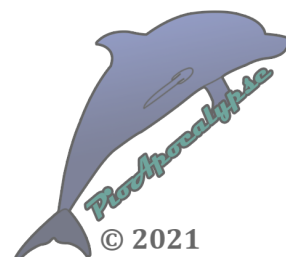


Appunti di Scienza delle Costruzioni

Capitolo 06b

Carico critico euleriano



I contenuti del seguente documento sono protetti sotto licenza [Creative Commons BY-NC-SA 4.0](#): sono quindi ammesse la **condivisione**, la **ridistribuzione** e la **modifica** del materiale ivi contenuto, sotto le seguenti condizioni:

- **Attribuzione**: nel documento originale e nelle sue modifiche deve sempre figurare il nome reale o lo pseudonimo dell'autore, nonché la bibliografia originale;
- **Non-Commerciale**: è vietato qualsiasi utilizzo del presente documento e dei suoi contenuti a scopo commerciale e/o pubblicitario; ciò include la rivendita dello stesso o di parte dei suoi contenuti, ma è permessa la vendita a prezzo di stampa;
- **Share-Alike**: (it: "*Condividi allo stesso modo*") qualsiasi ridistribuzione del documento modificato o di parte di esso deve essere reso disponibile sotto la stessa licenza dell'originale, o sotto licenza ad essa compatibile.

Si chiede inoltre, anche se non è espressamente vietato, di non ridistribuire tale documento o parte dello stesso su piattaforme cloud private per pubblicizzare associazioni o eventi.

DISCLAIMER GENERALE:

L'autore - [PioApocalypse](#) - non si assume alcuna responsabilità per l'uso improprio dei contenuti di questo documento, né si ritiene responsabile della performance - positiva o negativa che sia - dello studente in sede d'esame.

Il materiale didattico qui fornito è da considerarsi come un supplemento al materiale indicato dal docente della materia, e trova le sue utilità principali nel riepilogo di lunghi segmenti del programma e nella spiegazione di determinati argomenti in cui lo studente potrebbe aver riscontrato difficoltà. Alcuni termini e semplificazioni qui utilizzati potrebbero non essere idonei durante la discussione degli argomenti del corso con il docente in sede d'esame, e sono proposti solo al fine di aiutare lo studente con la comprensione della materia.

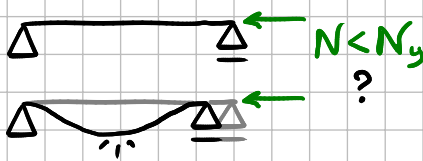
Si prega, infine, di segnalare eventuali errori trovati all'interno del documento all'indirizzo e-mail indicato sulla [repository ufficiale](#), presso la quale è anche possibile trovare un link per chiunque desiderasse fare una piccola donazione all'autore.

Si ringrazia in anticipo per la cooperazione.

- PioApocalypse

CARICO CRITICO EULERIANO

È possibile che una trave sufficientemente snella soggetta ad uno sforzo di compressione ceda sotto un carico molto minore rispetto al carico limite per una trave di quella geometria e di quel materiale.



Dobbiamo tenere conto anche dell'equilibrio delle inflessioni trasversali, non solo degli spostamenti rettilinei.

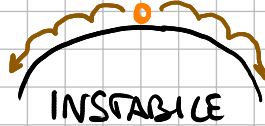
Infatti, un carico di compressione può comportare una flessione della trave che ne rende più facile la rottura.

Vediamo un attimo come classifichiamo l'equilibrio in un corpo qualsiasi:



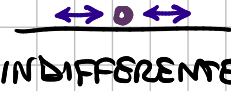
STABILE

In seguito a perturbazioni, il corpo torna alla config. iniziale



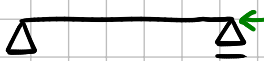
INSTABILE

In seguito a perturbazioni, il corpo si allontana dalla config. iniziale



INDIFFERENTE

In seguito a perturbazioni, il corpo resta in equilibrio



Per studiare la stabilità elastica è sufficiente supporre che siano trascurabili le derivate prime degli spostamenti e moderate le conseguenti rotazioni (cioè non trascurabili fino al secondo ordine); in questo caso, il carico di punta crea un "ingobbamento" che necessita di essere studiato: non possiamo più confondere la configurazione iniziale da quella deformata, e dobbiamo anzi studiare proprio quest'ultima.



$$M_{ext} = F \cdot v(z)$$

Al tempo stesso abbiamo anche un momento opposto, detto per questo STABILIZZANTE, che nel modello di E-B vale:

$$M_s = -EI_x \frac{d^2 v}{dz^2}$$

$M_{ext} < M_s \rightarrow$ Equilibrio stabile

$M_{ext} = M_s \rightarrow$ Equilibrio indifferente

$M_{ext} > M_s \rightarrow$ Equilibrio instabile

$$N_{cr} \cdot v(z) = -EI_x \frac{d^2 v}{dz^2}$$

Se imponiamo la condizione di equilibrio indifferente, la forza esterna F è pari proprio al CARICO CRITICO, inteso come sforzo normale applicato tra A e B.

$$v'' + \frac{N_{cr}}{EI_x} v = 0 \rightarrow \xi^2 + \alpha^2 = 0 \rightarrow v(z) = A \sin(\alpha z) + B \cos(\alpha z)$$

Scegliamo le soluzioni banali: $v = A = B = 0$

$$\text{c.c. } \begin{cases} v(0) = 0 \\ v(\lambda) = 0 \end{cases} \rightarrow v(0) = B = 0 \quad v(\lambda) = A \sin(\alpha \lambda) = 0 \rightarrow \alpha \lambda = 0 + k\pi$$

λ non è necessariamente 1!

