Appunti di Scienza delle Costruzioni

Capitolo 01a

Corpo continuo e deformazione

© 2021

I contenuti del seguente documento sono protetti sotto licenza ***Creative Commons BY-NC-SA 4.0***: sono quindi ammesse la **condivisione**, la **ridistribuzione** e la **modifica** del materiale ivi contenuto, sotto le seguenti condizioni:

- **Attribuzione**: nel documento originale e nelle sue modifiche deve sempre figurare il nome reale o lo pseudonimo dell'autore, nonché la bibliografia originale;
- **Non-Commerciale**: è vietato qualsiasi utilizzo del presente documento e dei suoi contenuti a scopo commerciale e/o pubblicitario; ciò include la rivendita dello stesso o di parte dei suoi contenuti, ma è permessa la vendita a prezzo di stampa;
- **Share-Alike**: (it: "*Condividi allo stesso modo*") qualsiasi ridistribuzione del documento modificato o di parte di esso deve essere reso disponibile sotto la stessa licenza dell'originale, o sotto licenza ad essa compatibile.

Si chiede inoltre, anche se non è espressamente vietato, di non ridistribuire tale documento o parte dello stesso su piattaforme cloud private per pubblicizzare associazioni o eventi.

DISCLAMER GENERALE:

L'autore - PioApocalypse - non si assume alcuna responsabilità per l'uso improprio dei contenuti di questo documento, né si ritiene responsabile della performance - positiva o negativa che sia - dello studente in sede d'esame.

Il materiale didattico qui fornito è da considerarsi come un supplemento al materiale indicato dal docente della materia, e trova le sue utilità principali nel riepilogo di lunghi segmenti del programma e nella spiegazione di determinati argomenti in cui lo studente potrebbe aver riscontrato difficoltà. Alcuni termini e semplificazioni qui utilizzati potrebbero non essere idonei durante la discussione degli argomenti del corso con il docente in sede d'esame, e sono proposti solo al fine di aiutare lo studente con la comprensione della materia.

Si prega, infine, di segnalare eventuali errori trovati all'interno del documento all'indirizzo e-mail indicato sulla repository ufficiale, presso la quale è anche possibile trovare un link per chiunque desiderasse fare una piccola donazione all'autore.

Si ringrazia in anticipo per la cooperazione.

- PioApocalypse

MECCANICA DEL CORPO CONTINUO

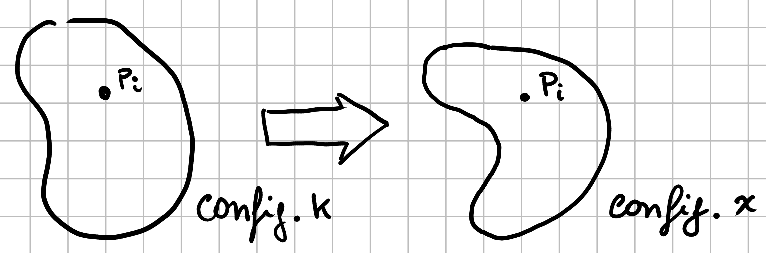
Partiamo da una definizione alquanto comune: il punto materiale.
Un punto materiale è un corpo con una massa assegnata, ma con un'estensione nulla: in altre parole, un punto materiale è una massa concentrata in un singolo punto di spessore infinitesimo o tendente a zero, quindi un corpo dalle dimensioni trascurabili rispetto al fenomeno in studio.

Estendere un sistema particellare ai problemi reali che affronteremo di seguito è una soluzione poco efficace, dunque si introduce il concetto di CORPO CONTINUO.
Il corpo continuo è un sistema costituito da infiniti punti materiali (o particelle), posti a distanze infinitesime l'uno dall'altro, i quali hanno una corrispondenza biunivoca con i punti della regione regolare dello spazio euclideo.

↳ = insieme aperto connesso dello spazio euclideo, la cui frontiera è costituita da un numero finito di superfici regolari aventi in comune i soli punti di bordo.

