Appunti di Scienza delle Costruzioni

Capitolo 03c

Problema cinematico e catene cinematiche

DISCLAMER GENERALE:

L'autore - PioApocalypse - non si assume alcuna responsabilità per l'uso improprio dei contenuti di questo documento, né si ritiene responsabile della performance - positiva o negativa che sia - dello studente in sede d'esame.

Il materiale didattico qui fornito è da considerarsi come un supplemento al materiale indicato dal docente della materia, e trova le sue utilità principali nel riepilogo di lunghi segmenti del programma e nella spiegazione di determinati argomenti in cui lo studente potrebbe aver riscontrato difficoltà. Alcuni termini e semplificazioni qui utilizzati potrebbero non essere idonei durante la discussione degli argomenti del corso con il docente in sede d'esame, e sono proposti solo al fine di aiutare lo studente con la comprensione della materia.

Si prega, infine, di segnalare eventuali errori trovati all'interno del documento all'indirizzo e-mail indicato sulla repository ufficiale, presso la quale è anche possibile trovare un link per chiunque desiderasse fare una piccola donazione all'autore.

Si ringrazia in anticipo per la cooperazione.

- PioApocalypse

PROBLEMA CINEMATICO

Il problema cinematico deve rispondere alla seguente domanda: "La struttura assegnata è capace di esibire spostamenti rigidi infinitesimi (è labile)?". Oggetto di studio del problema cinematico è dunque il grado di labilità l della struttura.
Come già accennato, esistono almeno due metodi per determinare l, un metodo lineare ed uno grafico.

METODO LINEARE: Si studia il rango di $\underline{\underline{C}}$ → numero massimo di righe/colonne linearmente indipendenti

METODO GRAFICO: Si studia il centro di rotazione

È però prima necessaria una premessa: un sistema i cui vincoli non hanno almeno molteplicità totale pari al numero di gradi di libertà del sistema non può essere non-labile, perché non è fisicamente possibile per definizione azzerare la libertà di un sistema se i vincoli sono insufficienti.
D'altro canto, se la molteplicità raggiunge o anche supera il numero di gradi di libertà del sistema questo può ancora essere labile - non per insufficienza ma per malposizionamento dei vincoli.

Siano $t \doteq$ # dei tronchi di trave;
$s \doteq$ molteplicità totale dei vincoli (esterni e interni)

$s < 3t$ → SICURAMENTE LABILE
Condizione sufficiente di labilità

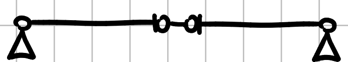
$s \geq 3t$ → POSSIBILMENTE NON-LABILE
Condizione necessaria di non-labilità

METODO LINEARE

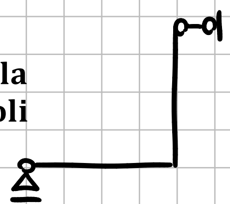
$$\text{rank}(\underline{\underline{C}}) \gtrless s,\ 3t\ ?$$

CASO 1: $s < 3t$ (strutt. sicuramente labile)

$\text{rank}(\underline{\underline{C}}) < s$:
Struttura labile per insufficienza E malposizionamento dei vincoli

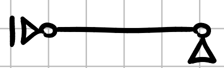


$\text{rank}(\underline{\underline{C}}) = s$:
Struttura labile per sola insufficienza dei vincoli



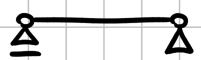
CASO 2: $s \geq 3t$

$\text{rank}(\underline{\underline{C}}) < 3t$:
Struttura labile per malposizionamento dei vincoli

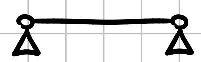


$\text{rank}(\underline{\underline{C}}) = 3t$:

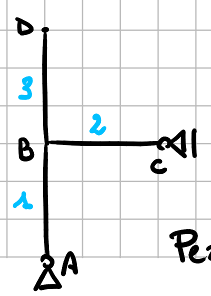
- $s = 3t$: **Struttura NON-labile, cinematicamente isodeterminata**



- $s > 3t$: **Struttura NON-labile, cinematicamente iperdeterminata**



"t" può indicare sia il numero di travi che il numero di tronchi di trave.
Ironicamente, la definizione esatta di "tronco" non appare da nessuna parte sul web, assumeremo semplicemente si riferisca all'insieme di più travi incastrate (non necessariamente consecutive).
Si dimostra che, poiché considerando più travi incastrate come un unico tronco non dobbiamo considerare nemmeno la molteplicità degli incastri interni, non cambia nulla se con t indichiamo il numero di travi o di tronchi.



