Appunti di Scienza delle Costruzioni

Capitolo 01b

Teoria lineare o infinitesima

DISCLAMER GENERALE:

L'autore - PioApocalypse - non si assume alcuna responsabilità per l'uso improprio dei contenuti di questo documento, né si ritiene responsabile della performance - positiva o negativa che sia - dello studente in sede d'esame.

Il materiale didattico qui fornito è da considerarsi come un supplemento al materiale indicato dal docente della materia, e trova le sue utilità principali nel riepilogo di lunghi segmenti del programma e nella spiegazione di determinati argomenti in cui lo studente potrebbe aver riscontrato difficoltà. Alcuni termini e semplificazioni qui utilizzati potrebbero non essere idonei durante la discussione degli argomenti del corso con il docente in sede d'esame, e sono proposti solo al fine di aiutare lo studente con la comprensione della materia.

Si prega, infine, di segnalare eventuali errori trovati all'interno del documento all'indirizzo e-mail indicato sulla repository ufficiale, presso la quale è anche possibile trovare un link per chiunque desiderasse fare una piccola donazione all'autore.

Si ringrazia in anticipo per la cooperazione.

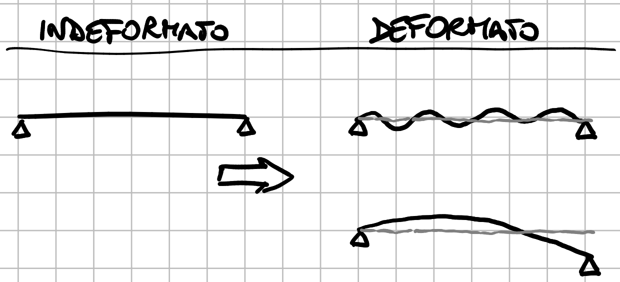
- PioApocalypse

TEORIA LINEARE (O INFINITESIMA)

La teoria lineare ragiona dietro ipotesi di "piccole (infinitesime) deformazioni".

$$\left|\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right| << 1$$

Un certo numero di applicazioni ingegneristiche soddisfano tale proprietà e seguono i modelli proposti di seguito, ad esempio automobili, travi, telai, etc.



Caso 1: derivate parziali delle componenti di spostamento FINITE (rilevanti).

Caso 2: derivate parziali delle componenti di spostamento << 1 (trascurabili).

Sotto queste ipotesi, ovviamente il tensore di Green si semplifica perché:

$$\begin{cases} \varepsilon_i = \varepsilon_{ii} = \dfrac{\partial u_i}{\partial x_i} \\ \varepsilon_{ij} = \dfrac{\partial u_i}{\partial x_j} + \dfrac{\partial u_j}{\partial x_i} = \dfrac{1}{2}\gamma_{ij} \end{cases} \qquad \underline{\underline{E}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \frac{1}{2}\gamma_{12} & \frac{1}{2}\gamma_{13} \\ \frac{1}{2}\gamma_{12} & \varepsilon_{22} & \frac{1}{2}\gamma_{23} \\ \frac{1}{2}\gamma_{13} & \frac{1}{2}\gamma_{23} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}$$

$$\frac{ds^2 - dS^2}{dS^2} = 2\underline{\underline{E}} \cdot \hat{N} \cdot \hat{N} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \frac{1}{2}\gamma_{12} & \frac{1}{2}\gamma_{13} \\ \frac{1}{2}\gamma_{12} & \varepsilon_{22} & \frac{1}{2}\gamma_{23} \\ \frac{1}{2}\gamma_{13} & \frac{1}{2}\gamma_{23} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{bmatrix}$$

IN TERMINI DIFFERENZIALI:

Per ogni $i \rightarrow u_i = u_i^0 + \int_{P_0}^{P} du_i$

In valore assoluto:

$$|u_i| = \left|u_i^0 + \int_{P_0}^{P} du_i\right| \leq |u_i^0| + \left|\int_{P_0}^{P} du_i\right|$$

(DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE)

ma: $$|u_i^0| + \left|\int_{P_0}^{P} du_i\right| \leq |u_i^0| + \int_{P_0}^{P} |du_i|$$

(PROPR. INTEGRALI)

$$* = |u_i^0| + \int_{P_0}^{P} \left| \frac{\partial u_1}{\partial X_1} dX_1 + \frac{\partial u_2}{\partial X_2} dX_2 + \frac{\partial u_3}{\partial X_3} dX_3 \right|$$

(DA 1a)

Siccome $\dfrac{\partial u_i}{\partial X_i} << 1$ da ipotesi:

$$* << |u_i^0| + \int_{P_0}^{P} |1 \cdot dX_1 + 1 \cdot dX_2 + 1 \cdot dX_3| = |u_i^0| + \|\underline{PP_0}\|$$

Ora:

SE IPOTIZZIAMO PICCOLE DEFORMAZIONI:

$$|u_i| \ll |u_i^{\circ}| + \|\underline{PP_o}\|$$

SE IPOTIZZIAMO CHE ESISTE P_o VINCOLATO A NON SPOSTARSI:

$$u_i^{\circ} = 0$$

DUNQUE:

$$\boxed{|u_i| \ll \|\underline{PP_o}\|}$$

Le componenti di spostamento della generica particella P del corpo C sono trascurabili rispetto ad una dimensione caratteristica L dello stesso.
Se noi decidessimo di prendere come L il diametro del corpo (la più grande distanza possibile tra due punti P e Po) quanto appena affermato vale certamente.

$$\left|\frac{u_i}{L}\right| \ll 1$$

È quindi lecito confondere la configurazione deformata con quella indeformata, ai soli fini della scrittura delle relazioni di equilibrio.

PROPRIETÁ DEL GRADIENTE DEGLI SPOSTAMENTI

$$d\underline{u} = \underbrace{\nabla \underline{\underline{u}}} \cdot d\underline{X}$$

$$\hookrightarrow \nabla \underline{\underline{u}} : d\underline{X} \in V_3$$

Siccome $\nabla \underline{\underline{u}} \cdot (d\underline{X} + d\underline{Y}) = \nabla \underline{\underline{u}} \cdot d\underline{X} + \nabla \underline{\underline{u}} \cdot d\underline{Y}$ parliamo di ADDITIVITÁ

Siccome $\nabla \underline{\underline{u}} \cdot (\lambda\, d\underline{X}) = \lambda \nabla \underline{\underline{u}} \cdot d\underline{X}$ parliamo di OMOGENEITÁ

Siccome ogni matrice può essere scritta come la somma di una simmetrica ed una antisimmetrica, definiamo $\underline{\underline{\omega}}$.

$$\nabla \underline{\underline{u}} = \underline{\underline{\varepsilon}} + \underline{\underline{\omega}} \longrightarrow \frac{\partial u_i}{\partial X_j} = \varepsilon_{ij} + \omega_{ij}$$

$$\begin{cases} \varepsilon_{ij} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_i}{\partial X_j} + \dfrac{\partial u_j}{\partial X_i}\right) \\ \omega_{ij} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_i}{\partial X_j} - \dfrac{\partial u_j}{\partial X_i}\right) \end{cases}$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2}\left(\nabla \underline{\underline{u}} + \nabla \underline{\underline{u}}^T\right) \qquad \underline{\underline{\omega}} = \frac{1}{2}\left(\nabla \underline{\underline{u}} - \nabla \underline{\underline{u}}^T\right)$$

Dunque:

$$d\underline{u} = \nabla \underline{\underline{u}} \cdot d\underline{X} = (\underline{\underline{\varepsilon}} + \underline{\underline{\omega}}) \cdot d\underline{X} = \underline{\underline{\varepsilon}} \cdot d\underline{X} + \underline{\underline{\omega}} \cdot d\underline{X} = d\underline{u}^{(\varepsilon)} + d\underline{u}^{(\omega)}$$

dove: $d\underline{u}^{(\varepsilon)}$ imprime un cambiamento di forma (deformazione pura);
$d\underline{u}^{(\omega)}$ imprime una rotazione rigida;

