TEOREMA DI FOURIER

Un segnale comunque complesso può essere scomposto come somma di segnali elementari.
Questi segnali elementari sono sinusoidi di ampiezza opportuna e frequenza multipla del segnale stesso.

Per un segnale periodico s(t) = s(t + KT) con K = 1, 2, 3,... e T **Periodo** del segnale

La **SERIE DI FOURIER** in **forma trigonometrica** ha la seguente espressione:

$$s(t) = C_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(A_k \cos k\omega t + B_k \, sen\, k\omega t \right) \qquad con \;\; t \varepsilon \left(-\frac{T}{2}, +\frac{T}{2} \right)$$

dove $C_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} s(t)\,dt$; $A_k = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} s(t)\cos k\omega t\,dt$ e $B_k = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} s(t)\, sen\, k\omega t\,dt$

Il segnale s(t) é rappresentato come somma di un termine costante (C_0) e di termini costituiti da segnali sinusoidali con periodo T/K, ovvero con frequenza angolare Kω.

$s(t) = C_0 + A_1 \cos\omega t + A_2 \cos 2\omega t + A_3 \cos 3\omega t + \ldots$
$\qquad + B_1\, sen\omega t + B_2\, sen 2\omega t + B_3\, sen 3\omega t + \ldots$

La più bassa frequenza, cioè $\omega = 2\pi/T$ é detta frequenza ***fondamentale*** del segnale s(t); le altre frequenze, tutte multiple della fondamentale vengono dette ***armoniche*** del segnale s(t).
C_0 é detta ***componente continua***.

La rappresentazione su assi ω, C_k prende il nome di **spettro di ampiezza** ed é costituito da una serie di righe di ampiezza C_k e distanziate di ω.
Nota Bene - questo perché lo spettro unilatero di Fourier di una sinusoide è una riga (delta di Dirac), di ampiezza pari a quella della sinusoide e centrata alla frequenza del segnale stesso.
Lo spettro di un segnale periodico é quindi costituito da un'insieme di righe.

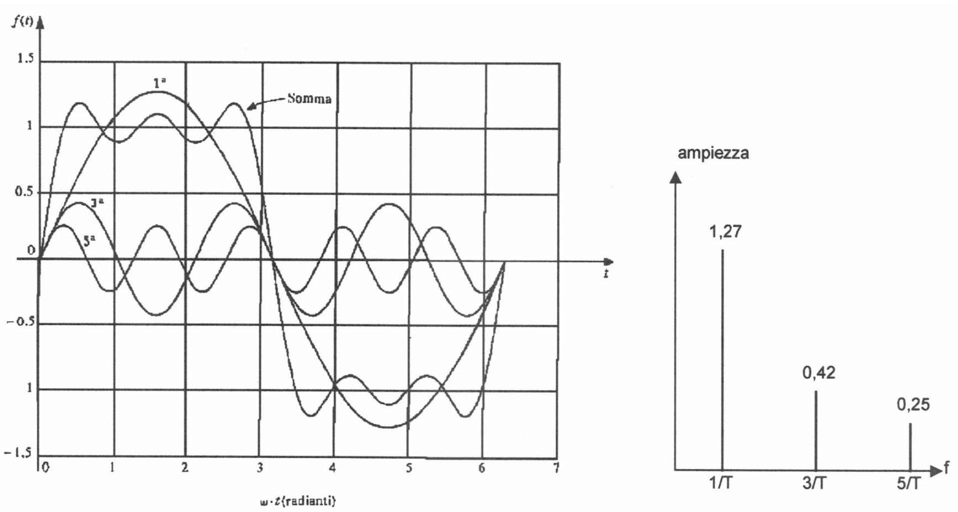


Figura 1. O.q. bipolare dispari a valor medio nullo di ampiezza A=1 e periodo T:
prime tre componenti armoniche della serie di Fourier e relativo spettro.

Addendum

Per le funzioni **pari**: s(t) = s(-t)
Esempi di funzioni pari sono (t^2,t^4,..) e cosωt.

