Appunti di Scienza delle Costruzioni

Capitolo 02b

Legami costitutivi

DISCLAMER GENERALE:

L'autore - PioApocalypse - non si assume alcuna responsabilità per l'uso improprio dei contenuti di questo documento, né si ritiene responsabile della performance - positiva o negativa che sia - dello studente in sede d'esame.

Il materiale didattico qui fornito è da considerarsi come un supplemento al materiale indicato dal docente della materia, e trova le sue utilità principali nel riepilogo di lunghi segmenti del programma e nella spiegazione di determinati argomenti in cui lo studente potrebbe aver riscontrato difficoltà. Alcuni termini e semplificazioni qui utilizzati potrebbero non essere idonei durante la discussione degli argomenti del corso con il docente in sede d'esame, e sono proposti solo al fine di aiutare lo studente con la comprensione della materia.

Si prega, infine, di segnalare eventuali errori trovati all'interno del documento all'indirizzo e-mail indicato sulla repository ufficiale, presso la quale è anche possibile trovare un link per chiunque desiderasse fare una piccola donazione all'autore.

Si ringrazia in anticipo per la cooperazione.

- PioApocalypse

LEGAMI COSTITUTIVI

I risultati conseguiti nei due capitoli precedenti prescindono da qualsiasi tipo di relazione tra tensioni e deformazioni: valgono dunque - così come sono descritte - per tutti i corpi continui indipendentemente dalle loro proprietà intrinseche (e quindi dalle proprietà del materiale da cui sono costituiti).
È intuibile che per studiare in modo completo il comportamento meccanico di un corpo sono necessarie relazioni che pongano le componenti di tensione in funzione di quelle di deformazione e viceversa: tali relazioni prendono il nome di "LEGAMI COSTITUTIVI" e tengono conto delle caratteristiche dei materiali.

$$\sigma_i = E\,\varepsilon_i$$

Esempio di legame costitutivo studiato in precedenza

Di nostro particolare interesse saranno i materiali elastici LINEARI, OMOGENEI e ISOTROPI: ognuno di questi attributi ha determinate implicazioni sulle leggi che andremo a studiare.

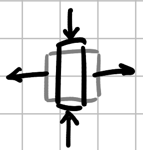
ELASTICO LINEARE Il corpo in questione può deformarsi elasticamente, ossia può presentare deformazioni temporanee e "reversibili", che sono direttamente proporzionali alle sollecitazioni applicate (lineare) e si "azzerano" quando la sollecitazione è rimossa.
Il legame che esprime tale attributo è la Legge di Hooke in forma materiale tramite i parametri:

E	G	ν
MODULO DI YOUNG	MODULO DI TAGLIO	COEFFICIENTE DI POISSON

OMOGENEO Le caratteristiche del materiale sono uguali in tutto il corpo, e non differiscono da punto a punto; i tensori di deformazione lineare e di tensione restano puntuali, e la densità di massa del corpo si considera costante rispetto a P.

$\mu = \mu_0$ (cost.)

ISOTROPO Le proprietà del corpo sono indipendenti dalla direzione in cui si considerano.
Nei materiali isotropi, lineari e omogenei le tensioni normali sono funzione delle sole componenti estensionali delle deformazioni, mentre le tensioni tangenziali sono funzione dei soli scorrimenti angolari.



$\nu > 0$

MODULI ELASTICI E RELAZIONI DI NAVIER

- **E:** Il MODULO DI YOUNG (o di elasticità normale) accoppia tensioni normali a deformaz. normali: ciò significa che, dato un provino di un certo materiale elastico (lineare, omogeneo ed isotropo), il suo mod. di Young vale quanto la tensione normale necessaria per ottenere una deformaz. unitaria del provino. Si misura in multipli del Pascal, come una pressione o uno sforzo, e in genere è nell'ordine dei GPa per moltissimi materiali metallici.

