Appunti di Scienza delle Costruzioni

Capitolo 03b

Vincoli e labilità

PioApocalypse
© 2021

github.com/PioApocalypse/Triennalia

I contenti del seguente documento sono protetti sotto licenza ***Creative Commons BY-NC-SA 4.0***: sono quindi ammesse la **condivisione**, la **ridistribuzione** e la **modifica** del materiale ivi contenuto, sotto le seguenti condizioni:

- **Attribuzione**: nel documento originale e nelle sue modifiche deve sempre figurare il nome reale o lo pseudonimo dell'autore, nonché la bibliografia originale;
- **Non-Commerciale**: è vietato qualsiasi utilizzo del presente documento e dei suoi contenuti a scopo commerciale e/o pubblicitario; ciò include la rivendita dello stesso o di parte dei suoi contenuti, ma è permessa la vendita a prezzo di stampa;
- **Share-Alike**: (it: "*Condividi allo stesso modo*") qualsiasi ridistribuzione del documento modificato o di parte di esso deve essere reso disponibile sotto la stessa licenza dell'originale, o sotto licenza ad essa compatibile.

Si chiede inoltre, anche se non è espressamente vietato, di non ridistribuire tale documento o parte dello stesso su piattaforme cloud private per pubblicizzare associazioni o eventi.

DISCLAMER GENERALE:

L'autore - PioApocalypse - non si assume alcuna responsabilità per l'uso improprio dei contenuti di questo documento, né si ritiene responsabile della performance - positiva o negativa che sia - dello studente in sede d'esame.

Il materiale didattico qui fornito è da considerarsi come un supplemento al materiale indicato dal docente della materia, e trova le sue utilità principali nel riepilogo di lunghi segmenti del programma e nella spiegazione di determinati argomenti in cui lo studente potrebbe aver riscontrato difficoltà. Alcuni termini e semplificazioni qui utilizzati potrebbero non essere idonei durante la discussione degli argomenti del corso con il docente in sede d'esame, e sono proposti solo al fine di aiutare lo studente con la comprensione della materia.

Si prega, infine, di segnalare eventuali errori trovati all'interno del documento all'indirizzo e-mail indicato sulla repository ufficiale, presso la quale è anche possibile trovare un link per chiunque desiderasse fare una piccola donazione all'autore.

Si ringrazia in anticipo per la cooperazione.

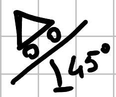
- PioApocalypse

VINCOLI ESTERNI E LABILITÁ

I VINCOLI sono dispositivi meccanici che limitano le configurazioni che un sistema meccanico può assumere nel tempo e nello spazio. Nell'ambito della teoria tecnica della trave lavoreremo solo con vincoli supposti:

- SCLERONOMI (che non dipendano dal tempo);
- OLONOMI (limitano solo le posizioni che il sistema può assumere);
- LISCI (in assenza di attriti interni);
- BILATERALI (il loro effetto sul sistema può essere espresso con un'equazione).

$$f(r_1, r_2, \dots, r_m, t) = 0$$

Es.: 

$x - y = 0$

Dal punto di vista analitico, possiamo scrivere un vincolo come una funzione lineare di questo tipo:

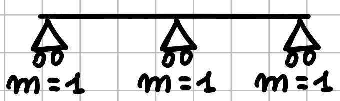
$$\Phi_i(\underline{v}, \varphi) = 0 \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, m\}$$ dove $m \doteq$ "MOLTEPLICITÁ DEL VINCOLO"

La MOLTEPLICITÀ del vincolo indica il numero di gradi di libertà che lo stesso sopprime localmente.

3D: $1 \le m \le 6$ 2D: $1 \le m \le 3$ GENERALE: $1 \le m \le \#_{GDL}$

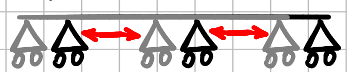
Attenzione: un vincolo sopprime m gradi di libertà, ma non è detto che un sistema ad n gradi di libertà sia fissato completamente nel momento in cui $s \ge n$.

Se $s = \sum_i m_i$:

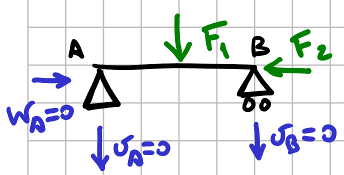


$\left.\begin{matrix} s = 3 \\ n = 3 \end{matrix}\right| s \ge n$

«Eppur si muove»

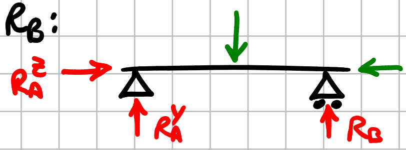


I vincoli possono essere sempre sostituiti con le proprie REAZIONI VINCOLARI, forze di contatto che si originano tra il sistema ed il vincolo, e che variano in risposta ai carichi applicati sul corpo.



