Appunti di Scienza delle Costruzioni

Capitolo 05a

Problema elasto-statico

DISCLAMER GENERALE:

L'autore - PioApocalypse - non si assume alcuna responsabilità per l'uso improprio dei contenuti di questo documento, né si ritiene responsabile della performance - positiva o negativa che sia - dello studente in sede d'esame.

Il materiale didattico qui fornito è da considerarsi come un supplemento al materiale indicato dal docente della materia, e trova le sue utilità principali nel riepilogo di lunghi segmenti del programma e nella spiegazione di determinati argomenti in cui lo studente potrebbe aver riscontrato difficoltà. Alcuni termini e semplificazioni qui utilizzati potrebbero non essere idonei durante la discussione degli argomenti del corso con il docente in sede d'esame, e sono proposti solo al fine di aiutare lo studente con la comprensione della materia.

Si prega, infine, di segnalare eventuali errori trovati all'interno del documento all'indirizzo e-mail indicato sulla repository ufficiale, presso la quale è anche possibile trovare un link per chiunque desiderasse fare una piccola donazione all'autore.

Si ringrazia in anticipo per la cooperazione.

- PioApocalypse

LEGAMI COSTITUTIVI DELLA TRAVE

Partiamo dalle equazioni di Navier:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{1}{E}\cdot(\sigma_x - \nu(\sigma_y+\sigma_z)) \\ \varepsilon_y = \dfrac{1}{E}\cdot(\sigma_y - \nu(\sigma_x+\sigma_z)) \\ \varepsilon_z = \dfrac{1}{E}\cdot(\sigma_z - \nu(\sigma_x+\sigma_y)) \end{cases}$$

Dunque: $$\varepsilon_x + \varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_x+\sigma_y) - \frac{\nu}{E}(\sigma_x+\sigma_y+2\sigma_z)$$

Lavoriamo sotto ipotesi di indeformabilità della sezione retta, che ammette non-nulla solo la deformazione lungo l'asse z; quindi:

$$\cancel{\varepsilon_x}^{\,0} + \cancel{\varepsilon_y}^{\,0} = 0 = \frac{1}{E}(\sigma_x+\sigma_y) - \frac{\nu}{E}(\sigma_x+\sigma_y+2\sigma_z)$$

$$(\sigma_x+\sigma_y)(1-\nu) = 2\nu\sigma_z \longrightarrow \sigma_x+\sigma_y = \frac{2\nu}{1-\nu}\sigma_z$$

Quindi, dalla Navier #3: $$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E}\left(1-\frac{2\nu^2}{1-\nu}\right)$$

Siccome $-1 \leq \nu \leq 0{,}5$, $\nu^2 \ll \nu \longrightarrow \varepsilon_z \approx \dfrac{\sigma_z}{E}$

Torniamo dunque alle tensioni generalizzate, partendo dallo sforzo normale.

$$N(z) = \int_{\Sigma(z)} \sigma_z \, d\Sigma = E\int_{\Sigma(z)} \varepsilon_z \, d\Sigma = \dots$$

Usiamo anche la deformazione generalizzata associata: $$= E\int_{\Sigma(z)} (\varepsilon(z) + \theta_x y - \theta_y x)\, dx\, dy$$

Ossia: $$E\,\varepsilon(z)\Sigma(z) + E\theta_x \cancel{S_x}^{\,0} - E\theta_y \cancel{S_y}^{\,0}$$

Le rotazioni sono assunte rispetto agli assi baricentrici, per i quali - per definizione - il momento statico è nullo. Quindi, ricapitolando:

$$N(z) = E\,\varepsilon(z)\Sigma(z) \longrightarrow \boxed{\varepsilon(z) = \frac{N(z)}{E\cdot\Sigma(z)}}$$

