Appunti di Scienza delle Costruzioni

Capitolo 03a

Introduzione alla teoria tecnica della trave

DISCLAMER GENERALE:

L'autore - PioApocalypse - non si assume alcuna responsabilità per l'uso improprio dei contenuti di questo documento, né si ritiene responsabile della performance - positiva o negativa che sia - dello studente in sede d'esame.

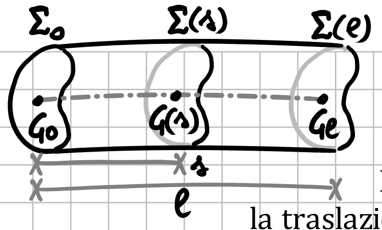
Il materiale didattico qui fornito è da considerarsi come un supplemento al materiale indicato dal docente della materia, e trova le sue utilità principali nel riepilogo di lunghi segmenti del programma e nella spiegazione di determinati argomenti in cui lo studente potrebbe aver riscontrato difficoltà. Alcuni termini e semplificazioni qui utilizzati potrebbero non essere idonei durante la discussione degli argomenti del corso con il docente in sede d'esame, e sono proposti solo al fine di aiutare lo studente con la comprensione della materia.

Si prega, infine, di segnalare eventuali errori trovati all'interno del documento all'indirizzo e-mail indicato sulla repository ufficiale, presso la quale è anche possibile trovare un link per chiunque desiderasse fare una piccola donazione all'autore.

Si ringrazia in anticipo per la cooperazione.

- PioApocalypse

TRAVI



La trave è un particolare corpo continuo generato dalla traslazione nello spazio di una regione regolare piana lungo una curva chiamata ASSE.
La superficie rimane piana e ortogonale all'asse durante la traslazione. Per l'asse passa sempre il baricentro G della sezione.
L'intersezione della trave con un qualsiasi piano ortogonale all'asse forma la SEZIONE RETTA.

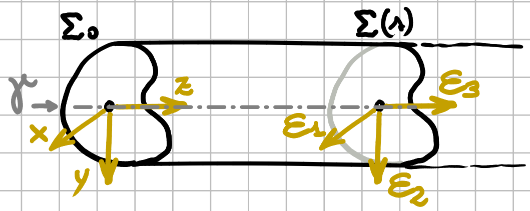
$\Sigma(s)$ "SEZIONE RETTA"; $\Sigma(0)$ e $\Sigma(\ell)$ "BASI DELLA TRAVE"

Se $\Sigma(s_1)=\Sigma(s_2)$ con $s_1 \neq s_2$; $s_1, s_2 \in [0,\ell]$ (Siano pure $s_1=0$ e $s_2=\ell$) $\Longrightarrow$ "TRAVE A SEZIONE COSTANTE"

Ovviamente $ds = \|\gamma'\| dt$ dove γ é la curva dell'asse della trave

Se γ fosse una retta, parleremmo di trave AD ASSE RETTILINEO.

Lavorando proprio con una trave ad asse rettilineo, consideriamo due sistemi di riferimento, entrambi baricentrici, uno globale ed uno locale.



▷ Sistema globale (G_0, x, y, z)
Versori $\hat{i}_1, \hat{i}_2$ e $\hat{i}_3$
Segue la sezione di base Σ_0

▷ Sistema locale $(G_s, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$
Versori $\hat{e}_1, \hat{e}_2$ ed $\hat{e}_3$
Segue la sezione retta $\Sigma(s)$

Vale che:

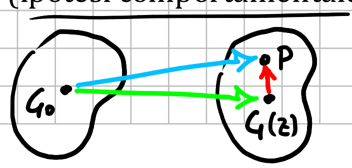
$$\begin{cases} x = \varepsilon_1 \\ y = \varepsilon_2 \\ z = \varepsilon_3 + s \end{cases} \qquad \hat{i}_j = \hat{e}_j \quad \forall j \in \{1,2,3\}$$

La frontiera della trave (superficie totale) é data dalla somma di 3 quote: $\partial T = \Sigma_0 + \Sigma_\ell + \partial_\ell T$ MANTELLO DELLA TRAVE

IPOTESI DI TRAVE LUNGA: $\ell >> d$
Per poter studiare la trave sotto ipotesi di monodimensionalità, è necessario che la lunghezza della stessa sia molto maggiore del diametro della sezione retta, ossia la massima distanza possibile tra due punti della sezione.