Affinchè siano rispettate le condizioni a contorno di tipo cinematico, $\exists\, R_A^Y, R_A^Z, R_B$:

$$\begin{cases} \sum F_A^Z = 0 \\ \sum F_A^Y = 0 \\ \sum F_B^Y = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} R_A^Z = F_2 \\ R_A^Y = R_B = \dfrac{F_1}{2} \end{cases}$$



Se io variassi la posizione oppure l'intensità di una delle due forze esterne, le reazioni vincolari varierebbero al fine di mantenere vere le equazioni di congruenza esterne (le condizioni a contorno).

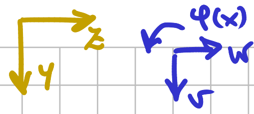
Se si suppone che i vincoli e le rispettive reazioni vincolari siano applicati nel baricentro della sezione retta interessata, si può procedere a rappresentare la trave piana come una linea d'asse.

La reazione vincolare è direzionata come lo spostamento della sezione retta che viene totalmente impedito dal vincolo, e possiamo dunque scrivere una cosa del genere:

Vogliamo $\underline{v} = 0$ (cost.) $\longrightarrow \underline{a} = \dfrac{d^2 \underline{v}}{dt^2} = 0 \longrightarrow \underline{R} + \underline{\Phi} = \underline{0}$ con $\underline{\Phi} = -\lambda \underline{R}$

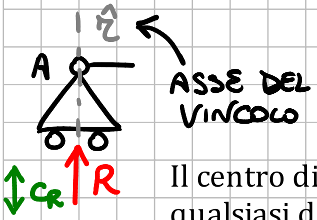
Per vincoli unilaterali possiamo prevedere subito il verso della reazione vincolare, perché questa sarà sempre opposta allo spostamento che tenta di impedire; nei vincoli bilaterali, dove il verso della reazione non è più noto a priori, è necessario studiare l'equilibrio sul sistema.

Ovviamente, un vincolo di molteplicità m possiede m reazioni vincolari.



CARTA DEI VINCOLI ESTERNI

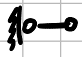
CARRELLO (m = 1)

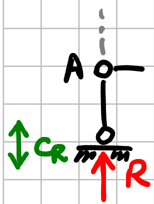


Il carrello è un vincolo che sopprime la traslazione della sezione retta lungo la direzione dell'ASSE; sono ancora ammesse la traslazione lungo la direzione ortogonale e la rotazione attorno al punto A.
Ha quindi molteplicità pari a 1.

Il centro di rotazione deve giacere lungo l'asse del carrello, e può essere un punto qualsiasi dello stesso: si hanno quindi ∞^1 possibili centri di rotazione.
In base all'entità dello spostamento, il centro può essere un punto proprio o improprio dell'asse.
Le condizioni di vincolo sono: $v_A = 0$

PENDOLO (m = 1)

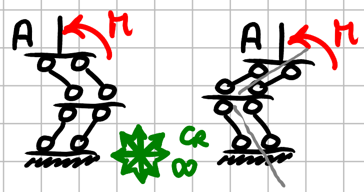




Il pendolo ammette la rotazione della sezione retta attorno al punto A, e di se stesso attorno alla propria cerniera. Per spostamenti infinitesimi e quindi al fine dello studio della labilità di un sistema, è a tutti gli effetti equivalente al carrello.

$v_A = 0$

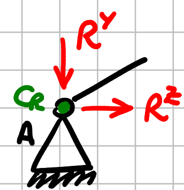
DOPPIO - DOPPIO PENDOLO (m = 1)



Questo particolare vincolo, talvolta schematizzato solo con un piccolo quadrato, è costituito da una coppia di doppi pendoli disposti in serie, i cui assi non sono allineati. Esso ammette la traslazione lungo le direzioni ortogonali ai due assi, e poiché questi non sono allineati sono ammesse traslazioni infinitesime lungo qualsiasi direzione; è soppressa la sola rotazione della sezione retta, pertanto la reazione vincolare assumerà la forma di un momento.
Il centro di rotazione è un punto improprio (all'infinito) di una retta impropria parallela all'asse di uno qualsiasi dei due doppi pendoli. La condizione del vincolo è:

