Appunti di Scienza delle Costruzioni

Capitolo 02a

Analisi della tensione

DISCLAMER GENERALE:

L'autore - PioApocalypse - non si assume alcuna responsabilità per l'uso improprio dei contenuti di questo documento, né si ritiene responsabile della performance - positiva o negativa che sia - dello studente in sede d'esame.

Il materiale didattico qui fornito è da considerarsi come un supplemento al materiale indicato dal docente della materia, e trova le sue utilità principali nel riepilogo di lunghi segmenti del programma e nella spiegazione di determinati argomenti in cui lo studente potrebbe aver riscontrato difficoltà. Alcuni termini e semplificazioni qui utilizzati potrebbero non essere idonei durante la discussione degli argomenti del corso con il docente in sede d'esame, e sono proposti solo al fine di aiutare lo studente con la comprensione della materia.

Si prega, infine, di segnalare eventuali errori trovati all'interno del documento all'indirizzo e-mail indicato sulla repository ufficiale, presso la quale è anche possibile trovare un link per chiunque desiderasse fare una piccola donazione all'autore.

Si ringrazia in anticipo per la cooperazione.

- PioApocalypse

ANALISI DELLA TENSIONE

Le cause che producono cambiamenti di configurazione nei corpi continui - in termini di spostamenti e deformazioni - possono essere di varia natura: possiamo avere deformaz. in seguito all'applicazione di forze, l'imposizione di determinati spostamenti (come nella formatura a freddo), scambi di calore, reazioni chimiche, ecc...
In una teoria puramente meccanica, ci limiteremo a studiare solo gli effetti delle forze.
Queste possono essere:

INTERNE
originate all'interno dei corpi

DI MASSA
dovute alla massa dei corpi

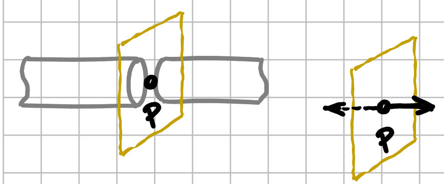
ESCLUSIVAMENTE

ESTERNE
dovute a fattori esterni, come la gravità

DI SUPERFICIE
dovute al contatto diretto dei corpi attraverso una superficie

Esempi:
- F. interne (di superficie): tensione interna;
- F. esterne di massa: forza-peso;
- F. esterne di superficie: reazione vincolare.

Per le forze di superficie è lecito immaginare che esse dipendano anche dalla forma delle superfici di contatto tra più corpi.
Tale dipendenza - secondo l'ipotesi fondamentale di Cauchy - è limitata alla posizione della particella dove si realizza il contatto e alla direzione dei versori normali al piano tangente alla superficie di contatto passante per quel punto.



Al tempo stesso, esaminare e discutere le due leggi fondamentali della statica permette di specializzare la relazione sforzo interno / versore normale in una trasformazione lineare simmetrica.

FORZE ESTERNE

Si ipotizza che sul corpo C possano agire due tipi di forze esterne in corrispondenza della configurazione indeformata:

- FORZE PER UNITÀ DI VOLUME (MASSA): $d\underline{B} = \underline{b}\, dv$

  Dove $b_i = b_i(x_1, x_2, x_3)$; $[b_i] = N \cdot m^{-3} = [M \cdot L^{-2} \cdot T^{-2}]$
- FORZE PER UNITÀ DI SUPERFICIE: $d\underline{P} = \underline{p}\, dS$

  Dove $p_i = p_i(x_1, x_2, x_3)$; $[p_i] = N \cdot m^{-2} = [M \cdot L^{-1} \cdot T^{-2}]$

Si assumerà da qui in poi che:
- Le forze p(x) e b(x) siano assolutamente continue rispetto all'area di contatto e al volume del corpo rispettivamente;
- Le forze b(x) corrispondano alle sole forze peso; $\longrightarrow \underline{b}(\underline{x}) = \rho(\underline{x})\, \underline{g}$
- Le forze p(x) e b(x) siano sufficientemente regolari e finite in ogni punto.

