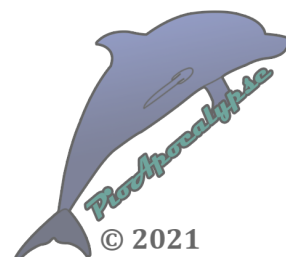


Appunti di Scienza delle Costruzioni

Capitolo 05b

Teoria di de Saint-Venant



I contenuti del seguente documento sono protetti sotto licenza [Creative Commons BY-NC-SA 4.0](#): sono quindi ammesse la **condivisione**, la **ridistribuzione** e la **modifica** del materiale ivi contenuto, sotto le seguenti condizioni:

- **Attribuzione**: nel documento originale e nelle sue modifiche deve sempre figurare il nome reale o lo pseudonimo dell'autore, nonché la bibliografia originale;
- **Non-Commerciale**: è vietato qualsiasi utilizzo del presente documento e dei suoi contenuti a scopo commerciale e/o pubblicitario; ciò include la rivendita dello stesso o di parte dei suoi contenuti, ma è permessa la vendita a prezzo di stampa;
- **Share-Alike**: (it: "*Condividi allo stesso modo*") qualsiasi ridistribuzione del documento modificato o di parte di esso deve essere reso disponibile sotto la stessa licenza dell'originale, o sotto licenza ad essa compatibile.

Si chiede inoltre, anche se non è espressamente vietato, di non ridistribuire tale documento o parte dello stesso su piattaforme cloud private per pubblicizzare associazioni o eventi.

DISCLAIMER GENERALE:

L'autore - [PioApocalypse](#) - non si assume alcuna responsabilità per l'uso improprio dei contenuti di questo documento, né si ritiene responsabile della performance - positiva o negativa che sia - dello studente in sede d'esame.

Il materiale didattico qui fornito è da considerarsi come un supplemento al materiale indicato dal docente della materia, e trova le sue utilità principali nel riepilogo di lunghi segmenti del programma e nella spiegazione di determinati argomenti in cui lo studente potrebbe aver riscontrato difficoltà. Alcuni termini e semplificazioni qui utilizzati potrebbero non essere idonei durante la discussione degli argomenti del corso con il docente in sede d'esame, e sono proposti solo al fine di aiutare lo studente con la comprensione della materia.

Si prega, infine, di segnalare eventuali errori trovati all'interno del documento all'indirizzo e-mail indicato sulla [repository ufficiale](#), presso la quale è anche possibile trovare un link per chiunque desiderasse fare una piccola donazione all'autore.

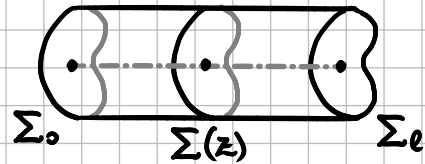
Si ringrazia in anticipo per la cooperazione.

- PioApocalypse

TEORIA DEL DE SAINT-VENANT (PER $\nu \approx 0$)

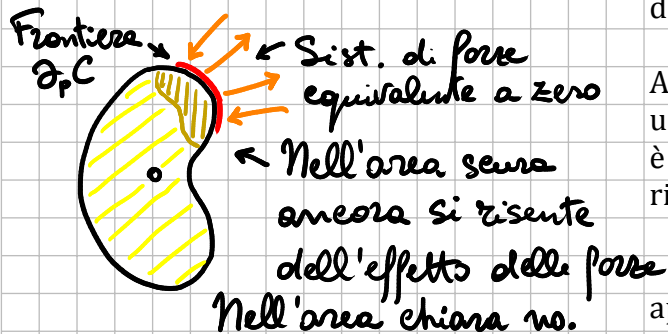
IPOTESI DI TRAVE DEL DE SAINT-VENANT:

- Trave ad asse rettilineo;
- Forze di massa nulle;
- Forze di superficie agenti sul mantello della trave nulle;
- Forze di superficie agenti solo sulle basi della trave;
- Solido libero da vincoli;
- Deformazioni infinitesime;
- Materiale isotropo, elastico e lineare;
- Vale il principio di de Saint-Venant.