TAGLIO E SCORRIMENTI ANGOLARI

$$T_x(z) = \int_{\Sigma(z)} \tau_{xz}(x,y,z)\cdot d\Sigma \qquad \text{ma} \quad \tau_{xz} = G\cdot\gamma_{xz}$$

dunque: $$T_x(z) = \int_{\Sigma(z)} G\cdot\gamma_{xz}\cdot d\Sigma = G\cdot\gamma_x(z)\cdot\Sigma - G\cdot\theta_z\cdot\cancel{S_x}^{\,0}$$

$$\hookrightarrow T_x(z) = G\cdot\gamma_x(z)\cdot\Sigma(z) \longrightarrow \boxed{\gamma_x(z) = \frac{T_x(z)}{G\cdot\Sigma(z)}}$$

Analogamente: $$T_y(z) = G\cdot\gamma_y(z)\cdot\Sigma(z) \longrightarrow \boxed{\gamma_y(z) = \frac{T_y(z)}{G\cdot\Sigma(z)}}$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_x + \gamma_y = \frac{T_x+T_y}{G\cdot\Sigma(z)}$$ con $G\cdot\Sigma(z) \doteq$ FATTORE DI RIGIDEZZA ESTENSIONALE

MOMENTI FLETTENTI E TORCENTE

$$M_x(z)=\int_{\Sigma(z)}\sigma_z(z)\cdot y\cdot d\Sigma = E\int_{\Sigma(z)} y(\varepsilon(z)+\theta_x y-\theta_y x)\,dx\,dy =$$

$$=E\left(\varepsilon(z)\cdot \cancel{S_x}^{\,0}+\theta_x I_x-\theta_y \cancel{J_{xy}}^{\,0}\right)$$ (x,y,z TERNA PRINCIPALE D'INERZIA)

$$M_x(z)=E\,\theta_x I_x \longrightarrow \boxed{\theta_x(z)=\frac{M_x(z)}{E I_x}}$$

Analogamente: $M_y(z)=E\,\theta_y I_y \longrightarrow \boxed{\theta_y(z)=\frac{M_y(z)}{E I_y}}$

$$M_t(z)=\int_{\Sigma(z)}\left(\tau_{yz}\cdot x-\tau_{xz}\cdot y\right)d\Sigma=\int_{\Sigma(z)}G\left(\gamma_{yz}\cdot x-\gamma_{xz}\cdot y\right)d\Sigma=\dots$$

$$\dots=G\left(\gamma_y\cdot\cancel{S_y}^{\,0}+\theta_z\cdot I_y-\gamma_x\cdot\cancel{S_x}^{\,0}+\theta_z\cdot I_x\right)=G\,\theta_z(I_x+I_y)=G\theta_z I_p$$

$$M_t(z)=G\cdot\theta_z(z)\cdot I_p \longrightarrow \boxed{\theta_z(z)=\frac{M_t(z)}{G\cdot I_p}}$$ con $I_p \doteq$ MOM. D'INERZIA POLARE

Giusto per ribadire alcune cose:

- I momenti statici nella terna centrale d'inerzia sono nulli perché la distanza dell'asse baricentrico dal baricentro è ovviamente nulla;
- Siccome la sezione retta appartiene al piano x-y, possiamo semplificare i momenti d'inerzia come segue:

$$z=0 \qquad I_x=\int y^2 d\Sigma \qquad I_y=\int x^2 d\Sigma \qquad I_z=\int (x^2+y^2)\,d\Sigma = I_p$$

