LA MODULAZIONE DI FREQUENZA

GENERALITÀ

Le radiodiffusioni in **stereofonia** attualmente usano la **FM** (Frequency modulation), quindi la banda base del segnale modulante, cioè tutto l'insieme delle frequenze che il microfono della camera di regia registra, è costituito dalla banda stereofonica, che è stata normalizzata dalla F.C.C. (Federal Communications Commission) già nel **1961** e che è:

B = 30 Hz - 15 KHz

Questa banda coincide quasi con la banda di sensibilità dell'orecchio umano che è, mediamente:

B = 20 Hz - 20 KHz

in modo che il **sistema stereofonico** consente praticamente di trasmettere tutto quello che l'orecchio umano può sentire.

Diversamente avveniva per le trasmissioni in **AM,** (Amplitude Modulation), attualmente attive, ma in disuso, che avendo una banda di **5.000 Hz** sono molto più simili alla banda telefonica che è:

B = 300 Hz - 3.400 Hz.

Nella **AM**, infatti, si trasmette la voce umana, ma non la musica, o meglio, non fedelmente, visto che i violini, ad esempio, hanno uno spettro che supera i **9.000 Hz** e che quindi è ben trasmesso dalla **FM** che arriva a **15.000 Hz** ma mal trasmesso dalla **AM** che arriva appena a **5.000 Hz.**

NOZIONI TEORICHE

Nella **FM** sono presenti: una **modulante** di tipo **analogico**, ed una **portante sinusoidale.**

Ma, un segnale periodico può svilupparsi in serie di **Fourier**, cioè in una somma di infinite sinusoidi che può essere troncata a quella armonica la cui ampiezza ha valore trascurabile per gli strumenti e i sensi dell'uomo.

Pertanto, è sempre lecito considerare il segnale modulante come costituito da singole sinusoidi. Per semplicità esaminiamo una sola di queste armoniche la cui funzione matematica si può esprimere indifferentemente sia in seno che in coseno.

Ad esempio:

PORTANTE: $v_p(t) = V_p\, cos(\omega_p t)$	**MODULANTE:** $v_m(t) = V_m\, cos(\omega_m t)$	Con: $\omega_p >> \omega_m$

Nella modulazione di frequenza **(FM)**, l'ampiezza del segnale modulato è mantenuta costante ed eguale al valore della portante a riposo V_p:

La frequenza invece varia, proporzionalmente all'ampiezza istantanea del segnale modulante ed il massimo scarto di frequenza, rispetto alla frequenza portante a riposo si chiama **Δf** e, in Europa, è uguale a **75 KHz** essendo stato normalizzato nel **1961.**

La rapidità con cui avviene tale variazione è determinata dalla rapidità della legge di variazione nel tempo del segnale modulante stesso,

Pertanto, mentre nella portante a riposo:

$$v_p(t) = V_p\, cos\, \omega_p t$$

la pulsazione ω_p ha valore costante, nel segnale modulato la nuova pulsazione deve essere proporzionale, secondo una costante K_F caratteristica del modulatore, all'ampiezza del segnale modulante:

$$v_m(t) = V_m\, cos\, \omega_m t$$

Dunque la pulsazione istantanea del segnale modulato in **FM** deve avere la forma:

$$\omega_{FM}(t) = \omega_p + K_F V_m\, cos\, \omega_m t = 2\pi\left(f_p + \frac{K_F V_m}{2\pi} cos\, \omega_m t\right) = 2\pi\left(f_p + \Delta f\, cos\, \omega_m t\right)$$

avendo indicato con:

$$\Delta f = \frac{K_F V_m}{2\pi}$$

lo spostamento massimo di frequenza rispetto al valore f_p di riposo della portante.

Ma la pulsazione istantanea e l'angolo istantaneo sono legati dalla relazione:

$$\omega(t) = \frac{d\varphi(t)}{dt}$$

e quindi:

$$d\varphi(t) = \omega(t)dt$$

Da cui, integrando, si ottiene:

$$\varphi(t) = \int \left(\omega_p + K_F V_m \cos \omega_m t\right) dt = \omega_p t + \frac{K_F V_m}{\omega_m} sen\, \omega_m t$$

A questo punto è possibile scrivere il valore del segnale modulato in **FM:**

$$v_{FM}(t) = V_p \cos\left(\omega_p t + \frac{K_F V_m}{\omega_m} sen\, \omega_m t\right) = V_p \cos\left(\omega_p t + m sen\, \omega_m t\right)$$

avendo indicato con:

$$m = \frac{K_F V_m}{\omega_m} = \frac{K_F V_m}{2\pi f_m} = \frac{\Delta f}{f_m}$$

l'indice di modulazione in frequenza.