SPOSTAMENTI GENERALIZZATI

Lo studio della cinematica delle travi avviene sotto ipotesi ben precise:
- Valgono tutte le ipotesi della teoria lineare - deformazioni infinitesime e piccoli spostamenti; $\mapsto \chi \cong K$
- Il materiale è omogeneo, elastico lineare ed isotropo;
- Nel passaggio dalla configurazione indeformata a quella deformata, la sezione retta della trave subisce atto di moto rigido e infinitesimo, senza presentare deformazioni (ipotesi comportamentale).



$$\underline{x} = [0 \;\; 0 \;\; z] = z\hat{i}_3$$
$$\underline{y} = x\hat{i}_1 + y\hat{i}_2 + z\hat{i}_3$$
$$\underline{y} - \underline{x} = x\hat{i}_1 + y\hat{i}_2$$

Se l'atto di moto è rigido, sappiamo dalla Meccanica Razionale che:

$$\underline{u}_P(\underline{y}) = \underline{v}(\underline{x}) + \underline{\varphi} \wedge (\underline{y} - \underline{x}) = \text{TRASLAZ. RIGIDA} + \text{ROTAZ. RIGIDA}$$

$$\begin{cases} \text{TERNA GLOBALE: } \underline{u}(x,y,z) = \underline{v}(z) + \underline{\varphi}(z) \wedge (x\hat{i}_1 + y\hat{i}_2) \\ \text{TERNA LOCALE: } \underline{u}(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3) = \underline{v}(\varepsilon_3) + \underline{\varphi}(\varepsilon_3) \wedge (\varepsilon_1\hat{e}_1 + \varepsilon_2\hat{e}_2) \end{cases}$$

Ricordando che $z = \varepsilon_3$, $\hat{i}_j = \hat{e}_j$

$\underline{v}$ e $\underline{\varphi}$ prendono il nome di SPOSTAMENTI GENERALIZZATI, dove l'aggettivo "generalizzati" indica che essi descrivono in maniera macroscopica lo spostamento di tutti i punti della sezione retta.

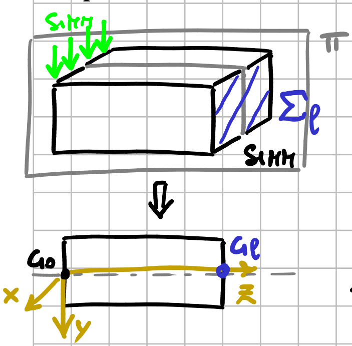
$\underline{u}(x,y,z)$ prende il nome di CAMPO CINEMATICO DEGLI SPOSTAMENTI, ed è un vettore di cui è possibile conoscere le componenti:

$$\text{Se } \underline{\varphi} \wedge (\underline{y} - \underline{x}) = \begin{vmatrix} \hat{i}_1 & \hat{i}_2 & \hat{i}_3 \\ \varphi_x & \varphi_y & \varphi_z \\ x & y & 0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} -y\varphi_z(z) \\ +x\varphi_z(z) \\ y\varphi_x(z) - x\varphi_y(z) \end{bmatrix}$$

Dunque:
$$\begin{cases} u_x(x,y,z) = v_x(z) - \varphi_z(z)\cdot y \\ u_y(x,y,z) = v_y(z) - \varphi_z(z)\cdot x \\ u_z(x,y,z) = v_z(z) - \varphi_y(z)\cdot x + \varphi_x(z)\cdot y \end{cases}$$

Un'ulteriore semplificazione si ha nel caso di trave piana.
Cosa significa?

TRAVE CONSIDERATA PIANA: struttura sollecitata da forze esterne in modo tale da poter identificare un piano di simmetria materiale e simmetria di carico, in cui andrà a giacere l'asse della trave in configurazione deformata.



Per ortogonalità della sezione retta rispetto all'asse della trave, Σ_l non può abbandonare il piano y-z. Quindi: $\varphi_y(z) = 0$

(non sono ammesse rotazioni attorno a y)

Di conseguenza: $v_x(z) = 0$

Inoltre, poichè $\underline{v}, \underline{u} \in \pi(y\text{-}z)$: $u_x = 0$

$\hookrightarrow 0 + \varphi_z(z)y = 0 \rightarrow \varphi_z(z) = 0$

(non sono ammesse rotazioni attorno a z)

Riassumendo:
- Niente spostamenti al di fuori del piano π; $v_x = 0$
- Non sono ammesse rotazioni intorno a y o z; $\varphi_y = \varphi_z = 0$
- π è piano di simmetria (geometrica, materiale e di carico)

$$\begin{cases} u_y = v_y(z) \\ u_z = v_z(z) + y\cdot\varphi_x(z) \end{cases}$$

$\underline{u} \neq \underline{u}(x)$

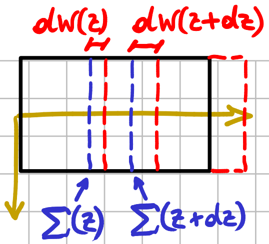
Un'ulteriore semplificazione giunge poi dall'ipotesi comportamentale: è atteso che le uniche componenti non nulle delle deformazioni siano $\varepsilon_z, \varepsilon_{xz}, \varepsilon_{yz}$.

