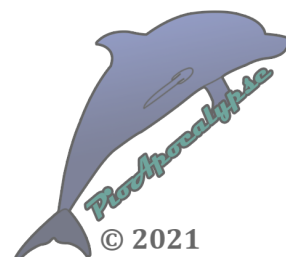


Appunti di Scienza delle Costruzioni

Esercizio - Trave iperstatica



I contenuti del seguente documento sono protetti sotto licenza [Creative Commons BY-NC-SA 4.0](#): sono quindi ammesse la **condivisione**, la **ridistribuzione** e la **modifica** del materiale ivi contenuto, sotto le seguenti condizioni:

- **Attribuzione**: nel documento originale e nelle sue modifiche deve sempre figurare il nome reale o lo pseudonimo dell'autore, nonché la bibliografia originale;
- **Non-Commerciale**: è vietato qualsiasi utilizzo del presente documento e dei suoi contenuti a scopo commerciale e/o pubblicitario; ciò include la rivendita dello stesso o di parte dei suoi contenuti, ma è permessa la vendita a prezzo di stampa;
- **Share-Alike**: (it: "*Condividi allo stesso modo*") qualsiasi ridistribuzione del documento modificato o di parte di esso deve essere reso disponibile sotto la stessa licenza dell'originale, o sotto licenza ad essa compatibile.

Si chiede inoltre, anche se non è espressamente vietato, di non ridistribuire tale documento o parte dello stesso su piattaforme cloud private per pubblicizzare associazioni o eventi.

DISCLAIMER GENERALE:

L'autore - [PioApocalypse](#) - non si assume alcuna responsabilità per l'uso improprio dei contenuti di questo documento, né si ritiene responsabile della performance - positiva o negativa che sia - dello studente in sede d'esame.

Il materiale didattico qui fornito è da considerarsi come un supplemento al materiale indicato dal docente della materia, e trova le sue utilità principali nel riepilogo di lunghi segmenti del programma e nella spiegazione di determinati argomenti in cui lo studente potrebbe aver riscontrato difficoltà. Alcuni termini e semplificazioni qui utilizzati potrebbero non essere idonei durante la discussione degli argomenti del corso con il docente in sede d'esame, e sono proposti solo al fine di aiutare lo studente con la comprensione della materia.

Si prega, infine, di segnalare eventuali errori trovati all'interno del documento all'indirizzo e-mail indicato sulla [repository ufficiale](#), presso la quale è anche possibile trovare un link per chiunque desiderasse fare una piccola donazione all'autore.

Si ringrazia in anticipo per la cooperazione.

- PioApocalypse

TENSIONI SULLA SEZIONE RETTA E VERIFICA DI SICUREZZA

La verifica di sicurezza sulla sezione retta è una tipologia di esercizio particolarmente importante per affrontare gli esami di Scienza delle Costruzioni e Costruzione di Macchine.

Questo esercizio permette di verificare che una data sezione retta sotto dati carichi applicati rientri nei parametri di sicurezza per permettere alla trave - e quindi alla macchina di cui la trave è parte - di operare correttamente senza il rischio di cedimenti.

Poiché una trave è costituita da infinite sezioni rette, nella Costruzione di Macchine si considera solitamente la sezione più sollecitata della trave, in modo tale che, se tale sezione supera la verifica, per estensione la supereranno tutte le altre.

Nella meccanica e nell'edilizia le sezioni rette possono avere forme molto comuni, come la sezione a I, a C, a T ecc...

In questo documento si spiegherà come eseguire la verifica di sicurezza su una generica sezione retta APERTA e SOTTILE, di materiale duttile.

Ci rifaremo alla teoria del De Saint Venant.

CRITERI DI RESISTENZA (RIFORMULATI):

TRESCA:

$$\sigma_{eq}^T = \sqrt{\sigma_z^2 + 4\tau_z^2} \leq \frac{\sigma_y}{\eta_s}$$

Di cui:

$\sigma_y \doteq$ TENSIONE LIMITE
DA PROVA DI TRAZIONE

$\eta_s \doteq$ COEFFICIENTE
DI SICUREZZA

σ_z e $\tau_z \doteq$ LE TENSIONI NORMALE
E TANGENZIALE

EQ. DI
NAVIER

$N \quad M_x \quad M_y$

FORMULE
DI JOURAWSKI

$T_x \quad T_y \quad M_z^T$

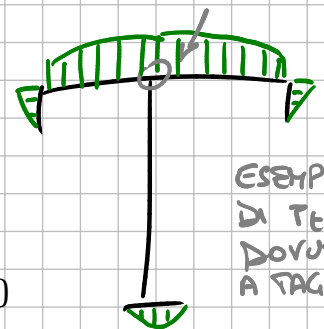
VON-MISES:

$$\sigma_{eq}^{VM} = \sqrt{\sigma_z^2 + 3\tau_z^2} \leq \frac{\sigma_y}{\eta_s}$$

(Tipica del materiale;
y sta per "yielding")

(Dipende dall'applicazione)

(Si considerano sui punti
più sollecitati della sezione)



ESEMPIO
DI $\tau_{x,z}$
DORUTA
A TAGLIO

Cosa occorre per poter applicare Navier e Jourawski?

- Scomporre la sezione in elementi di forma elementare (es. rettangolare)
- Localizzare la posizione del baricentro della sezione;
- Conoscere le superfici ed i momenti d'inerzia degli elementi della sezione, poi i loro totali;
- Saper calcolare un momento statico rispetto ad un asse baricentrico;
- Calcolare il momento di resistenza a torsione ("fattore di rigidità torsionale").

NAVIER:
$$\sigma_z = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x} y - \frac{M_y}{I_y} x$$

con y e x annunciate rispetto
alla posizione del baricentro

JOURAWSKI + TORSIONE:
$$\tau_z = -\frac{T_x S_y}{I_y b(s)} - \frac{T_y S_x}{I_x b(s)} + \frac{M_z^T}{J_z b(s)}$$

con $b(s) \doteq$ spessore della
sezione retta
(o parte di tale)

NAVIER 1) Localizzare il baricentro.