- Poiché la sezione retta è piana e giace sul piano x-y, gli assi x, y e l'asse ad essi perpendicolare (z) costituiscono la terna principale d'inerzia; per definizione:

$$J_{xy}=0$$

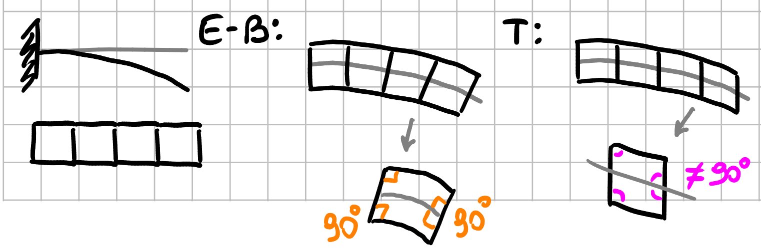
Tuttavia, l'ipotesi comportamentale di indeformabilità della sezione retta è contraddetta da un'altra teoria più fedele al comportamento reale della trave: parliamo del MODELLO DI TIMOSHENKO, che presuppone la non-trascurabilità degli scorrimenti angolari dovuti tensioni tangenziali (in altre parole, presuppone che la sezione retta si deformi, non rimanendo più sempre ortogonale all'asse della trave. Sotto questa ipotesi:

$$\gamma_x(z)=\beta_x\frac{T_x}{G\cdot\Sigma}+\beta_{xy}\frac{T_y}{G\cdot\Sigma}$$
$$\gamma_y(z)=\beta_{xy}\frac{T_x}{G\cdot\Sigma}+\beta_y\frac{T_y}{G\cdot\Sigma}$$

dove: $\beta_x, \beta_y \doteq$ FATTORI DI TAGLIO SECONDO x/y; $\beta_{xy} \doteq$ FATTORE DI TAGLIO MISTO

Se la sezione retta ha almeno un asse di simmetria: $\beta_{xy}=0$

EULERO-BERNOULLI E TIMOSHENKO



Il MODELLO DI EULERO-BERNOULLI, caso particolare del modello di Timoshenko - seppure sviluppato circa due secoli prima - assume che, a deformazione avvenuta, la generica sezione retta della trave sia ancora sempre ortogonale all'asse.

Il modello di trave di Eulero-Bernoulli è meno preciso rispetto a quel di Timoshenko, ma generalmente la differenza tra le deformazioni misurate con le due teorie è piccola, ovvero trascurabile, per cui si preferisce il più semplice modello di Eulero-Bernoulli.
Poiché la teoria di Timoshenko rimane la più fedele al comportamento reale della trave, vi sono casi per i quali questa è preferibile all'altra:

- Si usa la teoria di Timoshenko per deformazioni particolarmente elevate della trave, o per travi particolarmente corte;
- Si preferisce la teoria di Eulero-Bernoulli per travi snelle, con rapporto tra lunghezza e diametro della sezione retta pari o superiore a 5 (fissato per convenzione).

Di seguito, un video che ben spiega graficamente la differenza tra i due modelli (copia e incolla):
https://www.youtube.com/watch?v=BxymlsgWehY [Euler-Bernoulli vs Timoshenko Beam Theory]

Ipotesi del modello di Eulero-Bernoulli:

$$\begin{cases}\gamma_x(z)\simeq 0\\ \gamma_y(z)\simeq 0\end{cases} \rightsquigarrow \left\{ \varphi_y(z)=\frac{du(z)}{dz} \qquad \varphi_x(z)=-\frac{dv(z)}{dz}\right.$$

$u \to$ asse x
$v \to$ asse y

Solo 4 spostamenti generalizzati (4 incognite): $u, v, \varphi_x, \varphi_y$

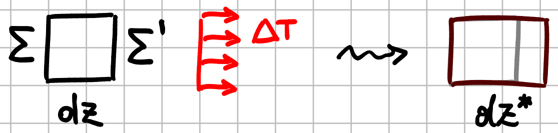
DISTORSIONI

Le DISTORSIONI sono azioni esterne dovute a fenomeni non "puramente meccanici", come un gradiente di temperatura, che provocano deformazioni nei corpi. In presenza di distorsioni TERMICHE, ad esempio:

$$\varepsilon(z)+\varepsilon^*(z)=\frac{dw(z)}{dz} \qquad \gamma_x(z)+\gamma_x^*(z)=\frac{du(z)}{dz}-\varphi_y(z)$$