∘ EQUAZIONI CARDINALI DELLA STATICA

Si definisce moto di un corpo continuo C un'applicazione del tipo: $\underline{x} = \chi(\underline{X}, t)$

Questo vale per $X \in \mathcal{C}$, $t \in [t_0, t_1]$

e nel caso statico $\underline{x} = \chi(\underline{X})$

Possiamo scrivere le leggi di Eulero studiate a Meccanica Razionale cambiandone leggermente la simbologia:

$$\begin{cases} \text{I} \quad \dot{\underline{q}}(\mathcal{C}, t) = \underline{f}(\mathcal{C}, t) \\ \text{II} \quad \dot{\underline{h}}_0(\mathcal{C}, t) = \underline{m}_0(\mathcal{C}, t) \end{cases}$$

Dove: $\underline{f} = \int_\chi \underline{b}(\underline{x}, t)\, dv + \int_{\partial_t \chi} \underline{p}(\underline{x}, t)\, dS$

$$\underline{m}_0 = \int_\chi (\underline{x} - \underline{x}_0) \wedge \underline{b}(\underline{x}, t)\, dv + \int_{\partial_t \chi} (\underline{x} - \underline{x}_0) \wedge \underline{p}(\underline{x}, t)\, dS$$

$$\dot{\underline{q}} = \frac{d}{dt} Q = \frac{d}{dt} \underbrace{\int_\chi \rho(\underline{x}) \cdot \underline{v}(\underline{x}, t)\, dv}_{\text{Q.TÁ DI MOTO DI } \mathcal{C} \text{ ALL'ISTANTE } t}$$

$$\dot{\underline{h}}_0 = \frac{d}{dt} H = \frac{d}{dt} \underbrace{\int_\chi (\underline{x} - \underline{x}_0) \wedge \rho(\underline{x}) \cdot \underline{v}(\underline{x}, t)\, dv}_{\text{MOMENTO DELLA Q.TÁ DI MOTO DI } \mathcal{C} \text{ ALL'ISTANTE } t \text{ RISPETTO AL POLO } O}$$

$\underline{v} = \frac{\partial \underline{x}}{\partial t}$: VELOCITÁ

Le equazioni fondamentali della statica costituiscono una specializzazione delle equazioni cardinali della dinamica dei corpi continui. Prendiamo dunque le leggi di Eulero, e assumiamo che il nostro corpo non debba incorrere in spostamenti variabili nel tempo:

$$\begin{cases} \underline{v} = \underline{0} \\ \forall t \in [t_0, \infty) \end{cases} \longrightarrow \quad \begin{array}{l} \text{I} \quad \underline{f}(\mathcal{C}) = 0 \\ \text{II} \quad \underline{m}_0(\mathcal{C}) = 0 \end{array} \longrightarrow \quad \begin{array}{l} \underline{f}(\mathcal{C}) = \int_\mathcal{C} \underline{b}(\underline{x})\, dV + \int_{\partial \mathcal{C}} \underline{p}(\underline{x})\, dS = 0 \\ \underline{m}_0(\mathcal{C}) = \int_\mathcal{C} (\underline{x} - \underline{x}_0) \wedge \underline{b}(\underline{x})\, dV + \int_{\partial \mathcal{C}} (\underline{x} - \underline{x}_0) \wedge \underline{p}(\underline{x})\, dS = 0 \end{array}$$

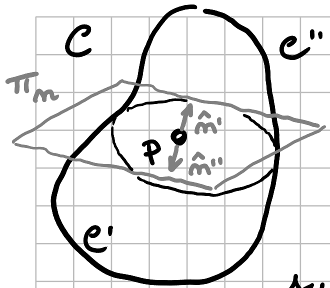
Perché $\mathcal{C}$ e non $\chi(\mathcal{C})$?
Ipotesi di piccoli spostamenti

FORZE INTERNE

Un corpo risponde all'azione di forze esterne sviluppando forze interne che ne provocano la deformazione. Nella Meccanica Razionale e in altre materie del primo anno, abbiamo sempre o spesso trascurato lo studio delle forze interne, poiché nel nostro campo di interesse capitava che la risultante di queste si potesse considerare nulla poiché si cancellavano a vicenda per il Principio di Azione e Reazione.