DEFORMAZIONI GENERALIZZATE

A partire dal campo di spostamenti espresso in precedenza, è possibile determinare le corrispondenti deformazioni infinitesime mediante le equazioni indefinite di congruenza:

$$\underline{\varepsilon}(\underline{y}) = \frac{1}{2}\left(\nabla\underline{u}(\underline{y}) + \nabla\underline{u}(\underline{y})^T\right) \quad \text{ma } \varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_{xy} = 0$$

DEFORMAZIONE ASSIALE (O ESTENSIONALE): $\varepsilon(z) = \dfrac{dw(z)}{dz}$



$w(z) \doteq$ traslazione lungo z

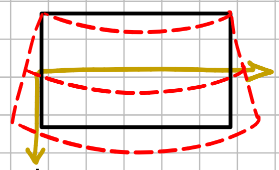
Consideriamo ora un elemento infinitesimo della trave delimitato dalle sezioni rette $\Sigma(z)$ e $\Sigma(z+dz)$; varrà che: $w(z) \neq w(z+dz)$

$$\hookrightarrow w(z+dz) - w(z) = \cancel{w(z)} + \frac{dw(z)}{dz}dz + \underbrace{o(dz^2)}_{\approx 0} - \cancel{w(z)} = \frac{dw(z)}{dz}dz$$

- sviluppo in serie di $w(z+dz)$

$$\text{Ma } \frac{\Delta w}{dz} = \frac{\Delta \ell}{\ell_0} = \varepsilon_z \longrightarrow \varepsilon_z = \frac{dw}{dz} \quad \text{c.v.d.}$$

DEFORMAZIONE FLESSIONALE NEL PIANO y-z: $\theta_x(z) = \dfrac{d\varphi_x(z)}{dz}$



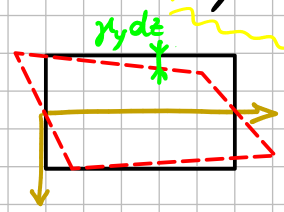
Come suggerisce il nome, tale deformazione implica la flessione della trave, ovvero una rotazione intorno all'asse x (la trave appartiene ancora al piano x-y). Volendo nuovamente studiare un elemento di trave delimitato da due sezioni rette, la distanza tra i baricentri sarà:

$$\theta_x dz = \varphi_x(z+dz) - \varphi_x(z) = \cancel{\varphi(z)} + \frac{d\varphi(z)}{dz}dz + \underbrace{o(dz^2)}_{\approx 0} - \cancel{\varphi_x(z)} = \frac{d\varphi(z)}{dz}dz$$

$$\hookrightarrow \theta_x = \frac{d\varphi_x}{dz} \quad \text{c.v.d.}$$

NOTA: analogamente, nel piano x-z: $\theta_y = \dfrac{d\varphi_y(z)}{dz}$

SCORRIMENTO ANGOLARE AL TAGLIO SECONDO y:



Approssimando l'angolo alla sua tangente (ipotesi lineare), l'abbassamento della trave nella configurazione deformata è pari a: $\dfrac{dv(z)}{dz}$

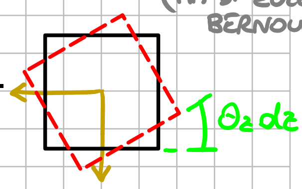
γ_y è l'angolo compreso tra l'ortogonale alla sezione retta deformata e l'inclinazione dell'elemento infinitesimo.

$$\gamma_y(z) \overset{*}{=} \frac{dv(z)}{dz} + \varphi_x(z)$$

NOTA: analogamente, secondo x: $\gamma_x(z) \overset{*}{=} \dfrac{du(z)}{dz} + \varphi_y(z)$

$* \approx 0$ (HP. DI EULERO-BERNOULLI)

DEFORMAZIONE TORSIONALE (O ANGOLO UNITARIO DI TORSIONE):



La rotazione φ_z è detta "torsione" perché avviene intorno all'asse della trave.