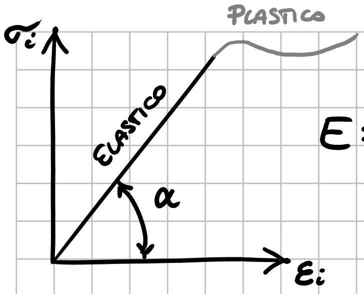
$$E = \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}[GPa]$$

- **G:** Il MODULO DI TAGLIO (o di elasticità tangenziale)accoppia gli sforzi di taglio (tensioni tangenz.) con deformaz. tangenziali: ciò significa che, dato un provino di un certo materiale elastico (lineare, omogeneo ed isotropo), il suo mod. di taglio vale quanto la tensione tangenziale da applicare per ottenere uno scorrimento angolare unitario del provino. Si misura in multipli del Pascal, e in genere è nell'ordine dei GPa per moltissimi materiali metallici.

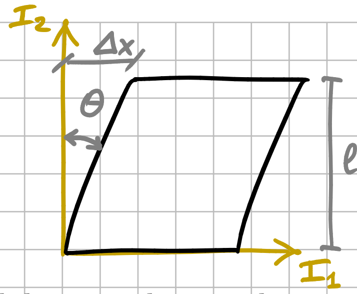
$$G = \frac{\tau_{ij}}{\gamma_{ij}}[GPa]$$

- **ν:** Il COEFF. DI POISSON è un numero puro, adimensionale, che dipende dalla temperatura oltre che dal materiale e indica di quanto si dilata o si restringe trasversalmente un provino di un dato materiale quando sollecitato da uno sforzo monodirezionale longitudinale. Nel nostro interesse:

$$0 < \nu < 0.5$$



$$E = \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} = \tan(\alpha)$$



$$G = \frac{\tau_{ij}}{\gamma_{ij}} = \tau_{ij}\frac{\ell}{\Delta x} = \tau_{ij}/\tan\theta \approx \frac{\tau_{ij}}{\theta}$$

E e G sono costanti legate alla RIGIDEZZA del materiale, ossia la resistenza che questo oppone alle deformazioni. Le due sono a loro volta legate anche a ν, tramite le relazioni di Navier.

DATI

$$\underset{\sim}{T} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{12} & \sigma_2 & \tau_{23} \\ \tau_{13} & \tau_{23} & \sigma_3 \end{bmatrix} \qquad \underset{\sim}{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \gamma_{12} & \varepsilon_2 & \gamma_{23} \\ \gamma_{13} & \gamma_{23} & \varepsilon_3 \end{bmatrix}$$

$\longrightarrow$ RELAZIONI DI NAVIER:

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \frac{1}{E}(\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)) \\ \varepsilon_2 = \frac{1}{E}(\sigma_2 - \nu(\sigma_1 + \sigma_3)) \\ \varepsilon_3 = \frac{1}{E}(\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)) \end{cases} \qquad \begin{cases} \gamma_{12} = \frac{\tau_{12}}{2G} \\ \gamma_{13} = \frac{\tau_{13}}{2G} \\ \gamma_{12} = \frac{\tau_{23}}{2G} \end{cases}$$

É possibile scrivere G ed E l'uno in funzione dell'altro:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \longrightarrow E = 2G(1+\nu) \longrightarrow \nu = \frac{E}{2G} - 1 \; *$$

*** Esclusivamente sotto ipotesi di isotropia del materiale**

In materiali isotropi i parametri indipendenti sono solo due: conoscendo ad esempio il mod. di Young ed il coeff. di Poisson posso trovare il mod. di taglio.
In caso contrario, quando cioè parliamo di anisotropia occorrono ben 36 moduli elastici per descrivere in maniera completa il comportamento di un materiale sottoposto a sollecitazioni varie.
Perché proprio 36?

