RENDIMENTI ADIABATICI

RENDIM. ADIAB. DI ESPANSIONE

DEFINIZIONE: η_{ad}, "RENDIM. ADIAB": $\begin{cases} \eta_{ad,e} = \dfrac{l_{re}}{l_{id}} = \dfrac{h_1 - h_{2'}}{h_1 - h_2} \\ \eta_{ad,c} = \dfrac{l_{id}}{l_{re}} = \dfrac{h_2 - h_1}{h_{2'} - h_1} \end{cases}$ $\eta \leq 1$

$$\eta_{ad,e} = \frac{c_p(T_1 - T_{2'})}{c_p(T_1 - T_2)} = \frac{T_1 - T_{2'}}{T_1 - T_2}$$

Ora la situazione si complica. Chiamo β_e il "RAPPORTO DI ESPANSIONE":

$$\beta_e = \frac{p_1}{p_2}$$

Dalle relaz. delle politropiche (nello specifico la •3):

$$\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{m-1}{m}} = (\beta_e)^{\frac{m-1}{m}} \longrightarrow \begin{cases} \text{ISOENTROPICA} \\ m = k \end{cases} \longrightarrow \frac{T_1}{T_2} = (\beta_e)^{\frac{k-1}{k}}$$

$$\hookrightarrow \begin{cases} \text{REALMENTE} \\ 1 < m < k \end{cases} \longrightarrow \frac{T_1}{T_{2'}} = (\beta_e)^{\frac{m-1}{m}}$$

NOTA: ricordiamo che $p_2 = p_{2'}$

DUNQUE:

$$\eta_{ad,e} = \frac{1 - \frac{T_{2'}}{T_1}}{1 - \frac{T_2}{T_1}} = \frac{1 - \frac{1}{(\beta_e)^{\frac{m-1}{m}}}}{1 - \frac{1}{(\beta_e)^{\frac{k-1}{k}}}}$$

Il rendimento è quindi funzione:

- Dell'indice m, indicativo del grado di irreversibilità;
- Della natura del fluido (indice k);
- Del rapporto di espansione voluto.

Il rendimento adiabatico cresce con il rapporto di espansione e si riduce quando i due indici m e k si allontanano tra loro, ossia tanto minore è m rispetto a due macchine operanti con lo stesso fluido.

RENDIM. ADIAB. DI COMPRESSIONE

$$\eta_{ad,c} = \frac{h_2 - h_1}{h_{2'} - h_1} = \frac{\cancel{c_p}}{\cancel{c_p}} \frac{T_2 - T_1}{T_{2'} - T_1} = \frac{\frac{T_2}{T_1} - 1}{\frac{T_{2'}}{T_1} - 1} = \frac{(\beta_c)^{\frac{k-1}{k}} - 1}{(\beta_c)^{\frac{m-1}{m}} - 1}$$

Le formule dei due rendimenti sono di seguito riportate in LaTeX, a scanso di equivoci:

$$\eta_{ad,e} = \frac{1 - \frac{1}{(\beta_e)^{\frac{m-1}{m}}}}{1 - \frac{1}{(\beta_e)^{\frac{k-1}{k}}}} \qquad \eta_{ad,c} = \frac{(\beta_c)^{\frac{k-1}{k}} - 1}{(\beta_c)^{\frac{m-1}{m}} - 1}$$

$\beta_c = \dfrac{p_2}{p_1}$ "RAPPORTO DI COMPRESSIONE"

Il rendimento è quindi funzione:

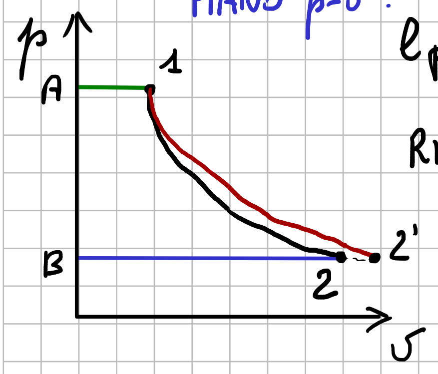
- Dell'indice m, indicativo del grado di irreversibilità;
- Della natura del fluido (indice k);
- Del rapporto di compressione voluto.

