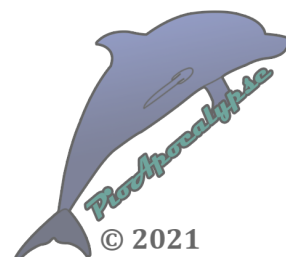


Appunti di Scienza delle Costruzioni

Capitolo 06a

Criteri di resistenza e verifica di sicurezza



I contenuti del seguente documento sono protetti sotto licenza [Creative Commons BY-NC-SA 4.0](#): sono quindi ammesse la **condivisione**, la **ridistribuzione** e la **modifica** del materiale ivi contenuto, sotto le seguenti condizioni:

- **Attribuzione**: nel documento originale e nelle sue modifiche deve sempre figurare il nome reale o lo pseudonimo dell'autore, nonché la bibliografia originale;
- **Non-Commerciale**: è vietato qualsiasi utilizzo del presente documento e dei suoi contenuti a scopo commerciale e/o pubblicitario; ciò include la rivendita dello stesso o di parte dei suoi contenuti, ma è permessa la vendita a prezzo di stampa;
- **Share-Alike**: (it: "*Condividi allo stesso modo*") qualsiasi ridistribuzione del documento modificato o di parte di esso deve essere reso disponibile sotto la stessa licenza dell'originale, o sotto licenza ad essa compatibile.

Si chiede inoltre, anche se non è espressamente vietato, di non ridistribuire tale documento o parte dello stesso su piattaforme cloud private per pubblicizzare associazioni o eventi.

DISCLAIMER GENERALE:

L'autore - [PioApocalypse](#) - non si assume alcuna responsabilità per l'uso improprio dei contenuti di questo documento, né si ritiene responsabile della performance - positiva o negativa che sia - dello studente in sede d'esame.

Il materiale didattico qui fornito è da considerarsi come un supplemento al materiale indicato dal docente della materia, e trova le sue utilità principali nel riepilogo di lunghi segmenti del programma e nella spiegazione di determinati argomenti in cui lo studente potrebbe aver riscontrato difficoltà. Alcuni termini e semplificazioni qui utilizzati potrebbero non essere idonei durante la discussione degli argomenti del corso con il docente in sede d'esame, e sono proposti solo al fine di aiutare lo studente con la comprensione della materia.

Si prega, infine, di segnalare eventuali errori trovati all'interno del documento all'indirizzo e-mail indicato sulla [repository ufficiale](#), presso la quale è anche possibile trovare un link per chiunque desiderasse fare una piccola donazione all'autore.

Si ringrazia in anticipo per la cooperazione.

- PioApocalypse

CRITERI DI RESISTENZA

Nel caso più generale di uno stato tensionale locale caratterizzato da tutte e 6 le componenti, il materiale è elastico lineare quando esiste una certa funzione f tale che:

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \tau_{12}, \tau_{23}, \tau_{13}) \leq 0$$

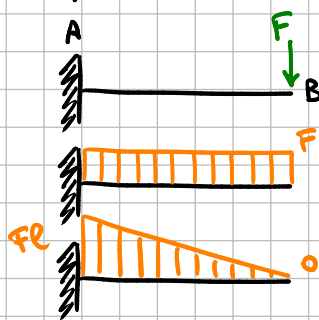
Tale disequazione è soddisfatta nell'insieme dei punti di uno spazio a 6 dimensioni detto DOMINIO ELASTICO DEL MATERIALE, la cui frontiera limite - o FRONTIERA DI PRIMA PLASTICIZZAZIONE - è definita come l'insieme dei punti per i quali: $f = 0$

Siccome da ingegneri non vogliamo che le nostre travi esibiscano deformazioni plastiche, e anzi vogliamo tenerci quanto più lontani possibile dalla frontiera di prima plasticizzazione, dobbiamo stabilire dei parametri di sicurezza per assicurarci che le tensioni interne non siano abbastanza grandi da danneggiare la struttura. Il criterio in base al quale definiamo la funzione f si chiama CRITERIO DI RESISTENZA. Per i materiali fragili abbiamo una vasta scelta, come il criterio di Rankine o il criterio di Coulomb-Mohr, ma non affronteremo nessuno di questi criteri in questo corso.