$\varepsilon^*, \gamma^*, \theta^* \doteq$ FATTORI TERMICI

Esempio: innalzamento della temperatura (omogeneo)



$\varepsilon^* = \alpha \Delta T$ con $\alpha \doteq$ COEFF. DI DILATAZIONE TERMICA

Esempio: gradiente lineare di temperatura:

$$\varepsilon^* = \frac{2\alpha\Delta T}{h}y \qquad \theta^*_x = \frac{2\alpha\Delta T}{hy}$$

PROBLEMA ELASTO-STATICO

Il METODO DELLA LINEA ELASTICA consiste nell'individuare un campo cinematico degli spostamenti ed esprimere tutto in funzione di esso tramite equazioni differenziali.
Tale metodo è essenziale per lo studio delle travi iperstatiche, le quali ammettono infinite soluzioni al solo problema statico: il PROBLEMA ELASTO-STATICO, invece, ammette sempre una e una sola soluzione, soddisfando le equazioni di congruenza esterna. È applicabile anche a strutture isostatiche.

PROBLEMA ESTENSIONALE

$$\left.\begin{aligned} &\varepsilon=\frac{N}{EA}\\ &\frac{dN}{dz}=-p\\ &\varepsilon^*+\varepsilon=\frac{dw}{dz}\end{aligned}\right\}$$

1) Derivo l'equazione di congruenza interna in dz: $\frac{d\varepsilon^*}{dz}+\frac{d\varepsilon}{dz}=\frac{d^2w}{dz^2}$

2) Aggiungo il legame costitutivo:

$$\frac{d\varepsilon^*}{dz}+\frac{d}{dz}\left(\frac{N}{EA}\right)=\frac{d^2w}{dz^2} \rightsquigarrow \frac{d\varepsilon^*}{dz}+\frac{1}{EA}\frac{dN}{dz}=\frac{d^2w}{dz^2}$$

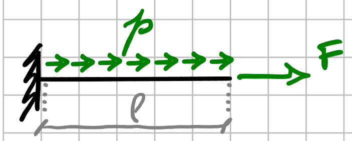
3) Aggiungo l'equazione indefinita di equilibrio: $\frac{d\varepsilon^*}{dz}-\frac{1}{EA}p=\frac{d^2w}{dz^2} \rightsquigarrow \boxed{\frac{d^2w}{dz^2}+\frac{1}{EA}p-\frac{d\varepsilon^*}{dz}=0}$

4) Risolviamo l'equazione differenziale del secondo ordine (non omogenea):

$$w(z)=w_0+w_p \qquad \begin{cases} w_0=C_1z+C_2 \\ w_p=w_p(z,p)=? \end{cases}$$

C_1 e C_2 si trovano usando come c.c. le eq. congr. est.

ESEMPIO:



$$\Sigma_0: \begin{cases} w(0)=0 \\ v(0)=0 \\ \varphi(0)=0 \end{cases} \qquad \Sigma_\ell: \begin{cases} N(\ell)=F \\ T(\ell)=0 \\ M(\ell)=0 \end{cases}$$

$p(z)=p$ (cost)
NO DISTORSIONI

$$\frac{d^2w}{dz^2}+\frac{1}{EA}p=0 \qquad \begin{Bmatrix} w_0=C_1z+C_2 \\ w_p=\iint\frac{-p}{EA}dz\,dz \end{Bmatrix} \qquad w(z)=\frac{-p}{2EA}z^2+C_1z+C_2$$

$$\begin{cases} w(0)=0 \\ N(\ell)=F \end{cases} \begin{matrix} \rightarrow w(0)=C_2=0 \\ \longrightarrow \varepsilon(\ell)=\left.\frac{dw}{dz}\right|_\ell=\frac{N(\ell)}{E\cdot A} \quad \frac{dw}{dz}=-\frac{p}{EA}z+C_1 \rightarrow C_1=\frac{F+p\ell}{E\cdot A} \end{matrix}$$

$$w(z)=\frac{F+p\ell}{E\cdot A}z-\frac{p}{2EA}z^2$$

Da cui:

$$N(z)=\left(\frac{F+p\ell}{E\cdot A}-\frac{pz}{EA}\right)EA \longrightarrow N(0)=F+p\ell$$

$$\varepsilon(z)=\frac{F+p\ell}{E\cdot A}-\frac{pz}{EA} \longrightarrow \varepsilon(\ell)=\frac{F}{EA}$$