Il corpo continuo può essere studiato da un punto di vista dinamico, ossia se ne possono studiare il moto e le forze agenti in e su di esso.
Scopriremo poi che il concetto di corpo rigido visto precedentemente in Meccanica Razionale non è che un caso particolare del corpo continuo, per il quale esistono vincoli tra le posizioni dei punti materiali che lo costituiscono.

1.1



DEFORMAZIONE

Nel tempo, il corpo continuo può cambiare il proprio comportamento: per una serie di cause, esso può cambiare la propria forma (dando luogo ad una DEFORMAZIONE) ed il proprio moto.
L'insieme di tutte le posizioni occupate dai punti del corpo in un determinato istante di tempo ne costituisce la CONFIGURAZIONE per quell'istante (fig 1.1).

$t = t_0 \rightarrow \underline{P} = \underline{X}(k)$

$t = t_1 \rightarrow \underline{P} = \underline{x}(x)$

dove:
- X (maiuscola) rappresenta il vettore posizione di un p.to P nella config. iniziale generica k;
- x (minuscola) rappresenta lo stesso nella config. finale generica x.

È importante ricordare che la deformazione non può MAI comportare:
- Creazione o distruzione della materia; → Se esiste P(k), esiste anche P(x) (Funzione invertibile)
- Compenetrazione della materia.

↳ P e Q non devono mai occupare la stessa posizione ⇓ (Funzione iniettiva)

Se la funzione χ é la funz. di deformazione (o trasformazione):

$$\underline{x} = \underline{\chi}(\underline{X}, t)$$

- χ deve essere invertibile, quindi iniettiva e suriettiva
- χ é anche continua, a meno di fratture
- χ é anche derivabile nel tempo:

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}} = \dfrac{\partial}{\partial t}\underline{\chi}(\underline{X}, t) \\ \ddot{\underline{x}} = \dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\underline{\chi}(\underline{X}, t) \end{cases}$$

OMEOMORFISMO per ogni istante di tempo

Se vogliamo studiare il caso di un corpo con carichi applicati staticamente, dunque con lentezza tale da non produrre fenomeni dinamici, quali ad esempio le vibrazioni, è possibile utilizzare il modello del corpo continuo con due sole configurazioni - una iniziale ed una finale - indipendenti dal tempo, che dunque prendono in considerazione solo la posizione istantanea dei punti del corpo.

Ci sono sostanzialmente due approcci che possiamo seguire:

- Nell'approccio Lagrangiano seguiremo il comportamento di una sola particella, rifacendoci solo a tre variabili: $\underline{x}, \underline{\chi}, \underline{X}$
- Nell'approccio Euleriano si fissa invece una sezione e si studiano tutte le particelle che attraversano la stessa; è utile nello studio della meccanica dei fluidi.

Useremo l'approccio Lagrangiano. $\underline{x} = \underline{\chi}(\underline{X})$ ($\underline{x}$ é una funz. vettoriale)

Posso scrivere $\underline{x}$ nelle sue componenti vettoriali:

$$\begin{cases} x_1 = \chi_1(X_1, X_2, X_3) \\ x_2 = \chi_2(X_1, X_2, X_3) \\ x_3 = \chi_3(X_1, X_2, X_3) \end{cases}$$

OPPURE posso usare il vettore SPOSTAMENTO: $\underline{u} = \underset{\substack{\text{FIN.} \\ \chi}}{\underline{x}} - \underset{\substack{\text{INIZ.} \\ K}}{\underline{X}}$