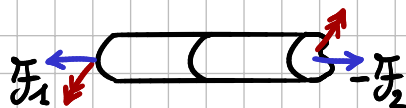
PRINCIPIO DEL DE SAINT-VENANT

Assegnato un sistema di forze equivalente a zero agente su una porzione della frontiera di un corpo continuo, lo stato di tensione tende ad essere nullo nei punti del solido a partire da una certa distanza dalla frontiera, definita come DISTANZA DI ESTINZIONE, che dipende dalla dimensione e dalla forma della frontiera.



Affinché il principio sia di fatto utilizzabile, e cioè esista una zona in cui non si risente dell'effetto delle forze, è necessario che la superficie $\partial p C$ sia piuttosto piccola rispetto alle dimensioni del corpo. Nel caso della trave, è necessario che il solido sia sufficientemente lungo rispetto alle dimensioni delle basi, sulle quali sono applicate le forze.

Pensiamo ora di applicare alle due basi di una trave due sistemi di forze (e momenti) perfettamente uguali, tali che:



$$F_1 - F_2 = 0$$

Per sovrapposizione degli effetti, le deformazioni e gli spostamenti associati a questo sistema di forze saranno dati dalle differenze tra deformazioni e spostamenti dovuti a F_1 ed F_2

Inoltre, siccome tale sistema è effettivamente equivalente a zero, possiamo applicarvi il principio del de Saint-Venant, per cui oltre la distanza di estinzione i valori delle tensioni non dipendono dall'effettiva distribuzione delle forze ma solo dal loro risultante e dal loro momento risultante. Questo ci permette una serie di semplificazioni, come ad esempio la possibilità di assumere che le tensioni siano applicate in corrispondenza del baricentro della sezione retta in analisi.



Per travi a sezione compatta, la distanza di estinzione si può assumere approssimativamente pari alla metà della maggiore dimensione della

sezione retta ("diametro"). Tuttavia, la stessa indicazione non si può estendere alle sezioni a parete sottile, per le quali vi è dunque la prassi di irrigidire opportunamente le suddette zone con una serie di accorgimenti idonei alla particolare tecnologia utilizzata (strutture in acciaio).

EQUAZIONE DI NAVIER PER σ_z

$$\begin{cases} \sigma_x = 0 & \tau_{yz} = G \gamma_{yz} \\ \sigma_y = 0 & \tau_{xz} = G \gamma_{xz} \\ \sigma_z = E \epsilon_z & \tau_{xy} = 0 \end{cases} \quad \left| \quad \underline{t} = \underline{0} \text{ su } \partial p C \rightarrow \underline{\tau} \cdot \underline{\hat{n}} = \underline{0} \right.$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & 0 & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_{xz} m_1 \\ \tau_{yz} m_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\hookrightarrow M_a \epsilon_z = \gamma_z(z) + \theta_x(z) \cdot y - \theta_y(z) \cdot x$$

$$\text{Dunque } \sigma_z(z) = E(\gamma_z(z) + \theta_x(z) \cdot y - \theta_y(z) \cdot x)$$

Dallo studio del problema elasto-statico affrontato nel capitolo precedente però ricordiamo:

$$\varepsilon(z) = \gamma_z(z) = \frac{N(z)}{E \cdot \Sigma(z)} \quad \theta_x(z) = \frac{M_x(z)}{E I_x} \quad \theta_y(z) = \frac{M_y(z)}{E I_y}$$

Dunque:

$$\sigma_z(z) = \frac{N(z)}{A} + \frac{M_x(z)}{I_x} y - \frac{M_y(z)}{I_y} x$$

...ottenendo così l'EQUAZIONE DI NAVIER per la tensione normale.

Prima di iniziare a vedere il paragrafo sulla tensione normale nella sezione retta con Navier, diamo alcune definizioni:

- Chiameremo ASSE NEUTRO il luogo geometrico dei punti della sezione in corrispondenza dei quali la tensione normale è nulla; la sua posizione ed inclinazione dipendono dai carichi esterni, dalla superficie e dai momenti d'inerzia della sezione.
- Chiameremo ASSE DI FLESSIONE l'asse ortogonale all'asse neutro; indica la direzione lungo la quale varia linearmente la tensione normale.
- Chiameremo ASSE MOMENTO l'asse lungo cui è disposto il momento flettente risultante; la sua inclinazione dipende solo dai momenti flettenti, e non da superficie, sforzo normale e momenti d'inerzia;
- Chiameremo ASSE DI SOLLECITAZIONE l'asse ortogonale all'asse momento.

