensional: por ejemplo a la Tierra, donde la fuente de calor está en la superficie, que es calentada por el Sol.

Volviendo al caso  $T_a^0 \neq 0$ , con la temperatura del extremo izquierdo oscilando según la Ec. (56.7), en estado estacionario la temperatura media (promedio temporal) de la barra vendrá dada por la Ec. (56.8). Definiendo la temperatura normalizada  $\theta(x,t) = T(x,t) - T_b(x)$ , la Ec. (56.6) se puede escribir como:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{1}{k} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial t}, \quad (56.9)$$

ya que  $\partial^2 T_b / \partial x^2 = 0$ . Ésta es una ecuación lineal que puede resolverse por separación de variables.<sup>13</sup> Su solución para condiciones de borde periódicas, Ec. (56.7), en  $x=0$  puede escribirse como:<sup>14,15</sup>

$$\theta(x,t) = A_0 \exp(-x/\mu_0) \cos(\omega_0 t \pm x/\mu_0 + \phi_0). \quad (56.10)$$

Esta expresión puede interpretarse como una onda térmica, atenuada, que se propaga con velocidad  $v_0$  hacia la derecha (-) o hacia la izquierda (+), dependiendo del signo del argumento de la función coseno. Aquí  $\mu_0$  representa la *distancia de penetración* de la onda. Reemplazando la Ec. (56.10) en (56.9) obtenemos:

$$\mu_0 = \sqrt{\frac{2k}{\omega_0}} = \sqrt{\frac{p_0 \cdot k}{\pi}} = \frac{\lambda}{2\pi} \quad y \quad \varepsilon_0 = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{1}{\mu_0}, \quad (56.11)$$

donde  $\lambda = \sqrt{4\pi \cdot kp_0} = 2\pi\varepsilon_0$  = longitud de onda y

$$v_0 = \sqrt{4\pi \cdot k / p_0} = \sqrt{2k\omega_0} = \frac{\lambda}{p_0} = \text{velocidad de propagación}. \quad (56.12)$$

La Ec.(56.10) también puede escribirse como:

$$\begin{aligned} \theta(x,t) &= A_0 \exp(-2\pi \cdot x / \lambda) \cos(2\pi(x/\lambda \pm t/p_0) + \phi_0) = \\ &= A_0 \exp(-\varepsilon_0 x) \cos(\varepsilon_0 x \pm \omega_0 t + \phi_0). \end{aligned} \quad (56.13)$$

Las constantes  $A_0$  y  $\phi_0$  dependen de las condiciones de borde del problema. El parámetro  $\mu_0 = \lambda/2\pi$  tiene las unidades de longitud y es indicativo de la longitud a la que penetra la onda térmica,  $\lambda$  es la longitud de onda y  $p_0$  es su período de oscilación. Para  $x=0$ , tenemos:

$$\theta(x=0,t) = A_0 \cos(2\pi t / p_0 + \phi_0) = A_0 \cos(\omega_0 t + \phi_0). \quad (56.14)$$

Es decir, en el punto  $x = 0$  suponemos que la temperatura oscila periódicamente con frecuencia  $\omega_0$ .

Según la Ec. (56.13), una onda térmica penetra con amplitud apreciable distancias del orden de unas pocas longitudes de onda. La amplitud se atenúa a  $1/e^2 \approx 0,135$  (13,5%) de su valor inicial para una distancia  $x=2\mu_0 = 0,32\lambda$ .

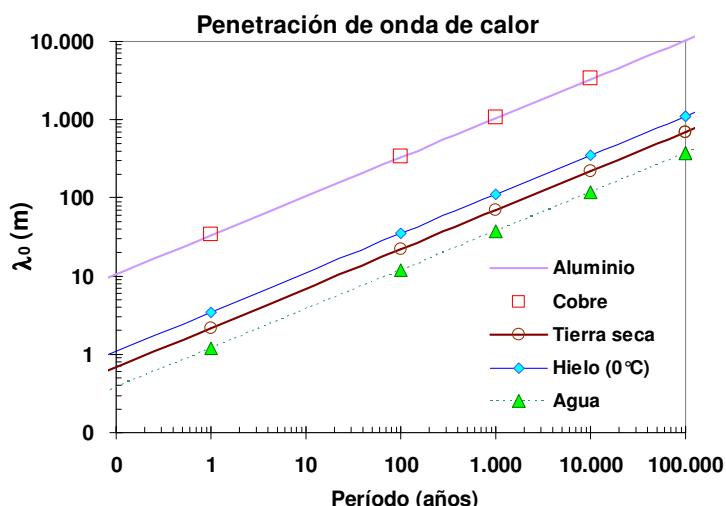
Según la Ec. (56.11), a medida que el período  $p_0$  de la onda es mayor, mayor será la penetración de la onda térmica. Asimismo, la onda térmica penetra más cuanto mayor sea la difusividad del material ( $k$ ). Estos resultados explican por qué las variaciones diarias de temperatura sólo penetran en el suelo a unos 20 cm (con  $k_{tierra} \approx 2,9 \times 10^{-7}$  m<sup>2</sup>/s y  $p_0 = 24$  h resulta  $\mu_0 \approx 9$  cm,  $\lambda \approx 56$  cm);<sup>Error! Marcador no definido.</sup> y, en cambio las variaciones anuales ( $p_0 = 365$  días) penetran en la Tierra hasta unos 4 ó 5 m ( $\mu_0 \approx 2$  m y  $\lambda \approx 1,7$  m)<sup>8</sup>. Las temperaturas asociadas a la última era glacial ( $p_0 \approx 10\,000$  años) estarían entre unos 170 a 200 m de profundidad (ver Figura 56.4).

Este fenómeno de las ondas térmicas, de poseer una *distancia de penetración* que depende de la frecuencia o período de la onda, es análogo al efecto piel del

electromagnetismo, para ondas que se propagan en medios conductores, y que discutimos en el Cap. 40. De allí, que las variaciones seculares de temperaturas penetrarán a mayor profundidad en la Tierra. Por esta razón el estudio de los perfiles térmicos a grandes profundidades nos puede brindar información de los cambios de temperaturas ocurridos en el pasado remoto.<sup>8,9</sup> Más específicamente, si suponemos que en la Ec. (56.10)  $\phi_0 = 0$ , de esta ecuación deducimos que para un tiempo posterior  $\tau = p_0/2$ , a una profundidad  $x = \lambda/2$  tendremos una temperatura:

$$\theta(x = \lambda/2, \tau) = \theta(0,0) / e^{\pi} \approx 0,043 \cdot \theta(0,0). \quad (56.15)$$

Por lo tanto, midiendo la temperatura en la profundidad  $x = \lambda/2$  podemos inferir la temperatura de la superficie a un tiempo pasado ( $p_0/2$ ). Más específicamente a esta profundidad la temperatura será un 4,3 % de su valor en la superficie en el tiempo pasado  $\tau = p_0/2$ . Éste es un resultado de inmenso valor para inferir las temperaturas del pasado, ya que estudiando los perfiles térmicos de perforaciones en la tierra y en los hielos podemos reconstruir las temperaturas del pasado.<sup>8,9</sup> En la Figura 56.4, se observa la variación de la longitud de penetración  $\mu_0$  de las ondas térmicas en distintos materiales como función del período  $p_0$ .



**Figura 56.4** Variación de la longitud de penetración de las ondas térmicas,  $\mu_0$ , en distintos materiales. En la tierra las variaciones diarias se atenúan en unos 50cm, las anuales en pocos metros y las seculares en algunos cientos de metros.

Para el mismo tiempo  $\tau = p_0/2$ , pero para una distancia  $x = 0,38 \lambda$ , según la Ec. (56.13) tenemos que:

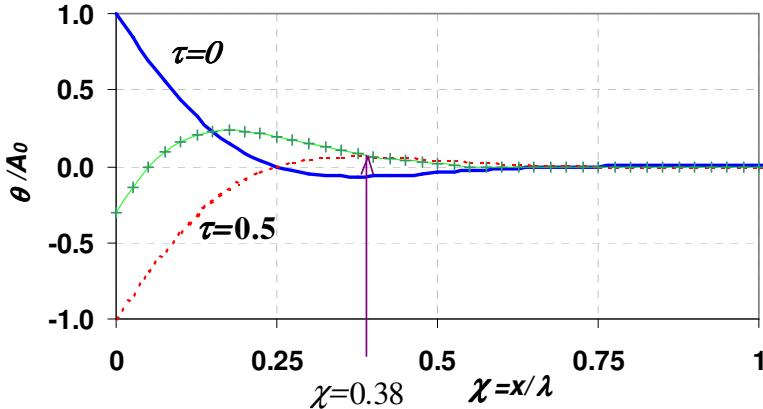
$$\theta(\lambda, \tau) = -\theta(0,0) / e^{2\pi} \approx -0,067 \cdot \theta(0, \tau), \quad (56.16)$$

por lo tanto, a esta profundidad, la onda térmica está atenuada en un 6,7%, pero presenta una fase opuesta al valor de la onda en la superficie ( $x=0$ ). Es decir, si estamos en verano, a esta profundidad ( $x = 0,38 \lambda$ ), la temperatura en esta zona es más fría que en la superficie y en invierno es más cálida que en la superficie. Por lo tanto, usando un sistema de intercambio de calor como *tubos enterrados*, es posible usar esta propiedad del suelo para lograr un acondicionamiento térmico de ambientes natural que no consuma energía.<sup>16</sup> Esta técnica se usa en varios lugares del mundo y hace que las cuevas sean recintos con temperaturas particularmente adecuadas para vivir. De hecho, en estas moradas nuestros antepasados soportaron los largos períodos de glaciación.

Utilizando las variables reducidas (adimensionales)  $\tau = t/p_0$  y  $\chi = x/\lambda$ , la Ec. (56.13) se puede escribir como:

$$\theta(x, t) = A_0 \exp(-2\pi \cdot \chi) \cos(2\pi(\chi \pm \tau) + \phi_0), \quad (56.17)$$

cuya representación gráfica para distintos valores de  $\tau$  y  $\chi$  se muestran en la Figura 56.5.



**Figura 56.5** Variación de la temperatura  $\theta(\chi, \tau)/A_0$  de una barra a distintas profundidades reducidas  $\chi$  y a distintos tiempos reducidos  $\tau$ . Después de un semiperíodo ( $\tau=0.5$ ) y a una profundidad  $\chi=0.38$ ; la onda térmica tiene la fase opuesta a su valor de superficie,  $\chi=0$ . Nótese la similitud de estas curvas con las mediciones de temperaturas del suelo de la Figura 56.2.

El tratamiento anterior supone una barra de longitud infinita. Sin embargo, como la onda se atenúa en unas pocas longitudes de onda, una barra cuya longitud sea  $l > 4\lambda$  puede ser considerada infinita.

### Proyecto 185. *Propiedades térmicas del suelo*

**Equipamiento recomendado:** Cuatro o más termómetros conectados a un sistema de adquisición de datos por computadora.

Un problema de mucha importancia práctica en múltiples campos, es comprender las propiedades térmicas del suelo.<sup>17</sup> En agricultura es esencial conocer la temperatura a la que se encuentran las semillas para su correcta germinación y crecimiento. También en ingeniería es imprescindible conocer el comportamiento térmico del suelo, ya que tanto los gasoductos como oleoductos no deben estar sometidos a grandes variaciones térmicas, pues los cambios de longitud por dilatación térmica pueden ser grandes y pueden afectar su estructura. Asimismo, la temperatura del suelo modifica las propiedades de los combustibles que se transportan.

Para estudiar las propiedades térmicas del suelo se propone medir la temperatura a diversas profundidades como función del tiempo, a lo largo de uno o dos días. Para este experimento es conveniente elegir días despejados de gran amplitud térmica. Se sugiere colocar varios termómetros conectados a un sistema de adquisición de datos por computadora. Es conveniente tener un sensor que registre la temperatura ambiente a 1 ó 2 cm arriba del suelo. El más profundo no debería superar unos 50 cm. Los sensores térmicos pueden ser termistores, termocuplas, Pt100 o sensores basados en circuitos integrados como los LM35, ver capítulo 50.

#### Sugerencias de trabajo:

- ✓ Comience la adquisición de datos midiendo las temperaturas a una tasa de aproximadamente una medición cada 10 ó 15 minutos.
- ✓ Con los datos obtenidos a lo largo de uno o dos días completos, graficar para cada termómetro (*i*) la temperatura en función del tiempo.
- ✓ Para cada sensor, determine la amplitud térmica  $\Delta T = (T_{max} - T_{min})$  para un día completo y grafique  $\Delta T$  como función de la profundidad  $x$ , en escala lineal y semilogarítmica. Si observa una dependencia exponencial, como la que predice la Ec.(56.24), determine  $\mu_0$  a partir de sus datos. Estime el valor de la difusividad del suelo y compare con los valores tabulados. Para un suelo seco  $k \approx 4 \times 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$  ( $K = 1,2 \text{ W/m}\cdot\text{K}$ ,  $\rho = 2500 \text{ kg/m}^3$  y  $c = 1260 \text{ J/kg}\cdot\text{K}$ ), ver Anexo B.
- ✓ A partir de la posición temporal de los máximos de dos termómetros, 1 y 2, determine el intervalo de tiempo  $\Delta t_{1,2}$  en que cada uno alcanza su máximo. A partir de estos datos, estime la velocidad de propagación de las ondas de calor en el suelo  $v_0 = (x_2 - x_1) / \Delta t_{1,2}$  para los distintos pares de termómetros usados y obtenga el mejor valor de  $v_0$  y  $k$ , y sus respectivas incertezas. Compare su valor con el predicho por el modelo teórico, Ecs.(56.11) y (56.12). Un método mejor para obtener el valor promedio de  $v_0$  consiste en graficar la posición de cada termómetro  $x_i$  como función de desfasaje  $\Delta t_{1i}$  de cada uno de ellos respecto del primero (el que está en la tierra más próximo a la superficie lo designamos como 1). Si los datos se alinean, la pendiente será el mejor valor de  $v_0$ .
- ✓ Usando todos los datos medidos de  $T(x,t)$ , con el modelo descripto por la Ec. (56.13), intente ajustar sus datos con esta expresión teórica. Varíe el valor de la constante  $k$  hasta obtener el mejor ajuste posible de los datos. Discuta la bondad del modelo propuesto para explicar sus datos. En el Anexo B se proveen datos de conductividades y difusividades de distintos materiales.

### 56.3.2 • • Ondas térmicas. Modelo II (tema opcional)

Consideremos ahora el caso en que la variación de la fuente térmica colocada en el extremo izquierdo sea periódica pero no sinusoidal. Por el teorema de Fourier la variación de la fuente se puede descomponer en una serie de la forma:<sup>18</sup>

$$\theta(x=0,t) = \sum_{n=1} A_n \cos(\omega_n t - n\phi_0), \quad (56.18)$$

con

$$A_n = \frac{2}{p_0} \int_0^{p_0} \theta(x=0,t) \cdot \cos(n\omega_0 t), \quad (56.19)$$

donde  $p_0 = 2\pi/\omega_0$  es el período fundamental de la onda. Usando el método de separación de variable y superposición, la solución de la ecuación de difusión del calor, Ec. (56.9), se puede escribir en este caso como:

$$\theta(x,t) = \sum_{n=1} A_n \exp(-\varepsilon_n x) \cos(\omega_n t - \varepsilon_n x + n\phi_0), \quad (56.20)$$

o bien:

$$\theta(x,t) = \sum_{n=1} A_n \exp(-x/\mu_n) \cos(\varepsilon_n(v_n t - x) + n\phi_0). \quad (56.21)$$

Las constantes  $\omega_n$  y  $\varepsilon_n$  se obtienen reemplazando esta expresión en la Ec.(56.9):

$$\omega_n = \frac{2\pi n}{p} = n \cdot \omega_0, \quad (56.22)$$

y

$$\varepsilon_n = \sqrt{\frac{\omega_n}{2k}} = \frac{\sqrt{n}}{\mu_0} = \frac{1}{\mu_n}. \quad (56.23)$$

La velocidad de propagación de las distintas armónicas es:

$$v_n = \frac{\omega_n}{\varepsilon_n} = \sqrt{n} \cdot v_0, \quad \text{con} \quad v_0 = \sqrt{4\pi k / p_0}. \quad (56.24)$$

Estos últimos parámetros dan una idea de la velocidad de penetración de las armónicas ( $n > 1$ ) respecto de la fundamental ( $n = 1$ ).

Las constantes  $A_n$  y  $\phi_0$  en la Ec.(56.21) dependen de las condiciones de borde del problema. Nótese que las ondas armónicas ( $n > 1$ ) tienen una penetración  $\mu_n = \mu_0/n$ , menor que la fundamental. De este modo, a cierta distancia del origen ( $x = 0$ ), la onda térmica estará dominada por la onda fundamental ( $n=1$ ), mientras que las armónicas se irán atenuando progresivamente a medida que  $x$  aumente. Esto significa que a cierta distancia del origen o a cierta “profundidad”, la onda térmica estará dominada por una onda sinusoidal cuya frecuencia será la fundamental ( $\omega_0 = 2\pi/p_0$ ), independientemente de la forma de la señal térmica para  $x = 0$ .

a) Si suponemos que las condiciones de borde, para  $x = 0$ , están dadas por una *señal cuadrada* de período  $p_0$ , y amplitud  $\theta_0$ , o sea:

$$\theta(0, t) = \sum_{n=impar} A_n \cos(\omega_n t + n\phi_0) = \sum_{n=impar} \left( \frac{4\theta_0}{\pi n} \right) \cos(n(\omega_0 t + \phi_0)), \quad (56.25)$$

con

$$A_n = \frac{4\theta_0}{\pi n} \quad \text{para } n \text{ impar y } A_n = 0 \text{ para } n \text{ par.} \quad (56.26)$$

Aquí,  $\phi_0$  es la fase inicial de la onda, que depende de las condiciones iniciales, o sea el valor de  $\theta(0, 0)$ .

b) Similarmente, si suponemos que las condiciones de borde, para  $x=0$ , están dadas por una *señal triangular* de período  $p$  y amplitud  $\theta_0$ , tenemos:

$$\theta(0, t) = \sum_{n=impar} A_n \cos(\omega_n t + n\phi_0) = \sum_{n=impar} \left( \frac{4\theta_0}{\pi n^2} \right) \cos(n(\omega_0 t + \phi_0)), \quad (56.27)$$

con

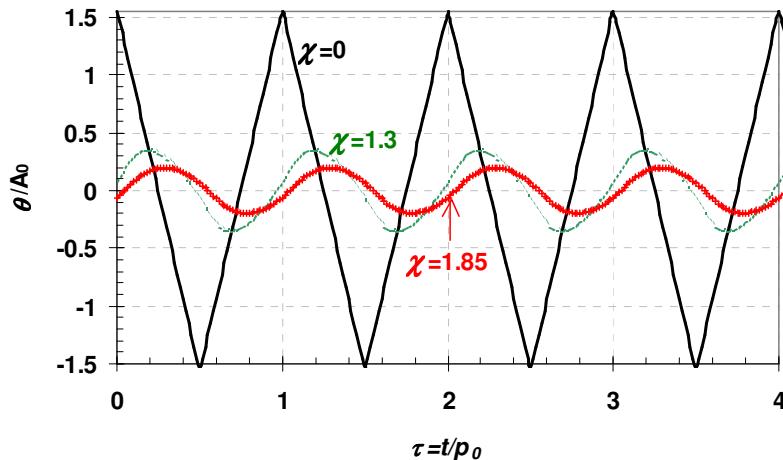
$$A_n = \frac{4\theta_0}{\pi n^2} \quad \text{para } n = \text{impar y } A_n = 0 \text{ para } n \text{ par.} \quad (56.28)$$

Combinando la Ec. (56.27) con la Ec. (56.13) obtenemos:

$$\theta(x, t) = \sum_{n=impar} \left( \frac{4\theta_0}{\pi n^2} \right) \exp(-\varepsilon_n x) \cos(\omega_n t - \varepsilon_n x + n\phi_0). \quad (56.29)$$

C) En el caso en que el elemento generador de calor sea una resistencia, dado que al encenderla lo que se genera es una potencia constante, que a su vez genera un flujo de calor constante  $H_0 = dQ/dt$ , hacia la barra, la ecuación de conducción de calor, aplicada a este extremo de la barra, lleva a:  $H_0 = -K A dT_a/dt$ . Aquí  $T_a$  es la temperatura del extremo de la barra adyacente a la fuente de calor. Si suponemos que  $H = dQ/dt$  es una función cuadrada, como:  $dT_a/dt = -H_0 / (K A)$ , podemos suponer que  $T_a(t)$  será una

función triangular. Por lo tanto, la condición que mejor se aproxima a la realidad en este caso, es la onda triangular, Ec. (56.29).



**Figura 56.6** Variación de la temperatura de una barra a distintas profundidades  $\chi=x/\lambda$ , como función del tiempo normalizado  $\tau=t/p_0$ . Si la conducción térmica disminuye, la onda térmica se atenúa más rápidamente. Además las ondas a mayor profundidad ( $\chi$  mayor) se van atrasando y atenuándose. Las componentes de orden superior ( $n>1$ ) se atenúan más rápidamente. Estos gráficos se obtuvieron usando la Ec. (56.29).

En todos los casos es importante observar el comportamiento del termómetro más cercano al calefactor y verificar cuál es la condición de borde que mejor describe el sistema en estudio. Un modo de simular el efecto de que el calefactor tiene una masa finita, consiste en definir la coordenada  $x$  (que se usa en la Ec. (56.29)) como:

$$x = x_{real} + \delta x_0, \quad (56.30)$$

donde  $x_{real}$  es la posición medida del termómetro y  $\delta x_0$  un parámetro que se ajusta de modo tal que la expresión (56.29) reproduzca los valores medidos de la temperatura para el termómetro más cercano al calefactor.

Es interesante notar que los máximos de temperatura  $\theta_{máx}$  para una dada profundidad ( $x$ ) ocurrirán cuando el valor del coseno sea igual a 1. O sea:

$$\theta_{máx}(x) = \sum_{n=impar} \left( \frac{4\theta_0}{\pi n^2} \right) \exp(-\varepsilon_n x) \approx \left( \frac{4\theta_0}{\pi} \right) \exp(-x/\mu_0). \quad (56.31)$$

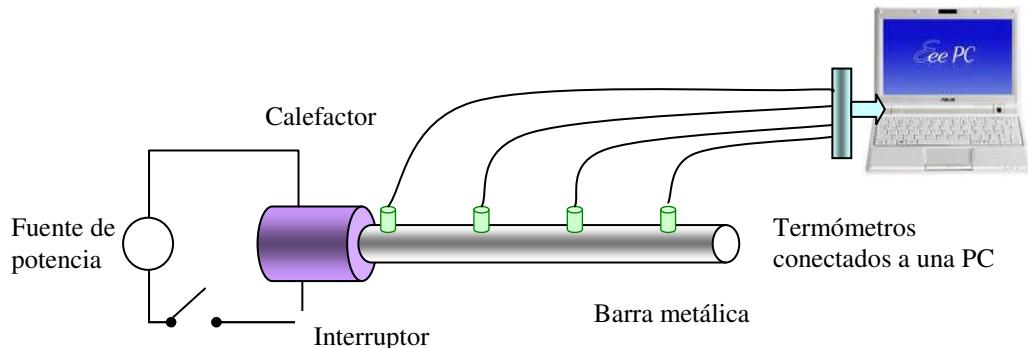
Esto es consecuencia de que los términos asociados a  $n>1$  se atenúan a distancias cada vez menores; por lo tanto, para una barra metálica, a unos pocos centímetros del extremo en contacto con el calefactor, la Ec. (56.31) es una buena aproximación y nos indica un posible modo de determinar  $k$ . Se determina la amplitud de la onda térmica,  $\theta_{máx}(x_i)$ , en función de la profundidad  $x_i$  (posición del termómetro  $i$ ). Si el gráfico de  $\ln(\theta_{máx}(x_i)/\theta_{máx}(x_1))$  en función de  $x_i$  es lineal de la pendiente, Ec. (56.31), podemos determinar  $k$ . Aquí  $x_1$  es la posición del termómetro más cercana al calefactor.

## Proyecto 186. Ondas de calor en una barra

**Equipamiento recomendado:** Dos o más barras metálicas de unos 60 cm a 1 m de longitud y de diámetros entre 1 y 2 cm y de una longitud entre 50 y 100 cm. Tres o más termómetros conectados a un sistema de adquisición de datos por computadora.

Para este experimento se propone usar una barra metálica de unos 60 cm a 1 m de longitud y de diámetro entre 1 y 2 cm. Con un torno se reduce uno de los extremos de cada barra, de modo que pueda conectarse al calefactor de un soldador de estaño estándar. Así la fuente de calor está íntimamente conectada a uno de los extremos de la barra. Se realizan perforaciones de unos 5 a 8 mm de profundidad a lo largo de la barra, y perpendiculares a su eje, de modo que se pueda insertar en ellos los sensores de temperatura.<sup>14,17</sup> Estas perforaciones se realizan cada 5 cm a lo largo de la barra. En ellas se colocan los sensores de temperatura conectados a un sistema de adquisición de datos por computadora. El calefactor se enciende de modo periódico. Es conveniente disponer de unas dos o más barras de características geométricas similares, pero de distintos materiales. Asimismo, una de ellas debería ser de un metal cuyas propiedades térmicas sean bien conocidas, de manera que se pueda usar como banco de prueba del método experimental propuesto. Los sensores térmicos pueden ser termistores, termocuplas, Pt100 o sensores basados en circuitos integrados, ver capítulo 50. En la Figura 56.7 se muestra un diagrama esquemático del experimento.

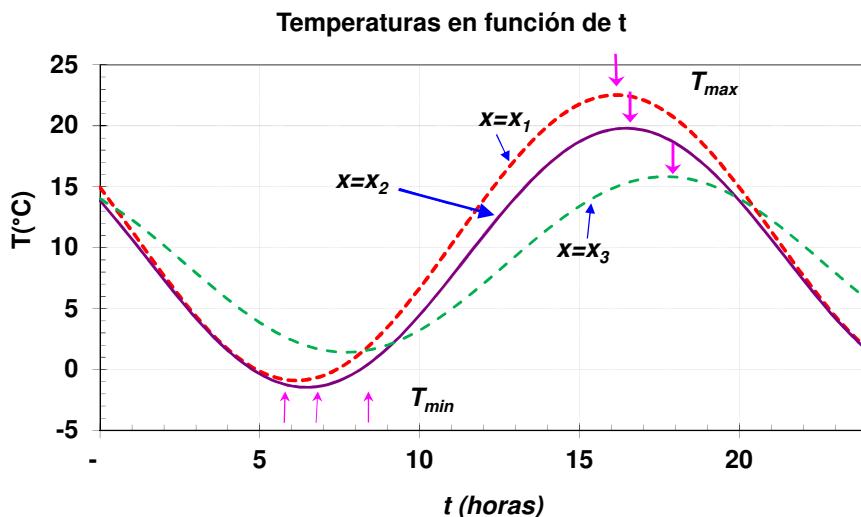
Las posiciones de los sensores térmicos,  $x_i$ , nos indican la coordenada o “profundidad” a la que medimos la temperatura. Es conveniente elegir un período  $p_0$  de excitación de la fuente térmica entre unos 100 y 500 s.



**Figura 56.7** Arreglo experimental con una barra metálica de unos 60 cm a 1 m y de aproximadamente 1 cm de diámetro, conectada a un calefactor que pueda ser encendido de modo periódico.<sup>14,17</sup>

#### Sugerencias de trabajo:

- ✓ Comience a ciclar la fuente térmica en el período elegido, hasta que se observe una situación estacionaria. Esto significa que la temperatura media de cada termómetro se mantiene constante. Operacionalmente, se puede verificar que la barra llegó al estado estacionario graficando las temperaturas máximas  $T_{\max}(x)$  y  $T_{\min}(x)$  en función de  $x$ . Si la relación entre estas variables es lineal, es indicativo de que estamos en condiciones estacionarias.



**Figura 56.8** Variación de la temperatura de la tierra a distintas profundidades ( $x$ ), como función del tiempo. Nótese que los valores máximos y mínimos se alcanzan en distintos tiempos.

- ✓ Comience la adquisición de datos midiendo las temperaturas a una tasa de aproximadamente 1 a 5 Hz, asegurándose de medir al menos unos cinco ciclos completos de período  $p_0$ .
- ✓ Con los datos obtenidos, represente gráficamente la temperatura en función del tiempo, para cada termómetro ( $i$ ) y verifique que se llegó a una situación estacionaria. En estas condiciones la señal oscila manteniendo los mismos máximos, mínimos y valor medio.
- ✓ Represente gráficamente, para cada termómetro, su valor medio temporal  $\langle T(x) \rangle (\approx 0,5(T_{\max} + T_{\min}))$  como función de  $x$ . Si la relación es lineal, se pueden obtener los parámetros  $T_{00}$  y  $m$  de la Ec. (56.8),  $T_b(x) = T_{00} - m.x$ . Una vez determinada esta expresión, calcular la temperatura normalizada  $\theta(x, t) = T_{\text{medida}}(x, t) - T_b(x)$ .
- ✓ En condiciones estacionarias, represente gráficamente la temperatura máxima  $\theta_{\max}$  (observada para cada termómetro  $i$  en la posición  $x_i$ ) como función de la posición  $x_i$ , en escala lineal y semilogarítmica.
- ✓ ¿Qué puede concluir acerca de la dependencia de  $\theta_{\max}(x)$  como función de  $x$ ?
- ✓ Si la dependencia es exponencial, usando la Ec. (56.31), determine  $\mu_0$  para cada una de las barras estudiadas. A partir de esta información, usando la Ec. (56.11), determine la difusividad  $k$  y la conductividad  $K$  de cada barra.
- ✓ A partir de la posición temporal de los máximos de dos termómetros, 1 y  $j$ , determine el intervalo de tiempo  $\Delta t_{1,j}$  en que cada uno alcanza su máximo. A partir de estos datos, estime la velocidad de propagación de las ondas de calor en el suelo  $v_0 = (x_j - x_1) / \Delta t_{1,j}$  para los distintos pares de termómetros usados y obtenga el mejor valor de  $v_0$  y  $k$ , y sus respectivas incertezas. Compare su valor con el predicho por el modelo teórico, Ec. (56.11). Un método mejor para obtener el valor promedio de  $v_0$  consiste en graficar la posición de cada termómetro  $x_j$  como función de desfase  $\Delta t_{1,j}$  de cada uno de ellos respecto del primero (el que está en la superficie 1). Si los datos se alinean, la pendiente será el mejor valor de  $v_0$ .
- ✓ Usando la Ecs. (56.29), compare las predicciones de esos modelos con los datos medidos. Ajuste los datos experimentales con estas expresiones y obtenga el mejor valor de la constante  $\varepsilon_0$  o  $\mu_0 = \sqrt{p_0 \cdot k / \pi}$  y una estimación de sus errores.
- ✓ ¿Cómo se compara este valor con los obtenidos anteriormente y con los valores de tabla?

- ✓ Discuta cómo se atenúan las ondas térmicas para ondas excitadoras de distintas frecuencias usando sus datos experimentales.
- ✓ Para la barra de propiedades térmicas conocidas, compare el valor obtenido para  $k$  con los valores tabulados para esta misma cantidad. ¿Qué puede concluir de este análisis?
- ✓ Usando todos los datos medidos de  $T(x, t)$  y el modelo descripto por la Ec. (56.29) o la Ec. (56.10), intente ajustar los datos medidos con esta expresión teórica. Varíe el valor de la constante  $k$  hasta obtener el mejor ajuste posible de los datos. Discuta la bondad del modelo propuesto.

## 56.4 - Barra con enfriamiento lateral - Convección

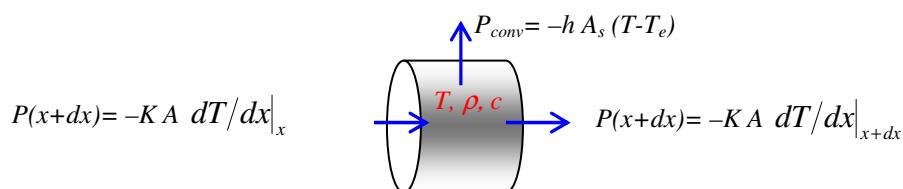
En la sección anterior estudiamos el caso de una barra en el que el único mecanismo de transmisión era la conducción a lo largo de ella. Aquí vamos considerar el caso en que hay pérdidas de calor por su cara lateral. En particular, suponemos que la barra está en un medio fluido a una temperatura  $T_e$  y que su enfriamiento es consecuencia de la convección a través del fluido y de la conducción por la barra. La convección es en general un proceso muy complejo. Sin embargo, una aproximación útil de este proceso viene descripta por la Ley de enfriamiento de Newton, Ec. (56.1). En la Tabla 56.1, del Anexo A se indican valores aproximados para constantes de convección  $h$ .<sup>12,20</sup>

Consideremos una barra de longitud  $l$  y radio  $a$ , similar a la representada en la Figura 56.3(a). Si los efectos de convección no son despreciables, realizando un balance de energía en un elemento infinitesimal de longitud  $dx$  como se ilustra en la Figura 56.9, tenemos:

$$c\rho A \delta x \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = -KA \left( \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_x - \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x+dx} \right) - hA_s(T(x,t) - T_e), \quad (56.32)$$

o bien,

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = +\frac{K}{c\rho} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{h \cdot \phi}{c\rho A} (T(x,t) - T_e). \quad (56.33)$$



**Figura 56.9** Balance de energía para un elemento infinitesimal de volumen de una barra.

Aquí  $A_s (=2\pi a dx \sim \phi dx)$ , es la superficie lateral y  $\phi$  es el perímetro de esta superficie.  $A (= \pi a^2)$  es el área transversal del elemento en análisis. Definiendo  $k = K/(c \rho)$  y  $\beta = h/\phi c \rho A$ , y  $\theta(x, t) = T(x, t) - T_e$ , tenemos:

$$\frac{\partial \theta(x,t)}{\partial t} = +k \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \beta \cdot \theta(x,t). \quad (56.34)$$

En condiciones estacionarias ( $\partial \theta / \partial t = 0$ ), esta ecuación se reduce a:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{\beta}{k} \cdot \theta(x,t) = \alpha^2 \cdot \theta(x,t). \quad (56.35)$$

Para una barra de sección circular y radio  $a$ , tenemos:

$$\alpha^2 = \beta/k = \frac{h}{K} \frac{\phi}{A} = \frac{h}{K} \frac{2}{a}. \quad (56.36)$$

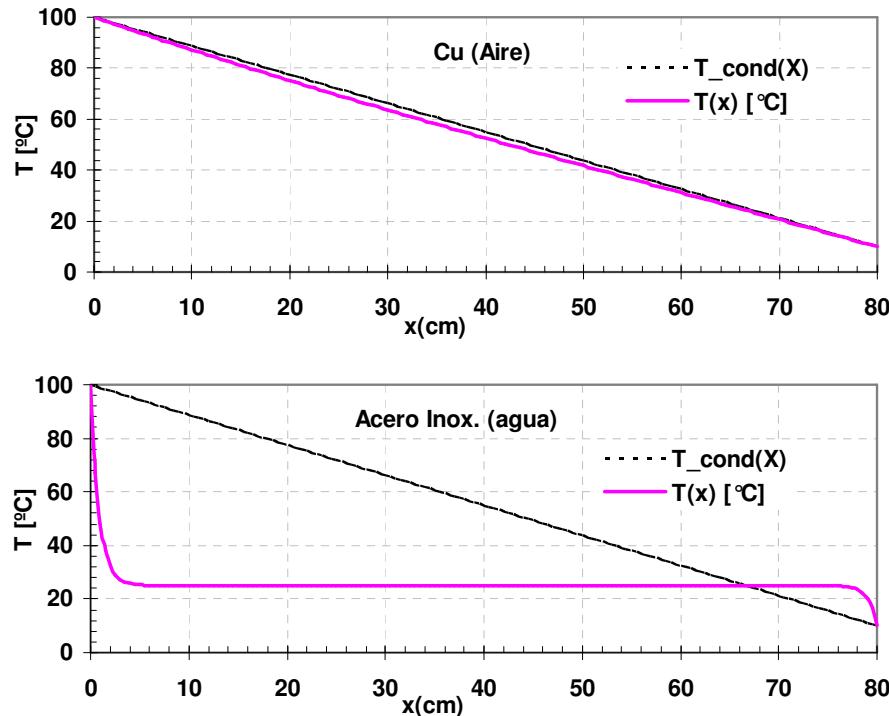
Consideremos una barra cuyo extremo izquierdo está a una temperatura fija  $T_a$  y su extremo derecho está a otra temperatura  $T_b$ , resolviendo la Ec. (56.35) tenemos:

$$T(x) = T_e + (T_a - T_e) \frac{\sinh(\alpha(L-x))}{\sinh(\alpha L)} + (T_b - T_e) \frac{\sinh(\alpha \cdot x)}{\sinh(\alpha L)}. \quad (56.37)$$

Es útil definir el **Número de Biot (Bi)** como el cociente entre los efectos convectivos a los conductivos en un cuerpo:

$$Bi = \frac{\text{Flujo de calor por convección}}{\text{Flujo de calor por conducción}} = \frac{h A_s}{K A / dx} = \frac{h}{K} \frac{\delta V}{A} = \frac{h}{K} \lambda \approx \alpha^2 a^2. \quad (56.38)$$

Aquí  $\lambda$  es el cociente entre un volumen y un área, que para un cilindro con  $dx \sim a$  es  $\lambda \sim 2a$ .



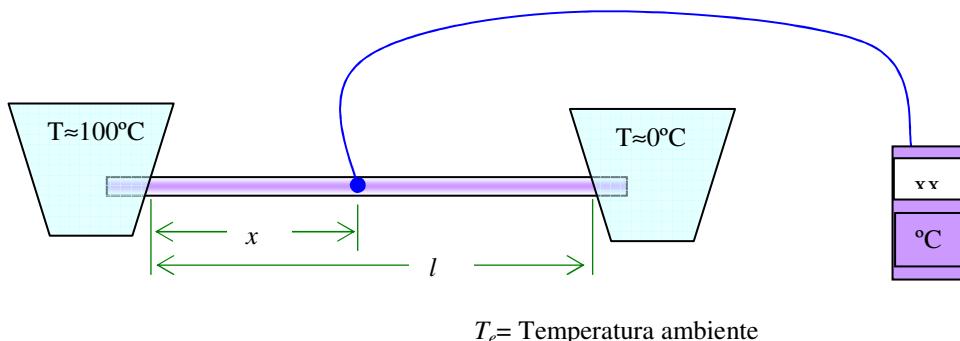
**Figura 56.10** Efecto de la convección en una barra de cobre en aire (panel superior  $Bi=9 \cdot 10^{-5}$ ) y de acero inoxidable en agua (panel inferior  $Bi=2,3 \cdot 10^{-2}$ ), ambas en estado estacionario y con diámetro 1,5 cm. La línea continua gruesa es la solución (56.37) teniendo en cuenta la convección y la conducción. La línea fina es el resultado de despreciar la convección. Se ve claramente que cuando  $Bi \ll 0,001$  depreciar la convección es una aproximación razonable, en caso contrario el efecto de la convección es importante. La temperatura externa es de 25°C.

En general, hay bastante incertezza en el valor de  $h$  (un 10% es característico) y en la práctica se considera que los efectos convectivos son despreciables respecto de los conductivos si  $Bi < 0,01$ . En la Figura 56.8 se representan las variaciones de temperatura para una barra de cobre (buen conductor) en aire y una de acero inoxidable (mal conductor) en agua, ambas de diámetro  $2a = 1,5$  cm. Vemos que en el segundo caso no es posible despreciar los efectos de la convección.

## Proyecto 187. Estudio de conducción y convección en una barra

**Equipamiento recomendado:** Dos barras metálicas de entre 60 cm y 1 m de longitud y de diámetro entre 5 mm y 2 cm. Dos termómetros estándares de vidrio. Un termómetro basado en un termistor o termocupla. Dos recipientes de poliuretano expandido de  $\frac{1}{2}$  a 1 litro.

Para este experimento se propone usar al menos dos barras metálicas. El arreglo experimental consiste en disponer de dos recipientes de poliuretano expandido de aproximadamente 1 litro (los envases de cremas heladas pueden servir muy bien para este experimento). Realice perforaciones a los lados de dichos recipientes de modo que pueda introducir los extremos de la barra unos 4 ó 5 cm dentro del agua contenida en ellos y selle con epoxy, como se indica en la Figura 56.11.



**Figura 56.9** Arreglo experimental con barra metálica de cobre, aluminio o acero inoxidable. Los recipientes de los extremos actúan como reservorios de calor. Un termómetro o termocupla mide la temperatura de la barra en función de la posición  $x$ .

En cada uno de los recipientes mantenga la temperatura lo más constante posible, por ejemplo colocando hielo en la parte fría y haciendo hervir el agua en la caliente mediante un calefactor eléctrico de inmersión. Controle la temperatura en cada uno de los reservorios. Con un termómetro basado en un termistor o una termocupla, controle la temperatura en un punto cercano a la fuente caliente a unos 5 a 10 cm de ella.

### Sugerencias de trabajo:

- ✓ Cuando la temperatura deje de variar con el tiempo, se habrá alcanzado un régimen estacionario. En estas condiciones, mida la temperatura de la barra en función de la posición  $x$ , o sea, mida  $T(x)$  para al menos unos 10 puntos equidistantes entre los dos extremos.
- ✓ Para cada barra, represente gráficamente la temperatura  $T(x)$  como función de  $x$ . En la misma figura, incluya la curva correspondiente al modelo teórico, Ec. (56.37). Varíe el parámetro  $\alpha$  que brinde el mejor ajuste de los resultados experimentales.
- ✓ Usando los valores de conductividad de la barra de tablas (Anexo A) estime el mejor valor del coeficiente de convección  $h$  para la barra en el aire. Compare este valor con los de tabla.
- ✓ Repita este análisis para todas las barras de las que disponga.

- ✓ Discuta la bondad del modelo para reproducir sus datos y, para cada caso, indique la relevancia del fenómeno de convección en cada tipo de barra usada.