DATI: $s_a = \frac{b}{50}$ $N > 0$ $M_x, M_y, T_x \neq 0$

Ricordiamo che il baricentro giace SEMPRE sugli assi di simmetria:

$$X_G = X_{sim} = 0$$

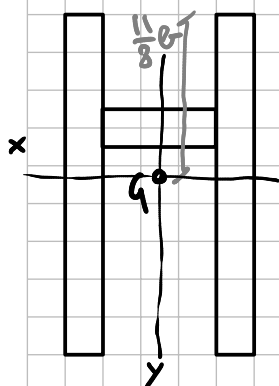
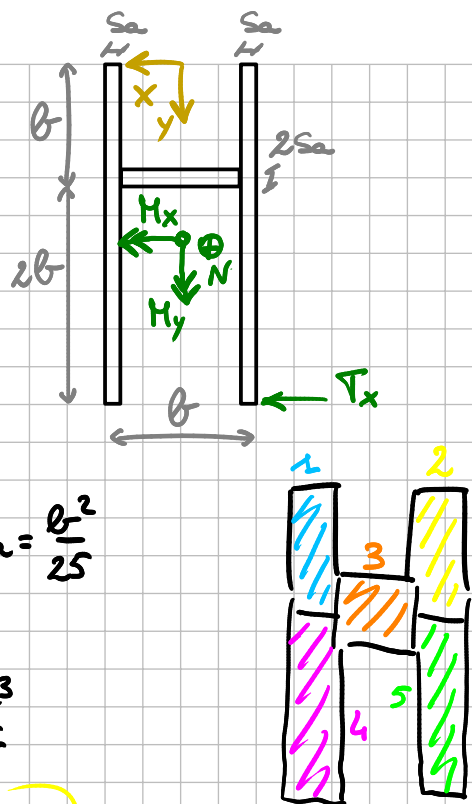
$$y_G = \frac{\sum_i S x_i}{\sum_i A_i} \quad (\emptyset \text{ è il punto più alto della sezione per scelta})$$

$$A_1 + A_4 = A_2 + A_5 = s_a \cdot 3b = 3 \frac{b^2}{50} \quad A_3 = b \cdot 2s_a = \frac{b^2}{25}$$

$$A_{TOT} = 2(A_1 + A_4) + A_3 = \frac{4}{25} b^2$$

$$S_{x14} = y_G^{1-4} \cdot (A_1 + A_4) = \frac{9}{100} b^3 \quad S_{x3} = y_G^3 A_3 = \frac{b^3}{25}$$

$$S_{xTOT} = 2S_{x14} + S_{x3} = \frac{22}{100} b^3 \quad y_G = \frac{S_{xTOT}}{A_{TOT}} = \frac{11}{8} b \approx 1,38 b$$



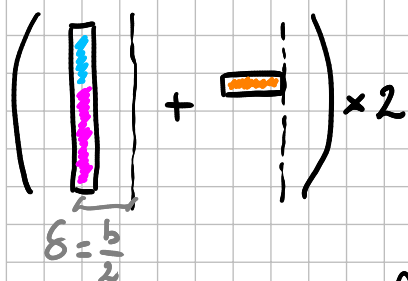
2) Calcolare i momenti d'inertia

$$I_{(REF)} = \frac{1}{12} a b^3 + a b \cdot s^2$$

DOVE: $\begin{cases} a: \text{lato parallelo all'asse cui è riferito il momento} \\ b: \text{lato ortogonale all'asse cui è riferito il momento} \\ s: \text{distanza tra il baricentro e l'asse cui è riferito il momento} \end{cases}$

NOTA: sarà talvolta necessario "ruotare" il momento d'inertia, quando le singole sezioni sono oblique rispetto all'asse cui è riferito il momento. Come fare ciò sarà illustrato nell'addendum alla fine.

$$I_y = I_y^G = I_y^{G(1-4)} + I_y^{G(2-5)} + I_y^{G(3)} = 2I_y^{G(1-4)} + I_y^{G(3)}$$



$$\text{Dove: } I_y^{G(1-4)} = \iint y^2 dx dy$$

$$\text{oppure } = \frac{1}{12} 3b \cdot s_a^3 + 3b \cdot s_a \cdot \frac{b^2}{4} \approx \frac{3}{200} b^4$$

$$\text{ANALOGAMENTE: } I_y^{G(3)} = \frac{1}{12} 2s_a b^3 = \frac{1}{300} b^4$$

$$I_y = \frac{3}{100} b^4 + \frac{1}{300} b^4 = \frac{1}{30} b^4$$

Il calcolo di I_x è lasciato come allenamento al lettore

3) Calcolare σ_z (con grafico)

$$\sigma_z = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x} y - \frac{M_y}{I_y} x$$

Rispetto al baricentro

$$\sigma_z = f(x, y)$$

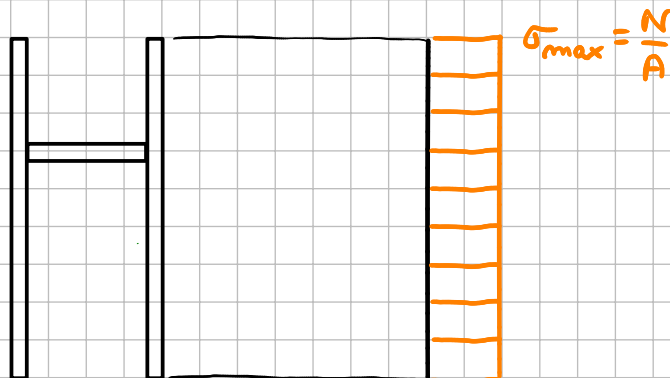
Si possono quindi avere quattro casi.