Quindi chiamiamo
- $\underline{\underline{\varepsilon}} \rightarrow$ TENSORE DI DEFORMAZIONE INFINITESIMA
- $\underline{\underline{\omega}} \rightarrow$ TENSORE DI ROTAZIONE INFINITESIMA

Principio di sovrapposizione delle deformazioni e delle rotazioni infinitesime

Siano impressi ad un corpo C due campi di spostamenti: $\underset{\sim}{u}^{(1)}$; $\underset{\sim}{u}^{(2)}$

Siano associati ad entrambi i campi i rispettivi tensori di deformazione e di rotazione infinitesima: $\underset{\sim}{\varepsilon}_1$, $\underset{\sim}{\omega}_1$; $\underset{\sim}{\varepsilon}_2$, $\underset{\sim}{\omega}_2$

Sia $\underset{\sim}{u}$ il campo di spostamenti somma di $\underset{\sim}{u}^{(1)}$ e $\underset{\sim}{u}^{(2)}$, cui sono associati i tensori $\underset{\sim}{\varepsilon}$ e $\underset{\sim}{\omega}$

È dimostrabile che:
$$\begin{cases} \underset{\sim}{\varepsilon} = \underset{\sim}{\varepsilon}_1 + \underset{\sim}{\varepsilon}_2 \\ \underset{\sim}{\omega} = \underset{\sim}{\omega}_1 + \underset{\sim}{\omega}_2 \end{cases}$$

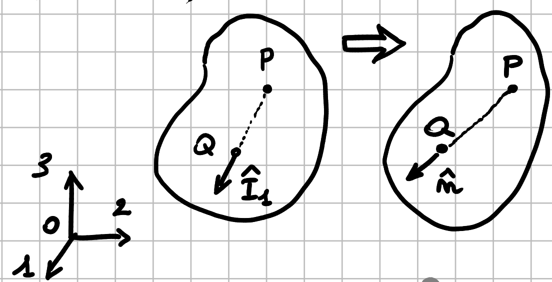
La dimostrazione è ovvia per le ben note proprietà delle derivate.

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i}\right) = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial u_i^1}{\partial X_j} + \frac{\partial u_i^2}{\partial X_j}\right) + \left(\frac{\partial u_j^1}{\partial X_i} + \frac{\partial u_j^2}{\partial X_i}\right)\right) = \varepsilon_{ij}^{(1)} + \varepsilon_{ij}^{(2)}$$

(Analoga dimostrazione per ω_{ij})

Coefficiente di dilatazione lineare

Ricordiamo $d\underline{x} = d\underline{X} + d\underline{u}$



Assumiamo un segmento infinitesimo nell'intorno indeformato lungo la direz. dell'asse 1.

$$\begin{cases} dX_1 = dS \\ dX_2 = 0 \\ dX_3 = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} dx_1 = dX_1 + du_1 = dX_1 + \left(\frac{\partial u_1}{\partial X_1}dX_1 + \cancel{\frac{\partial u_1}{\partial X_2}dX_2}^{0} + \cancel{\frac{\partial u_1}{\partial X_3}dX_3}^{0}\right) \\ dx_2 = \cancel{dX_2}^{0} + \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_1}dX_1 + \cancel{\frac{\partial u_2}{\partial X_2}dX_2}^{0} + \cancel{\frac{\partial u_2}{\partial X_3}dX_3}^{0}\right) \\ dx_3 = \cancel{dX_3}^{0} + \left(\frac{\partial u_3}{\partial X_1}dX_1 + \cancel{\frac{\partial u_3}{\partial X_2}dX_2}^{0} + \cancel{\frac{\partial u_3}{\partial X_3}dX_3}^{0}\right) \end{cases}$$

$$\hookrightarrow \begin{cases} dx_1 = dX_1 + \frac{\partial u_1}{\partial X_1}dX_1 \\ dx_2 = \frac{\partial u_2}{\partial X_1}dX_1 \\ dx_3 = \frac{\partial u_3}{\partial X_1}dX_1 \end{cases}$$

(Riportate in LaTeX per chiarezza)

... ricordando che $ds = \sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2}$ ...