## Anexo A Propiedades térmicas de materiales

**Tabla 56.1 – Coeficiente de convección**

<i>Tipo</i>	<i>h[W/m<sup>2</sup>°C]</i>
Convección libre en gases	2 - 25
Convección libre en líquido	10 - 1000
Convección forzada en gases	25 - 250
Convección forzada en líquido	2500 - 10 <sup>5</sup>

**Tabla 56.2 – Conductividad térmica y coeficiente de difusividad<sup>19</sup>**

<i>Material</i>	<i>Conductividad K(W/m°C)</i>	<i>Difusividad k(m<sup>2</sup>/s) x 10<sup>6</sup></i>
Plata	429	177,6
Diamante	2300	149,0
Oro	317	127,0
Cobre	401	113,0
Aluminio	237	97,5
Bronce (Cu63%,Zn37%)	109	33,6
Hierro	80,2	22,8
Aire (g)	0,026	21,559
Bronce (Cu89%,Sn11%)	52	16,1
Mercurio (liq)	8,54	4,7
Acero inoxidable(25°C)	16,2	4,03
Tierra seca	1,5	2,778
Saladar (Salt-Marsh)	0,61	0,157
Suelo (seco)	2,5	0,47
Hielo	1,97	1,2
Poliestireno expandido	0,033	1,1
Suelo (seco)	1,5	0,52
Ladrillo	0,72	0,52
Vidrio	0,78	0,34
Fibra de vidrio	0,043	0,23
Agua (liq)	0,613	0,14
Madera (roble)	0,17	0,13

Más información se puede obtener de la Ref. 7 y [http://www.engineeringtoolbox.com/thermal-conductivity-d\\_429.html](http://www.engineeringtoolbox.com/thermal-conductivity-d_429.html)

**Tabla 56.3** Propiedades físicas (del agua pesada y liviana)

Propiedad	D <sub>2</sub> O (agua pesada)	H <sub>2</sub> O (agua liviana)
Punto de fusión (°C)	3,82	0,0
Punto de ebullición (°C)	101,4	100,0
Densidad (a 20°C, kg/l)	1,1056	0,9982
Temp. de máxima densidad (°C)	11,6	4,0

## Referencias

- 
- <sup>1</sup> Earth Observatory Nasa, NASA, Global Warming  
<http://earthobservatory.nasa.gov/Features/GlobalWarming/page2.php>
- <sup>2</sup> Berkeley Earth, Grupo independiente de estudios climáticos, <http://berkeleyearth.org/>
- <sup>3</sup> NASA, GISS Surface Temperature Analysis[http://data.giss.nasa.gov/gistemp/graphs\\_v3/](http://data.giss.nasa.gov/gistemp/graphs_v3/)
- <sup>4</sup> M. E. Mann, et al. "Optimal surface temperature reconstructions using terrestrial borehole data", *J. Geophys. Res.* **108**, (D7), 4203, (2003).
- <sup>5</sup> P. D. Jones, D.E. Parker, T.J. Osborn & K.R. Briffa (2005) as "Global and hemispheric temperature anomalies – land and marine instrumental records". In Trends: A Compendium of Data on Global Change. Carbon Dioxide Information Analysis Center, Oak Ridge National Laboratory, U.S. Department of Energy, Oak Ridge, Tenn., U.S.A.  
<http://cdiac.esd.ornl.gov/trends/temp/jonescr/jones.html>
- <sup>6</sup> World Meteorological Organization,, Intergovernmental Panel on Climate Change (IPCC), Fifth Assessment Report: Climate Change 2013 <http://www.ipcc.ch/>
- <sup>7</sup> R. A. Muller, G. J. MacDonald, *Ice Ages and Astronomical Causes: Data, Spectral Analysis, and Mechanisms* (Springer-Verlag Telos N.Y., 2000). <http://muller.lbl.gov/>,  
<http://muller.lbl.gov/pages/iceagebook/IceAgeTheories.html>
- <sup>8</sup> A. C. Redfield, "Terrestrial Heat Flow through Sal-Marsh Peat" *Science* **148**, (3674) May 28, 1291-92 (1965).
- <sup>9</sup> H. N. Pollack and D. S. Chapman, "Underground Records of Changing Climate," *Scientific American*, **268** (6) p. 44, June 1993.
- <sup>10</sup> D. C. Giancoli, *Física: Principios con aplicaciones*. (Prentice Hall, México, 1997).
- <sup>11</sup> J. D. Wilson *Física - 2nda Ed.* - Prentice Hall México 1996.
- <sup>12</sup> Y.A. Cengel, *Heat transfer, a practical approach* (The Mc Graw-Hill Co. NY 2003) .
- <sup>13</sup> M. R Spiegel, *Advanced mathematics for engineers and scientists* (McGraw Hill, N.Y., 1980).
- <sup>14</sup> A. Bodas, V. Gandía, and E. López-Baezab , "An undergraduate experiment on the propagation of thermal waves," *Am. J. Phys.*, **66**, (6), 528 (1998).
- <sup>15</sup> M. C. Sullivan and B. G. Thompson, "An experiment on the dynamics of thermal diffusion," *Am. J. Phys.*, **76**, (7), 637 (2008).
- <sup>16</sup> Ground-coupled heat exchanger, en Wikipedia, [http://en.wikipedia.org/wiki/Ground-coupled\\_heat\\_exchanger](http://en.wikipedia.org/wiki/Ground-coupled_heat_exchanger).
- <sup>17</sup> L. Iannelli, y S. Gil , "Acondicionamiento Térmico de Aire Usando Energía Geotérmica-Ondas de Calor," *Lat. Am. J. Phys. Educ.* Vol. **6**, No. 1, 99(1.05), March 2012.
- <sup>18</sup> Hwe P. Hsu, *Applied Fourier analysis* (Int. Thompson, NY, 1984).
- <sup>19</sup> Tablas muy completas pueden encontrarse en: The Engineering Tool Box:  
[http://www.engineeringtoolbox.com/material-properties-t\\_24.html](http://www.engineeringtoolbox.com/material-properties-t_24.html).

# Capítulo 57

## Difusión

En este capítulo deseamos estudiar el fenómeno de la difusión, que es un efecto muy usual y de gran importancia en la naturaleza. En particular, consideraremos la difusión de una gota de tinta o de un grano de permanganato de potasio en el agua, que son dos ejemplos de difusión en dos dimensiones. A partir de estos estudios intentaremos determinar los coeficientes de difusión de los sistemas estudiados y su variación con la temperatura.

### 57.1 Leyes de Fick de la difusión

Cuando una gota de tinta o témpora cae en un vaso de agua, se observa que se extiende y agranda paulatinamente. También, cuando abrimos un frasco de perfume, después de un cierto tiempo el olor se expande por toda la habitación. Estos ejemplos son ilustrativos de un fenómeno físico muy interesante y prevalente en la naturaleza, llamado *difusión*.<sup>1</sup>

En general, si la distribución de moléculas en un medio no es homogénea, se producirán flujos que tenderán a homogeneizar el sistema. De igual modo, si la concentración de un soluto en una solución no es homogénea, el sistema tenderá a evolucionar de modo de homogeneizarla. Designaremos con  $n$  la *concentración* de soluto (que podría ser el número de moles por unidad de volumen de soluto) o bien el *número de moléculas* por unidad de volumen. En general,  $n$  será una función de las coordenadas espaciales y temporales, o sea,  $n(x,y,z,t)$ . La *primera ley de Fick* describe la relación entre los flujos de partículas por unidad de área,  $\vec{J}$ , y los gradientes de concentración:<sup>1</sup>

$$\vec{J} = -D \cdot \vec{\nabla}n. \quad (57.1)$$

Aquí  $D$  es el *coeficiente de difusividad*, que en general dependerá del tipo de sistema en estudio y de la temperatura. El signo menos indica que los flujos de partículas van de las regiones de mayor concentración a las de menor concentración. Es decir, que esos flujos tienden a homogeneizar el sistema, que es una consecuencia del segundo principio de la termodinámica.

Por otra parte, si consideramos un elemento infinitesimal de volumen  $\Delta V$ , la ecuación de continuidad o de conservación de la masa indica que si hay un flujo neto hacia este elemento de volumen, la densidad o concentración de este elemento aumentará con el tiempo, esto es:

$$\iint \vec{J} \cdot d\vec{S} = -\Delta V \frac{\partial n}{\partial t}, \quad \text{o bien } \nabla \vec{J} = -\frac{\partial n}{\partial t}. \quad (57.2)$$

Combinando esta ecuación con la Ec. (57.1) obtenemos:

## Objetivos

- ✓ Difusión
- ✓ Difusión en una y dos dimensiones
- ✓ Determinación de la constante de difusividad

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D \cdot \nabla^2 n, \quad (57.3)$$

que se conoce como segunda ley de Fick o ecuación de difusión.

Es interesante notar la analogía entre la segunda ley de Fick y la ley de Fourier-Biot de difusión del calor —Ec.(56.6)—. De hecho, ambos fenómenos, la difusión de partículas y la difusión del calor, están íntimamente relacionados con el segundo principio de la termodinámica. Ambos procesos son ejemplos de efectos termodinámicos fuera del equilibrio, es decir, procesos irreversibles.

Por otro lado, hay varias teorías microscópicas que intentan describir el valor del coeficiente de difusión  $D$  en términos moleculares o microscópicos. En particular, la **teoría de Einstein** del movimiento browniano establece una conexión simple para la difusión no turbulenta de esferas pequeñas de radio  $a$  en un medio de viscosidad  $\eta$ , de la que se obtiene:<sup>2</sup>

$$D = \frac{k_B T}{6\pi\eta a}, \quad (57.4)$$

donde  $k_B$  es la constante de Boltzmann y  $T$  es la temperatura absoluta. Desde luego, ésta es una relación especial para un caso de una partícula pequeña en un medio viscoso, por ejemplo micelas de leche en agua.

## 57.2 Difusión en una y dos dimensiones

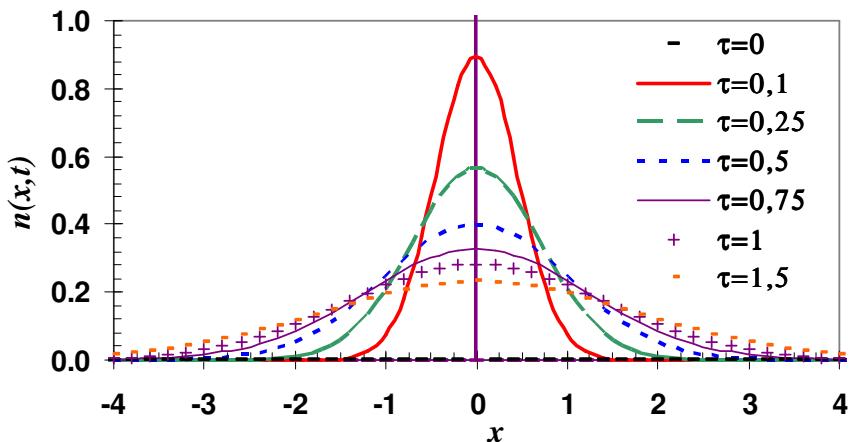
Para el caso unidimensional, la Ec. (57.3) se reduce a:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D \cdot \frac{\partial^2 n}{\partial x^2}, \quad (57.5)$$

cuya solución se puede obtener por el método de separación de variables. Se puede verificar que una solución de esta ecuación viene dada por:<sup>3,4</sup>

$$n(x, t) = \frac{A_0}{2\sqrt{\pi Dt}} e^{-(x^2/4Dt)} = \frac{A_0}{2\sqrt{\pi\tau}} e^{-(x^2/4\tau)}, \quad (57.6)$$

donde  $A_0$  es una constante que depende de las condiciones de contorno o iniciales. Por su parte, el parámetro  $\tau=Dt$  describe la evolución en el tiempo del proceso de difusión. De este modo podemos interpretar el coeficiente de difusividad  $D$  como un parámetro que determina la escala de tiempo en el proceso. Para  $t = 0$ , esta solución conduce a una singularidad en el origen ( $x = 0$ ). Físicamente, esta solución se correspondería al caso de que la gota de tinta que se dispersa, inicialmente, tiene un tamaño muy pequeño comparado con las dimensiones del sistema, es decir, en el que podemos considerar su tamaño como puntual. En la Figura 57.1 se ilustra la forma de la solución  $n(x, \tau)$  para distintos valores de  $\tau$ .



**Figura 57.1** Solución de la ecuación de difusión unidimensional para distintos valores del parámetro temporal  $\tau$ .

Si consideramos el frente de expansión de la gota, caracterizado por el punto de coordenadas  $x_0$ , para el cual se cumple en todo momento que  $n(x_0, t) = f \cdot n(0, t)$ , donde  $f$  es un factor  $0 < f < 1$ , es decir, la concentración del solvente en este punto es siempre un fracción  $f$  de la concentración en el origen, de la Ec. (57.6) tenemos que:

$$f = e^{-(x_0^2/4Dt)}, \text{ de donde } x_0^2 = 4\tau \ln(1/f) = 4 \cdot D.t \cdot \ln(1/f), \quad (57.7)$$

Por lo tanto, esperamos que este frente de expansión de la gota avance en forma proporcional a  $t^{1/2}$ .

De modo análogo, en el caso bidimensional se preserva la simetría cilíndrica, es decir, en este caso la gota de tinta se difunde en un recipiente plano y circular. La Ec.(57.3) se puede escribir en coordenadas cilíndricas o polares como:<sup>3,4</sup>

$$\frac{\partial n}{\partial(Dt)} = \frac{\partial n}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 n}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial n}{\partial r}, \quad (57.8)$$

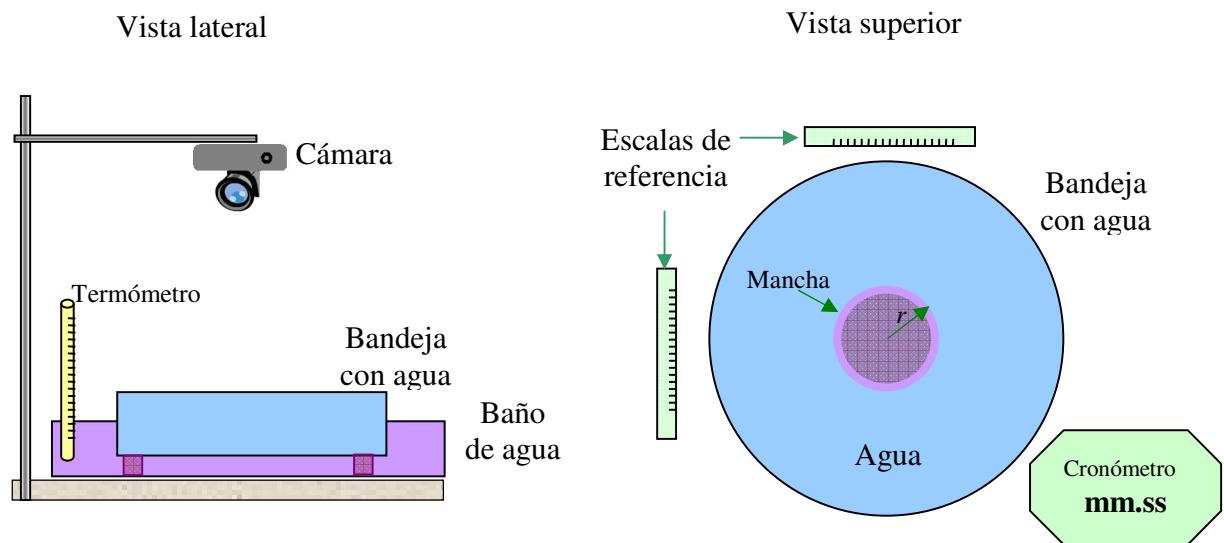
donde, al igual que antes,  $\tau = Dt$  y la coordenada  $r^2 = x^2 + y^2$  es la distancia de cualquier punto del plano al origen de coordenadas. Se puede verificar que una solución de esta ecuación viene dada por:

$$n(x, t) = \frac{A_0}{2Dt} e^{-(r^2/4Dt)} = \frac{A_0}{2\tau} e^{-(r^2/4\tau)}. \quad (57.9)$$

Esta expresión es la solución de la ecuación de difusión en dos dimensiones, con simetría cilíndrica y correspondiente al caso de una gota de tinta o un grano de soluto, cuyas dimensiones iniciales son muy pequeñas comparadas con el sistema físico en estudio. Al igual que en el caso unidimensional, el frente de difusión se propaga en forma proporcional a  $t^{1/2}$ .

### 57.3 Difusión en agua

Para poner a prueba las conjeturas discutidas en la sección anterior, podemos realizar un experimento usando un arreglo similar al ilustrado en la Figura 57.2, con una bandeja de vidrio o aluminio (o similar), preferiblemente redonda, la cual tiene agua con aproximadamente 1 cm de profundidad. La bandeja se coloca dentro de otra mayor que contiene agua y que sirve de termostato o baño térmico para la primera bandeja. Un termómetro mide la temperatura del baño.



**Figura 57.2** Arreglo experimental para estudiar la difusión en dos dimensiones. La cámara digital registra el tamaño de la mancha en expansión y el tiempo que indica el cronómetro. El termómetro mide la temperatura del baño de agua.

Una escala (regla), colocada al lado de la bandeja, sirve para calibrar las distancias de un modo similar al indicado en el Cap. 10. El cronómetro se usa para registrar el tiempo. Si la cámara tiene un cronómetro interno que registra la hora en el fotograma, puede usarse ese dato en lugar del cronómetro externo. Con la cámara se toman fotos a medida que la mancha de tinta o de un grano de permanganato de potasio se disuelve y crece. El permanganato de potasio es un oxidante, desinfectante y desodorante, no tóxico y muy soluble en agua.<sup>5</sup> Tiene un color fucsia intenso, que es de muy fácil visualización y se puede fotografiar muy bien. Para que el borde externo no influya en el problema, es conveniente medir hasta que el radio de la mancha,  $r$ , sea aproximadamente la mitad del radio de la bandeja. Para que las imágenes sean nítidas, es conveniente que la cámara esté colocada en un trípode y disponer de una lámpara para optimizar el contraste en las fotos. Una vez que se coloque un grano pequeño de permanganato de potasio o tinta, será necesario variar la posición y orientación de la lámpara hasta lograr fotos nítidas y claras.

El permanganato de potasio se puede conseguir en cualquier laboratorio de química o en farmacias. En cuanto a la tinta, es en gran medida un trabajo de ensayo y error, pero tintas tales como las que se usan en lapiceras fuentes (*Quink blue ink*) o tinta para recargar las almohadillas de sellos pueden ser adecuadas para este experimento.

## Proyecto 188. Difusión del permanganato de potasio o tinta en el agua

**Equipamiento recomendado:** Una bandeja preferiblemente circular de aproximadamente 25 cm de diámetro o mayor. Un cronómetro de dígitos bien visibles. Una cámara digital común. Algunas decenas de gramos de permanganato de potasio ( $KMnO_4$ ), tinta o témpora oscura. Un baño de agua para estabilizar la temperatura de la bandeja y un termómetro.

Usando un arreglo experimental similar al indicado en la Figura 57.2, optimice la iluminación hasta lograr fotos en las que la mancha en estudio se vea con claridad.

### Sugerencias de trabajo:

- ✓ Mida la temperatura del baño térmico y asegúrese de que ésta no varíe durante el crecimiento de la mancha que se desea estudiar.
- ✓ Coloque un grano pequeño de permanganato o una gota pequeña de tinta cerca del centro de la bandeja y comience a tomar fotografías del sistema. Al comienzo de la difusión conviene tomar fotos más seguidas que hacia el final, ya que al aumentar en tamaño la mancha crece más lentamente. La idea es tener al menos unos 15 a 20 fotogramas entre el inicio de la difusión hasta que la mancha llegue a la mitad del radio de la bandeja.
- ✓ Para cada fotograma mida el radio de la mancha, tomando siempre el mismo criterio para definir su borde, y estime su incerteza. En una tabla registre, para cada fotograma, el tiempo  $t$ , el radio  $r$  y la incerteza  $\Delta r$  de cada mancha.
- ✓ Grafique  $r$  como función de  $t$  y  $r^2$  como función de  $t$ . En cada uno de estos gráficos incluya las barras de error en la determinación de  $r$  y  $r^2$ .
- ✓ Si el gráfico de  $r^2$  como función de  $t$  es lineal, trace la recta que mejor ajusta sus datos. A partir de la pendiente obtenga el valor del coeficiente de difusividad,  $D$ , estime el error de su determinación —ver la Ec. (57.7)— y suponga que  $f = 0,5$ . ¿Le parece razonable esta suposición?
- ✓ Varíe el tipo de soluto: tinta, témpora o permanganato, y repita el experimento. Para cada caso determine el coeficiente de difusividad  $D$  y su incertidumbre.

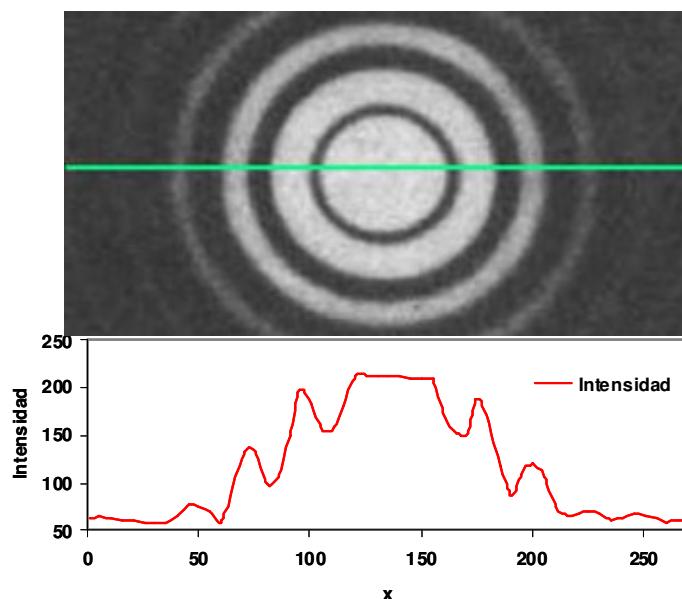
## Proyecto 189. Variación del coeficiente de difusividad con la temperatura

**Equipamiento recomendado:** Una bandeja preferiblemente circular de aproximadamente 25 cm de diámetro o mayor. Un cronómetro de dígitos bien visibles. Una cámara digital común. Algunas decenas de gramos de permanganato de potasio, tinta o témpora oscura. Un baño de agua para estabilizar la temperatura de la bandeja y un termómetro.

Use un arreglo experimental similar al indicado en la Figura 57.2, siguiendo las mismas indicaciones del proyecto anterior, pero esta vez variando la temperatura del baño de agua. Para ello puede usar hielo o bien agregar agua caliente al baño térmico. Realice una medición del coeficiente de difusividad para por lo menos cinco temperaturas, lo más dispersas posibles entre 0 y 90 °C.

### Sugerencias de trabajo:

- ✓ Mida la temperatura del baño térmico y asegúrese de que ésta no varíe durante cada crecimiento de la mancha que se desea estudiar.
- ✓ Coloque un grano pequeño de permanganato o una gota pequeña de tinta. Obtenga al menos unos 15 fotogramas entre el inicio de la difusión hasta que la mancha llegue, aproximadamente, a la mitad del radio de la bandeja.
- ✓ Para cada fotograma, mida el radio y estime su incertidumbre. En una tabla registre, para cada foto, el tiempo  $t$  y el radio  $r$  de cada mancha.
- ✓ Grafique  $r^2$  como función de  $t$ .
- ✓ Si este último gráfico es lineal, trace la recta que mejor ajusta sus datos. A partir de la pendiente obtenga el valor del coeficiente de difusividad,  $D$ , y estime la incertidumbre de su determinación.
- ✓ Para cada una de las sustancias estudiadas, grafique el valor medido de  $D$  y su error como función de la temperatura absoluta. ¿Siguen sus datos una tendencia lineal? ¿Qué puede concluir del modelo descripto por la Ec. (57.4) para describir sus datos experimentales?



**Figura 57.3** Perfil de intensidad de un patrón de difracción (cuadro superior) a lo largo de la línea horizontal indicada en la figura. El gráfico inferior es el perfil de intensidad a lo largo de la línea marcada.

### Proyecto 190. Difusión del permanganato de potasio o tinta en el agua

Para este trabajo puede utilizar los mismos fotogramas obtenidos en cualquiera de las actividades precedentes. El objetivo aquí es estudiar el perfil de concentración de la tinta o del permanganato de las fotos tomadas. Para ello se pueden usar distintos programas que permiten obtener el perfil de intensidad de una imagen digital. En la Figura 57.3 se ilustra un ejemplo de un patrón de migración de un orificio. Esta operación se puede realizar con diversos programas, tales como Matlab®Mathwork o bien con programas que se pueden bajar de Internet tales como

PixelProfile.<sup>6</sup> Con estas herramientas es posible obtener el perfil de intensidad de una foto digital a lo largo de una línea marcada en ella, tal como se ilustra en la Figura 57.3.

### Sugerencias de trabajo:

- ✓ Usando una serie de fotografías de la difusión de la tinta o del permanganato obtenidas en las actividades anteriores, obtenga para cada una de ellas el perfil de intensidades de la figura de la mancha, a lo largo de una línea que pase por el centro de cada una de ellas.
- ✓ En cada caso compare el perfil de intensidades medido con lo predicho por la solución de la ecuación diferencial (57.9).
- ✓ ¿Qué puede concluir acerca del modelo descripto para dar cuenta de los perfiles de los diagramas de difusión?

## Referencias

<sup>1</sup> M. Alonso y E. J. Finn, *Física*, vol.II, Campos y ondas (Fondo Educativo Interamericano, México, 1970; ed. inglesa de Addison Wesley, Reading, Mass., 1967).

<sup>2</sup> F. Reif. *Fundamentos de Física Estadística y Térmica* (Editorial del Castillo, Madrid) (*Fundamentals of Statistical and Thermal Physics*, McGraw-Hill, NY, 1968).

<sup>3</sup> C. R. Wylie, *Matemáticas Superiores para Ingeniería*, 2<sup>a</sup> ed. (McGraw-Hill, México, 1996).

<sup>4</sup> L. A. Pipes, *Matemáticas Superiores para Ingenieros y Científicos* (McGraw-Hill, NY, 1970).

<sup>5</sup> Permanganato de potasio en Wikipedia, [http://es.wikipedia.org/wiki/Permanganato\\_de\\_potasio](http://es.wikipedia.org/wiki/Permanganato_de_potasio)

<sup>6</sup> PhotoProfile permite obtener el perfil de intensidad a lo largo de una línea trazada en una foto digital. Disponible en: <http://www.efg2.com/Lab/ImageProcessing/PixelProfile.htm>

## Capítulo 58

### Experimento de Michelson

#### Objetivos

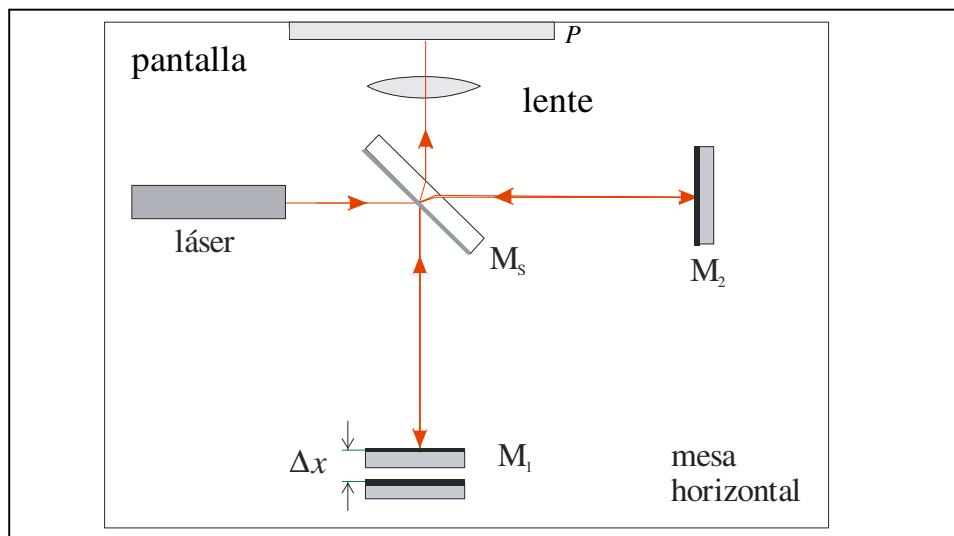
En este capítulo estudiamos el funcionamiento de un interferómetro de Michelson tanto en su versión óptica como en un análogo acústico, conocido como tubo de Quincke. Seguidamente, usamos estos dispositivos para medir la longitud de onda y pequeñas distancias.

- ✓ Interferómetro de Michelson
- ✓ Tubo de Quincke

#### 58.1 El interferómetro de Michelson

El **interferómetro de Michelson** es uno de los instrumentos de interferencia más conocidos, tanto por sus múltiples aplicaciones como por su implicancia en el desarrollo de la física. Usando este dispositivo, en 1887 Michelson y Morley llevaron a cabo su famoso experimento, en la hoy Universidad Case Western Reserve en Cleveland. Con éste se intentaba detectar el movimiento relativo de la Tierra a través del éter lumínico. Los resultados negativos que obtuvieron pusieron en evidencia la inconsistencia de la teoría del éter. Este hecho contribuyó al desarrollo de la Teoría de la Relatividad.<sup>1,2,3</sup>

En la Figura 58.1 se presenta un diagrama esquemático de este dispositivo, el cual puede construirse artesanalmente a partir de componentes reciclados de otros equipos, o bien de componentes adquiridos específicamente para este fin.<sup>4</sup> Desde luego, también existen modelos comerciales listos para su uso.<sup>5</sup>



**Figura 58.1** Diagrama esquemático del interferómetro de Michelson.  $M_1$  y  $M_2$  son dos espejos de primeras superficies.  $M_s$  es un divisor de haz o espejo semitransparente (*beam splitter*). Los haces se recombinan en la pantalla, donde se pueden ver las figuras de interferencia. La distancia  $\Delta x$  es la diferencia de camino de los dos haces que convergen en  $P$ .

La lente sirve para aumentar el tamaño de la imagen y hacer más visible la imagen de interferencia.

Este interferómetro se basa en el principio de división de un haz luminoso por un divisor de haz (*beam splitter*) o espejo semitransparente,  $M_s$ . En  $M_s$  el haz incidente es en parte transmitido al espejo  $M_2$ , y en parte reflejado al espejo  $M_1$ . En estos espejos, ambos haces son reflejados. Luego de transmitirse y reflejarse nuevamente en  $M_s$ , los haces se recombinan en la pantalla  $P$ . Dependiendo de la diferencia de caminos que estos haces hayan recorrido, la interferencia en  $P$  será constructiva o destructiva. En rigor, si los espejos  $M_1$  y  $M_2$  no son exactamente perpendiculares —caso habitual—, cada porción de haz que se refleja en distintas partes de los espejos llegará a la pantalla habiendo recorrido longitudes distintas. Esto resultará en que sobre la pantalla observaremos un conjunto de líneas brillantes y oscuras, cuya orientación dependerá de cómo se realice el ajuste fino de los espejos  $M_1$  y  $M_2$ . Por lo tanto, para obtener resultados provechosos con este instrumento es importante disponer de buenos posicionadores de los espejos.

Es importante también contar con algún modo de regulación de los espejos. Los espejos  $M_1$  y  $M_2$  deben ser espejos de primera superficie, es decir, con plateado o aluminizado en la cara frontal. Tanto los espejos como los posicionadores se pueden fabricar en forma artesanal o adquirirse de proveedores comerciales.<sup>4</sup>

Cuando los espejos  $M_1$  y  $M_2$  están perpendiculares, en la pantalla  $P$  se observan anillos concéntricos brillantes y oscuros. La razón de estos anillos puede entenderse observando que los espejos  $M_s$ ,  $M_1$  y  $M_2$  tienen por efecto producir dos imágenes de la fuente:  $S_1$  y  $S_2$ , separadas una distancia  $2\Delta x$  como ilustra la Figura 58.2. Aquí  $\Delta x$  es la diferencia de longitud de los brazos del interferómetro delimitado por  $M_s$  a  $M_2$  y  $M_s$  a  $M_1$ . El origen de los anillos está asociado a que la diferencia de los caminos  $r_1$  y  $r_2$  varía con la posición del punto  $P$  en la pantalla. Sin embargo, esta diferencia de camino es la misma para cualquier circunferencia centrada en el eje óptico del interferómetro (Figura 58.2).

Diagrama esquemático del interferómetro de Michelson

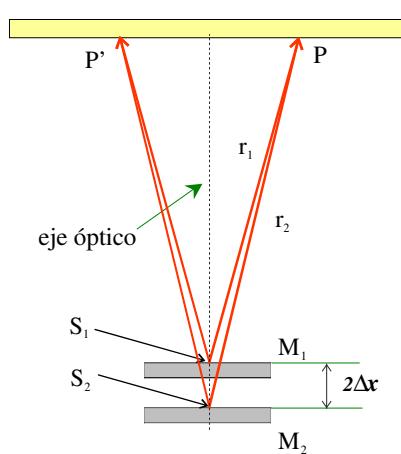
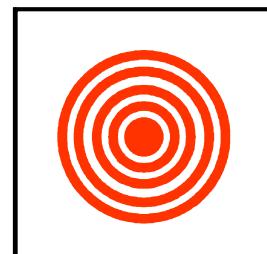


Figura de interferencia con los espejos  $M_1$  y  $M_2$  perpendiculares



**Figura 58.2** Diagrama esquemático del interferómetro de Michelson.  $S_1$  y  $S_2$  son las dos imágenes de la fuente formadas por los espejos  $M_s$ ,  $M_1$  y  $M_2$ . A la derecha vemos las figuras de interferencia cuando los espejos están perfectamente perpendiculares.

Si consideramos sólo el punto correspondiente al centro de la figura de interferencia, es decir, el punto en la pantalla por donde pasa el eje óptico, es posible predecir la intensidad de la luz en este punto a partir de la diferencia de camino de los rayos luminosos. Más específicamente, la diferencia de fase de los rayos que se reflejan en  $M_1$  y  $M_2$  será:

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} 2 \Delta x , \quad (58.1)$$

y por consiguiente, usando el principio de superposición, la intensidad media será:

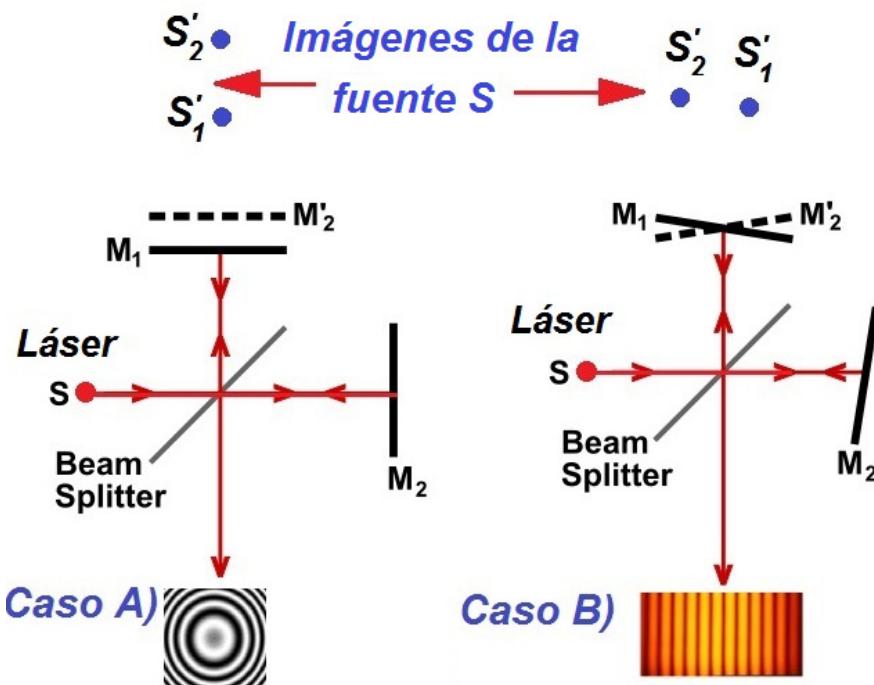
$$I = I_0 \cos^2\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right) = I_0 \cos^2\left(\frac{2\pi}{\lambda} \Delta x\right), \quad (58.2)$$

donde  $\Delta x$  es la diferencia de longitud de los brazos del interferómetro. Si se monta uno de los espejos  $M_1$  o  $M_2$  sobre un posicionador lineal móvil, es posible variar la distancia  $\Delta x$  en forma controlada y medible. En caso de que unos de los haces atraviese un medio con un índice de refracción variable, por ejemplo si en uno de los brazos del interferómetro se introduce una placa de vidrio, la Ec. (58.2) vale, con la condición de que  $\Delta x$  sea la diferencia de los caminos ópticos  $\ell_{op}$ , definida como:

$$\Delta x = \ell_{op}^{(1)} - \ell_{op}^{(2)} \text{ con } \ell_{op}^{(i)} = \int_i n(l) dl , \quad (58.3)$$

donde  $i$  ( $=1,2$ ) denota cada uno de los caminos seguidos por los haces de cada rama del interferómetro.

Para visualizar más fácilmente las imágenes de interferencia es conveniente utilizar una lente convergente entre el interferómetro y la pantalla, de modo que magnifiquen el tamaño de la figura de interferencia. Otra precaución para tener en cuenta en la preparación del interferómetro es su correcta alineación. Un modo práctico de proceder consiste en alinear en primer lugar el espejo  $M_2$ . Esto se logra bloqueando la reflexión en  $M_1$  y haciendo que el haz reflejado por  $M_2$  vuelva de regreso a la fuente misma de láser, o sea, que la imagen reflejada esté ubicada en el punto de salida del propio láser. Seguidamente, se procede a posicionar  $M_s$ . La posición de  $M_s$  debe ser tal que el rayo reflejado a  $90^\circ$  llegue a la zona central del espejo  $M_1$ . Una vez logrado esto, se realiza el ajuste de  $M_1$ , observando que el haz reflejado por  $M_1$  incida en la pantalla y se superponga con el haz reflejado por  $M_2$ . Recién cuando se logra esta condición es conveniente colocar la lente para aumentar el tamaño de la imagen en la pantalla. La lente debe estar bien centrada con el haz. Esto se manifiesta por el hecho de que el centro de la imagen con lente y sin ella no varía de posición. Una vez que se visualizan claramente las imágenes reflejadas por los dos espejos, se realiza un ajuste fino de  $M_1$  hasta que aparezcan franjas de interferencia. En la Figura 58.3 se ilustra el tipo de figuras de interferencia que pueden obtenerse.



**Figura 58.3** Diagrama esquemático del interferómetro de Michelson.  $S'_1$  y  $S'_2$  son las dos imágenes de la fuente S (láser) formadas por  $M_1$  y  $M_2$ . En el caso A) los espejos  $M_1$  y  $M_2$  son perpendiculares y el patrón de interferencia resultante son los anillos que se muestran en la parte inferior. Cuando los espejos  $M_1$  y  $M_2$  no son perpendiculares, el patrón resultante es una sucesión de rayas claras y oscuras, que pueden pensarse como una porción de los anillos vistos lejos de su centro. Variando la orientación de los espejos y el beam splitter, se puede pasar de un caso al otro.

La prueba final de que efectivamente estamos visualizando una figura de interferencia consiste en bloquear alternativamente uno de los haces reflejados. Al bloquear uno de ellos las franjas de interferencias desaparecen y sólo se observa una región iluminada uniformemente, pero al posibilitar que ambos haces alcancen la pantalla se notará la presencia de la imagen de interferencia característica del interferómetro.

Esta simple operación evidencia uno de los principios más fundamentales de las ondas: *el principio de superposición*, que explica por qué luz + luz a veces resulta en más iluminación (franja brillante) y a veces luz + luz resulta en oscuridad (franja oscura).

### Proyecto 189. Determinación de la longitud de onda de un láser

**Equipamiento recomendado:** Un interferómetro de Michelson con uno de sus espejos montado sobre un posicionador lineal graduado y resolución de 10 micrones o menos. Un láser o puntero láser.

Para este experimento se requiere que uno de los dos espejos ( $M_1$  o  $M_2$ ) esté montado sobre un posicionador lineal, de modo que se pueda desplazar en forma controlada y paralela con un micrómetro o comparador. De esta manera es posible, mediante un comparador o tornillo micrométrico asociado al posicionador, conocer los cambios en  $\Delta x$

que se realizan. Para este experimento es conveniente tener una buena visualización de las figuras de interferencia. Para esto es útil colocar una lente delante de la pantalla y ajustar su posición para optimizar la figura de interferencia en la pantalla.

#### Sugerencias de trabajo:

- ✓ Con el tornillo micrométrico, que regula la posición del espejo  $M_1$  o la diferencia de distancia  $\Delta x$ , realice un ajuste fino y observe cómo, al variar esta distancia, las zonas iluminadas van ocupando las posiciones de las oscuras y viceversa.
- ✓ Varíe la posición del espejo móvil  $M_1$  (es decir, varíe  $\Delta x$ ) y cuente el número  $N$  de franjas brillantes (u oscuras) que van apareciendo al realizar esta operación. Construya un gráfico de  $\Delta x$  en función de  $N$ .
- ✓ Según la Ec. (58.2), dos máximos consecutivos (o mínimos consecutivos) están asociados a un  $\Delta x = \lambda/2$ . Esto significa que la pendiente del gráfico de  $\Delta x$  en función de  $N$  tendrá una pendiente igual a  $\lambda/2$ . Usando esta propiedad, determine el valor de la longitud de onda del láser utilizado y su incertidumbre. ¿Cómo se compara este valor de  $\lambda$  con las especificaciones de su láser?
- ✓ Si se conoce la longitud de onda de la luz, este procedimiento nos permite realizar una calibración del micrómetro que regula la posición del espejo, tomado como patrón de longitud a la longitud de onda de la luz utilizada. Este método también sirve para medir desplazamientos dinámicos pequeños.<sup>6</sup>

### Proyecto 190. Efecto del estado de polarización

**Equipamiento recomendado:** Un interferómetro de Michelson. Un láser o puntero láser. Dos láminas polarizadoras.

El objeto de este experimento es estudiar el efecto del estado de polarización de la luz en las figuras de interferencia de un interferómetro de Michelson. En este experimento es útil disponer de láminas polarizadoras montadas sobre soportes giratorios, que permitan variar el estado de polarización fácilmente. Para definir el estado de polarización tomaremos como referencia la dirección normal al plano del interferómetro. Para realizar este experimento es conveniente que la luz incidente no esté polarizada o bien que el estado de polarización forme aproximadamente  $45^\circ$  con respecto a la dirección tomada como referencia. Los polarizadores se colocan enfrentados a los espejos  $M_1$  y  $M_2$ . De este modo es posible elegir un estado de polarización diferente para cada uno de los haces incidentes sobre cada espejo. Al estado de polarización correspondiente al campo eléctrico que oscila en forma perpendicular al plano del interferómetro (dirección de referencia) lo designaremos como estado  $s$ . Al estado de polarización en el que el campo eléctrico oscila paralelo al plano del interferómetro lo designaremos como estado  $p$ . El objetivo de este experimento es estudiar cómo se modifica la imagen de interferencia con el estado de

polarización ( $s$  o  $p$ ) de cada uno de los haces. Para asegurarse de que cuando se vean franjas de interferencia éstas sean auténticas, varíe ligeramente la posición de uno de los espejos a través de  $\Delta x$  y observe cómo se mueven esas franjas. Si esto no ocurre, es porque no ocurre interferencia.