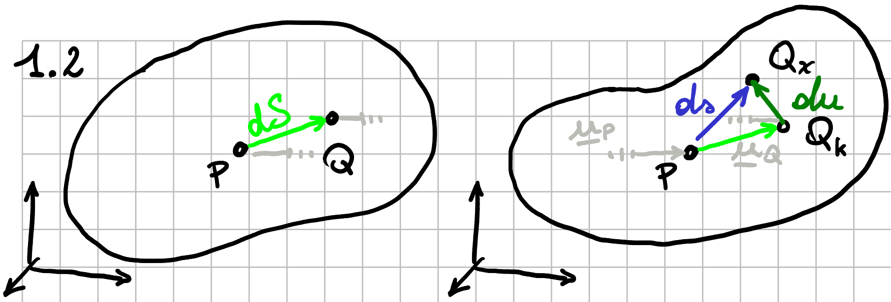
$$\begin{cases} u_1 = x_1 - X_1 = \chi_1(X_1, X_2, X_3) - X_1 = u_1(X_1, X_2, X_3) \\ u_2 = x_2 - X_2 = \chi_2(X_1, X_2, X_3) - X_2 = u_2(X_1, X_2, X_3) \\ u_3 = x_3 - X_3 = \chi_3(X_1, X_2, X_3) - X_3 = u_3(X_1, X_2, X_3) \end{cases}$$

$\underline{u}$ deve essere funzione continua e derivabile, e le sue derivate parziali lungo le tre dimensioni devono essere continue: in altre parole, deve essere DIFFERENZIABILE.

Lo studio delle deformazioni che ci interessa è uno studio LOCALE, di un piccolo intorno di materiale. Poiché si ha differenziabilità di u:

$$\underline{u} = \underline{x} - \underline{X} \longrightarrow d\underline{u} = d\underline{x} - d\underline{X}$$

1.2



DOVE $\begin{cases} dS = \|\underline{X}\| \\ ds = \|\underline{x}\| \end{cases}$

Se lavoriamo sotto ipotesi di spostamento infinitesimo, possiamo scrivere:

$$\begin{cases} du_1 = \dfrac{\partial u_1}{\partial X_1} dX_1 + \dfrac{\partial u_1}{\partial X_2} dX_2 + \dfrac{\partial u_1}{\partial X_3} dX_3 \\ du_2 = \dfrac{\partial u_2}{\partial X_1} dX_1 + \dfrac{\partial u_2}{\partial X_2} dX_2 + \dfrac{\partial u_2}{\partial X_3} dX_3 \\ du_3 = \dfrac{\partial u_3}{\partial X_1} dX_1 + \dfrac{\partial u_3}{\partial X_2} dX_2 + \dfrac{\partial u_3}{\partial X_3} dX_3 \end{cases}$$

O, in una notazione più semplice:

$$\underline{u} = \underline{\underline{\nabla u}} \cdot d\underline{X}$$

...dove $\underline{\underline{\nabla u}}$ (o $\nabla \underset{\sim}{u}$) è il GRADIENTE DEL CAMPO DEGLI SPOSTAMENTI.

Di $\nabla \underline{\underline{u}}$ conosciamo le seguenti caratteristiche:

- È un tensore di II° ordine;
- È un applicazione lineare definita su $\Re^3$ che assume immagini in $\Re^3$;
- Valgono per esso le proprietà di additività ed omogeneità*;
- È una matrice jacobiana, ossia delle derivate parziali del primo ordine.

NOTA: $\nabla \underset{\sim}{u} \cdot d\underline{X}$ é un prodotto riga per colonna tra una matrice 3x3 ed un vettore di lunghezza 3, e restituisce un vettore come risultato.

Siccome ogni matrice è esprimibile come la somma di una matrice simmetrica ed una antisimmetrica, e poiché un vettore si può scrivere come il prodotto tra la matrice identità e se stesso:

$$d\underline{X} = \underline{\underline{I}} \cdot d\underline{X} \longrightarrow d\underline{x} = d\underline{u} + d\underline{X} = \nabla \underset{\sim}{u} \cdot d\underline{X} + \underline{\underline{I}} \cdot d\underline{X}$$

DUNQUE $\boxed{d\underline{x} = (\nabla \underset{\sim}{u} + \underline{\underline{I}}) \cdot d\underline{X}}$

Chiamiamo $\nabla \underset{\sim}{u} + \underline{\underline{I}}$ come $\underline{\underline{F}}$ (o $\underset{\sim}{F}$) che - per costruzione - è anch'essa funzione continua, derivabile, differenziabile ed invertibile.