Allora:

$$ds = dX_1\sqrt{\left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial X_1}\right)^2 + \underbrace{\cancel{\left(\frac{\partial u_2}{\partial X_1}\right)^2} + \cancel{\left(\frac{\partial u_3}{\partial X_1}\right)^2}}_{\approx 0}} \approx dX_1\left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial X_1}\right) = dX_1(1 + \varepsilon_1)$$

Dunque:

$$\boxed{\frac{ds - dS}{dS} = \frac{\cancel{dX_1} + \varepsilon_1 \cancel{dX_1} - \cancel{dX_1}}{\cancel{dX_1}} = \varepsilon_1}$$

(Familiare?)

Lungo una direzione arbitraria $\hat{N}$ $\qquad \varepsilon(P,\hat{N}) = \dfrac{ds - dS}{dS}$

$$\frac{ds^2 - dS^2}{dS^2} = \frac{(ds + dS)(ds - dS)}{dS} \approx \frac{2\cancel{dS}(ds - dS)}{\cancel{dS^2}} = 2\,\frac{ds - dS}{dS}$$

DA CUI:

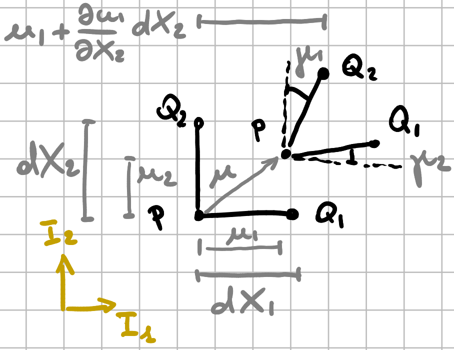
$$\varepsilon(P,\hat{N}) = \varepsilon_1 N_1^2 + \varepsilon_2 N_2^2 + \varepsilon_3 N_3^2 + \gamma_{12} N_1 N_2 + \gamma_{13} N_1 N_3 + \gamma_{23} N_2 N_3$$

$$\hookrightarrow \quad \varepsilon(P,\hat{N}) = \underline{\underline{\varepsilon}} \cdot \hat{N} \cdot \hat{N}$$

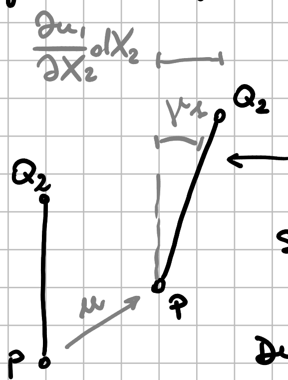
SCORRIMENTO ANGOLARE

Si prenda in esame una coppia di segmenti infinitesimi aventi l'origine in uno stesso punto P, ma lungo le direzioni ortogonali 1 e 2.

Per effetto della deformazione, l'angolo iniziale di questi segmenti (90°) non sarà più lo stesso a seguito della deformazione.



$\gamma_1 \approx \sin(\gamma_1) = \dots ? \qquad \gamma_2 \approx \sin(\gamma_2) = \dots ?$



$$\leftarrow ?:\ ds_2 = dS_2 + \varepsilon_2 dS_2 = dX_2(1 + \varepsilon_2)$$

$$\sin(\gamma_1) = \frac{\partial u_1}{\partial X_2} dX_2 \,/\, ds_2 = \frac{\partial u_1}{\partial X_2} \cdot \frac{1}{(1+\varepsilon_2)} = \frac{\partial u_1}{\partial X_2}\,\frac{1-\varepsilon_2}{1-\varepsilon_2^2}$$