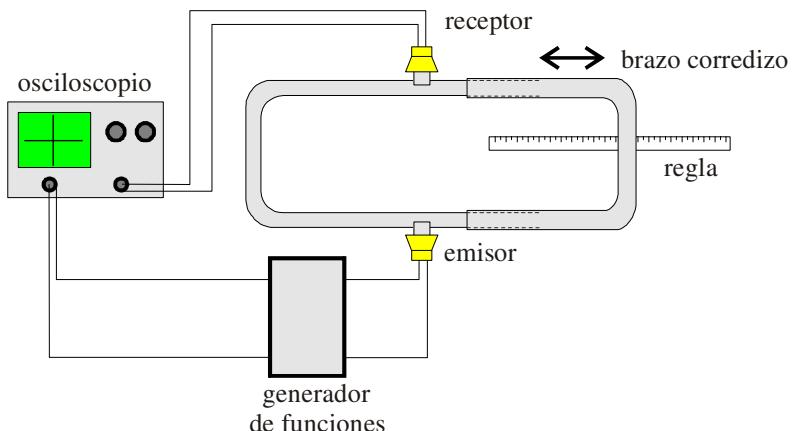
#### Sugerencias de trabajo:

- ✓ En primer lugar, alinee el interferómetro sin los polarizadores hasta hacer visibles las franjas de interferencia. Usando un polarizador a la salida del láser, asegúrese de que este último no esté polarizado o, si lo está, de que no esté ni en un estado  $s$  ni  $p$  puro, sino que tenga componentes en los dos estados (preferentemente a  $45^\circ$  grados respecto de la dirección de referencia).
- ✓ Estudie cómo se modifica la imagen de interferencia del interferómetro si ambos haces de luz están en los siguientes estados de polarización:
  - ambos en el estado  $s$
  - ambos en el estado  $p$
  - un haz en el estado  $s$  y el otro en el estado  $p$ .
- ✓ Notará que en la última situación (superposición de modos  $s$  y  $p$ ) no se observa interferencia. ¿Cómo explica sus resultados?

### Proyecto 191. Análogo acústico del interferómetro de Michelson: Tubo de Quincke

**Equipamiento recomendado:** Un tubo de Quincke. Un generador de funciones con un parlante. Un micrófono. Un osciloscopio de dos canales.

El **tubo de Quincke** es un interferómetro acústico con un principio de funcionamiento análogo al del interferómetro de Michelson.<sup>7</sup> Un esquema de este interferómetro acústico se muestra en la Figura 58.4. Se puede construir con tubos metálicos (cobre, bronce, etc.) o con tubos plásticos de los que comúnmente se usan en las instalaciones de agua. Los diámetros internos de los tubos deben estar comprendidos entre 1 y 3 cm aproximadamente. Uno de los brazos del sistema se desliza de manera análoga a un trombón.



**Figura 58.4** Diagrama esquemático del interferómetro acústico de Quincke. El brazo derecho del sistema puede moverse sobre una regla graduada, similar a un tubo de trombón.

La fuente de ondas acústicas es un altavoz alimentado por un generador de funciones. El sonido del altavoz sigue dos caminos diferentes, por el brazo derecho y por el izquierdo. El receptor capta la combinación de ambas ondas. La intensidad detectada por el receptor dependerá de la diferencia de longitud de ambos brazos  $\Delta x$ . Por lo tanto tendremos, igual que antes, un desfasaje dado por:

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} 2 \Delta x , \quad (58.4)$$

y por consiguiente, usando el principio de superposición, la intensidad media vendrá dada por la Ec. (58.2). Por lo tanto, dos situaciones de máxima intensidad consecutivas estarán separadas por una distancia  $\Delta x = \lambda/2$ . Midiendo las posiciones  $x$  para las que van apareciendo máximos podemos determinar la longitud de onda del sonido. Dado que la frecuencia  $f$  impuesta por el generador de funciones es conocida o medible, podemos calcular la velocidad del sonido,  $c$ , como:

$$c = \lambda f . \quad (58.5)$$

#### Sugerencias de trabajo:

- ✓ Varíe la posición del brazo móvil y verifique la ocurrencia de máximos y mínimos de intensidad. Observe en el osciloscopio tanto la señal de entrada como la respuesta del receptor.
- ✓ Usando este dispositivo y frecuencias de audio ( $f \approx 2$  kHz), determine la longitud de onda y la velocidad del sonido. Estime las incertidumbres asociadas a estas mediciones.
- ✓ Compare el valor de  $c$  obtenido con los valores de tabla a la temperatura correspondiente.

## Referencias

- 
- <sup>1</sup> F. Sears, M. Zemansky, H. Young y R. Freedman, *Física universitaria*, vol. I y II (Addison Wesley Longman, México, 1999).
- <sup>2</sup> E. Hecht, *Optics* (Addison Wesley Pub. Co., New York, 1990).
- <sup>3</sup> M. Alonso y E.J. Finn, *Física*, vol. II, Campos y Ondas y vol. III, Fundamentos Cuánticos y estadísticos (Fondo Educativo Interamericano; ed. inglesa, Addison Wesley, Reading, Mass., 1967).
- <sup>4</sup> Existen muchos proveedores comerciales de componentes ópticos, entre ellos: Edmund Scientifics ([www.edsc.com](http://www.edsc.com)), Melles-Griot ([www.mellesgriot.com](http://www.mellesgriot.com)), APS Buying Guide ([www.aps.org/pt/guide](http://www.aps.org/pt/guide)).
- <sup>5</sup> Entre las firmas proveedoras de interferómetros completos está: Pasco ([www.pasco.com](http://www.pasco.com)). Encontrará una lista más extensa de proveedores en: APS Buying Guide ([www.aps.org/pt/guide](http://www.aps.org/pt/guide)).
- <sup>6</sup> J.B. Diamond, D.P. Donnelly, J.D. Breault y M.E. Mc Carthy, “Measuring small vibrations with interferometry”, *Am. J. Phys.* **58**, 919 (1990).
- <sup>7</sup> J. E. Fernández y E. Galloni, *Trabajos prácticos de Física* (Nigar, Buenos Aires, 1968).

## Capítulo 59

---

### Materiales ferromagnéticos - Transiciones de fase

#### Objetivos

En este capítulo nos proponemos estudiar las propiedades de los materiales ferromagnéticos y ferrimagnéticos y, en particular, el fenómeno de histéresis y la transición de fase magnética en estos materiales. Discutimos modos de determinar la temperatura de transición o temperatura de Curie de un material ferromagnético.

- ✓ Materiales ferromagnéticos y ferrimagnéticos
- ✓ Temperatura de transición o de Curie

#### 59.1 Materiales ferromagnéticos y ferrimagnéticos

Algunos materiales sólidos, como el hierro, pueden formar imanes permanentes o ser atraídos por éstos. El ferromagnetismo (incluyendo ferrimagnetismo) es un comportamiento cuyas propiedades más notables son observables a simple vista. En estos materiales las fuerzas de interacción magnéticas son muy notables e intensas. Algunas sustancias, como las *paramagnéticas* y *diamagnéticas*,<sup>1,2</sup> responden más débilmente a los campos magnéticos. Para detectar estos efectos en general se deben utilizar instrumentos sensibles.

Los materiales *ferromagnéticos* y *ferrimagnéticos* muestran cierto *ordenamiento* microscópico, aun en la ausencia de un campo magnético aplicado. Por debajo de una cierta temperatura crítica, llamada *temperatura de Curie*  $T_C$ , las muestras ferro o ferrimagnéticas tienen una “magnetización espontánea” e interactúan fuertemente con un imán. Estas transformaciones son ejemplos de cambios de estado, similares a los cambios de estado de agregación de la materia. La diferencia es que en éstas hay un calor latente de transformación, y por lo tanto la capacidad calorífica ( $C_p = (\partial U / \partial T)_P$ ) presenta una discontinuidad infinita a la temperatura de transición; en las transformaciones de fase ferromagnéticas o ferrimagnéticas no hay calor latente, pero sí hay una discontinuidad en  $C_p$  finita, característica de las transiciones de fase de segundo orden.<sup>2,3,4</sup>

Por otro lado, mientras los ferromagnéticos son buenos conductores de la electricidad, los ferrimagnéticos son materiales cerámicos que en general no conducen la electricidad. Se los encuentra comúnmente como núcleo de transformadores o de bobinas.

A veces las muestras de hierro —que es ferromagnético— no muestran una interacción entre ellas que sea perceptible, por lo que parece que no estuvieran magnetizadas. No obstante, ellas son atraídas fuertemente por un imán permanente. Esto se debe a que, en ausencia de campo aplicado, a estos materiales les favorece energéticamente subdividirse en pequeños *dominios* de tamaño macroscópico uniformemente magnetizados, cuyos vectores de magnetización espontánea apuntan en diferentes direcciones.<sup>2,3</sup> Esto produce una cancelación macroscópica de los momentos magnéticos de los dominios individuales. La presencia de un campo magnético lleva a que los dominios se reorienten y tiendan a alinearse con el campo y también a cambiar de tamaño (crecen algunos a expensas de la disminución de tamaño de otros). Si el campo que se aplica es “débil”,

cuando se lo retira, los dominios retornan a sus estados originales y la muestra vuelve a comportarse como una muestra “desmagnetizada”. Si el campo es “fuerte”, los dominios que han sido favorecidos por una alineación en la dirección del campo no regresan a sus estados primitivos. Esto da origen al fenómeno de *histéresis magnética* en este tipo de materiales.<sup>2,3,4</sup> De esta manera, después que se aplica y se retira un campo magnético, la muestra puede quedar con una magnetización remanente,  $M_0$ , diferente de cero.

Por otro lado, el orden magnético decrece con el aumento de la temperatura y la magnetización espontánea se anula arriba de la temperatura de Curie,  $T_C$ . Para  $T < T_C$ , la magnetización de la muestra  $M_0$  puede describirse por una ley potencial de la forma:

$$M_0(T) \propto [(T - T_C)/T_C]^\beta \quad (59.1)$$

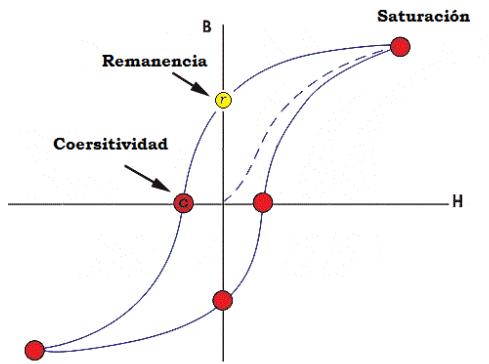
donde  $\beta$  es un parámetro que varía entre 0,3 a 0,5. Para los materiales ferrimagnéticos, la magnetización tiene un comportamiento similar al descripto por la Ec. (59.1). En las Refs. [3,4] puede verse una discusión detallada acerca de las similitudes y diferencias que hay entre materiales ferromagnéticos y ferrimagnéticos.

## 59.2 Curva de histéresis

En presencia de medios materiales es conveniente introducir el vector excitación magnética  $H$ , también llamado intensidad magnética o simplemente “campo  $H$ ”, que en general describe la contribución al campo magnético, asociado con las corrientes convencionales o libres, es decir, las que circulan por los cables y se pueden medir con amperímetros, interrumpir con llaves, etcétera. El campo magnético  $B$  depende tanto del campo  $H$  como de la magnetización  $M$  del material. Esta última representa la contribución al campo magnético producida por los átomos y moléculas del material. Más específicamente,  $M$  es el momento dipolar magnético por unidad de volumen del material. En el vacío o con materiales paramagnéticos o diamagnéticos, la relación entre  $B$  y  $H$  es lineal y se puede escribir como:<sup>5,6</sup>

$$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H}, \quad (59.2)$$

donde  $\mu_r (=1+\chi_m)$  es la permeabilidad relativa del medio material, y  $\chi_m$  es la susceptibilidad magnética. En el vacío  $\mu_r=1$ ; para materiales paramagnéticos  $\mu_r \geq 1$  ( $\chi_m > 0$ ) y para diamagnéticos  $\mu_r \leq 1$  ( $\chi_m < 0$ ). En el caso de materiales ferromagnéticos y ferrimagnéticos, la relación entre  $B$  y  $H$ , además de ser no lineal, también depende de la historia magnética de la muestra,<sup>5,6</sup> como se ilustra esquemáticamente en la Figura 59.1.



**Figura 59.1** Curva de histéresis para un material ferromagnético. Obsérvese que si el material parte de un punto en el que está originalmente desmagnetizado —línea de trazos— el camino de magnetización es diferente al que sigue si parte de una magnetización no nula.

El valor del campo magnético cuando  $H = 0$ ,  $B_r$ , se denomina *remanencia magnética*, y está representado por el punto “r” en la Figura 59.1. Su valor es consecuencia de la magnetización espontánea del material. En otras palabras, el valor del campo remanente  $B_r$  está íntimamente ligado a la magnetización del material,  $M_0$ , en ausencia de excitación magnética.

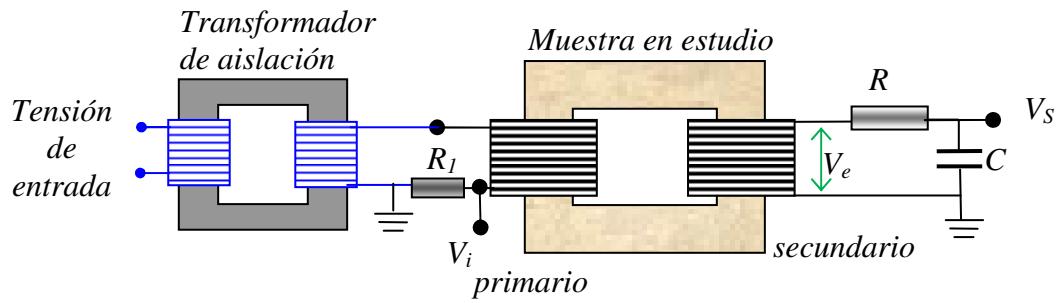
De este modo, si deseamos estudiar la variación de la magnetización espontánea de un material ferromagnético o ferrimagnético con la temperatura, podemos analizar cómo varía con la temperatura la curva de histéresis. Cuando se calienta un material de este tipo, a temperaturas superiores a la temperatura de Curie el material comienza a comportarse como una muestra paramagnética y la curva de histéresis desaparece para dar lugar a una relación lineal entre  $B$  y  $H$ .

En este capítulo analizaremos modos de determinar la curva de histéresis y luego usaremos esta técnica para determinar la temperatura de Curie de una muestra ferrimagnética. En principio, esta técnica también podría usarse para un material ferromagnético, pero la dificultad en este caso es que la mayoría de los materiales ferromagnéticos comunes tienen temperaturas de Curie superiores a unos 600 °C.

### 59.3 Determinación de la curva de histéresis

Un posible arreglo experimental para determinar la curva de histéresis de un material se muestra en la Figura 59.2.<sup>7,8</sup> La muestra magnética es un toroide de ferrita o de un material ferromagnético como hierro o níquel. Los núcleos de ferrita en forma de toroides se consiguen en casas de electrónica.

La muestra toroidal puede tener unos 5 a 10 cm de diámetro. En el caso de hierro, se pueden tomar cuatro barras de hierro y construir un yugo, atornillado, como el que se representa esquemáticamente en la Figura 59.2.

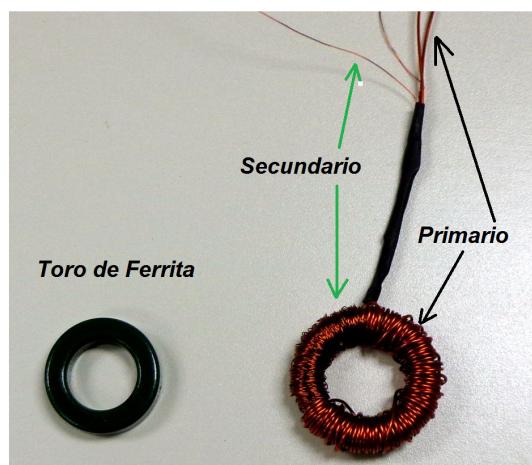


**Figura 59.2** Diagrama de un arreglo experimental para estudiar la curva de histéresis de una muestra. El transformador de aislación se utiliza para evitar contacto eléctrico entre la tensión de entrada y los instrumentos de medición. También sirve para proteger al experimentador de estar expuesto a la tensión de línea.

El transformador de aislación se utiliza para proteger al experimentador y los equipos del posible contacto con la tensión de entrada. Por lo tanto, es importante que este dispositivo sea verdaderamente un transformador con aislación eléctrica del primario con el secundario. Un transformador de 110 ó 220 V a 12 V de unos 15 W puede ser adecuado. La tensión que alimenta al transformador puede ser la tensión de línea o, mejor aún, la salida de un autotransformador o variac, de modo que se pueda regular la tensión de alimentación.

Si se dispone de un generador de funciones con un amplificador de potencia que pueda suministrar una corriente del orden de 1 A, esta combinación de instrumentos puede reemplazar al variac y al transformador de aislación.

La muestra toroidal debe tener un primario de unas 100 a 300 vueltas de alambre de cobre esmaltado y un secundario de aproximadamente 200 a 400 vueltas. En la Figura 59.3 se ilustra un ejemplo de este dispositivo. Es conveniente que el número de vueltas del secundario,  $N_2$ , sea mayor que el del primario,  $N_1$ , de manera que se amplifique la señal que se va a medir. El primario puede hacerse con alambre de cobre esmaltado de diámetro  $\phi = 0,2$  a  $0,5$  mm. El secundario puede ser de alambre más delgado  $\phi = 0,1$  a  $0,2$  mm. En el Anexo A se discute en detalle la relación entre el diámetro de los alambres, el número de vueltas de cada arrollamiento y las dimensiones del toroide.



**Figura 59.3** Toro de ferrita, sin bobinar y con bobinados primario y secundario superpuestos. Como se ve, el alambre del secundario es más delgado que el del primario.

El primario del toro se conecta al secundario de transformador de aislación como se ilustra en la Fig.59.1. Evite conectar el bobinado del toroide directamente a la tensión de línea (110–220 V), ya que puede destruir el bobinado o puede poner en riesgo su integridad o la de sus compañeros.

La caída de tensión  $V_{RI}$  sobre una resistencia  $R_I$ , colocada en serie con el primario, permite tener una señal proporcional a la corriente  $I_P$  en el primario ( $V_R = I_P R_I$ ), y por lo tanto esta tensión nos dará una señal proporcional al valor de  $H$  en el toro. La resistencia  $R_I$  puede ser de unos pocos ohmios (2 a 10 Ω y Potencia >5 W); asegúrese asimismo de que esta resistencia pueda disipar la potencia que se producirá en ella.<sup>9</sup>

Si aplicamos una tensión variable al primario, en el secundario se inducirá una *fem*  $V_e$  que, según la Ley de Faraday, tenemos:

$$V_e = -N_2 \frac{d\Phi_B}{dt} = N_2 A_2 \frac{dB}{dt} \quad (59.3)$$

donde  $\Phi_B$  es el flujo magnético en la muestra,  $N_2$  es el número de espiras del secundario,  $A_2$  es su área y  $B$  es el campo medio en el interior del toro. De la Ec. (59.3) se ve que la integral de la *fem*  $V_e$  es proporcional al valor de  $B$  en el toro. Para integrar la señal del secundario y obtener un voltaje proporcional a  $B$  pueden usarse varias opciones: la más simple es usar un circuito RC con una constante de tiempo  $\tau \gg 2\pi/f$ , donde  $f$  es la frecuencia de la tensión aplicada. Si se usa  $f = 50\text{--}60$  Hz, con  $\tau \geq 0,1$  segundos, se logra una integración adecuada (ver Anexo B). Desde luego, puede usarse también un integrador activo basado en amplificadores operacionales. La salida del circuito integrador se conecta a la entrada de un osciloscopio o sistema de toma de datos conectado a una computadora para medir la señal  $V_s$  (integrada)  $\propto B$ . De este modo, con la señal  $V_i$  conectada a un canal de un osciloscopio (o sistema de toma de datos) y  $V_s$  al otro canal, usando en modo XY del osciloscopio, se puede observar la curva de histéresis de la muestra. El valor de  $V_s$  cuando  $V_i = 0$ , ( $V_s^0$ ) es proporcional a  $M_0$ , es decir, a la magnetización espontánea de la muestra. Regulando la tensión de entrada al primario de transformador de aislación, con un variac se puede variar las condiciones de estudio de esta curva, acercándose más o menos a la saturación del material.

## Proyecto 192. Medición de la curva de histéresis para el hierro

**Equipamiento básico recomendado:** Un toroide de hierro de aproximadamente 5 a 10 cm de diámetro. El toro puede sustituirse por un conjunto de cuatro barras de hierro que forme un toroide rectangular. Alambre de cobre esmaltado de diámetro entre 0,15 y 0,5 mm. Un osciloscopio de doble entrada o un sistema de adquisición con dos entradas independientes. Un transformador de 110 ó 220 V a 12 V. Un variac. Resistencias de 5 Ω @ 5W.

El dispositivo experimental se muestra esquemáticamente en la Figura 59.2. El objetivo de esta actividad es observar la curva de histéresis. Los canales 1 y 2 del osciloscopio se conectan para medir en modo XY las señales  $V_i$  y  $V_s$ .

#### Sugerencias de trabajo:

- ✓ Estudie la variación de la curva de histéresis de la muestra en estudio para distintos valores de la tensión de entrada.
- ✓ Aumente la señal de entrada de modo que se acerque lo más posible a las condiciones de saturación de la muestra, consistente con las limitaciones de su circuito.
- ✓ Disminuya la tensión aplicada y observe cómo el ciclo de histéresis disminuye o se modifica.
- ✓ Describa y explique cualitativamente sus observaciones.

### Proyecto 193. Medición de la curva de histéresis para núcleo de ferrita

**Equipamiento básico recomendado:** Un toroide de ferrita de aproximadamente 3 a 7 cm de diámetro. Alambre de cobre esmaltado de diámetro entre 0,15 y 0,5 mm. Un osciloscopio de doble entrada o un sistema de adquisición con dos entradas independientes. Un transformador de 110 ó 220 V a 12 V. Un variac. Resistencias de  $5 \Omega @ 5W$ .

El dispositivo experimental es el mismo del proyecto anterior.

#### Sugerencias de trabajo:

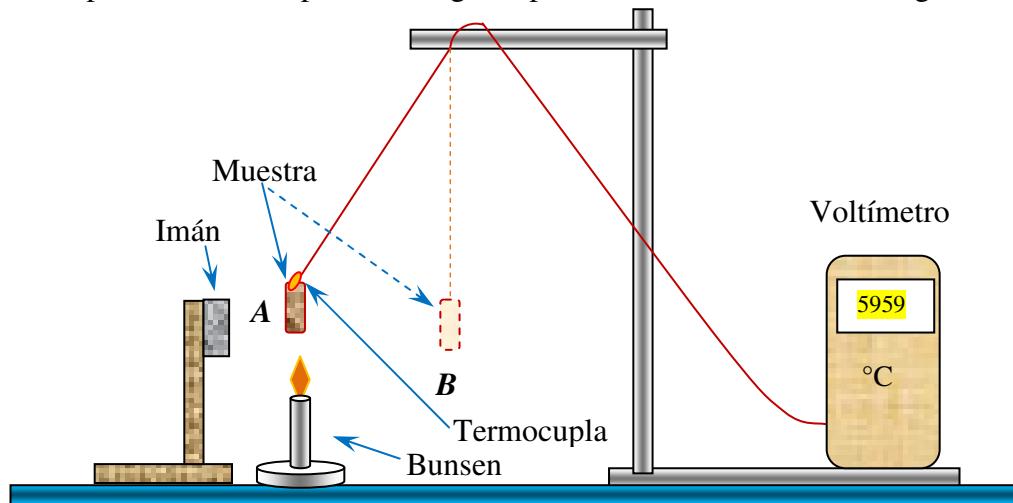
- ✓ Repita el mismo análisis sugerido en el proyecto anterior.
- ✓ Observe cómo cambia la curva de histéresis de la muestra para distintos valores de la tensión de entrada. Acérquese y aléjese de las condiciones de saturación de la muestra.
- ✓ Describa y explique cualitativamente sus observaciones.

### Proyecto 194. Estimación de la temperatura de Curie

**Equipamiento básico recomendado:** Una muestras de níquel de entre 3 a 15 g. Una termocupla de hilo delgado y flexible. Un imán potente. Un mechero Bunsen a gas.

Para este experimento es conveniente que el extremo de la termocupla se suelde a la muestra de níquel usando una soldadura de punto o de plata o de bronce.<sup>10</sup> Otra

alternativa es hacer una perforación pequeña en la muestra y lograr que la punta de la termocouple se ligue mecánicamente y térmicamente a la muestra. La idea es que la muestra pueda colgarse de la termocouple. Los alambres deben ser flexibles y lo más delgados posible, de aproximadamente 50 cm de largo, de modo que permitan un movimiento de péndulo de la muestra. Las monedas de cinco centavos canadienses, que son ferromagnéticas, pueden servir de muestra para este experimento.<sup>10</sup> Un posible arreglo experimental se muestra en la Figura 59.4.



**Figura 59.4** Esquema de un experimento para determinar la temperatura de Curie de una muestra ferromagnética. Cuando la muestra sufre la transformación de ferromagnética a paramagnética, pasa de la posición A a la B. La temperatura registrada en ese instante es  $T_C$ .

La razón de usar níquel es que tiene una temperatura de Curie de aproximadamente 350 °C; en cambio, la de hierro es cercana a 770 °C. Cuando la muestra está en estado ferromagnético, es atraída por el imán y su posición de equilibrio es la posición A de la Figura 59.4. Al ir calentándose, de repente la muestra pasa a estado paramagnético y su posición pasa a la B. La temperatura registrada en ese instante es la temperatura de Curie,  $T_C$ .

Otro modo de registrar esta temperatura es continuar calentando la muestra unos 20 a 30 °C más allá de esta temperatura, dejando la muestra en la posición B. Mientras aún está caliente, se acerca un segundo imán pequeño y potente sobre una plataforma a unos pocos milímetros de la muestra. A medida que la muestra se va enfriando y apenas alcance  $T_C$ , el pequeño imán será fuertemente atraído hacia la muestra. La temperatura registrada en ese instante es otra manera de estimar  $T_C$ . Los imanes como los que hay dentro de los audífonos o auriculares modernos son muy adecuados para este ensayo. Con la muestra fría, elija la altura apropiada de la plataforma para que el imán sea atraído espontáneamente a la muestra.

#### Sugerencias de trabajo:

- ✓ Usando el dispositivo experimental de la Figura 59.4, repita al menos unas cinco veces el ensayo y en cada caso registre  $T_C$ . Obtenga el mejor valor de esta magnitud y su incertezza.

- ✓ Compare su resultado con las expectativas de tabla para esta muestra. Recuerde que muchas veces el níquel comercial se encuentra en aleaciones con otros metales, que alteran el valor de  $T_C$ .
- ✓ Usando una muestra de ferrita, repita este experimento y determine el mejor valor de  $T_C$  para esta muestra. En este caso, puede usar alambre de cobre para fijar la termocupla a la muestra. Asegúrese de lograr un buen contacto térmico.

## Proyecto 195. Determinación de la temperatura de Curie de una muestra de ferrita

**Equipamiento básico recomendado:** Igual que en el proyecto anterior, más un termopar o termistor para medir temperatura hasta 250 °C. Un horno o baño de aceite que pueda calentarse hasta unos 150 °C. Opcional: un Dewar con nitrógeno líquido.

Antes de realizar el bobinado del toro que va a utilizar, usando la técnica del proyecto anterior, asegúrese de que la temperatura de Curie de su muestra está dentro del rango térmico de su baño de aceite. Una vez verificado este punto, puede proceder a bobinar su muestra.

Usando el mismo dispositivo empleado en el Proyecto 193, pero con una tensión de entrada fija, estudie cómo varía la curva de histéresis a distintas temperaturas.<sup>7</sup> Para esto use un termopar o termocupla para medir la temperatura de la muestra. Conecte el sensor de temperatura de modo que obtenga la mejor medición que pueda de la temperatura,  $T$ , del toroide que le sea posible. Es importante que el sensor tenga un buen contacto térmico con la muestra. Para variar la temperatura puede usar un horno de temperatura controlada o mejor un termostato con baño de aceite, teniendo cuidado de que la temperatura no exceda los 250 °C, puesto que a temperaturas de ese orden puede comenzar a quemarse la aislación de los alambres.

Para calentar la muestra de ferrita hasta una temperatura del orden de unos 200 °C se puede usar un baño de aceite, calentado por un calefactor eléctrico. En la actualidad existen sistemas comerciales que realizan este procedimiento en forma segura,<sup>11</sup> pero también puede construirse sistemas artesanales usando un recipiente de 1/2 a 1 litro con un calefactor eléctrico. Para temperaturas inferiores a 200 °C se puede usar algún aceite mineral. Para temperaturas más altas (pero menores a 300 °C) se debe usar algún aceite de silicona. En todos los casos asegúrese de que el aceite no tenga componentes tóxicos.

Se debe tener cuidado de que el baño de aceite caliente no genere humo, indicativo de que estamos acercándonos al punto de inflamación, lo que puede conducir a la ignición del aceite. Un baño de este tipo siempre debe ser monitoreado mediante el uso de un termómetro para asegurarse de que su temperatura no supere su punto de inflamación. Los equipos comerciales en general cuentan con un controlador de temperatura que realiza esta operación automáticamente.

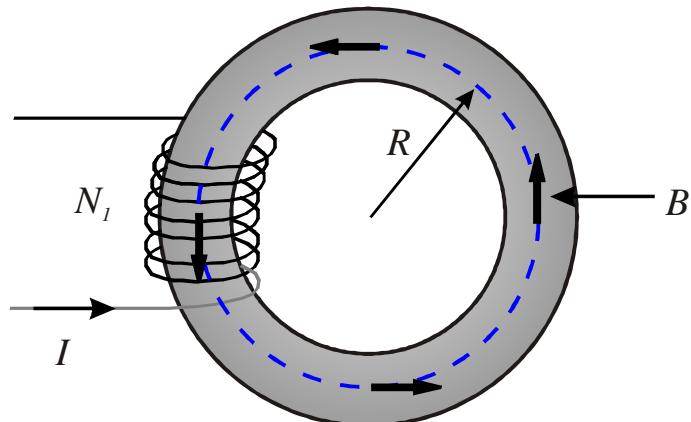
### Sugerencias de trabajo:

- ✓ Estudie el comportamiento de la curva de histéresis a distintas temperaturas. Si usa un osciloscopio digital, registre esta curva a las distintas temperaturas de trabajo.
- ✓ Realice esta operación para temperaturas superiores e inferiores a  $T_C$ .
- ✓ Para caracterizar  $M_0$  use el valor de la tensión del integrador  $V_s$  para  $V_i = 0$ , que corresponde a corriente nula en el primario y por tanto a un campo aplicado  $H = 0$  (ver Figura 59.2).
  
- ✓ **Opcional:** Para estudiar el comportamiento del material ferromagnético a bajas temperaturas, introduzca lentamente el dispositivo en nitrógeno líquido colocado en un Dewar, tratando de enfriar la muestra primero con el vapor frío ascendente de la evaporación del líquido. Así evitará cambios bruscos de temperatura que podrían fragilizar y romper la ferrita. Estudie cómo cambia la curva de histéresis a bajas temperaturas. Analice el comportamiento de  $M_0$  a bajas temperaturas.
  
- ✓ Con todos los datos obtenidos construya un gráfico de  $V_s^0$  como función de la temperatura, que es representativo de la función  $M_0(T)$ . Intente determinar la temperatura de Curie  $T_c$  y el parámetro  $\beta$  usando el gráfico y la Ec. (59.1).
  
- ✓ Si puede determinar la temperatura de Curie  $T_c$ , construya un gráfico de  $V_s^0$  como función de  $(T_c - T)$  en escala log-log y mejore la estimación del parámetro  $\beta$  de la Ec. (59.1).

## Anexo A: Número de vueltas de las bobinas del toroide

Para realizar este experimento es necesario aplicar al toroide un campo magnético que produzca en el material una magnetización cercana a la de saturación. Para la mayoría de los materiales ferromagnéticos y ferrimagnéticos esto se logra a valores de  $B \approx 5000$  G = 0,5 T. Supongamos que la permeabilidad magnética relativa del material fuese  $\mu_r \approx 1000$ .<sup>6</sup> Si el radio medio del toro es  $R_t$  y el número de espiras en el primario es  $N_1$ , cuando por el primario circula una corriente  $i$ , según la Ley de Ampere tenemos:

$$\oint \vec{B} \cdot d\ell = \mu_0 \mu_r N_1 i \quad (59.4)$$



**Figura 59.5** Toroide magnético y el campo magnético  $B$  en su interior.

Haciendo uso de la simetría del problema podemos resolver la integral (59.4):

$$B = \frac{\mu_0 \mu_r}{2 \pi} \frac{N_1 i}{R_t} \quad (59.5)$$

Para que  $B \approx 0,5$  T tenemos que satisfacer:

$$\frac{i N_1}{R_t} \approx 2500 \text{ A/m} \quad (59.6)$$

Si se usa alambre de cobre esmaltado para el bobinado primario, el diámetro del alambre debe elegirse de manera que pueda transportar la corriente necesaria para producir este valor de  $B$ . Un criterio conservador es usar aproximadamente  $1 \text{ mm}^2$  por cada  $3 \text{ A}$  de corriente. Si la corriente fuese del orden de  $0,5 \text{ A}$ , los alambres esmaltados que forman el arrollamiento deberían ser de un diámetro  $\phi \approx 0,5 \text{ mm}$ . En tal caso, si  $i \approx 0,5 \text{ A}$  tenemos que la relación del número de vueltas  $N_1$  a  $R_t$  del toroide deberá ser:

$$\frac{N_1}{R_t (\text{cm})} \approx 50. \quad (59.7)$$

Para el bobinado secundario puede usarse un número de vueltas mayor que  $N_1$  (en un factor de 1 a 3), para que la señal del secundario se vea con claridad en el osciloscopio. El diámetro del alambre del secundario puede ser más fino (por ejemplo, 0,1 a 0,2 mm de diámetro). A medida que mayor sea el número de espiras en el secundario ( $N_2$ ), mayor será la tensión inducida. Un criterio razonable puede ser  $N_2 \sim 2 N_1$ . Recuerde que del secundario no se demanda potencia.

## Anexo B: Circuito integrador

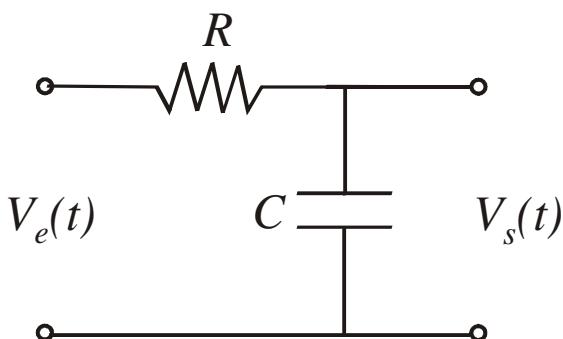
El circuito de la Figura (59.6) se alimenta con una señal sinusoidal. La relación entre la amplitud de señal de entrada  $V_e(t)$  ( $V_e^0$ ) y la de salida  $V_s(t)$  ( $V_s^0$ ) viene dada por:

$$V_s^0 = V_e^0 \frac{1}{1 + jRC\omega} = V_e^0 \frac{1}{1 + j\tau\omega}, \quad (59.8)$$

Donde  $\tau = RC$ . En particular, si  $\tau \omega \gg 1$ , podemos hacer la aproximación:

$$V_s^0 \approx V_e^0 \frac{1}{j\tau\omega}. \quad (59.9)$$

Esto significa que la señal de salida es proporcional a la integral de la señal de entrada. En otras palabras, el circuito de la Figura 59.6 actúa como un integrador de la señal de entrada  $V_e(t)$  si  $\tau = RC \gg 1/(2\pi f)$ , donde  $f$  es la frecuencia de la señal de entrada. Para  $f \leq 50$  Hz (frecuencia de la tensión de lineal), con valores de  $R = 50$  k $\Omega$  y  $C = 10$   $\mu\text{F}$  ( $\tau = 0,5$  s), se puede construir un práctico integrador para el presente experimento.



**Figura 59.6** Esquema de un circuito integrador formado por una resistencia y un capacitor.

## Referencias

- 
- <sup>1</sup> F. Sears, M. Zemansky, H. Young y R. Freedman, *Física universitaria*, vol. II (Adison Wesley Longman, México, 1999).
  - <sup>2</sup> R. Feynman et al., *Feynman Lectures on Physics*, vol. 2 (Addison Wesley, New York, 1964).
  - <sup>3</sup> C. Kittel, *Introduction to Solid State Physics* (Reverté, Madrid, 1965).
  - <sup>4</sup> N.W. Aschcroft y N.D. Mermin, *Solid state physics* (Saunders College Publishing, 1976).
  - <sup>5</sup> E.M. Purcell, *Berkeley physics course*, vol. 2, Electricidad y Magnetismo (Reverté, Barcelona, 1969).
  - <sup>6</sup> J.R. Reitz, F.J. Milford y R.W. Christy, *Foundations of Electromagnetic Theory*, 4<sup>a</sup> ed. (Addison Wesley, Ma., 2008).
  - <sup>7</sup> C.S. Lue, “A direct method for viewing ferromagnetic phase transition,” *Phys. Teach.* **32**, 304 (1995).
  - <sup>8</sup> Y. Kraftmakher, “Hysteresis loops of a ferromagnet,” *Phys. Teach.* **43**, 439 (2005).
  - <sup>9</sup> Foros de Electrónica, Comunidad internacional de electrónica:  
<http://www.forosdeelectronica.com/tutoriales/resistencia.htm>
  - <sup>10</sup> D.E. Wilson, “Curie Point, again”, *Phys. Teach.* **27**, 374 (1989).
  - <sup>11</sup> Memmert, Expert in thermostatics, High temperatures in the oilbath:  
<http://www.memmert.com/products/oilbath/oilbaths-overview/>

# Capítulo 60

---

## Naturaleza estadística del decaimiento radioactivo

En este capítulo investigaremos la naturaleza estadística del decaimiento radioactivo. En particular analizamos si distribución de Poisson puede explicar algunos aspectos del comportamiento estadístico del decaimiento. Haremos uso del instrumento *Multi Channel Scaling* (MCS) para la adquisición de datos.

### Objetivos

- ✓ Estadística del decaimiento radiactivo
- ✓ Distribución de Poisson

### 60.1 Decaimientos radioactivos

El decaimiento individual de un núcleo o átomo es un proceso *estocástico*.<sup>1</sup> Estos procesos se realizan en forma aleatoria, en tiempos no predecibles microscópicamente. No obstante cuando tenemos un ensamble macroscópico de átomos que decaen (número de átomos  $> 10^{12}$ ), se puede determinar el número promedio de decaimientos y otras propiedades del mismo. Por ejemplo, si consideramos una fuente radioactiva con vida media muy larga, comparada con el tiempo de medición; determinaciones sucesivas del número de cuentas emitidas por esta fuente radioactiva en un dado intervalo de tiempo, no darán exactamente los mismos resultados. Esta *falta de definición o determinismo* es una de las características intrínsecas de todos los procesos radioactivos, nucleares o atómicos. Los valores obtenidos estarán distribuidos alrededor de un cierto valor medio  $\langle n \rangle$  y también presentarán una dispersión alrededor de este promedio. Además es posible que este número de decaimientos siga alguna distribución estadística. El objetivo de este capítulo es precisamente estudiar la naturaleza de la distribución estadística asociada a los decaimientos radiactivos.

Según la teoría de probabilidades, si para una variable aleatoria, conocemos su función de distribución, podemos conocer todos los momentos asociados a la misma.<sup>1</sup> Recíprocamente, si de una distribución conocemos todos sus momentos, esto es equivalente a conocer la distribución misma.<sup>1</sup> Por lo tanto para determinar una distribución de probabilidad asociada a un experimento, tenemos dos alternativas: determinar directamente la distribución, o bien determinar todos sus momentos o por lo menos los más relevantes, y a partir de ellos inferir la distribución.