6 EQUAZ. DI NAVIER:

$$3\text{ eq}: \quad \varepsilon_i = \frac{1}{E}(\sigma_i - \nu(\sigma_j + \sigma_k))$$

$$3\text{ eq}: \quad \gamma_{ij} = \tau_{ij}\frac{1}{2G}$$

Dalla legge di Hooke definiamo $\underset{\sim}{e}$, "MATRICE DELLE RIGIDEZZE"

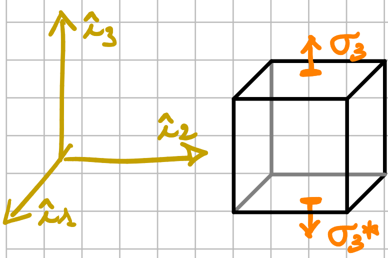
$$\underline{\sigma} = \underset{\sim}{e} \cdot \underline{\varepsilon} \longrightarrow$$ $\underline{\sigma}$ ed $\underline{\varepsilon}$ sono vettori 6x1, dunque $\underset{\sim}{e}$ è una matrice 6x6 (36 componenti!)

Se cade l'ipotesi di isotropia, non ci saranno due componenti della matrice delle rigidezze che siano uguali, e nessun elemento sarà nullo. La matrice sarà quindi composta da 36 variabili non nulle e diverse tra loro. Fortunatamente, sotto ipotesi di corpo elastico lineare, omogeneo ed isotropo, la relazione sopra descritta assume la seguente forma tensoriale:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E & -\nu/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ -\nu/E & 1/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ -\nu/E & -\nu/E & 1/E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2G \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{12} \\ \tau_{13} \\ \tau_{23} \end{bmatrix} \Longrightarrow \underline{\varepsilon} = \underset{\sim}{e}^{-1}\underline{\sigma}$$

ISOTROPIA

Consideriamo un parallelepipedo infinitesimo, le cui basi sono parallele agli assi di riferimento.



Per avere un'idea delle grandezze in gioco ipotizziamo i seg. dati:

$$\sigma_3 = 100 \text{ MPa} \qquad \nu = 0{,}3$$

$$E = 210 \text{ GPa (ACCIAIO AISI 1025)}$$

Supponiamo di imprimere una sollecitazione solo lungo l'asse $\hat{\imath}_3$.

$$\underline{\sigma} = [0, 0, \sigma_3, 0, 0, 0] \rightarrow \text{Scorrim. angolari nulli}$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E & -\nu/E & -\nu/E \\ -\nu/E & 1/E & -\nu/E \\ -\nu/E & -\nu/E & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sigma_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sigma_3 \nu/E \\ -\sigma_3 \nu/E \\ \sigma_3/E \end{bmatrix}$$

DUNQUE: $\varepsilon_3 = \frac{1}{E}\sigma_3$ $\quad$ $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -\frac{\nu}{E}\sigma_3 = -\nu\varepsilon_3$

Supponendo di voler ripetere la prova con $\underline{\Sigma} = \sigma_1 \hat{\imath}_1$ e noteremo che ε_1 ed ε_3 sono permutati:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}\sigma_1, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -\nu\varepsilon_1$$

In generale, si avrà un allungamento del provino lungo la direzione di carico, e questo è un comportamento atteso e prevedibile, ma non è altrettanto ovvio il comportamento del parallelepipedo lungo gli altri due assi. Chiaramente questo dipenderà dal valore - e soprattutto dal segno - di ν.

- $\nu > 0$ Quando il coeff. di Poisson assume valori compresi tra 0 e 1/2, il materiale verifica la condizione di isotropia: vale cioè (per la maggior parte dei materiali sottoposti a trazione) che in seguito all'allungamento del provino lungo la direzione di carico si abbiano accorciamenti lungo le altre due direzioni. Gli acciai sono ovviamente tra questi materiali.

- $\nu = 0$ Per alcuni materiali (come il sughero), sotto piccole sollecitazioni il provino subisce deformazioni esclusivamente lungo la direzione di carico.

