# Appunti di Scienza delle Costruzioni

Capitolo 04c

Equazioni indefinite di equilibrio

**DISCLAMER GENERALE:**

L'autore - PioApocalypse - non si assume alcuna responsabilità per l'uso improprio dei contenuti di questo documento, né si ritiene responsabile della performance - positiva o negativa che sia - dello studente in sede d'esame.

Il materiale didattico qui fornito è da considerarsi come un supplemento al materiale indicato dal docente della materia, e trova le sue utilità principali nel riepilogo di lunghi segmenti del programma e nella spiegazione di determinati argomenti in cui lo studente potrebbe aver riscontrato difficoltà. Alcuni termini e semplificazioni qui utilizzati potrebbero non essere idonei durante la discussione degli argomenti del corso con il docente in sede d'esame, e sono proposti solo al fine di aiutare lo studente con la comprensione della materia.

Si prega, infine, di segnalare eventuali errori trovati all'interno del documento all'indirizzo e-mail indicato sulla repository ufficiale, presso la quale è anche possibile trovare un link per chiunque desiderasse fare una piccola donazione all'autore.

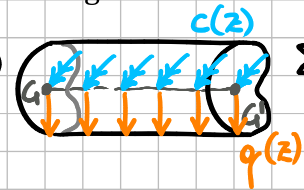
Si ringrazia in anticipo per la cooperazione.

- PioApocalypse

# EQUAZIONI INDEFINITE DI EQUILIBRIO
## (associate al modello monodimensionale di trave)

Le equazioni indefinite di equilibrio della trave sono il caso particolare delle più generali equazioni indefinite di equilibrio che abbiamo visto nello studio della meccanica del continuo.
Nel dettaglio, si esamina l'equilibrio di un elemento di trave di lunghezza infinitesima sotto assegnate forze generalizzate esterne e sollecitazioni interne.

$\Sigma^-(z)$ (o $\Sigma$)



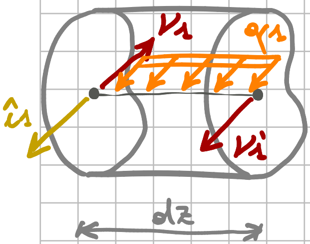

$\Sigma^+(z+dz)$ (o $\Sigma'$)

Siano assegnati i carichi distribuiti

$q(z)$ $[N\cdot m^{-1}]$ e $c(z)$ $[N]$

FORZA PER UNITA' DI LUNG. — COPPIA PER UNITA' DI LUNG.

Imponiamo l'equilibrio alla traslazione lungo un asse qualsiasi, supponiamo l'asse 1 (NDR: pur di non doverlo indicare con pedice generico):




$$\text{EQ.:}\; -\nu_1(z) + \nu_1(z+dz) + q_1\,dz = 0$$

$$\hookrightarrow \nu_1(z+dz) = \nu_1(z) + \frac{d\nu_1(z)}{dz}\,dz + \cancel{o(dz)}^{\,0}$$

$$\text{Dunque: } \frac{d\nu_1(z)}{dz}\,dz + q_1\,dz = 0$$

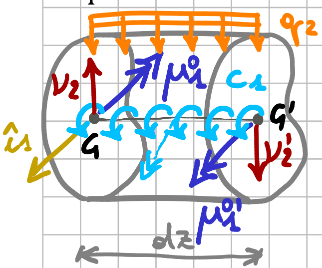
$$\text{cioè: } \Delta T_x = -q_1 \Delta z, \quad \text{ovvero: } \frac{dT_x}{dz} = -q_1$$

**...che sono formule che useremo sistematicamente nella risoluzione dei sistemi iso- e iperstatici.**

Ripetendo lo stesso calcolo su tutti e 3 gli assi della terna:

$$\boxed{\Delta T_x(z) = -\int_0^z q_x\,dz \qquad \Delta T_y(z) = -\int_0^z q_y\,dz \qquad \Delta N(z) = -\int_0^z p_z\,dz}$$

Imponiamo ora solo l'equilibrio alla rotazione attorno ad un asse qualsiasi, supponiamo l'asse 1:




$$\text{EQ.:}^{(G)}\; -\mu_1^o(z) + \mu_1^o(z+dz) + c_1(z)\cdot dz - \nu_2(z+dz)\cdot dz - \cancel{q_2\frac{dz^2}{2}}^{\,0} = 0$$

$$\mu_1^o(z+dz) \approx \mu_1^o(z) + \frac{d\mu_1^o(z)}{dz}\,dz \qquad \hookrightarrow \nu_2(z+dz)\cdot dz \approx \nu_1(z)\cdot dz + \cancel{\frac{d\nu_1(z)}{dz}\,dz^2}^{\,0}$$

$$\text{Dunque: } \frac{d\mu_1^o(z)}{dz}\,dz + c_1(z)\cdot dz - \nu_2(z)\cdot dz = 0$$