### 60.2 La distribución de Poisson

Esta es una distribución de probabilidad discreta.<sup>2</sup> Se presenta en experimentos aleatorios donde los resultados posibles son el conjunto de los números naturales. La probabilidad que la variable aleatoria tome el valor  $n$  está dada por la función de distribución de Poisson, definida como:<sup>3,4,5</sup>

$$P_{\lambda}(n) = \frac{\lambda^n}{n!} \cdot e^{-\lambda}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (60.1)$$

donde  $\lambda$  es un parámetro característico de la distribución, con las siguientes propiedades:

$$\langle n \rangle = \sum_n n \cdot P_{\lambda}(n) = \lambda. \quad (60.2)$$

La varianza de la distribución está dada por:

$$\text{Var}(n) = \sigma^2 = \sum [(n - \langle n \rangle)^2 \cdot P_{\lambda}(n)] = \lambda, \quad (60.3)$$

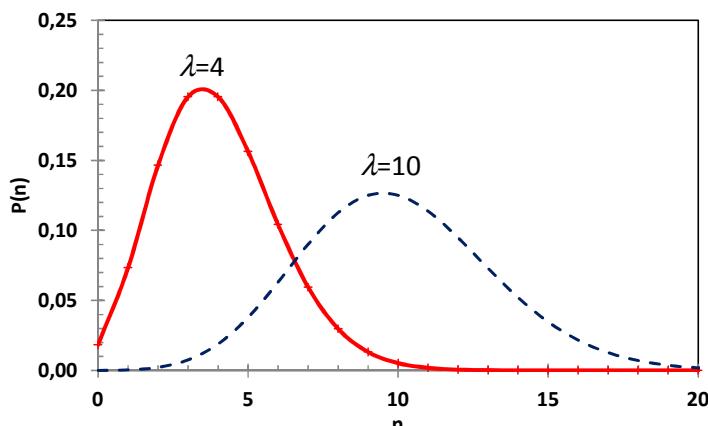
siendo  $\sigma$  la desviación estándar de la distribución. La probabilidad de Poisson es máxima para  $n \approx \lambda$ . Esta distribución de probabilidad no es simétrica con respecto al valor medio  $\langle n \rangle$ . De hecho la asimetría y curtosis de esta distribución son:<sup>1,2</sup>

$$\text{Asimetria} = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}, \quad \text{y} \quad \text{Curtosis} = \frac{\mu_4}{\sigma^4} = 3 + \frac{1}{\lambda}. \quad (60.4)$$

Aquí  $\mu_r$  representa el momento de orden  $r$  de la distribución, o sea:

$$\mu_r = \sum_n n^r P_{\lambda}(n) \quad \text{y} \quad \lambda \equiv \mu_1. \quad (60.5)$$

La Fig. 60.1 ilustra la forma de esta distribución. Vemos que  $\lambda$  es el valor medio de la variable aleatoria  $n$ , o sea el momento de primer orden,  $\mu_1$ , de la distribución; la particularidad de la distribución de Poisson, es que el valor medio  $\lambda$ , coincide con su varianza y su moda. En términos de los resultados de presente experimento,  $\lambda$  representa el número promedio de cuentas emitidas por una fuente radiactiva en el intervalo de tiempo de observación.



**Figura 60.1** Distribución de Poisson para  $\lambda=4$  y  $10$  respectivamente.

Un modo de falsar la hipótesis de que una determinada distribución sigue o no la distribución de Poisson consiste en determinar sus primeros dos o cuatro momentos  $\mu_r$ , y luego verificar si éstos obedecen las relaciones dadas por las Ecs.(60.3) y (60.4).

## Proyecto 198. Estudio experimental de la estadística del proceso radioactivo

**Equipamiento recomendado:** Un detector de radiación gama asociado a un sistema de adquisición de datos. Una fuente radioactiva cualquiera. Si no dispone de estos equipos puede utilizar los espectros que se describen en la nota al final de la actividad.

Para este experimento es necesario usar un detector de radiación gama, asociado a un sistema de adquisición de datos que permita medir el número de cuentas que llegan al detector en un dado intervalo de tiempo  $\tau_d$  (denominado *dwell time*). Para este experimento es necesario tener alguna familiaridad con los sistemas de detección de radiación gama. Existe una extensa y excelente bibliografía sobre este tema, en particular en las Refs.[4,6,7] se puede encontrar presentaciones muy accesibles y adecuadas a los sistemas de detección de radiación  $\gamma$ ,  $\alpha$ , y  $\beta$ .

En este experimento se puede utilizar un detector de centelleo o de estado sólido,<sup>4</sup> asociado a un analizador multicanal con *Multi Channel Scaling* (MCS). Muchos modelos de multicanales comerciales<sup>6,7</sup> cuentan entre sus modos de funcionamiento esta variante. En síntesis un MCS es un contador de pulsos que ocurren en un intervalo de tiempo predeterminado  $\tau_d$ . Esta secuencia de medición se repite en forma automática  $N$  veces y los pulsos detectados en cada intervalo  $k$  ( $=1, \dots, N$ ) de medición quedan registrados como una secuencia de números  $n_k$ . Con esta secuencia de números podemos estudiar la distribución de la variable aleatoria  $n$  = número de rayos gamas detectados en  $\tau_d$ . Por ejemplo, si el decaimiento radioactivo de una fuente fuese un proceso determinístico, se esperaría que  $n_k = B$ .  $\tau_d$ , siendo  $B$  una constante de proporcionalidad, independiente de  $k$ . Es decir, todos los valores de  $n_k$  en una secuencia de medición serían iguales. Por el contrario, si el proceso de decaimiento fuese aleatorio, los valores de  $n_k$ , revelarían la estadística asociada al proceso de decaimiento.

En la Fig. 60.2 se presenta un esquema del dispositivo experimental propuesto. Aquí sugerimos un detector de radiación gama del tipo NaI,<sup>3</sup> pero cualquier detector de radiación ( $\alpha$ ,  $\beta$  o  $\gamma$ ) puede servir igual.<sup>8</sup>

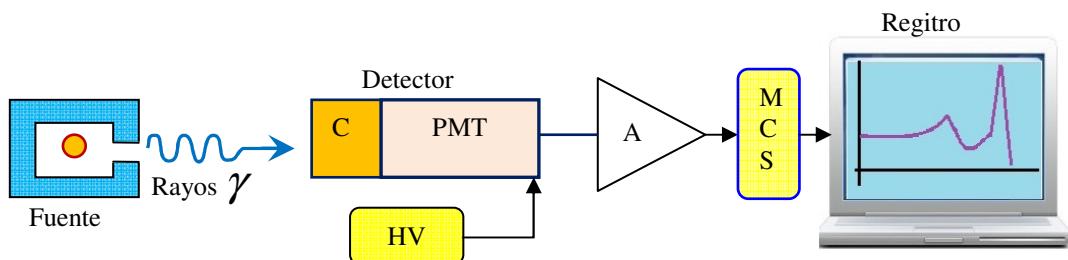
**Recomendaciones generales:** Realice las mediciones en forma continua, de modo de asegurar que las características físicas y geométricas del experimento sean lo más constantes posible. Mantenga la fuente, el detector, la electrónica y todas las condiciones de la experiencia inalteradas durante la ejecución del experimento.

### Sugerencias de trabajo

- ✓ Colocar la fuente radioactiva cerca del detector, de tal manera que el conteo no exceda unas 100 cuentas por minutos.
- ✓ Configure el MCS con  $N= 512$  o más canales. Es decir, repetimos la medición 512 o más veces.
- ✓ Para cada realización del experimento variamos el tiempo de medición  $\tau_d$  (*dwell time*) del MCS. De este modo, en cada realización del experimento obtenemos una secuencia de valores  $n_k(\tau_d)$ .
- ✓ Para cada valor de  $\tau_d$ , determinamos los momentos de  $\mu_r$  de las correspondientes distribuciones, es decir:

$$\mu_r = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{k=N} (n_k)^r, \quad r = 0, 1, 2, \dots \quad (60.6)$$

- ✓ Conociendo los primeros momentos, determinamos  $\lambda$  y  $\sigma$ , y de ser posible, la asimetría y curtosis, para cada valor de  $\tau_d$ . La idea es que el valor medio  $\lambda$  varíe desde unas pocas cuentas (menos que diez) hasta unas miles.



**Figura 60.2** Esquema del dispositivo experimental. La fuente radiactiva produce los fotones incidentes. El cristal centelador de NaI(Tl) (C) detecta los rayos  $\gamma$ . La fuente de alta tensión (HV) alimenta el tubo fotomultiplicador (PMT) genera un pulso eléctrico; de altura proporcional a la energía del fotón incidente. El amplificador, conforma y amplifica este pulso, que entra en un digitalizador y Multicannel Sacalling (MCS) asociado a la computadora.

- ✓ Para cada realización del experimento (asociado a cada elección del tiempo de medición  $\tau_d$ ) construya un histograma de  $n_k$ .
- ✓ Para cada uno de estos histogramas (o sea para cada elección del tiempo de medición  $\tau_d$ ) calcule el valor medio de  $n$ ,  $\lambda(\tau_d)$ , y la varianza  $\sigma^2(\tau_d)$ .
- ✓ Usando los datos obtenidos represente gráficamente  $\sigma^2$  en función de  $\lambda$ . ¿Qué puede concluir de este último gráfico acerca de la relación entre  $\sigma^2$  y  $\lambda$ ?
- ✓ ¿Es la distribución de Poisson compatible con estos resultados?
- ✓ Usando la expresión (60.1) para la distribución de Poisson y los valores de  $\lambda$  calculados para cada elección del tiempo de medición, construya un gráfico de la distribución de Poisson correspondiente, superpuesto al histograma obtenido

experimentalmente (propriamente normalizado). ¿Qué puede decir acerca de las distribuciones obtenidas experimentalmente?

- ✓ ♣♣ Usando los datos obtenidos represente gráficamente la asimetría y de se posible tabien la curtosis como función de  $\lambda$  en escala log-log. Sus resultados experimentales son consitente con las expectativas teóricas dadas por la E.(60.4). ¿Es la distribución de Poisson compatible con estos resultados?

### Nota

En [www.fisicarecreativa.com](http://www.fisicarecreativa.com), en la sección “Recursos de Experimentos de Física usando Tic’s”, encontrará datos de decaimientos radiactivos para analizar. Los datos fueron tomados con detectores de estado sólido y NaI.

### Referencias

- 
- <sup>1</sup> H. Cramer, *Teoría de probabilidades y aplicaciones* (Aguilar, Madrid, 1968).
- <sup>2</sup> Poisson distribution, From Wikipedia, [http://en.wikipedia.org/wiki/Poisson\\_distribution](http://en.wikipedia.org/wiki/Poisson_distribution)
- <sup>3</sup> R.D. Evans, *The Atomic Nucleus* (McGraw-Hill Book Co., New York, 1955).
- <sup>4</sup> G.F. Knoll, 2<sup>nd</sup> ed. (John Wiley & Sons Inc., New York, 1989).
- <sup>5</sup> P.R.Bevington, *Data reduction and error analysis for the physical sciences* (McGraw-Hill Book Co., New York, 1969).
- <sup>6</sup> CANBERRA Industries Inc. Nuclear Measurements. <http://www.canberra.com/>
- <sup>7</sup> AMETEX, Advanced Measurement Tecnology, <http://www.ortec-online.com/>
- <sup>8</sup> Los siguientes artículos son de utilidad para este experimento: *Am. J. Phys.* **41**(3), 410 (1973); *ibid* **42**(3), 231 (1974); *ibid* **44**(2), 172 (1976); *ibid* **44**(2), 177 (1976); *ibid* **45**(4), 380 (1977); *ibid* **45**(10), 985 (1977); *ibid* **46**(3), 279 (1978); *ibid* **8**(2), 172 (1980); *ibid* **48**(10) 886 (1980); *ibid* **49**(2) 141 (1981); *ibid* **49**(6) 561 (1981).

# Capítulo 61

## Dinámica relativista. Colisiones de fotones y electrones. Efecto Compton

En el presente capítulo nos proponemos estudiar experimentalmente los modelos clásicos y relativistas para describir la cinemática de la interacción de rayos gamma con electrones libres. Dado que las energías de los rayos gamma son del orden o mayores que la masa en reposo del electrón, este estudio posibilita detectar los efectos relativistas de la colisión. Este experimento permite además determinar la masa en reposo del electrón. Analizaremos el efecto Compton y los espectros de radiación gamma obtenidos con analizadores multicanales.

### Objetivos

- ✓ Detectores de radiación gamma
- ✓ Interacción de los fotones con la materia
- ✓ Efecto Compton
- ✓ Dinámica relativista

### 61.1 Cinemática relativista

La teoría especial de la relatividad parte de la premisa de que las leyes de la Física son las mismas para todos los observadores inerciales, quienes se mueven con velocidad constante unos con respecto a los otros, y que la velocidad de la luz en el vacío,  $c$ , es igual para todos ellos.<sup>1,2</sup> Una consecuencia de esta teoría es que el momento lineal de una partícula viene dado por:

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v} = \gamma \cdot m_0 \cdot \vec{v}, \quad (61.1)$$

donde  $\vec{p}$  y  $\vec{v}$  son el momento lineal y la velocidad de la partícula,  $m$  es la masa y  $m_0$  es la masa en reposo.<sup>3</sup> Por su parte,  $\beta=v/c$  y  $\gamma$ :

$$\gamma = 1/\sqrt{1-(v/c)^2} = 1/\sqrt{1-\beta^2}. \quad (61.2)$$

La energía total de la partícula  $E$  es igual a la suma de su energía cinética  $T$  y  $m_0c^2$ , o sea:

$$E \equiv c\sqrt{p^2 + m_0^2c^2} = T + m_0c^2. \quad (61.3)$$

En las colisiones relativistas siempre se cumple la conservación de la energía total y del momento lineal. Específicamente, para una partícula de masa nula como el fotón:

$$E \equiv E_\gamma = cp_\gamma = \hbar\omega. \quad (61.4)$$

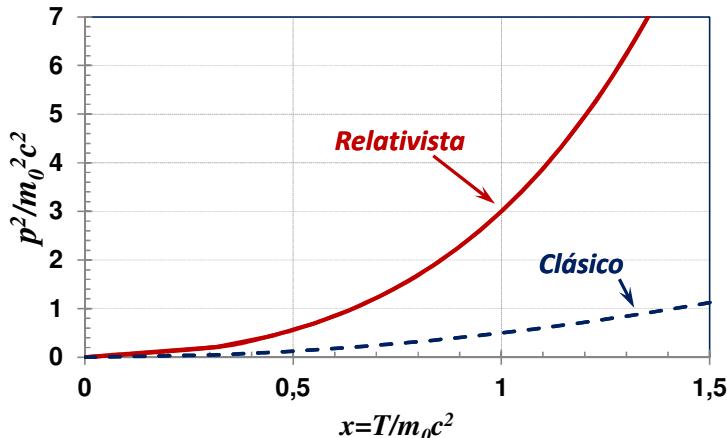
Dado que tanto el momento  $p$  de una partícula como su energía cinética  $T$  son parámetros medibles, la relación entre  $T$  y  $p$  puede servir para poner a prueba las predicciones clásicas y relativistas entre estas magnitudes. Según la Ec. (61.3) la relación relativista es:

$$\frac{p^2}{m_0^2c^2} = \left( \frac{T}{m_0c^2} + 1 \right)^2 - 1, \quad (61.5)$$

mientras que la correspondiente relación clásica es:

$$\frac{p^2}{m_0^2c^2} = \frac{1}{2} \left( \frac{T}{m_0c^2} \right). \quad (61.6)$$

En la Figura 61.1 se indica con línea gruesa sólida la predicción relativista —Ec.(61.5)— y, con línea de trazos delgada, la clásica —Ec.(61.6)—. Como puede observarse, si somos capaces de medir  $T$  y  $p$  para energías cinéticas en la región en que  $T \geq m_0 c^2$ , podemos poner a prueba las predicciones clásicas y relativistas.



**Figura 61.1** Predicciones clásicas y relativistas de la variación de  $(p/m_0 c)^2$  como función de  $T/m_0 c^2$ . Cuando  $T$  es del orden o mayor que  $m_0 c^2$ , las expectativas teóricas de los dos modelos son bien diferentes.

Existen varios modos de medir independientemente el momento y la energía cinética de una partícula. Para una partícula cargada en un campo magnético uniforme, el radio de su órbita es proporcional a  $p$ . Por otra parte, la energía depositada en un detector de partículas es proporcional a  $T$ .<sup>4</sup> En este capítulo intentaremos explorar la forma del espectro de un detector de radiación gamma para determinar estos parámetros para un electrón.<sup>5,6</sup>

## 61.2 Interacción de la radiación con la materia. Efecto Compton

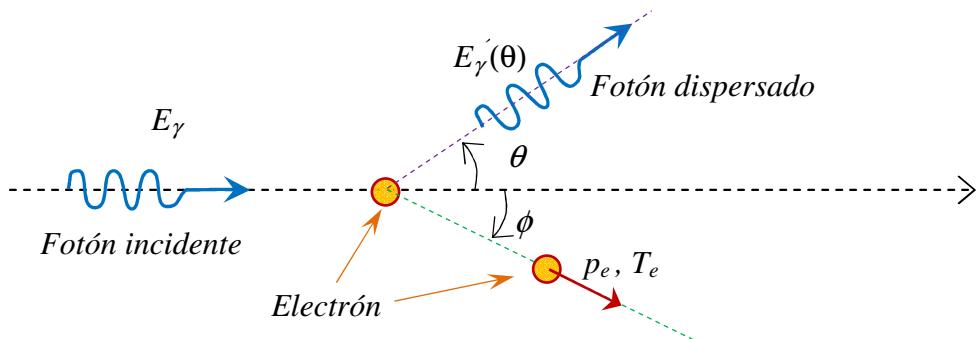
La radiación electromagnética (fotones) interactúa con la materia a través de varios procesos distintos. La importancia relativa de cada proceso depende de la energía de los fotones y del número atómico,  $Z$ , del medio absorbente. A bajas energías, cuando la energía de los fotones es menor que la energía de excitación de los átomos o moléculas, o alternativamente, si la longitud de onda es mucho mayor que las dimensiones de los átomos o moléculas, el mecanismo dominante es la dispersión de Rayleigh. Este mecanismo lo analizaremos más detenidamente en el Cap. 66.

A mayores energías, cuando los fotones tienen energías comparables a las de la ligadura de los electrones en los átomos, el mecanismo dominante es el efecto fotoeléctrico.<sup>7</sup> Aquí la energía y momento del fotón es totalmente absorbida por el átomo y por el electrón liberado. Cuando la energía de los fotones es muy superior a la de la ligadura de los electrones, el mecanismo dominante de absorción es el efecto Compton. En este proceso el fotón conserva una parte de su energía original y continúa moviéndose en una nueva dirección. Cuando la energía de los fotones supera 1022 MeV, bajo la influencia del campo electromagnético de un núcleo, los fotones pueden comenzar a producir pares electrón-positrón. La probabilidad de producción de pares aumenta con el  $Z$  del material absorbente y con la energía del fotón.<sup>7</sup>

En el *efecto fotoeléctrico* la absorción del fotón es completa (se absorbe su energía y

momento) por parte de un electrón ligado al átomo. Este proceso no puede ocurrir con electrones libres, pues la conservación simultánea de la energía y el momento lo impiden.

Por otra parte, cuando un fotón interactúa con un electrón libre, para que se conserve la energía y el momento en la interacción, en el estado final se debe tener un electrón y un nuevo fotón entre los cuales se reparten la energía y el momento del fotón incidente. Este proceso de interacción de un fotón con un electrón se denomina *efecto Compton*. Este efecto también se produce con electrones cuasilibres, o sea, con aquellos que tienen una energía de ligadura al átomo mucho menor que la energía del fotón incidente. El diagrama de la Figura 61.2 representa este proceso.



**Figura 61.2** Esquema de una interacción Compton.

Llamaremos  $p_e$  y  $T_e$  al momento y a la energía cinética del electrón después de la interacción. Designamos con  $E_\gamma$  la energía del fotón incidente y con  $E'_\gamma(\theta)$  la energía del fotón después de la interacción, que suponemos sale en una dirección que forma un ángulo  $\theta$  con la dirección del fotón incidente. De la conservación de energía y momento en la colisión, se tiene que:<sup>1,5,8</sup>

$$\frac{1}{E'_\gamma(\theta)} - \frac{1}{E_\gamma} = \frac{1}{m_e c^2} (1 - \cos \theta). \quad (61.7)$$

Para el caso particular de una colisión unidimensional, es decir, para el caso en que  $\theta=180^\circ$ , de la conservación del momento y energía tenemos:<sup>5,8</sup>

$$E_\gamma/c = p_e - E'_\gamma/c \quad \text{y} \quad E_\gamma = T_e + E'_\gamma. \quad (61.8)$$

Ya que el electrón dispersado ( $\theta=180^\circ$ ) sale en la dirección opuesta a la del fotón incidente, eliminando  $E'_\gamma$  tenemos:

$$p_e c = 2 E_\gamma - T_e. \quad (61.9)$$

Esta relación nos permite conocer  $p_e$  si podemos medir  $E_\gamma$  y  $T_e$  y es válida tanto relativamente como clásicamente. Por lo tanto, con esta expresión y con la medición de  $T_e$  y  $E_\gamma$  ya estamos en condiciones de construir un gráfico experimental como el de la Figura 61.1 para poner a prueba las predicciones clásicas y relativistas.

En todo lo que sigue supondremos que estamos considerando el caso de una colisión unidimensional, a menos que explícitamente se indique lo contrario.

La conexión clásica entre energía y momento es:

$$T_e = \frac{p_e^2}{2 m_{nr}} . \quad (61.10)$$

Aquí  $m_{nr}$  es la masa no relativista del electrón y  $T_e$  es su energía cinética. Combinando las Ecs. (61.9) y (61.10) tenemos:

$$m_{nr} c^2 = \frac{(2 E_\gamma - T_e)^2}{2 T_e} . \quad (61.11)$$

Esta expresión permite obtener la masa no relativista del electrón según la aproximación clásica, en términos de la energía del fotón incidente  $E_\gamma$ , y la energía cinética  $T_e$  de los electrones después de una interacción Compton. La correspondiente expresión relativista entre el momento y la energía cinética es:

$$T_e = \sqrt{p_e^2 c^4 + m_e^2 c^4} - m_e c^2 , \quad (61.12)$$

donde  $m_e$  es la masa en reposo del electrón. Si combinamos las Ecs. (61.9) y (61.12), obtenemos la siguiente expresión para la masa en reposo del electrón:

$$m_e c^2 = \frac{2 E_\gamma (E_\gamma - T_e)}{T_e} . \quad (61.13)$$

Esta ecuación es la expresión relativista análoga a la clásica Ec. (61.11). De este modo surge una forma de poner a prueba los modelos clásicos y relativistas para el electrón. Si en un mismo gráfico representamos los segundos miembros de las Ecs. (61.11) y (61.13) como función de  $E_\gamma$ , podemos evaluar cuál de los modelos concuerda mejor con los resultados experimentales y cuál modelo debe ser rechazado.

Los parámetros relativistas  $\beta$  y  $\gamma$  también pueden escribirse en términos de  $T_e$  y  $E_\gamma$  como:

$$\beta \equiv \frac{v}{c} = \frac{p_e c}{m_e c^2} = \frac{2 E_\gamma - T_e}{T_e + m_e c^2} = \frac{T_e (2 E_\gamma - T_e)}{T_e^2 - 2 E_\gamma T_e + 2 E_\gamma^2} , \quad (61.14)$$

y

$$\gamma = \frac{E_e}{m_e c^2} = 1 + \frac{T_e^2}{2 E_\gamma (E_\gamma - T_e)} . \quad (61.15)$$

De este modo, si somos capaces de medir  $E_\gamma$  y  $T_e$  para una colisión entre un fotón y un electrón con  $\theta=180^\circ$ , a partir de las Ecs. (61.9) a (61.15) podemos determinar todos los parámetros necesarios para falsar las expectativas teóricas clásicas y relativistas.

### 61.3 Mecanismos de interacción de fotones en un detector de rayos gamma

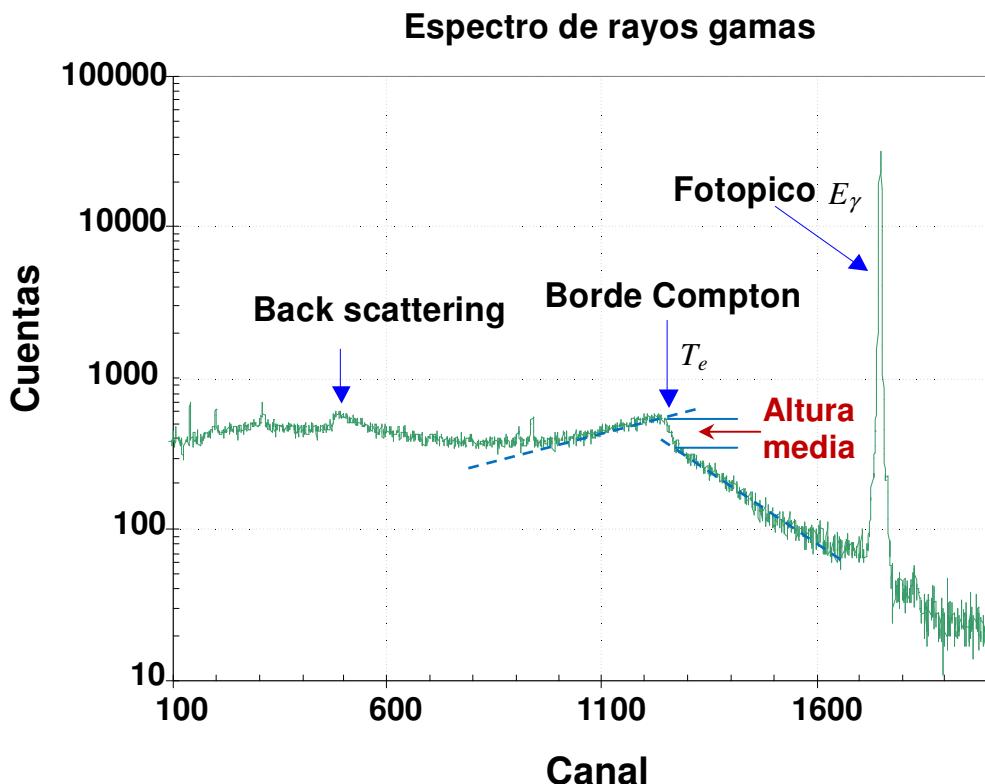
Existen diversos tipos de detectores de radiación gamma, de los cuales los más difundidos son los detectores de centelleo y los de estado sólido. Entre los primeros podemos mencionar los detectores de NaI(Tl),<sup>7,8</sup> que consisten en un cristal centellador de NaI dopado con Tl asociado a un tubo fotomultiplicador. Cuando un fotón interactúa con el material del detector, su energía se degrada (total o parcialmente) dentro del material, lo que da como resultado final que algunos átomos queden en estados excitados. A su vez, cuando estos átomos decaen emiten fotones visibles, cuyo número es proporcional a la energía depositada en el cristal por el fotón incidente. El tubo fotomultiplicador (PMT) detecta estos fotones y genera un pulso cuya altura es proporcional al número de fotones detectados. Así resulta que el pulso de tensión tiene una altura que es proporcional a la energía del fotón incidente en el cristal.

En los detectores de estado sólido, por ejemplo los de germanio hiperpuro —Ge(Hp)—<sup>7</sup> la energía del fotón incidente se transforma en la creación de pares de electrones y huecos dentro del cristal del detector. Un campo eléctrico aplicado al cristal del detector colecta estas cargas y genera un pulso de corriente en el circuito externo del detector. Como el número de pares electrón-hueco es proporcional a la energía del fotón incidente, el pulso de corriente (carga colectada) también es proporcional a la energía del fotón. Un preamplificador convierte la señal de la carga colectada en un pulso de tensión.

Cualquiera que sea el detector, los mecanismos de interacción de la radiación con la materia son comunes a todos ellos. Cuando la radiación equis (X) o gamma ( $\gamma$ ) interactúa con los átomos de un detector o de cualquier material, lo hace a través de los mecanismos discutidos más arriba.<sup>7,8</sup>

Asociado al detector (ya sea de estado sólido o de centelleo), es necesario usar un amplificador espectroscópico, que amplifica y conforma los pulsos del detector para su análisis en el sistema de adquisición de datos.<sup>7,9,10</sup>

El sistema de adquisición de datos más usado es un *analizador de altura de pulsos* asociado a un conversor analógico digital (ADC). Con este dispositivo electrónico los pulsos generados por el detector y que llevan la información de la energía que los fotones depositan en el detector son convertidos en señales digitales. Estas señales digitalizadas son seguidamente tomadas por un multicanal que realiza un análisis de la altura del pulso y la convierte en un número (canal). En esta última etapa se genera un histograma del número de cuentas en función del canal. De este modo es frecuente que el número de canal sea proporcional a las alturas de los pulsos, es decir, a la energía de los rayos  $\gamma$  o rayos X. Una descripción más detallada de los diversos componentes del dispositivo experimental puede hallarse en la bibliografía.<sup>7,9,10</sup>



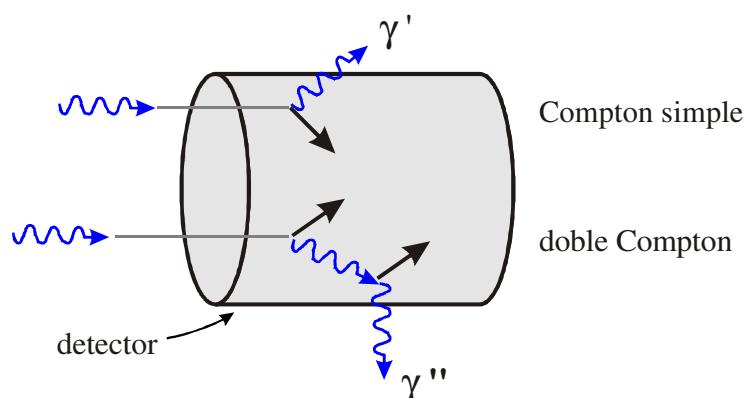
**Figura 61.3** Espectro típico de rayos gamma obtenido usando un detector de estado sólido Ge(Hp). Este espectro corresponde a una fuente monoenergética de  $^{137}\text{Cs}$ . Además del pico principal (fotopico,  $E_\gamma$ ), se observan dos características conspicuas: el borde Compton, que corresponde a la máxima energía cinética  $T_e$  de los electrones en una colisión frontal con los fotones incidentes, y el pico de *back scattering*, que corresponde a la energía de los fotones que son retrodispersados en el medio circundante y reingresan al detector. El valor de  $T_e$  se puede obtener de la posición de la *altura media* del flanco ascendente de borde Compton.

En la Figura 61.3 se puede observar un espectro típico de rayos gamma, obtenido con un detector de estado sólido. Los espectros que resultan de un detector de centelleo son en esencia similares, excepto que la resolución de los picos no es tan buena como la ilustrada en esta figura.

Las principales características de un espectro gamma son: el *fotopico* de energía  $E_\gamma$  (corresponde al caso en que toda la energía del fotón incidente queda en el detector), y una planicie o *meseta Compton*. Esta planicie se debe a que a menudo, cuando ocurre una interacción Compton, el electrón deja toda su energía en el detector, mientras que el fotón dispersado, que es producido en la interacción, escapa de él como se ilustra en la Figura 61.4. Por esta razón la planicie siempre aparece a energías menores que el fotopico. La relación entre la importancia relativa de la meseta Compton y el fotopico depende, entre otros factores, del tamaño del detector. Cuanto más grande sea el detector, menor será la probabilidad de escape de los fotones secundarios y menor será la magnitud de la meseta Compton respecto del fotopico y viceversa. El continuo de la meseta se debe a que la energía de los electrones eyectados por la interacción varía según sea el ángulo en que sale el fotón secundario. En particular, si el fotón secundario escapa a  $\theta = 180^\circ$  de la dirección incidente, el electrón eyectado tendrá la máxima energía posible en este tipo de interacción. En otras palabras, el valor de energía máxima de la meseta Compton, llamada

borde o canto Compton, está asociado a la energía máxima impartida a un electrón en una interacción Compton, o sea,  $T_e$ . La razón por la que el canto Compton no es abrupto está asociada en parte al hecho de que los electrones del detector no están libres y a las limitaciones de resolución del detector. Una prescripción práctica para determinar el valor de  $T_e$  consiste en identificar el punto de altura media del flanco ascendente del borde Compton, como se ilustra esquemáticamente en la Figura 61.3.

La presencia de cuentas entre el borde Compton y el fotóptico está asociada a la posibilidad de que los fotones producidos en una interacción Compton realicen una segunda o tercera colisión Compton en el detector (Figura 61.4). Una discusión más detallada de los distintos tipos de interacciones que ocurren en los detectores de rayos gamma puede encontrarse en las Refs. [6,7].



**Figura 61.4** Ilustración esquemática del origen de la meseta Compton (Compton simple) y del doble Compton. En todos los casos la energía de los electrones queda en el detector. En el primer caso el rayo gamma ( $\gamma'$ ) se escapa del cristal; en el segundo caso el rayo  $\gamma''$  no es detectado.

De la discusión anterior podemos concluir que con el estudio de los espectros de rayos gamma obtenidos usando detectores de estado sólido o centelladores es posible estudiar la cinemática y dinámica de la interacción de los fotones con los electrones del detector. Más específicamente, la energía de fotóptico del espectro de rayos gamma está asociada a la energía de los fotones incidentes ( $E_\gamma$ ), mientras que la energía asociada al borde Compton ( $T_e$ ) es la energía máxima de los electrones eyectados en la interacción, o sea, la energía de los electrones que realizan una colisión unidimensional con los fotones incidentes y que en la Ec. (61.9) designamos con  $T_e$ . De este modo, el experimento que nos proponemos realizar consiste en estudiar experimentalmente la relación entre  $E_\gamma$  y  $T_e$ . Esta información experimental la utilizaremos para falsar las expectativas teóricas clásicas y relativistas del electrón eyectado.

### Proyecto 197. Estudio experimental de la colisión fotón-electrón. Efecto Compton

**Equipamiento recomendado:** Un detector de radiación gamma asociado a un sistema de adquisición de datos. Fuentes radioactivas de pocas líneas pero que cubran un amplio espectro de energía (100 keV a 1,3 MeV aproximadamente). Si no dispone de estos equipos puede utilizar espectros ya obtenidos (ver la nota al final de este proyecto).

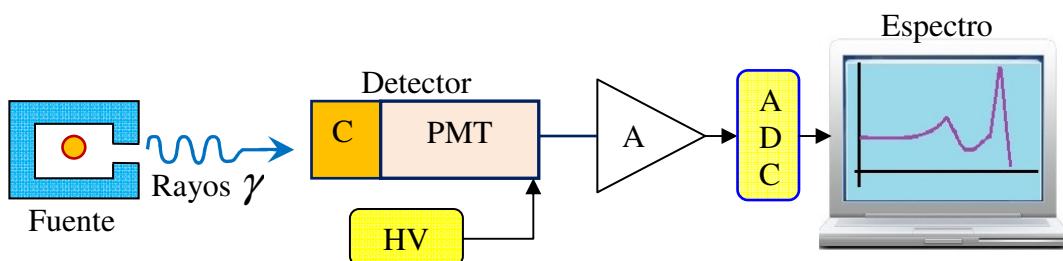
Para este experimento es conveniente utilizar un arreglo como el esquematizado en la Figura 61.5 y un conjunto de fuentes de radiación gamma, de modo que cubra un rango de rayos gamma de energía lo más amplio posible (de 100 keV a 1,3 MeV aproximadamente). Fuentes radioactivas como  $^{137}\text{Cs}$ ,  $^{60}\text{Co}$ ,  $^{22}\text{Na}$ ,  $^{52}\text{Cr}$ ,  $^{133}\text{Ba}$ ,  $^{57}\text{Co}$ ,  $^{241}\text{Am}$ ,  $^{198}\text{Au}$ ,  $^{207}\text{Bi}$ , etcétera pueden ser adecuadas para este experimento. Con el detector que tengamos disponible obtendremos los espectros de rayos gamma para dichas fuentes.

Calibre el detector usando un conjunto de fuentes conocidas y que tengan pocas líneas espectrales, de modo que facilite su identificación en el espectro. Construya un gráfico de la energía de los fotónicos en función del canal donde se encuentre su centroide. Ajuste una relación lineal a este gráfico (de ser necesario puede usar un polinomio). De este modo se obtiene una curva de calibración de canales en energía). Usando una fuente no utilizada en la calibración, obtenga su espectro y verifique si su calibración predice adecuadamente la posición de los picos correspondiente a esta fuente.

Una vez calibrado el detector, usando los fotónicos ( $E_\gamma$ ) de las fuentes utilizadas procedemos a identificar los bordes Compton ( $T_e$ ) asociados a cada pico del espectro.

Del análisis de estos espectros construimos una tabla de  $E_\gamma$  y  $T_e$  para la mayor cantidad posible de picos que podamos identificar. Para facilitar esta tarea es conveniente que las fuentes sean o bien monoenergéticas o bien que presenten pocos picos.

Asegúrese de que las fuentes elegidas cubran un rango de energías de fotones entre unos 100 keV a 1,3 MeV aproximadamente. Este rango posibilita que los electrones que colisionan frontalmente salgan con energías cinéticas menores y mayores que la masa en reposo del electrón ( $m_e.c^2 \approx 511$  keV).



**Figura 61.5** Esquema del detector de rayos gamma. La fuente radiactiva produce los fotones incidentes. El cristal centelador de NaI(Tl), C, detecta los rayos  $\gamma$ . La fuente de alta tensión (HV) alimenta el tubo fotomultiplicador (PMT) y genera un pulso eléctrico de altura proporcional a la energía del fotón incidente. El amplificador conforma y amplifica este pulso, que entra en el conversor analógico digital (ADC) y de allí va al analizador multicanal (MCA) asociado a la computadora.<sup>7,8,9</sup>

**Nota sobre seguridad:** Consulte con su instructor sobre las precauciones que debe tener en cuenta con el manejo del dispositivo experimental (fuentes de alta tensión, fuentes radioactivas, etc.). No aplique tensión al detector ni conecte nada al multicanal hasta que un instructor revise su circuito electrónico. Tenga precaución con el manejo de las fuentes

radioactivas y, después de su uso, colóquelas en los contenedores de plomo correspondientes. Consulte el Apéndice B sobre normas de seguridad en el laboratorio.

### Sugerencias de trabajo:

Si dispone de detectores de rayos gamma, arme un dispositivo similar al descripto en la Figura 61.5 para detectar rayos gamma de fuentes radiactivas, teniendo las precauciones descriptas antes y las que sus instructores le recomiendan. Si no dispone de este tipo de instrumentos puede usar espectros ya obtenidos (ver la nota al final de esta actividad).

- ✓ **Calibración del multicanal:** Una vez adquiridos los espectros de las fuentes radiactivas y conociendo las energías de los fotones que emiten las fuentes,<sup>1,6</sup> realice una calibración en energía del sistema de adquisición utilizado. Es decir, construya un gráfico de energía de los fotones en función del canal en el que se presentan los centroides de los fotopicos. Este gráfico constituye la curva de calibración en energía del sistema espectroscópico. Con esta curva es posible determinar en lo sucesivo la energía asociada a cada canal del sistema espectroscópico.
- ✓ Para cada rayo gamma, determine la posición del borde Compton correspondiente. Una técnica de ubicación<sup>1,3</sup> de dicho borde consiste en tomar la posición intermedia entre el máximo y el mínimo del borde. Discuta brevemente el criterio usado para caracterizar el valor de  $T_e$ . En las Refs. [6,7,11,12,13] se presentan análisis detallados sobre cómo caracterizar la posición del borde Compton. Usando la técnica descripta aquí u otra que considere adecuada, determine el valor de  $T_e$  para cada fotón de energía  $E\gamma$ .
- ✓ Realice un gráfico de energía del canto Compton ( $T_e$ ) en función de la energía del rayo gamma  $E_\gamma$  correspondiente (fotopico).
- ✓ Usando sus datos de  $E_\gamma$  y  $T_e$ , represente gráficamente:
  - $m_e c^2$  en función de  $T_e$ . Ec.(61.11)
  - $m_n c^2$  en función de  $T_e$ . Ec.(61.13)
- ✓ Discuta qué modelo teórico —Ecs. (61.11) ó (61.13)— describe mejor sus observaciones. A partir de estos datos obtenga el mejor valor de la masa del electrón,  $m_e$ , y su incertidumbre. ¿Cómo se compara su resultado con los mejores valores reportados para este parámetro?
- ✓ Usando sus datos de  $E_\gamma$  y  $T_e$ , represente gráficamente:
  - $(p_e c/m_e c^2)^2$  en función de  $T_e/m_e c^2$ , similar a la Figura 61.1, y
  - $(p_e c/m_e c^2)^2$  en función de  $\beta$ .
  - $\gamma$  en función de  $\beta$ .
  - En cada uno de estos gráficos, incluya las predicciones de los modelos teóricos, Ecs. (61.5), (61.6) o equivalentes.

- ¿Cómo se comparan sus resultados con las expectativas relativistas y clásicas?  
¿Qué puede concluir de este análisis?
- ✓ Discuta la validez de las aproximaciones clásica y relativista para interpretar sus resultados.

## Nota

En [www.fisicarecreativa.com](http://www.fisicarecreativa.com), en “recursos de experimentos de física,” encontrará datos de espectros que son útiles para este experimento. Estos espectros fueron obtenidos con un dispositivo experimental similar al de la Figura 61.5 usando detectores de estado sólido.