$\varphi_A = 0$

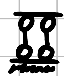
CERNIERA (m = 2)

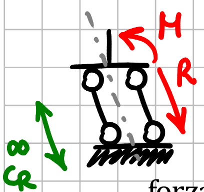


La cerniera vincola la sezione retta a muoversi di rotazione pura, impedendo quasiasi traslazione della stessa. Il centro di rotazione esiste, è assoluto, è unico, è proprio e coincide con la cerniera stessa.
Ha molteplicità pari a 2, e le sue due reazioni vincolari sono entrambe forze, applicate sulla cerniera e ortogonali tra loro. Le condizioni del vincolo sono:

$$\begin{cases} v_A = 0 \\ w_A = 0 \end{cases}$$

DOPPIO PENDOLO (m = 2)

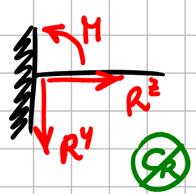




Il doppio pendolo impedisce contemporaneamente la rotazione della sezione retta e la traslazione lungo la direzione dell'asse; permette invece la traslazione lungo la direzione ortogonale all'asse. Chiaramente, il centro di rotazione sarà un punto improprio (all'infinito) della direzione dell'asse; le reazioni vincolari saranno una forza ed una coppia. Le condizioni sono:

$v_A^{(z)} = 0; \quad \varphi_A = 0$

INCASTRO (m = 3)



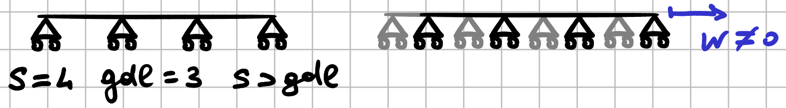
Infine, l'incastro sopprime tutti i gradi di libertà della sezione retta, impedendone qualsiasi movimento. Le reazioni vincolari sono due forze ed un momento; non esiste alcun centro di rotazione.
Le condizioni sono:

$$\begin{cases} v_A = 0 \\ w_A = 0 \\ \varphi_A = 0 \end{cases}$$

LABILITÁ

Una struttura è detta LABILE se ammette spostamenti rigidi infinitesimi (quindi a meno di deformaz.). Applicati determinati vincoli al sistema, possiamo poi verificarne la labilità. Se indico con la lettera s la somma delle molteplicità di tutti i vincoli:

- $s < gdl$: la struttura è labile per insufficienza di vincoli, in quanto non si hanno abbastanza vincoli per bloccare totalmente la struttura (condizione sufficiente di labilità);
- $s \geq gdl$: la struttura può essere non-labile, ma non ne siamo certi poiché i vincoli potrebbero essere mal posizionati e ammettere comunque spostamenti rigidi infinitesimi (condizione necessaria di non-labilità).



Lo studio della labilità è oggetto del PROBLEMA CINEMATICO, risolvibile con l'algebra lineare introducendo una MATRICE CINEMATICA tale che - in un sistema dai vincoli considerabili perfetti:

$$\underline{\underline{C}} \cdot \underline{s} = \underline{0} \qquad \text{con } \underline{s} \doteq \text{VETTORE DEGLI SPOSTAMENTI}$$

La soluzione é unica se la struttura non é labile. Se $\text{rank}(\underline{\underline{C}}) = 3$, e dunque $\dim(\ker(\underline{\underline{C}})) = 0$ la soluzione é banale.

$$\text{SE } \underline{\underline{C}} \cdot \underline{s} = \underline{0} \iff \underline{s} = 0 \qquad \text{NON-LABILE}$$

Se la soluzione non è unica, e sono ammesse una o più famiglie di soluzioni (esistono una o più infinite soluzioni), allora la struttura è tante volte labile quante sono le famiglie di soluzioni, fino a un numero massimo pari al gdl totale del sistema.

$$\begin{cases} \underline{\underline{C}} \cdot \underline{s} = 0 \\ \underline{s} \neq 0 \end{cases}$$

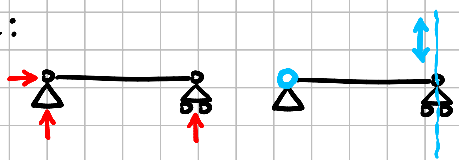
1 VOLTA LABILE: ∞^1 SOLUZIONI
2 VOLTE LABILE: ∞^2 SOLUZIONI
3 VOLTE LABILE: ∞^3 SOLUZIONI