Adesso analizzeremo l'effetto delle forze interne con un approccio differente: consideriamo un corpo continuo C "tagliato" in due parti C' e C" da un piano che indicheremo con π_n.

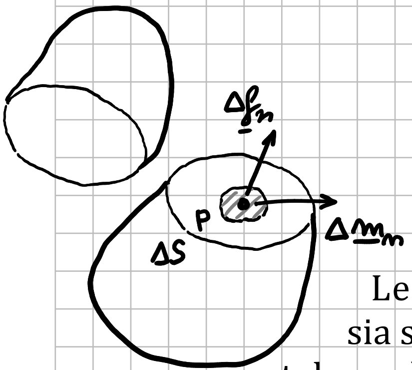
↓



$\hat{n}^i \doteq$ versore normale al piano π_n, uscente da C^i

Chiamiamo ΔS l'intersezione tra C e il piano π_n

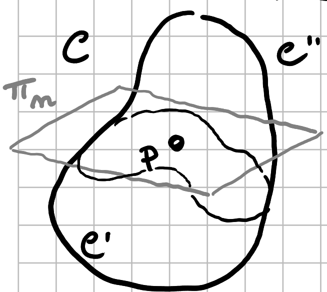
Sia dato $P \in \Delta S$. Siano $\Delta \underline{f}_n$ e $\Delta \underline{m}_n$ rispettivam. il risultante e il momento risultante delle forze agenti sull'intorno di P. Per una ΔS molto piccola:



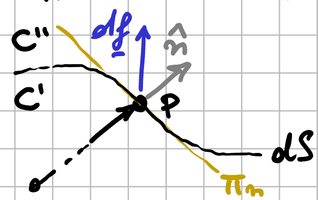
$$\lim_{\Delta S \to 0} = \frac{\Delta \underline{f}_n}{\Delta S_n} = \underline{t} \qquad \text{"TENSIONE"}$$

$$\lim_{\Delta S \to 0} = \frac{\Delta \underline{m}_n}{\Delta S_n} = \underline{0}$$

Le due relazioni precedenti sono ancora valide qualora il corpo sia sezionato con una qualsiasi superficie curva passante per P, tale però che il piano ad essa tangente in P coincida con π_n.



IPOTESI O POSTULATO DI CAUCHY



$$\underline{t} = \underline{t}(\underline{x}, \hat{n})$$

$$d\underline{f} = \underline{t}(\underline{x}, \hat{n}) \cdot dS$$

o EQUAZIONI CARDINALI DELLA STATICA

Una volta introdotte le forze interne (tensioni), le equazioni fondamentali della statica possono essere estese ad intorni di P piccoli a piacere, ed enunciate in forma generale:

$$\text{I} \quad \underline{f}(P) = \int_{\underline{\chi}} \underline{b}\, dv + \int_{\partial \underline{\chi}} \underline{p}\, dS + \int_{\partial \underline{\chi}} \underline{t}\, dS = \underline{0}$$

$$\text{II} \quad \underline{m}_0(P) = \int_{\underline{\chi}} (\underline{x} - \underline{x}_0) \wedge \underline{b}\, dv + \int_{\partial \underline{\chi}} (\underline{x} - \underline{x}_0) \wedge \underline{p}\, dS + \int_{\partial \underline{\chi}} (\underline{x} - \underline{x}_0) \wedge \underline{t}\, dS = \underline{0}$$

Dietro ipotesi di piccoli spostamenti si considera la config. indeformata e si integra sull'intorno di P.

TEOREMA DI CAUCHY

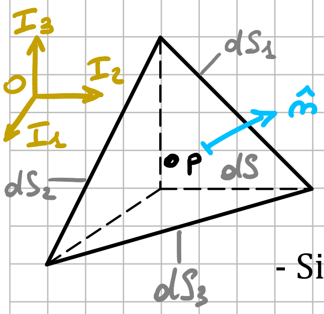
Supponendo la funzione $\underline{t}(\underline{x}, \hat{n})$ continua rispetto a $\underline{x}$, esiste ed è unico il campo tensoriale $\underset{\sim}{T}(\underline{x})$ tale che:

$$\exists\, \underset{\sim}{T}(\underline{x}): \; \underline{t}(\underline{x}, \hat{n}) = \underset{\sim}{T}(\underline{x}) \cdot \hat{n}$$

$$\downarrow$$

∘ DIMOSTRAZIONE

Si postuli l'esistenza di un intorno di P a forma di TETRAEDRO DI CAUCHY, figura che gode delle seguenti caratteristiche:



- Tre facce sono ortogonali ai tre assi del sistema di riferimento, quindi tangenti ai tre piani cartesiani formati dagli stessi;
- La quarta faccia si assume dunque obbliqua rispetto a tutti e tre i piani, e si chiama $\hat{n}$ il versore normale uscente;
- Si assume che il corpo sia in equilibrio statico sotto forze est. assegnate.

$$\hat{n} = [n_1, n_2, n_3], \quad |\hat{n}| = 1$$

Le normali alle superfici dS_i sono rappresentate dai versori $-\hat{n}_i = -\hat{I}_i$

$$\begin{cases} \underline{t}_1 = \underline{t}_1(\underline{x}, -\hat{I}_1) = -\sigma_1 \hat{I}_1 - \tau_{21}\hat{I}_2 - \tau_{31}\hat{I}_3 \\ \underline{t}_2 = \underline{t}_2(\underline{x}, -\hat{I}_2) = -\tau_{12}\hat{I}_1 - \sigma_2 \hat{I}_2 - \tau_{32}\hat{I}_3 \\ \underline{t}_3 = \underline{t}_3(\underline{x}, -\hat{I}_3) = -\tau_{13}\hat{I}_1 - \tau_{23}\hat{I}_2 - \sigma_3 \hat{I}_3 \end{cases} \rightarrow \underline{t} = \underline{t}(\underline{x}, \hat{n}) = t_1\hat{I}_1 + t_2\hat{I}_2 + t_3\hat{I}_3$$

σ_i: TENSIONI NORMALI; τ_{ij}: TENSIONI TANGENZIALI

$-\tau_{ij} \rightarrow$
| Tensione applicata lungo la direzione i
| Con verso negativo $(-)$
| Sulla superficie j

Applichiamo la prima legge della statica sapendo che per Azione e Reazione (locale):

$$\int_{\partial \underline{\chi}} \underline{p} \cdot dS = \underline{0}$$

$$t_i\, dS - (\sigma_i\, dS_i + \tau_{ij}\, dS_j + \tau_{ik}\, dS_k) + b_i\, dv = 0$$

per ogni $i, j, k \in \{1,2,3\}: i \neq j, j \neq k, i \neq k$

Però se il tetraedro è infinitesimo è ovvio notare come dv sia estremamente più piccolo rispetto a dS, elemento che rende trascurabile il contributo delle forze di massa.

$$dv \ll dS \longrightarrow b_i\, dv \approx 0$$

Inoltre si dimostra semplicemente che: $\dfrac{dS_i}{dS} = n_i$

Ergo: $t_i + \cancel{b_i\, dv} = \sigma_i \dfrac{dS_i}{dS} + \tau_{ij}\dfrac{dS_j}{dS} + \tau_{ik}\dfrac{dS_k}{dS}$

$$\Leftarrow \begin{cases} t_1 = \sigma_1 n_1 + \tau_{12} n_2 + \tau_{13} n_3 \\ t_2 = \tau_{21} n_1 + \sigma_2 n_2 + \tau_{23} n_3 \\ t_3 = \tau_{31} n_1 + \tau_{32} n_2 + \sigma_3 n_3 \end{cases}$$

IN ALTRE PAROLE:

$$\begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \sigma_2 & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \sigma_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix}$$

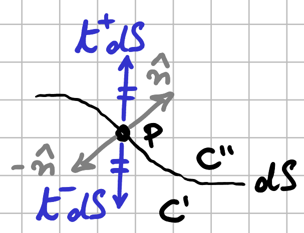
DUNQUE: $\underline{t}(\underline{x}, \hat{n}) = \underset{\sim}{T} \cdot \hat{n}$

Dove $\underset{\sim}{T}$ o $\underline{\underline{T}}$ $\doteq$ TENSORE DI CAUCHY (O DELLE TENSIONI)