FLESSIONE COMPOSTA (disegno)

ANGOLO:

$\alpha \rightarrow$ inclinazione assi neutri n e n_0

$\beta \rightarrow$ inclinazione asse di sollecitazione.

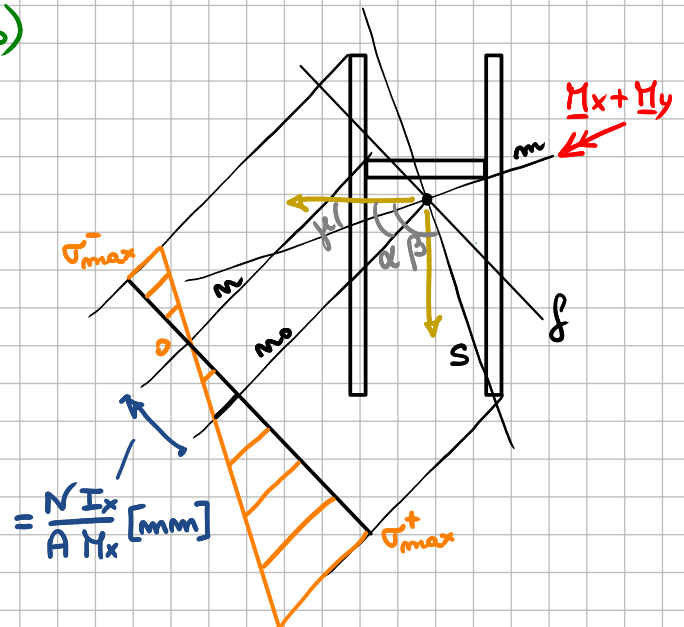
$\gamma \rightarrow$ inclinazione asse momento

$$\beta = \gamma + 90^\circ$$

$$\tan \alpha = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = \frac{M_2}{M_1} \cdot \frac{I_1}{I_2}$$

$$\tan \gamma = \frac{M_2}{M_1}$$

$$\tan \beta = \tan(\gamma + 90^\circ) = -\frac{M_1}{M_2}$$



Se $N > 0$ parliamo di TENSO-FLESSIONE

Se $N < 0$ parliamo di PRESSO-FLESSIONE

NOTA: n_0 corrisponderebbe all'asse neutro se $N = 0$. Ovviamente $n \neq n_0$

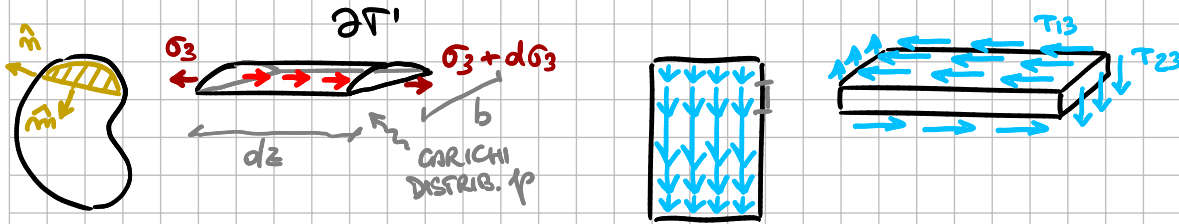
Gli altri casi affrontati nell'esercizio sulla verifica di sicurezza sono casi particolari di questa situazione più generale. Come cambiano in tal caso i diagrammi è spiegato nel dettaglio nell'apposito documento.

$N \neq 0, M_x \text{ e } M_y = 0 \rightarrow$ SFORZO NORMALE CENTRATO ($n \equiv m$)

$N = 0, M_x \text{ o } M_y \neq 0 \rightarrow$ FLESSIONE SEMPLICE/RETTA ($m \perp s$)

$N = 0, M_x \text{ e } M_y \neq 0 \rightarrow$ FLESSIONE DEVIATA (α, β, γ , ma $n \equiv n_0$)

TENSIONI TANGENZIALI DA TAGLIO (ALLA JOURAWSKI)



Fortunatamente, sembra che la presenza di sforzi di taglio non influisca significativamente sulla formula della tensione normale vista in precedenza. Pertanto, anche in presenza di taglio la formula di Navier è ancora valida. Il taglio in sé, tuttavia, non dà origine ad una flessione pura come nel caso del momento flettente: le tensioni in gioco sono tangenziali, e funzionano diversamente.

