Appunti di Scienza delle Costruzioni

Esercizio - Trave iperstatica

DISCLAMER GENERALE:

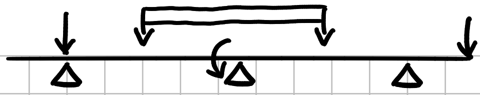
L'autore - PioApocalypse - non si assume alcuna responsabilità per l'uso improprio dei contenuti di questo documento, né si ritiene responsabile della performance - positiva o negativa che sia - dello studente in sede d'esame.

Il materiale didattico qui fornito è da considerarsi come un supplemento al materiale indicato dal docente della materia, e trova le sue utilità principali nel riepilogo di lunghi segmenti del programma e nella spiegazione di determinati argomenti in cui lo studente potrebbe aver riscontrato difficoltà. Alcuni termini e semplificazioni qui utilizzati potrebbero non essere idonei durante la discussione degli argomenti del corso con il docente in sede d'esame, e sono proposti solo al fine di aiutare lo studente con la comprensione della materia.

Si prega, infine, di segnalare eventuali errori trovati all'interno del documento all'indirizzo e-mail indicato sulla repository ufficiale, presso la quale è anche possibile trovare un link per chiunque desiderasse fare una piccola donazione all'autore.

Si ringrazia in anticipo per la cooperazione.

- PioApocalypse

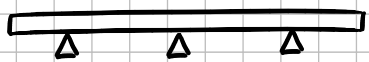


TRAVE CONTINUA IPERSTATICA

PROBLEMA CINEMATICO

Si studia la labilità solo per i problemi di taglio e di flessione, in quanto si presuppone che la trave non sia soggetta a carichi orizzontali.

$\#_{gdl} = 2$ $\qquad t = 1 \qquad 3 \geq 2t + 1 \ (=3)$



Si troverà che $l = 0$, generalmente per l'assenza di CRA

$i = l + s - 2t \geq 1$ STRUTTURA "i" VOLTE IPERSTATICA (2 equaz. di equilibrio, 2+i incognite)

PROBLEMA STATICO (METODO DELLE FORZE, $i = 1$)

$$\begin{cases} R_1 + R_2 + R_3 + \sum_i F_{T_i} = 0 \\ R_1 a + R_2 b + R_3 c + \sum_i M_i = 0 \end{cases} \Bigg| \begin{matrix} 2 \text{ eq.} \\ 3 \text{ incognite} \end{matrix}$$

(Si ipotizza $i = 1$)

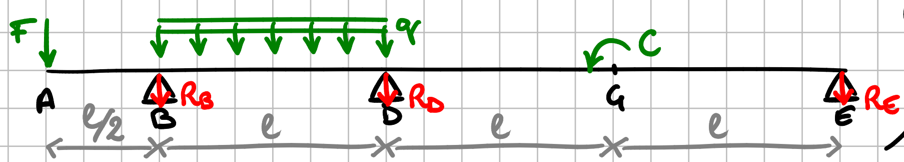
Possiamo usare il metodo della linea elastica oppure il metodo delle forze. Sarà illustrato solo il secondo.

CASO ①: VINCOLO INTERNO SCONNESSO A CERNIERA

La sconnessione a cerniera di un vincolo interno permette di ipotizzare che siano ammesse liberamente rotazioni della trave in corrispondenza del vincolo in questione; tuttavia, applicheremo due momenti uguali e opposti nello stesso punto - tali da annullarsi a vicenda - che costituiranno la nostra INCOGNITA IPERSTATICA, che troveremo con le equazioni di congruenza interna.

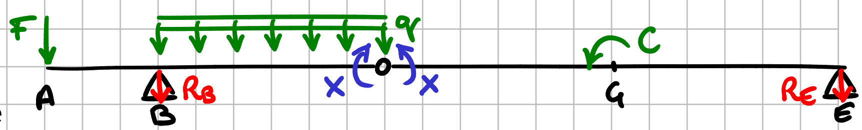
Cioè: $\varphi_{Asx} - \varphi_{Adx} = 0$
$\Leftrightarrow \varphi_{Asx} = \varphi_{Adx}$

ESEMPIO:



$l = 6m \qquad q = 2 kNm^{-1}$
$F = 4kN \qquad C = 8 kNm$
1 volta iperstatica $(s - 2t = 1)$

SCONNESSIONE A CERNIERA IN D:

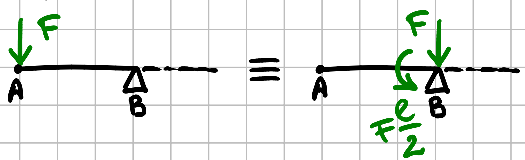


Poiché il problema è lineare, possiamo applicare la sovrapposizione degli effetti. NOTA: la rotazione imposta da ogni carico/momento sulla sezione retta in D è tabellata: si sceglie arbitrariamente il verso in cui la rotazione è positiva e si sommano le singole rotazione come per sovrapposizione degli effetti.
Fare bene attenzione al verso che si è scelto! Se si sta utilizzando una tabella dei problemi elastici notevoli, il segno delle rotazioni e delle deformazioni tiene già conto di un sistema di riferimento.

TEOREMA DEL TRASPORTO:

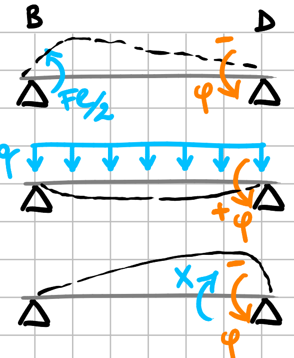
Il vettore applicato $\{F, A\}$ equivale al sistema costituito dal vettore $\{F, B\}$ più la coppia applicata in B e data da F con braccio BA.

Esempio:



NOTA: è pacifico che F NON contribuisce alla rotazione in D come fa invece la coppia

$\boxed{\varphi_{DB}}$



$$\varphi_{BD}^{(F\ell/2)} = -\left(\frac{F\ell}{2}\right)\frac{\ell}{6EI} = -\frac{F\ell^2}{12EI} \ [rad]$$

$$\varphi_{BD}^{(q)} = +\frac{q\ell^3}{24EI} \ [rad]$$

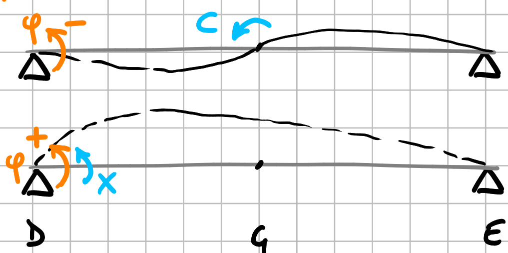
$$\varphi_{BD}^{(X)} = -\frac{X\ell}{3EI} \ [rad]$$

$$\varphi_{BD} = -\frac{F\ell^2}{12EI} + \frac{q\ell^3}{24EI} - \frac{X\ell}{3EI}$$

$\boxed{\varphi_{DE}}$

$$\varphi_{DE}^{(C)} = -\frac{C(2\ell)}{24EI} \ [rad]$$

$$\varphi_{DE}^{(X)} = +\frac{X(2\ell)}{3EI} \ [rad]$$



$$\varphi_{DE} = -\frac{C\ell}{12EI} + \frac{2X\ell}{3EI}$$

$$\varphi_{DB} = \varphi_{DE} \rightarrow -\frac{F\ell^2}{12} + \frac{q\ell^3}{24} + \frac{C\ell}{12} = \frac{2}{3}X\ell + \frac{1}{3}X\ell = X\ell$$

(Si semplifica EI)

$$\hookrightarrow X = \frac{1}{\cancel{\ell}}\left(-\frac{F\ell^{\cancel{2}}}{12} + \frac{q\ell^{\cancel{3}2}}{24} + \frac{C\cancel{\ell}}{12}\right) = \frac{5}{3} = \underline{1{,}667\ldots \ kNm}$$

Come si arriva quindi dall'incognita iperstatica alle 3 reazioni vincolari?
Di seguito è proposto il metodo che ho trovato più comodo tra quelli disponibili, che consiste nell'imporre l'equilibrio alla rotazione sulle travi ABD e DGE considerate come due corpi separati, tenendo conto anche di X durante i calcoli. Verificando l'equilibrio sulla sezione D in entrambi i casi, posso evitare di includere nell'equazione anche la reazione vincolare RD. Calcolate le reazioni delle cerniere in B ed in E, l'ultima reazione si può calcolare imponendo l'equilibrio alla traslazione sull'intera trave AE.