Per le funzioni **dispari** : s(t) = -s(-t)
Esempi di funzioni dispari sono (t,t^3,...) e senωt.

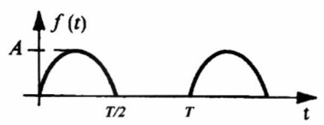
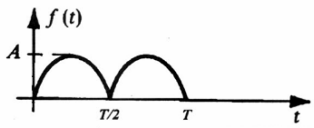
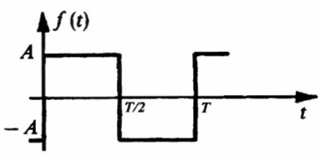
Il prodotto di una funzione pari per una dispari dà come risultato una funzione dispari, Il prodotto di due funzioni pari o due funzioni dispari dà come risultato una funzione pari.

Sapendo che $\int_{-T/2}^{+T/2} funzione\, dispari\, dt = 0$

Si può concludere che

Se s(t) **pari**, $B_k = 0$ $\rightarrow \Sigma$ cos
Se s(t) **dispari**, $A_k = 0$ $\rightarrow \Sigma$ sen e $C_0 = 0$.

Alcuni esempi di sviluppo in serie di Fourier sono riportati in tabella 1:

Funzione	f(t)	Sviluppo in serie
Sinusoide a una semionda. $f(t)=\begin{cases} A\cdot sen\omega t; & 0\le t<T/2 \\ 0 ; & T/2\le t<T \end{cases}$		$f(t)=\frac{A}{\pi}+\frac{A}{2}sen\omega t-\frac{2A}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n\omega t}{(2n)^2-1}$ con $T = 2\pi / \omega$
Sinusoide a doppia semionda. $f(t) = A\cdot\lvert sen\omega t\rvert$		$f(t)=\frac{2A}{\pi}+\frac{4A}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n\omega t}{(2n)^2-1}$
Onda quadra bipolare. $f(t)=\begin{cases} A; & 0<t<T/2 \\ -A; & T/2<t<T \end{cases}$		$f(t)=\frac{4A}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{senn\omega t}{n}$ per n dispari

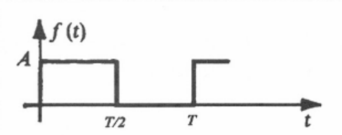
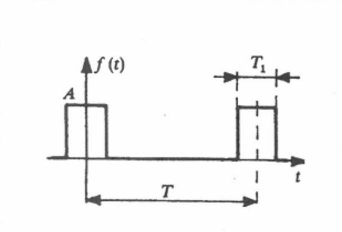
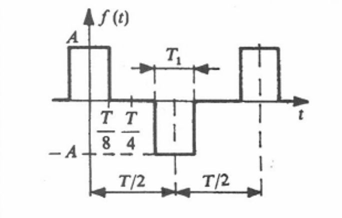
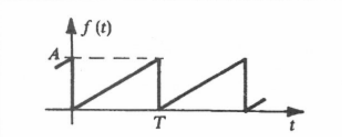
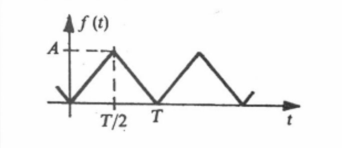
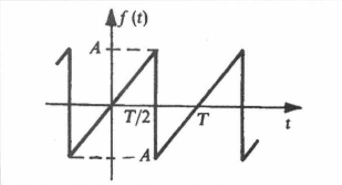
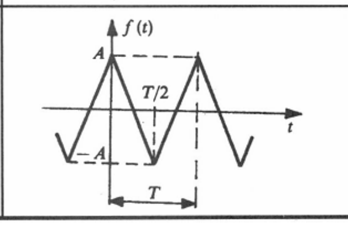
Onda quadra unipolare. $f(t)=\begin{cases} A\,;\ 0<t<T/2 \\ 0\,;\ T/2<t<T \end{cases}$		$f(t)=\frac{A}{2}+\frac{2A}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\text{senn}\omega t}{n}$ per n dispari
Onda rettangolare unipolare Duty - cycle D = T_1/T. $f(t)=\begin{cases} A;\ 0<t<\frac{T1}{2} \\ 0;\ \frac{T_1}{2}<t<T-\frac{T_1}{2} \\ A;\ T-\frac{T_1}{2}<t<T \end{cases}$		$f(t)=A\cdot D+$ $+2A\cdot D\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\text{senn}\pi D}{n\pi D}\right)\cdot\cos n\omega t$ per D = 0.5 codice NRZ per D = 0.25 codice RZ 50 %
Onda rettangolare in codice AMI 50% (Alternative Mark inversion). $T_1=\frac{T}{4}$		$f(t)=A\cdot\left(\frac{\text{senn}\pi/4}{n\pi/4}\right)\cdot\cos n\omega t$ per n dispari
Dente di sega unipolare $f(t)=\frac{A}{T}\cdot t;\ 0<t<T$		$f(t)=\frac{A}{2}-\frac{A}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\text{senn}\omega t}{n}$
Onda triangolare unipolare $f(t)=\begin{cases} \frac{2A}{T}\cdot t;\ 0<t<\frac{T}{2} \\ 2A\left(1-\frac{t}{T}\right);\ \frac{T}{2}<t<T \end{cases}$		$f(t)=\frac{A}{2}-\frac{4A}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\omega t}{n^2}$ per n dispari
Dente di sega unipolare $f(t)=\frac{2A}{T}\cdot T;\ -\frac{T}{2}<t<\frac{T}{2}$		$f(t)=\frac{2A}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\text{senn}\omega t}{n}$
Onda triangolare $f(t)=\begin{cases} A\left(1-\frac{4t}{T}\right);\ 0<t<\frac{T}{2} \\ A\left(-3+\frac{4t}{T}\right);\ \frac{T}{2}<t<T \end{cases}$		$f(t)=\frac{8A}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\omega t}{n^2}$ per n dispari