DUNQUE $\quad \gamma_1 \approx \sin(\gamma_1) \approx \dfrac{\partial u_1}{\partial X_2}$

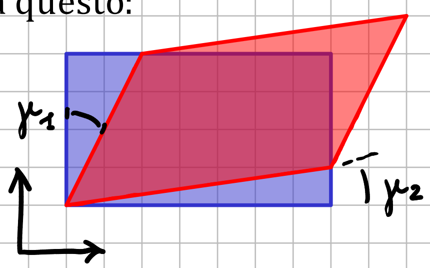
ANALOGAMENTE $\quad \gamma_2 \approx \sin(\gamma_2) \approx \dfrac{\partial u_2}{\partial X_1}$

Notare che: $\quad \gamma_1 + \gamma_2 = \dfrac{\partial u_1}{\partial X_2} + \dfrac{\partial u_2}{\partial X_1} = \gamma_{12}$

Analogamente si può pervenire a:

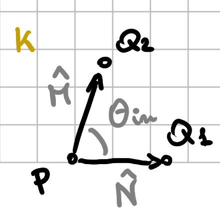
$$\begin{cases} \gamma_{13} = \dfrac{\partial u_1}{\partial X_3} + \dfrac{\partial u_3}{\partial X_1} = \gamma_1 + \gamma_3 \\[2ex] \gamma_{23} = \dfrac{\partial u_2}{\partial X_3} + \dfrac{\partial u_3}{\partial X_2} = \gamma_2 + \gamma_3 \end{cases}$$

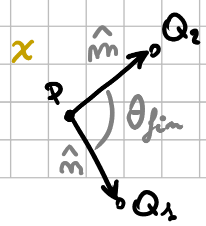
L'effetto sull'intorno dovrebbe essere qualcosa di simile a questo:



In due direz. arbitrarie N ed M:

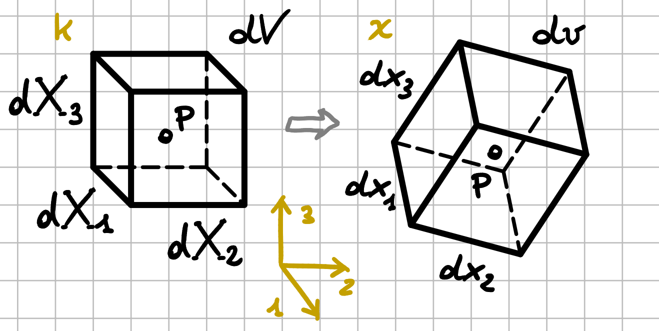
$$\begin{cases} \gamma_{NM} = \theta_{in} - \theta_{fin} = \underbrace{\widehat{NM} - \widehat{nm}}_{\text{ANGOLI}} = 2\,\underline{\underline{\varepsilon}} \cdot \underbrace{\hat{N} \cdot \hat{M}}_{\text{VERSORI}} \\ \gamma_{NM} = \gamma_{MN} \end{cases}$$





Coefficiente di dilatazione volumetrica

Si consideri un intorno del corpo C indeformato a forma di parallelepipedo retto. Post-deformazione, il parallelepipedo potrebbe essere non-retto, e presentare un volume differente. Assumiamo sia questo il caso.



Scriviamo che: $dV = dX_1 \cdot dX_2 \cdot dX_3$

$$dv = \left| \det\left(\frac{\partial(x_1 x_2 x_3)}{\partial(X_1 X_2 X_3)} \right) \right| dV$$

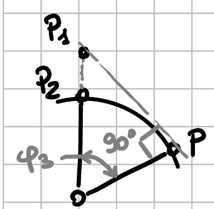
$$= \det\left(\delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial X_j} \right) \approx 1 + \frac{\partial u_1}{\partial X_1} + \frac{\partial u_2}{\partial X_2} + \frac{\partial u_3}{\partial X_3} = 1 + tr(\underline{\underline{\varepsilon}})$$

Dunque se: $dv = (1 + tr\,\underline{\underline{\varepsilon}})\, dV \longrightarrow \frac{dv - dV}{dV} = \frac{dv}{dV} - 1 \approx tr(\underline{\underline{\varepsilon}})$

La traccia del tensore di deformazione pura equivale approssimativamente al coefficiente di dilatazione (o contrazione) volumetrica.