$\theta_z dz \doteq$ rotazione relativa torsionale tra sez. rette poste a distanza infinitesima

$$\text{Naturalmente: } \theta_z dz = \varphi_z(z+dz) - \varphi_z(z) = \cancel{\varphi_z(z)} + \frac{d\varphi_z(z)}{dz}dz + \underbrace{o(dz^2)}_{\approx 0} - \cancel{\varphi_z(z)}$$

$$\text{ossia } \theta_z(z) = \frac{d\varphi_z(z)}{dz}$$

Le relazioni tra le $\underbrace{\text{deformazioni generalizzate}}_{\varepsilon, \gamma, \theta}$ e gli $\underbrace{\text{spostamenti generalizzati}}_{v, \varphi}$ sono note come

EQUAZIONI DI CONGRUENZA INTERNA.

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \dfrac{\partial u_x}{\partial x} = 0 \\ \varepsilon_2 = \dfrac{\partial u_y}{\partial y} = 0 \\ \varepsilon_3 = \dfrac{\partial u_z}{\partial z} = \dfrac{dv_z}{dz} - \dfrac{d\varphi_y}{dz}\cdot x + \dfrac{d\varphi_x}{dz}\cdot y \\ \gamma_{ij} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_i}{\partial x_i} + \dfrac{\partial u_j}{\partial x_j}\right) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \varepsilon_z(z) = \varepsilon(z) - \theta_y(z)\cdot x + \theta_x(z)\cdot y \\ \gamma_{xz}(z) = \gamma_x(z) - \theta_z(z)\cdot y \\ \gamma_{yz}(z) = \gamma_y(z) + \theta_z(z)\cdot x \end{cases}$$

CASO TRAVE PIANA
TEORIA DI EULERO-BERNOULLI

SPOSTAMENTI GENERALIZZATI DEFORMAZIONI GENERALIZZATE

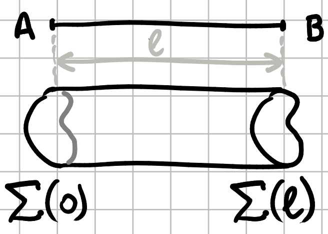
$\underline{v}(z)$ [m] $\underline{\varphi}(z)$ [rad] $\varepsilon_z(z)$, $\gamma_i(z)$ [-] $\Theta_i(z)$ [m^{-1}]

In presenza di assegnate deformazioni generalizzate, il campo degli spostamenti generalizzati è:

- CINEMATICAMENTE COMPATIBILE con queste se sono rispettate le equazioni indefinite di congruenza - che ricordiamo essere, per piccoli spostamenti:

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \rightarrow \varepsilon_{ii} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$$

- CINEMATICAMENTE AMMISSIBILE con queste se sono rispettate le equazioni indefinite di congruenza E le equazioni di congruenza esterna - dette anche "condizioni a contorno di tipo cinematico":

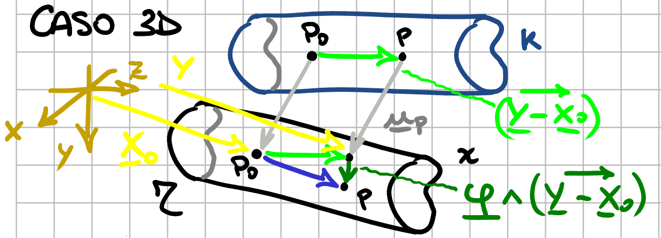


$$\Sigma(0) \text{ "A" } \begin{cases} \underline{v}(0) = \underline{v}_A^* \\ \underline{\varphi}(0) = \underline{\varphi}_A^* \end{cases} \qquad \Sigma(l) \text{ "B" } \begin{cases} \underline{v}(l) = \underline{v}_B^* \\ \underline{\varphi}(l) = \underline{\varphi}_B^* \end{cases}$$

$v(z^*)$ PARTICOLARE
NON $v(z)$ GENERICA

SPOSTAMENTI RIGIDI DELLA TRAVE E CENTRO DI ROTAZIONE

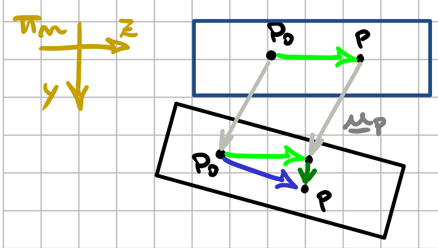
CASO 3D



Sia $\{O, x, y, z\}$ la terna globale,
sia scelto un polo P_0 di posizione $\underline{X}_0$,
sia $\underline{Y}$ la posizione di un generico p.to P