Tabella 1. Sviluppo in serie di Fourier.

LA TRASFORMATA DI FOURIER

La trasformata di Fourier è un operatore matematico che consente di trasformare una funzione del tempo f(t) periodica o non periodica in una funzione F(jω) di variabile complessa.
Valgono le seguenti relazioni:

$$F(j\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-j\omega t}\, dt \qquad \text{e} \qquad f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega$$

La prima relazione è nota come **trasformata di Fourier** o *integrale di Fourier*, la seconda è nota come **antitrasformata di Fourier**.
Si indicano nel seguente modo: $F(j\omega)=\mathscr{F}[f(t)]$ e $f(t)=\mathscr{F}^{-1}[F(j\omega)]$

Operazione	Segnale	Trasformata di Fourier
	$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t}d\omega$	$X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$
	$y(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} Y(\omega)e^{j\omega t}d\omega$	$Y(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} y(t)e^{-j\omega t}dt$
1. *Amplificazione*	$Ax(t)$	$AX(\omega)$
2. *Inversione asse tempi*	$x(-t)$	$X(-\omega)$
3. *Coniugazione*	$x^*(t)$	$X^*(-\omega)$
4. *Anticipo o ritardo*	$x(t \pm \vartheta)$	$X(\omega)e^{\pm j\omega\vartheta}$
5. *Traslazione in frequenza*	$x(t)e^{j\omega_0 t}$	$X(\omega-\omega_0)$
6. *Derivazione*	$\dot{x}(t)$	$j\omega X(\omega)$
7. *Integrazione*	$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$	$\frac{X(\omega)}{j\omega}+\pi X(0)\delta(\omega)$
8. *Convoluzione*	$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t-\tau)\,d\tau$	$X(\omega)Y(\omega)$
9. *Prodotto*	$x(t)\cdot y(t)$	$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(a)Y(\omega-a)da$
10. *Autocorrelazione*	$\int_{-\infty}^{\infty} x(t+\tau)x^*(t)dt$	$\|X(\omega)\|^2$
11. *Mutua correlazione*	$\int_{-\infty}^{\infty} x(t+\tau)y^*(t)dt$	$X(\omega)Y^*(\omega)$
12. *Dualità*	$X(t)$	$2\pi x(-\omega)$

Tabella 2. Proprietà della trasformata di Fourier.