Le componenti di tensione sono funzioni del punto P e si possono assumere regolari (o quanto meno continue rispetto alla variabile x). Il tensore di Cauchy è lineare, e un'immediata conseguenza di questa proprietà è il Principio di Azione e Reazione:

$$\underline{t}(\underline{x}, -\hat{n}) = \underset{\sim}{T}(\underline{x}) \cdot (-\hat{n}) = -\underset{\sim}{T}(\underline{x}) \cdot \hat{n} = -\underline{t}(\underline{x}, \hat{n})$$

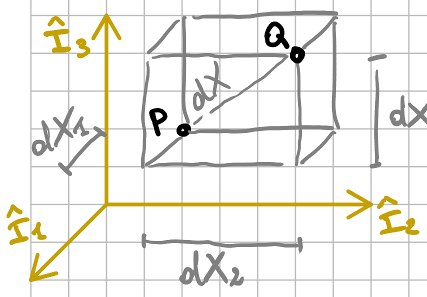
$$\hookrightarrow \underline{t}^- = -\underline{t}^+$$



Il teorema di Cauchy può essere utilizzato per scrivere le equazioni di equilibrio locale in corrispondenza di punti della superficie esterna di un corpo, dove siano assegnate forze di superficie p(x).

$$\underset{\sim}{T}(\underline{x}) \cdot \hat{n} = \underline{p}(\underline{x}) \quad \begin{cases} \sigma_1 n_1 + \tau_{12} n_2 + \tau_{13} n_3 = p_1 \\ \tau_{21} n_1 + \sigma_2 n_2 + \tau_{23} n_3 = p_2 \\ \tau_{31} n_1 + \tau_{32} n_2 + \sigma_3 n_3 = p_3 \end{cases}$$

EQUAZIONI INDEFINITE DI EQUILIBRIO



Prendiamo due punti P e Q appartenenti ad uno stesso corpo, tali che:

$$\underline{x}_P = \underline{x}_i \, , \qquad \underline{x}_Q = \underline{x}_i + d\underline{x}$$

Il parallelepipedo con diagonale PQ avrà come volume:

$$dv = dx_1 dx_2 dx_3$$

Le differenze tra le tensioni agenti sui punti P e Q può essere espressa come segue, indicando con l'apice ' le tensioni agenti in Q e senza apice quelle agenti in P.

$$\begin{cases} \sigma_i' \approx \sigma_i(x_i + dx_i, x_j, x_k) = \sigma_i + \dfrac{\partial \sigma_i}{\partial x_i} dx_i \\ \tau_{ij}' \approx \tau_{ij}(x_i + dx_i, x_j, x_k) = \tau_{ij} + \dfrac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} dx_j \end{cases}$$

dove $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$
e $i \neq j$, $j \neq k$, $i \neq k$

(TOTALE DI 9 EQUAZIONI)

Si imponga il soddisfacimento della prima equazione cardinale della statica, considerando questa volta anche le forze di massa b(x). Sul solo asse 1:

$$\sigma_1' dx_2 dx_3 + \tau_{12}' dx_1 dx_3 + \tau_{13}' dx_1 dx_2$$
$$- \sigma_1 dx_2 dx_3 - \tau_{12} dx_1 dx_3 - \tau_{13} dx_1 dx_2 + b_1 dv = 0$$

Ossia: $\dfrac{\partial \sigma_1}{\partial x_1} \underbrace{dx_1 dx_2 dx_3}_{= dv} + \dfrac{\partial \tau_{12}}{\partial x_2} dv + \dfrac{\partial \tau_{13}}{\partial x_3} dv + b_1 dv = 0$

Dividendo per dv: $\dfrac{\partial \sigma_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial \tau_{12}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial \tau_{13}}{\partial x_3} + b_1 = 0$

IN GENERALE: $\dfrac{\partial \sigma_i}{\partial x_i} + \dfrac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \dfrac{\partial \tau_{ik}}{\partial x_k} + b_i = 0$

Semplicemente, è dunque vero che: $\mathrm{Div}(\underset{\sim}{T}) + \underline{b} = \underline{0}$

$\left(\text{o anche } \underline{\nabla} \cdot \underline{\underline{T}} + \underline{b} = \underline{0}\right)$

