

Taller: Semana 1

Respuesta a Problema 1.

a) sea $x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$ entonces

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -mA\omega^2\cos(\omega t + \phi) \\ &= -m\frac{k}{m}A\cos(\omega t + \phi) \\ &= -kA\cos(\omega t + \phi) \\ &= -kx \end{aligned}$$

donde $\omega = \sqrt{k/m}$

b) sea $x(t) = B\sin(\omega t) + C\cos(\omega t)$ entonces

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -mB\omega^2\sin(\omega t) - mC\omega^2\cos(\omega t) \\ &= -mB\frac{k}{m}\sin(\omega t) - mC\frac{k}{m}\cos(\omega t) \\ &= -Bk\sin(\omega t) - Cm\cos(\omega t) \\ &= -kx \end{aligned}$$

donde $\omega = \sqrt{k/m}$

Respuesta a Problema 2.

Haciendo la expansión del coseno de la suma, tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} A\cos(\omega t + \phi) &= A(\cos(\omega t)\cos(\phi) - \sin(\omega t)\sin(\phi)) \\ &= [A\cos(\phi)]\cos(\omega t) + [-A\sin(\phi)]\sin(\omega t) \end{aligned} \quad (1)$$

Por tanto, nuestro A y B en la segunda ecuación son determinados por una constante $A = A'$ en la primera, luego la relación es:

$$A = [A'\cos(\phi)]B = [-A'\sin(\phi)] \quad (2)$$

Respuesta a Problema 3.

a) Si $x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$ entonces:

$$x(0) = A\cos(\phi) = x_0$$

$$v(0) = -A\omega\sin(\phi) = v_0$$

Luego

$$\frac{v_0}{x_0} = -\omega\tan(\phi) \Rightarrow$$

$$-\frac{v_0}{\omega x_0} = \tan(\phi) \Rightarrow$$

$$\text{ArcTan}\left(-\frac{v_0}{\omega x_0}\right) = \phi \Rightarrow$$

Y ademas

$$x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2} = A^2 \cos^2(\phi) + A^2 \sin^2(\phi) \Rightarrow$$

$$x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2} = A^2 \Rightarrow$$

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}$$

b) Si $x(t) = B \sin(\omega t) + C \cos(\omega t)$ entonces:

$$x(0) = C = x_0$$

$$v(0) = B\omega = v_0$$

Luego

$$C = x_0$$

$$B = \frac{v_0}{\omega}$$

Respuesta a Problema 4.

Dado que la fuerza $F = mg$ en algún momento es igual a $F_r = -kx$, existe un punto de equilibrio de tal manera que hay una fuerza equivalente $F_e = F_r - F_g$. Luego la fuerza resultante es equivalente a un sistema de resorte vertical (asumiendo rozamientos y fuerzas externas despreciables).

Respuesta a Problema 5.

Del esquema de fuerzas de la figura 1 obtenemos que:

$$ml\ddot{\theta} = -mg \text{Sen}(\theta)$$

Luego:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \text{Sen}(\theta) = 0$$

y tomando θ pequeño entonces:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \theta = 0$$

Cuya solución es de la forma:

$$\theta(t) = A \cos(\omega t + \phi)$$

Donde:

$$\dot{\theta} = -\omega A \sin(\omega t + \phi)$$

Por lo cual su energía cinética queda como

$$K = \frac{1}{2} ml^2 \omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \phi)$$

Y además como la energía potencial gravitacional es de la forma $U = mgy$ entonces la energía potencial para el caso del péndulo quedará como:

$$U = mgl\cos(\theta)$$

Respuesta a Problema 6.

Teniendo en cuenta el estado en equilibrio $m = 0,1kg$ y $x = 0,1m$ con la siguiente ecuación:

$$mg = F_g = F_r = kx = (0,1kg)(9,8m/s^2) = k(0,1m) \Rightarrow k = 9,8N/m \quad (3)$$

a). Dado que $\omega^2 = k/m$, encontramos que la ecuación diferencial del movimiento resulta:

$$d^2x/dt^2 + 98x = 0$$

b). Dado el estado inicial, por la ecuación armónica:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$

Tenemos $A = 6cm = 0,06m$, $\phi = 0$ dado que parte de reposo y $v = 0$. Luego:

$$x(t) = 0,06\cos(7\sqrt{2}t)$$

Respuesta a Problema 7.

Dado que el periodo de un pendulo es:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Entonces el tiempo requerido para que el pendulo de un metro complete una oscilacion es:

$$12T_1 = 24\pi\sqrt{1/9,82} = 24,1seg$$

por tanto el tiempo que tarda el pendulo de longitud desconocida en completar 11 oscilaciones es 24,1seg luego:

$$11T_2 = 24,1 = 22\pi\sqrt{\frac{l_2}{9,82}}$$

entonces:

$$l_2 = \left(\frac{24,1}{22\pi}\right)^2 (9,82) = 1,2m$$

Respuesta a 8.

Teniendo en cuenta la energía potencial de la gravedad $U = mgh$ y que la energía del resorte en el punto más alto es $U = 1/2kx^2$. Igualamos la energía:

$$\omega^2 = k/m = gh/x^2 = (9,8)(0,49)/(0,245)^2$$

$$\omega^2 = 80$$

Dado que $\omega = 2\pi f$ tenemos:

$$f = 8,94/2\pi = 1,423Hz$$

o $T = 0,703s$

Respuesta a Problema 9.

De la figura 2 vemos que si la masa esta en equilibrio:

$$ky = mg \Rightarrow$$

$$k = \frac{mg}{y} \Rightarrow$$

$$k = \frac{0,1(9,82)}{9,82} = 0,1 \Rightarrow$$

Y por tanto si adiciona una masa de $0,2kg$ entonces el resorte se elongara:

$$y = \frac{0,3(9,82)}{0,1} = 29,46m$$

Respuesta a 10).

Dado que la energía se conserva, tenemos (aún no sé hacer gráficas) que el m_2 tiene la energía del sistema, que luego se convierte en un sistema con masa 1 y masa 2 que llamamos masa 3, m_3 , que gana una velocidad v' . Así tenemos lo siguiente:

$$1/2m_2v^2 = 1/2m_3v'^2$$

$$v' = 8\sqrt{2}$$

De la misma manera, la energía se conserva de la siguiente forma:

$$1/2mv'^2 = 1/2kx^2$$

$$x = 4\sqrt{2}$$

Así, la amplitud es $A = 4\sqrt{2}$ y la $\omega^2 = k/m$, luego $\omega = 2$. Finalmente, tenemos la ecuación deducida como:

$$x(t) = 4\sqrt{2}\text{Sen}(2t)$$