Il rendimento adiabatico di compressione diminuisce SIA all'aumentare del rapporto di compressione, SIA all'aumentare del distanziamento dei due indici m e k.

LAVORO POLITROPICO E RENDIMENTI POLITROPICI

LAVORO POLITROPICO: lavoro di un'ipotetica trasformaz. "ideale" (senza attriti) che segua lo stesso percorso 12' di una trasformaz. reale.

PIANO p-v:



$$l_{pol} = -\int_1^{2'} v\,dp = AREA(A12'B)$$

RICORDIAMO: $l_{r,e} = l_{id,e} + AREA(122') - L_{ATTR}$

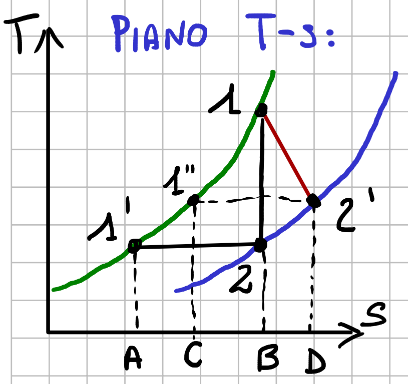
$= AREA(A12B + 122') - L_{ATTR} =$

$= l_{pol} - L_{ATTR}$

$$l_{pol} = l_{r,e} + L_{ATTR} \quad [kJ/kg]$$

REMINDER: il professore usa spesso le lettere maiuscole per indicare anche le grandezze intensive. Sta allo studente ricordare quando usiamo le grandezze estensive e quando quelle specifiche.

PIANO T-s:



SICCOME $l_{pol} = l_{r,e} + L_{ATTR}$

ALLORA: $l_{pol} = AREA(BC11'') + AREA(B12'D) =$

$= AREA(BC11'' + B22'D + 122') =$

$= AREA(BC11'' + A11''C + 122') = AREA(A1'1B + 122') =$

$= l_{id,e} + L_{REC}$

La trasformaz. politropica 12' è una trasf. ideale ad entropia crescente (con adduzione di calore, non adiabatica).

DEFINIZIONE: η_{pol}, "RENDIM. POLITROPICO"

Il rendimento politropico è sempre dato dal rapporto tra un lavoro reale ed uno ideale - o viceversa per quanto riguarda le compressioni - ma stavolta il lavoro reale è relativo alla trasformazione 1-2', ossia la trasformazione ad entropia crescente.

$$\eta_{pol,e} = \frac{l_{r,e}}{l_{pol,e}} = \frac{l_{pol,e} - L_{ATTR}}{l_{pol,e}} \qquad \eta_{ad,e} = \frac{l_{r,e}}{l_{id,e}} = \frac{h_1 - h_{2'}}{h_1 - h_2}$$

RENDIM. POLITROPICO DI ESPANSIONE

SE: $l_{r,e} = h_1 - h_{2'} = c_p(T_1 - T_{2'}) = \frac{kR}{k-1} T_1 \left(1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{m-1}{m}}\right) = \frac{k}{k-1} p_1 v_1 \left(1 - (\beta_e)^{\frac{1-m}{m}}\right)$

E: $l_{pol,e} = -\int_1^{2'} v\,dp = -\int_1^{2'} v_1 \cdot p_1^{1/m} \cdot p^{-1/m} \cdot dp = v_1 p_1^{1/m} \frac{m}{m-1}\left(p_1^{\frac{m-1}{m}} - p_{2'}^{\frac{m-1}{m}}\right) =$

$$= \frac{m}{m-1} p_1 v_1 \left(1 - (\beta_e)^{\frac{1-m}{m}}\right)$$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$

ALLORA: $$\eta_{pol,e} = \frac{k(m-1)}{(k-1)m} \cdot \frac{\cancel{p_1 v_1}}{\cancel{p_1 v_1}} \cdot \frac{\cancel{\left(1-(\beta_e)^{\frac{1-m}{m}}\right)}}{\cancel{\left(1-(\beta_e)^{\frac{1-m}{m}}\right)}} = \frac{k(m-1)}{(k-1)m}$$