L'esempio proposto dal canale The Efficient Engineer della trave composta da più tavole di legno è un'eccellente dimostrazione di come funzionino queste tensioni così complesse da comprendere, ed è quindi proposta la visualizzazione di questo video (copia e incolla):

<https://www.youtube.com/watch?v=f08Y39UiC-o> [Understanding Stresses in Beams]

Equilibrio alla trazione lungo l'asse z :

$$\tau_{mz} b dz + \int_{\Sigma} d\sigma_z d\Sigma = 0$$

$$= \tau_{mz} b dz + \int_{\Sigma} \left(\frac{dN}{A} + \frac{dM_x}{I_x} \varepsilon_z - \frac{dM_y}{I_y} \varepsilon_x \right) d\Sigma$$

Differenziando rispetto a z :

$$\tau_{mz} b + \int_{\Sigma} \left(\frac{-p}{A} + \frac{\tau_y}{I_x} \varepsilon_z + \frac{\tau_x}{I_y} \varepsilon_x \right) d\Sigma = 0$$

$$\text{siccome: } A = \int d\Sigma, \int \varepsilon_z d\Sigma = S_1, \int \varepsilon_x d\Sigma = S_2$$

allora:

$$\tau_{mz} = \frac{p}{b} - \frac{\tau_y \cdot S_x}{I_x b} - \frac{\tau_x \cdot S_y}{I_y b}$$

L'altra componente si trova con la III^a eq. indefinita di equilibrio:

$$\frac{\partial \tau_{mz}}{\partial n} + \frac{\partial \tau_{mz}}{\partial n} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0 \quad \xrightarrow{\frac{d^2}{dz^2}} \quad \frac{\partial^3 \tau_{mz}}{\partial z^3} = 0$$

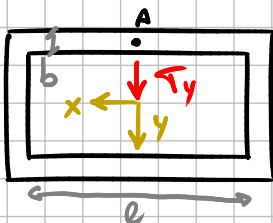
$$\tau_{mz} = A_0 + A_1 z + A_2 z^2$$



SEZIONI SOTTILI

Sulle sezioni a parete sottile, le tensioni tangenziali sono calcolabili con il metodo spiegato nel paragrafo apposito dell'esercizio sulle verifiche di sicurezza.

CHIUSE BICONNESSE



$$\tau(A) = 0 \quad \text{a sinistra e destra:} \quad 0 \leq s \leq \frac{h}{2}$$

Contemporaneamente a sinistra e destra:

$$S_x = b \cdot 2s \cdot \left(-\frac{h}{2} \right) \quad \tau_{mz} = -\frac{\tau_y S_x}{I_x 2b}$$

CENTRO DI TAGLIO

Il centro di taglio (CT) è «il punto di una sezione trasversale di una trave per cui deve passare la retta d'azione dello sforzo tagliante affinché non si produca momento torcente sulla sezione».

- Wikipedia

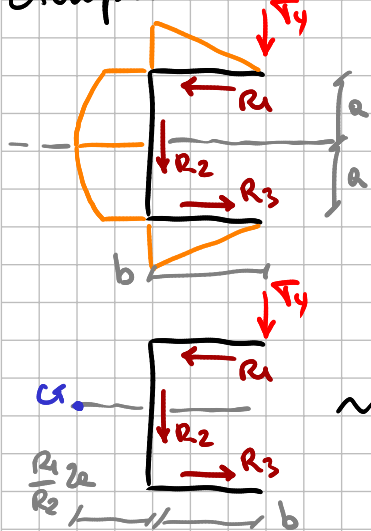
Il CT giace sempre sull'asse di simmetria, o coincide con l'intersezione tra due assi di simmetria. Nelle travi a sezione sottile è talvolta possibile trovarlo per costruzione se tutti gli elementi della sezione si incrociano nello stesso punto - es. sezione a T, a Y, a X, a L, a V.

Nelle travi a sezione assialsimmetrica coincide semplicemente con l'intersezione tra il piano della sezione e l'asse di rotazione. Per tutte le altre sezioni è necessario calcolarlo.

Nelle sezioni sottili, è sufficiente calcolare tutte le risultanti di tutte le tensioni tangenziali sui vari elementi della stessa e imporre l'equilibrio alla rotazione in un punto qualsiasi, come se il braccio di ogni risultante sia la distanza tra la retta d'azione della stessa ed il CT.