L'espressione:

$$v_{FM}(t) = V_p \cos\left(\omega_p t + m sen\, \omega_m t\right)$$

comprende una funzione sinusoidale come argomento di un'altra funzione cosinusoidale e richiede, per essere risolta, uno sviluppo in serie che si deve a **Bessel.**

In base alla serie di **Bessel** si dimostra che il segnale suddetto, rappresentante la modulazione in frequenza di una **portante sinusoidale** con una **modulante sinusoidale**, è rappresentato da **infinite sinusoidi** secondo l'espressione matematica:

$$v(t) = V_p J_0(m) sen\, \omega_p t +$$

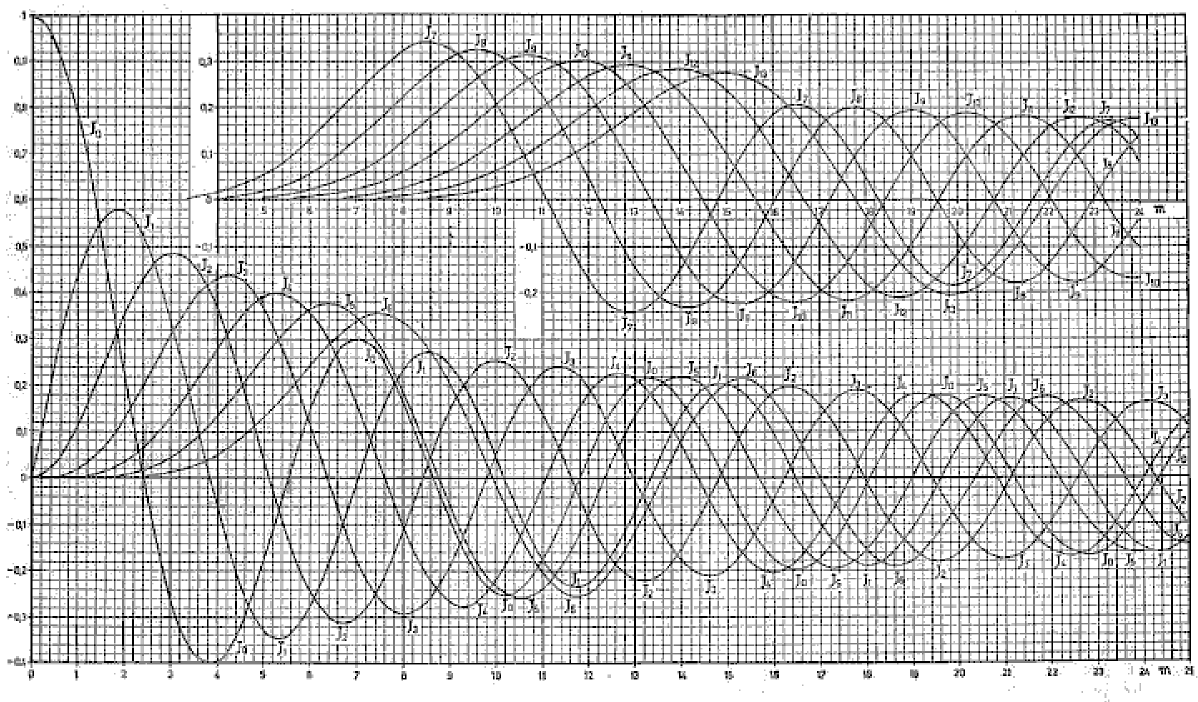
$$+ V_p J_1(m)\left[sen(\omega_p + \omega_m)\, t - sen(\omega_p - \omega_m)\, t\right] +$$

$$+ V_p J_2(m)\left[sen(\omega_p + 2\omega_m) t + sen(\omega_p - 2\omega_m) t\right] +$$

$$+ V_p J_3(m)\left[sen(\omega_p + 3\omega_m)\, t - sen(\omega_p - 3\omega_m)\, t\right] +$$

$$+ V_p J_4(m)\left[sen(\omega_p + 4\omega_m)\, t + sen(\omega_p - 4\omega_m)\, t\right] + \ldots$$