Posso scrivere che: $\underline{u}_P(\underline{Y}) = \underline{u}_{P_0}(\underline{X}) + \underline{\varphi} \wedge (\underline{Y} - \underline{X}_0)$

CASO TRAVE PIANA



Analogamente:
$$\underline{u}_P(\underline{Y}) = \underline{u}_{P_0}(\underline{X}) + \underline{\varphi} \wedge (\underline{Y} - \underline{X}_0)$$

Però in questo caso:

$$\begin{cases} \underline{u}_{P_0} = [0, u_{P_0}^y, u_{P_0}^z] \\ \underline{u}_P = [0, u_P^y, u_P^z] \end{cases} \qquad \underline{\varphi} \perp \pi_m \; \Rightarrow \; \underline{\varphi} = \varphi_x \hat{i}_x$$

Ergo: $\underline{u}_{P_0}, \underline{u}_P, \underline{Y}, \underline{X}_0, \underline{\varphi} \wedge (\underline{Y} - \underline{X}_0) \begin{cases} \in \pi_m \\ \perp \underline{\varphi} \end{cases}$

CENTRO DI ROTAZIONE

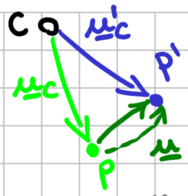
Sia assegnato ad una generica trave un campo di spostamenti rigidi infinitesimi come quello proposto sopra; è possibile dimostrare che esiste ed è unico un punto C appartenente al piano y-z rispetto al quale il campo di spostamenti associato è caratterizzato da una rotazione pura intorno a C.

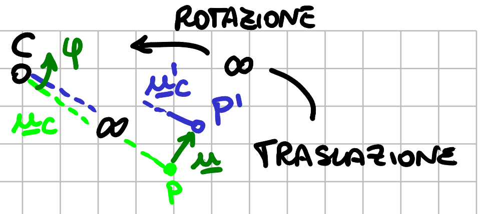
$$\exists C \equiv [x_{c1}, x_{c2}, x_{c3}] :| \; \underline{u}_P(\underline{Y}) = \underline{\varphi} \wedge (\underline{Y} - \underline{X}_c) \quad \forall P \in \mathcal{T} \; (\subseteq \pi_m)$$

$$\text{Ovvero} :| \; \underline{u}_C(\underline{X}_c) = \underline{0}$$

Questo perché è possibile assimilare una traslazione ad una rotazione (e viceversa) se il centro di rotazione è infinitamente distante dal punto P: il vettore spostamento rispetto ad punto C, dove la distanza da tale punto è infinitamente lunga, è assimilabile alla traiettoria di un punto che ruota lungo una circonferenza di raggio infinito.

Maggiore è la distanza tra P e C, più è "dolce" la curva, quindi meno marcata la curvatura. Ripensando alla Meccanica Razionale:





$$\lim_{\rho \to \infty} \left(\frac{1}{\rho}\right) = 0$$

$\frac{1}{\rho} \doteq$ "CURVATURA" $\rho \doteq$ "RAGGIO DI CURVATURA"

Tutto questo ci permette di semplificare il problema esprimendo il campo degli spostamenti con una rotazione pura - anziché come la somma di una rotazione ed una traslazione. Quando in seguito impareremo a localizzare un centro di rotazione per costruzione (metodo grafico) questa semplificazione sarà anche particolarmente utile per lo studio della labilità di un sistema statico, ossia per vedere se lo stesso è capace o meno di esibire spostamenti infinitesimi di qualsiasi tipo e in qualsiasi direzione.

$C \doteq$ "CENTRO ASSOLUTO": $\left| \; \underline{u}(\underline{Y}) = \underline{\varphi} \wedge (\underline{Y} - \underline{X}_c) \right.$

$\|\underline{Y} - \underline{X}_c\| \doteq$ "DISTANZA DAL CENTRO": $\left| \; \|\underline{u}\| = \|\underline{\varphi}\| \cdot \|\underline{Y} - \underline{X}_c\| \cdot \sin(90°) \right.$

$$\Leftrightarrow \quad d = \|\underline{Y} - \underline{X}_c\| = \frac{\|\underline{u}\|}{\|\underline{\varphi}\|} \quad [10^{-n} m]$$

Se P esibisce una traslazione pura: $\varphi \to 0$, $\lim_{\varphi \to 0} d = +\infty$