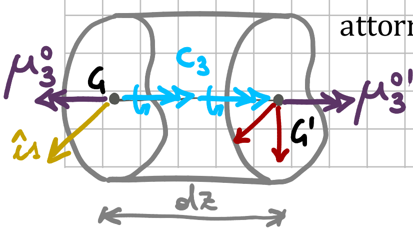
$$\text{cioè: } \frac{dM_x}{dz} = T_y(z) - c_1(z)$$

Ripetendo lo stesso calcolo sull'asse y:

$$\boxed{\Delta M_x(z) = \int_0^z \left(T_y(z) - c_x(z)\right)dz \qquad \Delta M_y(z) = \int_0^z \left(T_x(z) - c_y(z)\right)dz}$$

## E IL MOMENTO TORCENTE?

Gli sforzi normale e di taglio non incidono sulla rotazione attorno all'asse z; l'equilibrio assumerà questa forma:




$$\text{EQ.:}^{(G)}\; \cancel{-\mu_3^o(z)} + \cancel{\mu_3^o(z)} + \frac{d\mu_3^o(z)}{dz} + \overset{0}{\ldots} + c_3(z)\cdot dz = 0$$

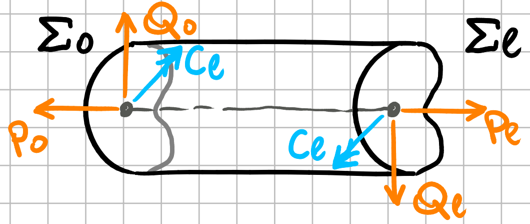
$$\hookrightarrow \frac{dM_t}{dz} = -c_3(z) \longrightarrow \boxed{\Delta M_t(z) = -\int_0^z c_3(z)\cdot dz = 0}$$

# CONDIZIONI A CONTORNO GENERALIZZATE (DI TIPO STATICO)

In forma vettoriale possiamo riassumere quanto detto sopra come:

$$\frac{d}{dz}\underline{\nu}(z) + \underline{q}(z) = 0 \quad [N m^{-1}] \qquad \frac{d}{dz}\underline{\mu}(z) + \underline{c}(z) - \underline{\nu}(z)\wedge \hat{e}_3 = 0 \quad [N]$$

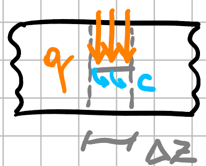
Avendo a che fare con equazioni differenziali, abbiamo bisogno di conoscere condizioni a contorno per poter svolgere i calcoli in modo completo. Le condizioni a contorno di tipo statico possono essere scritte sulle due basi della trave, dove magari conosciamo bene i carichi applicati, come ad esempio una forza esterna di massa (quale il peso di un grave appoggiato) o di superficie (quale una reazione vincolare). Nel problema piano - dove assumiamo nulli il taglio lungo x, il momento flettente attorno a y e il momento torcente attorno a z, rimaniamo con le seguenti condizioni a contorno:




$$\Sigma_0: \begin{cases} N(0) = -P_0 \\ T(0) = -Q_0 \\ M(0) = -C_0 \end{cases} \qquad \Sigma_\ell: \begin{cases} N(\ell) = P_\ell \\ T(\ell) = Q_\ell \\ M(\ell) = C_\ell \end{cases}$$

# CARICHI CONCENTRATI

È doveroso premettere che carichi (forze e coppie) concentrati nella realtà non possono esistere, perché deve sempre esserci una superficie di contatto maggiore di zero tra due corpi affinché si possa trasmettere un carico. Analiticamente parlando, il modello di carico concentrato è corretto.



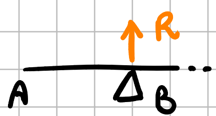

$$\underline{Q}(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \underline{q}(z)\cdot\Delta z; \quad \text{per le coppie:} \quad \underline{C}(z) = \lim_{\Delta z\to 0} \underline{c}(z)\cdot \Delta z;$$

Come cambiano dunque le equazioni indefinite di equilibrio?

$$\begin{cases} \dfrac{d\underline{\nu}}{dz} + \underline{q} = \underline{0} \\ \dfrac{d\underline{\mu}_0}{dz} + \underline{c} - \underline{\nu}\wedge\hat{e}_3 = \underline{0} \end{cases} \rightsquigarrow \begin{array}{l} \lim_{\Delta z\to 0}\left(\dfrac{d\underline{\nu}}{dz}\Delta z + \underline{q}\Delta z = \underline{0}\right) \\ \lim_{\Delta z\to 0}\left(\dfrac{d\underline{\mu}_0}{dz}\Delta z + \underline{c}\Delta z - \underline{\nu}\wedge\hat{e}_3\Delta z = \underline{0}\right) \end{array}$$

$$\text{Cioè:} \begin{cases} \Delta\underline{\nu}(z) + \underline{Q}(z) = 0 \rightarrow \underline{\nu}(z^+) - \underline{\nu}(z^-) = -\underline{Q}(z) \\ \Delta\underline{\mu}_0(z) + \underline{C}(z) = 0 \rightarrow \underline{\mu}_0(z^+) - \underline{\mu}_0(z^-) = -\underline{C}(z) \end{cases}$$

In combinazione con le condizioni a contorno di tipo statico, otterremo situazioni del genere:




TRATTO AB: scarico $\rightarrow T(B) = T(A) = 0$

PUNTO B: $T(B^+) = T(B^-) - (-R) \ldots$

**Per il problema piano (sempre y-z):**

$$\begin{cases} N(z^+) = N(z^-) - P(z) \\ T(z^+) = T(z^-) - Q(z) \\ M(z^+) = M(z^-) - C(z) \end{cases}$$

**Equazioni di equilibrio del nodo:**

$$\Sigma_0 \begin{cases} N(0^+) = N(0^-) - P_0 \\ T(0^+) = T(0^-) - Q_0 \\ M(0^+) = M(0^-) - C_0 \end{cases} \qquad \Sigma_\ell \begin{cases} N(\ell^+) = N(\ell^-) - P_\ell \\ T(\ell^+) = T(\ell^-) - Q_\ell \\ M(\ell^+) = M(\ell^-) - C_\ell \end{cases}$$

# RIEPILOGO (PROBLEMA PIANO 2-3, o y-z)

$$\left.\begin{aligned} u_y(x,y,z) &= v(z) - \varphi_x \cdot z \\ u_z(x,y,z) &= w(z) + \varphi_x \cdot y \end{aligned}\right\} \text{CAMPO CINEMATICO}$$

EQUAZ. INDEFINITE DI CONGRUENZA

$$\left\{\begin{aligned} \varepsilon(z) &= \frac{dw(z)}{dz} \\ \gamma(z) &= \frac{dv(z)}{dz} + \varphi(z) \\ \theta(z) &= \frac{d\varphi(z)}{dz} \end{aligned}\right.$$

EQUAZ. DI CONGRUENZA ESTERNA (C.C. TIPO CIN.)

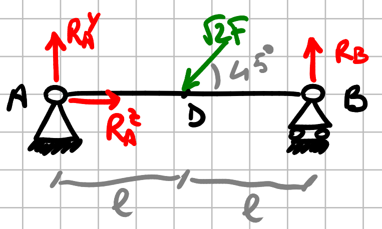
$$\left\{\begin{aligned} v(0) &= v_0^* \\ w(0) &= w_0^* \\ \varphi(0) &= \varphi_0^* \end{aligned}\right.$$

$$\left.\begin{aligned} dN(z) + p(z)\,dz &= 0 \\ dT(z) + q(z)\,dz &= 0 \\ dM(z) + c(z)\,dz - T(z)\,dz &= 0 \end{aligned}\right\} \text{EQUAZ. INDEFINITE DI EQUILIBRIO}$$

CONDIZ. A CONTORNO GENERALIZZATE

$$\Sigma_0: \left\{\begin{aligned} N(0) &= -P_0 \\ T(0) &= -Q_0 \\ M(0) &= -C_0 \end{aligned}\right. \qquad \Sigma_\ell: \left\{\begin{aligned} N(\ell) &= P_\ell \\ T(\ell) &= Q_\ell \\ M(\ell) &= C_\ell \end{aligned}\right.$$

$$\left.\begin{aligned} &\Sigma_0 \left\{\begin{aligned} N(0^+) &= N(0^-) - P_0 \\ T(0^+) &= T(0^-) - Q_0 \\ M(0^+) &= M(0^-) - C_0 \end{aligned}\right. \\ &\Sigma_\ell \left\{\begin{aligned} N(\ell^+) &= N(\ell^-) - P_\ell \\ T(\ell^+) &= T(\ell^-) - Q_\ell \\ M(\ell^+) &= M(\ell^-) - C_\ell \end{aligned}\right. \end{aligned}\right\} \text{EQUAZ. DI EQUILIBRIO DEL NODO}$$




CONDIZ. A CONTORNO:

$$\Sigma(z=0) = \Sigma_A$$

$$\text{STATICHE} \left\{\begin{aligned} N(0) &= -R_A^z \text{ (compressione)} \\ T(0) &= +R_A^y \\ M(0) &= 0 \text{ (equilibrio)} \end{aligned}\right. \qquad \text{CINEMATICHE} \left\{\begin{aligned} v_A &= v_A^* \\ w_A &= w_A^* \\ &- \end{aligned}\right.$$

$$\Sigma(z=\ell) = \Sigma_D$$

$$\text{STATICHE} \left\{\begin{aligned} N(\ell^+) &= N(\ell^-) + F = 0 \\ T(\ell^+) &= T(\ell^-) - F = -\frac{F}{2} \\ M(\ell^+) &= M(\ell^-) = R_A^y \cdot \ell = \frac{F\ell}{2} \end{aligned}\right.$$

$$\Sigma(z=2\ell) = \Sigma_B$$

$$\text{STATICHE} \left\{\begin{aligned} N(2\ell^+) &= N(2\ell^-) = 0 \ \checkmark \\ T(2\ell^+) &= T(2\ell^-) + R_B = 0 \ \checkmark \\ M(2\ell^+) &= M(2\ell^-) - \frac{F\ell}{2} = 0 \ \checkmark \end{aligned}\right. \qquad \text{CINEMATICHE} \left\{ v_B = v_B^* \right.$$