CASO ①: $N \neq 0, M_x = M_y = 0$, "SFORZO NORMALE CENTRATO"

$$\sigma_z = \frac{N}{A} \text{ (cost.)}$$

$$\sigma_z > 0 \text{ se } N > 0 \text{ (TRAZ.)}$$

$$\sigma_z < 0 \text{ se } N < 0 \text{ (COMP.)}$$



CASO ②: $N = M_y = 0, M_x \neq 0$, "FLESSIONE SEMPLICE"

$$\sigma_z = \frac{M_x}{I_x} y$$

ASSE NEUTRO:

$$\sigma_z = 0 \rightarrow y = 0 \text{ (c)}$$

MAX:

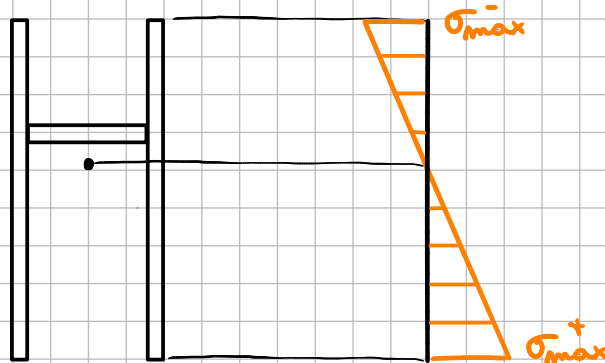
$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{I_x} y_{\max}$$

$$\sigma_{\max}^- = -\frac{M_x}{I_x} \frac{11}{8} b$$

$$\sigma_{\max}^+ = \frac{M_x}{I_x} \frac{13}{8} b$$

$$|\sigma_{\max}^+| > |\sigma_{\max}^-|$$

(ANALOGA DIMOSTRAZ. PER $M_y \neq 0, M_x = 0$)



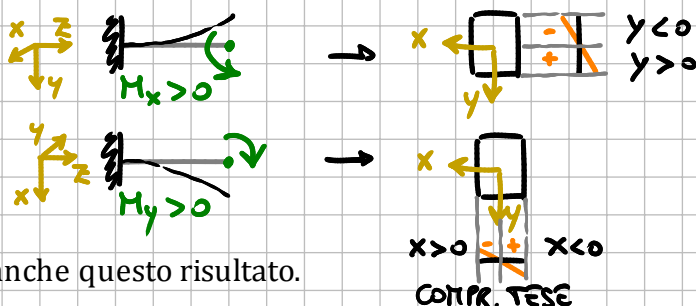
Perché $+\frac{M_x}{I_x} y$ ma $-\frac{M_y}{I_y} x$?

SEGNO POSITIVO \leftrightarrow FIBRE TESE

Quando il momento M_x è positivo, le fibre sono tese per $y > 0$.

Quando il momento M_y è positivo, le fibre sono tese per $x < 0$.

Cambiando sistema di riferimento, cambia anche questo risultato.



CASO ③: $N = 0, M_x \neq 0, M_y \neq 0$, "FLESSIONE DEVIATA"

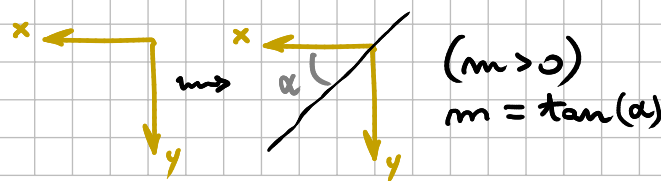
$$\sigma_z = \frac{M_x}{I_x} y - \frac{M_y}{I_y} x$$

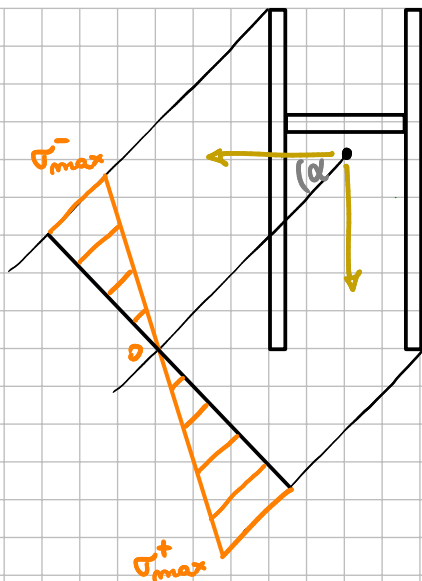
ASSE NEUTRO:

$$\sigma_z = 0 \rightarrow y = \frac{M_y I_x}{M_x I_y} x$$

$(y = m x)$

Come lo rappresentiamo?
Ricordiamo com'è orientato il S.D.R.

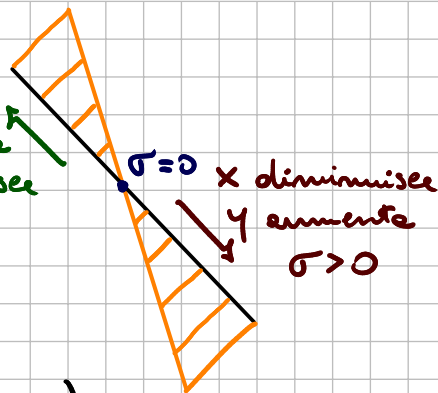




$$\alpha = \tan^{-1} \left(\frac{M_y I_x}{M_x I_y} \right)$$

Orviamente:

x aumenta
y diminuisce
 $\sigma < 0$



$$\begin{aligned} \sigma_{\max}^+ &= \sigma_z(x_{\min}, y_{\max}) \\ &= \frac{M_x}{I_x} \frac{13}{8} b + \frac{M_y}{I_y} \frac{b}{2} (> 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\max}^- &= \sigma_z(x_{\max}, y_{\min}) \\ &= -\frac{M_x}{I_x} \frac{11}{8} b - \frac{M_y}{I_y} \frac{b}{2} (< 0) \end{aligned}$$

CASO (4): $N \neq 0, M_x \neq 0, M_y \neq 0$, "FLESSIONE COMPOSTA"