Il rendimento politropico di espansione, che come abbiamo detto indica il grado di perfezione del processo di espansione, NON dipende dal rapporto di espansione!

$$\eta_{ad} = \eta_{ad}(\eta_{pol}, \dots) = \frac{1-(\beta_e)^{\frac{1-m}{m}}}{1-(\beta_e)^{\frac{1-k}{k}}} = \frac{1-(\beta_e)^{\frac{1-k}{k}\eta_{pol}}}{1-(\beta_e)^{\frac{1-k}{k}}}$$

Quanto vale η_{ad} per $\beta_e = 1$? $\qquad \eta_{ad} = \frac{1-1^a}{1-1^e} = \frac{0}{0}$?

Applichiamo de L'Hopital:

$$\lim_{\beta_e \to 1} \eta_{ad,e} = \left.\frac{\frac{d}{d\beta}\left(\cancel{1}-\beta_e^{\frac{1-m}{m}}\right)}{\frac{d}{d\beta}\left(\cancel{1}-\beta_e^{\frac{1-k}{k}}\right)}\right|_{\beta_e=1} = \frac{-\frac{1-m}{m}\cancel{\beta_e}^{1\left(\frac{1-m}{m}-1\right)}}{-\frac{1-k}{k}\cancel{\beta_e}^{1\left(\frac{1-k}{k}-1\right)}} = \frac{(m-1)k}{m(k-1)} = \eta_{pol,e}$$

Il rendimento politropico di espansione coincide con il valore limite del rendimento adiabatico per un'espansione infinitesima, ed è quindi minore del rendimento adiabatico per $\beta_e > 1$. Al crescere del rapporto di espansione, le trasformazioni reale e ideale tendono a divergere, e così anche i due rendimenti.

RENDIM. POLITROPICO DI COMPRESSIONE

$$\eta_{pol,c} = \frac{l_{pol,c}}{l_{r,c}} = \frac{l_{pol,c}}{l_{pol,c} + L_{ATTR}} \qquad \eta_{ad,c} = \frac{l_{id,c}}{l_{r,c}} = \frac{h_2 - h_1}{h_{2'} - h_1}$$

SE: $$l_{r,c} = h_{2'} - h_1 = \dots = \frac{k}{k-1} p_1 v_1 \left(\beta_c^{\frac{m-1}{m}} - 1\right)$$

E: $$l_{pol,c} = \int_1^2 v\,dp = \int_1^2 v_1 \cdot p_1^{1/m} \cdot p^{-1/m}\,dp = v_1 \cdot p_1^{1/m} \frac{m}{m-1}\left(p_2^{\frac{m-1}{m}} - p_1^{\frac{m-1}{m}}\right) =$$

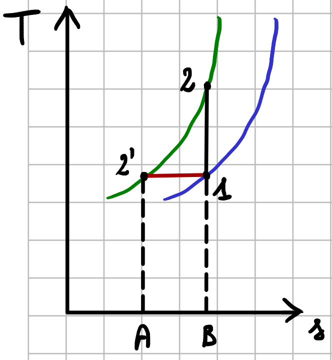
$$= \dots = v_1 p_1 \frac{m}{m-1}\left(\beta_c^{\frac{m-1}{m}} - 1\right)$$

ALLORA: $$\eta_{pol,c} = \frac{m(k-1)}{k(m-1)}$$

NON È INTERAMENTE CORRETTO scrivere che $\eta_{pol,c} = \frac{1}{\eta_{pol,e}}$ perchè $m_c \neq m_e$!

Come prima, $\eta_{pol,c} = \lim_{\beta_c \to 0} \eta_{ad,c}$

COMPRESSIONI ISOTERME



Il lavoro di compressione è sempre proporzionale al volume specifico, che è funzione della temperatura ed aumenta con essa. Vogliamo quindi trovare il modo di mantenere bassa la temperatura del fluido.

Una compressione isoterma permette - a parità di pressione finale - di ridurre la spesa energetica. È necessario refrigerare il fluido, per sottrarre il calore associato al processo di compressione.
Dopotutto, se vogliamo che diminuisca l'entropia del fluido, dobbiamo necessariamente asportare calore.