ℓ VOLTE LABILE: ∞^ℓ SOLUZIONI
con $0 \leq \ell \leq gdl$
CASO DI NON-LABILITÁ

METODO GRAFICO PER LO STUDIO DELLA LABILITÁ

Esiste un secondo metodo per studiare la labilità di una struttura, che consiste nella ricerca di un unico centro di rotazione assoluto: se il CRA esiste vuol dire che è ammessa una rotazione rigida infinitesima attorno ad un punto comune, e che quindi la struttura è tante volte labile quanti sono i possibili CRA; se il CRA non esiste la struttura è inequivocabilmente non-labile (condizione sufficiente di non-labilità).

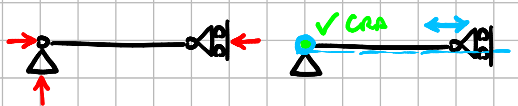
Esempi:



Non esiste un'intersezione tra il CR della cerniera ed il CR del carrello, per cui deduciamo che la struttura è non-labile; verifichiamolo con la matrice cinematica.

$$\begin{cases} v_A = 0 \\ w_A = 0 \\ v_B = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} v_A = 0 \\ w_A = 0 \\ -\varphi_A \cdot \ell = 0 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\ell \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_A \\ w_A \\ \varphi_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\text{rank}(\underline{\underline{C}}) = 3$
NON-LABILE c.v.d

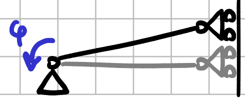


L'asse del carrello interseca la cerniera, per cui esiste un CRA unico: la struttura è 1 volta labile.

$$\begin{cases} v_A = 0 \\ w_A = 0 \\ w_B = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} v_A = 0 \\ w_A = 0 \\ w_A = 0 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_A \\ w_A \\ \varphi_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

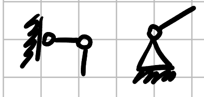
$\text{rank}(\underline{\underline{C}}) = 2$
$\ell = 3 - r(\underline{\underline{C}}) = 1$
1 VOLTA LABILE c.v.d

SPOSTAM. AMMESSO: φ_A

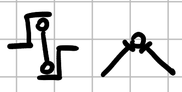


SISTEMI DI TRAVI E VINCOLI INTERNI

Oltre ai vincoli esterni, sistemi di più travi possono contare sul supporto di vincoli interni, dispositivi che collegano tra loro sezioni rette di travi diverse, invece di collegarle all'ambiente esterno.
Una differenza importante è che i vincoli interni non limitano gli spostamenti assoluti delle travi ma sopprimono gli spostamenti reciproci (RELATIVI) tra due o più travi. Per questo motivo, più che di grado di libertà si parla di "grado di sconnessione" della trave vincolata, ma per il resto alcune regole valgono ancora anche per i vincoli interni.



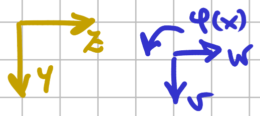
CENTRO DI ROTAZIONE ASSOLUTA | Dimostra labilità



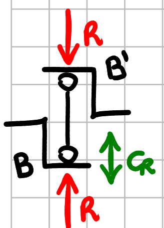
CENTRO DI ROTAZIONE RELATIVA | Dimostra presenza di spostam. relativi

Un sistema di più travi può avere dei centri di rotazione relativa (CRR) e dei centri di rotazione assoluta esistenti ed essere comunque non-labile: si riterranno quindi particolarmente utili i due teoremi delle catene cinematiche presentati nel documento successivo.

CARTA DEI VINCOLI INTERNI



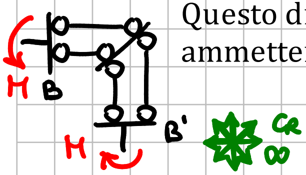
PENDOLO INTERNO ($m=1$)



Il pendolo interno impedisce a due travi di spostarsi reciprocamente lungo la direzione del suo asse; sono invece permesse la traslazione lungo la direzione ortogonale e la rotazione reciproche. Il CR dei vincoli interni è lo stesso dei corrispettivi vincoli esterni.
Le condizioni del pendolo interno sono:

NO SPOSTAM. RECIPROCO $\rightarrow v_B = v_{B'} \rightarrow v_B - v_{B'} = 0$

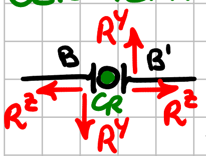
DOPPIO-DOPPIO PENDOLO INTERNO ($m=1$)