NOTA: la divergenza di un tensore del secondo ordine (matrice) restituisce un tensore del primo ordine (vettore) i cui elementi sono così definiti:

$$(\underline{\nabla} \cdot \underline{\underline{T}})_i = \frac{\partial T_{ii}}{\partial x_i} + \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k}$$

DUNQUE: $$\underline{\nabla} \cdot \underline{\underline{T}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \sigma_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{13}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \tau_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{23}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \tau_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}$$

SIMMETRIA DEL TENSORE $\underset{\sim}{T}$

Si applica la seconda legge cardinale della statica al parallelepipedo di cui sopra, imponendo l'equilibrio alla rotazione intorno al punto P. Dunque:

$$\sum_{i,j,k} \underset{\sim}{r}_k \wedge (T_{ij}\, dS_k) = \underline{0}$$

Si limiti l'equazione al solo equilibrio lungo l'asse 1 passante per P:

$$(\tau_{31}'\, dx_2 dx_3)\frac{dx_2}{2} - (\tau_{21}'\, dx_2 dx_3)\frac{dx_3}{2} - (\sigma_2'\, dx_1 dx_3)\frac{dx_3}{2} +$$
$$+ (\tau_{32}'\, dx_1 dx_3)dx_2 - (\tau_{23}'\, dx_1 dx_2)dx_3 + (\sigma_3'\, dx_1 dx_2)\frac{dx_2}{2} +$$
$$- (\tau_{31}\, dx_2 dx_3)\frac{dx_2}{2} + (\tau_{21} dx_2 dx_3)\frac{dx_3}{2} + (\sigma_2\, dx_1 dx_3)\frac{dx_3}{2}$$
$$- (\sigma_3\, dx_1 dx_2)\frac{dx_2}{2} - (b_2\, dv)\frac{dx_3}{2} + (b_3\, dv)\frac{dx_2}{2} = 0$$

Peró assumendo $\tau_{ij}' \approx \tau_{ij}$ e $\sigma_i' \approx \sigma_i$:

$$(\tau_{32}\, dx_1 dx_3)dx_2 - (\tau_{23}\, dx_1 dx_2)dx_3 - (b_2\, dv)\frac{dx_3}{2} + (b_3\, dv)\frac{dx_2}{2} = 0$$

Peró $dv \cdot dx_i \ll dv$ dunque $-(b_2\, dv)\frac{dx_3}{2} + (b_3\, dv)\frac{dx_2}{2} \approx 0$

Rimaniamo con:

$$\tau_{32}\, dv - \tau_{23}\, dv = 0, \qquad \tau_{32} = \tau_{23}$$

Applicando lo stesso ragionamento lungo gli altri due assi, otterremo che:

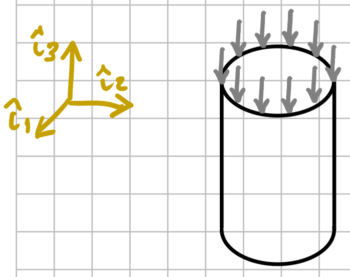
$$\tau_{31} = \tau_{13} \quad \cup \quad \tau_{21} = \tau_{12}$$

...dimostrando così la simmetria del tensore di Cauchy.

$$\underset{\sim}{T} = \underset{\sim}{T}^T = \begin{bmatrix} \sigma_1 & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{12} & \sigma_2 & \tau_{23} \\ \tau_{13} & \tau_{23} & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

Se il campo di tensori simmetrici T soddisfa la relazione $\underline{\nabla} \cdot \underline{\underline{T}} + \underline{b} = \underline{0}$
allora si dice che T è staticamente compatibile con il campo di forze b(x) assegnato.
Se inoltre T soddisfa anche la condizione a contorno di tipo statico $\underline{\underline{T}} \cdot \hat{n} = \underline{p}$
dove p(x) è il campo di forze di superficie assegnato al contorno,
allora si dirà che T è staticamente ammissibile con le forze di massa e di superficie assegnate.