COMPRESSIONE ADIABATICA:
$l_{id} = AREA(A2'2B)$

COMPRESSIONE ISOTERMA:
$l_{id} = AREA(A2'1B)$

LAVORO RISPARMIATO = AREA(12'2)

$$\int_1^{2'} \cancel{dh}^{\,0} = \int_1^{2'} T\,ds + \int_1^{2'} v\,dp = 0$$

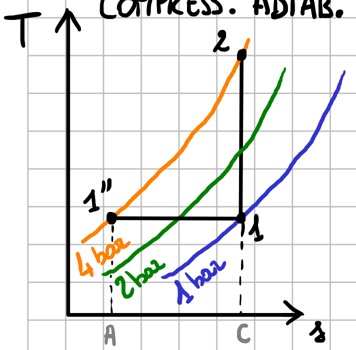
$$\text{ERGO: } \int_1^{2'} T\,ds = -\int_1^{2'} v\,dp = AREA(A2'1B)$$

L'area (A2'1B) é pari sia al lavoro ideale, sia al calore sottratto.

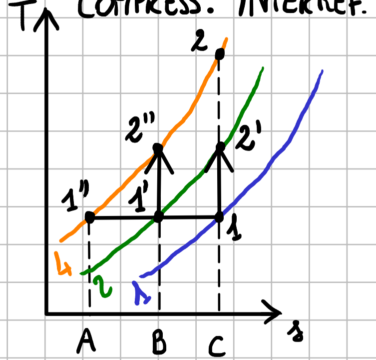
COMPRESSIONI INTERREFRIGERATE

Raffreddare e comprimere il fluido contemporaneamente è difficile. Si adotta in genere una compressione a più stadi con refrigerazione intermedia.

COMPRESS. ADIAB.



COMPRESS. INTERREF.



$1°$ STADIO: da p_1 a p_2 $(1-2')$
$l_I = AREA(B12'C)$
INTERREFRIG.: da T_2 a T_1 $(2'-1')$
$q = AREA(B1'2'C)$
$2°$ STADIO: da p_2 a p_3 $(1'-2")$
$l_{II} = AREA(A1"2"B)$
(Ecc...)

Con COMPR. ADIAB.:
$l_{ad} = AREA(A1"2C)$

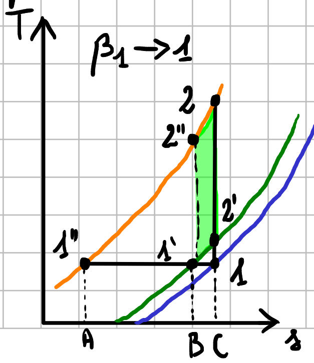
Con INTERREF.:
$l_{ref} = AREA(A1"2"B + B1'2'C)$

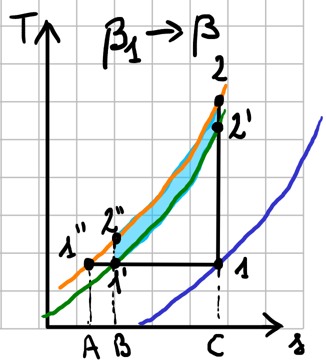
RISPARMIO = AREA(1'2'22")

$$\beta_c = \frac{p_3}{p_1} = \frac{p_{2"}}{p_1} = \frac{p_{2"}}{p_{1'}}\,\frac{p_{1'}}{p_1} = \frac{p_{2"}}{p_{1'}}\cdot\frac{p_{2'}}{p_1} = \beta_2 \cdot \beta_1 \longrightarrow \beta_c = \prod_i \beta_i$$

Vogliamo trovare il valore ottimale del rapporto di compressione β_1, ma la ricerca non è così semplice perché il lavoro risparmiato - pari all'area (12'22") tende a zero per:

$$\begin{cases} \beta_1 \to 1 \\ \beta_1 \to \beta \end{cases}$$





Per quale valore di β_1 l_r assume il valore massimo?