Rotazione infinitesima

Si consideri un tensore $\underset{\sim}{R}$ associato ad una rotazione intorno ad un asse, supponiamo l'asse 3. Per effetto di una rotazione rigida:



$$\exists \underline{x} :! \ \underline{x} = \underline{\underline{R}} \cdot \underline{X} \longrightarrow \underline{u} = \underline{x} - \underline{X} = (\underset{\sim}{R} - \underset{\sim}{I}) \cdot \underline{X}$$

Ricordando di essere sotto ipotesi di spostamenti infinitesimi, per cui:

$$\sin\varphi \approx \varphi \quad \text{e} \quad \cos\varphi \approx 1$$

$$\underset{\sim}{R} = \begin{bmatrix} \cos\varphi_3 & -\sin\varphi_3 & 0 \\ \sin\varphi_3 & \cos\varphi_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & -\varphi_3 & 0 \\ \varphi_3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\varphi_3 & 0 \\ \varphi_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \underline{\underline{I}}$$

$$\underline{u} = (\underset{\sim}{R} - \underset{\sim}{I}) \cdot \underline{X} = \begin{bmatrix} 0 & -\varphi_3 & 0 \\ \varphi_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \underline{X}$$

Siccome nel caso più generale una rotazione rigida può essere una rotazione intorno a tutti e tre i versori del SDR, in generale vale che:

$$\underset{\sim}{R} = \begin{bmatrix} 0 & -\varphi_3 & \varphi_2 \\ \varphi_3 & 0 & -\varphi_1 \\ -\varphi_2 & \varphi_1 & 0 \end{bmatrix} + \underset{\sim}{I} \longrightarrow \underline{u} = \begin{bmatrix} 0 & -\varphi_3 & \varphi_2 \\ \varphi_3 & 0 & -\varphi_1 \\ -\varphi_2 & \varphi_1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \underline{X}$$

Ma se:

$$d\underline{u}^{(\omega)} = \underline{\underline{\omega}} \cdot d\underline{X}$$

e <u>non</u> abbiamo deformazioni... $\longrightarrow$

$$\boxed{\underline{\underline{\omega}} = \begin{bmatrix} 0 & -\varphi_3 & \varphi_2 \\ \varphi_3 & 0 & -\varphi_1 \\ -\varphi_2 & \varphi_1 & 0 \end{bmatrix}}$$

DEFORMAZIONI PRINCIPALI E DIREZ. PRINCIPALI DI DEFORMAZIONE

Ricordiamo che:

$$d\underline{u} = d\underline{x} - d\underline{X} = \nabla\underline{\underline{u}} \cdot d\underline{X} = (\underline{\underline{\varepsilon}} + \underline{\underline{\omega}}) \cdot d\underline{X} = \underset{\sim}{\varepsilon} \cdot d\underline{X} + \underset{\sim}{\omega} \cdot d\underline{X}$$

$$\text{dunque:} \quad d\underline{u} = d\underline{u}^{(\varepsilon)} + d\underline{u}^{(\omega)}$$

Scriviamo:

$d\underline{X} = dS\,\hat{N}$ dove N sarà il versore di un generico segmento orientato PQ

A vettori PQ disposti lungo una stessa direzione si può dunque associare un unico versore.
Verifichiamo dunque se esiste una direzione associabile al versore N per la quale, per effetto della sola deformazione pura, si trasformi in se stessa:

$$\underset{\sim}{\varepsilon} \cdot \hat{N} = \lambda \hat{N} \qquad \text{OSSIA: } (\underset{\sim}{\varepsilon} - \lambda \cdot \underset{\sim}{I}) \cdot \hat{N} = \underset{\sim}{0} \text{ (MATRICE NULLA)}$$