Le ampiezze di queste sinusoidi, come si vede dalle formule scritte, si ottengono dal prodotto dell'ampiezza della portante a riposo $\mathbf{V_p}$, per il valore delle suddette funzioni di **Bessel** $\mathbf{J_0}$, $\mathbf{J_1}$, $\mathbf{J_2}$, $\mathbf{J_3}$, $\mathbf{J_4}$, **...** che dipendono dall'indice di modulazione **m** e che sono rappresentate di seguito.



Sull'asse delle ascisse vi è l'indice di modulazione **m,** e sulle ordinate le funzioni di **Bessel J_0, J_1, J_2, ...**

Le funzioni di **Bessel** possono assumere valori inferiori a **1** in modulo ed anche il valore **0.**

Si deduce che per alcuni valori dell'indice di modulazione **m,** alcune righe dello spettro del segnale modulato in **FM** possono sparire. Si chiamano zeri di **Bessel** quei valori dell'indice di modulazione **m** (2,4; 5,5; 8,7; 11,8; ecc.) che annullano **J_0**, per cui la trasmissione avviene in assenza di portante, e quindi con rendimento del **50%.**

SPETTRO DEL SEGNALE MODULATO IN FM

Per lo studio dello spettro, cioè dell'insieme di tutte le sinusoidi che rappresentano nel dominio della frequenza il segnale modulato, è più semplice fare un esempio.

Esercizio:

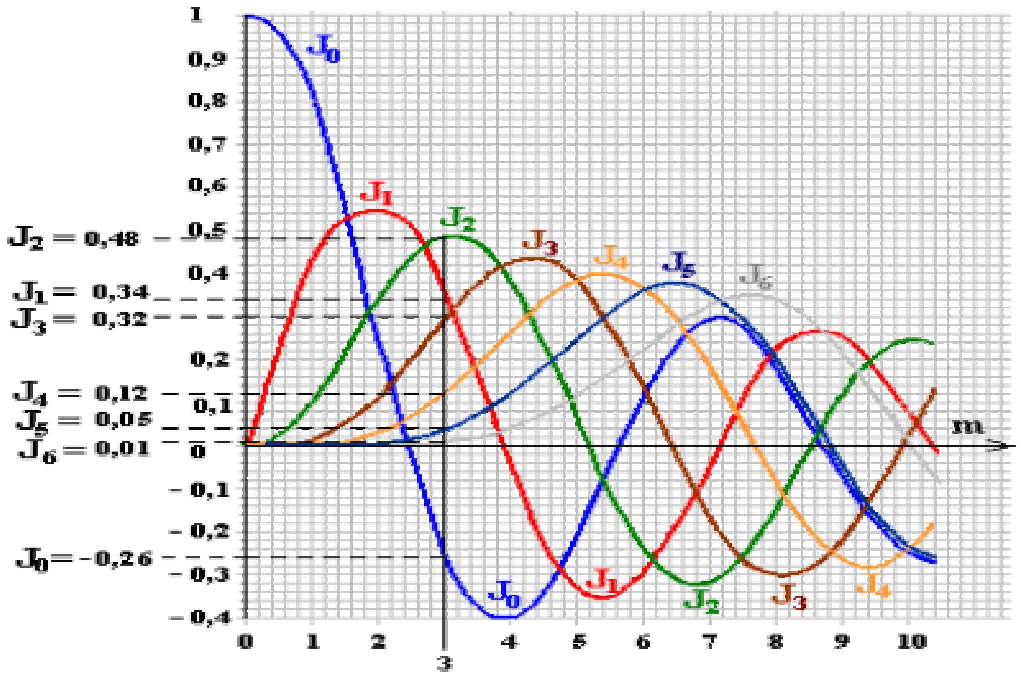
Tracciare lo spettro di un segnale in modulazione di frequenza (FM) con:

- **f_p=100 MHz**
- **f_m= 15 KHz**
- **Δf = 45 KHz**
- **V_p= 100 V**

Si determina il valore di **m** in base alla formula:

$$m = \frac{\Delta f}{f_m} = \frac{45.000}{15.000} = 3$$

Si traccia, sul diagramma delle funzioni di **Bessel**, un segmento parallelo all'asse delle ordinate in corrispondenza del valore **m = 3** dell'indice di modulazione e, dall'intersezione con tutte le curve **J_0, J_1, J_2, ...,** si determinano i valori che queste funzioni **J_0, J_1, J_2, ...,** assumono come è schematicamente indicato in figura:



Risulta, dal grafico:

J_0 = - 0,26

J_1 = 0,34

J_2 = 0,48

J_3 = 0,32

J_4 = 0,12

J_5 = 0,05

J_6 = 0,01

E quindi le ampiezze delle righe spettrali, in **Volt** sono:

$$J_0V_p = |-0{,}26| \cdot 100 = 26V$$

$$J_1V_p = 0{,}34 \cdot 100 = 34V$$

$$J_2V_p = 0{,}48 \cdot 100 = 48V$$

$$J_3V_p = 0{,}32 \cdot 100 = 32V$$

$$J_4V_p = 0{,}12 \cdot 100 = 12V$$

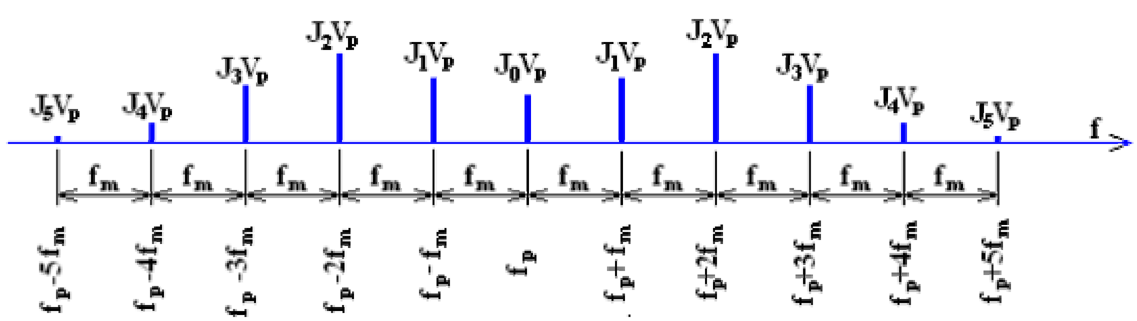
$$J_5V_p = 0{,}05 \cdot 100 = 5V$$

Si definisce **BANDA** di un segnale l'insieme delle frequenze di valore significativo che lo costituiscono e cioè, nel caso in esame, di ampiezza uguale o superiore all'**1%** della portante non modulata.

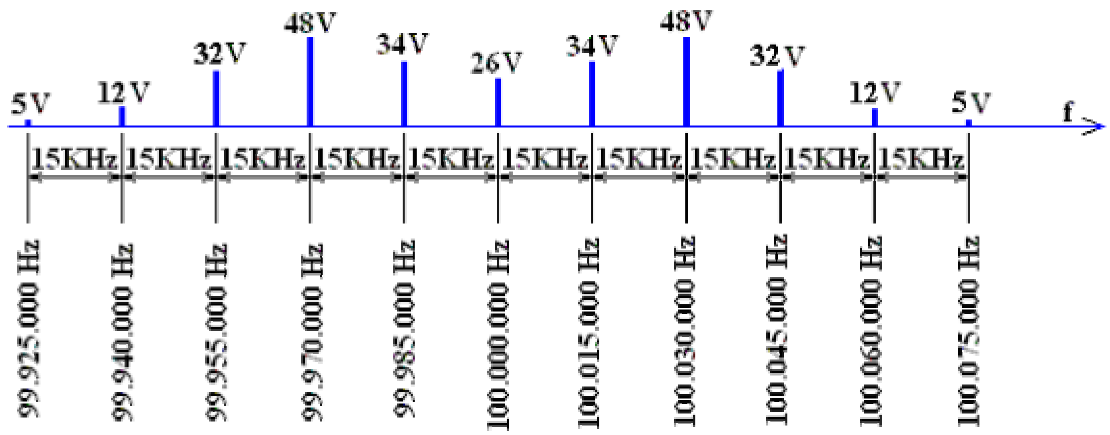
Nel caso in esame, osservando che nelle funzioni di **Bessel** il valore di riferimento della portante non modulata, cioè **J_0** con **m=0** è uguale a **1**, si stabilisce di considerare come facenti parte integrante della **banda** del segnale modulato in **FM** soltanto quelle funzioni di **Bessel** il cui valore in corrispondenza al valore di **m** prescelto, sia superiore, in modulo, a **0,01**.