- $\nu < 0$ Infine, per i cosiddetti materiali auxetici (ad esempio il Gore-Tex, alcune rocce, la carta e, si ipotizza, il materiale osseo vivo) il provino sottoposto a trazione si allunga lungo tutte le direzioni, aprendosi "a ombrello" e comportando un'espansione volumetrica maggiore.
  Anche per questo, ν è detto FATTORE DI COMPRIMIBILITÀ TRASVERSALE.

$$tr(\underset{\sim}{\varepsilon}) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \frac{\sigma_3}{E}(1 - 2\nu) \neq 0 \quad (\text{e nello specifico} > 0)$$

L'ISOTROPIA indica proprio tale comportamento, ossia che la risposta meccanica di un materiale agli stati di tensione è la stessa in tutte le direzioni.
È bene inoltre appuntare che la tensione σ_3^* generatasi in risposta alla trazione subisce una minima variazione, trascurabile per il momento ma cruciale in una successiva analisi dell'equilibrio.

Dall'ipotesi di reversibilità di e ricaviamo:

$$\begin{cases} \sigma_1 = T + \dfrac{E}{1+\nu}\varepsilon_1 \\ \sigma_2 = T + \dfrac{E}{1+\nu}\varepsilon_2 \\ \sigma_3 = T + \dfrac{E}{1+\nu}\varepsilon_3 \end{cases} \cup \begin{cases} \tau_{12} = \gamma_{12}\cdot 2G \\ \tau_{13} = \gamma_{13}\cdot 2G \\ \tau_{23} = \gamma_{23}\cdot 2G \end{cases}$$

Sotto ipotesi:

$$\begin{cases} E, G > 0 \\ \nu \in (-1; 0{,}5) \end{cases}$$

con $T = \dfrac{\nu E(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)}{(1+\nu)(1-2\nu)}$

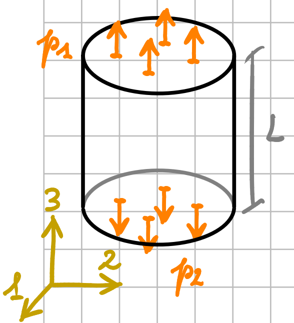
Possiamo dimostrare che per un materiale elastico lineare, omogeneo e isotropo, le direzioni principali di deformazione coincidono con le direzioni principali di tensione. Infatti, supponendo di essere in uno stato di deformazione sferica saremo anche in stato di tensione sferica, ossia:

Se $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3$:

$$\sigma_i = T + \frac{E}{1+\nu}\varepsilon_i = T + \frac{E}{1+\nu}\varepsilon_j = T + \frac{E}{1+\nu}\varepsilon_k \quad \forall i,j,k \in \{1,2,3\}$$

ossia: $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$

La determinazione dei moduli elastici avviene sperimentalmente. Un esempio:



Condizioni a contorno (sulle basi):

$$\underline{T}(\underline{x})\cdot\hat{n} = p$$

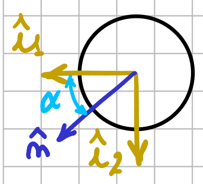
$$\begin{bmatrix} \sigma_1 & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{12} & \sigma_2 & \tau_{23} \\ \tau_{13} & \tau_{23} & \sigma_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ p \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} \tau_{13} = 0 \\ \tau_{23} = 0 \\ \sigma_3 = p \end{cases}$$

Poiché $\underline{T}(P, \hat{\imath}_3) = -\underline{T}(P, -\hat{\imath}_3) \rightarrow p_1 = -p_2$

Dunque sulle basi:

$$\underline{T}(\underline{x}) = \begin{bmatrix} \sigma_1 & \tau_{12} & 0 \\ \tau_{12} & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

Condizioni a contorno (sul mantello):



$\hat{n} = \cos(\alpha)\cdot\hat{\imath}_1 + \sin(\alpha)\cdot\hat{\imath}_2$ $\quad \underline{T}(\underline{x})\cdot\hat{n} = \underline{0}$ (Mantello scarico)

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{12} & \sigma_2 & \tau_{23} \\ \tau_{13} & \tau_{23} & \sigma_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} \sigma_1\cos(\alpha) + \tau_{12}\sin(\alpha) = 0 \\ \tau_{12}\cos(\alpha) + \sigma_2\sin(\alpha) = 0 \\ \tau_{13}\cos(\alpha) + \tau_{23}\sin(\alpha) = 0 \end{cases}$$