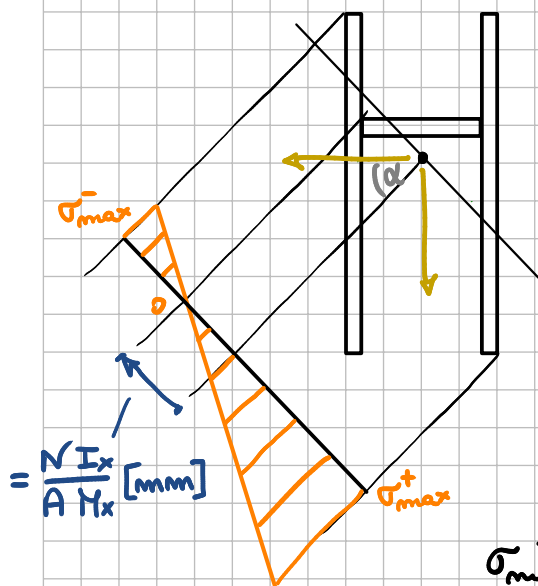
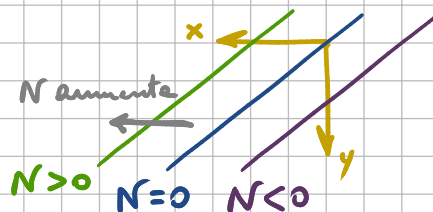
$$\sigma_z = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x} y - \frac{M_y}{I_y} x$$

ASSE NEUTRO:

$$\sigma_z = 0 \rightarrow y = \frac{M_y I_x}{M_x I_y} x - \frac{N \cdot I_x}{A \cdot M_x}$$

($y = m x + q$)

Come lo rappresentiamo?



$$\alpha = \tan^{-1} \left(\frac{M_y I_x}{M_x I_y} \right)$$

Orviamente:

x aumenta
y diminuisce
 $\sigma < 0$

Supponiamo $N > 0$:

$$\begin{aligned} \sigma_{\max}^+ &= \sigma_z(x_{\min}, y_{\max}) \\ &= \frac{M_x}{I_x} \frac{13}{8} b + \frac{M_y}{I_y} \frac{b}{2} + \frac{N}{A} \text{ (sicuramente } > 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\max}^- &= \sigma_z(x_{\max}, y_{\min}) \\ &= -\frac{M_x}{I_x} \frac{11}{8} b - \frac{M_y}{I_y} \frac{b}{2} + \frac{N}{A} \end{aligned}$$

$$(\geq 0 \text{ se } \frac{N}{A} \geq \frac{M_x}{I_x} \frac{11}{8} b + \frac{M_y}{I_y} \frac{b}{2})$$

JOURAWSKI (TAGLIO)

Supponiamo per semplicità che - come da traccia, sulla sezione sia applicato un solo taglio lungo la direzione x, di verso positivo, con retta d'azione incidente sull'estremo inferiore della sezione.

Queste informazioni ci permettono non solo di risalire alle tensioni tangenziali dovute al taglio in sé, ma anche alla natura della torsione dovuta proprio al taglio e - quindi - alle tensioni tangenziali dovute alla torsione.

$$\text{FORMULA DI JOURAWSKI: } \tau_{t,z} = -\frac{T_x S_y}{I_y b} - \frac{T_y S_x}{I_x b} \quad \text{dunque} = -\frac{T_x S_y}{I_y b}$$

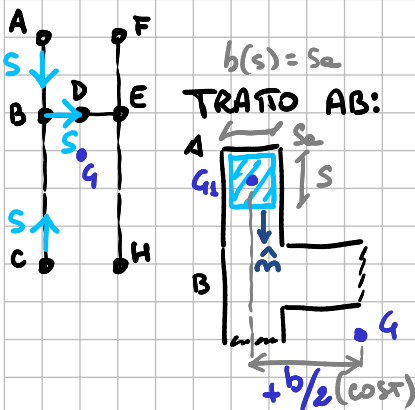
Trattando T_x , I_y e $b(s)$ come costanti note, come calcoliamo S_y ?

S_y è il MOMENTO STATICO (o momento del primo ordine, o anche primo momento d'area).

$$S_y = \iint_{\Sigma} x \, dA \quad (\text{ANALOGAMENTE: } S_x = \iint_{\Sigma} y \, dA)$$

Possiamo anche scriverlo come: $S_{y,i} = A_{\Sigma i} \cdot x_{G,i}$

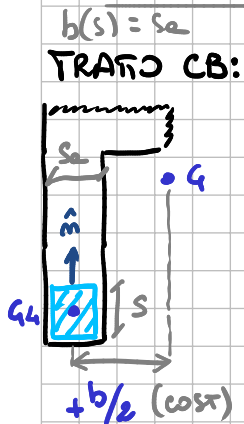
ossia: Area della sezione \times Distanza (x) tra baricentri



$$S_y^{AB}(s=0) = 0$$

$$S_y^{AB}(s) = s_a \cdot s \cdot \frac{\theta}{2} \rightarrow S_{yB} = S_y^{AB}(s=b) = \frac{b^3}{100}$$

$$\tau_A = 0 \quad \tau_B = -\frac{T_x \cdot b^2}{2 \cdot I_y} < 0 \rightarrow \tau_{AB}: \text{lineare}$$