In tabella 3 sono riportati alcuni esempi di spettro di segnali più comuni per le TLC.

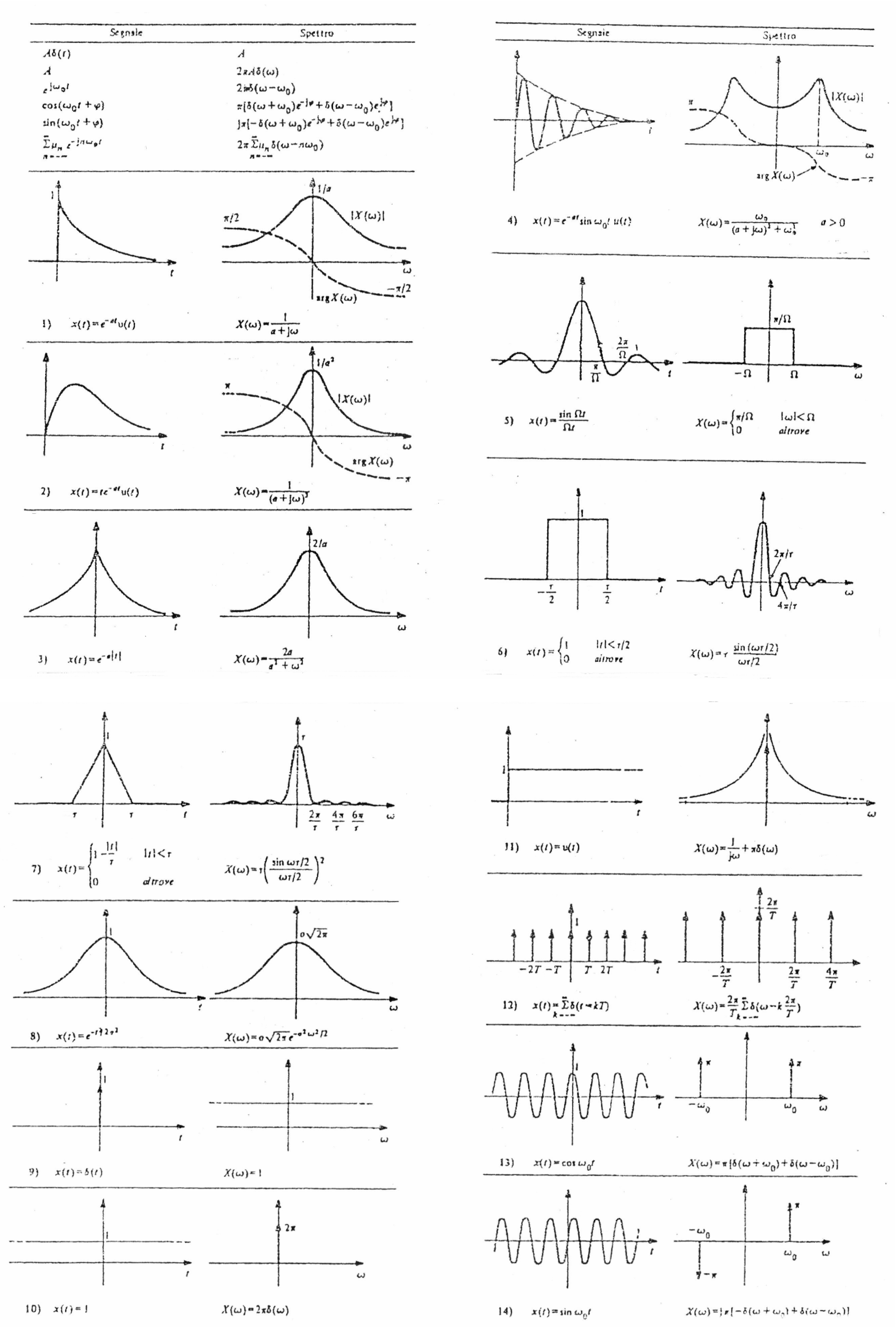


Tabella 3. Esempi di spettri.