## Referencias

---

- <sup>1</sup> P.P. Feynman, R.B. Leighton y M. Sands, *The Feynman Lectures, Quantum Mechanics*, Vol. 1, Caps. 15-16 (Addison Wesley, Reading, Ma., 1970).
- <sup>2</sup> W. Rindler, *Relativity – Special, General and Cosmological* (Oxford University Press, Oxford, 2001).
- <sup>3</sup> E. Hecht, “Einstein on mass and energy”, *Am. J. Phys.* 77, 799 (2009).
- <sup>4</sup> J.W. Luetzelschwab, “Apparatus to measure relativistic mass increase”, *Am. J. Phys.* 71, 878 (2003).
- <sup>5</sup> J. Higbie, “Undergraduate Relativity Experiment”, *Am. J. Phys.* 42, 642 (1974).
- <sup>6</sup> L. Jolivette y N. Rouze, “Compton Scattering, the electron mass, and relativity: A laboratory experiment”, *Am. J. Phys.* 62, 266 (1994).
- <sup>7</sup> Glenn F. Knoll, *Radiation detection and measurements*, 2<sup>a</sup> ed. (John Wiley and Sons Inc., New York, 1989).
- <sup>8</sup> R.D. Evans, *The Atomic Nucleus* (McGraw-Hill Book Co., New York, 1955).
- <sup>9</sup> CANBERRA Industries Inc. Nuclear Measurements. <http://www.canberra.com/>
- <sup>10</sup> AMETEX, Advanced Measurement Tecnology, <http://www.ortec-online.com/>
- <sup>11</sup> C.M. Lederer *et al.*, *Table of Isotopes*, 7<sup>a</sup> ed. (John Wiley and Sons, New York, 1978); Lederer, Hollander y Perlman, *Table of Radioisotopes*, 6<sup>a</sup> ed. (John Wiley and Sons Inc., New York, 1967). En Internet: *The Lund/LBNL Nuclear Data Search*, S.Y.F. Chu, L.P. Ekström y R.B. Firestone, 1999 <http://nucleardata.nuclear.lu.se/toi/>
- <sup>12</sup> M.C. Lee, K. Veghese y R.P. Garner, *Nucl. Inst. & Meth.* A262, 430 (1987).
- <sup>13</sup> D. E. Di Gregorio, S. Gil, H. Huck, E. R. Batista, A. M. J. Ferrero y O. Gattone, “Search for a neutrino mass component in the internal bremsstrahlung of  $^{71}\text{Ge}$ ”, *Phys. Rev.* C47, 2916 (1993).

## Capítulo 62

# Interacción de la radiación electromagnética con la materia

En este capítulo estudiamos algunas características de la interacción de la radiación gamma y equis con la materia. En particular, las formas en que esta radiación electromagnética se atenúa al atravesar un material. Analizaremos la dependencia de estos fenómenos con la energía y el número atómico  $Z$  del material absorbente. Discutimos los distintos mecanismos de interacción que predominan en cada rango de energía.

### Objetivos

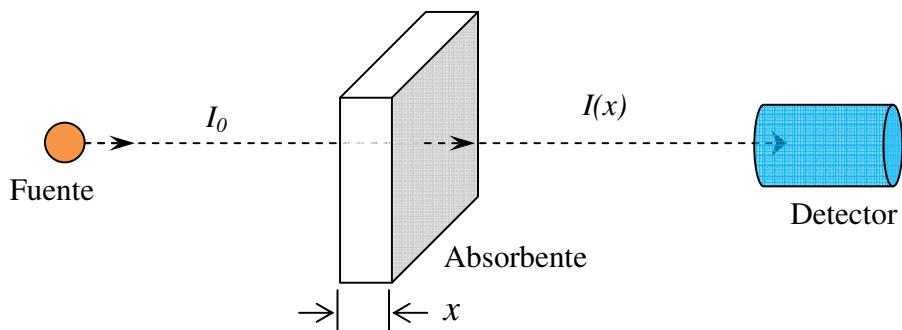
- ✓ Interacción de la radiación y la materia
- ✓ Ley de Bouguer-Lambert
- ✓ Coeficiente de absorción

## 62.1 Pasaje de la radiación electromagnética por la materia

Cuando un haz de radiación electromagnética, de intensidad  $I_0$ , incide sobre una muestra de material de espesor  $x$ , como se ilustra en la Figura 62.1, el haz se atenúa y la intensidad emergente,  $I(x)$ , viene descripta por la Ley de Bouguer-Lambert (quienes la descubrieron en forma independiente en 1729 y 1760 respectivamente) que establece:<sup>1</sup>

$$I(x) = I_0 \exp(-\mu x), \quad (62.1)$$

donde  $\mu$  es el coeficiente de absorción lineal y  $x$  es el espesor en unidades de longitud. A veces es útil expresar el espesor en unidades de masa por unidad de área.

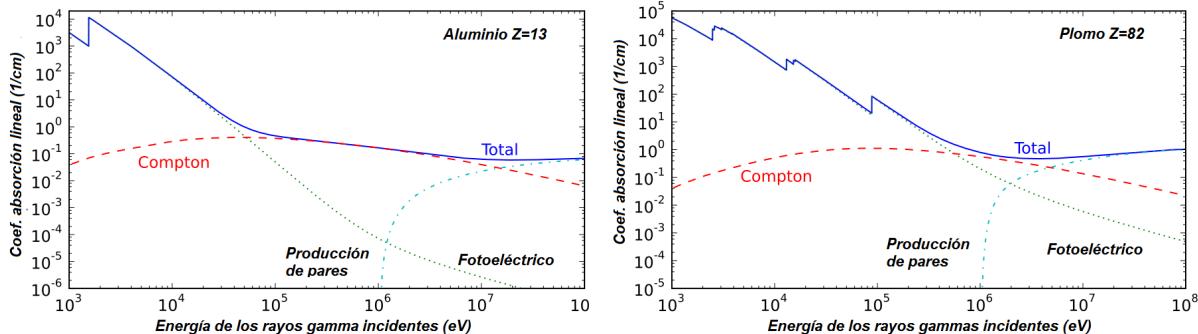


**Figura 62.1** Atenuación de la radiación electromagnética al atravesar un material de espesor  $x$ .

Si definimos  $t = \rho \cdot x$ , donde  $\rho$  es la densidad, la Ley de Lambert se puede expresar como:

$$I(x) = I_0 \exp(-\mu t / \rho), \quad (62.2)$$

$\mu/\rho$  se conoce como el coeficiente de absorción másico.



**Figura 62.2** Coeficiente de absorción lineal  $\mu$  de la radiación electromagnética para el aluminio (izquierda) y para el plomo (derecha). En cada uno de estos gráficos se indica con línea punteada la contribución de cada uno de los mecanismos de atenuación y en línea llena su valor total.<sup>2</sup>

El coeficiente de atenuación total es el resultado de los tres mecanismos de interacción de la radiación con la materia que discutimos en los Capítulos 61 y 66, y que se representan gráficamente en la Figura 62.2 para el caso del aluminio y del plomo:

- **Efecto fotoeléctrico:** Es el efecto dominante a bajas energías  $E_\gamma \leq 200\text{keV}$ . Tiene una fuerte dependencia con la energía de fotón y el Z del material:  $\mu_{fe} \propto Z^n/E_\gamma^3$ , con  $n$  variando entre 3 y 4.
- **Efecto Compton:** Es el efecto dominante a energías intermedias, o sea, entre 100 KeV y 10 MeV. Este efecto depende del número de electrones en el material absorbente, que a su vez depende de la densidad del absorbente y del número de electrones por unidad de masa. Dado que, para casi todos los elementos, el número de electrones por unidad de masa es aproximadamente el mismo, se concluye que la probabilidad de un efecto Compton es casi independiente del número atómico, Z, del absorbente. Este efecto disminuye a medida que aumenta la energía de fotones.
- **Creación de pares electrón- positrón:** Este efecto comienza a ser posible a  $E_\gamma \geq 1022\text{ keV}$  y prevalece a altas energías. Aumenta con la energía del fotón y con el número atómico Z del absorbente. Esta dependencia es aproximadamente proporcional al cuadrado de Z.

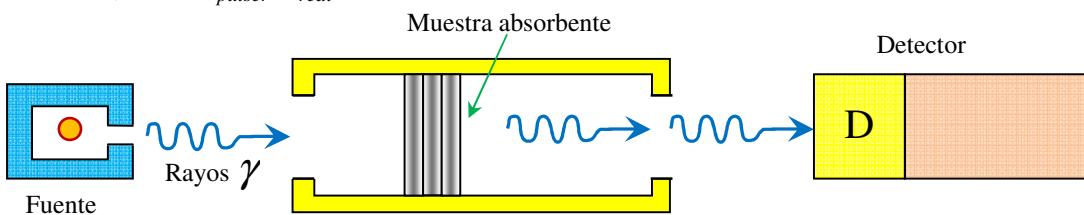
## 62.2 Coeficientes de absorción - Áreas de fotópicos

La Figura 62.3 muestra un diseño experimental que puede usarse para estudiar la atenuación de la radiación electromagnética, gamma o equis, cuando atraviesa una muestra de espesor  $x$ .<sup>3,4</sup>

Para este experimento es importante disponer de un método de normalización de una medición con respecto de otra. Los sistemas de adquisición de datos (la combinación de detector, amplificador, ADC, multicanal y demás elementos —ver Cap. 61—) tienen un tiempo de procesamiento de cada pulso finito;<sup>1</sup> por lo tanto, no todos los fotones registrados por el detector son procesados por el multicanal. La fracción del total que sí es procesada se denomina *FA* (*Fraction Alife*). También se define el tiempo muerto  $TM = (1 - FA) \times 100$ .<sup>1</sup>

Muchos multicanales modernos permiten determinar estos parámetros, ya sea directa o indirectamente. En algunos modelos de multicanales el equipo informa el tiempo real de la medición,  $T_{real}$ , y el tiempo vivo,  $T_{life}$ , o sea, la fracción del tiempo real en el que el detector estuvo disponible para procesar una señal. A partir de estos valores es posible estimar  $FA$  como:  $FA = T_{life} / T_{real}$ .

Otro método consiste en utilizar un generador de pulsos (impulsímetro) a una frecuencia conocida. Los pulsos del impulsímetro son injectados en el detector de modo que se genere un pulso en alguna zona del espectro libre de picos reales. Se determina el número de pulsos en el espectro asociados a este pico,  $N_{pulse}$ , y el número de pulsos generados por el impulsímetro,  $N_{real}$ . De esta manera,  $FA = N_{pulse} / N_{real}$ .



**Figura 62.3** Dispositivo experimental para determinar el coeficiente de atenuación de una muestra.

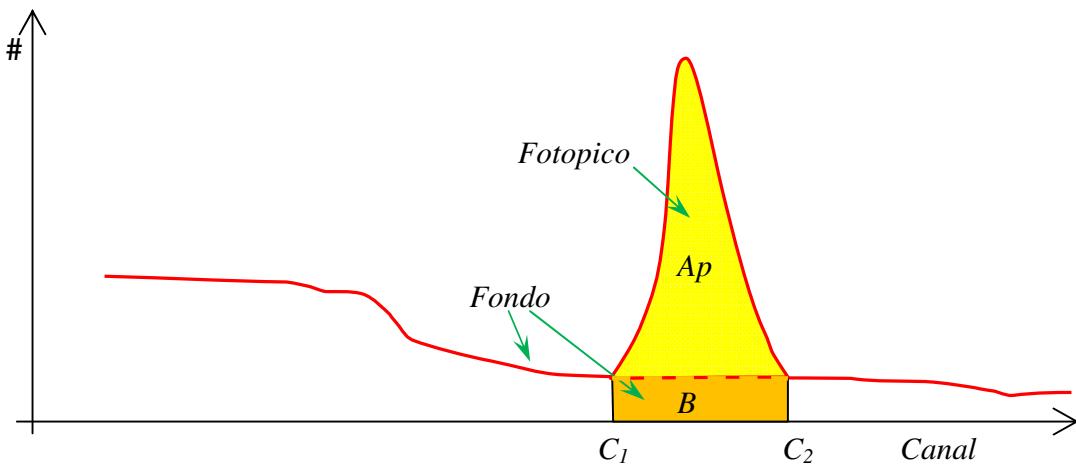
La idea general para determinar el coeficiente de absorción de una muestra consiste en construir un dispositivo similar al ilustrado en la Figura 62.3. La fuente se coloca a una distancia fija del detector y entre ellos se colocan láminas del material cuyo coeficiente de absorción se desea estudiar. Denotamos el espesor efectivo de la muestra con  $x$ . El portamuestra debe ser tal que todos los rayos que salen de la fuente y lleguen al detector pasen por el mismo espesor de la muestra absorbente.

Para cada rayo gamma de la fuente, de energía  $E_\gamma$ , se determina el área del fotópico,  $A_\gamma(x)$ . Además, para minimizar los errores, es conveniente que la duración de la medición para los distintos  $x$  no sea la misma, ya que al aumentar la absorción conviene extender el tiempo de medición y así compensar la menor tasa de rayos gamma que llegan al detector. El área efectiva corregida de cada medición, para un dado espesor  $x$ , se calcula como:<sup>1,3</sup>

$$A_c(x, E_\gamma) = \frac{A_\gamma(x, E_\gamma)}{T_{life}}. \quad (62.3)$$

Una vez realizada la medición para por lo menos cuatro o cinco espesores diferentes de un mismo material, se realiza un gráfico de  $\ln(A_c(x, E_\gamma) / A_c(0, E_\gamma))$  como función de  $x$ . Si en esta representación gráfica los puntos medidos se alinean en una recta, significa que la Ec. (62.1) describe adecuadamente la atenuación observada. La pendiente de esta recta es directamente el coeficiente de atenuación lineal  $\mu(Z, E_\gamma)$ .

**Área de los fotópicos:** Otro aspecto que se debe tener en cuenta es la determinación del área de los picos. Dado que éstos siempre están montados sobre algún fondo, como se indica en la Figura 62.4, es necesario poder sustraer el fondo.



**Figura 62.4** Área de fotopico y fondo. El fotopico está delimitado por los canales  $C_1$  y  $C_2$ . Las áreas que se miden son el área total  $A_T$  y el área de fondo entre  $C_1$  y  $C_2$ , que denotamos con  $B$ . El área del fotopico  $A_p=A_T-B$ .

El área de interés es el área del fotopico,  $A_p=A_T-B$ . Dado que el decaimiento radioactivo sigue la estadística de Poisson, las desviaciones estándares de  $A_T$  y de  $B$  vienen dadas por  $\sqrt{A_T}$  y por  $\sqrt{B}$  respectivamente. La incertezza en el área del fotopico será:<sup>1,3</sup>

$$\Delta A_p \approx \sqrt{A_T + B} . \quad (62.4)$$

### Proyecto 198. Variación del tiempo muerto del sistema de adquisición

**Equipamiento recomendado:** Un detector de radiación gamma asociado a un sistema de adquisición de datos. Una fuente radioactiva con actividad inferior a 1  $\mu\text{Ci}$ .

En esta actividad nos proponemos estudiar la dependencia de  $FA$  y de  $TM$  con la tasa de conteo del detector. Para ello, lo más simple es variar la distancia entre la fuente y el detector. De acuerdo a las características de su sistema de adquisición de datos, elija el método que mejor se adapte al equipo disponible para determinar el  $FA$  y el  $TM$  del sistema disponible.

#### Sugerencias de trabajo:

- ✓ Realice un gráfico de  $FA$  en función de la frecuencia de conteo o tasa de conteo (número de fotones que llegan al detector por segundo). Dado que al aumentar el espesor del absorbente, el número de fotones que llegan al detector disminuye, el valor de  $FA$  también variará en general al introducir o variar los absorbentes. Este efecto podría causar un error sistemático en la determinación de  $\mu$ . Lo mismo ocurre si se varía la distancia fuente-detector. Por lo tanto, es necesario tener en cuenta estas correcciones en sus mediciones del coeficiente de absorción.

### Proyecto 199. Determinación del coeficiente de absorción lineal

**Equipamiento recomendado:** Un detector de radiación gamma asociado a un sistema de adquisición de datos. Un conjunto de fuentes radioactivas de actividades inferiores a 1  $\mu\text{Ci}$  que tengan rayos gamma en el rango de 100 keV a 1,3 MeV, lo más espaciados posible.

Usando un arreglo experimental similar al ilustrado en la Figura 62.3, investigue la dependencia de la atenuación de la radiación electromagnética con el espesor de la muestra de un material. Construya un dispositivo que le permita variar con comodidad el espesor de los absorbentes y al mismo tiempo mantener constante la distancia fuente-detector. El objetivo es estudiar la variación de la atenuación (secciones eficaces) con el número atómico  $Z$  del material de la muestra y la energía  $E_\gamma$  de los fotones incidentes, es decir,  $\mu(Z, E_\gamma)$ .

Entre las fuentes que son útiles para realizar ese proyecto están las siguientes:  $^{241}\text{Am}$ ,  $^{57}\text{Co}$ ,  $^{22}\text{Na}$ ,  $^{60}\text{Co}$ ,  $^{137}\text{Cs}$ ,  $^{138}\text{Ba}$ , ya que cada una tiene pocos rayos gamma, fáciles de identificar, y cubren un rango de energías de unos 59 KeV a unos 1,3 MeV. En cuanto a las láminas absorbentes, es interesante estudiar: Al, Cu, Fe, Cd y Pb. Explore la posibilidad de conseguir otros absorbentes, ya sean éstos sustancias puras o compuestos. Las dimensiones deben ser tales que, al interponerlas entre la fuente y el detector, impidan que la radiación llegue directamente de la fuente al detector. Láminas de aproximadamente  $6 \times 6 \text{ cm}^2$  son adecuadas. Es conveniente que las láminas de los materiales de  $Z$  bajo sean más gruesas que las de materiales de  $Z$  más alto. Como ejemplo, láminas de aluminio de 2 mm de espesor y de plomo de 0,5 mm son adecuadas.

### Sugerencias de trabajo:

- ✓ Estudie el efecto de atenuación para al menos tres energías los más espaciadas posible. Una posibilidad interesante es utilizar  $^{60}\text{Co}$ ,  $^{137}\text{Cs}$ ,  $^{138}\text{Ba}$  y  $^{57}\text{Co}$ . Elija las fuentes radioactivas que va a usar, de modo que logre rayos gamma que le permitan aislar lo más posible los distintos mecanismos de interacción que prevé y que puedan ocurrir.
- ✓ Para estudiar la variación de la atenuación con  $Z$ , incluya en su estudio por los menos tres materiales de números atómicos lo más espaciados posible y utilice por lo menos cinco espesores distintos para cada muestra. La variación de espesor se logra superponiendo varias chapas de un dado material.
- ✓ Para cada espesor del absorbente, mida el espectro de radiación gamma que llega al detector. Es conveniente extender los tiempos de medición a medida que aumenta el espesor del absorbente, de modo que la estadística de los distintos espectros sea comparable.
- ✓ En su estudio experimental observe y responda las siguientes preguntas:
  - ✓ ¿Varía la energía y/o el área del fotópico al atravesar el material?
  - ✓ ¿Se modifica el ancho de los fotópicos, o sea, la resolución en energía al atravesar muestras cada vez más anchas?
- ✓ Para cada rayo gamma en consideración, determine el área de los fotópicos del espectro, sustrayendo el fondo. La mayoría de los programas de análisis de espectros realizan esta operación y estiman los errores de esta determinación. En la Refs. [3,4] se discuten técnicas para realizar esta operación. Con esta información, para cada rayo gamma y cada elemento absorbente:

- ✓ Realice un gráfico del  $\ln(A_c(x, E_\gamma)/A_c(0, E_\gamma))$  en función del espesor del absorbente  $x$ . Aquí  $A_c(0, E_\gamma)$  es el área del fotópico del rayo gamma elegido dividida por el tiempo vivo de conteo ( $T_{life}$ ) para el caso que entre la fuente y el detector no haya absorbente.  $A_c(x)$  es el área correspondiente dividida por  $T_{life}$  cuando se interpone un absorbente de espesor  $x$ .
- ✓ A partir de este gráfico, siempre y cuando la dependencia de  $\ln(A_c(x, E_\gamma)/A_c(0, E_\gamma))$  en función  $x$  sea lineal, ajuste una recta a sus datos experimentales y de la pendiente, obtenga  $\mu(Z, E_\gamma)$  como se deduce de la Ec. (62.1).
- ✓ Compare sus resultados con los valores tabulados para los coeficientes de absorción.<sup>5,6,7,8</sup>
- ✓ Para cada sustancia analizada, construya un gráfico de  $\mu(E_\gamma, Z)$  (coeficiente de absorción mísico) como función de  $E_\gamma$ .
- ✓ Para cada energía de fotón  $E_\gamma$ , construya un gráfico de  $\mu(E_\gamma, Z)$  como función de  $Z$ .

- ✓ **Análisis optativo.** Si para la dependencia de coeficiente de absorción mísico  $\mu$  como función de  $E_\gamma$  y de  $Z$  se propone la dependencia:

$$\mu(E_\gamma, Z, \dots) = c \frac{Z^n}{E_\gamma^k}, \quad (62.5)$$

donde  $c$ ,  $n$  y  $k$  son constantes por determinar en los rangos de energía  $E_\gamma < 200$  keV:

- ✓ Estudie la validez de esta parametrización y estime los valores de las constantes  $c$ ,  $n$  y  $k$  para los datos obtenidos.
- ✓ De ser posible, compare las dependencias observadas de  $\mu$  con predicciones teóricas.<sup>7</sup>

**Nota:** En [www.fisicarecreativa.com](http://www.fisicarecreativa.com), en “recursos de experimentos de física,” encontrará datos de espectros que son útiles para este experimento. Estos espectros fueron obtenidos con un dispositivo experimental similar al de la Figura 62.3 usando detectores de estado sólido.

## Referencias

<sup>1</sup> Glenn F. Knoll, *Radiation detection and measurements*, 2<sup>a</sup> ed. (John Wiley and Sons Inc., New York, 1989).

<sup>2</sup> Gamma rays, Wikipedia, the free encyclopedia, [http://en.wikipedia.org/wiki/Gamma\\_ray](http://en.wikipedia.org/wiki/Gamma_ray) y Mass attenuation coefficient, [http://en.wikipedia.org/wiki/Mass\\_attenuation\\_coefficient](http://en.wikipedia.org/wiki/Mass_attenuation_coefficient)

<sup>3</sup> B.R. Kerur *et al.*, “Identification of elements by X-rays interaction – A laboratory experiment”, *Am. J. Phys.* **57**, 1148 (1989).

<sup>4</sup> *Experiments in Nuclear Physics, Laboratory Manual AN34* 3<sup>a</sup> ed. (EG & G ORTEC, Tenn., USA, 1984). <http://www.ortec-online.com/Library/an34.aspx>

<sup>5</sup> C.M. Lederer *et al.*, *Table of Isotopes*, 7<sup>a</sup> ed. (John Wiley and Sons, New York, 1978). También *Table of Radioisotopes*, 8<sup>a</sup> ed. (ed. Richard B. Firestone), *Lawrence Berkeley Laboratory* y Virginia S. Shirley, *Lawrence Berkeley Laboratory* (John Wiley and Sons, Inc). En Internet la tabla de isótopos se puede consultar en: <http://ie.lbl.gov/toi.htm> del Lawrence Berkeley Laboratory, CA, USA, y en los sitios <http://nucleardata.nuclear.lu.se/nucleardata/toi/> y <http://nucleardata.nuclear.lu.se/nucleardata/toi/index.asp>

<sup>6</sup> K. Siegbahn, *Alpha, Beta, and Gamma-Ray Spectroscopy*, Vol. I y II (North Holland Publ. Co., Amsterdam, 1966).

<sup>7</sup> W. Heitler, *The quantum theory of radiation* (Dover Publ. Inc., New York, 1954).

<sup>8</sup> E. Segre, *Nuclei and particles* (The Benjamin Publ. Co., New York, 1977).

# Capítulo 63

## Vida media del ${}^{40}\text{K}$ . Nucleosíntesis

En este capítulo usaremos detectores de radiación gamma para determinar vidas medias de elementos radioactivos presentes en la naturaleza. Lógicamente, sus vidas medias son largas, del orden de la vida media del universo, con lo cual podremos estimar la época en que ocurrió la nucleosíntesis de los elementos que forman la Tierra. Discutiremos también algunos aspectos interesantes de la radiactividad natural.

### Objetivos

- ✓ Detectores de radiación gamma
- ✓ Nucleosíntesis de los elementos
- ✓ Medición de vidas medias largas

### 63.1 Nucleosíntesis

Los orígenes del universo y la vida son cuestiones que siempre han cautivado a la humanidad. En ese sentido, tal vez no sea casual que el primer libro de la Biblia sea justamente el Génesis. A lo largo de los tiempos se desarrollaron diversas teorías cosmológicas y cosmogenéticas que intentaron explicar el origen y estado actual del universo. Una de las teorías cosmológicas más antiguas es la del universo estático e infinito.<sup>1,2,3,4</sup> Ésta es una de las teorías más simples y es consistente con la teoría newtoniana de la gravedad.

Si el universo fuese estático (no se expande ni colapsa), también debería ser infinito. De este modo, la fuerza gravitatoria sobre cada región del universo sería en promedio nula y esto prevendría el colapso gravitatorio. También se pensaba que el universo era eterno, o sea que siempre habría existido como ahora, incluyendo los elementos que lo forman.

Actualmente sabemos que estas teorías tienen varias objeciones serias. Tal vez la objeción más elemental sea la existencia de la noche (**Paradoja de Olbers**).<sup>1,2</sup> Si el universo fuese eterno (siempre existió) e infinito, todos los visuales trazadas desde la Tierra eventualmente encontrarían una estrella, de modo que el cielo de noche debería ser tan brillante como la superficie del Sol. ¡Sin embargo la noche existe y es oscura!

Otro modo de entender esta paradoja consiste en calcular la intensidad de radiación que llega a la superficie de la Tierra proveniente de las estrellas (recordemos que la intensidad de radiación es la energía radiante que llega a la unidad de área por unidad de tiempo). Para ello supondremos que el universo es infinito y con una densidad  $n$  de estrellas por unidad de volumen. Cada una de ellas tiene una potencia de emisión promedio de  $\langle P \rangle$ . La intensidad  $dI$  que llega desde todas las estrellas que están en la capa esférica de radio  $r$  y espesor  $dr$ , teniendo a la Tierra en el centro de dicha esfera, será:

$$dI = 4\pi r^2 n \frac{\langle P \rangle}{r^2} dr. \quad (63.1)$$

Si integramos esta intensidad para todas las capas esféricas desde el mínimo radio  $r_{\min}$  (asociado a la distancia de las estrellas más cercanas) hasta el radio máximo  $r_{\max}$ , obtenemos:

$$I = 4 \pi n < P > (r_{\max} - r_{\min}). \quad (63.2)$$

Si suponemos que el universo es infinito y siempre existió, debemos tomar  $r_{\max}=\infty$ , con lo cual  $I \rightarrow \infty$ , que es justamente la Paradoja de Olbers. Nótese que esta divergencia subsiste para cualquier valor de  $n$  y de  $\langle P \rangle$ . El origen de esta divergencia está asociado a  $r_{\max} \rightarrow \infty$ . ¿Cómo podría solucionarse este problema? Vemos que si el universo fuese finito en tiempo, es decir, si existiera un “horizonte” en tiempo  $T_{\text{horiz}}$  tal que las estrellas que “vemos” son sólo aquellas que están dentro de la esfera de radio  $R_{\text{horiz}}=c \cdot T_{\text{horiz}}$  ( $c$  es la velocidad de la luz), entonces en la Ec. (63.2) debemos asociar  $r_{\max} = R_{\text{horiz}}$  y la divergencia quedaría salvada.

Es interesante notar que la posible absorción que podrían producir partículas entre la Tierra y las estrellas, que forman el medio interestelar, no resuelve el problema de la divergencia en la intensidad. En un universo eterno, este material interestelar estaría en equilibrio térmico con la radiación que recibe y emitiría tanto como absorbe. De este modo, por la Ley de Kirchhoff, este material interestelar sería tan brillante como las estrellas, lo cual hace que la absorción sea irrelevante y el problema de la divergencia aún subsistiría con ese material interestelar.

Otra objeción importante de un universo eterno es la existencia de **radioactividad natural**. Como veremos en este capítulo, su existencia puede ser fácilmente comprobada. Además, la radioactividad natural es la causa del calentamiento de la Tierra y la fuente de energía de la actividad volcánica y del movimiento de las placas tectónicas. Su existencia se manifiesta, también, en la presencia de helio en el interior de la Tierra. Este gas se escapa de la atmósfera ya que su velocidad, debida a la agitación térmica, es mayor que la velocidad de escape de la Tierra. El origen del helio en el interior de la Tierra es consecuencia del decaimiento alfa (núcleos de He) de las cadenas radiactivas naturales. Si el universo, y por lo tanto los elementos que lo forman, siempre hubiesen existido, los elementos radioactivos ya habrían decaído totalmente y no existiría la radioactividad natural, ni helio en la Tierra, ni volcanes, ni Tierra caliente, etcétera. La única posibilidad de observar fenómenos radioactivos sería a través de fuentes artificiales. Por lo tanto, la mera existencia de la radioactividad natural, que nos proponemos estudiar en este capítulo (radioactividad no generada por el hombre), es una evidencia de que los elementos no siempre existieron.

Según la visión actual de la ciencia, creemos que el universo tuvo su origen en un evento conocido como el Big Bang (BB) hace un tiempo:  $T_{BB} \approx 14$  mil millones de años. Esta teoría, se basa en muchas observaciones empíricas que se fueron acumulando a lo largo de casi todo el siglo XX. Estos estudios y observaciones siguen realizándose actualmente. Uno de los primeros indicios de este evento (el Big Bang) provino del descubrimiento realizado por E. Hubble, en la década de 1920, de que el universo se está expandiendo y de que las galaxias se alejan entre sí.<sup>5</sup> Según la Ley de Hubble, la velocidad  $v$  con que las galaxias se alejan de un observador es directamente proporcional a la distancia  $d$  a la que se encuentran:

$$v = H \cdot d, \quad (63.3)$$

donde  $H$  es la constante de Hubble, cuyo valor se relaciona directamente con la vida del universo. Su valor es:<sup>5</sup>

$$H = 71 \pm 4 \text{ (km/s)/Megapársec} \approx 1/T_{BB}, \text{ con } T_{BB} \approx 14 \times 10^9 \text{ años.}^{\ddagger} \quad (63.4)$$

---

<sup>†</sup> 1 Megapásco es igual a  $3,0857 \times 10^{22}$  metros

Otra consecuencia de la Teoría del Big Bang es que en los primeros tres minutos del universo<sup>3</sup> se formaron casi todos los elementos livianos, <sup>1</sup>H, <sup>2</sup>D, <sup>4</sup>He, <sup>7</sup>Li, <sup>9</sup>Be. De hecho, una prueba necesaria de toda teoría que intenta predecir la nucleosíntesis primordial es dar cuenta de la abundancia relativa de estos elementos. Otra prueba de la Teoría del Big Bang fue predecir la existencia de radiación cósmica de fondo, descubierta por A. Penzias y R. Wilson en 1965.<sup>6</sup>

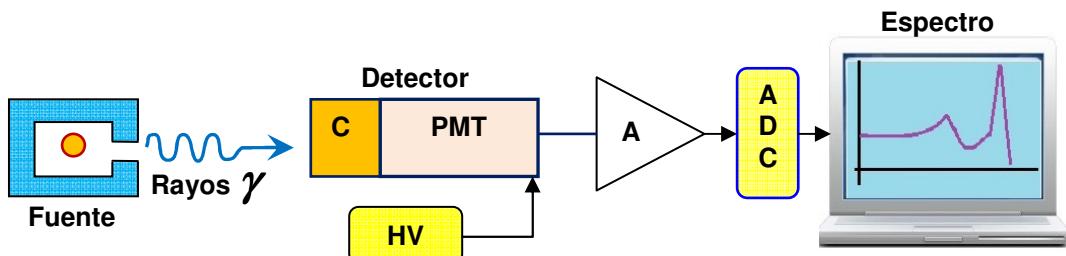
Según las teorías actuales, los elementos pesados se generaron en las estrellas, a través de los procesos de nucleosíntesis durante su vida y otros, especialmente los más pesados, en su último estertor.<sup>1,2,3</sup> Las “cenizas” de estas estrellas primarias, más tarde formaron, el Sol, la Tierra, los planetas y a nosotros mismos.

Desde la perspectiva nuclear, una consecuencia fácilmente observable es que la vida media de los elementos naturales, es decir, los que fueron producidos naturalmente y que se encuentran en la Tierra actualmente, deben de tener vidas medias del orden o mayores a  $10^9$  años. Si tuviesen vidas medias menores a este valor, y hubieran sido generados junto al resto de los elementos antes de formarse la Tierra, ya se habrían agotado. Si observamos una tabla de isótopos<sup>7</sup> y buscamos los radioisótopos que existen en la naturaleza, es fácil comprobar que esta aseveración sobre la vida media de los elementos naturales efectivamente se cumple.

Por otra parte, si colocamos un detector de radiación gamma en casi cualquier parte y colectamos la radiación de fondo, es decir, sin ninguna fuente radiactiva artificial cerca, en poco tiempo detectaremos indicios de una conspicua radiación de fondo,<sup>8</sup> proveniente de las cadenas de desintegración del <sup>235</sup>U ( $T_{1/2} \approx 7,04 \times 10^8$  años), <sup>238</sup>U ( $T_{1/2} \approx 4,47 \times 10^9$  años), <sup>232</sup>Th ( $T_{1/2} \approx 1,41 \times 10^{10}$  años), <sup>40</sup>K ( $T_{1/2} \approx 1,28 \times 10^9$  años), etcétera. En este capítulo nos concentraremos en la determinación de la vida media del <sup>40</sup>K. Este isótopo está presente en una proporción de  $1,2 \times 10^{-4}$  en el potasio natural (<sup>39</sup>K (93,26%) y <sup>41</sup>K (6,73%)). El <sup>40</sup>K emite un rayo gamma característico, muy fácil de detectar de  $E_\gamma = 1461$  KeV, ya que el potasio está en la Tierra, las paredes y muchos otros lugares comunes.

## 63.2 Espectroscopía de rayos gamma

En la Figura 63.1 se esquematiza un diseño experimental para la detección de radiación gamma.<sup>9</sup> Éste constituye un sistema básico de espectroscopía gamma. El objetivo de la técnica espectroscópica es la determinación de la energía e intensidad de los fotones incidentes. El detector puede ser un centellador del tipo yoduro de sodio (NaI) o bien uno de germanio hiperpuro Ge (HP).<sup>10,11,12</sup>



**Figura 63.1** Esquema del dispositivo experimental para la obtención de espectros gamma de una fuente.

Como se discutió en los capítulos 60 y 61, el multicanal realiza un análisis de la altura

del pulso, convirtiendo una señal analógica (tensión) en un número digital equivalente (número de canal). Finalmente un programa de computadora asociado al multicanal realiza un histograma de alturas de los pulsos, que representa la energía de los rayos gamma. Una descripción más detallada de los diversos componentes del dispositivo experimental puede hallarse en la bibliografía.<sup>9,10</sup> En primer término, con este tipo de detectores se realiza una calibración en energía, como se describió en los capítulos 60 y 61.

### 63.3 Eficiencia de un detector de rayos gamma

Una vez realizada la calibración en energía, es útil determinar la eficiencia absoluta de fotopico. En primer término, debemos definir la geometría donde se ubicarán las muestras. Es importante asegurar que estas posiciones sean lo más reproducibles posible. Una vez definida la geometría que se va a usar, podemos realizar la calibración en eficiencia del detector.<sup>10,11,12</sup> Para determinar la eficiencia absoluta de fotopico del detector, es necesario disponer de fuentes radioactivas calibradas en intensidad. Muchos fabricantes proveen este tipo de fuentes.

La **eficiencia absoluta de fotopico** es la fracción del número de cuentas registradas por el detector en el fotopico durante un determinado intervalo de tiempo, al número de rayos gamma, de esa energía, emitidos por la fuente. Se calcula como el área neta del pico en espectro dividida por el número de fotones emitidos por la fuente en el mismo intervalo de medición.

Si conocemos la actividad absoluta de la fuente cuando fue calibrada y su vida media, es posible calcular la actividad actual  $A_f(t)$ . Si el rayo gamma de interés es  $E_\gamma$  y la fracción de emisiones de este rayo por cada decaimiento de la fuente es  $p_\gamma$  ( $p_\gamma$  es la intensidad absoluta del rayo gamma. En las tablas de las Refs. [13,14] pueden consultarse estos valores), el número de fotones de este tipo emitidos por la fuente por unidad de tiempo será:

$$N_{emit}(E_\gamma) = p_\gamma A_f(t_{actual}) = p_\gamma A_f(t_{calibracion}) \times 2^{(t_{actual}-t_{calibracion})/T_{1/2}}. \quad (63.5)$$

Aquí  $t_{actual}$  es el tiempo en que se realiza la medición y  $t_{calibracion}$  el tiempo en que se calibraron las fuentes,  $T_{1/2}$  es la vida media de la fuente. Si el número de estos rayos gamma acumulados por el detector en el fotopico del espectro por unidad de tiempo es  $N_{espectr}(E_\gamma)$ , la eficiencia absoluta de fotopico a la energía  $E_\gamma$  será:

$$\mathcal{E}_{abs}(E_\gamma) = \frac{N_{espectr}(E_\gamma)}{N_{emit}(E_\gamma)}. \quad (63.6)$$

Claramente, la eficiencia absoluta depende de la distancia de la fuente al detector. De no ser posible realizar la determinación de la eficiencia absoluta en forma experimental, podemos consultar en tablas o en la documentación del detector los valores de las eficiencias de fotopico provistas por el fabricante del detector a las energías de interés. En particular, para detectores de NaI(Tl) existen muchas referencias donde se puede encontrar las eficiencias absolutas de fotopico para detectores de un determinado tamaño y a una determinada distancia de éste.

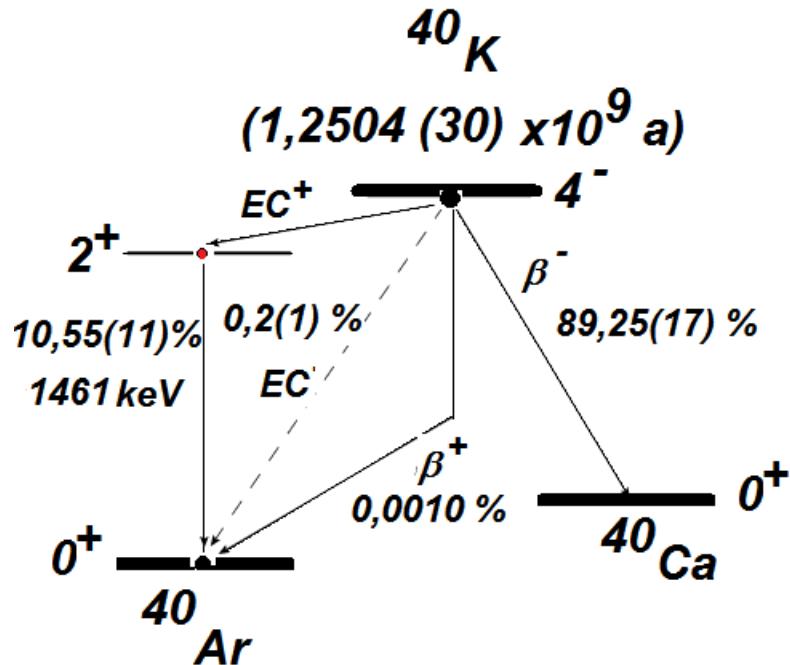
Utilizando el dispositivo experimental esquematizado en la Figura 63.1, podemos obtener los espectros de rayos gamma para un conjunto de fuentes conocidas que cubran un rango de energías de fotones que comprendan los rayos gamma de interés ( $E_\gamma = 1461$  KeV). Fuentes

tales como:  $^{22}\text{Na}$ ,  $^{60}\text{Co}$ ,  $^{133}\text{Ba}$ ,  $^{137}\text{Cs}$  y  $^{207}\text{Bi}$  pueden ser adecuadas. Determinando la ubicación de los picos y conociendo las energías de los fotones emitidos por ellas, realizamos una calibración en energía del sistema de adquisición utilizado. Esto consiste en realizar un gráfico de la posición de los centroides de los picos (expresado en canales) en función de las energías de los rayos gamma emitidos por cada fuente.

Desde luego, la calibración en eficiencia<sup>10</sup> del detector debe realizarse posicionando las fuentes patrones en los mismos lugares donde se colocarán las muestras. Es importante asegurar que tales posiciones sean lo más reproducibles posible. Realizamos una calibración en eficiencia del detector<sup>10</sup> para la posición geométrica elegida. Para ello se debe conocer la actividad absoluta de las fuentes usadas

### 63.4 Determinación de vidas medias largas

Uno de los elementos más conspicuos, en cuanto a su radioactividad natural, es el  $^{40}\text{K}$  (ver Figura 63.2), que emite un rayo gamma característico de  $E_\gamma = 1461 \text{ keV}$ . El objeto del presente experimento es determinar la vida media de este isótopo ( $\sim 10^9$  años). La abundancia relativa (a los otros isótopos del K) la designamos como  $p(^{40}\text{K}) = 0,012\%$ . El experimento se basa en determinar la actividad  $A(t)$  de una muestra de masa  $m$  de KCl. El número de decaimientos por unidad de tiempo,  $A(t)$ , de la muestra en cuestión es:<sup>1,2,3</sup>



**Figura 63.2** Esquema de decaimiento del  $^{40}\text{K}$ , Ref [12,13]. La intensidad absoluta del pico de 1461 keV es de 10,55 ( $\pm 0,11\%$ ). La vida media reportada para el  $^{40}\text{K}$  es de  $1,2504 (\pm 0,003) \times 10^9$  años. EC significa captura electrónica.<sup>1</sup>

$$\text{Actividad} = A(t) = -\frac{dN(t)}{dt} = \lambda N(t) = \frac{0,693}{T_{1/2}} N(t), \quad (63.7)$$

donde  $N(t)$  es el número total de núcleos de  $^{40}\text{K}$  que decaen.  $T_{1/2}$  es la vida media ( $\lambda = \ln(2)/T_{1/2}$ ) del  $^{40}\text{K}$ . El número de átomos de  $^{40}\text{K}$ ,  $N(t)$ , se puede determinar a partir de la masa de KCl:

$$N(t) = N(^{40}K) = \frac{m_{KCl}}{M_{KCl}} N_A p(^{40}K), \quad (63.8)$$

donde  $m_{KCl}$  es la masa de KCl y  $M_{KCl}$  (=74,551 g/mol) es su masa molecular. Llamamos  $p(^{40}K)$  a la proporción de  $^{40}K$  en el potasio natural y  $N_A$  es el Número de Avogadro. De este modo la Ec. (63.9) se puede escribir como:

$$\text{Actividad} = A(m_{KCl}) = \frac{0,693}{T_{1/2}} \frac{N_A p(^{40}K)}{M_{KCl}} \cdot m_{KCl}, \quad (63.9)$$

dado que la vida media de la sustancia en cuestión es muy larga, la actividad  $A$  es casi independiente del tiempo, pero sí depende de la masa de la muestra, o sea,  $m_{KCl}$ . Por lo tanto, si podemos medir la actividad  $A$  del  $^{40}K$  en función de la masa de la muestra de KCl,  $m_{KCl}$ , se puede determinar el valor de  $T_{1/2}$ . Más específicamente, si medimos  $A$  como función de  $m_{KCl}$ , graficando estas variables podemos poner a prueba las deducciones realizadas —Ec.(63.9)—. Si estas variables muestran una dependencia lineal, de la pendiente de esta recta podemos estimar  $T_{1/2}$ .