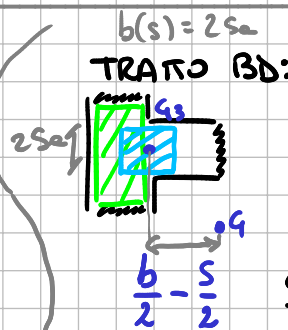
$$S_{yC} = 0 \rightarrow \tau_C = 0$$

$$S_y^{CB}(s) = s_a \cdot s \cdot \frac{\theta}{2}$$

$$\hookrightarrow S_{yB} = S_y^{CB}(s=2b) = \frac{b^3}{50}$$

$$\hookrightarrow \tau_B^+ = -\frac{T_x \cdot b^2}{I_y} < 0$$

τ_{CB} : lineare



TRATTO BD:

$$S_{yB} = 3b \cdot s_a \cdot \frac{\theta}{2} = \frac{3}{100} b^3$$

$$\tau_B = -\frac{3 T_x b^2}{4 I_y}$$

$$S_y^{BD}(s) = \frac{b}{25} \cdot s \cdot \left(\frac{b}{2} - \frac{s}{2} \right) + \frac{3}{100} b^3$$

$$= \frac{3}{100} b^3 + \frac{b^2}{50} s - \frac{b}{50} s^2$$

$$S_{y \max} = S_y^{BD}(s^*) : \frac{d}{ds} S_y^{BD}(s^*) = 0$$

$$\tau_{BD}: \text{parabolico, } \tau_{\max}^{BD} = \tau(s = \frac{b}{2}) = -\frac{7b^2}{8} \cdot \frac{T_x}{I_y} < 0$$

$$\tau < 0 \rightarrow \tau_{BD}$$



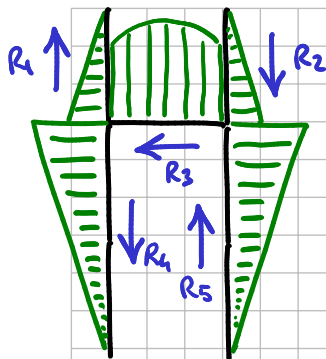
Nei tratti DE, FE e HE è possibile osservare

una situazione del tutto simmetrica, con la sola differenza che

i segni delle tensioni su FE e HE saranno positivi perché sarà negativa la distanza (x) dal baricentro.

Conseguentemente, cambierà anche il segno delle RISULTANTI per quei tratti, così definite:

$$R = \int_0^s \tau(s) \cdot b(s) \cdot ds \rightarrow \hat{R} = \hat{m} \quad \text{se } \tau > 0 \quad \hat{R} = -\hat{m} \quad \text{se } \tau < 0$$



PUNTO PIÙ SOLLECITATO DAL TAGLIO: D

$$\tau_D = -\frac{7}{8} b^2 \frac{\tau_x}{I_y} = -\frac{105}{4} \cdot \frac{\tau_x}{b^2}$$

Prima di passare all'analisi della torsione, dobbiamo conoscere tre cose:

- 1) Le risultanti delle tensioni sui vari tratti;
- 2) La posizione del CENTRO DI TAGLIO;
- 3) Il momento torcente dovuto al taglio.

$$1) |R_1| = |R_2| = \int_0^b \tau_{AB} \cdot \frac{b}{50} \cdot ds = \int_0^b \frac{b^2}{100} \frac{\tau_x}{I_y} ds = \int_0^b \frac{15}{50} b^2 \frac{\tau_x}{b^4} s ds = \frac{3}{10} \frac{\tau_x}{b^2} \frac{1}{2} b^2 = \frac{3}{20} \tau_x$$

$$|R_4| = |R_5| = \int_0^{2b} \tau_{CD} \cdot \frac{b}{50} ds = \frac{3}{10} \frac{\tau_x}{b^4} b^2 \int_0^{2b} s ds = \frac{3}{10} \tau_x \frac{4}{2} = \frac{3}{5} \tau_x$$

$$|R_3| = 2 \int_0^{b/2} \tau_{BD} \cdot \frac{b}{25} ds = 2 \int_0^{b/2} \left(\frac{3}{100} b^3 + \frac{b^2}{50} s - \frac{b}{50} s^2 \right) \frac{\tau_x}{b^4} 30 \frac{b}{25} ds =$$

$$= \frac{60 \tau_x}{b^4} \left[\frac{3}{100} b^3 s + \frac{b^2 s^2}{100} - \frac{b s^3}{150} \right]_0^{b/2} = \frac{60 \tau_x}{b^4} b^4 \left(\frac{3}{200} + \frac{1}{400} - \frac{1}{1200} \right)$$

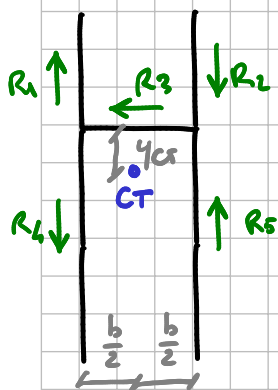
$$= 60 \tau_x \frac{20}{1200} = \tau_x$$

- 2) Il centro di taglio (CT) è «il punto di una sezione trasversale di una trave per cui deve passare la retta d'azione dello sforzo tagliente affinché non si produca momento torcente sulla sezione».

- Wikipedia

Il CT giace sempre sull'asse di simmetria, o coincide con l'intersezione tra due assi di simmetria.

In questo modo ne conosciamo già la coordinata x, ma non è sufficiente. Supponiamo che il CT si trovi appena sotto il tratto BE...



EQUILIBRIO ALLA ROTAZIONE:

$$x R_4 \cdot \frac{b}{x} - x R_1 \cdot \frac{b}{x} + R_3 y_{CT} = 0$$

$$y_{CT} = \frac{R_1 - R_4}{R_3} b = -\frac{9}{20} b = -0,45 b$$

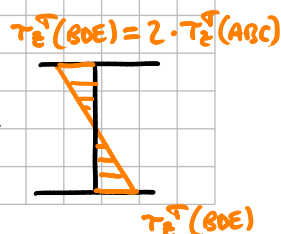
< 0, quindi il CT è SOPRA il tratto BE

y_{CT} è così calcolato rispetto alla y del tratto BE. Rispetto a G: $y_{CT}^{(G)} = -\frac{9}{20} b - \left(\frac{11}{8} - 1 \right) b = -\frac{33}{40} b$

- 3) Il MOMENTO TORCENTE sarà:

$$M_z^T = -\tau_x \cdot d_{CT} = -\frac{49}{20} \tau_x b$$

TRATTI ABC, FEH:



TORSIONE

Restano solo da trovare le tensioni tangenziali dovute alla torsione.

$$\tau_{t,z}^T = \frac{M_T}{J_T} b(s) \rightarrow \begin{cases} \text{TRATTO BE: } \frac{M_T}{J_T} \frac{b}{25} \\ \text{TUTTO IL RESTO: } \frac{M_T}{J_T} \frac{b}{50} \end{cases}$$