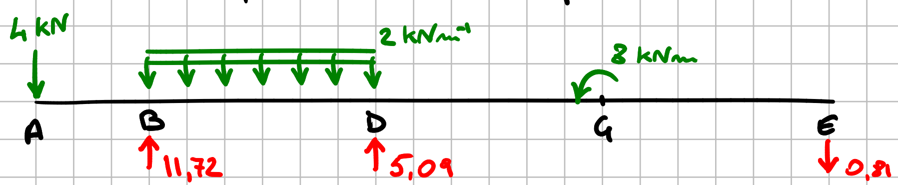
$$D) \begin{cases} ABD \,|\, F\ell + R_B\ell - X + \frac{q\ell^2}{2} + F\frac{\ell}{2} = 0 \\ DGE \,|\, X + C - R_E 2\ell = 0 \end{cases}$$

$$R_B = -\frac{3}{2}F - \frac{q\ell}{2} + \frac{X}{\ell} = \underline{-11{,}72 \ kN} \uparrow$$

$$R_E = \frac{X+C}{2\ell} = \frac{8+1{,}667}{12} = \underline{0{,}81 \ kN} \downarrow$$

Resta solo R_D:

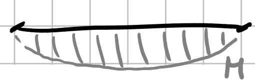
$$\downarrow A\text{-}E \,|\, F + R_B + R_D + R_E + q\ell = 0 \longrightarrow R_D = -(F + R_E + R_B + q\ell) = \underline{-5{,}09 \ kN} \uparrow$$

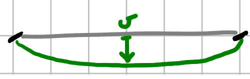


Si procede oltre...

I problemi di taglio e flessionale - oltre alla deformata a maniera - relativi a questa trave saranno affrontati successivamente.
Basti sapere che per i diagrammi T e M le regole sono le stesse del telaio isostatico.
La deformata segue il segno del momento: siccome il momento è proporzionale alla derivata seconda della deformazione, la concavità della trave deformata seguirà l'andamento del momento flettente, ed in particolare:

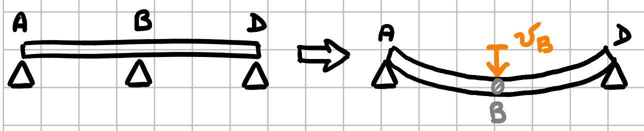
- Sarà verso l'alto se il momento è positivo (fibre tese in basso);
- Sarà verso il basso se il momento è negativo (fibre tese in alto);
- Avrà un punto di flesso dove il momento è nullo.



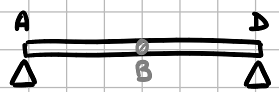


▸ CASO ②: VINCOLO ESTERNO (CENTRALE) SOPPRESSO

La soppressione di un vincolo interno permette di ipotizzare che sia ammesso liberamente lo spostamento della sezione retta della trave in corrispondenza del vincolo in questione; poiché però sappiamo che in realtà in quel punto è presente un vincolo, dovremo imporre la condizione che tale spostamento sia mantenuto nullo, cosa che sarà resa possibile dall'incognita iperstatica, che in questo caso coincide con la reazione vincolare del vincolo soppresso.

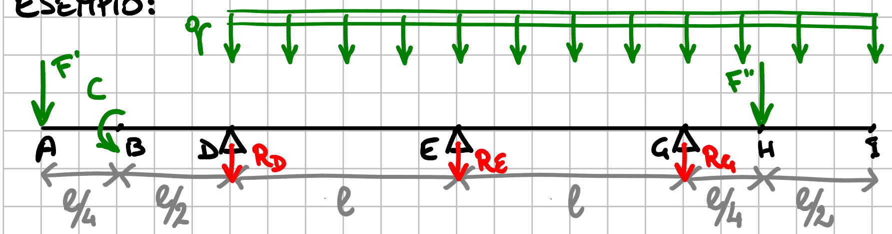


PERÓ NOI VOGLIAMO CHE:



Cioè: $v_B = 0$

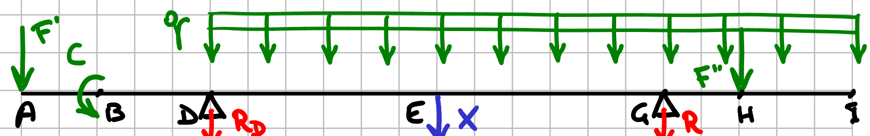
ESEMPIO:



$l = 3\,m \qquad q = 2\,kN\,m^{-1}$

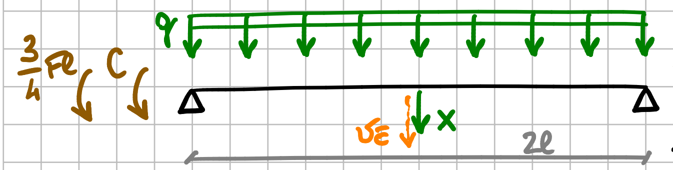
$F = 4\,kN \qquad C = 8\,kNm$

SOPPRESSIONE VINCOLO IN E:



Imponendo che $\begin{cases} v_E = 0 \\ X = R_E \end{cases}$ possiamo risolvere R_E mediante l'equazione di congruenza

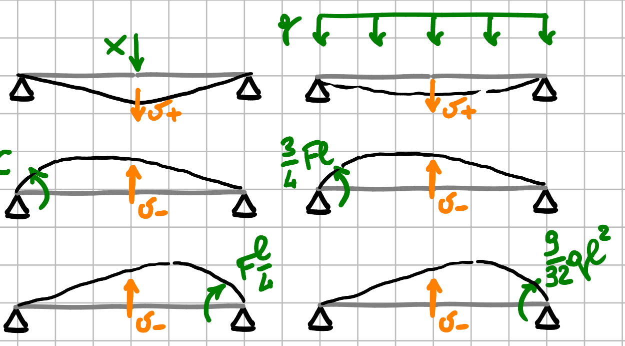
Portiamo tutte le forze sul tratto DG di lunghezza 2l con il teorema del trasporto; a questo punto supponiamo sia nullo lo spostamento totale dovuto ai carichi esterni in corrispondenza della sezione retta E, assumendo positivo - in maniera del tutto arbitraria - uno spostamento verso il basso.
È importante fare particolare attenzione alla lunghezza del tratto, pari in questo caso a 2l e NON ad l, perché nelle formule tabellate dovremo sostituire l con 2l:



$\frac{9}{32}ql^2\left(= q\frac{3}{4}l\cdot\frac{3}{8}l\right)$

● TRASPORTATI

$$v_E = v_E^{(q)} + v_E^{(X)} + v_E^{(C)} + v_E^{(F')} + v_E^{(F'')} + v_E^{(Q)} = 0$$



$v_E = v_{l/2}$ (o in questo caso v_l)

$$= \frac{X(2l)^3}{48} + \frac{5}{384}q(2l)^4 - \left(\frac{3}{4}Fl + C\right)\frac{(2l)^2}{16} - \left(F\frac{l}{4} + \frac{9}{32}ql^2\right)\frac{(2l)^2}{16} = 0$$

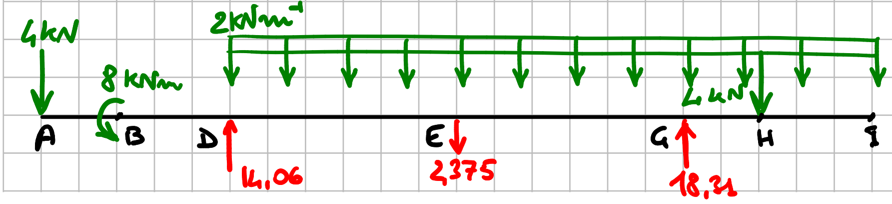
$$\hookrightarrow X (= R_E) = \frac{6}{l}\left(\frac{1}{4}\left(Fl + C + \frac{9}{32}ql^2\right) - \frac{5}{24}ql^2\right)$$

$$= \underline{2{,}375\ kN} \downarrow$$

$$\downarrow \left| \; R_D + R_G + X + \frac{11}{4}ql + F = 0 \right.$$

$$\curvearrowleft G \left| \; 2lR_D + C + \frac{11}{4}Fl + Xl + 2ql^2 - \frac{9}{32}ql^2 - \frac{Fl}{4} = 0 \right. \longrightarrow R_D = \underline{-14{,}06\,kN} \uparrow$$

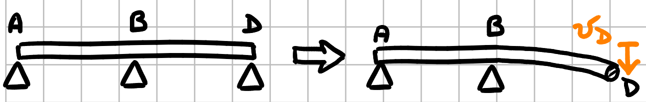
$\hookrightarrow R_G = \underline{-18{,}31\ kN} \uparrow$



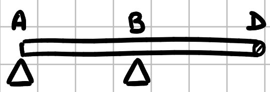
Si procede oltre...

CASO ③: VINCOLO ESTERNO (LATERALE) SOPPRESSO

Analogamente al caso precedente, la soppressione di un vincolo esterno permette di ipotizzare che sia ammesso liberamente lo spostamento della trave in corrispondenza del vincolo in questione; anche in questo caso dovremo imporre la condizione che tale spostamento sia mantenuto nullo, cosa che sarà resa possibile dall'incognita iperstatica, che anche in questo caso coincide con la reazione vincolare del vincolo soppresso.

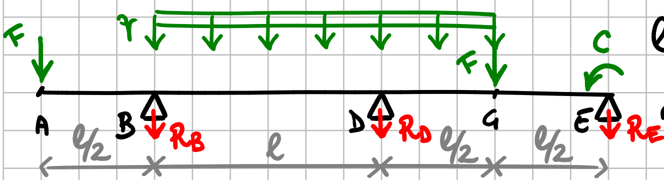


PERÓ NOI VOGLIAMO CHE:



Cioè: $v_D = 0$

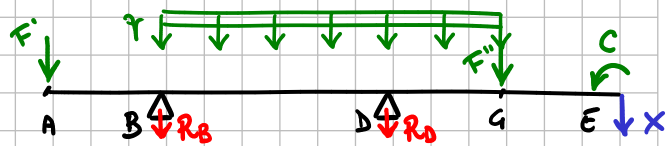
ESEMPIO:



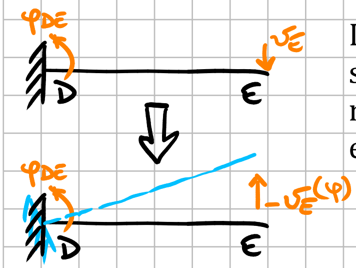
$l = 3\,m \quad q = 2\,kNm^{-1} \quad F = 4\,kN \quad C = 8\,kNm$

non-labile, 1 volta iperstatica ($i = s - 2t = 1$)

SOPPRESSIONE VINCOLO IN E:



Imponendo che $\begin{cases} v_E = 0 \\ X = R_E \end{cases}$ poniamo risalire ad R_E mediante le equaz. di congruenza



In questo caso, è opportuno notare che sullo spostamento della sezione E incide anche la rotazione della sezione D verso E, in modo tale che, supponendo che ϕ_{DE} sia positiva in senso antiorario e che v_E sia positivo verso il basso:

$$v_E = \sum_i v_E^{(i)} - \varphi_{DE} \cdot L = 0$$

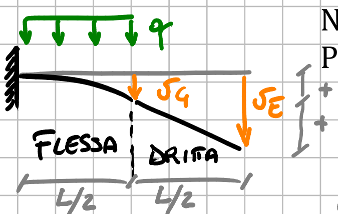
con L lunghezza della Trave DE

(In questo caso $L = l$)

Potrà risultare particolarmente difficile comprendere in che modo i carichi applicati influiscano sulla rotazione in D e sullo spostamento in E. Vediamo quindi ogni caso singolarmente, occupando tutto lo spazio necessario.

v_E dovuta ai carichi su DE: $\quad v_E^{(X)} + v_E^{(F'')} + v_E^{(C)} + v_E^{(q)}$

La più impegnativa sarà la quota dovuta al carico distribuito q, poiché questo caso particolare (solo la prima metà della trave è caricata) non è tabellato.



Notiamo subito che la mensola DE è flessa nel tratto DG e dritta nel tratto GE. Possiamo anche dimostrarlo poiché:

$T[z]_{GE} = 0 \text{ (cost)} \rightarrow M[z]_{GE} = 0$

dunque $\theta_{GE} = 0 \rightarrow \varphi_G = \varphi_E$

(Entrambi positivi)

$$v_E^{(q)} = v_G^{(q)} + \Delta v_{GE} = v_G^{(q)} - \varphi_{GD}^{(q)} \cdot \frac{L}{2}$$

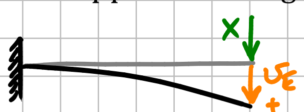
(contributo positivo a v)

Tabella alla mano, troviamo che

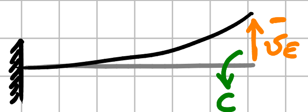
$$v_E^{(q)} = \frac{q\left(\frac{l}{2}\right)^4}{8EI} + \frac{q\left(\frac{l}{2}\right)^3}{6EI} \cdot \frac{l}{2}$$

$$= \frac{ql^4}{128EI} + \frac{ql^4}{96EI} = \frac{7}{384}\frac{ql^4}{EI}$$

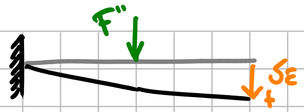
Esaminiamo quindi il resto dei carichi con la sovrapposizione degli effetti, iniziando proprio da X.