ESEMPIO:



Assegnato $\underline{p} = -10 \frac{N}{cm^2} \hat{\imath}_3$

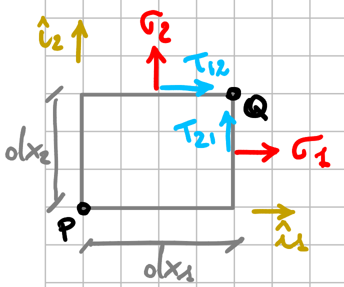
Dunque $\underline{p} = p_3 \hat{\imath}_3 \rightarrow \underline{T}_3 \cdot \hat{m}_3 = p_3 = -10 \ldots$

$$\underset{\sim}{T} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{12} & \sigma_2 & \tau_{23} \\ \tau_{13} & \tau_{23} & \sigma_3 \end{bmatrix} \rightarrow \underline{T}_3 = \begin{bmatrix} \tau_{13} \\ \tau_{23} \\ \sigma_3 \end{bmatrix} \quad \hat{m}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Quindi semplicemente

$$\sigma_3 = p_3 = -10 \frac{N}{cm^2} \quad \text{mentre} \quad \tau_{13} = 0 \ \text{e} \ \tau_{23} = 0$$

- PRINCIPIO DI RECIPROCITÁ DELLE TENSIONI TANGENZIALI



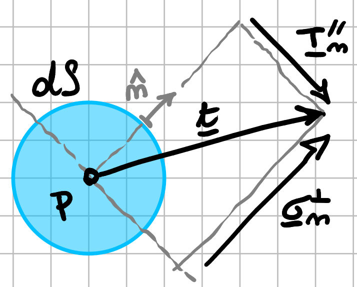
Nel piano: $\underset{\sim}{T}(\underline{x}) = \begin{bmatrix} \sigma_1 & \tau_{12} \\ \tau_{12} & \sigma_2 \end{bmatrix}$, $\underline{T} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & \tau_{12} \\ \tau_{12} & \sigma_2 \end{bmatrix} \cdot \hat{m}$

Poichè $\tau_{12} = \tau_{21}$:

- Se i loro segni sono positivi convergono nel vertice Q;
- Se i loro segni sono negativi divergono dal vertice Q.

TENSIONI PRINCIPALI E DIREZIONI PRINCIPALI DI TENSIONE

Fissato $P \in C$, sia dS una superficie infinitesima centrata in P di normale uscente $\hat{m}$



$\underline{t}$ può essere scritto come la somma di due componenti: una sempre parallela ad $\hat{m}$ (ortogonale a $\partial_i dS$) ed una sempre ortogonale ad $\hat{m}$ (tangente a $\partial_i dS$).

$$\begin{cases} \underline{\sigma}^\perp_m = (\underline{t} \cdot \hat{m}) \cdot \hat{m} = (\underset{\sim}{T} \cdot \hat{m} \cdot \hat{m}) \cdot \hat{m} \\ \underline{\tau}''_m = \underline{t} - \underline{\sigma}^\perp_m = \underset{\sim}{T} \cdot \hat{m} - \underline{\sigma}^\perp_m \end{cases}$$

Ci si chiede - potendo variare l'orientamento nello spazio dell'intorno di P e dunque il suo versore normale - se esista una giacitura particolare di dS per cui si verifichi che:

$$\underline{\tau}''_m = \underline{0} \quad \text{OSSIA} \quad \underset{\sim}{T} \cdot \hat{m}' = \lambda \cdot \hat{m}' \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R}$$
$$\text{OSSIA} \quad (\underset{\sim}{T} - \lambda \underset{\sim}{I}) \cdot \hat{m}' = \underline{0}$$

Dunque: $(\underset{\sim}{T} - \lambda \underset{\sim}{I}) \cdot \hat{n} = \underline{0} \longrightarrow \begin{vmatrix} \sigma_1 - \lambda & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{12} & \sigma_2 - \lambda & \tau_{23} \\ \tau_{13} & \tau_{23} & \sigma_3 - \lambda \end{vmatrix} = 0$

λ potrà assumere (al più) 3 valori reali tali che: $\lambda_I \geq \lambda_{II} \geq \lambda_{III}$

λ_I, λ_{II} e λ_{III} sono autovalori di $\underset{\sim}{T}$, sono tensioni normali (σ_I, σ_{II} e σ_{III}) e prendono il nome di TENSIONI PRINCIPALI.

