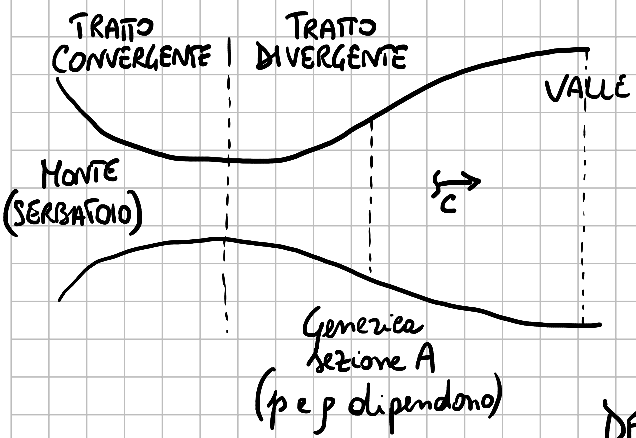
VELOCITÀ DI PROPAGAZIONE

Nello studio della fluidodinamica applicata alle macchine, è di nostro interesse l'approssimazione al modello di flusso mono-dimensionale comprimibile: in realtà, nelle macchine il flusso di un liquido o di un gas è tridimensionale e non-stazionario, ma lo studio diretto di questo modello reale è notevolmente complicato - basti pensare che ancora non esistono soluzioni generali note alle equazioni di Navier-Stokes.
L'approssimazione del modello reale a quello di flusso mono-dimensionale e stazionario è qualitativamente valida in alcuni casi, quali ad esempio turbine di alta e media pressione, e insufficiente in altri, ad esempio nel caso dei compressori assiali.



Un flusso passa spontaneamente nel condotto a velocità c.
Dall'equaz. dell'energia (forma term.):

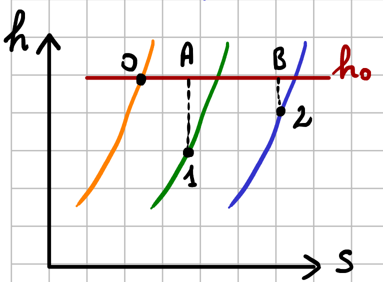
$$L = (h_1 - h_2) + \left(\frac{c_1^2 - c_2^2}{2}\right) + g(\cancelto{0}{z_1 - z_2}) = 0$$

$$\hookrightarrow h_1 + \frac{c_1^2}{2} = h_2 + \frac{c_2^2}{2} = h_0$$

DEFINIZIONE: h_0, "ENTALPIA DI RISTAGNO"

Poichè $Q = 0$, $Tds = \delta L_{ATTR} \geq 0$ (nullo nelle hp. di reversibilità)

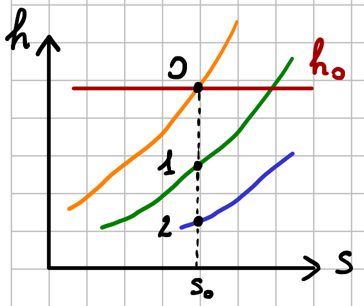
FLUSSO IN UN CONDOTTO FISSO



0 ≡ condiz. a monte
$\overline{A1}$ = energia cinetica
$\overline{B2}$ = en. cin. a valle

CASO REALE: $s_0 < s_1 < s_2$

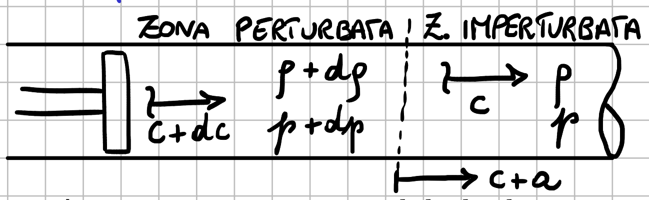
L'entropia aumenta, la pressione diminuisce.
In questo caso, diminuisce anche l'energia cinetica.
Se il fluido si arrestasse dopo il punto 1, la sua entalpia tornerebbe al valore h_0 ma l'entropia non tornerebbe a s_0.



CASO IDEALE: $s_0 = s_1 = s_2$

Le trasformazioni avvengono lungo l'isoentropica $s = s_0$; in caso di arresto del fluido, questo ritorna allo stato 0.

VELOCITÀ DI PROPAGAZIONE



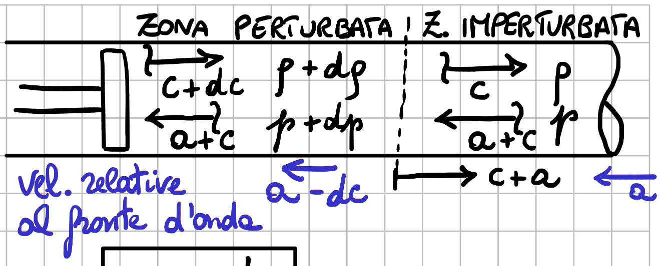
Consideriamo ora un cilindro semi-infinito riempito con un fluido comprimibile, con un pistone posizionato sulla sua estremità che si muove con velocità c+dc.
Dopo un certo periodo di tempo, la perturbazione avrà interessato una parte del cilindro, fino al fronte d'onda, il quale a sua volta viaggia con velocità relativa al fluido pari ad a.
Cos'è a e quanto vale?