$$v_E^{(X)} = \frac{Xl^3}{3EI}$$

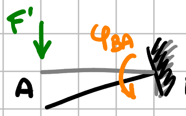


$$v_E^{(C)} = -\frac{Cl^2}{2EI}$$

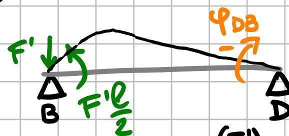


$v_E^{(F'')} = \frac{5}{48}\frac{F\ell^3}{EI}$ $\qquad$ $\sum_i v_E^{(i)} = \frac{X\ell^3}{3EI} + \frac{7}{384}\frac{q\ell^4}{EI} - \frac{C\ell^2}{2EI} + \frac{5}{48}\frac{F\ell^3}{EI}$

φ_{DE} dovuta ai carichi a sinistra: $\varphi_{DE} = ?$

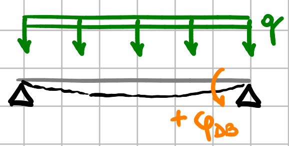


TEOREMA DEL TRASPORTO:



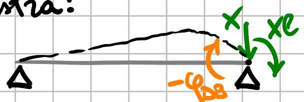
$$\varphi_{DB}^{(F')} = \varphi_{DE}^{(F')} = -\frac{F\ell}{2}\frac{\ell}{6EI} = -\frac{F\ell^2}{12EI}$$

Poi:

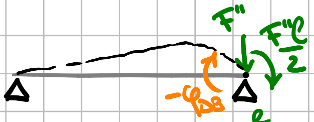


$$\varphi_{DB}^{(q)} = \varphi_{DE}^{(q)} = \frac{q\ell^3}{24EI}$$

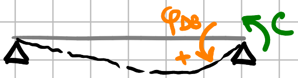
Da destra:



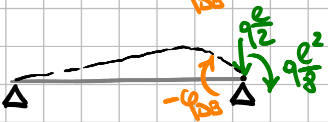
$$\varphi_{DB}^{(X)} = \varphi_{DE}^{(X)} = -\frac{X\ell}{3EI}$$



$$\varphi_{DB}^{(F'')} = \varphi_{DE}^{(F'')} = -\frac{F\ell^2}{6EI}$$



$$\varphi_{DB}^{(C)} = \varphi_{DE}^{(C)} = \frac{C\ell}{3EI}$$



$$\varphi_{DB}^{(q')} = \varphi_{DE}^{(q')} = -\frac{q\ell^3}{24EI}$$

$$-\varphi_{DB} = \cancel{\frac{q\ell^3}{24}} - \cancel{\frac{q\ell^3}{24}} + \frac{X\ell}{3} + \frac{F\ell^2}{6} + \frac{F\ell^2}{12} - \frac{C\ell}{3}$$

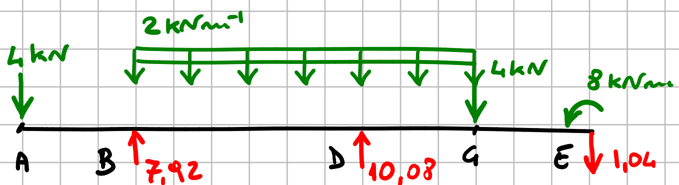
$$v_E = \frac{X\ell^3}{3EI} + \frac{7}{384}\frac{q\ell^4}{EI} - \frac{C\ell^2}{2EI} + \frac{5}{48}\frac{F\ell^3}{EI} + \frac{X\ell}{3EI} + \frac{F\ell^2}{6EI} + \frac{F\ell^2}{12EI} - \frac{C\ell}{3EI} = 0$$

Risolviamo per x: $X(=R_E) = -\frac{3}{2\ell}\left(\frac{7}{384}q\ell^2 - \frac{5}{6}C + \frac{17}{48}F\ell\right) \approx \underline{+1{,}04\,kN} \downarrow$

EQUILIBRIO SULLA TRAVE:

$$\begin{cases} \downarrow \quad R_B + \frac{3}{2}q\ell + 2F + R_E + R_D = 0 \\ E\circlearrowleft \quad \frac{C}{\ell} + \frac{5}{4}\cdot\frac{3}{2}q\ell + 2R_B + R_D + \frac{F}{2} + \frac{5}{2}F = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{array}{l} R_B = -R_D - (9+8+1) = -R_D - 18 \\ R_D = -2R_B - \left(\frac{8}{3} + \frac{15}{8}\cdot 6 + 3\cdot 4\right) = -2R_B - 25{,}92 \end{array}$$

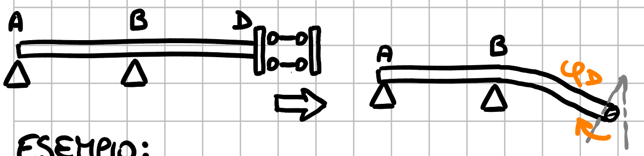
$R_B = \underline{-7{,}92\,kN} \uparrow$ $\qquad$ $R_D = \underline{-10{,}08\,kN} \uparrow$



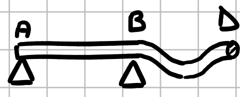
Si procede oltre...

CASO ④: VINCOLO ESTERNO SOPPRESSO – DOPPIO PENDOLO

Simile ai casi precedenti ma particolarmente complicata, la soppressione di un doppio pendolo si ottiene ipotizzando che sia ammessa liberamente la rotazione della sezione retta della trave collegata al doppio pendolo in questione; in questo caso dovremo imporre la condizione che tale rotazione sia mantenuto nulla da una coppia X applicata proprio al posto del doppio pendolo, che vale esattamente quanto la reazione del vincolo soppresso.



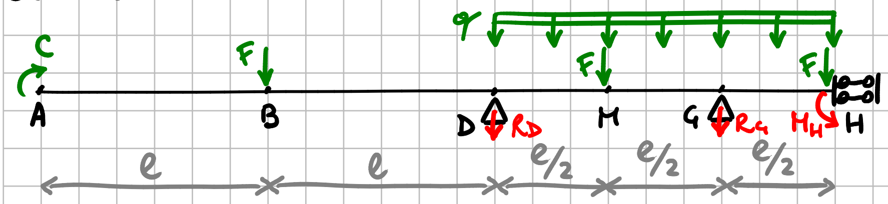
PERÓ NOI VOGLIAMO CHE:



Cioé: $\varphi_D + \varphi_{BD} = 0$

oppure $\varphi_D = -\varphi_{BD}$

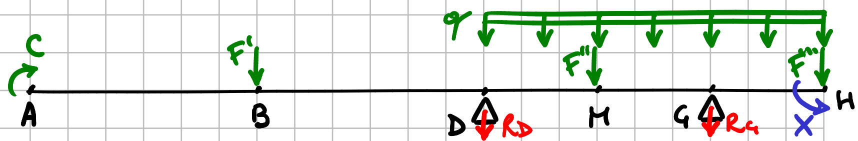
ESEMPIO:



$\ell = 3\,m \qquad q = 2\,kN\,m^{-1}$

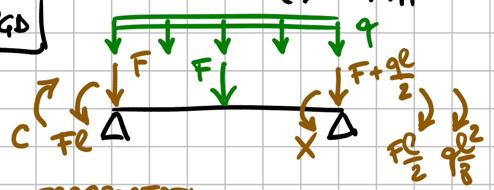
$F = 4\,kN \qquad C = 8\,kNm$

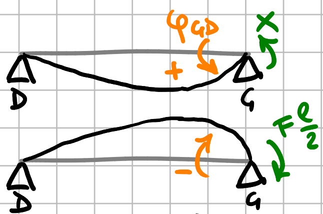
SOPPRESSIONE VINCOLO IN H:



Imponiamo che: $\begin{cases} \varphi_H + \varphi_{GH} = 0 \\ X = M_H \end{cases}$

$\boxed{\varphi_{GD}}$

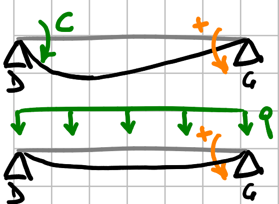




$$\varphi_{GD}^{(X)} = \frac{X\ell}{3EI}$$

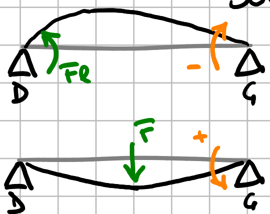
$$\varphi_{GD}^{(F'')} = -F\frac{\ell}{2}\cdot\frac{\ell}{3EI} = -F\frac{\ell^2}{6EI}$$

Analogamente $\varphi_{GD}^{\left(\frac{q\ell^2}{8}\right)} = -q\frac{\ell^2}{8}\,\frac{\ell}{3EI} = -\frac{q\ell^3}{24EI}$



$$\varphi_{GD}^{(C)} = \frac{C\ell}{6EI}$$

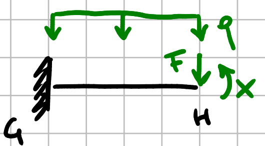
$$\varphi_{GD}^{(q)} = \frac{q\ell^3}{24EI}$$



$$\varphi_{GD}^{(F')} = -\frac{F\ell^2}{6EI}$$

$$\varphi_{GD}^{(F'')} = \frac{F\ell^2}{16EI}$$

$\boxed{\varphi_H}$



$$\varphi_H = -\frac{q\ell^3}{48EI} - \frac{F\ell^2}{8EI} + \frac{X\ell}{2EI}$$

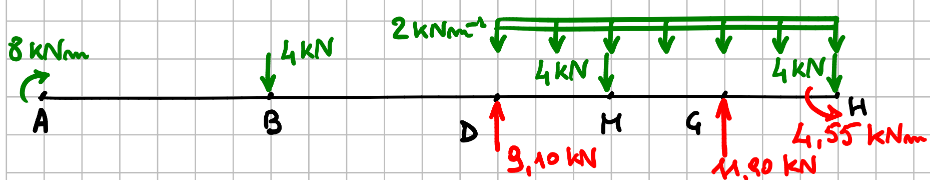
$$\frac{X\ell}{2EI} - \frac{q\ell^3}{48EI} - \frac{F\ell^2}{8EI} + \frac{X\ell}{3EI} - \cancel{\frac{q\ell^3}{24EI}} + \cancel{\frac{q\ell^3}{24EI}} - \frac{F\ell^2}{EI}\overbrace{\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{16}\right)}^{13/48} + \frac{C\ell}{6EI} = 0$$

$$\text{Dunque}\quad \frac{5}{6}X = \frac{q\ell^2}{48} + F\ell\underbrace{\left(\frac{1}{8} + \frac{13}{48}\right)}_{19/48} - \frac{C}{6} \longrightarrow X(=R_H) = \underline{+4{,}55\ kN}$$

$$\begin{aligned} \downarrow &\quad R_D + R_G + 3F + \frac{3}{2}q\ell = 0 \\ \circlearrowleft G &\quad \ell R_D + \cancel{\frac{F\ell}{2}} + 2F\ell - \frac{C}{\ell} + \frac{3}{8}q\ell^2 - \cancel{\frac{F\ell}{2}} + \frac{X}{\ell} = 0 \end{aligned}$$

$$R_D = \frac{C}{\ell} - 2F - \frac{3}{8}q\ell - \frac{X}{\ell} = \underline{-9{,}10\ kN}$$

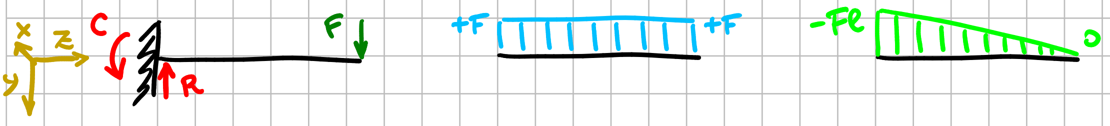
$$R_G = -R_D - 3F - \frac{3}{2}q\ell = \underline{-11{,}90\ kN}$$



Si procede oltre...

PROBLEMA FLESSIONALE (taglio + momento flettente)

Ricordiamo che per le travi viste durante il corso ed oggetto di esame non si considera il problema estensionale in quanto la trave è caricata solo ortogonalmente all'asse e mai ortogonalmente alla sezione retta. Il problema flessionale, consiste nell'identificazione dello sforzo di taglio e del momento flettente (attorno all'asse delle x, uscente) per ogni singolo tratto della trave.



Le regole generali sono le seguenti:

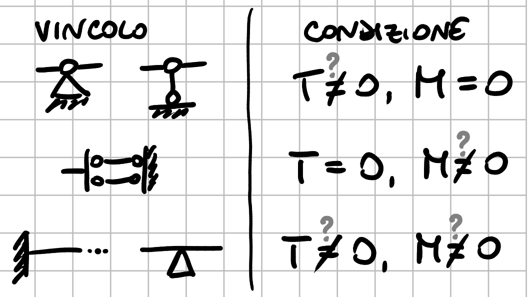
1) Su ogni tratto e sezione retta della trave valgono le equazioni indefinite di equilibrio.

$$T(z) = \sum_i F_{yi}(z) \qquad M(z) = \sum_i C_i + \sum_i (F_{yi} \cdot b_i)$$

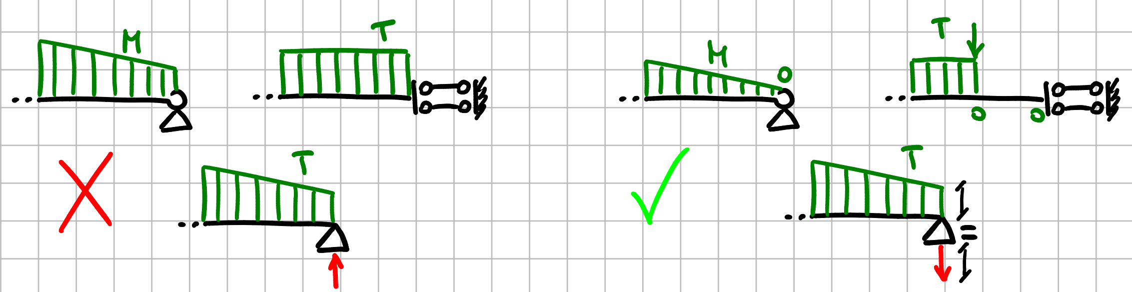
2) Su ogni nodo devono essere verificabili le condizioni di equilibrio alla traslazione ed alla rotazione, in particolare sulla prima e sull'ultima sezione retta.

$$\begin{cases} F_A = 0 \rightarrow T_A + R = 0 \rightarrow T_A = -R = F \\ M_A = 0 \rightarrow C + M_A = 0 \rightarrow M_A = -C = -F\ell \\ F_B = 0 \rightarrow T_B + R + F = 0 \rightarrow T_B = F - R = 0 \end{cases}$$

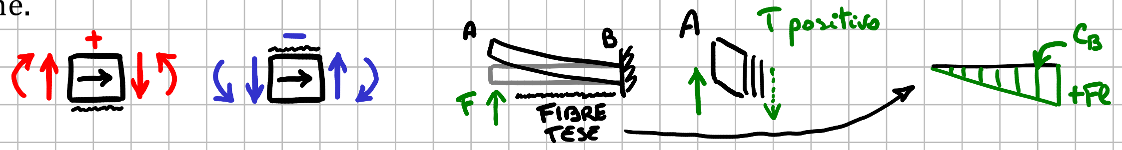
3) Al di là degli incastri e degli appoggi, generalmente i vincoli ammettono sempre almeno un grado di libertà: ad esempio, cerniere e pendoli non hanno una reazione vincolare che si oppone alla rotazione, per cui in corrispondenza di tali vincoli è necessario verificare che il momento flettente sia nullo, mentre non è detto che lo sia il taglio. Vedere tabella al lato.