PROBLEMA DI FLESSIONE E TAGLIO

$$\begin{cases} \theta_x=\frac{M_x}{EI_x} \\ \frac{dT}{dz}=-q \\ \theta_x^*+\theta_x=\frac{d\varphi_x}{dz}=-\frac{d^2v}{dz^2} \end{cases} \qquad \begin{cases} \gamma_y=\beta_y\frac{T_y}{GA} \\ \frac{dM}{dz}=-c+T \\ \gamma_y^*+\gamma_y=\frac{dv}{dz}+\varphi_x \end{cases}$$

1) Derivo l'equazione indefinita di equilibrio in dz:

$$\frac{d^2M}{dz^2}-\frac{dT}{dz}+\frac{dc}{dz}=0$$

2) Aggiungo l'altra equazione indef. di equil.:

$$\frac{d^2M}{dz^2}+q+\frac{dc}{dz}=0$$

3) Aggiungiamo i legami costitutivi:

$$\frac{d^2}{dz^2}\theta_xEI_x+q+\frac{dc}{dz}=0 \longrightarrow EI_x\frac{d^2}{dz^2}\theta_x+q+\frac{dc}{dz}=0$$

4) Aggiungiamo le equazioni di congruenza interna:

$$-EI_x\frac{d^4v}{dz^4}-EI_x\frac{d\theta_x^*}{dz}+q+\frac{dc}{dz}=0$$

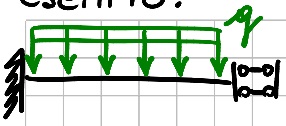
5) Risolviamo l'equazione differenziale del quarto ordine:

$$\frac{d^4v}{dz}=\frac{q}{EI_x}+\frac{1}{EI_x}\cdot\frac{dc}{dz}-\frac{d\theta_x^*}{dz}$$

$$v(z)=v_0(z)+v_p(z)$$

$$\begin{cases} v_0(z)=A_0+A_1z+A_2z^2+A_3z^3 \\ v_p(z)=v_p(z,q,c)=? \end{cases}$$

ESEMPIO:



2 volte iperstatica $(3t - s = 3 - 5 = -2)$

1 volta " per il solo problema flessionale $(w, N = 0)$

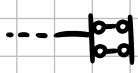
$$s(fl) = 2 + 1 = 3 \qquad \#_{gdl}(fl) = 2t \longrightarrow i = 3 - 2 = 1$$

In assenza di distorsioni termiche e coppie distribuite:

$$\frac{d^4 v}{dz^4} = \frac{q}{EI_x} \rightarrow v_p = \iiiint \frac{q}{EI_x} dz^4 = \frac{q}{EI_x}\left(1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} z^4\right) = \frac{q}{EI_x} \cdot \frac{z^4}{24}$$

$$v(z) = A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + A_3 z^3 + \frac{q}{EI_x} \cdot \frac{z^4}{24}$$

Quali sono le condizioni a contorno?