$$l_{r,c} = l_{rI} + l_{rII} = c_p T_1 \left(\beta_1^{\frac{k-1}{k}} - 1\right) + c_p T_1 \left(\beta_2^{\frac{k-1}{k}} - 1\right) =$$

$$= c_p T_1 \left(\beta_1^{\gamma} - 1 + \left(\frac{\beta}{\beta_1}\right)^{\gamma} - 1\right) = c_p T_1 \left(\beta_1^{\gamma} + \left(\frac{\beta}{\beta_1}\right)^{\gamma} - 2\right)$$

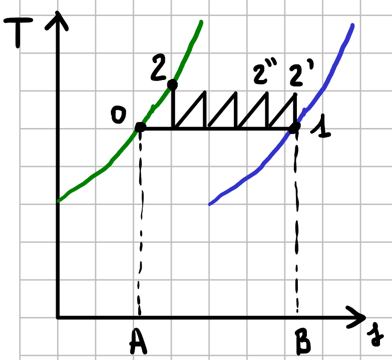
l_{rc} max per $\frac{dl_{rc}}{d\beta_1} = 0 \longrightarrow \cancel{c_p} T_1 \left(\gamma \beta_1^{\gamma-1} - \gamma \beta^{\gamma} \beta_1^{-\gamma-1}\right) = 0$

$$\beta_1^{\gamma-1} = \beta^{\gamma} \cdot \beta^{-\gamma-1} \longrightarrow \beta_1^{2\gamma} = \beta^{\gamma}$$

OSSIA $\beta_1^2 = \beta$ E QUINDI $\beta_1 = \beta_2$

Per n stadi, il rapporto di compress. ottimale è $\beta_i = \sqrt[n]{\beta_c}$.

COSA HANNO IN COMUNE COMPRESS. ISOTERME E INTERREFRIGERATE?



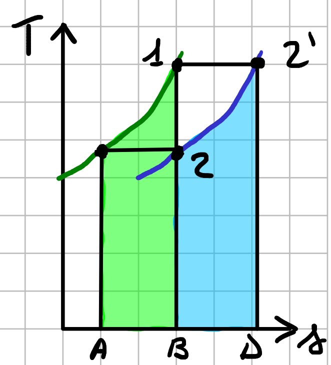
La compressione isoterma 1-0 (o anche 1-2 per $T_1 \approx T_2$) può essere considerata quindi il caso limite di una compressione interrefrigerata ideale con infiniti stadi.

L'area (A01B) sul piano T-s rappresenta sia il lavoro fornito nei compressori, sia il calore sottratto nei refrigeratori.

ESPANSIONI ISOTERME E CICLO DI ERICSSON

Il lavoro di espansione è sempre proporzionale al volume specifico, che è funzione della temperatura ed aumenta con essa. Vogliamo quindi trovare il modo di mantenere alta la temperatura del fluido.

Un'espansione isoterma permette - a parità di pressione finale - di aumentare il guadagno energetico. È necessario riscaldare il fluido per mantenere la temperatura costante.



ESPANSIONE ADIABATICA:
$l_{id} = \text{AREA}(A01B) = \text{AREA}(B22'D)$

ESPANSIONE ISOTERMA:
$l_{id} = \text{AREA}(B12'D)$

LAVORO GUADAGNATO = AREA(12'2)

$$\int_1^{2'} \cancel{dh} = \int_1^{2'} T\,ds + \int_1^{2'} v\,dp$$

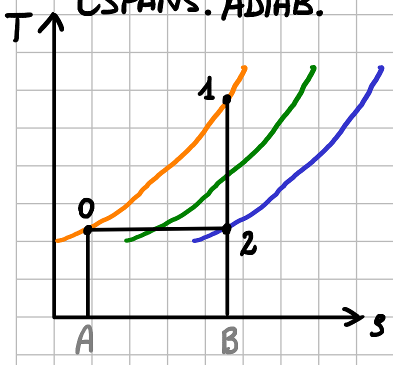
$$\hookrightarrow \int_1^{2'} T\,ds = -\int_1^{2'} v\,dp = \text{AREA}(B12'D)$$

L'area (B12'D) è pari sia al lavoro ideale sia al calore fornito.