Este modo de proceder, además de permitirnos verificar si las hipótesis realizadas en la derivación de la Ec. (63.9) son correctas o no, nos permite detectar la posible contribución a la detección de rayos gamma de  $^{40}K$  provenientes del fondo, es decir, de las paredes del laboratorio, de la tierra, de nosotros mismos, etcétera. Si midiésemos una sola muestra, el resultado de la actividad sería la debida a la muestra más la del fondo, cuya masa ni ubicación podríamos precisar. Por el contrario, si medimos  $A$  como función de  $m_{KCl}$ , el valor de la ordenada al origen ( $A(0)$ , cuando  $m_{KCl}=0$ ) nos permite conocer la contribución del fondo, es decir, la actividad de  $^{40}K$  ( $E_\gamma=1461$  KeV) en ausencia de muestras de KCl es el fondo.

## Proyecto 200. Vida media del $^{40}K$

**Equipamiento recomendado:** Un detector de radiación gamma asociado a un sistema de adquisición de datos. Unos 250 g de KCl, separados en fracciones de peso conocido. Si no dispone de estos equipos puede utilizar los espectros disponibles en Internet (ver al final).

**Nota:** No aplique tensión al detector ni conecte nada al multicanal de la computadora hasta que un instructor revise su circuito. Tenga precaución con el manejo de las fuentes radioactivas y, después de su uso, colóquelas en los contenedores de plomo correspondientes. Lea las notas sobre seguridad en el Apéndice B.

El objetivo de esta actividad es medir la vida media del  $^{40}K$ , que emite un rayo gamma característico de  $E_\gamma=1461$  keV, de muy fácil detección e identificación con detectores de centelleo como los NaI(Tl) o los detectores de germanio. El experimento se basa en determinar la actividad  $A(m_{KCl})$ , es decir, el número de decaimientos por unidad de tiempo de diversas muestras de KCl de masas  $m_{KCl}$  conocidas.<sup>1,2,3</sup> Para ello es útil fraccionar la muestra en recipientes iguales de aproximadamente: 10, 20, 50, 75, 100, 150 y 200 g.

Si medimos el área de fotopíco ( $A_{fp}(\gamma)$ ) del rayo gamma de  $E_\gamma=1461$  keV con un detector de eficiencia absoluta,  $\epsilon_{abs}(E_\gamma)$ , durante un tiempo  $t_{run}$ , la actividad experimental,  $A_{exp}$ , será:

$$A_{\exp} = \frac{A_{fp}(\gamma)}{t_{run}} \cdot \frac{1}{\epsilon_{abs}(\gamma)}. \quad (63.10)$$

La consigna es medir  $A_{\exp}$  como función de  $m_{KCl}$ . Si las hipótesis propuesta es válida, se espera un dependencia de  $A_{\exp}$  como función de  $m_{KCl}$ :  $A_{\exp} = b \cdot m_{KCl} + A_{\exp}(0)$ .

Si  $A_{\exp}(0)$  es próxima a cero, es útil definir la actividad específica,  $A_e$ :

$$A_e = \frac{A_{\exp}(m_{KCl})}{m_{KCl}}. \quad (63.11)$$

Según la Ec. (63.9), se esperaría que  $A_e$  fuese independiente de  $m_{KCl}$ . Sin embargo, debido a la autoabsorción de la radiación gamma en la misma muestra, a medida que su masa aumente, mayor será esta autoabsorción. No obstante, si al graficar  $A_e$  como función de  $m_{KCl}$  la relación es aproximadamente lineal, extrapolando esta dependencia a  $m_{KCl}=0$  nos daría la actividad específica para masa cero,  $A_e(0)$ , o sea, cuando no hay autoabsorción. De este modo podemos sortear este efecto y estimar el valor de  $A_e(0)$  con autoabsorción nula. Utilizando este valor así extrapolado, en combinación con la Ec. (63.9), se puede obtener un mejor valor de la vida media del  $^{40}\text{K}$ , o sea:

$$T_{1/2} = p_\gamma \frac{\ln 2}{A_e(0)} q(^{40}\text{K}) \frac{N_A}{M_{KCl}}, \quad (63.13)$$

donde  $p_\gamma$  es la fracción de rayos gamma de 1461 keV emitidos por cada decaimiento del  $^{40}\text{K}$  ( $p_\gamma=0,1055\pm0,0011$ ) y  $q(^{40}\text{K}) = 0,000118$  es la fracción de  $^{40}\text{K}$  en el potasio natural. Consulte la bibliografía actualizada para verificar los valores de los parámetros indicados en la Figura 63.2.

### Sugerencias de trabajo:

- ✓ Realice una calibración en energía del detector gamma usado (energía de los fotones en función del número de canal).
- ✓ De ser posible, obtenga la calibración en eficiencia del detector  $\epsilon_{abs}(E_\gamma)$ . Es decir, eficiencia en función de la energía de los fotones.
- ✓ Una vez calibrado el espectrómetro gamma, obtenga espectros sin muestra ni fuente, de modo que se observe la radiación de fondo. Adquiera un espectro de fondo con suficiente estadística como para ver claramente el pico de  $E\gamma = 1461$  keV. ¿Qué otro pico de radiación observa en el espectro?
- ✓ Mida la actividad  $A_{\exp}$  como función de la masa de KCl. Se sugiere empezar a medir las muestras de mayor masa y dejar las de menor masa hacia el final o dejar la de menor masa y el fondo para corridas de días completos.
- ✓ El objetivo principal de este experimento es determinar la *actividad*  $A_{\exp}(m_{KCl})$  y la *actividad específica*  $A_e$  (actividad por unidad de masa) como función de  $m_{KCl}$ . Para ello, se sugiere que se construyan los siguientes gráficos:
  - $A_{\exp}(t)$  en función de la masa de la muestra  $m_{KCl}$ . Si esta relación es lineal, de la pendiente ( $b$ ) obtenga el valor de vida media del  $^{40}\text{K}$ .
  - $A_e$  en función de  $m_{KCl}$ . Si  $A_{\exp}(0) \approx 0$ , a partir de  $A_e(0)$  estime la vida media del  $^{40}\text{K}$ .
- ✓ En los dos casos, estime la vida media del  $^{40}\text{K}$  y su incertezza.

**Nota:** En página de Internet [www.fisicarecreativa.com](http://www.fisicarecreativa.com) (Recursos de experimentos) se pueden encontrar espectros de fondo tomados en la ciudad de Buenos Aires (Argentina) con un detector de alta resolución. De estos espectros puede tratar de identificar el pico del  $^{40}\text{K}$  y los picos de otros elementos. Asimismo se pueden encontrar espectros de rayos gamas para varias muestras de KCl, usando un detector de germanio de alta resolución.

## Referencias

- <sup>1</sup> E.M. Henley y A. García, *Subatomic Physics*, 3<sup>a</sup> ed. (Prentice Hall, New Jersey, 2007).
- <sup>2</sup> J. Audouze y S. Vauclair, *An introduction to nuclear astrophysics* (D. Reidel Pub. Co., Holland, 1980).
- <sup>3</sup> S. Weinberg, *The three first minutes* (Basics Books, New York, 1977).
- <sup>4</sup> J.J. Sanguineti, *El origen del Universo* (Universidad Católica Argentina, Buenos Aires, 1994).
- <sup>5</sup> Ley de Hubble en Wikipedia, [http://es.wikipedia.org/wiki/Ley\\_de\\_Hubble](http://es.wikipedia.org/wiki/Ley_de_Hubble)
- <sup>6</sup> Radiación de fondo de microondas en Wikipedia.  
[http://es.wikipedia.org/wiki/Radiaci%C3%B3n\\_de\\_fondo\\_de\\_microondas](http://es.wikipedia.org/wiki/Radiaci%C3%B3n_de_fondo_de_microondas)
- <sup>7</sup> Table of nuclides (complete), en Wikipedia [http://en.wikipedia.org/wiki/Table\\_of\\_nuclides\\_\(complete\)](http://en.wikipedia.org/wiki/Table_of_nuclides_(complete))
- <sup>8</sup> P.B. Siegel, “Gamma spectroscopy of environmental samples”, *Am. J. Phys.* **81**, 381 (2013).
- <sup>9</sup> K. Gopal *et al.*, “A laboratory experiment for determining the partial half-life of  $^{40}\text{K}$  for beta emission”, *Am. J. Phys.* **40**, 721 (1972).
- <sup>10</sup> G.F. Knoll, *Radiation detection and measurements*, 2<sup>a</sup> ed. (John Wiley and Sons Inc., New York, 1989).
- <sup>11</sup> *Experiments in Nuclear Physics, Laboratory Manual AN34* 3<sup>rd</sup> ed. (EG & G ORTEC, Tenn., USA, 1984).  
<http://www.ortec-online.com/Library/an34.aspx>
- <sup>12</sup> Canberra, *Nuclear Measurement Fundamental Principles*, <http://www.canberra.com/literature/fundamental-principles/pdf/Gamma-Xray-Detection.pdf>
- <sup>13</sup> R. Firestone, V.S. Shirley, C.M. Baglin, S.Y.F. Chu and J. Zipkin, Table of Isotopes, 8th Edition, John Wiley, N.Y.1996.
- <sup>14</sup> J.Tauren and R.B. Firestone, WWW Table of Nuclear Structure EVTEC,V. 1.0b, Dec. 2003,Berkeley National Laboratory, <http://ie.lbl.gov/TOI2003/index.asp>

# Capítulo 64

---

## Determinación de la banda de energía prohibida de semiconductores

En este capítulo estudiaremos algunas características de los materiales semiconductores. En particular, discutimos algunos experimentos que nos permitirán determinar la banda de energía prohibida de semiconductores usando diodos de Si y Ge.

### Objetivos

- ✓ Banda prohibida en semiconductores
- ✓ Banda prohibida en Si y Ge
- ✓ Diodos como termómetros

### 64.1 Banda de energía prohibida de semiconductores

Una característica notable de algunos materiales es que tienen una alta resistividad eléctrica y, en contraste con la que se observa en los metales, esta resistividad decrece con la temperatura. Aunque el comportamiento de estos materiales, llamados *semiconductores*, era conocido desde hacía mucho tiempo, no se lo comprendió totalmente hasta el desarrollo de la *teoría de bandas* de un sólido, alrededor de 1930. En el marco de esta teoría, un semiconductor es un sólido cuyos electrones se distribuyen en dos bandas de energía separadas por una brecha (banda prohibida o *band gap*) de energía prohibida.<sup>1,2</sup> La banda inferior corresponde a los estados de los electrones que participan de la unión de los átomos —generalmente covalente— y se le llama *banda de valencia*. En la banda superior se encuentran los electrones que participan de las corrientes eléctricas y es llamada *banda de conducción*. Si un semiconductor puro estuviese a temperatura absoluta nula ( $T = 0$ ) todos los orbitales de su banda de valencia estarían ocupados y todos los de la banda de conducción estarían vacíos. En una situación de este tipo no puede circular corriente eléctrica; por tanto, a  $T = 0$  el semiconductor sería un *aislante*.

A temperaturas distintas de 0 K, la conductividad de un semiconductor no es nula debido a la presencia de electrones en la banda de conducción y de agujeros en la banda de valencia. Esto puede lograrse mediante dos mecanismos. Uno de ellos es la excitación de electrones de la banda de valencia hacia la banda de conducción. Esta excitación existe siempre a  $T \neq 0$  por el movimiento térmico de los portadores de carga, o puede lograrse externamente, por ejemplo, mediante la irradiación con fotones que entreguen la energía suficiente para superar la banda de energía prohibida. En cualquiera de estos procesos se crean pares de portadores de carga: electrones (negativos,  $n$ ) y huecos (positivos,  $p$ ).

Otra manera de lograr conductividad no nula es por el agregado de impurezas en el material. Si por un proceso de dopaje se introduce en un material semiconductor algún tipo de átomo trivalente (usualmente indio o aluminio), los tres electrones de valencia se unen covalentemente con el material y dejan un agujero o hueco en el cuarto enlace. En esta situación hablamos de un superconductor *tipo p*. Si la impureza es tal que aporta cinco electrones (usualmente se usa arsénico), cuatro de los cuales se unen mientras que el electrón restante queda libre para moverse en la banda de conducción, lo que tenemos es un semiconductor *tipo n*.

Se tiene una *juntura* o *unión* cuando el dopaje de un semiconductor tiene una dependencia espacial. Una juntura *p-n* tiene una variación abrupta de dopaje en una dirección, con una parte dopada con material *p* y la otra con material *n*.<sup>1</sup>

## 64.2 Diodos semiconductores

Los diodos semiconductores son componentes electrónicos de dos terminales de mucha utilidad en múltiples aplicaciones.<sup>3</sup> Ellos permiten la circulación de la corriente en un solo sentido. De hecho, en los Caps. 24 y 50 tuvimos oportunidad de estudiar algunas de sus características que analizaremos más detalladamente en esta sección.

Como se discutió en el Cap. 50, la relación corriente-voltaje de diodo está dada por la Ecuación de Shockley.<sup>4</sup>

Un modo simple y económico de medir temperaturas consiste en usar un diodo.<sup>3</sup> La característica básica de un diodo es que permite el paso de corriente eléctrica en una sola dirección. La diferencia de potencial, *V*, entre los bornes del diodo está relacionada a la corriente, *I*, que lo atraviesa y a la temperatura (absoluta), *T*, que viene dada por la Ecuación de Shockley:<sup>5,6</sup>

$$I = I_0 \left[ \exp\left(\frac{eV}{\eta kT}\right) - 1 \right], \quad (64.1)$$

donde *e* es la carga del electrón (*e* = 1,6 x 10<sup>-19</sup> C), *V* es el voltaje en Volt,  $\eta$  es un “factor de no idealidad” cuyo valor varía dependiendo de la juntura, *k* es la constante de Boltzmann (*k* = 8,617 x 10<sup>-5</sup> eV·K<sup>-1</sup>), y *T* es la temperatura en Kelvin. El factor de no idealidad tiene en cuenta otros fenómenos físicos presentes, como efectos de superficie, recombinación, efecto túnel, etcétera, y su valor está entre 1 y 2. A temperatura ambiente,  $\eta kT \approx 0,025$  eV. Si  $V \geq 0,1V$ ,  $eV / \eta kT \geq 4$  y el 1 en el segundo miembro de la Ec. (64.1) en general puede despreciarse a temperaturas ambientes o inferiores a ella. El factor *I<sub>0</sub>* se denomina corriente inversa de saturación del sistema *p-n* y depende de la temperatura según:<sup>4,5,7</sup>

$$I_0 = BT^3 e^{-\frac{E_g(T)}{\eta k T}}, \quad (64.2)$$

donde *E<sub>g</sub>(T)* es el valor del *gap* de energía entre las bandas del semiconductor, que en general depende de la temperatura:  $E_g(T) \approx E_g(0) + \alpha T$ , y *B* es una constante que depende de las densidades de los portadores *n* y *p*, y de sus camino libre medio. En el caso en que  $\eta eV \gg kT$ , la Ec. (64.1) puede aproximarse por:

$$I = I_0 \cdot \exp\left(\frac{eV}{\eta kT}\right) = B e^{(\alpha/\eta k)T^3} \exp\left(\frac{eV - E_g(0)}{\eta k T}\right) \approx B_0 T^3 \exp\left(\frac{eV - E_g(0)}{\eta k T}\right). \quad (64.3)$$

El objetivo de este proyecto es determinar el valor del *gap* *E<sub>g</sub>(0)* de energía de algunos semiconductores por medio de experimentos de transporte eléctrico en una juntura

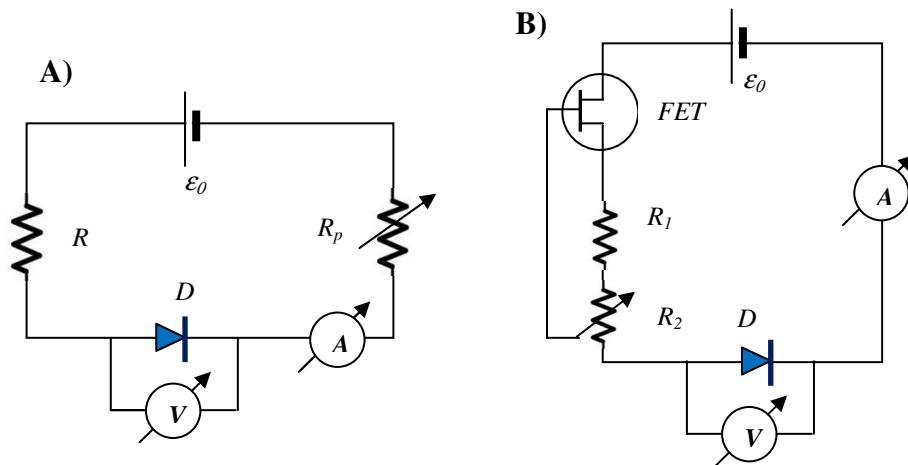
*p-n*, midiendo para esto las características *I-V* a distintas temperaturas. De la Ec. (64.3) puede verse que, si se miden curvas *I-V* a diferentes temperaturas, puede determinarse el valor de  $E_g(0)$ , que denominamos *band-gap*. Por otra parte, si la corriente por el diodo en polarización directa se mantiene constante a un cierto valor  $I_c$ , de la Ec. (64.3) tenemos:

$$I_c \approx B_0 T^3 \exp\left(\frac{eV - E_g(0)}{\eta k T}\right) \propto \exp(C_0) \quad \rightarrow \quad eV \approx C_0 \eta k T - E_g(0), \quad (64.4)$$

donde  $C_0$  es una constante.<sup>7</sup> Por lo tanto, si a un diodo le mantenemos la corriente constante, la caída de tensión en éste,  $V$ , resulta proporcional a la temperatura, que es la propiedad que utilizamos en el Cap. 50 para usar un diodo como termómetro. Sin embargo, si para un diodo construimos la curva de calibración  $eV$  en función de la temperatura absoluta  $T$ , de ser válida la Ec. (64.4), obtendríamos una recta cuya ordenada al origen daría  $E_g(0)$ .

Los diodos constituyen las junturas semiconductoras más comunes y se fabrican uniendo un semiconductor tipo *p* con uno tipo *n*. Los diodos de silicio (1N4001, 1N4148 o equivalente) y de germanio (1N34A, AA112, o equivalente) son adecuados para estos experimentos.<sup>4,8,9,10,11</sup>

En la Figura 64.1 se muestran esquemáticamente dos posibles circuitos para determinar la característica *I-V* de un diodo.



**Figura 64.1** Posibles circuitos que se pueden usar para obtener curvas *I-V* de un diodo y determinar su *band-gap*. En ambos casos se trata de generar un circuito de corriente constante y medir la caída de tensión en el diodo. En el circuito A) se eligen las resistencias  $R$  y  $R_p$  suficientemente altas, de modo que ellas limiten la corriente. En el circuito B) se hace uso de un FET (por ejemplo 2SK30A-GR o similar) y dos resistencias ( $R_1 \approx 150 \text{ k}\Omega$  y  $R_2 \approx 100 \text{ k}\Omega$ , y  $\epsilon_0 \approx 9\text{V}$ ) para controlar la corriente.

En los siguientes proyectos se discuten posibles propuestas para determinar la energía prohibida  $E_g(0)$  o *band-gap* de diodos.

### Proyecto 201. Determinación del *band-gap* del Si y del Ge por medio de mediciones eléctricas

**Equipamiento recomendado:** Diodos de Si (1N4001 ó 1N4148 o equivalente) y de Ge (1N34A ó AA112 o equivalente). Fuente de corriente de aproximadamente 1 mA y un voltímetro o un sistema de adquisición de datos por computadora. Un termo con nitrógeno líquido. Un termómetro que mida desde temperatura de nitrógeno líquido hasta ambiente, PT100 o termocupla.

El objetivo de esta actividad es estudiar cómo se modifica la curva  $I$ - $V$  de un diodo con su temperatura.<sup>4,5,6</sup> Para este experimento es conveniente fijar el diodo y el termómetro a una barra de cobre o aluminio, de modo que la temperatura que mide el termómetro sea representativa de la del diodo, pero al mismo tiempo no haya contacto eléctrico entre el termómetro y el circuito del diodo.

Cuando la barra, con el diodo y el termómetro, se acerca al termo con nitrógeno líquido, la temperatura del sistema varía. Puede usarse un RDT calibrado (PT100 u otro) o una termocupla, que mida en el rango entre 77 K (nitrógeno líquido) y temperatura ambiente (ver Cap. 50).

### Sugerencias de trabajo:

- ✓ Obtenga características  $I$ - $V$  de los diodos a distintas temperaturas. Con ese fin, para dada temperatura, varíe la corriente aplicada  $I$  (entre 0 y 100 mA) y mida el voltaje  $V$ , tratando de cubrir el mayor rango de valores posibles de estas magnitudes.
- ✓ Represente gráficamente  $I$  en función de  $V$  para cada temperatura. Represente también  $\ln(I)$  en función de  $V$ . Note que, si valen las condiciones que llevan a la Ec. (64.1), esta última representación se linealiza según:

$$\ln(I) = \ln(I_0) + \frac{eV}{\eta kT}. \quad (64.5)$$

Para cada temperatura  $T$ , del gráfico de  $\ln(I)$  en función de  $eV/kT$ , obtenga el mejor valor de  $I_0$  y construya una tabla de  $I_0$  en función de  $T$ .

- ✓ A partir de estas mismas representaciones — $\ln(I)$  en función de  $e/kT$ —, determine el mejor valor del parámetro  $\eta$  para cada temperatura y cada tipo de diodo. De ser posible, obtenga el mejor valor de  $\eta$  para el Si y para el Ge.
- ✓ De la Ec. (64.3) puede verse que:

$$\ln(I_0) = \ln(B) + 3\ln(T) + \frac{\alpha}{\eta k} - \frac{E_g(0)}{\eta kT} \approx K_0 - \frac{E_g(0)}{\eta kT}. \quad (64.6)$$

Por lo tanto, si graficamos  $z = \eta kT \cdot \ln(I_0)$  como función de  $T$ , es de esperar que:

$$z \equiv \eta kT \cdot \ln(I_0) \approx \eta kT \cdot K_0 - E_g(0) = B_0 \cdot T - E_g(0) \text{ o bien } z \approx B_0 \cdot T - E_g(0). \quad (64.7)$$

Por lo tanto, si son válidas las hipótesis planteadas, la representación de  $z$  como función de  $T$  debería ser una recta cuya ordenada en el origen es, precisamente,  $E_g(0)$ . Los valores tabulados de este parámetro para el Si y para el Ge son:  $E_g$  (Si) = 1,17 eV y  $E_g$  (Ge) = 0,75 eV, respectivamente.

### Proyecto 202. Determinación del band-gap del Si y del Ge II

**Equipamiento recomendado:** Diodos de Si (1N4001 ó 1N4148 o equivalente) y de Ge (1N34A ó AA112 o equivalente). Fuente de corriente de aproximadamente 1 mA y un microamperímetro. Un termo con nitrógeno líquido. Un termómetro que mida desde temperatura de nitrógeno líquido hasta ambiente, PT100 o termocupla.

En este experimento, usando una corriente constante por el diodo, deseamos medir la caída de tensión en éste al variar la temperatura.<sup>7</sup> En otras palabras, deseamos realizar una calibración de los diodos como termómetro, de modo similar a como se usó en el Cap. 50. Para ello es conveniente usar un circuito como el ilustrado en la Figura 64.1 B). La corriente se ajusta de modo que esté en el orden de unos 0,1 mA. De nuevo, en este caso es conveniente que el termómetro y el diodo estén unidos a una barra metálica de cobre o aluminio y que no haya contacto eléctrico entre el termómetro y el circuito del diodo. La caída de tensión en el diodo la designamos  $V_D$ .

Cuando la barra, con el diodo y el termómetro, se acerca al termo con nitrógeno líquido, la temperatura del sistema varía.

### Sugerencias de trabajo:

- ✓ Manteniendo la corriente constante por el diodo, realice una calibración de caída de tensión en el diodo,  $V_D$ , en función de la temperatura,  $T$ , de éste. Un rango de temperaturas apropiado para este experimento puede ser entre unos -50 °C y temperatura ambiente o también -50 °C a 70 °C.
- ✓ Represente gráficamente  $V_D$  en función de  $T$ , para  $T$  medido en grados centígrados y Kelvin. Discuta la linealidad o no de estos gráficos.
- ✓ De ser efectivamente lineal la representación de  $eV_D$  en función de  $T$ , obtenga el mejor valor de  $E_g(0)$  para cada tipo de diodo (Si y Ge) y estime sus correspondientes errores.
- ✓ Compare los valores obtenidos con los tabulados para estos elementos.

## Referencias

- 
- <sup>1</sup> N.W. Ashcroft y N.D. Mermin, *Solid State Physics* (Saunders College Publishing, 1976).
  - <sup>2</sup> C. Kittel, *Introduction to Solid State Physics*, 8<sup>a</sup>. ed. (John Wiley and Sons, Inc., 2005).
  - <sup>3</sup> Diode From Wikipedia, the free encyclopedia <http://en.wikipedia.org/wiki/Diode>
  - <sup>4</sup> F.W. Inman y D. Woodruff, “The thermometric properties of a diode”, *Phys. Teach.* **33**, 120 (1995).
  - <sup>5</sup> P.J. Collings, “Simple measurement of the band gap in silicon and germanium”, *Am. J. Phys.* **48**, 197–199 (1980).
  - <sup>6</sup> B.D. Sukheeja, “Measurement of the band gap in silicon and germanium”, *Am. J. Phys.* **51**, 72–72 (1983).
  - <sup>7</sup> J.W. Precker y M.A. da Silva, “Experimental estimation of the band gap in silicon and germanium from the temperature–voltage curve of diode thermometers”, *Am. J. Phys.* **70**, 1150 (2002).
  - <sup>8</sup> A. Sconza, G. Torzo y G. Viola, “Experiment on a pn junction”, *Am. J. Phys.* **62**, 66 (1994).
  - <sup>9</sup> L. Kirchup y F. Placido, “Undergraduate experiment: Determination of the band gap in germanium and silicon”, *Am. J. Phys.* **54**, 918 (1986).
  - <sup>10</sup> C. Fisher, “Elementary technique to measure the energy band gap and diffusion potential of pn junctions”, *Am. J. Phys.* **50**, 1103 (1982).
  - <sup>11</sup> P. Collings, “Simple measurement of the band gap in silicon and germanium”, *Am. J. Phys.* **48**, 197 (1980).

# Capítulo 65

## Capacidad calorífica de un sólido a bajas temperaturas- Modelos de Einstein y de Debye

En este capítulo estudiaremos la capacidad calorífica de un sólido a bajas temperaturas. Discutiremos la naturaleza cuántica de las vibraciones en un sólido y el concepto de fonones en un cristal. Para explicar el comportamiento de la capacidad calorífica de los sólidos a bajas temperaturas, haremos una recapitulación de los modelos de Einstein y de Debye. Se discute un experimento para la determinación de las capacidades caloríficas de los sólidos basados en un enfoque calorimétrico. Se propone un método simple de determinación de la temperatura de Debye. Asimismo, se discute el efecto Leidenfrost.

### Objetivos

- ✓ Naturaleza cuántica de las vibraciones en un sólido
- ✓ Capacidad calorífica de un sólido a bajas temperaturas
- ✓ Modelos de Einstein y de Debye
- ✓ Efecto Leidenfrost

### 65.1 Capacidad calorífica de un sólido a bajas temperaturas

En 1819 Dulong y Petit descubrieron que la capacidad calorífica molar  $C_v$  de muchos metales simples tenía el valor de aproximadamente 6 cal/K.mol. La explicación teórica de este resultado constituyó uno de los primeros logros de la Teoría Cinética Clásica y en esencia es consecuencia del Principio de Equipartición de la energía.<sup>1,2</sup> Consideremos un *mol* de un sólido, con  $N_A$  (Número de Avogadro) átomos. Si suponemos que cada átomo puede vibrar como un oscilador armónico alrededor de su posición de equilibrio en las tres direcciones posibles ( $x$ ,  $y$ ,  $z$ ), según el Principio de Equipartición clásico,<sup>1,2,3,4</sup> cada átomo tendrá una energía promedio  $\langle \varepsilon \rangle$  dada por:

$$\langle \varepsilon \rangle = 3 \cdot 2 \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot k_B \cdot T \right), \quad (65.1)$$

donde el primer factor (3) proviene de los tres grados de libertad; el segundo (2), de las dos contribuciones a la energía del oscilador armónico (potencial y cinética), y el término  $\frac{1}{2}k_B T$  es la energía asociada a cada grado de libertad y forma de energía.  $k_B$  es la constante de Boltzmann. De este modo, la energía de vibración del cristal será:

$$U(\text{mol}) = N_A \cdot 3 \cdot k_B \cdot T = 3 \cdot R \cdot T. \quad (65.2)$$

Aquí,  $R=k_B N_A$  es la constante universal de los gases ( $R=1,987$  cal/K.mol). Por lo tanto:

$$C_V = \frac{dU(\text{mol})}{dT} = 3 \cdot R \approx 6 \text{ cal/K.mol}, \quad (65.3)$$

es la Ley de Dulong y Petit. Sin embargo, estudios posteriores demostraron que esta ley constituye sólo un límite superior de  $C_V$ . En algunos metales, en particular en aquellos de peso atómico bajo ( $A < 40$ ), aparecen desviaciones de esta ley a temperaturas del orden o menores que la temperatura ambiente. Más específicamente, se encontró que a temperaturas bajas  $C_V$  es menor que  $3R$  y, a muy bajas temperaturas<sup>3,4,5</sup>:

$$C_V \propto T^3. \quad (65.4)$$

Estas limitaciones de la teoría clásica inspiraron a Einstein en 1907 a desarrollar una de las primeras aplicaciones de la teoría cuántica de Plank para explicar este efecto. La idea básica de esta teoría es que, debido a la naturaleza cuántica de los osciladores atómicos, no todos ellos están activos, en particular a bajas temperaturas. Por lo tanto, debido a estos efectos cuánticos, es de esperar que a bajas temperaturas la capacidad calorífica disminuya con respecto a su valor clásico —Ec. (65.1)—. Más tarde, en 1912, esta teoría de la capacidad calorífica de los sólidos fue mejorada por Debye.<sup>3,4,5</sup>

En el **modelo de Debye** se supone que el sistema de  $N_A$  átomos tiene  $3N_A$  modos normales de vibración. En este modelo los átomos no vibran individualmente como en el modelo de Einstein, sino en forma colectiva. Cada modo de vibración del sólido está caracterizado por su frecuencia propia  $\nu$  y su energía (del modo) está cuantizada. Como todo oscilador cuántico o modo de oscilación, tendrá una energía dada por:

$$E = (n_\nu + \frac{1}{2}) \cdot h \cdot \nu, \quad (65.5)$$

donde  $n_\nu$  es un número entero, que constituye el número de **fonones** asociado a cada modo de vibración. Por otro lado, el modelo supone que el número de modos de vibración en cada intervalo de frecuencia  $\nu$  viene dado por una función de distribución de frecuencias  $g(\nu)$ , proporcional al espacio de fase disponible, esto es:<sup>4,5,6</sup>

$$g(\nu) = a \cdot \nu^2. \quad (65.6)$$

Como el número total de modos de vibración es  $3N_A$ , tenemos que la distribución descripta por la Ec.(65.6) se extenderá hasta una frecuencia máxima  $\nu_D$  tal que:

$$\int_{\nu=0}^{\nu_D} g(\nu) \cdot d\nu = 3N_A. \quad (65.7)$$

Por lo tanto:

$$\frac{a}{3} \cdot \nu_D^3 = 3N_A. \quad (65.8)$$

De este modo, encontramos una distribución de frecuencias normales dada por:

$$g(\nu) = \begin{cases} \frac{9N_A}{\nu_D^3} \cdot \nu^2 & \text{si } \nu \leq \nu_D \\ 0 & \text{si } \nu > \nu_D \end{cases}. \quad (65.9)$$

La energía total del sistema,  $U$ , será:

$$U(\text{mol}) = \int_{\nu=0}^{\nu_D} g(\nu) \cdot \bar{E}_\nu \cdot d\nu, \quad (65.10)$$

donde  $\bar{E}_\nu$ , es la energía media de cada modo de vibración dada por:<sup>4,5,6</sup>

$$\bar{E}_\nu = \frac{3 \cdot h\nu}{2} + 3 \cdot \left[ \frac{h\nu}{\text{Exp}(h\nu/k_B T) - 1} \right]. \quad (65.11)$$

Definimos la temperatura de Debye como:

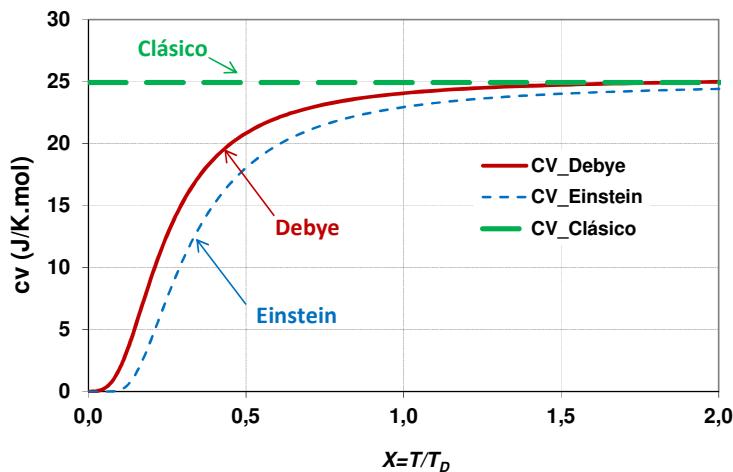
$$T_D = \frac{h\nu_D}{k_B}. \quad (65.12)$$

De este modo, vemos que la **temperatura de Debye** está asociada con la máxima frecuencia de vibración del cristal  $\nu_D$ . Es de esperar que  $\nu_D$  esté relacionada a la frecuencia de oscilación de un átomo de la red, cuya frecuencia de vibración está asociada con las fuerzas que lo ligan a sus vecinos (constante de la fuerza) y su masa. Las fuerzas que ligan a los átomos entre sí están relacionadas con las propiedades elásticas del sólido, en particular con su módulo de rigidez. Por lo tanto, uno esperaría que para átomos de masas

comparables  $T_D$  será mayor para los materiales más rígidos. Así, por ejemplo, es de esperar que  $T_D$  sea mayor para el silicio ( $M=28$ ) que para el aluminio ( $M=27$ ), que es más blando que el silicio. De hecho, se observa que  $T_D(\text{Si})=645\text{K}$  y  $T_D(\text{Al})=428\text{K}$ . También se observa que para el plomo (átomos pesados y material muy blando) se tiene uno de los valores más bajos de  $T_D$ , ( $T_D(\text{Pb})=105\text{K}$ ). Asimismo, sólidos rígidos y de número atómico bajo tendrán temperaturas de Debye más bien altas. A propósito, estas temperaturas indican que el valor de  $v_D$  es del orden de  $10^{12}\text{Hz}$ . Como la velocidad de propagación de las ondas acústicas,  $C$ , en los sólidos está comprendida generalmente entre 4000 y 7000 m/s, la longitud de onda  $\lambda_D$  asociada a la frecuencia  $v_D$  será del orden de  $\lambda_D = C/v_D \approx 1\text{ nm}$ , distancia que es comparable con el espaciamiento interatómico. Por consiguiente, la frecuencia de Debye puede también interpretarse como que la mínima longitud de onda  $\lambda_D$  de un modo de vibración de una red cristalina debe ser mayor que la distancia interatómica. Combinando las Ecs. (65.10) y (65.11) podemos obtener una expresión para la capacidad calorífica del sólido:<sup>4,5,6</sup>

$$C_V(T/T_D) = 3R \cdot \left( \frac{T}{T_D} \right)^3 \cdot \int_0^{T_D/T} \frac{y^4 \cdot e^y}{(e^y - 1)^2} \cdot dy. \quad (65.13)$$

Esta expresión tiene las propiedades límites observadas experimentalmente, esto es,  $C_V \rightarrow 3R$  a temperaturas altas y es proporcional a  $T^3$  a bajas temperaturas. En la Figura 65.1 puede apreciarse la diferencia entre los modelos clásicos de Einstein y de Debye.



**Figura 65.1** Predicciones de la capacidad calorífica de un sólido por los distintos modelos teóricos.

La Ec. (65.13) es un ejemplo de una *ley de estados correspondientes*, es decir, si graficamos la capacidad calorífica de cualquier sólido simple en función de  $T/T_D$ , obtenemos la misma curva para todos los sólidos; propiedad que efectivamente se verifica experimentalmente.<sup>4,5,6</sup> Además,  $T_D$  es el único parámetro del modelo. Si medimos  $C_V$  en función de  $T$ , el único parámetro que podemos obtener de estos datos es, precisamente,  $T_D$ . En particular, el calor necesario para llevar una muestra de masa  $m$  desde la temperatura  $T_i$  hasta la temperatura  $T_f$  vendrá dada por:

$$Q(T_i, T_f; m, T_D) = \frac{m}{M} \cdot (U(T_i, T_D) - U(T_f, T_D)), \quad (65.14)$$

donde  $M$  es la masa de un mol del sólido en cuestión y con

$$U(T, T_D) = 3 \cdot R \cdot T \cdot \left( \frac{T}{T_D} \right)^3 \cdot \int_0^{T_D/T} \frac{y^3}{e^y - 1} \cdot dy. \quad (65.15)$$

También es útil definir la capacidad calorífica media  $\bar{C}_V(T_i, T_f)$  en el intervalo de  $T_i$  a  $T_f$  como:

$$\bar{C}_V(T_i, T_f; T_D) = \frac{Q(T_i, T_f; m, T_D)}{(m/M) \cdot (T_f - T_i)} = \frac{1}{(T_f - T_i)} \cdot (U(T_i, T_D) - U(T_f, T_D)). \quad (65.16)$$

El objetivo de los proyectos siguientes es determinar el valor de  $T_D$  por distintas técnicas experimentales y observar la manifestación de la naturaleza cuántica de las vibraciones de un cristal a través de una disminución del calor específico al bajar la temperatura, respecto de su valor clásico dado por la Ec.(65.1).

### Proyecto 203. Determinación de la temperatura de Debye I

**Equipamiento recomendado:** Muestras metálicas de Cu, Al, Si, Pb, etcétera. Termostato con un termómetro con sensibilidad de 0,1 °C o mejor. Un litro de nitrógeno líquido.

Para este proyecto se requieren muestras de algunos metales puros ( $\approx 99\%$  de pureza) de aproximadamente 100 a 300 g y un recipiente de poliuretano expandido (recipientes de cremas heladas) de aproximadamente  $\frac{1}{2}$  l con nitrógeno líquido ( $T_{NL}=77\text{K}$ ). También se requiere un calorímetro como el utilizado en el Cap. 53, con una masa de agua ( $m_a$ ) de aproximadamente 250 g. La cantidad de agua y la forma del calorímetro deben ser tales que la muestra debe quedar completamente sumergida en el agua. Designamos la masa de la muestra con  $m_m$ . Suponemos que el agua está originalmente a una temperatura  $T_a$ , que debería ser de unos 10 a 30 °C más alta que la temperatura ambiente.<sup>7,8</sup> El cuerpo (muestra) está originalmente dentro del nitrógeno líquido a la temperatura  $T_{NL}$ , atado a un hilo fino de algodón, nylon o acero. El termómetro está inmerso en el agua y conectado a un sistema de toma de datos, de modo que se puedan adquirir las temperaturas a unos 10 Hz aproximadamente. En el instante definido como  $t=0$ , el cuerpo se extrae del nitrógeno líquido usando el hilo y se lo sumerge en el agua. Se deja equilibrar la temperatura hasta que se alcanza la temperatura final  $T_f$ . El balance energético implica:

$$\frac{m_m}{M} \bar{C}_V \cdot (T_f - T_{NL}) = (m_a + M_E) \cdot c_a \cdot (T_a - T_f), \quad (65.17)$$

donde  $M_E$  es el equivalente en agua del calorímetro (ver Cap. 53),  $c_a$  es la capacidad calorífica del agua y  $\bar{C}_V$  es la capacidad calorífica promedio de la muestra. Esta expresión nos permite determinar experimentalmente  $\bar{C}_V$  y compararla con la Ec. (65.16), de donde puede determinarse  $T_D$ .

Para realizar esta comparación es necesario usar algún método de integración numérica.<sup>9</sup> Esto puede hacerse usando planillas de cálculo, programas de matemática (Mathematica, Maple, MatLab, etc.) o bien escribir un programa dedicado. De cualquier modo, puede ser útil disponer de un gráfico de  $\bar{C}_V(T_{NL}, T_f)$  en función de  $T_D$ . De este modo, una vez determinado  $\bar{C}_V$  experimentalmente se puede obtener  $T_D$ .

#### Sugerencias de trabajo:

- ✓ Para cada una de las muestras disponibles determine el valor de  $T_D$  y estime su incertidumbre.
- ✓ Compare sus resultados con los valores de tablas para las mismas sustancias.