A SEZIONE COSTANTE, la conservaz. della massa vuole che:

$$\dot m_1 = \dot m_2$$

$$\hookrightarrow \cancel{A}(\rho + d\rho)(a - dc) = \cancel{A}\rho a$$

$$\hookrightarrow \cancel{\rho a} + a\,d\rho - \rho\,dc - \cancel{dc\,d\rho}^{\,0} = \cancel{\rho a} \longrightarrow \boxed{a = \rho \frac{dc}{d\rho}}$$



Dalla conservazione della quantità di moto:

$$F\Delta t = \Delta(mc) \longrightarrow F = \dot m \Delta c \quad (m,\ \dot m \text{ cost})$$

$$\text{ma } dF = A\,dp \longrightarrow \cancel{A}dp = \cancel{A}\rho a\,dc \longrightarrow \boxed{dp = \rho a\,dc}$$

$$\text{Dunque: } \begin{cases} dc = \dfrac{a}{\rho}d\rho \\ dc = \dfrac{dp}{\rho a} \end{cases} \longrightarrow a^2 = \frac{dp}{d\rho}$$

A scanso di equivoci: $\boxed{a^2 = \dfrac{dp}{d\rho}}$

NOTA: dp e $d\rho$ hanno SEMPRE lo stesso segno

Sulla base della definizione proposta, a è la velocità a cui si propagano le piccole perturbazioni.
Una perturbazione prodotta dall'oscillazione o dalla vibrazione di un corpo in un fluido è detta suono, e si propaga proprio a velocità pari ad a.
Per questo motivo, a è anche detta velocità del suono.

DEFINIZIONE: M, "NUMERO DI MACH"

$$\hookrightarrow M = \frac{c}{a} \longrightarrow \begin{cases} M<1: \text{ FLUSSO SUBSONICO} \\ M=1: \text{ FLUSSO SONICO} \\ M>1: \text{ FLUSSO SUPERSONICO} \\ M>5: \text{ FLUSSO IPERSONICO} \end{cases}$$

NEI GAS PERFETTI

$$\begin{cases} p \cdot v^k = p \cdot \rho^{-k} = \text{cost} \longrightarrow \rho^{(-k)}dp - kp\rho^{(-k-1)}d\rho = 0 \longrightarrow \rho^{-k}dp = kp\rho^{(-k-1)}d\rho \\ a^2 = \left(\dfrac{dp}{d\rho}\right)_s \end{cases}$$

$$\text{DUNQUE: } \frac{dp}{d\rho} = \frac{kp\rho^{(-k-1)}}{\rho^{(-k)}} = \frac{kp}{\rho} = kpv = kRT$$

Ergo, per gas perfetti: $\boxed{a = \sqrt{kRT}}$

Es. ARIA, $T = 15°C$: $a \approx 340\ m/s$

In un gas perfetto, l'entalpia dipende solo dalla temperatura: come esiste un'entalpia di ristagno esiste dunque una temperatura di ristagno. Questa risulterà uguale alla temperatura che si realizza arrestando il fluido, sia reversibilmente che irreversibilmente. Per ovvi motivi, la temperatura di ristagno è sempre maggiore della temperatura istantanea.

$$h_0 = c_p T_0 = \left(c_p T + \frac{c^2}{2}\right)$$

$$\text{ma } c_p = \frac{kR}{k-1}$$

$$\text{dunque: } c_p(T_0 - T) = \frac{c^2}{2} = \frac{kR}{k-1}T\left(\frac{T_0}{T} - 1\right) \longrightarrow \frac{T_0}{T} = 1 + \frac{c^2(k-1)}{2a^2} = 1 + \frac{k-1}{2}M^2$$

Siccome nelle politropiche:

$$p_1 = p_2 \left(\frac{T_1}{T_2} \right)^{\frac{k}{k-1}} \longrightarrow \frac{p_0}{p} = \left(\frac{T_0}{T} \right)^{\frac{k}{k-1}} = \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right)^{\left(\frac{k}{k-1}\right)}$$

Ricaviamo quindi una <u>pressione di ristagno</u> che definiamo come quella pressione che si realizza arrestando <u>reversibilmente</u> il flusso: infatti, la pressione all'arresto dipende dalla reversibilità della trasformazione; in caso di trasformazione irreversibile, la pressione sarà sempre minore di quella di ristagno, mentre la temperatura sarà pari per definizione a T_0.

Chiamiamo <u>condizioni critiche</u> quelle che si realizzano per M = 1, e sezione critica quella sezione in corrispondenza della quale si realizzano.

$$\frac{T_0}{T^*} = \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right) \Big|_{M=1} = \left(1 + \frac{k-1}{2} \right) \longrightarrow \frac{p_0}{p^*} = \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right)^{\frac{k}{k-1}} \Big|_{M=1} = \left(1 + \frac{k-1}{2} \right)^{\frac{k}{k-1}}$$

Es.: ARIA, $k = 1,4$: $\frac{T_0}{T^*} = 1,2$, $\frac{p_0}{p^*} = 1,89$