Rispetto al CT è possibile calcolare il momento torcente imposto dallo sforzo di taglio sulla sezione, qualora questo non fosse allineato con il CT; tale momento torcente si somma ad eventuali momenti torcenti dati (dovuti a carichi esterni).

Esempio:



G sicuramente sull'asse di simmetria ($y = y_c$)

Supponiamo G sia a sinistra di R_2 :

$$R_1 a + R_3 a - R_2 d = 0 \rightarrow d = \frac{R_1}{R_2} 2a (>0)$$

d è la distanza tra la retta d'azione di R_2 ed il CT. È positiva, quindi verso sinistra come previsto

$$\leadsto M_G(T_y) = T_y \cdot d_{CT} = T_y \cdot \left(\frac{R_1}{R_2} 2a + b \right)$$

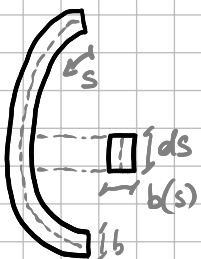
FATTORI DI TAGLIO

$$\beta_1 = \int \frac{A S_2'^2}{b^3 I_2^2} d\Sigma \quad \beta_2 = \int \frac{A S_1'^2}{b^3 I_1^2} d\Sigma \quad \beta_{12} = - \int \frac{A S_1' S_2'}{b^3 I_1 I_2} d\Sigma$$

TENSIONI TANGENZIALI DA TORSIONE ($M_t \equiv M_x \equiv M_y$)

Le sezioni rette di molte delle travi in uso nella pratica tecnica sono realizzate come unione di elementi rettangolari sottili, più semplici da studiare se prese singolarmente.

Su una sezione retta generica, momenti statici / d'inerzia, proprietà varie e tensioni tangenziali vanno ricercati con il calcolo integrale; prendiamo quindi una sezione sottile aperta di forma generica.



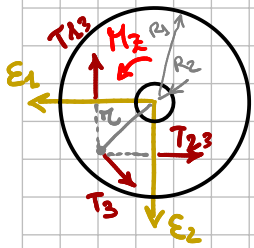
$$J_T = \int \frac{1}{3} (b(s))^3 ds \quad [\text{mm}^3] \doteq \text{MODULO D'INERZIA TORSIONALE}$$

$$\text{Ricordiamo che: } \theta_z = \frac{M_t}{G \cdot I_p} = \frac{1}{G \cdot J_T} \sum_i M_{ti}$$

Si dimostra, imponendo l'equilibrio alle rotazioni attorno all'asse z:

$$\tau_{t,z}(s) = \frac{\sum M_{ti}}{J_T} b(s)$$

SEZIONI ASSIALSIMMETRICHE (es. alberi in rotazione, $R_2 \ll R_1$)



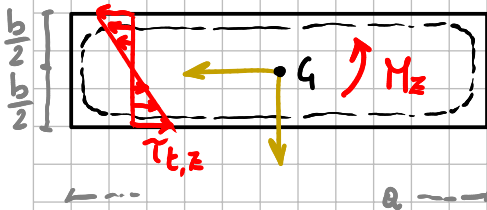
$$\begin{cases} \gamma_{xz} = \gamma_x - \theta_z y \\ \gamma_{yz} = \gamma_y - \theta_z x \\ \theta_z = \frac{M_z}{G I_p} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tau_{13} = -\frac{M_z}{I_p} \varepsilon_2 \\ \tau_{23} = \frac{M_z}{I_p} \varepsilon_1 \end{cases}$$

$$\tau_3 = \sqrt{\tau_{13}^2 + \tau_{23}^2} = \frac{|M_z|}{I_p} \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2} = \frac{|M_z|}{I_p} r$$

...dove r è la distanza dal centro.
 τ_3 aumenta linearmente con r

SEZIONI RETTANGOLARI SOTTILI



$$\tau_{t,z,max} = \alpha \frac{M_z}{ab^2}$$

$$J_T = \beta \cdot ab^3$$

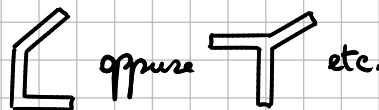
Con α e β tabellati rispetto a a/b :