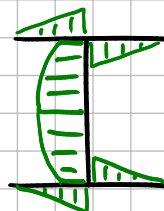
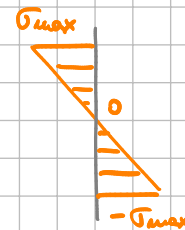
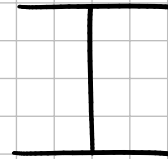
Per i materiali duttili, stiamo invece per studiare i criteri di Tresca e von Mises, probabilmente i più utilizzati in ingegneria meccanica.

Una volta definito / scelto un criterio di resistenza per lo studio delle tensioni sulla trave, si procede quindi alla VERIFICA DI SICUREZZA, procedura che consiste nell'assicurarsi che le tensioni interne dovute ai carichi applicati sulle sezioni più critiche non ne provochino snervamenti nei loro punti più sollecitati. Esistono una serie di semplificazioni che possiamo fare in quest'analisi, ma saranno approfondite nel corso di Costruzione di Macchine.

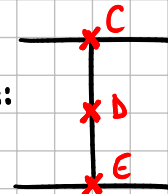
Esempio:



SEZIONE PIÙ CRITICA: A



PUNTI PIÙ CRITICI:



Per C, D ed E: $\sigma_{eq}^T \leq \sigma_{amm}$

oppure $\sigma_{eq}^{VM} \leq \sigma_{amm}$

dove $\sigma_{amm} = \frac{\sigma_y}{\eta}$

con $\eta = \text{COEFFICIENTE DI SICUREZZA (DATO)}$

Il coefficiente di sicurezza può essere dettato da una norma, tabellato o semplicemente imposto dall'applicazione della trave. Generalmente parte da un valore minimo di 2, poiché vogliamo allontanarci quanto più possibile dalla tensione di snervamento per evitare che un difetto del nostro materiale faccia cedere la trave con sforzi minori di quanto previsto.

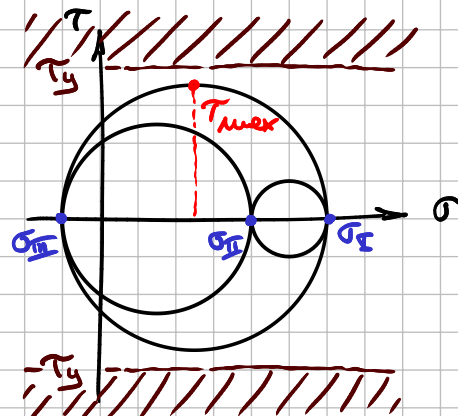
Come altre cose, anche questo sarà approfondito meglio all'esame di Costruzione di Macchine.

CRITERIO DI TRESCA

«Si ha cedimento del materiale quando il massimo sforzo di taglio supera la tensione tangenziale limite in un test di resistenza monoassiale».

$y \div$ "yielding", snervamento
 $\sigma_y \equiv \sigma_{su}$ $\tau_y \equiv \tau_{su}$

$$\tau_{max} \leq \tau_y$$



Questo criterio è indipendente dallo stress idrostatico, nel senso che non importa dove posizioniamo il cerchio di Mohr lungo l'asse delle ascisse.

NON DIPENDE DA: $\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}$

MA DIPENDE DA: $\sigma_I - \sigma_{II}, \sigma_{II} - \sigma_{III}, \sigma_I - \sigma_{III}$

O meglio, se assumiamo $\sigma_I > \sigma_{II} > \sigma_{III}$: $\tau_{max} = \frac{1}{2}(\sigma_I - \sigma_{III})$ (per ovvi motivi)