Se consideriamo gli incastri in B: $\begin{cases} 1 \text{ è fissato a } 2 & m=3 \\ 2 \text{ è fissato a } 3 & m=3 \end{cases}$

$s = 3+3+2+1 = 9 \qquad 3t = 3 \cdot 3 = 9$ ✓

Se $\overline{123}$ è un unico tronco: $s = 2+1 \qquad 3t = 3 \cdot 1 = 3$ ✓

Perché $s(\text{incastri interni}) = 3(t-1)$

Notiamo però una cosa importante: anche se avessimo un'equazione di questo tipo - che presuppone vincoli reali soggetti a cedimenti...

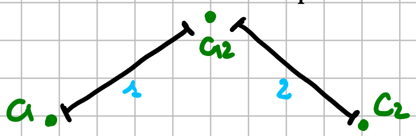
$$\underline{C} \cdot \underline{s} = \underline{\delta}$$

...il grado di labilità rimane lo stesso perché dipende solo dal rango della matrice cinematica e dalla dimensione del vettore degli spostamenti.

TEOREMI DELLE CATENE CINEMATICHE E METODO GRAFICO

I° TEOREMA

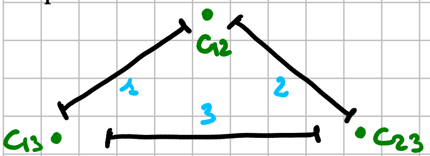
«Condizione sufficiente e necessaria affinché un sistema di esattamente due travi piane esibisca spostamenti rigidi infinitesimi è che il loro centro di rotazione relativa sia allineato con i loro centri di rotazione assoluta». In pratica:



Se C_1, C_2 e C_{12} sono allineati, SICURAMENTE la struttura è labile, altrimenti SICURAMENTE è non-labile

II° TEOREMA

«Condizione sufficiente e necessaria affinché un sistema di esattamente tre travi piane esibisca spostamenti rigidi infinitesimi reciproci è che i loro centri di rotazione relativa siano allineati».
In pratica:



Se C_{12}, C_{23} e C_{13} sono allineati, SICURAMENTE le travi possono muoversi reciprocamente, altrimenti SICURAMENTE non possono

Per sistemi di un solo tronco di trave è facile risolvere il problema cinematico in modo analitico, ricorrendo allo studio della matrice cinematica, ma per sistemi più complessi (due o tre tronchi di trave) è più rapido lo studio dei centri di rotazione; per sistemi di travi notevolmente complessi - come nel caso delle travature reticolari - è invece opportuno ridurre la struttura in sistemi più semplici (es. triangoli, tre travi) prima di studiarne la labilità con il metodo grafico.

METODO GRAFICO

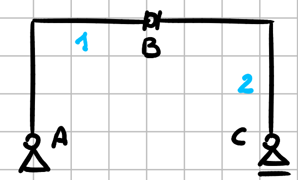
La struttura è labile se (uno è sufficiente):
- Si ha che $s < 3t$;
- Esiste un centro di rotazione assoluta comune;
- Se si hanno 2 tronchi, entrambi hanno i propri CRA e sono allineati con il CRR (I° th. c.c);
- Se si hanno 3 tronchi, i tre CRR sono allineati (II° th. c.c.);
- Se si hanno 2 tronchi ed un solo CRA, questo coincide con il CRR.

La struttura è non-labile se:
- Si ha (NECESSARIO) che $s \geq 3t$;
- Non esiste un CRA comune e...
  - Se si hanno 2 tronchi, il CRR non è allineato ai CRA delle singole travi (I° th. c.c);
  - Se si hanno 3 tronchi, i CRR degli stessi non sono allineati tra loro (II° th. c.c);
  - Se non esiste uno dei CRA (es. in caso di incastro), il CRR non deve coincidere con l'altro CRA (2 tronchi) oppure i CRR non devono essere allineati tra loro (3 tronchi);
- I CRA non esistono - nessun tronco ha un CRA.

NOTA: Nella pagina successiva sono dunque proposti alcuni esempi per comprendere meglio lo studio della labilità dei sistemi di travi piane (# gdl = 3t).