Dove $J_T = \sum_i J_{T,i} = \sum_i \frac{1}{3} \left(a \left(b(s) \right)^3 \right)_i$ dove $a \doteq$ LATO LUNGO del rettangolo
 dunque: $= \frac{1}{3} 2 \left(3b \cdot \left(\frac{b}{50} \right)^3 \right) + \frac{1}{3} \left(b \cdot \left(\frac{b}{25} \right)^3 \right) \dots$ $b(s) \doteq$ LATO SOTTILE del rettangolo

$$\tau_{t,z \max}^T \text{ BE} = \frac{49}{20} \frac{T_x b}{J_T 25}$$

$$\tau_{t,z \max}^T \text{ AC} = \tau_{t,z \max}^T \text{ FH} = \frac{49}{20} \frac{T_x b}{J_T 50}$$

Massima sollecitazione sul tratto BE.

VERIFICA

I punti della sezione maggiormente sollecitati sono i seguenti:

MASSIMA σ_z : PUNTO H $\begin{cases} \sigma_z(H) = \frac{M_x}{I_x} \frac{13}{8} \varrho + \frac{M_y}{I_y} \frac{\varrho}{2} + \frac{N}{A} \\ \tau_{t,z} = \emptyset \quad \tau_{t,z}^T = \frac{49}{20} \frac{T_x b}{J_T 50} \end{cases}$

MASSIMA $\tau_{t,z}$: PUNTO D $\begin{cases} \sigma_z(D) = -\frac{M_x}{I_x} \frac{3}{8} \varrho + \frac{N}{A} \\ (x=0, y=-\frac{3}{8}b) \quad |\tau_{t,z}| = \frac{7\varrho^2}{8} \cdot \frac{T_x}{I_y} \quad \tau_{t,z}^T = \frac{49}{20} \frac{T_x b}{J_T 25} \end{cases}$

MASSIMA $\tau_{t,z}^T$: TRATTO BE

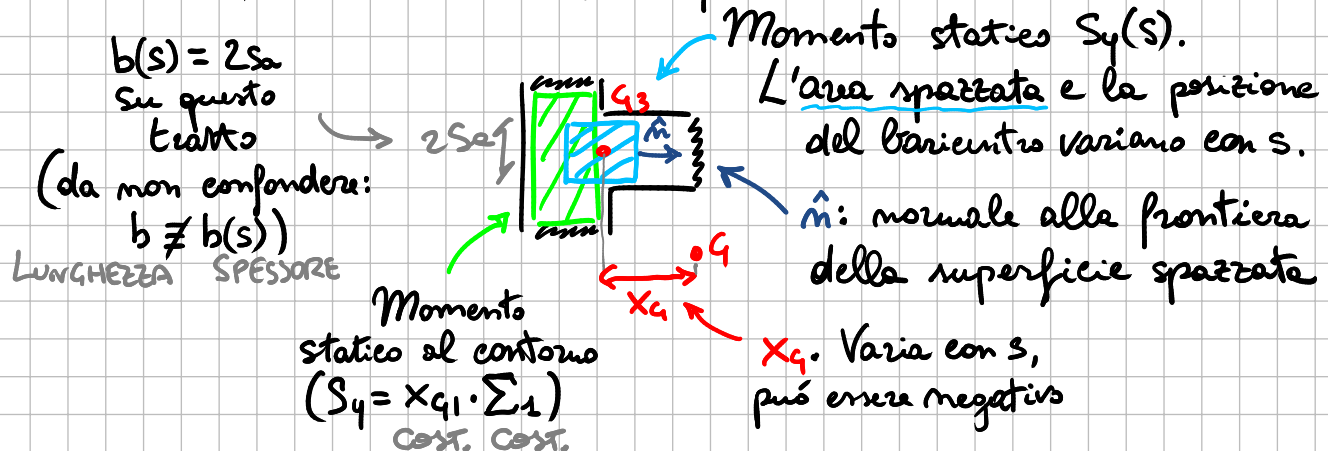
Se $\sigma_{eq}^T(H) \leq \frac{\sigma_y}{\eta_s}$ e $\sigma_{eq}^T(D) \leq \frac{\sigma_y}{\eta_s}$ la verifica è superata!

H: $\sqrt{\left(\frac{M_x}{I_x} \frac{13}{8} \varrho + \frac{M_y}{I_y} \frac{\varrho}{2} + \frac{N}{A} \right)^2 + 4 \left(\frac{49}{20} \frac{T_x b}{J_T 50} \right)^2} \leq \frac{\sigma_y}{\eta_s}$

D: $\sqrt{\left(-\frac{M_x}{I_x} \frac{3}{8} \varrho + \frac{N}{A} \right)^2 + 4 \left(\frac{7\varrho^2}{8} \cdot \frac{T_x}{I_y} + \frac{49}{20} \frac{T_x b}{J_T 25} \right)^2} \leq \frac{\sigma_y}{\eta_s}$

ADDENDUM: "ANALISI" DEL MOMENTO STATICO

(Si assume, a titolo di esempio e per comodità, che $T_x > 0$)



Quello che facciamo è sostanzialmente considerare un'area del tratto partendo da un punto limite e studiarne il momento statico; l'area spazzata varia con s , la coordinata di riferimento, il cui versore normale è importante per capire il verso della tensione tangenziale.

