Appunti di Scienza delle Costruzioni

Capitolo 04a

Problema statico e dualità statico-cinematica

github.com/PioApocalypse/Triennalia

DISCLAMER GENERALE:

L'autore - PioApocalypse - non si assume alcuna responsabilità per l'uso improprio dei contenuti di questo documento, né si ritiene responsabile della performance - positiva o negativa che sia - dello studente in sede d'esame.

Il materiale didattico qui fornito è da considerarsi come un supplemento al materiale indicato dal docente della materia, e trova le sue utilità principali nel riepilogo di lunghi segmenti del programma e nella spiegazione di determinati argomenti in cui lo studente potrebbe aver riscontrato difficoltà. Alcuni termini e semplificazioni qui utilizzati potrebbero non essere idonei durante la discussione degli argomenti del corso con il docente in sede d'esame, e sono proposti solo al fine di aiutare lo studente con la comprensione della materia.

Si prega, infine, di segnalare eventuali errori trovati all'interno del documento all'indirizzo e-mail indicato sulla repository ufficiale, presso la quale è anche possibile trovare un link per chiunque desiderasse fare una piccola donazione all'autore.

Si ringrazia in anticipo per la cooperazione.

- PioApocalypse

FORZE GENERALIZZATE

Prima di introdurre il problema statico, è opportuno innanzitutto parlare di FORZE GENERALIZZATE. Nell'ambito della teoria tecnica della trave ci interesseremo delle forze agenti sulla struttura, sia come forze di massa sia come forze di superficie.

$\underline{b}\ [N\,m^{-3}]$ (va moltiplicata per il volume); $\underline{p}\ [N\,m^{-2}]$ (va moltiplicata per la superficie)

Chiamiamo FORZE DISTRIBUITE quelle forze esterne generalizzate in modo tale da dipendere solo da una coordinata e dalla sezione retta della trave.

$$\underline{q}(z)=\int_{\Sigma(z)}\underline{b}(x,y,z)\,d\Sigma+\oint_{\partial\Sigma}\underline{p}(x,y,z)\,ds \qquad [N\,m^{-1}]$$

$$\underline{c}(z)=\int_{\Sigma(z)}(\underline{x}-\underline{x}_G)\wedge\underline{b}\,d\Sigma+\oint_{\partial\Sigma}(\underline{x}-\underline{x}_G)\wedge\underline{p}\,ds \qquad [N]$$

q e c rappresentano rispettivamente il risultante e il momento risultante (per unità di lunghezza) delle forze esterne sulla sezione retta in z; il momento (o COPPIA) è preso rispetto alla posizione del baricentro; i due vettori sono applicati sull'asse della trave.
Per le tensioni interne abbiamo invece le seguenti forze generalizzate:

$$\underline{Q}_i(z)=\int_{\Sigma_{ij}(z)}\underline{t}\,d\Sigma_i \quad [N] \qquad \underline{M}_i(z)=\oint_{\Sigma_{ij}(z)}(\underline{x}-\underline{x}_G)\wedge\underline{t}\,d\Sigma_i \quad [N\,m]$$

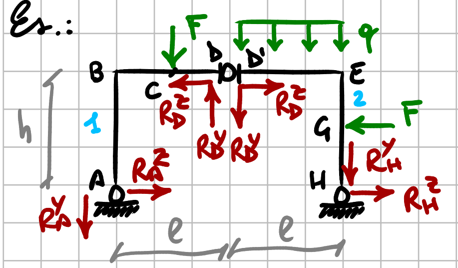
Q e M rappresentano rispettivamente il risultante e il momento risultante delle tensioni interne di superficie agenti sulla sezione retta in z; il momento (o coppia) è preso rispetto alla posizione del baricentro; i due vettori sono applicati sull'asse della trave.

PROBLEMA STATICO

Il problema statico consiste nel verificare se i vincoli (esterni e interni) applicati alla struttura siano in grado di esplicare reazioni vincolari tali da costituire, insieme ai carichi applicati, un sistema di forze che rispetti le equazioni cardinali della statica, che danno nulle le somme di tutte le forze e di tutti i momenti agenti sul sistema.
L'equilibrio nel corpo continuo è però leggermente più complicato dell'equilibrio nel corpo rigido: nel C.C. non possiamo parlare a priori di equilibrio solo perché sono rispettate le equaz. cardinali.

CORPO RIGIDO	CORPO CONTINUO
▹ Non può deformarsi ▹ Se (e solo se) sono rispettate le equaz. cardinali si ha equilibrio. **Le equazioni cardinali della statica sono necessarie e sufficienti per descrivere l'equilibrio del corpo**	▹ Può deformarsi ▹ Se sono rispettate le equaz. cardinali può comunque deformarsi, quindi non essere in equilibrio. **Le equazioni cardinali della statica sono necessarie ma NON sufficienti per descrivere l'equilibrio del corpo**

Es.:



TRONCO 1:

$$\begin{cases} \rightarrow & R_A^z-R_D^z=0 \\ \downarrow & R_A^y+F-R_D^y=0 \\ A\circlearrowright & h\cdot R_D^z-lR_D^y-\frac{l}{2}F \end{cases}$$

(3 equaz., 4 incogn.)