ALCUNI ESEMPI

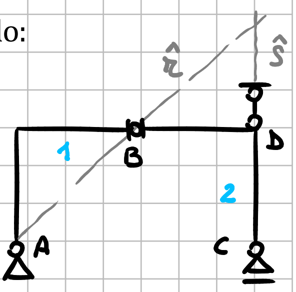
①



$$\left.\begin{array}{l} 3t = 3\cdot 2 = 6 \\ s = 2+2+1 = 5 \end{array}\right\}$$ SICURAMENTE LABILE

$3t - s = 1 \rightarrow$ 1 VOLTA LABILE

Allora provo ad aggiungere un altro vincolo:



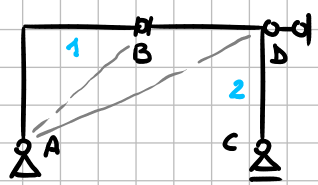
Nell'esempio a destra notiamo invece che s = 3t, e che quindi la struttura potrebbe essere non-labile. Il pendolo è però posizionato male:

- Il CRA del tronco 1 coincide con la cerniera in A;
- Il CRA del tronco 2 è un punto qualsiasi dell'asse del pendolo (o dell'asse del carrello, siccome sono coincidenti);
- Il CRR coincide con la cerniera in B.

Esiste $C_2 \in \hat{s}$:| C_1, C_2, C_{12} sono allineati (strutt. LABILE)

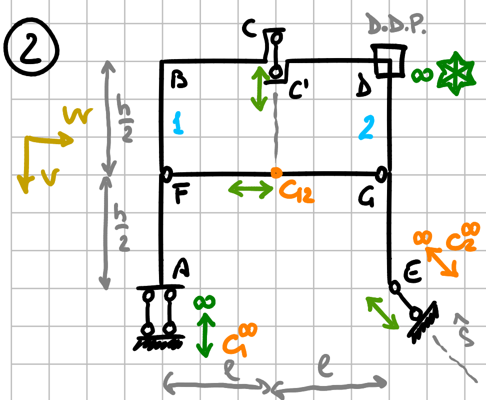
Infatti si può studiare che $\text{rank}(\underline{\underline{C}}) = 5$, e che la struttura è 1 VOLTA LABILE per MALPOSIZIONAMENTO dei vincoli.

Decidiamo infine di posizionare correttamente il pendolo in D.



Adesso il CRA del tronco 2 coincide con il punto D, e non è più allineato con il CRR e l'altro CRA: la struttura è non-labile.

②



In questo caso la struttura è non labile perché C12 è proprio mentre i CRA sono punti impropri (all'infinito) di rette orientate a diverse angolazioni. Il discorso sarebbe stato diverso se:

- Anche il CRR fosse stato improprio;
- Se i CRA fossero stati punti impropri di rette parallele.

Infatti:
$$\begin{cases} v_A = 0 \\ \varphi_A = 0 \\ v_C = v_{C'} \\ w_F = w_G \\ \varphi_D = 0 \\ s_E = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} v_A = 0 \\ \varphi_A = 0 \\ v_A - l\varphi_A - v_E - l\varphi_E = 0 \\ w_A - \frac{h}{2}\varphi_A - w_E + \frac{h}{2}\varphi_E = 0 \\ \varphi_E = 0 \\ v_E = 0 \\ w_E = 0 \end{cases}$$

Se $\underline{s} = \begin{bmatrix} v_A \\ w_A \\ \varphi_A \\ v_E \\ w_E \\ \varphi_E \end{bmatrix}$

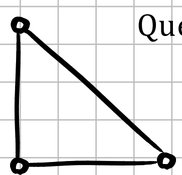
$$\rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -l & -1 & 0 & -l \\ 0 & 1 & -\frac{h}{2} & 0 & -1 & \frac{h}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_A \\ w_A \\ \varphi_A \\ v_E \\ w_E \\ \varphi_E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Se riduciamo a scala $\underline{\underline{C}}$ scopriamo che $\text{rank}(\underline{\underline{C}}) = 6$

Ergo $\text{rank}(\underline{\underline{C}}) = 3t$

STRUTT. NON-LABILE C.V.D.

③



Questa proposta è una delle maglie di una travatura reticolare. Sicuramente le tre barre non esibiscono spostamenti rigidi reciproci per il II° th. c.c., ma anche per le proprietà geometriche del triangolo.

Le maglie delle travature reticolari si considerano quindi sempre stabili, e le travature reticolari stesse si valutano solo in funzione dei loro vincoli esterni.

(Ad ogni modo: $3t = 9$, $s = (2+1)\cdot 3 = 9 \rightarrow$ ISODETERMINATA)