$$\left.\begin{array}{ll} (\underset{\sim}{T} - \sigma_I \underset{\sim}{I}) \cdot \hat{e}_1 = \underline{0} & \hat{e}_1 \text{ è...} \\ (\underset{\sim}{T} - \sigma_{II} \underset{\sim}{I}) \cdot \hat{e}_2 = \underline{0} & \hat{e}_2 \text{ è...} \\ (\underset{\sim}{T} - \sigma_{III} \underset{\sim}{I}) \cdot \hat{e}_3 = \underline{0} & \hat{e}_3 \text{ è...} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{autovettore di } \underset{\sim}{T} \text{ e} \\ \text{DIREZIONE PRINCIPALE DI TENSIONE} \end{array}$$

Rispetto alla terna $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$, $\underset{\sim}{T}$ è scritto come segue:

$$\underset{\sim}{T} = \begin{bmatrix} \sigma_I & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{III} \end{bmatrix}$$

In analogia a quanto già verificato per le componenti del tensore di deformazione infinitesima ($\underset{=}{\varepsilon}$) possiamo dimostrare che la minima e la massima componente normale di tensione si mobilitano su una delle giaciture ortogonali alle direzioni principali di tensione. Per quanto riguarda le tensioni tangenziali:

- Il minimo valore assoluto si mobilita sulle giaciture ortogonali alle direzioni principali di tensione (= 0, per definizione di direzioni e tensioni princiali);
- Il massimo valore assoluto si registra su ciascuna delle due coppie di giaciture ortogonali alle bisettrici dei quadranti delimitati dalle due direzioni principali cui corrispondono rispettivamente la massima e la minima tensione principale. ?

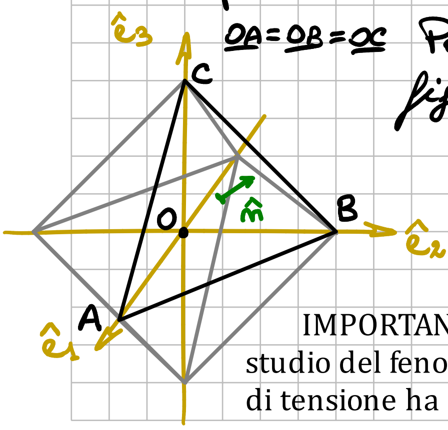
$\hookrightarrow (\tau''_m)_{max} = \| \underline{T}''_m \|_{max} = \max\left\{ \frac{1}{2}|\sigma_I - \sigma_{II}|; \frac{1}{2}|\sigma_I - \sigma_{III}|; \frac{1}{2}|\sigma_{II} - \sigma_{III}| \right\}$

Abbiamo detto arbitrariamente che: $\sigma_I \geq \sigma_{II} \geq \sigma_{III}$

dunque: $\boxed{(\tau''_m)_{max} = \| \underline{T}''_m \|_{max} = \frac{1}{2}(\sigma_I - \sigma_{III})}$

NOTA: Nel caso di studio di una pressione idrostatica (Meccanica dei Fluidi) avremo che $\sigma_I = \sigma_{II} = \sigma_{III}$, dunque $(\tau''_m)_{max} = (\tau''_m)_{min} = 0$

La tensione è dunque SEMPRE normale alla superficie, ma ricordiamo che questa è un'eccezione e non la regola.



$\underline{OA} = \underline{OB} = \underline{OC}$ Postuliamo l'esistenza dell'ottaedro regolare in figura a lato. Analizziamo le tensioni della faccia $\widehat{ABC}$.

$$\hat{n} = \frac{\sqrt{3}}{3}(\hat{e}_1\ \hat{e}_2\ \hat{e}_3) \longrightarrow \sigma'_m = \frac{1}{3}(\sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III})$$

$$\text{mentre } \tau''_m = \| \tau_{ott} \| = \frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_I - \sigma_{III})^2}$$

IMPORTANTE: questo modulo della tensione tangenziale ottaedrica è alla base dello studio del fenomeno dello snervamento, perché permette di studiare a quali valori di tensione ha inizio la transizione del materiale dal campo elastico a quello plastico.