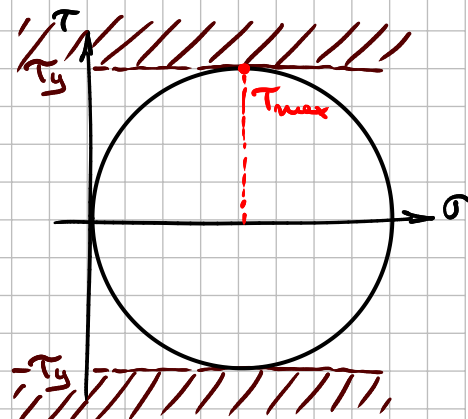
Al test di resistenza monoassiale (la prova di trazione vista a TGM):

$$\sigma_I \neq 0 \text{ ma } \sigma_{II} = \sigma_{III} = 0$$

$$\text{Infatti, a rottura } \sigma_I = \sigma_y \rightarrow \tau_{max} = \frac{1}{2} \sigma_y = \tau_y$$

$$\text{ma se abbiamo detto che: } \tau_{max} = \frac{1}{2}(\sigma_I - \sigma_{III})$$

$$\text{allora } \sigma_I - \sigma_{III} \leq \sigma_{su}$$



CRITERIO DI VON MISES

«Si ha cedimento del materiale quando la massima energia di distorsione è uguale all'energia di distorsione allo snervamento a seguito di un test di resistenza monoassiale».

$$\mu_d \leq \mu_{d,y} \rightarrow \mu_d = \frac{1+\nu}{6E} \left((\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_I - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 \right)$$

Al test di resistenza monoassiale:

$$\sigma_I = \sigma_y, \sigma_{II} = \sigma_{III} = 0$$

$$\hookrightarrow \mu_{d,y} = \frac{1+\nu}{6E} (\sigma_I^2 + \sigma_I^2) = \frac{1+\nu}{3E} \sigma_I^2$$

Dunque:

$$\frac{1+\nu}{6E} \frac{1}{2} \left((\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_I - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 \right) \leq \frac{1+\nu}{6E} \sigma_y^2$$

$$\hookrightarrow \sqrt{\frac{1}{2} \left((\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_I - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 \right)} \leq \sigma_y$$

Anche questo criterio è indipendente dallo stress idrostatico.

$$f = f(\sigma_I - \sigma_{II}, \sigma_{II} - \sigma_{III}, \sigma_I - \sigma_{III})$$

Noteremo che rispetto al Tresca questo criterio è più permissivo, ma anche più fedele al reale comportamento del materiale.

RAPPRESENTAZIONE GRAFICA DELLE σ AMMESSE

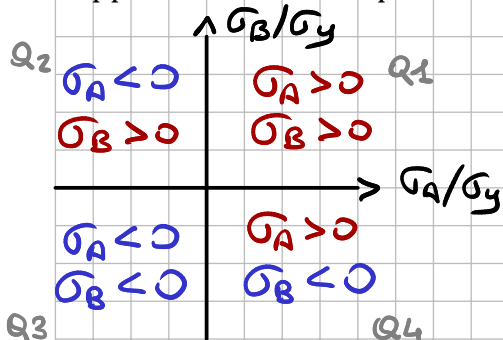
Per ciò che segue, chiameremo le tre tensioni idrostatiche come σ_A, σ_B e σ_C per chiarire che non vi sono più le relazioni che abbiamo supposto arbitrariamente nel paragrafo precedente ($\sigma_I > \sigma_{II} > \sigma_{III}$)

CASO TRAVE PIANA: $\sigma_C = 0$

TRESKA

Rappresentiamo su un piano cartesiano σ_A/σ_y e σ_B/σ_y ($\sigma/\sigma_y = 1$ quando $\sigma = \sigma_y$)