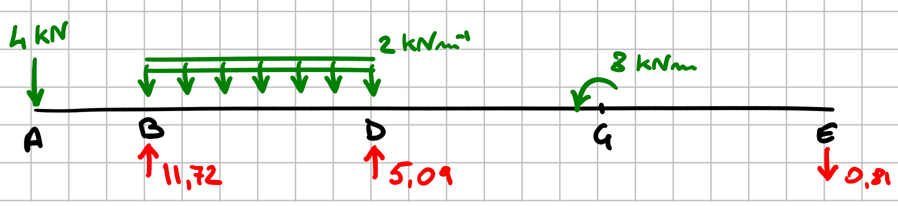
4) Se completati i calcoli per il diagramma del taglio o del momento non è verificato l'equilibrio sull'ultima sezione, vuol dire che si è commesso qualche errore.

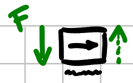


5) I segni di momento e taglio devono seguire una determinata convenzione; il diagramma del momento deve sempre essere disegnato dal lato della trave su cui troviamo tese le fibre del materiale soggetto a flessione.



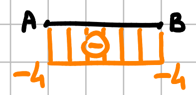
Proponiamo un esempio di problema flessionale svolto sulla trave piana del caso 1, di cui abbiamo già completamente risolto il problema statico. Ricordiamoci che per il problema flessionale la sconnessione a cerniera operata per calcolare le reazioni vincolari non ha alcun significato.



TAGLIO SEZIONE A: 

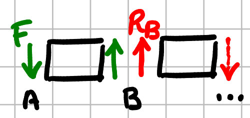
Taglio negativo → $T_A = -F = -4\ kN$

TRATTO AB: $T(z) = \int_0^z q_{AB}(z)\,dz + T(0) = T_A = \underline{-4\ kN}$ COSTANTE $(T_B = T_A)$



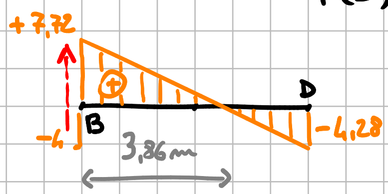
TRATTO BD: $T(z) = \int_0^z q_{AB}(z)\,dz + T(0) = T_B - qz$ LINEARE

dove $T_B = T_B^- + |R_B| = -4 + 11{,}72 = \underline{+7{,}72\ kN}$

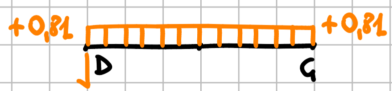


$T_D = T(\ell) = T_B - q\ell = 7{,}72 - 2\cdot 6 = \underline{-4{,}28\ kN}$

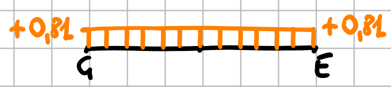
$T(z') = 0$ per $z' = \frac{T_B}{q} = 3{,}86\ m$ $(\approx 0{,}64\,\ell)$



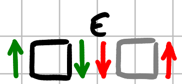
TRATTO DG:
$T(z) = \int_0^z q_{AB}(z)\,dz + T(0) = T_D = T_D^- + |R_D| = \underline{+0{,}81\ kN}$ COSTANTE $(T_G = T_D)$



TRATTO GE:
$T(z) = \int_0^z q_{AB}(z)\,dz + T(0) = T_G = T_G^- = \underline{+0{,}81\ kN}$ COSTANTE $(T_E = T_G)$

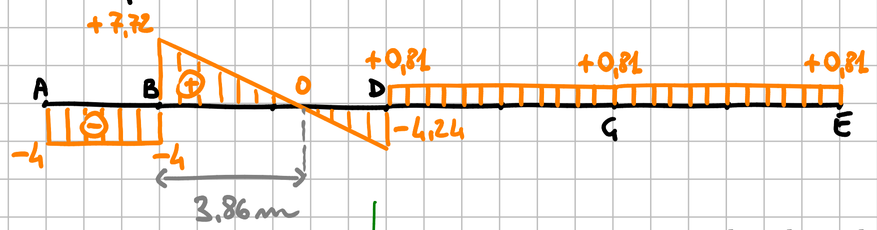


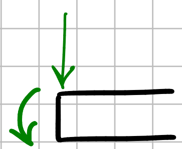
È verificato l'equilibrio in E?



$T_E^+ = T_E^- - |R_E| = \emptyset$ **SÍ**

Diagramma completo:



MOMENTO SEZIONE A: 

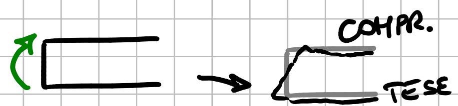
Ipotizziamo che oltre al taglio, sulla sezione A sia applicato un momento flettente C. Come si comportano le fibre del materiale?

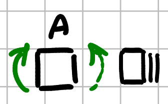
Coppia C: 

Dunque: 

TESE SOPRA, COMPR. SOTTO } Per convenzione, $M < 0 \rightarrow M_A = -C$

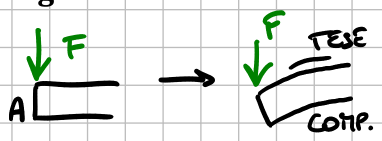
E se C ruotasse in senso orario?



Dunque: 

COMPR. SOPRA, TESE SOTTO } Per convenzione, $M > 0 \rightarrow M_A = C$

Dimentichiamoci della coppia C dell'esempio e continuiamo regolarmente la realizzazione del diagramma.



Ricordando la convenzione: $M_{AB}^{(F)} < 0$

Ma questo risultato è garantito anche dall'equazione indefinita di equilibrio, perché:

$$\frac{dM}{dz} - T(z) + \cancel{c(z)} = 0 \longrightarrow \Delta M = \int_A^B T(z) \cdot dz < 0 \text{ perché } T(z) < 0$$

TRATTO AB: $M_A = \sum_i C_i^{(A)} = 0 \qquad M(z) = M_A + \int_0^z T(z) \cdot dz = -4 \cdot z$

Dunque: $M_B = M\left(\frac{\ell}{2}\right) = M(3m) = \underline{-12 \text{ kNm}}$

TRATTO BD: $M_B = \sum_i C_i^{(B)} = M_B^- = -12 \text{ kNm}$

$$M(z) = -12 + \int_0^z T(z) dz = -12 + \int_0^z (T_B - qz) dz = -12 + 7{,}72 \cdot z - \frac{1}{2} q z^2$$

(PARABOLICO)