Ecco perché nel nostro esempio abbiamo escluso **J_6**, sesta funzione di **Bessel** e le successive.

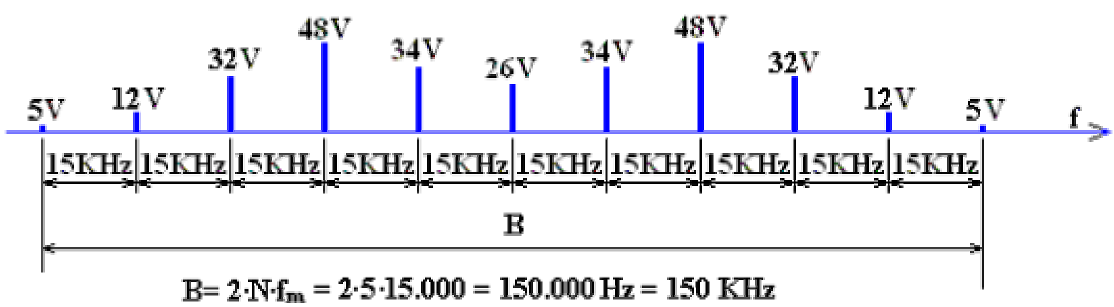
Ottenuti i valori delle funzioni di **Bessel**, si traccia la **banda** del segnale modulato in **FM**:



Lo stesso, con i valori numerici risulta:



Nel nostro esempio la larghezza di banda è la seguente:



La formula per determinare la larghezza di banda in **FM** è dunque:

$$B = 2 \cdot N \cdot f_m$$

dove **N** è il numero delle righe di **ampiezza superiore all'1% della portante non modulata**; f_m è la frequenza modulante, o nel caso di modulazione con più frequenze contemporanee, la massima frequenza modulante.

Per determinare però la larghezza di banda occorre conoscere i diagrammi delle funzioni di Bessel, come abbiamo fatto noi, oppure il numero delle righe spettrali, cosa che è possibile solo disponendo di un buon **analizzatore di spettro**.

Si può calcolare la larghezza di banda, sia pure in modo approssimativo, senza disporre né dell'analizzatore di spettro, né delle funzioni di **Bessel**, usando una formula empirica, dovuta a **Carson:**

$$B = 2\left(\Delta f + f_{m\,max}\right)$$

dove Δf è il massimo scarto in frequenza rispetto alla portante a riposo, e f_{mmax} è la massima frequenza modulante.

Questa formula è tanto più esatta, quanto più **m** è grande, mentre per **m** piccolo non è molto precisa.

Nel caso dell'esempio precedente avrebbe dato:

$$B = 2(45.000 + 15.000) = 120.000\,Hz$$

mentre il valore esatto era di **150.000 Hz.**

CANALI DELLE TRASMISSIONI IN FM

Oggi, le trasmissioni radiofoniche in stereofonia hanno caratteristiche normalizzate e sono:

Δf = 75 KHz

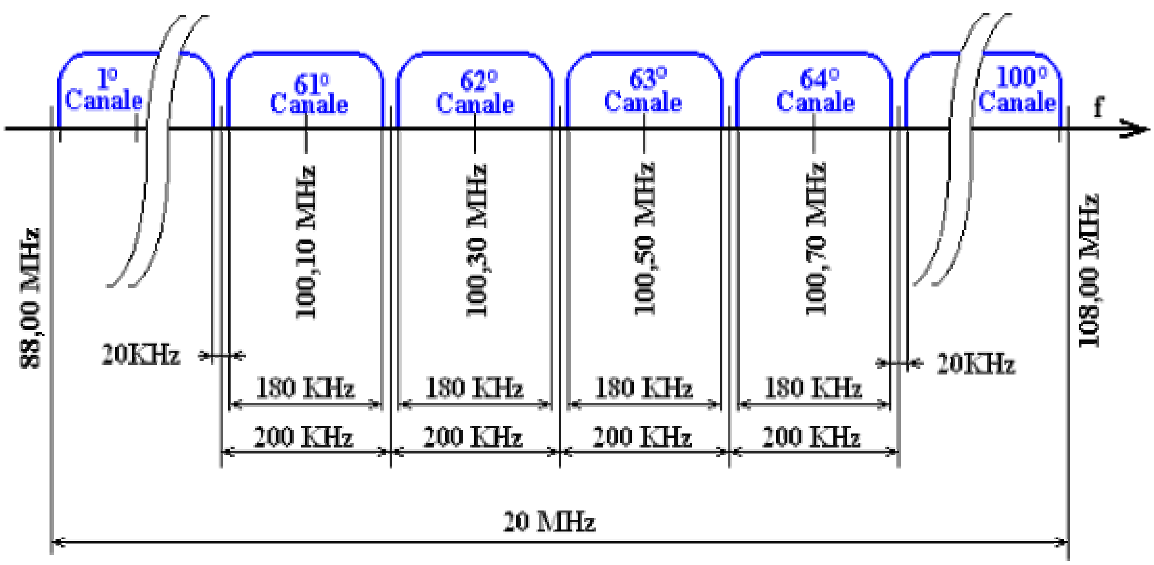
f_{mmax}=15 KHz

B(lorda) = 200 KHz

B(netta) = 180 KHz

Gamma VHF : 88 - 108 MHz

La gamma utile è di: **108 - 88 =20 MHz** ed è suddivisa in **100** canali da **200 KHz** lordi e **180 KHz** netti secondo lo schema di massima seguente:



Calcoliamo, per verifica, la larghezza di banda di un canale stereofonico utilizzando la formula di **Carson.**

$$B = 2(\Delta f + f_{m\,max}) = 2(75.000 + 15.000) = 180.000\,Hz$$

Questa volta la formula di Carson da un risultato esatto.

POTENZA NELLA MODULAZIONE DI FREQUENZA

Nella modulazione di frequenza il segnale modulato ha ampiezza invariata rispetto alla portante a riposo e poiché la potenza di un segnale sinusoidale dipende dalla sua ampiezza e non dalla sua frequenza, la potenza del segnale modulato è la stessa di quella della portante non modulata.

Avviene dunque che mentre prima della modulazione la potenza è concentrata tutta in una sola sinusoide detta portante.

Dopo la modulazione la potenza, in parte rimane nella portante, in parte si distribuisce in varie righe spettrali, in proporzione alle funzioni di **Bessel.**

Prima della modulazione:

$$P_p = \frac{V_p^2}{2R}$$

Dopo della modulazione:

$$P_p = \frac{V_p^2}{2R}\left[J_0^2(m) + 2J_1^2(m) + 2J_2^2(m) + 2J_3^2(m) + 2J_4^2(m) + \ldots\right] = \frac{V_p^2}{2R}\left[J_0^2(m) + 2\sum_{n=1}^{\infty} J_n^2(m)\right]$$

Le due formule a prima vista sembrano assurde, ma sono invece chiare se si ricorda una delle proprietà delle funzioni di Bessel:

$$J_0^2(m) + 2J_1^2(m) + 2J_2^2(m) + 2J_3^2(m) + 2J_4^2(m) + \ldots = J_0^2(m) + 2\sum_{n=1}^{\infty} J_n^2(m) = 1$$

Verifichiamo quanto detto con i dati dell'esercizio precedente:

Supponiamo **R=1** per semplicità.

Prima della modulazione:

$$P_p = \frac{V_p^2}{2R} = \frac{100^2}{2 \cdot 1} = 10.000 \ W$$

Dopo della modulazione:

$$P_p = \frac{100}{2 \cdot 1}\left[26^2 + 2 \cdot 34^2 + 2 \cdot 48^2 + 2 \cdot 32^2. + 2 \cdot 12^2 + 2 \cdot 5^2\right] = 9.982 \ W$$

La leggera differenza fra i due risultati si spiega con gli errori commessi durante il rilevamento dei valori delle funzioni di Bessel che sono stati ricavati da un grafico, ed anche dal fatto che le funzioni sono in realtà infinite e che le successive alla 5° sono state trascurate perché troppo piccole.