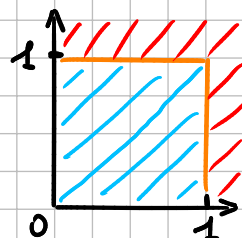
Esaminiamo i 4 quadranti caso per caso:



$$Q1: \sigma_A > 0 \cup \sigma_B < 0$$

$$\sigma_{min} = \sigma_C = 0$$

$$\sigma_{max} - \sigma_{min} = \max\{\sigma_I, \sigma_{II}\}$$



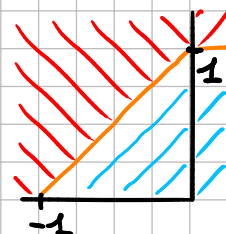
$$Q2: \sigma_A < 0 \cup \sigma_B > 0$$

$$\sigma_{max} = \sigma_B, \sigma_{min} = \sigma_A$$

$$\sigma_{max} - \sigma_{min} = \sigma_B - \sigma_A \leq \sigma_y$$

$$\frac{\sigma_B}{\sigma_y} \leq \frac{\sigma_A}{\sigma_y} + 1$$

$$y \leq x + 1$$



$$Q3: \sigma_A < 0 \cup \sigma_B < 0$$

$$\sigma_{max} = \sigma_C = 0$$

$$\sigma_{max} - \sigma_{min} = \min\{-\sigma_A, -\sigma_B\}$$

$$Q4: \sigma_A > 0 \cup \sigma_B < 0$$

$$\sigma_{max} = \sigma_A, \sigma_{min} = \sigma_B$$

$$\sigma_A - \sigma_B \leq \sigma_y \rightarrow \frac{\sigma_B}{\sigma_y} \geq \frac{\sigma_A}{\sigma_y} - 1$$

(COME Q1 E Q2)

VON-MISES

$$\text{Se } \sigma_{III} = 0, \sqrt{\frac{1}{2}((\sigma_I - \sigma_{II})^2 + \sigma_I^2 + \sigma_{II}^2)} = \sqrt{\frac{1}{2}(2\sigma_I^2 + 2\sigma_{II}^2 - 2\sigma_I\sigma_{II})} =$$

$$= \sqrt{\sigma_I^2 + \sigma_{II}^2 - \sigma_I\sigma_{II}} \leq \sigma_y$$

$$\text{Dunque al limite: } \sigma_I^2 + \sigma_{II}^2 - \sigma_I\sigma_{II} = \sigma_y^2$$

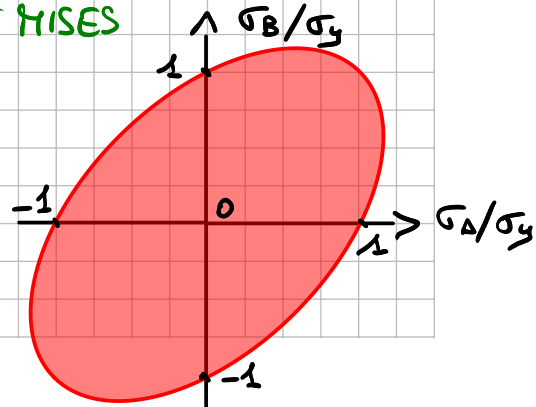
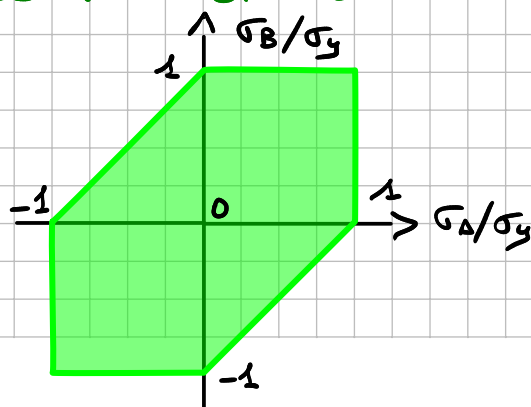
$$x^2 + y^2 - xy = 1 \text{ ELLISSE}$$

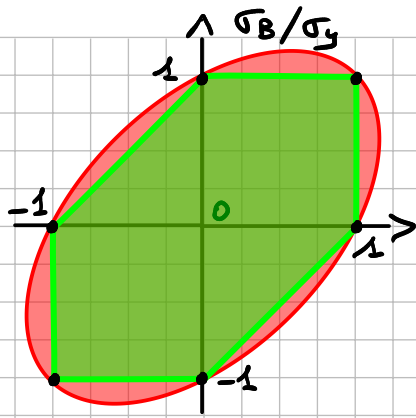
Ellisse ruotata di 45° , per cui: $\sigma_I = 0 \rightarrow \sigma_{II} = \pm \sigma_{su}$