Da cui: $M_D = M(\ell) = M(6m) = \underline{-1{,}68 \text{ kN}}$

Inoltre: $M_{max} = M(T=0) = M(z') = \underline{+2{,}90 \text{ kN}}$

Il momento sarà nullo due volte, una perché deve passare da un valore negativo ad uno positivo e l'altra perché deve passare da un valore positivo ad un altro negativo.

$$M(z'') = 0 \text{ per } z'' = \frac{-T_B \pm \sqrt{T_B^2 + 2M_A q}}{-q} \longrightarrow z'' = \{5{,}56m ; 2{,}16m\}$$

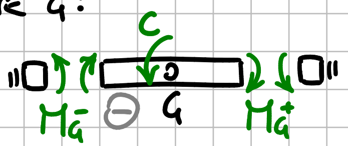
(Oppure usa una calcolatrice come farebbe qualsiasi essere umano con due pollici ed un cervello)

TRATTO DG: T cost $\rightarrow M(z)$ lineare $\qquad M_D = M_D^- = -1{,}68 \text{ kNm}$

$$M(z) = M_D + T_D \cdot z \longrightarrow M_G = M(\ell) = M(6m) = \underline{+3{,}18 \text{ kNm}}$$

Dunque $M(z''') = 0$ per $z''' = \frac{|M_D|}{T_D} = \underline{2{,}07 \text{ m}}$

SEZIONE G:

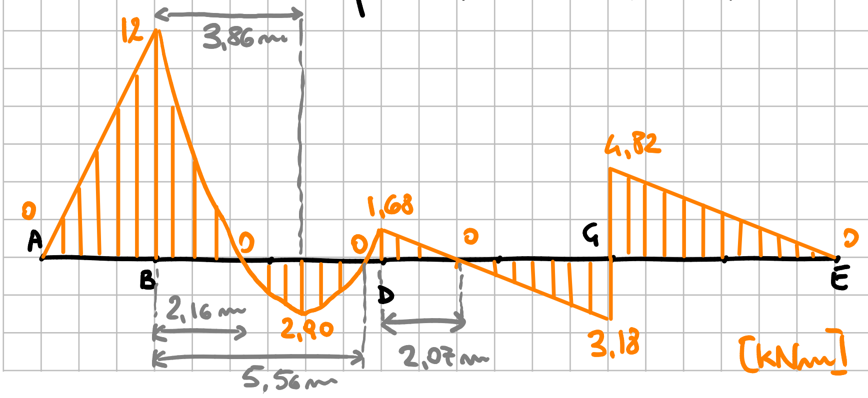


Dunque $M_G^+ = M_G^- - C = \underline{-4{,}82 \text{ kNm}}$

TRATTO GE: Come per DG $\rightarrow M(z) = M_G^+ + T \cdot z \rightarrow M_E = M(\ell) =$

$-4{,}82 + 6 \cdot 0{,}81 \approx \emptyset$ kN

(Verificato eq. alla rotazione in E)



DEFORMATA A MANIERA

= fatta a mano, quindi con un certo grado di imprecisione; è importante che siano rispettati legami costitutivi ed equazioni di congruenza esterna.

La deformata è «la configurazione assunta dall'asse di una struttura sotto l'azione dei carichi esterni; riguardo alle deformazioni elastiche si dice più propriamente linea elastica» (Treccani).
In pratica, la deformata che disegneremo "a maniera" dovrà rappresentare il comportamento della trave studiata sotto l'effetto dei carichi esterni in termini di spostamenti e rotazioni delle singole sezioni rette.
Naturalmente non è richiesto che la deformata sia fedele "uno a uno" alla deformazione reale della trave, ed è richiesto che siano quantomeno rispettate due regole, riassumibili come:

1) La concavità (der. seconda) della linea deformata dipende dal segno del momento flettente;
2) In corrispondenza dei vincoli, lo spostamento e/o la rotazione della sezione possono essere nulli.

2 REGOLE:

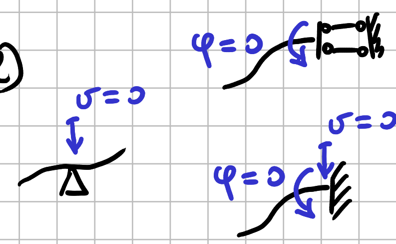
① $M_x = -EI \dfrac{d''v}{dz}$

$M_x > 0 \rightarrow v$ é concavo verso ↑ ∪

$M_x < 0 \rightarrow v$ é concavo verso ↓ ∩

$M_x = 0 \rightarrow v$ esibisce un p.to di flesso

②

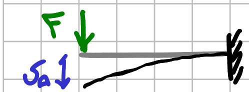


Dobbiamo rappresentare accuratamente solo la concavità della trave deformata e le condizioni a contorno cinematiche in corrispondenza dei vincoli.

Esempio:

SEZIONE A

$M_A = 0 \quad v_A > 0$

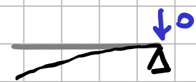


TRATTO AB

$M_{AB} < 0$ FIBRE TESE SOPRA

CONC. VERSO IL BASSO (c.v.d.)

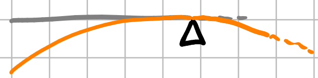
SEZIONE B



$v_B = 0$

$M_B^- < 0$

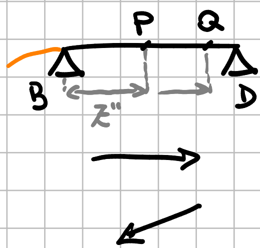
$M_B^+ < 0$



Per i punti in cui il momento è nullo, è necessario indicare chiaramente il cambio nella concavità.

Esempio: TRATTO BD:

$$\left\{\begin{array}{ll} v_B = 0 & M_{PQ} > 0 \;\cup \\ v_D = 0 & M_D < 0 \;\cap \\ M_B < 0 \;\cap & M(z'') = 0 \end{array}\right\}$$



Sappiamo che:

1: $v_B = 0$ B $M_B < 0$

2: $M_D < 0$ D $v_D = 0$

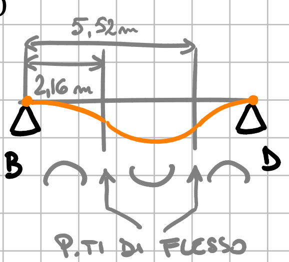
3: P $M_P = 0$ ($v_P \neq 0$*)

4: Q $M_Q = 0$ ($v_Q \neq 0$*)

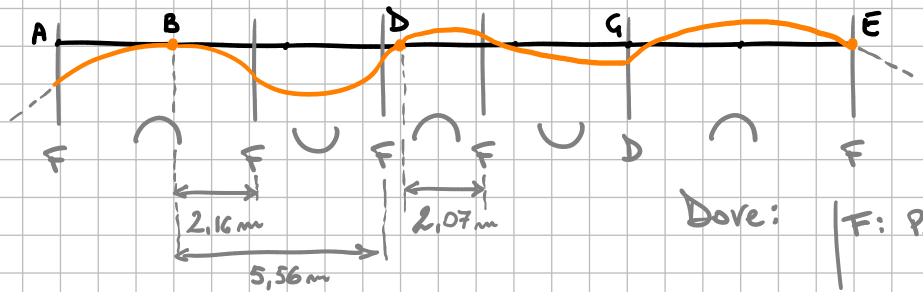
5: P Q $M_{PQ} > 0$

* NON CI INTERESSA REALMENTE

La deformata del resto del tratto BD possiamo disegnarla a mano:



Disegniamo dunque il diagramma completo:



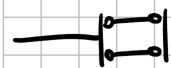
Dove:

F: P.TO DI FLESSO
$M_P = 0$

D: DISCONTINUITÀ DEL MOMENTO
$M_P^- \neq M_P^+ \cap (M_P^-)\cdot(M_P^+) < 0$

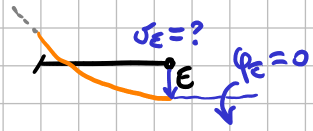
E se in E io avessi avuto un incastro/doppio pendolo?