 $\begin{cases} v(0) = 0 \\ \varphi(0) = 0 \end{cases}$  $\begin{cases} \varphi(l) = 0 \\ T(l) = 0 \end{cases}$

$v(0) = 0 \rightarrow A_0 = 0$

$\varphi(0) = 0 \rightarrow A_1 = 0$

$$\varphi(z) = -\frac{dv}{dz} = -A_1 - 2A_2 z - 3A_3 z^2 - \frac{q}{EI_x} \cdot \frac{z^3}{6}$$

$\varphi(l) = 0 \rightarrow$

$$-2A_2 l - 3A_3 l^2 - \frac{q}{EI_x} \cdot \frac{l^3}{6} = 0$$

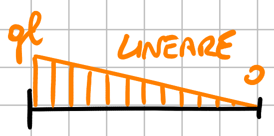
$$T(l) = 0 \rightarrow -EI_x \left.\frac{d^3 v}{dz^3}\right|_l = 0 \longrightarrow -EI_x\left(\frac{ql}{EI_x} + 6A_3\right) = 0$$

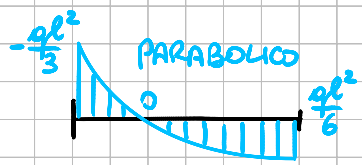
$$\hookrightarrow A_3 = -\frac{ql}{6EI_x}$$

Dunque $A_2 = \dfrac{ql^2}{6EI_x}$

4 equazioni
$$\begin{cases} v(z) = \dfrac{ql^2}{6EI_x} z^2 - \dfrac{ql}{6EI_x} z^3 + \dfrac{q}{EI_x} \cdot \dfrac{z^4}{24} \\ \varphi(z) = -\dfrac{ql^2}{3EI_x} z + \dfrac{ql}{2EI_x} z^2 - \dfrac{q}{EI_x} \cdot \dfrac{z^3}{6} \\ T(z) = q(l - z) \qquad M(z) = -\dfrac{qz^2}{2} + qlz - \dfrac{ql^2}{3} \end{cases}$$

Diagrammi:
$$\begin{cases} T(0) = ql \\ M(0) = -\dfrac{ql^2}{3} \\ M(l) = \dfrac{ql^2}{6} \end{cases}$$





In particolare $M = 0$ per $z^* = \left\{\frac{3-\sqrt{3}}{3} l ; \frac{3+\sqrt{3}}{3} l\right\}$

Ma $\frac{3+\sqrt{3}}{3} l \approx 1{,}557\ldots l > l$

dunque $z^* = \frac{3-\sqrt{3}}{3} l \approx 0{,}423\ldots l < l$

$$\frac{-ql \pm \sqrt{q^2l^2 - \frac{2}{3}q^2l^2}}{-q} = \frac{ql \pm ql\frac{\sqrt{3}}{3}}{q} = l \pm \frac{\sqrt{3}}{3} l$$

DEFORMATA DISEGNATA A MANIERA

La DEFORMATA di una struttura è la configurazione che la stessa assume a seguito dell'applicazione dei carichi esterni. Per le strutture snelle, la deformata è rappresentata dalla configurazione della sola linea d'asse della trave. Con l'espressione "a maniera" si intende che il diagramma della deformata va rappresentato qualitativamente, a prescindere da misurazioni accurate - tenendo conto solo di versi delle concavità, flessi e sezioni a spostamento nullo.

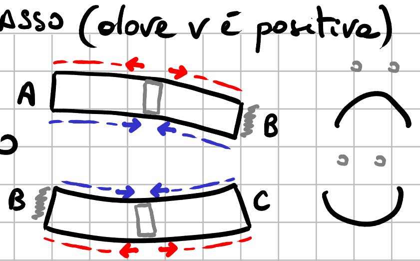
STUDIO DELLE CONCAVITÀ

$$M_x = EI_x \frac{d\varphi}{dz} = -EI_x \frac{d^2 v}{dz^2}$$

Ricordiamo da Analisi I che la CONCAVITÀ di una funzione dipende dalla sua derivata seconda: in questo caso la derivata seconda dello spostamento è direttamente proporzionale - a meno del segno - al momento flettente, il che significa che: [pag. successiva]

Se $M(z)<0 \rightarrow \begin{cases} v''>0 \\ \varphi'<0 \end{cases}$ | CONCAVITÀ VERSO IL BASSO (dove v è positiva) | FIBRE TESE SOPRA

Se $M(z)>0 \rightarrow \begin{cases} v''<0 \\ \varphi'>0 \end{cases}$ | CONCAVITÀ VERSO L'ALTO | FIBRE TESE SOTTO



NOTA: ricordiamo che - a differenza delle funzioni studiate ad Analisi - la funzione v è positiva verso il basso, quindi è normale che la concavità sia verso il basso (NON verso l'alto) se la der. seconda è positiva (e viceversa).