DUNQUE rispetto a $d\underline{x}$:

$$\begin{cases} dx_1 = \left(1 + \dfrac{\partial u_1}{\partial X_1}\right) dX_1 + \dfrac{\partial u_1}{\partial X_2} dX_2 + \dfrac{\partial u_1}{\partial X_3} dX_3 \\ dx_2 = \dfrac{\partial u_2}{\partial X_1} dX_1 + \left(1 + \dfrac{\partial u_2}{\partial X_2}\right) dX_2 + \dfrac{\partial u_2}{\partial X_3} dX_3 \\ dx_3 = \dfrac{\partial u_3}{\partial X_1} dX_1 + \dfrac{\partial u_3}{\partial X_2} dX_2 + \left(1 + \dfrac{\partial u_3}{\partial X_3}\right) dX_3 \end{cases}$$

*ADDITIVITÁ: $f(A) + f(B) = f(A+B)$; OMOGENEITÁ: $\lambda \cdot f(A) = f(\lambda A)$

Vale dunque che $\underline{x} = \underline{\chi}(\underline{X})$, che NON dipende dal tempo ma dalla configurazione; se però PER $\Delta t \to 0$, $\chi \to k$ ...

ALLORA: $\dfrac{\partial u_i}{\partial X_j} \to 0$ DUNQUE: $\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{I}}$

In questo caso limite, il determinante della matrice F è unitario; siccome però la matrice deve sempre essere invertibile, sappiamo che in ogni caso il determinante deve essere strettamente maggiore di zero.
Dunque:

$$\begin{cases} \text{Se } \chi \to k \\ \text{allora } \det(\underline{F}) = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \text{Per ogni } \chi, k \\ \text{vale sempre } \det(\underline{F}) > 0 \end{cases}$$

DEFORMAZIONI E TENSORE DI GREEN

Il vettore spostamento du ci da informazioni su come l'intorno si deforma localmente, ma per fare un paragone tra intorni dobbiamo usare la misurazione della deformazione.

$$dS^2 = dX_1^2 + dX_2^2 + dX_3^2$$

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 = (dX_1 + du_1)^2 + (dX_2 + du_2)^2 + (dX_3 + du_3)^2 =$$

$$= dX_1^2 + dX_2^2 + dX_3^2 + 2(dX_1 du_1 + dX_2 du_2 + dX_3 du_3) + du_1^2 + du_2^2 + du_3^2 =$$

DA CUI: $ds^2 - dS^2 = 2(dX_1 du_1 + dX_2 du_2 + dX_3 du_3) + du_1^2 + du_2^2 + du_3^2$

Se divido per dS^2 ottengo

$$[...] = 2\left(\frac{dX_1}{dS}\frac{du_1}{dS} + \frac{dX_2}{dS}\frac{du_2}{dS} + \frac{dX_3}{dS}\frac{du_3}{dS}\right) + \frac{du_1^2}{dS^2} + \frac{du_2^2}{dS^2} + \frac{du_3^2}{dS^2}$$

È necessario scrivere un paio di precisazioni.