a/b	1	2	3	10	∞
α	4,80	4,06	3,74	3,20	3
β	0,141	0,229	0,263	0,312	1/3

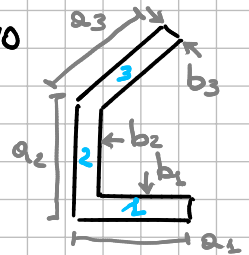
SEZIONE SOTTILE implica che $a/b \rightarrow \infty$
allora:

$$J_T = \frac{1}{3} ab^3 \rightarrow \tau_{t,z,max} = 3 \frac{M_z}{ab^2}$$

SEZIONI SOTTILI APERTE



ESEMPIO



Dividiamo in n elementi la sezione: $\Sigma = \sum_i \Sigma_i$

$$J_{Ti} = \frac{1}{3} a_i b_i^3 \rightarrow J_T = \sum_i \frac{1}{3} a_i b_i^3$$

Più elementi ha la sezione, più saranno distribuite le tensioni dovute alla torsione, maggiore sarà la resistenza a torsione della sezione sottile.

$$\theta_{3i} = \frac{M_{3i}}{G J_{Ti}} \quad \theta_3 = \frac{M_3}{G J_T}$$

Per l'indeformabilità della sezione retta: $\theta_{3i} = \theta_3$
(tutti gli elementi subiscono la stessa rotazione)

$$\text{Dunque: } \frac{M_{3(1)}}{G J_{T(1)}} = \frac{M_{3(2)}}{G J_{T(2)}} = \dots = \frac{M_{3(i)}}{G J_{T(i)}} = \dots = \frac{M_{3(n)}}{G J_{T(n)}}$$

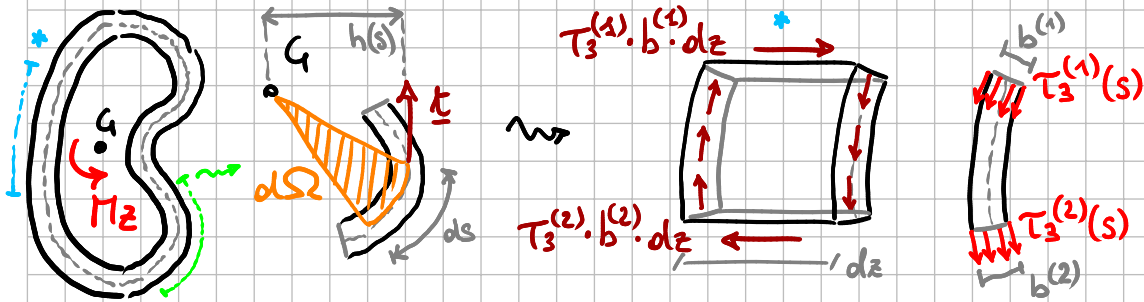
$$\text{Ma } \theta_{3i} = \theta_3 \rightarrow \frac{M_{3(1)} + M_{3(2)} + \dots + M_{3(n)}}{G (J_{T(1)} + J_{T(2)} + \dots + J_{T(n)})} = \frac{M_{3(i)}}{G J_{T(i)}} \rightarrow M_{3(i)} = \frac{J_{T(i)}}{\sum J_{T(i)}} M_3$$

Ciò implica che:

$$\tau_{max(i)} = \frac{M_{3(i)}}{J_{T(i)}} b_i = \frac{M_3}{J_T} b_i$$



SEZIONI SOTTILI CHIUSE BICONNESSE (formule di Bredt)



$$\text{Se } \tau_3^{(1)} \cdot b^{(1)} \cdot dz = \tau_3^{(2)} \cdot b^{(2)} \cdot dz \rightarrow \tau_3^{(i)} \cdot b^{(i)} = \text{cost } "q"$$

$$\text{Se } M_3 = \oint \tau_3 \cdot b(s) \cdot h(s) \cdot ds \text{ ossia } \tau_3 \cdot 2\Omega \cdot b(s) \text{ perché } d\Omega = \frac{1}{2} h(s) ds$$

$$\text{allora } M_3 = 2\Omega q \rightarrow \tau_3 = \frac{M_3}{2\Omega b(s)} \text{ dunque } \tau_r = \frac{4\Omega^2}{\oint \frac{ds}{b(s)}}$$

Dove: $b(s)$ è lo spessore in un punto s della sezione;
 $h(s)$ è il braccio del vettore delle tensioni tangente
 alla curvatura della sezione.

(si può dimostrare, ma
 saltiamo questa dimostrazione)