I carichi critici sono quindi una successione numerica. Nella realtà, però, a noi interessa solo il primo carico critico - ovviamente, siccome oltre tale carico la trave va incontro a cedimento; impostiamo quindi $k = 1$:

$$\alpha \lambda = \pi \rightarrow (\alpha \lambda)^2 = \pi^2 \rightarrow \frac{N_{cr}}{EI_x} \lambda^2 = \pi^2 \rightarrow N_{cr} = \pi^2 \frac{EI_x}{\lambda^2}$$

CARICO CRITICO EULERIANO

Il CARICO CRITICO EULERIANO è quel valore della forza di compressione oltre il quale essa porta indefinitamente ad inflessione il solido snello su cui agisce, generando instabilità a carico di punta. [NOTA: se il professore chiede l'instabilità nella trave si sta riferendo a questo argomento.] λ non rappresenta necessariamente la lunghezza della trave, in base a come abbiamo definito la condizione al contorno. Nella teoria di Eulero, λ è la LUNGHEZZA LIBERA DI INFLESSIONE, tale che, appunto:

$$v(0)=0, v(\lambda)=0 \text{ o semplicemente } v(z=\lambda-z_0)=0$$

La verifica di sicurezza in puntoni particolarmente snelli richiede innanzitutto che: $N \leq \frac{N_{cr}}{\gamma}$

Ma come si identifica una trave "particolarmente snella"?

Esiste un PARAMETRO DI SNELLEZZA λ' così definito:

$$\lambda' = \frac{\lambda}{\rho_{min}} \text{ con } \rho_{min} = \text{RAGGIO D'INERZIA MINORE}$$

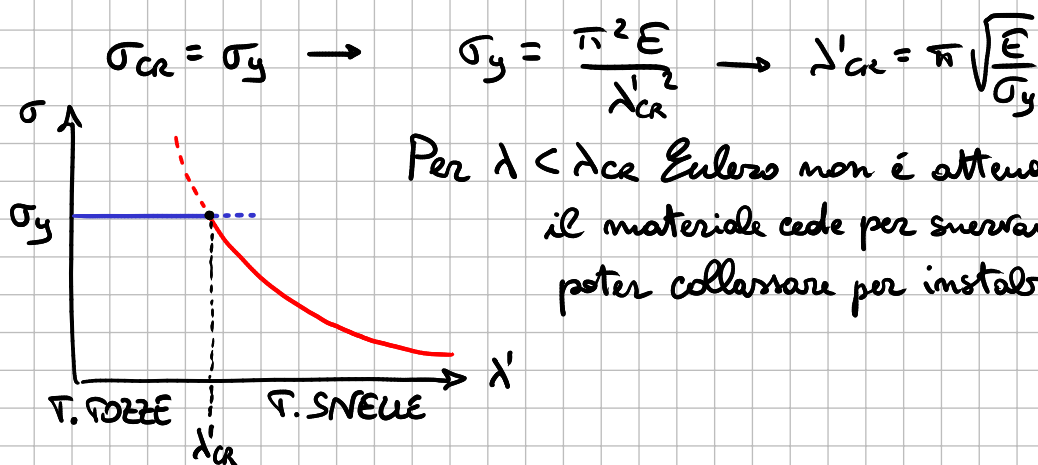
$$\text{Se } \rho_{min} = \min(\rho_x, \rho_y) \left\{ \begin{array}{l} \rho_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} \\ \rho_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} \end{array} \right. \text{ allora } \lambda'^2 = \frac{\lambda^2}{I_x} \text{ oppure } \lambda'^2 = \frac{\lambda^2}{I_y}$$

Sostituiamo nella formula del carico critico Euleriano:

$$N_{cr} = \pi^2 \frac{EI}{\lambda^2} = \frac{\pi^2 EI}{\lambda'^2 \min\{I_x, I_y\}} \quad I? \text{ è proprio } = \min\{I_x, I_y\}$$

$$\text{Dunque: } N_{cr} = \pi^2 \frac{EA}{\lambda'^2} \rightarrow \sigma_{cr} = \frac{N_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 E}{\lambda'^2}$$

Ragioniamo un attimo su quanto appena osservato: abbiamo scritto una formula per una tensione normale critica oltre il quale la trave va incontro a cedimento, che però tende rapidamente ad infinito per TRAVI TOZZE (con un basso parametro di snellezza); ovviamente, ci sarà un limite entro il quale la σ di cedimento sarà ancora la σ limite di von Mises / Tresca, e oltre questo limite sarà invece valida la formula di Eulero. Come troviamo questa "snellezza critica"? Imponendo proprio:



Per $\lambda < \lambda_{cr}$ Eulero non è attendibile ($\sigma_{cr} \gg \sigma_y$): il materiale cede per snervamento prima di poter collassare per instabilità.

NELLA REALTÀ...



Nella realtà i materiali - a causa dei difetti reticolari - tendono a cedere prima di quanto previsto: per questo esistono i coefficienti di sicurezza.