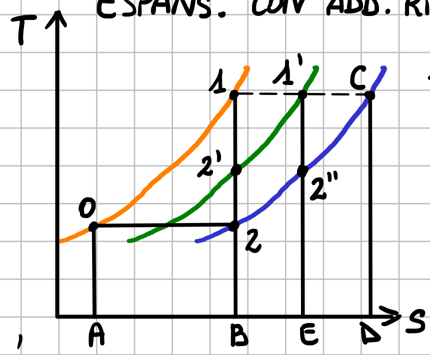
ESPANSIONI CON ADDUZIONI RIPETUTE

Riscaldare ed espandere il fluido contemporaneamente è difficile. Si adottano in genere più turbine con sistemi di adduzione di calore intermedi (camere di combustione, scambiatori, risurriscaldatori, ecc...)

ESPANS. ADIAB.



ESPANS. CON ADD. RIP.



1° STADIO: da p_1 a p_2 (1-2')

l_I = AREA(B2'1'E)

ADDUZ. INTERM.: da T_2 a T_1 (2'-1')

q = AREA(B2'1'E)

2° STADIO: da p_2 a p_3 (1'-2'')

l_{II} = AREA(E2''CD)

(Ecc...)

Con ESPANS. ADIAB.:

l_{ad} = AREA(A01B)
= AREA(B2CD)

Con ADD. RIP.:

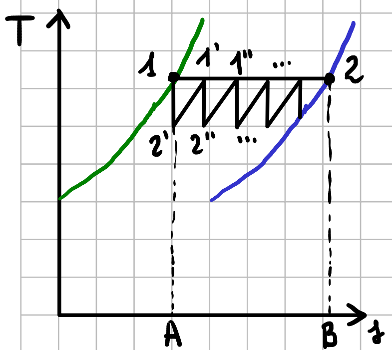
l_{add} = AREA(B2'1'E + 2''CDE)

→ GUADAGNO = AREA(12''22')

$$\beta_e = \frac{p_1}{p_3} = \frac{p_1}{p_{1'}} \cdot \frac{p_{1'}}{p_3} = \frac{p_1}{p_{1'}} \cdot \frac{p_{2'}}{p_3} = \beta_1 \cdot \beta_2 \rightarrow \beta_e = \prod_i \beta_i$$

Il valore ottimale del rapporto di espansione si trova seguendo lo stesso ragionamento fatto per il rapporto di compressione, ottenendo lo stesso risultato:

$$\beta_i = \sqrt[n]{\beta_e}$$

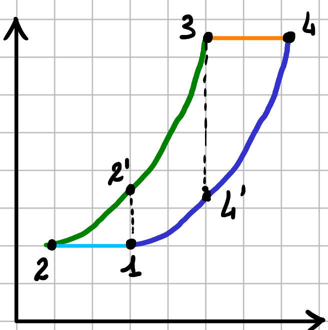


L'espansione isoterma 1-2 può essere considerata il caso limite di ripetute espansioni con adduzioni di calore con infiniti stadi.

L'area (A12B) sul piano T-s rappresenta sia il lavoro prelevato nelle turbine, sia il calore fornito al fluido.

Trasformazioni con lo stesso indice della politropica comprese tra gli stessi intervalli di temperatura si chiamano isoadiabatiche, in quanto prevedono uguali scambi di calore.
A livello ideale, è possibile addurre calore ad una isobara usando calore sottratto ad una trasformaz. isoadiabatica, ottenendo una rigenerazione completa attraverso uno scambio termico controcorrente, con superficie idealmente infinita.

Il CICLO DI ERICSSON è un'evoluzione del Ciclo Joule che prevede:
- Una compressione isoterma (1-2);
- Un'adduzione di calore isobara (2-3) di tipo rigenerativo (ottenuta a spese del calore sottratto nella 4-1);
- Un'espansione isoterma (3-4);
- Una refrigerazione (4-1) il cui calore è usato per la 2-3.



Il rendimento è pari a quello del Ciclo di Carnot equivalente, poste le temperature medie di adduzione e sottrazione come massima e minima del ciclo (rispettivamente).