- $\dfrac{dX_i}{dS} = N_i$: lunghezza del versore di $\underline{X}$ lungo la direzione i-esima
  $\hookrightarrow \hat{N} = (N_1, N_2, N_3)$
- $\dfrac{ds_i - dS}{dS} = \varepsilon_i$: deformazione lungo la direzione i-esima
  $\hookrightarrow$ La stessa che abbiamo visto in versione "light" all'esame di Tecnologie Generali dei Materiali.
- $\dfrac{du_i}{dx_i} = \varepsilon_i$: equazioni di congruenza interna (vedremo in seguito)

DUNQUE: $\dfrac{ds^2 - dS^2}{dS^2} = \mathcal{E}(P, \hat{N}) \longrightarrow \begin{cases} \bullet \text{ Dipende da: } P, \hat{N} \text{ (direzione)} \\ \bullet \text{ NON dipende da: } dS^2, \hat{N} \text{ (verso)} \end{cases}$

Se $\mathcal{E}(P, \hat{N}) = 0 \longrightarrow$ ATTO DI MOTO RIGIDO, non c'è deformazione del corpo continuo (mod. corpo rigido)

DIMOSTRAZ. (TENSORE DI GREEN)

Ricordiamo che: $\underline{\underline{F}}^T = \underline{\underline{I}}^T + \nabla \underline{\underline{u}}^T = \underline{\underline{I}} + \nabla \underline{\underline{u}}^T$

Partiamo da: $ds^2 = d\underline{x} \cdot d\underline{x} = (\underline{\underline{F}} \cdot d\underline{X}) \cdot (\underline{\underline{F}} \cdot d\underline{X}) = (\underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{F}} \cdot d\underline{X}) \cdot d\underline{X} =$

$= ((\underline{\underline{I}} + \nabla \underline{\underline{u}}^T) \cdot (\underline{\underline{I}} + \nabla \underline{\underline{u}}) \cdot d\underline{X}) \cdot d\underline{X}$

Ricordiamo anche che una matrice identità in un prodotto scalare tra matrici è elemento neutro.

$$\ldots = \left(\underline{\underline{I}} + \nabla \underline{\underline{u}}^T + \nabla \underline{\underline{u}} + (\nabla \underline{\underline{u}}^T \cdot \nabla \underline{\underline{u}})\right) \cdot d\underline{X} \cdot d\underline{X} \longrightarrow \underline{\underline{\square}} \cdot d\underline{X} \cdot d\underline{X} = \underline{\underline{\square}} \cdot \hat{N} \cdot \hat{N} dS^2$$

DUNQUE:

$$ds^2 = \left(\underline{\underline{I}} + \nabla \underline{\underline{u}}^T + \nabla \underline{\underline{u}} + (\nabla \underline{\underline{u}}^T \cdot \nabla \underline{\underline{u}})\right) \cdot \hat{N} \cdot \hat{N} dS^2$$

Inoltre: $dS^2 = d\underline{X} \cdot d\underline{X} = \underline{\underline{I}} \cdot \hat{N} \cdot \hat{N} dS^2$

ERGO: $$\dfrac{ds^2 - dS^2}{dS^2} = \dfrac{1}{\cancel{dS^2}} \cancel{dS^2} \left(\nabla \underline{\underline{u}}^T + \nabla \underline{\underline{u}} + (\nabla \underline{\underline{u}}^T \cdot \nabla \underline{\underline{u}})\right) \cdot \hat{N} \cdot \hat{N}$$

$$\frac{1}{2}\left(\nabla \underline{\underline{u}}^T + \nabla \underline{\underline{u}} + (\nabla \underline{\underline{u}}^T \cdot \nabla \underline{\underline{u}})\right) = \underline{\underline{E}} \quad \text{"TENSORE DI GREEN"}$$

DUNQUE: $$\dfrac{ds^2 - dS^2}{dS^2} = 2 \underline{\underline{E}} \cdot \hat{N} \cdot \hat{N}$$

(Ipotesi di corpo rigido implica: $\nabla \underline{\underline{u}}^T + \nabla \underline{\underline{u}} + (\nabla \underline{\underline{u}}^T \cdot \nabla \underline{\underline{u}}) = \underline{\underline{0}}$)

Se il corpo è <u>non</u>-rigido:
$$\begin{cases} ds^2 - dS^2 > 0 & \text{IMPLICA DILATAZIONE} \\ ds^2 - dS^2 < 0 & \text{IMPLICA CONTRAZIONE} \end{cases}$$