$\sigma_{II} = 0 \rightarrow \sigma_I = \pm \sigma_{su}$

ESAGONO DI TRESKA

ELLISSE DI VON MISES





È ovvio constatare che il criterio di Tresca è più sicuro in quanto più restrittivo: von Mises ammette addirittura tensioni maggiori di quelle di snervamento; è inoltre di più semplice uso rispetto all'altro. Tuttavia...

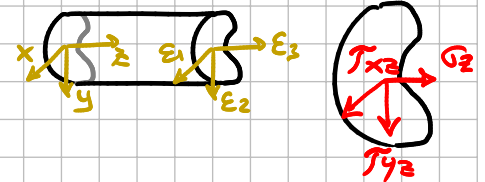
Von Mises è più accurato se confrontato con i dati sperimentali (le travi reali esibiscono cedimenti fedeli alla teoria di von Mises), e non presenta cuspidi (la frontiera di prima plasticizzazione è regolare)

VERIFICA DI SICUREZZA

Applichiamo i criteri di resistenza al caso più generico possibile:

$$\underline{\underline{\tau}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & 0 & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad \hat{n} = n_x \hat{e}_x + n_y \hat{e}_y$$

$$\underline{t}_z = \tau_{xz} \hat{e}_1 + \tau_{yz} \hat{e}_2$$



$$t(\hat{n}) = \underline{\underline{\tau}} \cdot \hat{n} = [0, 0, \tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y] = [0, 0, t_z \cdot \hat{n}] \text{ ma } t_z \perp \hat{n}$$

allunque: $\underline{\underline{\tau}} \cdot \hat{n} = 0$, allunque $\hat{n} \perp \underline{t}_z$ è direzione principale di tensione

Se $\hat{n} \equiv \hat{z}$ risulta che:

$$\underline{\underline{\tau}} \cdot \hat{z} = [\tau_{xz} n_z, \tau_{yz} n_z, \sigma_z n_z] =$$

$$= [\cancel{t_z} \cdot \hat{z}, \cancel{t_z} \cdot \hat{z}, \sigma_z n_z] = \sigma_z \cdot \hat{z}$$

DIREZ. PRINCIPALI: $\hat{n}, \hat{z}, \frac{\underline{t}_z}{\|\underline{t}_z\|}$, TENSIONI PRINCIPALI: $\sigma_1 = 0, \sigma_2, \sigma_3$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_z}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_z^2} > 0$$

$$\sigma_3 = \frac{\sigma_z}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_z^2} < 0$$

PER VON MISES:

$$\sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_2 \sigma_3 = \sigma_y^2$$

$$\hookrightarrow \dots \rightarrow \sigma_z^2 + 3\tau_z^2 = \sigma_y^2$$

$$\boxed{\sqrt{\sigma_z^2 + 3\tau_z^2} = \sigma_y}$$

FRONTIERA
LIMITE DI
VON MISES

$$\sigma_z^2 + 3\tau_z^2 - \frac{\sigma_z^2}{4} - \frac{\sigma_z^2}{2} + \frac{\sigma_z^2}{4} + \frac{\sigma_z^2}{4} + \tau_z^2$$

PER TRESCA:

$$\sigma_2 - \sigma_3 = \sigma_y$$

$$\hookrightarrow 2\sqrt{\frac{\sigma_z^2}{4} + \tau_z^2} = \sigma_y$$

$$\hookrightarrow \sqrt{4\frac{\sigma_z^2}{4} + 4\tau_z^2} = \sigma_y \rightarrow$$

$$\boxed{\sqrt{\sigma_z^2 + 4\tau_z^2} = \sigma_y}$$

FRONTIERA
LIMITE DI
TRESCA