Dunque:

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_1 - \lambda & \frac{1}{2}\gamma_{12} & \frac{1}{2}\gamma_{13} \\ \frac{1}{2}\gamma_{12} & \varepsilon_2 - \lambda & \frac{1}{2}\gamma_{23} \\ \frac{1}{2}\gamma_{13} & \frac{1}{2}\gamma_{23} & \varepsilon_3 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Esistono $\lambda_I \geq \lambda_{II} \geq \lambda_{III}$ "DEFORMAZ. PRINCIPALI"

Esistono $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ "DIREZIONI PRINCIPALI DI DEFORMAZ."

tali che:

$$(\underset{\sim}{\varepsilon} - \lambda_i \underset{\sim}{I}) \cdot \hat{e}_i = \underset{\sim}{0} \quad \forall i \in \{1,2,3\}$$

Se dati i e j (indici generici da 1 a 3)...

- $\varepsilon_i \neq \varepsilon_j$ allora $\hat{e}_i \perp \hat{e}_j$ (TERNA ORTONORMALE)

Dimostrazione:

$$\left| \begin{array}{l} \underset{\sim}{\varepsilon} \cdot \hat{e}_1 \cdot \hat{e}_2 = \varepsilon_I \hat{e}_1 \cdot \hat{e}_2 \\ \underset{\sim}{\varepsilon} \cdot \hat{e}_2 \cdot \hat{e}_1 = \varepsilon_{II} \cdot \hat{e}_2 \cdot \hat{e}_1 \end{array} \right| \rightarrow \underset{\sim}{\varepsilon}\,\overset{0}{\cancel{(\hat{e}_1 \cdot \hat{e}_2 - \hat{e}_2 \cdot \hat{e}_1)}} = \overset{\neq 0}{(\varepsilon_I - \varepsilon_{II})}\,\hat{e}_1 \cdot \hat{e}_2$$

$$\hookrightarrow \hat{e}_1 \cdot \hat{e}_2 = \underline{0} \qquad \text{c.v.d.}$$

- $\varepsilon_i = \varepsilon_j$ allora TUTTE le direzioni nel piano $\hat{e}_1\hat{e}_2$ sono principali

Dimostrazione: esiste $\hat{N} = \alpha\hat{e}_1 + \beta\hat{e}_2$

$$\underset{\sim}{\varepsilon} \cdot \hat{N} = \alpha\,\underset{\sim}{\varepsilon} \cdot \hat{e}_1 + \beta\,\underset{\sim}{\varepsilon} \cdot \hat{e}_2 = \underline{\alpha\,\varepsilon_I \cdot \hat{e}_1 + \beta\,\varepsilon_{II} \cdot \hat{e}_2}$$

ma $\varepsilon_I = \varepsilon_{II}$ per ipotesi, quindi $* = \varepsilon_I(\alpha\hat{e}_1 + \alpha\hat{e}_2) = \varepsilon_I \cdot \hat{N}$

In pratica abbiamo dimostrato che, indipendentemente da α e β...

$$\underset{\sim}{\varepsilon} \cdot \hat{N} = \varepsilon_I \hat{N} \quad \forall \alpha, \beta \qquad \text{c.v.d.}$$

Cosa rappresentano le deformazioni principali?
Rappresentano la massima e la minima dilatazione lineare possibile; infatti...

Posto $\varepsilon_I \le \varepsilon_{II} \le \varepsilon_{III}$, assunto un generico $\hat{N} = [N_1 \; N_2 \; N_3]$

$$\underset{\sim}{\varepsilon} \cdot \hat{N} \cdot \hat{N} = \begin{bmatrix} \varepsilon_I & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{III} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{bmatrix} = \varepsilon_I N_1^2 + \varepsilon_{II} N_2^2 + \varepsilon_{III} N_3^2$$