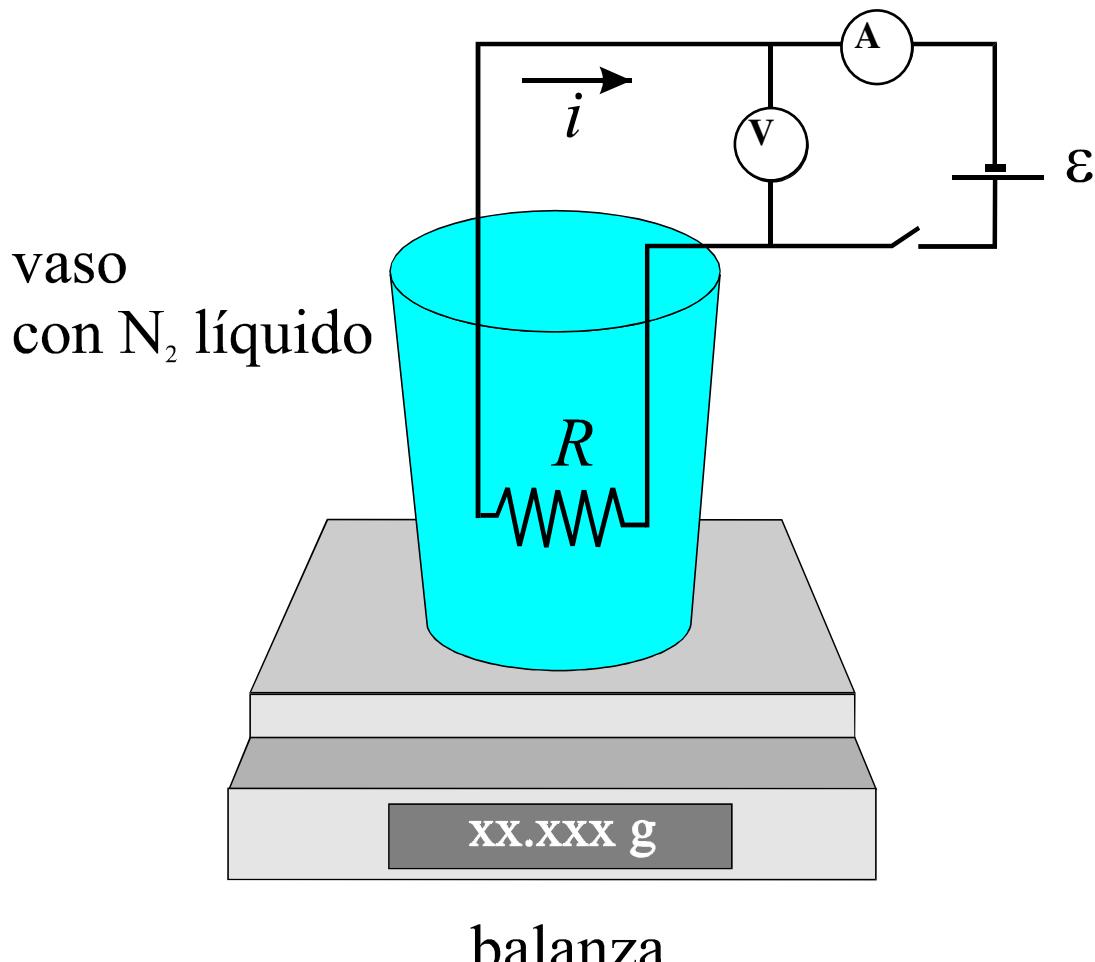
- ✓ Discuta el grado de acuerdo encontrado.

Para este experimento, el valor de  $M_E$  puede determinarse en un modo similar al discutido en el Cap.53.

### Proyecto 204. Determinación del calor de evaporación del nitrógeno líquido

**Equipamiento recomendado:** Un litro de nitrógeno líquido (LN2). Una resistencia de alambre de aproximadamente  $25 \Omega$  y 10 W. Una fuente de tensión para alimentar la resistencia, un voltímetro y un amperímetro. Una balanza con sensibilidad de 0,1 g o mejor.

El método experimental propuesto aquí es similar al utilizado en el Proyecto 179 del Cap. 53. Consiste en colocar aproximadamente unos 200 g de LN2 en un recipiente de poliuretano expandido (una taza de café o un recipiente de  $\frac{1}{4}$  kg de cremas heladas) que se encuentra sobre una balanza con sensibilidad de 0,1g o mejor. La balanza puede ser una balanza electrónica o bien un sensor de fuerza del que cuelga el recipiente con LN2. La resistencia se introduce enteramente dentro del LN2 pero sin tocar las paredes del recipiente. Esta cuelga de un soporte independiente al recipiente. En la Figura 65.2 se muestra un esquema de la disposición de este experimento.



**Figura 65.2** Diagrama esquemático del aparato propuesto para medir el calor latente del LN2.

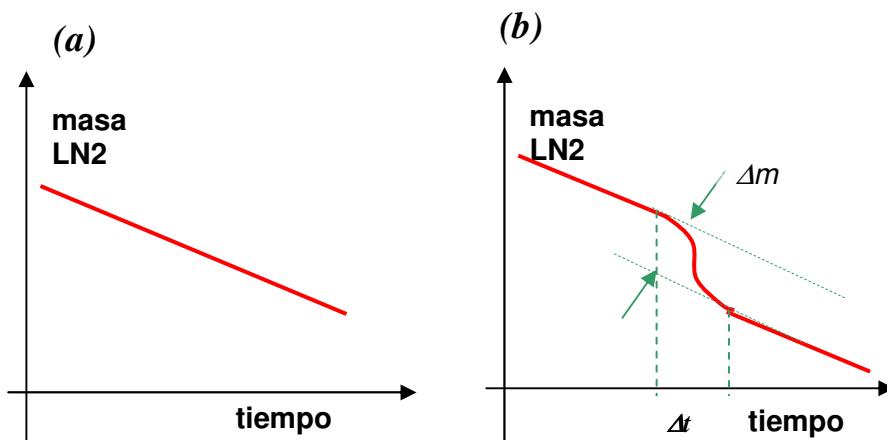
La primera observación consiste en medir la variación de la masa del recipiente de LN2 con la resistencia en su interior, pero sin pasar corriente por ella. Esta primera medición se lleva a cabo para caracterizar la variación de masa debido a la evaporación de LN2 en el sistema sin perturbación. Por lo regular esta variación de la masa en el tiempo es lineal, aunque esto no es una condición que siempre se tiene que cumplir. Seguidamente, se llena nuevamente el recipiente con LN2 y se repite el experimento. Después de unos 10 minutos de registro de la masa, se aplica un pulso de corriente durante un intervalo de tiempo  $\Delta t$  pequeño comparado con el tiempo de observación. La idea es que, tanto antes de aplicar el pulso como después de aplicarlo, la variación de la masa de LN2 en el tiempo esté bien definida. Se debe disponer de instrumentos de medición de la corriente de pulso  $I$ , la caída de tensión  $V$  en la resistencia y la duración ( $\Delta t$ ) del pulso, de modo que se pueda caracterizar la energía  $\Delta U$  entregada por la resistencia al LN2:

$$\Delta U = I \cdot V \cdot \Delta t . \quad (65.18)$$

Esta energía está relacionada con la cantidad de LN2 evaporada en ese intervalo,  $\Delta m$ , y el valor del calor latente de vaporización del LN2,  $L_v$ , de modo que:

$$L_v = \frac{I \cdot V \cdot \Delta t}{\Delta m} . \quad (65.19)$$

La determinación de  $\Delta m$  se basa en el método gráfico (o su correlato analítico) ilustrado en la Figura 65.3.



**Figura 65.3** Diagrama esquemático de la variación de la masa de LN2 con la resistencia sin corriente (a) y cuando por la resistencia se hace pasar un pulso de corriente (b).

#### Sugerencias de trabajo:

- ✓ Determine la variación de la masa de LN2 sin corriente, tomando datos de masa cada 5 s o más rápido si dispone de un sistema de adquisición automático. Grafique la masa de LN2 en función del tiempo.
- ✓ Usando una potencia disipada en la resistencia de aproximadamente 30 W por unos pocos minutos, determine la variación de la masa de LN2 en función del tiempo. Grafique sus resultados y determine  $\Delta m$ .

- ✓ Usando la Ec. (65.19), determine  $L_V$  y estime su incertidumbre. Compare sus resultados con los valores de tabla.

## Proyecto 205. Determinación de la temperatura de Debye II

**Equipamiento recomendado:** Muestras metálicas de Cu, Al, Si, Pb, etc. Una balanza con sensibilidad de 0,1 g o mejor. Un litro de nitrógeno líquido.

La técnica propuesta en esta parte se basa en la misma idea usada en el proyecto anterior para determinar  $L_V$ . En este caso también puede utilizarse una balanza electrónica o un sensor de fuerza calibrado. Originalmente se pesa el recipiente de LN2 junto a la muestra que está fuera del LN2, de modo que la muestra esté originalmente a temperatura ambiente,  $T_a$ , y se mide la variación de masa en el tiempo. Cuando la tendencia de esta variación está bien caracterizada, con cuidado, usando una pinza de Bruselas, se introduce la muestra dentro del LN2 y se continúa la medición de la masa en función del tiempo. El registro de la masa como función del tiempo será similar al ilustrado en la Figura 65.2 b.<sup>10,11</sup> Al realizar esta operación se debe evitar que el LN2 borbotee. Una buena idea es disponer de una tapa en el recipiente de poliuretano. Otra idea es envolver las muestras en una folia delgada de polietileno (ver el siguiente proyecto). La variación de la masa en función del tiempo tendrá una dependencia similar a la ilustrada en la Figura 65.2 b.<sup>10</sup> Esta vez la variación de masa  $\Delta m$  estará relacionada con el calor entregado por la muestra  $m_m$  al pasar de la temperatura ambiente  $T_a$  a la temperatura de LN2,  $T_{NL}$ . Esto es:

$$L_V \cdot \Delta m = \frac{m_m}{M} \cdot \int_{T_{NL}}^{T_a} C_V(T, T_D) \cdot dT . \quad (65.20)$$

Los valores de  $T_a$ ,  $m_m$  y  $\Delta m$  se obtienen del experimento. Luego, usando el formalismo descripto antes —Ecs. (65.15) y (65.20)— es posible obtener  $T_D$ . En la Ref. [11] se describe una variación del método propuesto aquí para obtener una estimación de la capacidad calorífica en intervalos de temperaturas más estrechos que los utilizados en este proyecto.

### Sugerencias de trabajo:

- ✓ Determine la variación de la masa de LN2 con la muestra a temperatura ambiente, tomando datos de masa cada 5 s o más rápido si dispone de un sistema de adquisición automático. Grafique la masa de LN2 en función del tiempo, de modo similar a como se ilustra en la Figura 65.2 a.
- ✓ Llene nuevamente el recipiente con LN2 y repita el estudio anterior. Después de unos 5 min o cuando la variación de masa en el tiempo esté bien definida, introduzca la muestra en el interior de LN2. Determine la variación de la masa de LN2 en función del tiempo. Grafique sus resultados y determine  $\Delta m$ .
- ✓ Usando las Ecs. (65.15) y (65.20), determine  $T_D$  y estime su incertidumbre para la muestra en cuestión.
- ✓ Repita este procedimiento para cada una de las muestras que dispone.
- ✓ Compare los valores de  $T_D$  obtenidos experimentalmente con los tabulados para estas mismas sustancias.<sup>6,11</sup> Discuta el grado de acuerdo obtenido.

**Nota:** En página de Internet [www.fisicarecreativa.com](http://www.fisicarecreativa.com) (Recursos de experimentos) se pueden encontrar archivos de Excel donde se programaron las funciones de las Ecs.(65.13), (65.15) y (65.16).

## 65.2 Efecto Leidenfrost

Alrededor de 1756 Leidenfrost publicó la observación de un efecto que lleva su nombre.<sup>12,13</sup> Leidenfrost notó que cuando una gota de agua caía sobre la superficie de un hierro incandescente, tardaba más en evaporarse que cuando la misma gota caía sobre la misma superficie, pero cuando ésta estaba más fría. Este efecto está relacionado con el hecho de que en el primer caso se forma una película de vapor que rodea la gota de agua e impide una buena transferencia de calor entre la superficie caliente y la gota. En el siglo IXX, Pierre Hippolyte Boutigny (1798-1884) estudió este efecto y propuso que las gotas que quedaban suspendidas sobre la superficie de una placa caliente constituyan un nuevo estado de la materia, que denominó *estado esferoidal*.

Este efecto se debe a que en general los gases y vapores son peores conductores del calor que los líquidos de la misma sustancia. Por lo tanto, la capa de vapor que rodea la gota u objeto caliente actúa como aislante térmico.

En este efecto se basan algunos magos y profesores de física para caminar descalzos sobre una cama de brasas. En Youtube pueden verse varias demostraciones de estos efectos.<sup>14</sup> El efecto Leidenfrost también se observa cuando cae una gota de LN<sub>2</sub> en la mesa o también cuando se arroja una gota de agua en una sartén caliente y otra gota cae en la misma sartén pero que está a la máxima temperatura posible en una cocina.

### Proyecto 206. Observación del efecto Leidenfrost

**Equipamiento recomendado:** Muestras metálicas de Cu, acero, Al o Pb, etc. Un termómetro de baja temperatura (termocupla, RTD, diodo, etc.) conectado a un sistema de adquisición de datos. ½ l de nitrógeno líquido.

En este proyecto nos proponemos estudiar semicuantitativamente este fenómeno. Para ello es útil disponer de un trozo de cobre de forma aproximadamente esférica (la forma no es crucial) de unos 20 a 50 g. Se realiza una perforación en la muestra de modo que se pueda colocar un termómetro, cuyo rango de medición incluya la temperatura de ebullición del nitrógeno líquido (77K). También puede ser una termocupla, un diodo o un RTD (ver Cap. 50). El termómetro debe estar conectado a un sistema de adquisición de datos con una frecuencia de medición del orden de 10 Hz. Para lograr un buen contacto térmico entre el termómetro y el cuerpo se puede usar grasa siliconada, como la que se usa en aplicaciones electrónicas.

El experimento consiste en registrar la historia térmica del cuerpo cuando éste se introduce sin ninguna cobertura, repentinamente, en nitrógeno líquido y la misma observación cuando el cuerpo está recubierto de aislante térmico delgado, por ejemplo cinta de teflón, grasa, envoltura de polietileno, etcétera. El flujo de calor  $H$  (calor que fluye por unidad de tiempo) se puede expresar como:

$$H = \frac{dQ}{dt} = m \cdot c_V \cdot \frac{dT}{dt} = -k \cdot A \cdot \frac{dT}{dx}, \quad (65.21)$$

donde  $m$  es la masa del cuerpo,  $c_V$  el calor específico y  $T$  la temperatura. Aquí  $k$  es la constante de conductividad térmica de la interfase medio-cuerpo,  $A$  es su área y  $dT/dx$  es el gradiente térmico en esta interfase. Si derivamos los datos de temperatura del cuerpo en función del tiempo se puede estimar  $H$ . Recuerde que  $C_V$ , en general, varía con la temperatura.

### Sugerencias de trabajo:

- ✓ Mida el historial térmico del cuerpo cuando se introduce “desnudo” en nitrógeno líquido.
- ✓ La misma observación cuando el cuerpo se introduce con protección térmica (aislante).
- ✓ Representar gráficamente en la misma figura la evolución de la temperatura en función del tiempo.
- ✓ Representar la derivada  $dT/dt$  en función del tiempo  $t$  y de la temperatura  $T$  del cuerpo en el mismo gráfico.
- ✓ Elaborar una explicación semicuantitativa de los resultados.<sup>12,13</sup>

## Referencias

- 
- <sup>1</sup> F. Sears, M. Zemansky, H. Young y R. Freedman, *Física universitaria*, vol. II (Addison Wesley Longman, México, 1999).
  - <sup>2</sup> R. Feynman *et al.*, *Feynman Lectures on Physics*, vol. 2 (Addison Wesley, New York, 1964).
  - <sup>3</sup> C. Kittel, *Física Térmica* (Reverté S.A., Barcelona, 1973). (Trad. de *Thermal Physics*, John Wiley and Sons, NY, 1969).
  - <sup>4</sup> D.L. Goodstein, *States of matter* (Prentice Hall Inc., N.J., 1975).
  - <sup>5</sup> T. Hill, *Introduction to statistical thermodynamics* (Addison Wesley Pub. Co., Ma., 1970).
  - <sup>6</sup> C. Kittel, *Introduction to Solid State Physics*, 8<sup>a</sup> ed. (John Wiley and Sons Inc., NY, 2004).
  - <sup>7</sup> C.W. Tompson y H.W. White, “Latent heat and low-temperature heat capacity for the general physics laboratory”, *Am. J. Phys.* **51**(4), 362–364(1983).
  - <sup>8</sup> E. Langendijk, “A simple determination of Einstein temperature”, *Am. J. Phys.* **68**, 961 (2000).
  - <sup>9</sup> En [www.fisicarecreativa.com](http://www.fisicarecreativa.com) (Recursos de experimentos) se puede encontrar un programa en Excel que permite calcular la capacidad calorífica dada por las Ecs. (65.13), (65.14) y (65.16).
  - <sup>10</sup> C. Deacon, J. de Bruyn y J. Whitehead, “A simple method of determining Debye temperatures”, *Am. J. Phys.* **60**, 422 (1992).
  - <sup>11</sup> W. Mahmood, M.S. Anwar y W. Zia, “Experimental determination of heat capacities and their correlation with theoretical predictions”, *Am. J. Phys.* **79**, 1099 (2011).
  - <sup>12</sup> F.L. Curzon, “The Leidenfrost phenomenon”, *Am. J. Phys.* **46**, 825–828 (1978).
  - <sup>13</sup> G. Guido Lavalle *et al.*, “A boiling heat transfer paradox”, *Am. J. Phys.* **60**, 593 (1992).
  - <sup>14</sup> MythBusters en Youtube, Leidenfrost effect molten led.  
<http://www.youtube.com/watch?v=UZio0f7fP04>

# Capítulo 66

---

## Estimación de la constante solar, la luminosidad del Sol y la atenuación de la luz en la atmósfera

En este capítulo nos proponemos estudiar la potencia radiada por el Sol. Éste es un parámetro de gran relevancia para comprender el funcionamiento del Sol y las estrellas. Asimismo, conocer la cantidad de energía solar que recibe la Tierra —es decir, la constante solar— es de fundamental importancia para aprovechar esta importante fuente de energía que posibilita la vida en nuestro planeta. Además, su variación a lo largo de un día nos permite determinar la potencia con que el Sol irradia, o sea, su luminosidad. Midiendo la variación de la irradiación solar con el ángulo que el Sol forma con la vertical del lugar, podemos estudiar la atenuación de la luz en la atmósfera terrestre. Estos efectos de atenuación de la luz en la atmósfera son de fundamental importancia tanto en astronomía como en la variación de temperatura con la hora del día y la latitud del lugar.

### Objetivos

- ✓ Determinación de la constante solar
- ✓ Atenuación de la radiación en la atmósfera
- ✓ Luminosidad del Sol
- ✓ Distancia de máxima visibilidad en un día claro

### 66.1 La luminosidad del Sol y la constante solar

Muchas veces se menciona la problemática energética como “la última frontera” del siglo XXI. Por una parte, sin energía, la producción de bienes y servicios no es posible. Por otra parte, a diferencia de otros recursos como el agua, el papel, etcétera, la energía misma no puede reciclarse.

Por un lado, es preciso responder a la legítima aspiración de muchas personas de alcanzar niveles de mayor calidad de vida. En 2012 casi un cuarto de la población mundial aún no tenía acceso a la electricidad. Por otro, hay evidencias cada vez más claras de que el calentamiento global que está experimentando la Tierra tiene causas antropogénicas, en gran medida causadas por el uso de combustibles fósiles. Por lo tanto, es necesario que disminuyamos nuestras emisiones de gases de efecto invernadero. El uso eficiente de la energía y el aprovechamiento de la energía solar son algunas de respuestas más promisorias para resolver esta encrucijada energética en la que nos encontramos. Así, es necesario comprender las características de la radiación solar.

Hay fundadas presunciones de que pequeños cambios en la actividad del Sol podrían producir grandes modificaciones en las condiciones de vida en la Tierra. Es importante dilucidar la posible contribución de variaciones en la luminosidad del Sol, si las hay, en el cambio climático que estamos observando en la Tierra.<sup>1</sup>

La física de funcionamiento del Sol es crucial para poder comprender su evolución y la de las estrellas. La naturaleza del Sol y su brillo fue motivo de especulación desde la antigüedad. Anaxágoras (500-428 a.C.), maestro de Pericles, fue encarcelado por sugerir que el Sol era una piedra incandescente. Durante la antigüedad

y el medioevo, el Sol fue el paradigma del fuego perfecto, hasta que Galileo descubrió las manchas solares. Entre las muchas herejías de las que fue acusado y llevaron a Giordano Bruno a la hoguera, se cuenta su hipótesis de que las estrellas eran soles. Durante el siglo XIX se esbozaron varias teorías de funcionamiento del Sol, ninguna de ellas satisfactoria.<sup>2,3</sup> La potencia del Sol y su edad son dos propiedades del Sol que los científicos creen conocer muy bien, pero que han resultado muy difíciles de conciliar.

En 1920, Arthur Eddington sugirió la hipótesis de que la fusión nuclear es el proceso por el cual el Sol y las estrellas generan su energía. Sin embargo, los esfuerzos para confirmar esta hipótesis no estuvieron libres de dificultades. Las reacciones nucleares que ocurren en el interior del Sol generan simultáneamente energía y un número bien definido de neutrinos, los cuales viajan inalterados hasta la Tierra. Por lo tanto, la cantidad de energía que nos llega debería estar relacionada con la cantidad de estas partículas que recibimos.

Por más de treinta años los científicos estuvieron tratando de develar el misterio de por qué la cantidad de neutrinos solares que se detectaban en la Tierra era mucho menor que los predichos por el modelo del Sol, basado en la hipótesis de Eddington.<sup>3,4</sup> Un buen modelo debe hacer predicciones que concuerden con las observaciones. ¿No sería esta inconsistencia del modelo de fusión nuclear un indicativo de que nuestra hipótesis de funcionamiento del Sol estaba equivocada, como ya había ocurrido en el pasado con otros modelos propuestos?<sup>3,4</sup> Llevó algo más de treinta años resolver este enigma, y a los pioneros en la resolución de este problema les fue otorgado el premio Nobel de Física en 2002.

En general, los métodos para determinar la **luminosidad del Sol** consisten en medir la **constante solar**,  $I_{Sol}$ , que se define como la cantidad de energía recibida por unidad de área y por unidad de tiempo cuando los rayos del Sol inciden perpendicularmente al área de detección y descontando los efectos de atenuación causados por la atmósfera terrestre. Su valor es del orden de  $1,36 \text{ kW/m}^2$ . Como la distancia Sol-Tierra ( $d_{ST}$ ) es conocida, multiplicando el área de una esfera de radio igual a  $d_{ST}$  por la constante solar se obtiene la luminosidad del Sol,  $L_{Sol}$ :

$$L_{Sol} = 4\pi d_{ST}^2 I_{Sol}. \quad (66.1)$$

En esta expresión se supone que los efectos de atenuación de la atmósfera terrestre en la determinación de  $I_{Sol}$  han sido tenidos en cuenta y corregidos adecuadamente.

Hay varias técnicas para determinar  $I_{Sol}$ , algunas muy sofisticadas y otras simples y de muy bajos costos. En este capítulo presentamos algunos experimentos sencillos para medir la irradiancia solar en la superficie de la Tierra y la extinción de la luz en la atmósfera de la Tierra. Con la combinación de ambos resultados se puede obtener la **constante solar** y la **luminosidad del Sol**.

## 66.2 Extinción de la luz en la atmósfera

Para conocer el valor de la constante solar,  $I_{Sol}$ , de acuerdo con la definición indicada más arriba, parecería necesario medirla desde un satélite ubicado fuera de la atmósfera terrestre. Sin embargo, esto no es imprescindible. En este capítulo analizaremos un modelo simple de **atenuación de la radiación** que nos permite

relacionar el valor de la irradiancia solar en la superficie de la Tierra con el valor de  $I_{Sol}$ . Para ello, es necesario comprender cómo la luz solar es atenuada a medida que viaja a través de la atmósfera de la Tierra.

Al pasar por la atmósfera, la luz se atenúa por la dispersión (*scattering*) y absorción en las moléculas que constituyen la atmósfera y también por las partículas (sólidas o líquidas) contenidas en ella, que genéricamente se designan con el nombre de aerosoles. Así, en un cielo despejado, cuanto mayor es la masa de atmósfera que la luz atraviesa, mayor será la atenuación. En consecuencia, el Sol y los cuerpos celestes se ven más brillantes en el cenit que en el horizonte.

Casi toda la **atenuación** de la luz solar se produce en la capa más baja y más densa de la atmósfera (la troposfera, que contiene el 75% de su masa), que tiene unos 11 km de espesor. El radio de curvatura de la troposfera es el radio de la Tierra, es decir, 6371 km, o sea, unas 600 veces mayor que su espesor. Por lo tanto, para simplificar el modelo por estudiar, vamos a discutir un modelo de atenuación de la luz en la atmósfera, suponiendo una atmósfera y Tierra planas. Una vez desarrollado este modelo, es sencillo generalizarlo para el caso de una Tierra esférica.<sup>5</sup> La aproximación de la atmósfera plana es válida siempre y cuando el Sol no esté cerca del horizonte, ya que entonces los efectos de curvatura son importantes. El modelo de atmósfera plana es aplicable para el caso en que el ángulo que forman los rayos del Sol con la vertical del lugar, el **ángulo cenital**, es menor a unos 75 grados.

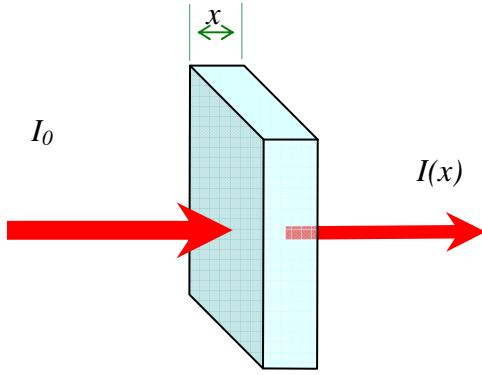
Consideremos un haz de luz o cualquier otra radicación electromagnética de intensidad  $I$  que atraviesa una muestra que tiene  $N$  centros dispersores (átomos o moléculas) por unidad de volumen. Cada uno de estos centros tiene una probabilidad  $\sigma$  (sección eficaz) de interactuar con el haz de luz.<sup>6</sup> Como vimos en el Cap. 62, al atravesar un espesor infinitesimal  $dx$  de ese material, la atenuación de la radiación será proporcional a la cantidad de interacciones que tuvieron lugar a lo largo de  $dx$ , por lo que la reducción de intensidad  $dI$  en esta región será proporcional al producto de la intensidad incidente  $I(x)$  por  $N\sigma dx$ . En otras palabras:

$$dI = -I(x) \cdot N\sigma dx = -\alpha \cdot I(x) dx . \quad (66.2)$$

Aquí  $I(x)$  es la intensidad en la coordenada  $x$  de la muestra y  $dI$  es su disminución después de atravesar un espesor  $dx$ . El parámetro  $\alpha = N\sigma = 1/\Lambda$  se conoce como *coeficiente de atenuación lineal* y  $\Lambda$  es la *longitud característica de extinción*. Para una distancia  $x=\Lambda$ , la intensidad se atenúa en un factor  $1/e$ . Esta ecuación puede integrarse para dar:

$$I(x) = I_0 \exp(-\alpha \cdot x) = I_0 \exp(-x / \Lambda) . \quad (66.3)$$

Esta expresión se conoce como la Ley de Lambert-Beer (o también Ley de Beer-Lambert-Bouguer), similar a la Ec. (62.2), que describe la variación de intensidad de un haz de radiación cuya intensidad inicial es  $I_0$ .



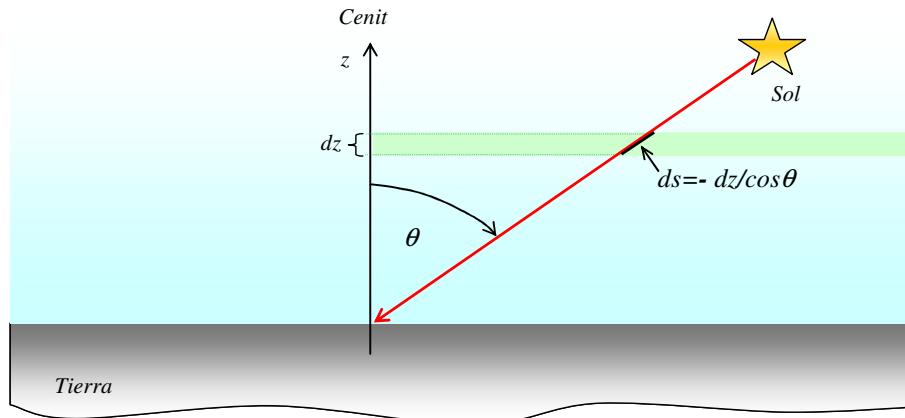
**Figura 66.1** Atenuación de un haz de luz al atravesar una muestra de espesor  $x$ , cuyo coeficiente de absorción es  $\alpha(\lambda)$ .  $I_0$  es la intensidad incidente e  $I(x)$  es la intensidad después de atravesar la muestra.

En general, tanto  $\alpha$  como  $\sigma$  dependen de la frecuencia o longitud de onda de la radiación incidente. Muchas veces es útil definir el espesor mísico  $t = \rho x$ , donde  $\rho$  es la densidad del material, y el coeficiente de absorción mísico  $\mu = \alpha/\rho$ .

Regresando al modelo de atmósfera plana, supondremos que la densidad del aire varía solo con la altura, la coordenada  $z$  de la Figura 66.2. El aire es una mezcla de diferentes gases y  $\sigma_T$  y  $n(z)$  representan la sección eficaz total de absorción y el número de moles por unidad de volumen del aire a la altura  $z$  sobre la superficie de la Tierra. De acuerdo con la Ley de Lambert-Beer,<sup>6</sup>

$$dI = -\sigma_T n(z) N_A ds \cdot I(z) = +\sigma_T n(z) N_A I(z) \cdot dz / \cos \theta, \quad (66.3)$$

donde  $N_A$  es el Número de Avogadro y  $dI$  representa la variación de la intensidad de la luz solar que atraviesa la longitud  $ds = -dz/\cos \theta$  de aire; por lo tanto,  $\alpha = \sigma_T n N_A$ . El cambio de signo en el tercer miembro de la Ec. (66.3) está asociado al sentido que hemos adoptado para  $z$  en la Figura 66.2.



**Figura 66.2** Modelo de atmósfera plana. Aquí  $ds$  es la distancia infinitesimal recorrida por la luz solar entre las alturas  $z$ ,  $z + dz$ .

Al incrementar la penetración  $s$  del rayo de luz en la atmósfera,  $z$  decrece. Denotamos con  $\theta$  el **ángulo cenital** del Sol, o sea, el ángulo que los rayos solares hacen con la vertical del lugar. La integral de la Ec. (66.3) se puede escribir como:

$$\int_0^\infty dI / I(z) = \ln(I(\infty)/I_0) = +(N_A \sigma_T / \cos \theta) \cdot \int_0^\infty n(z) dz = +K_{ef} / \cos \theta, \quad (66.4)$$

con  $K_{ef} = N_A \sigma_T \int_0^\infty n(z) dz$ . Dado que la presión atmosférica,  $P_0$ , es el peso de una columna de aire de área unidad, tenemos que:  $P_0 = M_{Aire} g \int_0^\infty n(z) dz$ , donde  $M_{Aire}$  es el peso molecular (promedio) del aire ( $M_{Aire} \approx 28,9$  g/mol) y  $g$  es la aceleración de la gravedad. De modo que  $K_{ef} = N_A \sigma_T \cdot P_0 / M_{aire} g$ . En la Ec. (66.4),  $I(\infty)$  representa la radiación solar fuera de la atmósfera, o sea,  $I_{Sol}$ , mientras que  $I_0$  es la **irradiancia solar** sobre la superficie de la Tierra, después de haber sufrido la atenuación de la atmósfera. Por lo tanto:

$$I_{Sol} = I_0 \exp(+K_{ef} / \cos \theta) \quad \text{o bien,} \quad I_0 = I_{sol} \exp(-K_{ef} \cdot \sec \theta). \quad (66.5)$$

Esta expresión relaciona la constante Solar  $I_{Sol}$  con la irradiación solar  $I_0$  medida sobre la superficie de la Tierra. Un modo de poner a prueba las hipótesis planteadas en esta sección sobre la atenuación de la radiación en la atmósfera, que están implícitas en la Ec. (66.5), consistiría en medir la irradiancia solar en la superficie de la Tierra  $I_0$  como función del parámetro  $\mu \equiv \sec \theta$ . Si nuestras hipótesis son correctas, según la Ec.(66.5):

$$\ln(I_0) = \ln(I_{sol}) - K_{ef} \cdot \mu. \quad (66.6)$$

Por lo tanto, al graficar  $\ln(I_0)$  como función de  $\mu = \sec \theta$ , si nuestras hipótesis son correctas, deberíamos obtener una recta cuya pendiente sería  $K_{ef}$  y su ordenada al origen,  $\ln(I_{sol})$ . Este gráfico, de ser lineal, por una parte convalidaría nuestras hipótesis y, por otra, nos brindaría un modo de obtener  $I_{sol}$ .

Nótese que el valor de  $K_{ef}$  depende del valor de  $\sigma_T$  y de la presión atmosférica  $P_0$ . La sección eficaz  $\sigma_T$  depende de la atenuación de la luz por las moléculas de aire ( $N_2$  y  $O_2$ , fundamentalmente) a través de la dispersión de Rayleigh y de las partículas en la atmósfera o aerosoles (dispersión de Mie<sup>7</sup>). Si se elige un día bien despejado, sin nubes, para realizar las mediciones, la contaminación del aire por polvo o aerosoles afectaría la pendiente de la recta, a través del valor de  $K_{ef}$ , pero no la ordenada al origen. Esto brinda mucha robustez a nuestro método para determinar  $I_{sol}$ .

La atenuación de la radiación en la atmósfera, a una presión determinada  $P=nRT$ , donde  $n$  es el número de moles por unidad de volumen, viene descripta, según la Ec. (66.3) por:  $\alpha \equiv 1 / \Lambda = N_A \sigma_T \cdot n = N_A \sigma_T P / RT$ , o bien:

$$\Lambda = (RT / gM_{aire}) / K_{ef} = h_0 / K_{ef}, \quad (66.7)$$

con  $h_0 = RT / gM_{aire} \approx 7,79$  km para  $T = -10$  °C. Estas expresiones relacionan el valor de  $K_{ef}$ , determinado en nuestro experimento, con la *longitud característica de extinción*  $\Lambda$  de la luz en la atmósfera, que es indicativa de la máxima distancia de visibilidad de un objeto en una atmósfera despejada.

El valor del ángulo cenital depende de la hora y latitud del lugar y hay varias expresiones y programas que permiten calcularlo,<sup>8</sup> pero quizás el modo más sencillo es acceder a la página web del U.S. Naval Observatory (USNO)<sup>9</sup> e introducir la latitud y longitud del lugar de medición, de donde es posible obtener el valor del ángulo cenital  $\theta$  como función de la hora local. Al usar estas tablas es importante verificar cómo se relaciona la hora local con la universal (UTC).

### 66.3 Determinación de la irradiancia solar

Existen varias técnicas para medir la irradiancia solar  $I_0$ . Su medición ha recibido considerable atención en el pasado reciente, sobre todo por sus implicaciones en el aprovechamiento de la energía solar. Las técnicas utilizadas para su medición varían en complejidad: desde muy simples y adecuadas para realizarlas en el patio de una casa hasta las más elaboradas y precisas.<sup>10,11</sup>

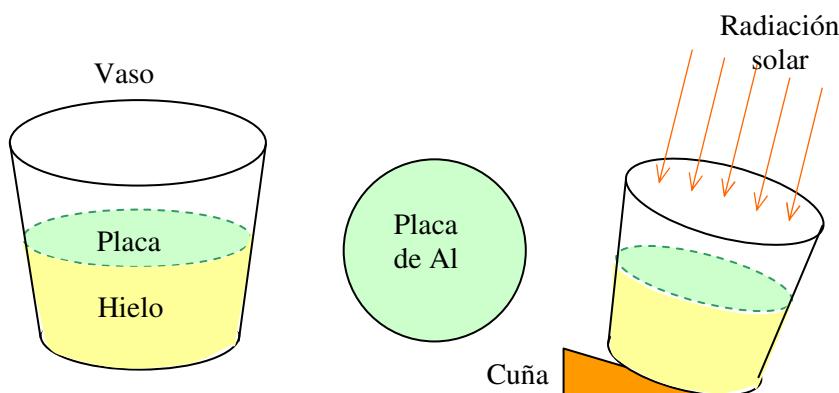
Un enfoque interesante consiste en usar dos superficies negras idénticas, una de las cuales está protegida de la radiación solar directa. Ambas placas tienen conectados un sensor de temperatura y una resistencia eléctrica que se puede calentar al hacerle pasar corriente. La placa expuesta al Sol, en equilibrio, tendrá una temperatura mayor de la que está protegida o apantallada del Sol. Seguidamente, se hace pasar una corriente por la resistencia hasta equilibrar la temperatura de ambas placas. La medición de la potencia eléctrica, necesaria para que ambas placas tengan la misma temperatura, brinda una estimación de la radiación solar sobre la placa expuesta.<sup>10</sup>

En este capítulo discutiremos un par de alternativas a esta técnica, igualmente simples y de bajo costo y capaces de brindar una estimación de la irradiación solar con una precisión aceptable para un trabajo de laboratorio de enseñanza.

#### Proyecto 207. Método simple para medir la irradiancia solar.

**Equipamiento recomendado:** Una docena de vasos de poliestireno expandido de unos 200 a 300 ml (los que se usan en los expendedores de café). Dos placas circulares de aluminio de 5 cm de diámetro. Una balanza con sensibilidad de 1 g o menor y rango de unos 400 g. En su defecto se puede usar una probeta o jeringa de plástico de unos 20 ó 30 ml graduada. Un refrigerador donde congelar agua. Un cronómetro común (apreciación 0,2 s aproximadamente).

Para este experimento usaremos dos placas circulares de aluminio de unos 5 cm de diámetro y aproximadamente 1 mm de espesor, iguales. Una cara se pule para que quede la superficie de aluminio limpia y sin manchas. La otra cara se cubre con pintura negra mate. Se requiere una docena de vasos o tazas de poliestireno expandido de unos 200 a 300 ml, de los que se usan en los expendedores de café o fiestas.<sup>11</sup>



**Figura 66.3** Esquema del experimento. Primero se marca la altura en la taza donde los discos metálicos encajan en la taza. Se llenan dos tazas iguales con agua hasta esa altura y se congela en la heladera. Luego se coloca una placa en cada una de las tazas: una con la superficie ennegrecida y la otra con la placa brillante, ambas caras apuntando hacia el Sol. Despues de unos 10 minutos de exposición se mide la cantidad de agua producida en cada taza.<sup>11</sup>

Las tazas se llenan de agua hasta una altura tal que los discos, al ser colocados, se hunden unos pocos milímetros en el agua. Se marca esta altura y se llenan unos 10 ó 12 vasos con agua hasta dicha altura y se congela en la heladera por varias horas, sin las placas. Esta operación puede realizarse la noche anterior al experimento. El día del experimento debe estar bien despejado, sin nubes, y conviene realizar las mediciones cerca del mediodía. Se retiran las tazas con el agua congelada y se dejan reposar a la temperatura ambiente unos 15 minutos, de modo que el hielo esté cerca de 0 °C (en la heladera es posible que estén más fríos).

Se derrama y descarga el agua derretida en ambas tazas y se colocan los discos en cada una de ellas, una con la cara metálica hacia arriba y la otra con la cara ennegrecida hacia arriba. Es importante que los discos metálicos estén haciendo buen contacto con el hielo durante toda la medición. Se colocan ambos vasos sobre una mesa o sobre una cuña de modo que la radiación solar llegue a las placas metálicas en forma perpendicular. Se exponen ambas tazas al Sol por un tiempo  $t_0$ , medido con un cronómetro.

El método propuesto se basa en que una placa brillante de aluminio tiene una reflectividad de  $r_{Al} \approx 95\%$ , mientras que una superficie negra mate tiene una reflectividad de  $r_n \approx 5\%$ . Designamos el área de las placas (aproximadamente iguales) con  $A_p$ . La radiación solar absorbida por cada una de las placas será:

$$Q_i = r_i A_p I_0 t_0, \quad i = Al, negra. \quad (66.8)$$

Si designamos con  $M_{Al}$  y  $M_n$  las masas de agua (derretida) producidas en las tazas con la cara de la placa brillante y la negra, expuestas al Sol respectivamente, del balance energético tenemos:

$$L_{agua} M_{Al} = r_{Al} A_p I_0 t_0 + \text{calor al medio}, \quad (66.9)$$

y

$$L_{agua} M_n = r_n A_p I_0 t_0 + \text{calor al medio}, \quad (66.10)$$

donde  $L_{agua}$  es el calor latente de fusión del agua ( $\approx 79,9 \text{ cal/g} = 333,9 \text{ kJ/kg}$ ). Con el término “calor al medio” designamos todas las fuentes de calor, no asociadas con las placas metálicas, que suponemos iguales para las dos tazas. Restando estas dos ecuaciones tenemos:

$$I_0 = \frac{L_{agua} (M_{Al} - M_n)}{(r_{Al} - r_n) A_p t_0}. \quad (66.11)$$

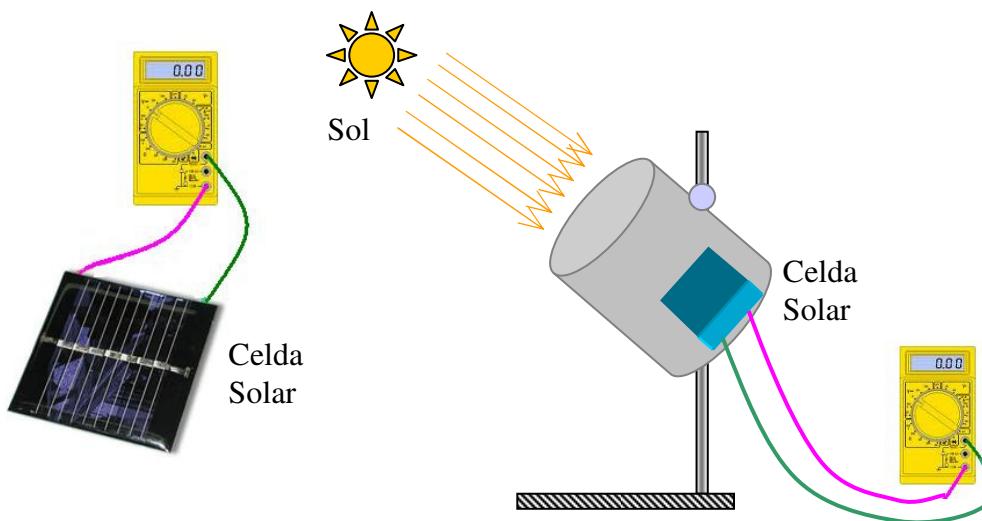
### Sugerencias de trabajo:

- ✓ En un día claro (sin nubes), a horas cercanas al mediodía, exponga a la radiación solar las dos tazas con hielo y las placas de aluminio como se indicó más arriba, por unos 10 ó 15 min. Si la masa de agua derretida es muy pequeña puede extender el tiempo de exposición, pero asegurándose de que los rayos del Sol lleguen perpendiculares a las placas.
- ✓ Mida las masas de agua derretidas durante la exposición ( $M_{Al}$  y  $M_n$ ) con la balanza o una probeta o jeringa.
- ✓ Obtenga  $I_0$  a partir de la Ec. (66.11).
- ✓ Repita el experimento unas dos o tres veces, con una separación temporal que no supere una hora, y calcule el promedio. Si demora más tiempo, el cambio de posición del Sol hará que la radiación no sea la misma.