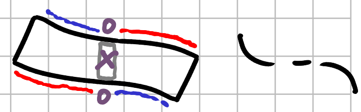
Due regole mnemoniche di nostro interesse:

1) Le fibre tese si trovano sempre dal lato in cui disegnamo il momento flettente sul suo diagramma; viceversa, il momento flettente va disegnato sempre dal lato in cui la trave presenta convessità;
2) La concavità della deformata assomiglia alla bocca di una faccina: se il momento è negativo la faccina è triste, se il momento è positivo la faccina sorride; sarà un metodo puerile ma funziona...

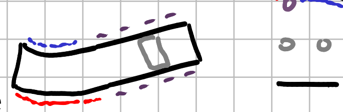
FLESSI

Cosa succede quando il momento è nullo? Quello che succede quando si passa da un tratto concavo verso il basso ad uno concavo verso l'alto o viceversa: abbiamo cioè un PUNTO DI FLESSO.

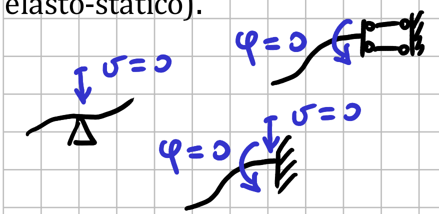
Se $M(z)=0 \rightarrow \begin{cases} v''=0 \\ \varphi'=0 \end{cases}$ | PUNTO DI FLESSO | FIBRE RILASSATE



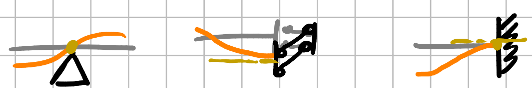
SEZIONI A SPOSTAM./ROTAZ. NULLI



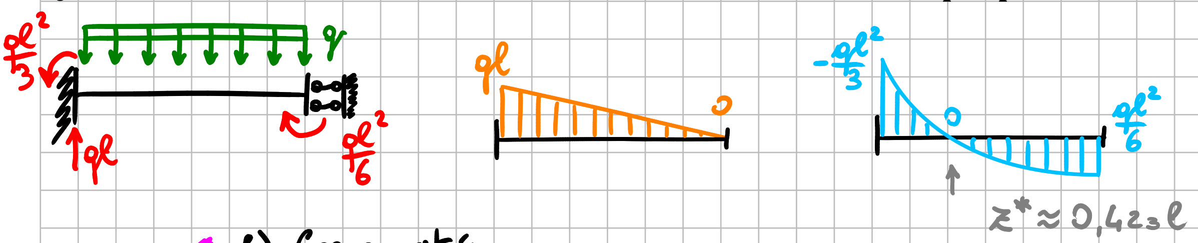
In corrispondenza di vincoli, lo spostamento e/o la rotazione della sezione retta possono essere nulli, dipendentemente dalla natura del vincolo. In questo caso ci rifacciamo alle equazioni di congruenza esterna (condizioni a contorno anche per il problema elasto-statico).



Dunque:



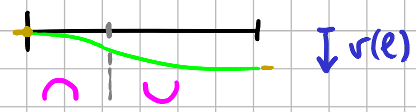
Quindi come sarebbe la deformata della trave usata nell'esempio precedente?



Regole:

1) Concavità: ∩ fino a z^*, poi ∪ fino a l

2) Cond. a cont.: $v(0), \varphi(0), \varphi(l)=0$



con $v(l) = \frac{ql^4}{24EI_x}$