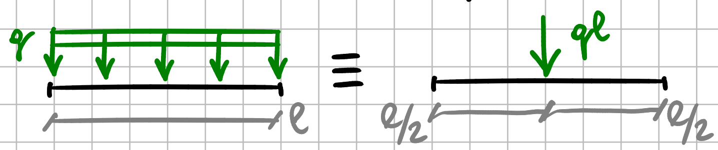
TRONCO 2:

$$\begin{cases} \rightarrow & R_D^z+R_H^z-F=0 \\ \downarrow & R_H^y-R_D^y+ql=0 \\ H\circlearrowright & \frac{h}{2}F-hR_D^z-lR_D^y+q\frac{l^2}{2}=0 \end{cases}$$

Se postulo l'esistenza del vettore $\underline{r}$ delle REAZIONI VINCOLARI:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -l & h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -l & -h \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} R_A^y \\ R_A^z \\ R_B^y \\ R_B^z \\ R_H^y \\ R_H^z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ F \\ -\frac{Fl}{2} \\ -F \\ ql \\ -\frac{Fh}{2}-\frac{ql^2}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \underline{\underline{S}} \cdot \underline{r} + \underline{f} = \underline{0}$$

NOTA: sul carico distribuito q [N/m]...



Perché l'invariante scalare è nullo in corrispondenza della sezione retta centrale.

S è la MATRICE STATICA, ed ha funzioni analoghe a quelle della matrice cinematica. f è il vettore dei carichi esterni, assunti positivi secondo il sistema di riferimento.

$$\underset{3t \text{ righe} \times s \text{ colonne}}{\underset{\sim}{S} \in \mathbb{R}^{3t \times s}}, \quad \underset{s \text{ righe}}{\underset{\sim}{r} \in \mathbb{R}^{s}}, \quad \underset{3t \text{ righe}}{\underset{\sim}{f} \in \mathbb{R}^{3t}} \longrightarrow 3t \text{ righe di } 0$$

Perché il problema statico ammetta soluzioni, deve essere verificata la CONDIZIONE DI AMMISSIBILITÀ STATICA, ossia che - nell'applicazione lineare di cui sopra: $\underset{\sim}{f} \in \mathrm{Imm}(\underset{\sim}{S})$

Chiamiamo invece GRADO DI INDETERMINAZIONE STATICA: $i = s - \mathrm{rank}(\underset{\sim}{S})$

Dal teorema di Rouché-Capelli, che sicuramente ricordiamo da Matematica II:

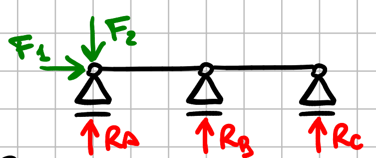
- Se $i=0$, $\mathrm{rank}(\underset{\sim}{S}) = s$, esiste un'unica soluzione $\exists! \underset{\sim}{r} : \underset{\sim}{S} \cdot \underset{\sim}{r} + \underset{\sim}{f} = \underset{\sim}{0}$

  Il sistema è staticamente determinato e in particolare se 3t = s parliamo di struttura ISOSTATICA.

- Se $i>0$, $\mathrm{rank}(\underset{\sim}{S}) > s$, esistono ∞^i soluzioni

  Il sistema è staticamente indeterminato e in particolare se 3t < s parliamo di struttura IPERSTATICA.

Per strutture labili, la condizione di ammissibilità statica invece non è sempre soddisfatta. Ad esempio, per una trave poggiata su tre carrelli:



2 casi: $\begin{cases} F_1 \neq 0 & F_2 = 0 \\ F_1 = 0 & F_2 \neq 0 \end{cases}$

$\mathrm{rank}(\underset{\sim}{S}) = 2 \longrightarrow$ Strutt. 1 volta labile

Caso I:

$$\begin{aligned} \rightarrow \quad & F_1 = 0 \\ \downarrow \quad & R_A + R_B + R_C = 0 \\ \curvearrowleft_A \quad & lR_B + 2lR_C = 0 \end{aligned}$$

Ma $F_1 \neq 0$ quindi:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} R_A \\ R_B \\ R_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\underset{\sim}{f} \notin \mathrm{Imm}(\underset{\sim}{S})$ NO SOLUZIONI

Caso II:

$$\begin{aligned} \rightarrow \quad & 0 = 0 \\ \uparrow \quad & R_A + R_B + R_C - F_2 = 0 \\ \curvearrowleft_A \quad & lR_B + 2lR_C = 0 \end{aligned}$$