### Proyecto 208. ♦ Atenuación de radiación solar en la atmósfera

**Equipamiento recomendado:** Una celda solar (o un trozo de ella) con sus correspondientes conexiones eléctricas. Un miliamperímetro.

Los **piranómetros** o solarímetros<sup>12</sup> son instrumentos comerciales que se usan para medir en forma precisa la radiación solar incidente; en general, se venden calibrados para dar la intensidad de radiación en  $\text{W/m}^2$ . Desafortunadamente, estos instrumentos son costosos y generalmente no están disponibles en laboratorios de docencia. Es posible, sin embargo, construir un piranómetro utilizando una celda solar (o un trozo de ella) con sus correspondientes conexiones eléctricas. Actualmente también es posible conseguir en el mercado fotómetros o luxómetros comerciales de muy bajo costo, que pueden medir iluminación en un amplio rango de hasta 200 000 Lux, que también pueden usarse para este tipo de estudio. Por último, se pueden bajar de Internet aplicaciones que transforman un teléfono celular *smart* en un fotómetro.<sup>§</sup>



<sup>§</sup> Por ejemplo, para celulares Android la aplicación Light Meter de Borce Trajkovski - <https://play.google.com/store/apps/details?id=com.bti.lightMeter&hl=es>.

**Figura 66.3** Esquema de un piranómetro simple basado en una celda solar. Se conecta la celda solar a un miliamperímetro para medir corriente. Para que la luz que llega a la celda, o sea, la radiación directa del Sol, puede colocarse la celda dentro de un tubo o lata pintada de negro mate que actúa como colimador. De este modo, orientando el tubo en la dirección del Sol, la luz llega perpendicular a la celda y se minimiza la luz difusa.

Si se conecta una celda solar a un miliamperímetro, el valor de la corriente es proporcional a la intensidad de la radiación que recibe. Para validar esta conjetura, se pueden usar algunas de las propuestas indicadas en el Anexo A para calibrar la celda solar en intensidad. Desde luego, la celda solar puede ser sustituida por alguno de los fotómetros sugeridos en el Anexo A. Se sugiere excluir el uso de fotoresistores, dada su respuesta no lineal en un rango amplio de intensidad.

### Sugerencias de trabajo:

- ✓ En un día claro (sin nubes), exponga su piranómetro a la radiación solar. Asegúrese de que la radiación incide perpendicular al detector. La sombra del tubo sobre el fondo de este puede usarse para asegurar dicha perpendicularidad.
- ✓ Mida la magnitud de la señal a distintas horas del día. Registre el valor de la señal  $I_{rel}$  y la hora. No es necesario que el piranómetro tenga una calibración absoluta, es decir, que dé la intensidad en  $\text{W/m}^2$  o Lux, ya que para este experimento sólo necesitamos una señal proporcional a la intensidad, o sea, una intensidad relativa  $I_{rel}$ .
- ✓ Obtenga mediciones cada 15 minutos al menos por unas 5 horas.
- ✓ Usando alguna de las técnicas descriptas más arriba, determine el valor del ángulo cenital  $\theta$  para cada una de las mediciones realizadas.<sup>9</sup>
- ✓ Construya un gráfico de  $\ln(I_{rel})$  como función de  $\mu = \sec \theta$ .
- ✓ ¿Son las expectativas teóricas —Ec. (66.6)— consistentes con sus datos?
- ✓ ¿Qué puede concluir del modelo de atmósfera plana para describir sus datos?

## 66.4 ♣ Calefacción de una placa expuesta al Sol

Consideremos una placa de metal, por ejemplo de aluminio o cobre, rectangular, de área  $A$  y espesor  $t_p$ , expuesta al Sol y con su superficie perpendicular a la radiación incidente. Llámemos  $I_0$  a la irradiación solar, es decir, a la intensidad total de la energía solar a nivel del suelo. Se denota con  $r$  la reflectividad media<sup>\*\*</sup> de la cara de la placa expuesta al Sol. Suponiendo que la placa está preparada para minimizar la conducción del calor con el medio, si su temperatura no difiere sensiblemente de la del medio circundante, el principal mecanismo de disipación de calor será la convección natural.<sup>5</sup> En primera aproximación, podemos usar la ley de enfriamiento de Newton y caracterizar esta disipación de energía:

$$\left[ \frac{dQ}{dt} \right]_{convección} = m_p c_p \frac{dT}{dt} = -h m_p c_p (T - T_0). \quad (66.12)$$

---

<sup>\*\*</sup> Ésta es la reflectividad efectiva, teniendo en cuenta todas las longitudes de ondas presentes en la radiación solar.

Aquí,  $T$  representa la temperatura de la placa,  $T_0$  es la temperatura ambiente,  $m_p$  y  $c_p$  son la masa y calor específico de la placa, respectivamente,  $h$  es la constante de transferencia de calor de la placa al medio,  $t$  es el tiempo y  $dQ/dt$  es la tasa de pérdida de energía de la placa. Cuando la placa está expuesta al Sol, del balance energético tenemos:

$$\frac{dQ}{dt} = m_p c_p \frac{dT}{dt} = -h m_p c_p (T - T_0) + I_0 \varepsilon A, \quad (66.13)$$

donde  $\varepsilon = 1 - r$  es la emisividad efectiva de la cara de la placa expuesta al Sol. Esta expresión puede escribirse como:

$$\frac{dT}{dt} + h T = h T_0 + \frac{A}{m_p c_p} \varepsilon I_0, \quad (66.14)$$

aquí,

$$m_p = \rho_p A t_p \quad (66.15)$$

es la masa de la placa y  $\rho_p$  es la densidad del material de la placa. Reordenando la Ec. (66.14) tenemos:

$$\frac{dT}{dt} + h T = h T_0 + \frac{1}{\rho_p c_p t_p} \varepsilon I_0. \quad (66.16)$$

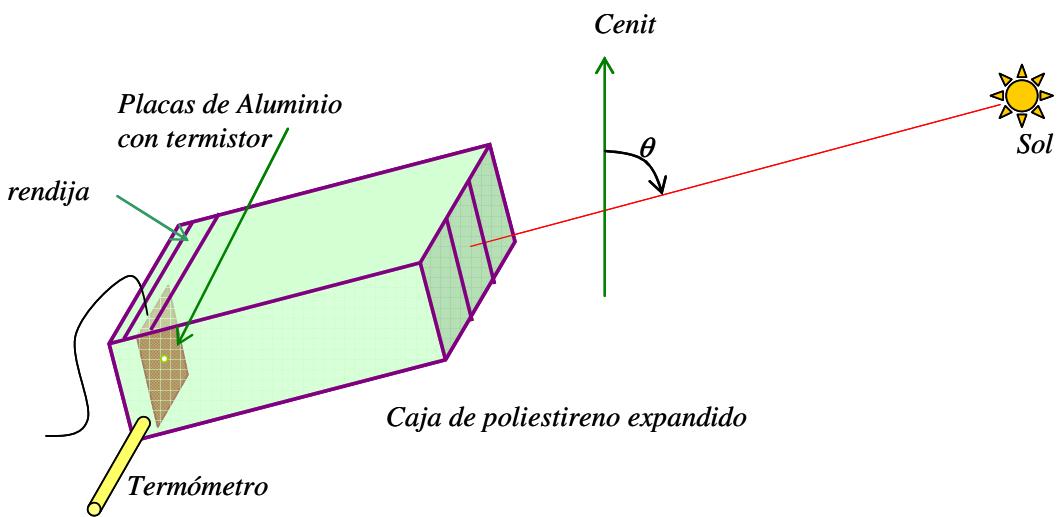
Esta expresión puede escribirse como:

$$\frac{dT}{dt} + h T = h T_\infty, \quad (66.17)$$

donde

$$T_\infty = \frac{1}{\rho_p c_p t_p} \frac{\varepsilon I_0}{h} + T_0 \quad (66.18)$$

representa la temperatura de equilibrio de la placa si ésta fuese expuesta al Sol por un tiempo suficiente hasta alcanzar equilibrio térmico. La solución de la ecuación diferencial —Ec. (66.18)— con la condición inicial  $T(0) = T_i$  es:



**Figura 66.4** Esquema de un arreglo experimental para medir el calentamiento de placas metálicas expuestas al Sol. El termómetro mide la temperatura ambiente. La caja de poliestireno expandido aísla las placas de corrientes de aire.

$$T(t) = [(T_i - T_\infty)] \cdot \exp(-kt) + T_\infty. \quad (66.19)$$

Dado que  $T_\infty > T_0$ , si las placas están inicialmente más frías que la temperatura ambiente,  $T_0 > T_i$ . Entonces, para un cierto tiempo  $t_0 > 0$ , para el que se cumpla:  $T = T_0$ , de las Ecs. (66.14) y (66.16) obtenemos:

$$\left. \frac{dT(t)}{dt} \right|_{t=t_0} = \frac{\epsilon}{\rho_p c_p} \frac{I_0}{t_p}. \quad (66.20)$$

Por lo tanto, la pendiente de la curva  $T(t)$ , cuando la temperatura de la placa es igual a la temperatura ambiente  $T_0$ , es directamente proporcional a la irradiación solar  $I_0$  e inversamente proporcional al espesor de la placa. Esta relación puede ser utilizada para obtener una estimación de la constante solar, independientemente del coeficiente de la transferencia de calor  $h$ .

Un análisis crítico de estos argumentos muestra que la Ec. (66.20) será válida aun si los efectos de radiación u otros mecanismos de transferencia de energía fuesen importantes. La razón de ello es que, cuando la temperatura de la placa es igual a la ambiente, el flujo neto de energía entre la placa y su entorno es nulo. A esta temperatura, la tasa de variación de temperatura de la placa se debe únicamente a la afluencia de la energía del Sol. En este sentido la Ec. (66.20) es un resultado más robusto que la Ec. (66.19) debido a que la temperatura asintótica  $T_\infty$  depende en forma detallada de los mecanismos de disipación de energía, mientras que en la Ec. (66.20) no. Para temperaturas cercanas a  $T_0$ , tenemos:

$$\left. \frac{dT}{dt} \right|_{T \approx T_0} = \frac{\epsilon}{\rho_p c_p} \frac{I_0}{t_p} - h(T - T_0). \quad (66.21)$$

El último término de la parte izquierda de esta ecuación, en  $T \approx T_0$ , afectará a la segunda derivada de la función  $T(t)$ .

## Proyecto 209. ♣Método simple para medir la irradiancia solar

**Equipamiento recomendado:** Dos o tres placas de aluminio de 15 cm x 15 cm aproximadamente y espesores  $t_p$  entre 1,5 a 3 mm, con una cara pintada de negro mate. Un termistor NTC conectado a la parte posterior de las placas para medir su temperatura. Una caja de polietileno expandido para alojar las placas y aislarlas de corrientes de aire. Un termómetro de alcohol para medir la temperatura en la caja. Un sistema de adquisición de datos por computadora.  $\frac{1}{2}$  kg de hielo seco.

Los termistores son dispositivos de bajo costo y muy sensibles para medir temperaturas. Su desventaja es que brindan señales que no varían linealmente con la temperatura. Para usarlos como termómetros es preciso calibrarlos previamente (ver Cap. 50 sobre sensores térmicos). Los termistores se adhieren a la parte posterior de las placas y, para lograr un buen contacto térmico, se puede utilizar grasa siliconada. La temperatura de la placa se registra como función del tiempo con un sistema de adquisición de datos conectado a una computadora. Como la temperatura no varía rápidamente, se puede adquirir datos a una tasa de un dato por segundo aproximadamente. La cara expuesta al Sol de las placas se pinta de negro mate, que tiene un coeficiente de reflectividad conocido ( $r \approx 5\%$ ).<sup>††</sup>

Se construye una caja de polietileno expandido para alojar las placas y aislarlas de corrientes de aire (Figura 66.4), con una cara abierta que permita la entrada de los rayos de Sol. La caja también sirve de colimador y posicionador de las placas perpendiculares a la radiación solar incidente. Un termómetro de alcohol se usa para medir la temperatura en el interior de la caja, cerca de las placas. Es conveniente proveer a la caja de una rendija de un par de centímetros para poder retirar e introducir las placas y que sirva como aireador, para que la temperatura de la caja no sea demasiado diferente a la temperatura ambiente. Se debe disponer de cuñas que permitan posicionar la caja en la dirección de los rayos solares. Conviene asimismo disponer de hielo seco para enfriar las placas previo a cada medición. Esto hace que la temperatura inicial de las placas sea inferior a la temperatura ambiente ( $T_i < T_0$ ). Para tener más datos de cada medición, se puede colocar más de una placa en la caja, sin que interfieran entre ellas.

### Sugerencias de trabajo:

- ✓ En un día claro (sin nubes), exponga sus placas a la radiación solar. Asegúrese de que la radiación en cada medición sea perpendicular a las placas. La sombra de la caja sobre su fondo puede usarse para monitorear dicha perpendicularidad.
- ✓ Antes de cada medición enfríe las placas con hielo seco. Para esto es aconsejable retirar las placas y colocarlas horizontales con un poco de hielo seco sobre su cara. La ventaja del hielo seco es que enfriá sin dejar

<sup>††</sup> La pintura Spray Laca Piso Negro, de Sherwin-Williams, tiene una reflectividad  $r=5,4\pm0,5\%$ . En otras pinturas mate, su reflectividad se puede obtener del fabricante o por medición directa con un espectrofotómetro de reflexión.

una película de agua como lo haría el hielo común. Cuando su temperatura sea unos  $10^{\circ}\text{C}$  inferior a la temperatura ambiente, introduzcalas en la caja. Oriente las placas perpendiculares a los rayos del Sol e inicie la medición de sus temperaturas con el sistema de adquisición de datos.

- ✓ Monitoree la temperatura de la caja y en cada medición registre este valor y el tiempo en que las placas alcanzan la temperatura del termómetro de la caja. Continúe la adquisición de datos hasta que las temperaturas de las placas sea unos  $10^{\circ}\text{C}$  superior a la ambiente.
- ✓ Repita la medición cada media hora aproximadamente, durante unas 4 ó 5 horas.
- ✓ Para cada medición grafique la temperatura de cada placa como función del tiempo y determine la pendiente  $dT/dt$  cuando la temperatura de las placas sea cercana a la temperatura ambiente, esto es,  $T \approx T_0$ . Aquí,  $T_0$  es la temperatura medida por el termómetro dentro de la caja.
- ✓ Usando la Ec. (66.20), obtenga el valor de la irradiación solar  $I_0$  para cada una de las mediciones realizadas. Note que esta vez los valores de  $I_0$  son determinaciones absolutas de irradiación. Usando el tiempo correspondiente a cada realización del experimento, obtenga el ángulo cenital  $\theta$  del Sol para cada medición.
- ✓ Construya un gráfico del  $\ln(I_0)$  como función de  $\mu = \sec \theta$ .
- ✓ ¿La expectativa teórica —Ec.(66.6)— es consistente con sus datos?
- ✓ Utilizando la Ec. (66.5), obtenga el valor de la constante solar  $I_{\text{Sol}}$  y estime la incertidumbre de la determinación.
- ✓ Compare con los valores conocidos para esta constante y discuta el grado de acuerdo alcanzado.
- ✓ Utilizando la Ec. (66.1), estime el valor de la luminosidad del Sol y su incertidumbre. ¿Cómo se compara el valor obtenido a partir de sus mediciones con los valores aceptados para este parámetro? Discuta sus resultados y el modelo teórico planteado para determinar la luminosidad del Sol.

## 66.5 Máxima distancia de visibilidad en el aire, turbidez

En el año 1873, J.C. Maxwell se encontraba de visita en Darjeeling, India, en donde disfrutaba de una espléndida vista al monte Everest, distante unos 150 km de su hotel. Maxwell le escribió a su colega *lord* Rayleigh, preguntándole cuál era, según la teoría electromagnética de la luz, la máxima distancia de visibilidad a la que todavía podía verse el monte Everest, debido a la atenuación de la luz en la atmósfera. En esta sección intentamos responder esta pregunta, siguiendo el espíritu del argumento de V. Weisskopf.<sup>13</sup> En este desarrollo abordamos la interacción de la radiación electromagnética con los átomos del aire y estimamos la sección eficaz de dispersión de Rayleigh de modo heurístico y simplificado. Las hipótesis básicas son tres: 1) las moléculas (o partículas) tienen simetría esférica y su tamaño es mucho menor que la

longitud de onda de la luz incidente, 2) las moléculas son polarizables, 3) la radiación emitida o dispersada por las moléculas puede ser descripta por un dipolo oscilante.

Imaginemos un átomo de número atómico  $Z$ . Por el momento supondremos que la nube electrónica alrededor del núcleo es una esfera de radio  $a$  y densidad de carga constante. Si, por aplicación de un campo eléctrico exterior, el núcleo se aparta una distancia  $x$  del centro de gravedad de la nube electrónica, el campo eléctrico generado por la nube electrónica ejercerá una fuerza restitutiva dada por:

$$F(x) = -Ze \cdot E_n(x) = -Ze \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze}{a^3} \frac{x^3}{x^2} = -k \cdot x, \quad (66.22)$$

donde  $k = (1/4\pi\epsilon_0)Z^2 e^2 / a^3$  y  $E_n$  es el campo generado por la nube electrónica a una distancia  $x$  de su centro.<sup>14,15</sup> Por lo tanto, al aplicar un campo eléctrico externo  $E$  se genera en el átomo un dipolo inducido  $p$  dado por:

$$p = Ze \cdot x = \beta \cdot E. \quad (66.23)$$

Aquí se supuso implícitamente que el campo aplicado sobre la molécula es uniforme. Esto es cierto si la longitud de onda  $\lambda \gg a$ ; por su parte,  $\beta$  es la polarizabilidad dada por:  $\beta = 4\pi\epsilon_0 a^3$ . Esta relación entre el momento bipolar inducido y el campo aplicado puede extenderse al caso de las moléculas. La polarización  $P$  de la muestra, o sea, el momento dipolar por unidad de volumen, se puede escribir en términos de la constante dieléctrica del medio  $K$ , como:<sup>14,15</sup>

$$P = N \beta \cdot E = \epsilon_0 (K - 1) \cdot E, \quad (66.24)$$

donde  $N$  es el número de moléculas por unidad de volumen. La constante dieléctrica  $K$  se relaciona con el índice de refracción  $n$  por:  $K - 1 = n^2 - 1 = N\beta/\epsilon_0$ .<sup>14,15</sup> En la Ec. (66.24) se supuso que las moléculas vecinas tienen un efecto despreciable en el campo eléctrico local de una molécula. Condición que en general se cumple en el caso de gases a bajas presiones (inferiores a 5 atm), como el aire.

Si sobre la muestra incide una onda electromagnética plana de frecuencia  $\omega = 2\pi f$  ( $\lambda \gg a$ ) y amplitud  $E_0$ , el dipolo inducido en cada átomo de la muestra oscilará con esta misma frecuencia. Una de las consecuencias de la teoría electromagnética clásica (ecuaciones de Maxwell) es que un dipolo oscilante a una frecuencia  $\omega$  irradia energía electromagnética a una potencia media  $s$ , dada por:<sup>14,15,16</sup>

$$s = \frac{\omega^4}{12\pi\epsilon_0 c^3} p_0^2, \quad (66.25)$$

donde  $p_0 (= \beta \cdot E_0)$  es el valor de pico del momento dipolar inducido y  $c$  es la velocidad de la luz en el vacío. De este modo, la potencia media total  $S$  irradiada por la muestra por unidad de volumen será:

$$S = N \frac{\omega^4}{12\pi\epsilon_0 c^3} p_0^2 = N \frac{\omega^4}{12\pi\epsilon_0 c^3} \beta^2 E_0^2. \quad (66.26)$$

En esta expresión se supuso que las moléculas de la sustancia actúan independientes unas de otras, es decir, en forma incoherente. Como la intensidad media  $I$  (potencia por unidad de área) de una onda plana de frecuencia  $\omega$  viene dada por:<sup>14,15</sup>  $I = c\epsilon_0 E_0^2 / 2$ , donde  $E_0$  es la amplitud del campo eléctrico de la onda incidente, tenemos:

$$\frac{dI}{dx} = -S = -N \frac{\omega^4}{12\pi\epsilon_0 c^3} \beta^2 \frac{2I}{c\epsilon_0} = -\alpha \cdot I. \quad (66.27)$$

Esta expresión es idéntica a la Ley de Lambert-Beer —Ec.(66.3)—. Recordando que  $\lambda = 2\pi c / \omega$ , tenemos:

$$\alpha = \frac{1}{\Lambda} = \frac{(2\pi)^4}{6\pi} \frac{(n^2 - 1)^2}{\lambda^4} \frac{1}{N} = \frac{8\pi^3}{3} \frac{(n^2 - 1)^2}{\lambda^4} \frac{1}{N}, \quad (66.28)$$

donde  $N (=N_A P/RT=P/k_B T)$  es el número de moléculas por unidad de volumen,  $N_A$  es el Número de Avogadro,  $k_B=R/N_A$  es la constante de Boltzmann,  $P$  y  $T$  son la presión y la temperatura absolutas. Para aire, en condiciones normales de presión y temperatura ( $P_0=1$  atm y  $T_0=273,15$  K) el valor de  $n=n_0$  es débilmente dependiente de la longitud de onda con  $n_0 - 1 \approx 2,8 \times 10^{-4}$ . Por lo tanto:

$$n^2 - 1 = (n_0^2 - 1) \cdot \frac{T_0}{P_0} \frac{P}{T}, \quad (66.29)$$

y combinando esta expresión con la Ec. (66.28) tenemos:

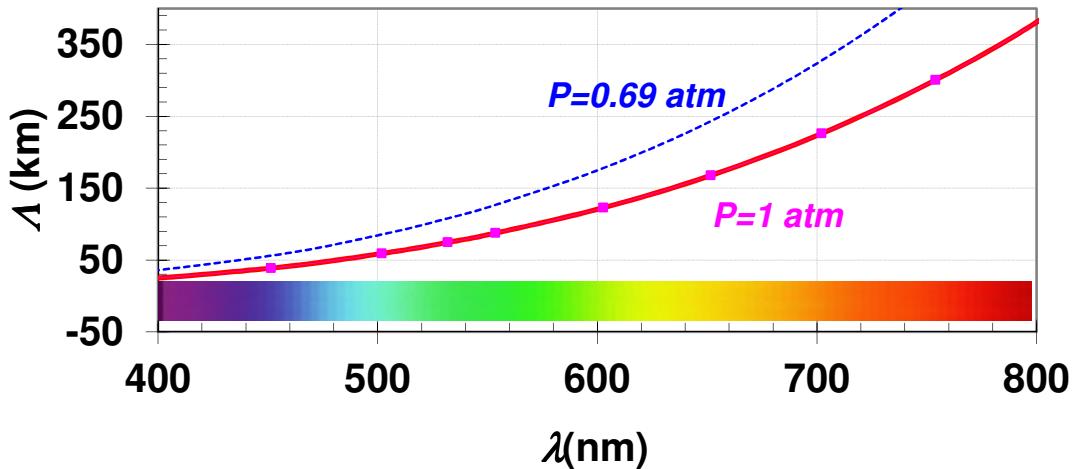
$$\alpha_R = \frac{1}{\Lambda_R} = N\sigma_R = \frac{8\pi^3}{3} \frac{k_B(n_0^2 - 1)^2}{\lambda^4} \left( \frac{T_0}{P_0} \right)^2 \left( \frac{P}{T} \right), \quad (66.30)$$

donde  $N$  es el número de moléculas o partículas por unidad de volumen,  $\sigma_R$  es la sección eficaz de dispersión de Rayleigh y  $\Lambda_R$  es la *longitud de extensión de Rayleigh*, esto es:

$$\Lambda_R = \frac{3}{8\pi^3} \frac{\lambda^4}{k_B(n_0^2 - 1)^2} \left( \frac{P_0}{T_0} \right)^2 \left( \frac{T}{P} \right). \quad (66.31)$$

Para el aire, en condiciones normales de presión y temperatura,  $n_0 \approx 1$ , por lo tanto,  $(n_0^2 - 1)^2 = (n_0 + 1)^2(n_0 - 1)^2 \approx 4 \cdot (n_0 - 1)^2$ . De la Ec. (66.31) tenemos:

$$\Lambda_R = \frac{1}{N\sigma} = \frac{3}{32\pi^3} \frac{\lambda^4}{k_B(n_0 - 1)^2} \left( \frac{P_0}{T_0} \right)^2 \left( \frac{T}{P} \right). \quad (66.32)$$



**Figura 66.5** Variación de la longitud característica de extinción de Rayleigh para la luz en la atmósfera, a dos presiones diferentes: a)  $P=1 \text{ atm}$  y b)  $P=0,69 \text{ atm}$ , correspondiente a una altura de 3000 m sobre el nivel del mar, como función de la longitud de onda, según la Ec. (66.32).

La Figura 66.5 muestra la variación de la longitud característica de extinción de Rayleigh como función de la longitud de onda para dos presiones — $P=1 \text{ atm}$  y  $P=0,69 \text{ atm}$  (altura 3000 m)— predicha por la Ec. (66.32). Vemos que a una altura media de unos 3000 m sobre el nivel del mar, esta longitud, para la longitud de onda de unos 600 nm, es de aproximadamente 150 km, que corresponde bien con la distancia del monte Everest a Darjeeling y es consistente con la observación de Maxwell del año 1873.

Otros efectos, tales como la presencia de aerosoles, vapor de agua, etcétera, aumentan la atenuación de los rayos de luz, haciendo que los valores observados de  $\Lambda_{exp}$  sean en general menores que  $\Lambda_R$ . Los valores dados por la Ec. (66.32) son un límite superior para  $\Lambda$ , ya que en el cálculo anterior se supuso que el único efecto de dispersión en la atmósfera era debido a la dispersión de Rayleigh. Por lo general, la atmósfera contiene vapor de agua, polvo, partículas o aerosoles y demás en cantidades variables. De hecho, la relación entre  $\Lambda_R$  y  $\Lambda_{exp}$  determina el índice de turbidez de la atmósfera, que permite conocer el grado de contaminación del aire en distintos lugares.

A propósito, obsérvese que la sección eficaz de dispersión del Rayleigh —Ec.(66.30)— varía con  $\lambda^{-4}$ . Por lo tanto, las longitudes de ondas cortas (azul) son más fuertemente absorbidas y reemitidas por la atmósfera que las ondas largas (rojas). Éste es el origen de color azul del cielo y por qué a medida que nos alejamos de los objetos, por ejemplo montañas, éstas se ven cada vez más azul-celeste hasta que se pierden de vista.

Es interesante notar la fuerte influencia de partículas o aerosoles en la atmósfera que atenúan fuertemente la radiación solar que llega a la superficie y por lo tanto la temperatura de equilibrio. Varios eventos naturales pueden poner grandes cantidades de

polvo en la atmósfera, entre ellas erupciones volcánicas, impacto de grandes meteoritos, etcétera. Hay varios registros de inviernos volcánicos causados por la explosión de varios volcanes en la historia. En la explosión del Krakatoa (Java) en 1883 se produjo una disminución de la temperatura media del planeta de más de 1 °C en los tres años subsiguientes a la explosión. Asimismo, existen evidencias de extinciones masivas ocurridas en la Tierra por el impacto de grandes meteoritos.<sup>17</sup>

## Proyecto 210. ♣Máxima distancia de visibilidad en el aire

**Equipamiento recomendado:** Una celda solar (o un trozo de ella) con sus correspondientes conexiones eléctricas. Un miliamperímetro.

Para esta actividad se sugiere usar un fotómetro o piranómetro, usando el mismo esquema propuesto en el Proyecto 208.

### Sugerencias de trabajo:

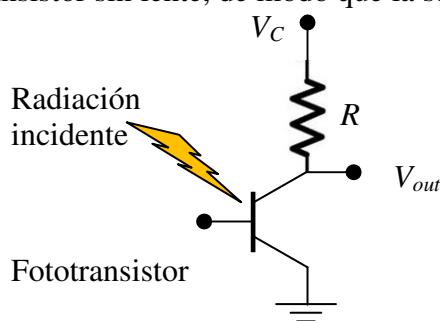
- ✓ Siga las mismas recomendaciones realizadas en el Proyecto 208.
- ✓ En un día despejado, exponga su piranómetro a la radiación solar. Asegúrese de que la radiación incide perpendicular al detector. La sombra del tubo sobre el fondo de éste puede usarse para asegurar dicha perpendicularidad.
- ✓ Mida la magnitud de la señal a distintas horas del día. Registre el valor de la señal  $I_{rel}$  y la hora. No es necesario que el piranómetro tenga una calibración absoluta, ya que para este experimento sólo necesitamos una señal proporcional a la intensidad, o sea, una intensidad relativa  $I_{rel}$ .
- ✓ Obtenga mediciones cada 15 minutos al menos por unas 5 horas.
- ✓ Usando alguna de las técnicas descriptas más arriba, determine el valor del ángulo cenital  $\theta$  para cada una de las mediciones realizadas.<sup>9</sup>
- ✓ Construya un gráfico del  $\ln(I_{rel})$  como función de  $\mu = \sec \theta$ .
- ✓ ¿Son las expectativas teóricas —Ec. (66.6)— consistentes con sus datos?
- ✓ Del gráfico  $\ln(I_{rel})$  en función de  $\mu = \sec \theta$  extraiga el valor de  $K_{ef}$  —Ec. (66.6)— y su incertezza. Usando este valor y la Ec. (66.7), obtenga el mejor valor de  $\Lambda_{exp}$  y compare con las expectativas de la Ec. (66.32).
- ✓ ¿Se cumple que la expectativa teórica,  $\Lambda_{teor}$ , supera a  $\Lambda_{exp}(< \Lambda_{teor})$ ? Discuta sus resultados. Si definimos la turbidez como  $\Lambda_{teor}/\Lambda_{exp}$ , ¿cuál es su valor? ¿Cree que puede usar este método experimental para determinar el nivel de contaminación de la atmósfera?
- ✓ Si dispone de un edificio de gran altura, en un día claro, similar al que usó para hacer las mediciones, suba al tope y obtenga fotografías de sitios lejanos que puede identificar. Luego, usando Google Earth, determine la distancia del edificio usado a los puntos de referencia. ¿Encuentra relación entre los valores de  $\Lambda_{exp}$  y la máxima distancia a la

que puede identificar lugares o sus coordenadas geográficas a la distancia?

## Anexo A. Fotómetros

Un fotómetro mide intensidad luminosa y puede fabricarse con algún componente electrónico que sea sensible a la luz, entre ellos fotodiodos, fototransistores, fotoresistores y celdas solares o fotovoltaicas.<sup>18,19</sup> Aquí sólo resumiremos las características de los fotodiodos, fototransistores y fotoresistores, que son los más simples de instrumentar.

Un fotómetro muy simple, económico y lineal puede construirse también usando un fototransistor, como se muestra en la Figura 66.6. Las condiciones de linealidad y rango se ajustan variando el valor de la resistencia  $R$  y la tensión aplicada  $V_c$ . La tensión  $V$  contiene la señal dependiente de la iluminación. Para un fotómetro es conveniente usar un fototransistor sin lente, de modo que la señal no varíe con el ángulo de enfoque.



**Figura 66.6** Fotómetro construido usando un fototransistor. Una fuente de tensión  $V_c$  alimenta el circuito. La señal  $V_{out}$  contiene la información de la iluminación recibida por el fototransistor.

Un fotorresistor (también conocido como LDR, por *Light Detector Resistor*) es un elemento semiconductor en el que la resistencia eléctrica varía con la intensidad de luz debido al fenómeno de fotoconductividad. A diferencia del fototransistor, el fotorresistor necesita que se le haga circular una corriente eléctrica  $i$ . Midiendo la caída de tensión  $V$  en sus extremos, se puede conocer la resistencia,  $V=R.i$ . Esta variación de resistencia puede ser de varios órdenes de magnitud. Un fotorresistor de CdS, por ejemplo, que es muy común y económico, tiene una resistencia en la oscuridad entre 0,1 M $\Omega$  y 10 M $\Omega$ , que cae por debajo de  $\approx 100\ \Omega$  cuando se lo ilumina con una lámpara incandescente de 40 W ubicada a unos 10 cm de distancia.

Cuando se usa un fotómetro, es importante tener en cuenta que su respuesta en frecuencias corresponda o sea compatible con las frecuencias de la radiación incidente. Si estamos interesados en usar el fotómetro con luz visible, su rango de sensibilidad debe estar entre unos 400 y 800 nm. Por ejemplo, hay fotorresistores que tienen máxima sensibilidad en la zona central del espectro visible ( $\lambda=550\text{ nm}$ ) y algunos en particular son más sensibles a la radiación infrarroja o a la ultravioleta.<sup>20</sup>

En el mercado hay varios proveedores de fotómetros o luxómetros comerciales de muy bajo costo que pueden utilizarse para los experimentos propuestos en este capítulo. El luxómetro debe tener un rango de sensibilidad que llegue hasta 200 000 Lux.

Asimismo, se pueden bajar de Internet aplicaciones que transforman un teléfono celular *smart* en un fotómetro. Estrictamente, los luxómetros no son lo mismo que los fotómetros. Éstos últimos miden la potencia física, con todas las longitudes de onda medidas por igual. Los luxómetros toman en cuenta la respuesta del ojo humano. Sin embargo, los fototransistores y fotodiodos también tienen una curva de respuesta que realiza un filtrado en frecuencia. De todos modos, para medidas que no requieran gran precisión, las respuestas de fotómetros y luxómetros de la radiación solar son aproximadamente proporcionales y para muchos experimentos, como los propuestos aquí, se puede utilizar.

## Calibración

Ya sea que usemos un fotómetro comercial<sup>21</sup> o uno construido artesanalmente,<sup>19,22</sup> siempre es conveniente tener una calibración confiable del dispositivo para poder realizar experimentos cuantitativos. La calibración consiste en obtener una curva de respuesta (voltaje, resistencia u otra magnitud eléctrica) del fotómetro en función de la intensidad de luz que incide sobre él. Describimos tres métodos de calibración de un fotómetro.

**A) Usando la variación de la intensidad de la luz con la distancia:** En este caso se usa una fuente de luz lo más parecida posible a una “fuente puntual”. Lámparas de filamento recto, como las que se usan en algunas luces de automóviles, pueden ser adecuadas. El procedimiento de calibración consiste en medir la variación de señal proporcionada por el fotómetro con la distancia fuente-fotómetro. Suponiendo que la intensidad luminosa de la fuente varía siguiendo la ley de la inversa del cuadrado de la distancia,  $I \propto r^{-2}$ , es posible realizar una calibración relativa del fotómetro. En los experimentos debemos juzgar la validez de la ley  $1/r^2$ , es decir, si podemos tomar esta ley como una buena aproximación teniendo en cuenta nuestro diseño experimental (tamaño de la fuente y rango de distancias).

**B) Usando filtros de luz de transmisión conocidas:** Este método consiste en intercalar entre la fuente y el fotómetro filtros de luz de transmisión conocida. Para ello se pueden usar filtros adquiridos de proveedores de artículos de laboratorio, que son esencialmente vidrios semiplateados que dejan pasar un porcentaje bien conocido de la intensidad incidente (los hay del 5%, 10%, 20%, etc.), o bien construirlos usando el siguiente procedimiento: con un programa de diseño gráfico se dibujan líneas negras de espesor uniforme y separadas por distancias fijas. De la geometría resultante es posible calcular la fracción de zona oscura y por lo tanto su porcentaje de transmisión. Las figuras se imprimen con tinta negra sobre una transparencia de proyección y pueden montarse, por ejemplo, en marcos de diapositivas. Conociendo la transmisión de una transparencia totalmente oscura (mínima transmisión), la de una transparencia sin líneas (máxima transmisión) y la geometría del trazado de líneas de cada figura, es posible calcular la cantidad de iluminación que transmite cada una de estas “máscaras”.

**C) Usando dos polarizadores:** Este método consiste en intercalar entre la fuente y el fotómetro dos polarizadores soportados en monturas giratorias y con goniómetro. Como es costumbre, el primer polaroide es el polarizador y el segundo es el analizador. Se coloca el goniómetro del analizador en cero y se hace rotar el polarizador hasta que la intensidad transmitida sea máxima. Esta intensidad la denominamos  $I_0$ . Luego se gira el

analizador con ángulos bien definidos y se registran las lecturas del fotómetro en función del ángulo. La calibración en este caso se basa en la Ley de Malus, o sea, en el hecho de que la intensidad transmitida varía como:

$$I(\theta) = I_0 \cdot \cos^2 \theta . \quad (66.33)$$

## Referencias

- 
- <sup>1</sup> The Fourth Assessment Report (AR4) 2007, Grupo intergubernamental sobre el cambio climático (IPCC) Informe 2007, <http://www.ipcc.ch>.
- <sup>2</sup> J.N. Bahcall, "How the Sun Shines", *J. of the Royal Astr. Soc. of Canada*, **94**, (6), 219-227 (Dic. 2000). <http://www.sns.ias.edu/~jnb/> y Nobel lectures, en <http://nobelprize.org/physics/articles>.
- <sup>3</sup> S. Gil, "Neutrinos solares ¿Por qué brillan las estrellas?", *Ciencia Hoy*. Vol.**14** N°:79, 52-57 (Febrero - Marzo, 2004).
- <sup>4</sup> Arthur B. McDonald, Joshua B. Klein y David L. Wark, "Solving the Solar Neutrino Problem", *Scientific American*, vol. **288**, no. 4 (April 2003), pp. 40-49.
- <sup>5</sup> S. Gil, M. Mayochi y L. J. Pellizza, "Experimental estimation of the luminosity of the Sun", *Am. J. Phys.* **74**(8), 728-733 (2006).
- <sup>6</sup> D.E. Gray (ed.), *American Institute of Physics Handbook* (McGraw-Hill co., NY, 1966) y [http://en.wikipedia.org/wiki/Beer-Lambert\\_law](http://en.wikipedia.org/wiki/Beer-Lambert_law).
- <sup>7</sup> *Mie theory*, en Wikipedia, [http://en.wikipedia.org/wiki/Mie\\_theory](http://en.wikipedia.org/wiki/Mie_theory).
- <sup>8</sup> *Airmass of the atmosphere*, en Wikipedia, <http://en.wikipedia.org/wiki/Airmass>.
- <sup>9</sup> U.S. Naval Observatory (USNO), *Sun or Moon Altitude/Azimuth Tables*, <http://aa.usno.navy.mil/data/>.
- <sup>10</sup> Uri Ganiel y Oved Kedem , "Solar energy, how much do we receive?", *Phys. Teach.* **21**(8), 573 (1983).
- <sup>11</sup> B.G. Eaton, R. DeGeer y P. Freier, "The solar constant: a take home lab", *Phys. Teach.* **42**, 51-52 (2004) y *Phys. Teach.* **15**, 172-173 (1977).
- <sup>12</sup> Piranómetro en Wikipedia, <http://es.wikipedia.org/wiki/Piran%C3%B3metro>.
- <sup>13</sup> V. Weisskopf, "Sear for Simplicity: Maxwell, Rayleigh, and Mt. Everest", *Am. J. Phys.* **54**(1), 13-14 (1986).
- <sup>14</sup> R. Halliday, D. Resnick y M. Krane, *Física para estudiantes de ciencias e ingeniería*, vol. II (México, 2003; Traducción de *Fundamentals of Physics*, John Wiley and Sons, Inc. New York, 2002).
- <sup>15</sup> H. D. Young, R.A. Freedman *et al.*, *Física Universitaria*, vol. II (Addison Wesley, Pearson Ed., México DF, 2009).
- <sup>16</sup> E. Purcell, *Electricity and Magnetism: Berkeley Physics Course*, vol. II (McGraw-Hill, 1965) (Reverté, Barcelona, 1977).
- <sup>17</sup> Berkeley Earth Surface Temperature home page: <http://www.berkeleyearth.org/index.php>.
- <sup>18</sup> P. Horowitz y W. Hill, *The art of electronics*, 2<sup>a</sup> ed. (Cambridge University Press, 1989).
- <sup>19</sup> G. McIntosh, A Simple Photometer to Study Skylight, *The Physics Teacher* **44**, 540 (2006).
- <sup>20</sup> Pueden obtenerse estos datos de los proveedores de elementos electrónicos. Por ejemplo, Newark: <http://www.newark.com>, National Semiconductors: <http://www.national.com/>, o GMElectrónica: <http://www.gmelectronica.com.ar>.
- <sup>21</sup> Algunos proveedores comerciales de fotómetros para uso educativo son: Vernier: <http://www.vernier.com> y Pasco: <http://www.pasco.com>. Consultar también APS Buying Guide: <http://www.aps.org/pt/guide>.
- <sup>22</sup> D. Levenson, "Sensitive small area photometer", *Am. J. Phys.*, **38**, 987 (1970).