1. Scegli un p.to di partenza
2. Inizia a spazzare l'area del tratto
3. Determina la funz. del momento statico

$$S_y = \underbrace{\text{AREA SPAZZATA}}_{\text{VARIA CON } S \text{ SEMPRE POSITIVA}} \times \underbrace{\text{DISTANZA TRA } G_1 \text{ E } G}_{\text{PUÒ VARIARE CON } S \text{ PUÒ ESSERE NEGATIVA}}$$

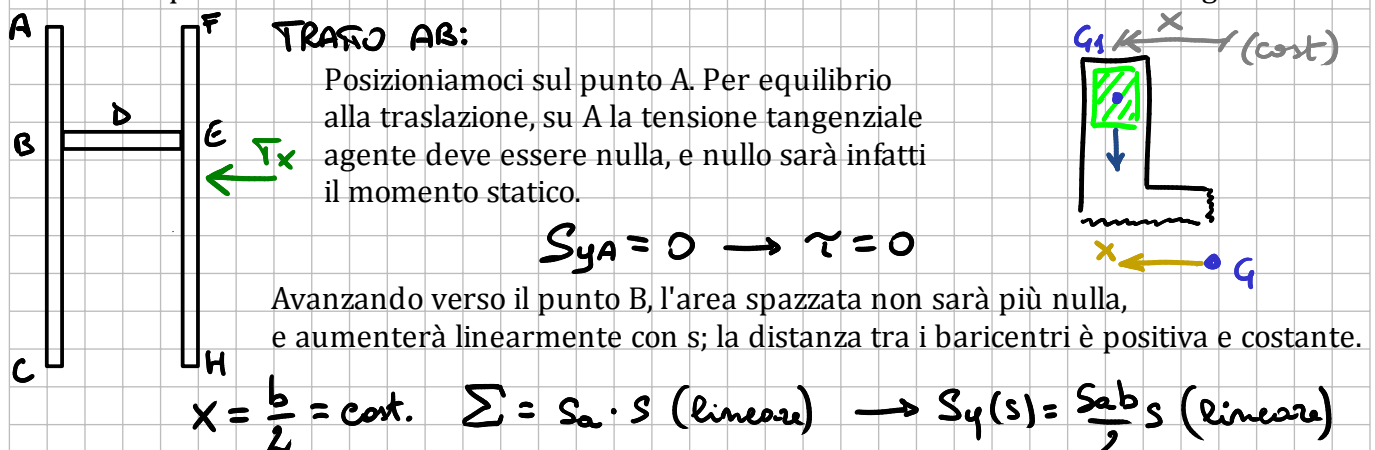
4. Risali alla τ

$$\tau = - \frac{T_x S_y}{I_y b(s)} \quad T_x > 0 \rightarrow \begin{cases} \text{Se } x_{G1-G} > 0 \rightarrow S_y > 0, \tau < 0 \\ \text{Se } x_{G1-G} < 0 \rightarrow S_y < 0, \tau > 0 \end{cases}$$

Il segno di τ mostra se le tensioni (e dunque la forza interna risultante) seguono o meno il verso di \hat{n} :

$$\tau > 0: \rightarrow \quad \tau < 0: \leftarrow$$

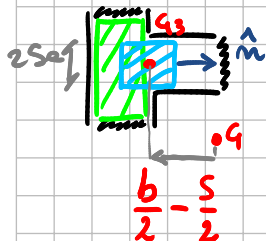
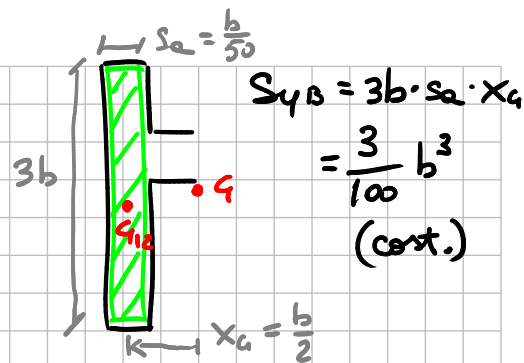
Torniamo quindi ad esaminare cosa abbiamo fatto sui tratti AB e BD della sezione assegnata.



Poiché la distanza tra i baricentri è positiva, il momento sarà positivo e la tensione tangenziale sarà negativa: di conseguenza, la tensione andrà nel verso opposto rispetto alla normale che abbiamo scelto; potremmo dimostrare che scegliendo di partire dal basso anziché dall'alto la tensione risulterebbe positiva, ma la formula del momento statico sarebbe drasticamente diversa. È importante però ricordare che né la tensione né il suo verso sono arbitrari, e che dunque non dipendono dal SDR.

TRATTO BD:

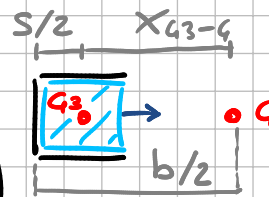
Dopo aver calcolato le tensioni per AB e CB, ci troviamo nel punto B; notiamo che la tensione in tale punto non è nulla, e deduciamo che anche il momento statico al contorno sarà non-nullo. Il momento iniziale vale infatti quanto la superficie totale dei tratti AB e CB, moltiplicata per la distanza x dei loro baricentri dal baricentro G della sezione intera.



In questo caso, tuttavia, poiché il tratto BD non è perpendicolare alla direzione del taglio, la distanza tra il baricentro della sezione spazzata e quello dell'intera sezione varia linearmente con s .

Fino al punto D, tale distanza rimane positiva; sarà negativa invece sui tratti DE, FE e HE.

$$x_{G_3-G} = \text{Max}\{x_{G_3-G}\} - \frac{s}{2} \quad \text{Perché?}$$



$$S_y(s) = S_{yB} + \sum_{BD} \cdot x_{G_3-G} = \frac{3}{100} b^3 + 2s_a \cdot s \cdot \left(\frac{b}{2} - \frac{s}{2}\right)$$

(const.) + (lineare) · (lineare) = (parabolico)

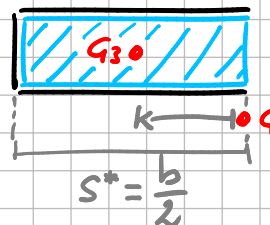
Siccome in questo caso il momento statico è parabolico, dobbiamo anche trovarne il punto di massimo. Spoiler: è sempre in corrispondenza del baricentro.