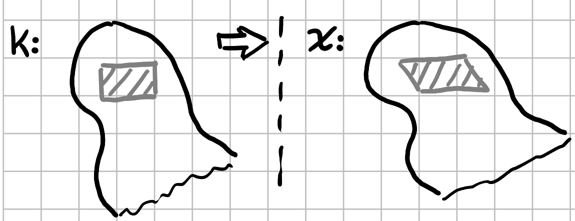
Come volevasi dimostrare, la misura della deformazione dipende dalla DIREZIONE di $\hat{N}$, non dal VERSO.

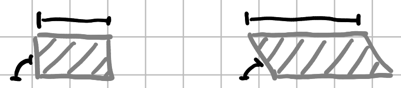
$\hookrightarrow \underline{\underline{\square}} \cdot \hat{N} \cdot \hat{N} = \underline{\underline{\square}} \cdot (-\hat{N}) \cdot (-\hat{N})$ ✓

$\underline{\underline{E}}$ descrive la trasformazione nei casi continui non infinitesimi.

$$2\underline{\underline{E}} = \begin{bmatrix} 2\varepsilon_1 & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \gamma_{12} & 2\varepsilon_2 & \gamma_{23} \\ \gamma_{13} & \gamma_{23} & 2\varepsilon_3 \end{bmatrix}$$

Per le piccole deformazioni, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ rappresentano di quanto si deforma lo spigolo di un intorno considerato (a forma di parallelepipedo), mentre $\gamma_{12}, \gamma_{13}, \gamma_{23}$ rappresentano di quanto cambia l'angolo retto al vertice.





(Ricordiamo che la deformazione non è soltanto estensione o compressione, ma anche flessione e torsione).

EQUAZIONI DI CONGRUENZA

Per spostamenti legati alla deformazione interna abbiamo le EQUAZ. INDEFINITE DI CONGRUENZA. Le equaz. di congruenza ESTERNA invece si usano per gli spostamenti legati alla deformazione della frontiera esterna, spostamenti imposti ad esempio dai vincoli esterni; per questo motivo sono anche dette "condizioni a contorno di tipo cinematico".

Se
$$\varepsilon(P,\hat{N}) = 2\varepsilon_1 N_1^2 + 2\varepsilon_2 N_2^2 + 2\varepsilon_3 N_3^2 + 2\gamma_{12} N_1 N_2 + 2\gamma_{13} N_1 N_3 + 2\gamma_{23} N_2 N_3$$

...le equaz. indefinite di congruenza sono scrivibili come:

$$\begin{cases} \varepsilon_i = \dfrac{\partial u_i}{\partial X_i} + \dfrac{1}{2}\left(\left(\dfrac{\partial u_i}{\partial X_i}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial u_j}{\partial X_i}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial u_k}{\partial X_i}\right)^2\right) \\ \gamma_{ij} = \dfrac{\partial u_i}{\partial X_j} + \dfrac{\partial u_j}{\partial X_i} + \dfrac{\partial u_i}{\partial X_i}\dfrac{\partial u_i}{\partial X_j} + \dfrac{\partial u_j}{\partial X_i}\dfrac{\partial u_j}{\partial X_j} + \dfrac{\partial u_k}{\partial X_i}\dfrac{\partial u_k}{\partial X_j} \end{cases}$$

con $i,j,k \in \{1,2,3\}$

Ma se $\varepsilon(P,\hat{N}) = 2\underline{\underline{E}}\cdot\hat{N}\cdot\hat{N}$ allora:
$$\begin{cases} E_{ii} = \varepsilon_i \\ E_{ij} = \dfrac{1}{2}\gamma_{ij} \end{cases}$$

Le equazioni di congruenza esterna assumono invece forme simili:

$$v(0) = v_0^*$$
$$\varphi(0) = \varphi_0^*$$