Questo dispositivo impedisce la sola rotazione reciproca degli estremi di due travi, ammettendo invece qualsiasi traslazione. Le condizioni di tale vincolo sono:

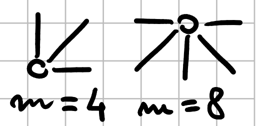
NO ROTAZ. RECIPROCA $\rightarrow \varphi_B = \varphi_{B'} \rightarrow \varphi_B - \varphi_{B'} = 0$

CERNIERA INTERNA ($m=2$)

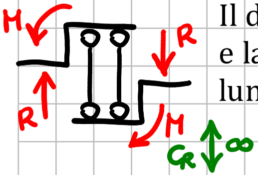


La cerniera interna impedisce qualsiasi traslazione reciproca delle due sezioni collegate; permette esclusivamente la rotazione reciproca.
È possibile inoltre che una cerniera colleghi ben più di due travi contemporaneamente: in tal caso, la molteplicità del vincolo sarà pari a 2 + 2 per ogni tronco aggiuntivo.

$$\begin{cases} v_B - v_{B'} = 0 \\ w_B - w_{B'} = 0 \end{cases}$$



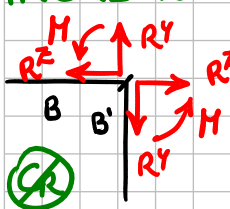
DOPPIO PENDOLO INTERNO ($m=2$)



Il doppio pendolo inteno impedisce la traslazione reciproca lungo la direzione dell'asse e la rotazione reciproca delle due sezioni collegate; permette la traslazione reciproca lungo la direzione ortogonale all'asse. Le condizioni sono:

$$\begin{cases} v_B - v_{B'} = 0 \\ \varphi_B - \varphi_{B'} = 0 \end{cases}$$

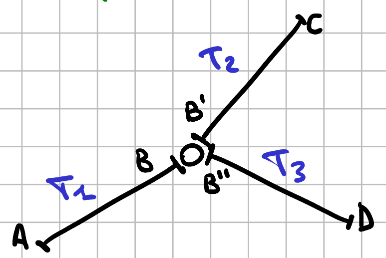
INCASTRO INTERNO ($m=3$)



Sono impediti tutti gli spostamenti relativi tra le due sezioni collegate.
È possibile avere un'intersezione di più di due travi.
Generalmente, travi collegate in questo modo sono considerate come un unico TRONCO DI TRAVE.

$$\begin{cases} v_B - v_{B'} = 0 \\ w_B - w_{B'} = 0 \\ \varphi_B - \varphi_{B'} = 0 \end{cases}$$

COLLEGAMENTI DI PIÚ TRAVI



Coppia $T_1 T_2$: $\begin{cases} v = v' \\ w = w' \end{cases}$ $m=2$ gds $=1$

Coppia $T_2 T_3$: $\begin{cases} v' = v'' \\ w' = w'' \end{cases}$ $m=2$ gds $=1$

Coppia $T_1 T_3$: $\begin{cases} v = v'' \\ w = w'' \end{cases}$ $m=2$ gds $=1$

Significa forse che la molteplicità totale del vincolo vale 6? Assolutamente no.
Se notiamo attentamente, delle sei condizioni scritte solo quattro sono linearmente indipendenti.

$\begin{cases} \text{Se } v = v' \text{ e } v' = v'' \text{ posso ricavare che: } v = v'' \text{ (bastano le prime due) } + \\ \text{Se } W = W' \text{ e } W' = W'' \text{ posso ricavare che: } W = W'' \text{ (bastano le prime due) } = \end{cases}$

4 $m = 4$

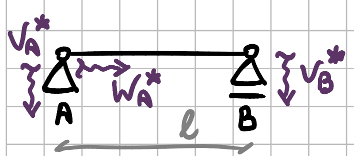
Per ogni trave aggiuntiva: $m^{(4)} = 4 + \begin{Bmatrix} v'' = v''' \\ W'' = W''' \end{Bmatrix} = 6$ $m^{(5)} = 8$ $m^{(n)} = 2(n-1)$

CEDIMENTI VINCOLARI

Nella realtà avremo a che fare con vincoli imperfetti, che possono esibire CEDIMENTI e dunque ammettere spostamenti (seppur in maniera limitata) che normalmente dovrebbero sopprimere.
Distinguiamo tra cedimenti elastici e anelastici:
- Cedimenti elastici: i cedimenti non sono noti (non dati dalla traccia del problema), ma funzione delle reazioni vincolari (dunque dei carichi applicati); la relazione tra reazione vincolare e deformazione del vincolo segue la legge di Hooke; sono rappresentati con una molla di rigidezza k applicata al vincolo;
- Cedimenti anelastici: i cedimenti sono noti (dati dalla traccia del problema e - presumo - misurati sperimentalmente) e indipendenti dalle reazioni vincolari.