Dunque:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} R_A \\ R_B \\ R_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -F_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ossia $\mathrm{rank}(\underset{\sim}{S}) = \mathrm{rank}(\underset{\sim}{S} | \underset{\sim}{f})$

Dunque $\underset{\sim}{f} \in \mathrm{Imm}(\underset{\sim}{S})$, $i = 1$, ∞^i SOLUZIONI

DUALITÁ STATICO-CINEMATICA

Dalla Meccanica Razionale, ricordiamo che un corpo rigido è in equilibrio quando il lavoro virtuale compiuto dal sistema di forze esterne è nullo per qualsiasi campo di spostamenti virtuali.
Uniamo insieme problema statico, problema cinematico e principio dei lavori virtuali:

PROB. STATICO	PROB. CINEMATICO	LAV. VIRT.
$\underset{\sim}{S}\cdot\underline{r}+\underline{f}=\underline{0}$	$\underset{\sim}{C}\cdot\underline{s}=\underline{\delta}$	$\delta L=\underline{F}\cdot\delta\underline{s}$

Dunque: $L=0=\underline{f}\cdot\underline{s}+\underline{r}\cdot\underline{\delta}\rightarrow\underline{f}\cdot\underline{s}+\underline{r}\cdot(\underset{\sim}{C}\cdot\underline{s})=(\underline{f}+\underset{\sim}{C}^T\cdot\underline{r})\cdot\underline{s}=0$

Quindi $\underline{f}+\underset{\sim}{C}^T\cdot\underline{r}=0$ ma $\underline{f}=-\underset{\sim}{S}\cdot\underline{r}$ ergo $\underset{\sim}{S}\cdot\underline{r}=\underset{\sim}{C}^T\cdot\underline{r}\rightarrow\boxed{\underset{\sim}{S}=\underset{\sim}{C}^T}$

Per estensione: $\text{rank}(\underset{\sim}{S})=\text{rank}(\underset{\sim}{C}^T)=\text{rank}(\underset{\sim}{C})$

Però noi ricordiamo che: $\begin{cases} l=3t-\text{rank}(\underset{\sim}{C}) \\ i=s-\text{rank}(\underset{\sim}{S}) \end{cases} \overset{-}{\downarrow} \rightsquigarrow \boxed{\begin{array}{l} l-i=3t-s \\ \text{PER SIST. NON-LAB:} \\ i=s-3t \end{array}}$

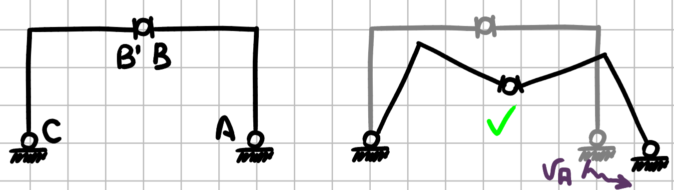
	$i=0$	$i>0$
$l=0$	ISOSTATICA Soluz. esiste ed é unica	IPERSTATICA Soluz. esiste non é unica
$l>0$	CIN. INDET STAT. DET. Soluz. unica (se esiste)	CIN. INDET STAT. INDET Più soluz. (se esistono)

ISOSTATICITÁ E CEDIMENTI VINCOLARI

Come appena detto e come si vede nella tabella a sinistra, si può parlare di iso- o iperstaticità solo se la struttura è cinematicamente determinata, ossia se l = 0.
Le differenze tra una struttura isostatica ed una iperstatica si originano dalla differente molteplicità dei vincoli applicati, e comportano metodi di risoluzione differenti tra i due tipi di sistema. Una differenza sostanziale si può notare in presenza di cedimenti vincolari, in quanto una struttura iperstatica - a differenza delle strutt. isostatiche - può deformarsi in seguito a cedimenti vincolari.

Stesso fenomeno, 3 casi: cedimento del vincolo in A

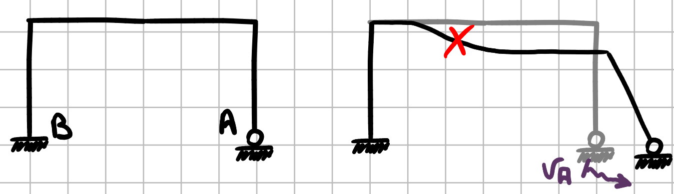
① $3t=s$, ISOSTATICA



Una struttura isostatica riesce sempre ad esibire un atto di moto rigido compatibile con i cedimenti vincolari, e non si deforma.

$\exists\underline{s}:\ \underset{\sim}{C}\cdot\underline{s}=\underline{\delta}$

②



Una struttura iperstatica non sempre riesce ad esibire un atto di moto rigido compatibile con i cedimenti vincolari, e può talvolta deformarsi. Nei due esempi presentati a lato (2 e 3) abbiamo due strutture iperstatiche, ma mentre una subisce il proprio cedimento senza deformarsi (3) l'altra va incontro ad una deformazione (2).

③