Ma per ipotesi:

$$* \le \varepsilon_I (N_1^2 + N_2^2 + N_3^2) = \varepsilon_I$$

$$* \ge \varepsilon_{III} (N_1^2 + N_2^2 + N_3^2) = \varepsilon_{III}$$

Cosa rappresentano le direzioni principali di deformazione?
Rappresentano la terna di versori per i quali il tensore di deformazione pura è diagonale.

$$\underset{\sim}{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_I & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{III} \end{bmatrix} \quad \text{per } \hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$$

SPOSTAMENTI RIGIDI INFINITESIMI

Un campo di spostamenti si definisce rigido infinitesimo se ad esso corrisponde un tensore di deformazione infinitesima nullo in tutti i punti del corpo continuo:

$$\forall \underline{X} \rightarrow \underset{\sim}{\varepsilon}(\underline{X}) = \underline{\underline{0}}$$

Per detto campo di spostamenti si può dimostrare agevolmente come la parte antisimm. del suo gradiente si uguale da punto a punto, ossia che $\underset{\sim}{\omega} = \underline{\underline{\text{cost}}}$

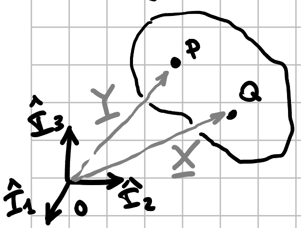
$$\underline{u}(\underline{Y}) = \underline{u}(\underline{X}) + \underset{\sim}{\omega}(\underline{Y} - \underline{X})$$

DOVE $\underline{Y} \rightarrow$ POSIZIONE DI UN DATO PUNTO $P \in C$

$\underline{X} \rightarrow$ POSIZIONE DI UN DATO PUNTO $Q \in C : | \; Q \neq P$

e dove...

$$\underset{\sim}{\omega} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_2} - \frac{\partial u_2}{\partial X_1}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_3} - \frac{\partial u_3}{\partial X_1}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial X_1} - \frac{\partial u_1}{\partial X_2}\right) & 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial X_3} - \frac{\partial u_3}{\partial X_2}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial X_1} - \frac{\partial u_1}{\partial X_3}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial X_2} - \frac{\partial u_2}{\partial X_3}\right) & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\varphi_3 & \varphi_2 \\ \varphi_3 & 0 & -\varphi_1 \\ -\varphi_2 & \varphi_1 & 0 \end{bmatrix}$$



Definiamo $\underline{\varphi} = [-\omega_{23}; \omega_{13}; -\omega_{12}]$

È chiaro che:

$$\underline{u}(\underline{Y}) = \underline{u}(\underline{X}) + \underset{\sim}{\omega} \cdot (\underline{Y} - \underline{X})$$

$$= \underline{u}(\underline{X}) + \underline{\varphi} \wedge (\underline{Y} - \underline{X})$$

Assumiamo che Q sia il polo del campo di spostamenti rigidi infinitesimi.
In questo caso, $\underline{\varphi}$ sarà il vettore della rotazione del corpo lungo i tre assi e intorno a Q.

Il campo di spostamenti è in questo caso di tipo roto-traslatorio;
cambiando il polo cambia anche il vettore traslazione, mentre il vettore rotazione rimane immutato.

Dato Q' : | $\underline{X}'$ ne sia vettore posizione, $\underline{X}' \neq \underline{X}$

$$\left.\begin{cases} \underline{u}(\underline{Y}) = \underline{u}(\underline{X}) + \varphi \wedge (\underline{Y} - \underline{X}) \\ \underline{u}(\underline{X}') = \underline{u}(\underline{X}) + \varphi \wedge (\underline{X}' - \underline{X}) \end{cases}\right\} \xrightarrow{\text{SOTTRAZ.}} \underline{u}(\underline{Y}) - \underline{u}(\underline{X}') = \varphi \wedge (\underline{Y} - \underline{X}')$$

$$\underline{u}(\underline{Y}) = \underline{u}(\underline{X}') + \varphi \wedge (\underline{Y} - \underline{X}')$$

φ non cambia, $\underline{X}$ sì