In seguito a cedimento vincolare, la labilità della struttura si considera uguale a quella della stessa sotto ipotesi di vincoli perfetti: pur presentando cedimenti una struttura non-labile rimarrà non-labile.

CEDIMENTI ANELASTICI

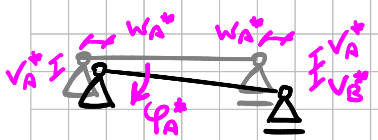


Presentiamo prima i cedimenti anelastici, rappresentati nella struttura a lato come v_A^*, w_A^* e v_B^*.

$\begin{cases} v_A = v_A^* \\ w_A = w_A^* \\ v_B = v_A - \varphi_A \ell = v_B^* \end{cases} \rightsquigarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -\ell \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{C}}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} v_A \\ w_A \\ \varphi_A \end{bmatrix}}_{\underline{s}} = \underbrace{\begin{bmatrix} v_A^* \\ w_A^* \\ v_B^* \end{bmatrix}}_{\underline{\delta}}$

$\text{rank}(\underline{\underline{C}} | \underline{\delta}) = 3$
$\text{rank}(\underline{\underline{C}}) = 3$ SIST. CINEM. COMPATIBILE

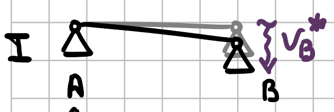
$\ell = 3 - \text{rank}(\underline{\underline{C}}) = \emptyset$ NON-LABILE



Esistono ∞^0 (1) soluzioni:

$\exists ! \underline{s} \in \mathbb{R}^3 : | \underline{\underline{C}} \cdot \underline{s} = \underline{\delta} \iff \underline{s} = \left[v_A^* \quad w_A^* \quad \frac{v_A^* - v_B^*}{\ell} \right]$

NOTA: in seguito al cedimento anelastico, la nuova configurazione ha lo stesso grado di labilità della config. indeformata; in questo caso, anche a seguito di cedimento la struttura resta non-labile.

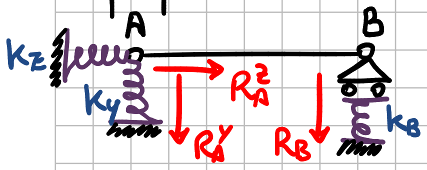


Caso di struttura iperstatica ($i=1$):

In seguito a cedimento anelastico, la struttura isostatica non si deforma perché può semplicemente trovare una nuova configurazione stabile.
Per le strutture iperstatiche, è necessario un ulteriore studio poiché può capitare sia che la struttura non si deformi (caso I, trave AB), sia che la struttura invece si deformi necessariamente (caso II, trave CD).

CEDIMENTI ELASTICI

Riproponiamo l'esempio di prima: LEGGE DI HOOKE: $\underline{F} = -k\underline{x}$

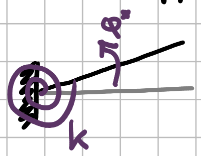


$$\begin{cases} \underline{R}_A^y = -K_y \underline{v}_A^* \\ \underline{R}_A^z = -K_z \underline{w}_A^* \\ \underline{R}_B = -K_B \underline{v}_B^* \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} v_A = v_A^* = -\dfrac{R_A^y}{K_y} \\ w_A = w_A^* = -\dfrac{R_A^z}{K_z} \\ v_B = v_B^* = -\dfrac{R_B}{K_B} \end{cases}$$

$\hookrightarrow R_B = -K_B(v_A^* - \varphi_A^* \ell)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -\ell \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_A \\ w_A \\ \varphi_A \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} R_A^y / K_y \\ R_A^z / K_z \\ R_B / K_B \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{3} R_i \cdot K_i^{-1} \cdot \hat{i}_i$$

Incastro/doppio pendolo/d.d.p. cedevole alla rotazione:



$\rightsquigarrow \quad \underline{M} = -k \cdot \varphi^* \cdot \hat{x} \quad [kNm]$