1.



$\begin{cases} \varphi_E = 0 \\ M_E^- \neq 0 \end{cases}$ ⇝

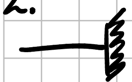
F. TESE: ↓
CONC: ∪



(Supponiamo $M_E^- > 0$, R_E: ↺)

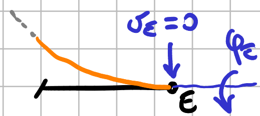
PENDENZA NULLA IN E

2.



$\begin{cases} v_E = 0 \\ \varphi_E = 0 \\ M_E^- \neq 0 \end{cases}$ ⇝

F. TESE: ↓
CONC: ∪



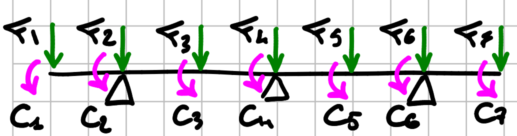
(Supponiamo $M_E^- > 0$, R_E: ↺)

PENDENZA NULLA IN E
SPOSTAMENTO NULLO IN E

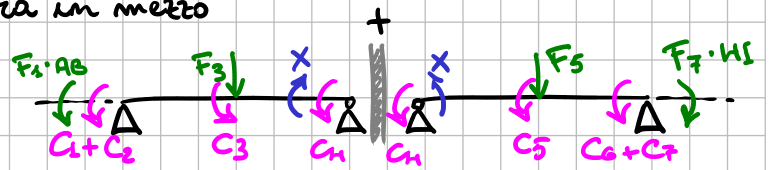
ADDENDUM: LE DEFORMAZIONI NEL METODO DELLE FORZE

Ma quindi, imposte le equazioni di congruenza esterna, come so quale carico contribuisce ad un determinato spostamento/rotazione su un determinato tratto della trave?
Proviamo a dare una rappresentazione grafica riferendoci ai casi esempio analizzati precedentemente.
Supponiamo di applicare su tali travi un numero n di forze e momenti tali da averne almeno una coppia per nodo (quindi una agli estremi, una per ogni vincolo ed una a metà di ogni tratto appoggiato-appoggiato).

CASO ①: 2 TRAVI APPOGGIATE, cerniera in mezzo

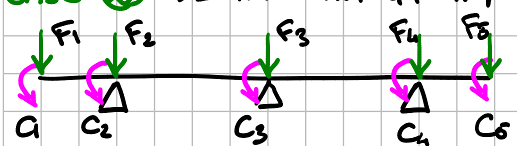


⇝

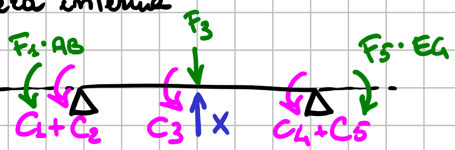


Si ignorano le forze applicate direttamente in corrispondenza del vincolo; per entrambe le travi si considerano solo i contributi dei carichi applicati sulla trave stessa e dal lato esterno opposto alla cerniera.

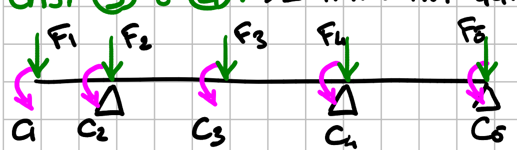
CASO ②: 1 TRAVE APPOGGIATA, no cerniera interna



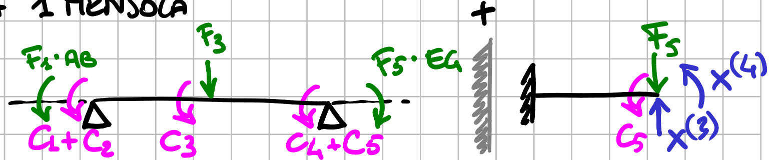
⇝



CASI ③ E ④: 1 TRAVE APPOGGIATA + 1 MENSOLA

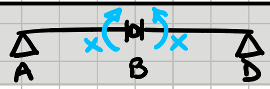
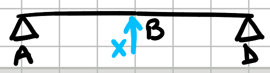
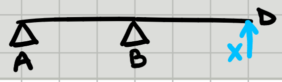
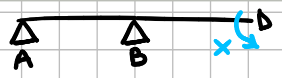


⇝

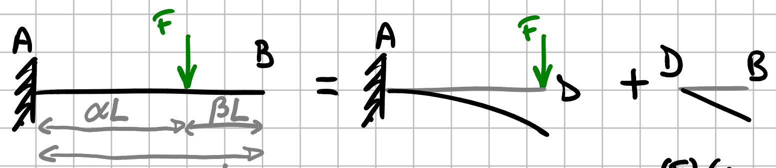


Per la mensola ignoriamo i carichi a sinistra (o a destra) dell'incastro, mentre sulla trave appoggiata si considerano tutti i carichi sui tratti esterni (a destra e a sinistra) dei due vincoli.

ADDENDUM: RIEPILOGO C.C., CASO PER CASO

CASO	VINCOLO SOPPRESSO	INCOGNITA	COND. A CONTORNO
1	INTERNO		$\varphi_{BA} = \varphi_{BD}$
2	ESTERNO CENTRALE		$v_B = 0$
3	ESTERNO LATERALE		$v_D = 0$
4	ESTERNO (DOPPIO PENDOLO)		$\varphi_D = -\varphi_{BD}$

ADDENDUM: CARICHI APPLICATI NON PRESENTI SUL FORMULARIO/MANUALE



con $0<\alpha<1$, $\beta = 1-\alpha$

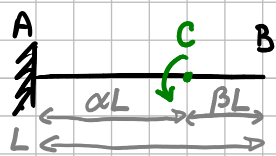
TRATTO DB: $T(z) = T_B = 0$

$$M(z) = \cancel{T(z)z} + M_D = M_B = 0$$

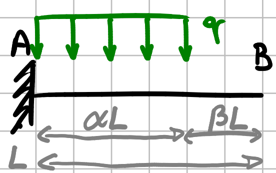
Dunque
$$\begin{cases} \varphi_B = \varphi_D = \varphi^{(F)}(\ell = \alpha L) \\ v_B = v_D + v(\varphi_D) = v^{(F)}(\ell=\alpha L) \overset{?}{-} \varphi^{(F)}(\ell = \alpha L)\cdot \beta L \end{cases}$$

* TABELLATI

Analoga dimostrazione si fa per C e $q(z)$:



$$\begin{cases} \varphi_B = \varphi^{(C)}(\ell = \alpha L) \\ v_B = v^{(C)}(\ell = \alpha L) - \varphi^{(C)}(\ell=\alpha L)\cdot \beta L \end{cases}$$



$$\begin{cases} \varphi_B = \varphi^{(q)}(\ell = \alpha L) \\ v_B = v^{(q)}(\ell = \alpha L) - \varphi^{(q)}(\ell=\alpha L)\cdot \beta L \end{cases}$$

NOTA:
$v_B = v_D - \varphi_D \beta L$ ha segno meno perché ad una rotazione positiva corrisponde uno spostamento negativo