$$S_y(s^*) = S_{y\max} \Leftrightarrow \frac{d}{ds} S_y(s) \Big|_{s=s^*} = 0 \rightarrow S_y'(s) = \frac{b^2}{50} - \frac{b}{25} s$$

$$\hookrightarrow s^* = \frac{b}{2} \quad \text{c.v.d.}$$

Ovviamente:

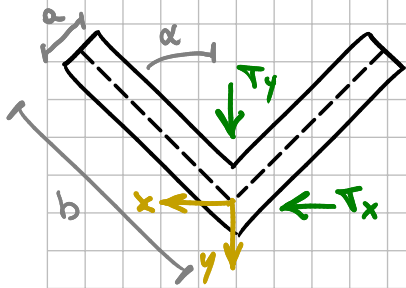
$$\tau_{\max} = \tau(S_y = S_{y\max}) = \tau(s^*)$$



ADDENDUM: SEZIONI CON TRATTI OBLIQUI

$$x_G = 0 \quad T_x, T_y \neq 0$$

$$\alpha = 45^\circ = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$$



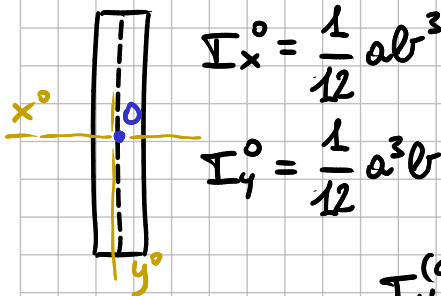
Cosa cambia?

1) Momento d'inerzia

Formule di trasformazione del momento d'inerzia:

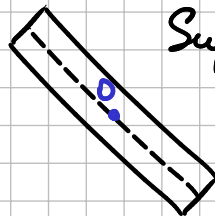
$$I_x^{(s)} = (I_x^0 \cos^2 \alpha + I_y^0 \sin^2 \alpha) + y^2 A - 2xy S_x$$

$$I_y^{(s)} = (I_y^0 \cos^2 \alpha + I_x^0 \sin^2 \alpha) + x^2 A - 2xy S_y$$



$$I_x^0 = \frac{1}{12} ab^3$$

$$I_y^0 = \frac{1}{12} a^3 b$$



Supponiamo $y_G \approx y_{G1} = y_{G2}$

$$I_x^{(s)1} = (I_x^0 \cos^2 \alpha + I_y^0 \sin^2 \alpha) = \frac{1}{12} ab (a^2 + b^2)$$

$$I_y^{(s)1} = (I_y^0 \cos^2 \alpha + I_x^0 \sin^2 \alpha) + x^2 A - 2xy S_y = \frac{ab}{6} \left(\frac{a^2}{4} + b^2 \right)$$

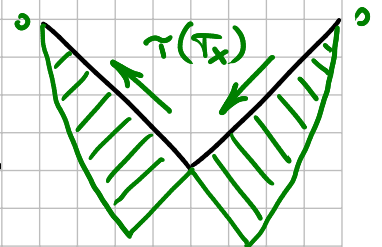
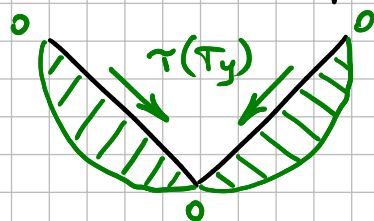
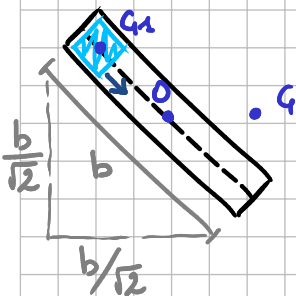
2) Momento statico

$$S_x(s=0) = 0$$

$$S_x(s) = -a \cdot s \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} (b-s) \rightarrow S_x(s=b) = 0$$

$$S_{x \max} = S_x \left(s = \frac{b}{2} \right) = \frac{\sqrt{2}}{16} ab^2$$

[...]



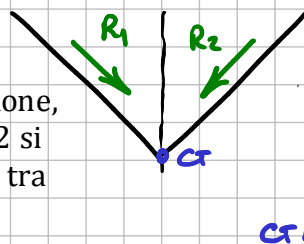
$$S_y(s=0) = 0$$

$$S_y(s) = a \cdot s \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \left(b - \frac{1}{2}s \right) \rightarrow S_y(s=b) = ab^2 \frac{\sqrt{2}}{4}$$

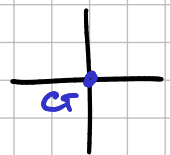
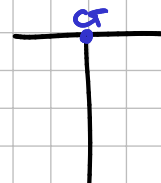
$$S_{y \max} = S_y(s=b) \quad [...]$$

3) Centro di taglio

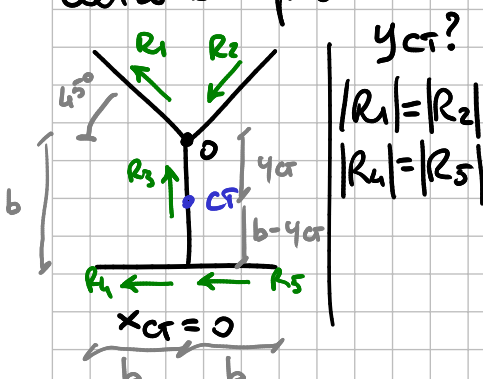
In questo caso si trova per costruzione, poiché le rette d'azione di R_1 ed R_2 si intersecano proprio nella giuntura tra i due tratti.



CASI ANALOGHI



Altro esempio:



$y_{CG}?$

$$|R_1| = |R_2|$$

$$|R_4| = |R_5|$$

$$\downarrow \text{CG}: -\cancel{2}R_4 \cdot (b - y_{CG}) + \cancel{2}R_1 (\sqrt{2} y_{CG}) = 0$$

$$-R_4 b + R_4 y_{CG} + R_1 \sqrt{2} y_{CG} = 0$$

$$-R_4 b + y_{CG} (R_4 + \sqrt{2} R_1) = 0$$

$$y_{CG} = \frac{R_4}{R_4 + \sqrt{2} R_1} b$$