Soluzione banale: $\sigma_1 = \sigma_2 = \tau_{12} = \tau_{13} = \tau_{23} = 0$

$\downarrow$

Trascurando l'azione del proprio peso, per il provino vale che:

$$\underline{\nabla}\cdot \underline{\underline{T}} + \cancel{\underline{b}} = \underline{0} \quad \Big| \quad \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_i} = 0 \rightarrow \frac{\partial \sigma_3}{\partial x_3} = 0$$

...cioè σ_3 <u>non</u> dipende da x_3

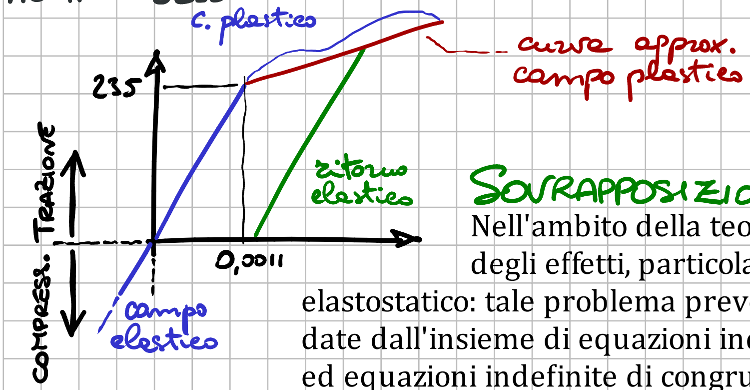
Dunque $\varepsilon_3 = \dfrac{\sigma_3}{E}$, ma $\varepsilon_3 = (\underset{\sim}{\varepsilon}\cdot \hat{\imath}_3)\cdot \hat{\imath}_3 = \dfrac{ds - dS}{dS}$

QUINDI: $\dfrac{\sigma_3}{E} = \dfrac{l_1 - l_0}{l_0} = \dfrac{\Delta l}{l_0} \rightarrow E = \dfrac{l_0}{\Delta l}\sigma_3$

ELASTICITÀ

Se il termine "linearità" esprime la proporzionalità diretta tra carichi applicati e deformazioni, con il termine "ELASTICITÀ" si fa riferimento alla reversibilità degli spostamenti: diciamo elastici quei materiali che, in seguito alla rimozione degli stati di tensione, ritornano gradualmente alla loro configurazione iniziale. Il comportamento elastico vale solo per sollecitazioni sotto una certa soglia, oltre la quale le deformazioni diventano permanenti (si passa in campo PLASTICO).
In campo plastico, le deformazioni istantanee sono date dalla somma di una deformazione reversibile e di una irreversibile: effetto di tale affermazione è che interrompendo le sollecitazioni su di un provino deformato plasticamente si ha sempre un certo ritorno elastico, anche a seguito di rottura.

ACCIAIO S235

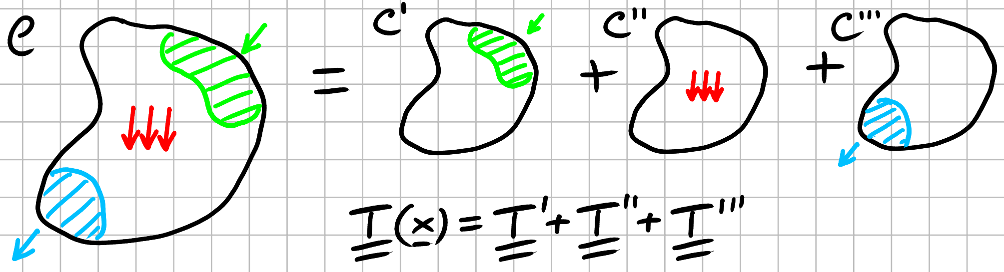


$$\begin{cases} E = 210\ GPa \\ f_{yk} = 235\ MPa \quad (\varepsilon_{su} = 1{,}1\cdot 10^{-3}) \end{cases}$$

SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI

Nell'ambito della teoria lineare vale il principio di sovrapposizione degli effetti, particolarmente utile nella risoluzione del problema elastostatico: tale problema prevede la risoluzione di 15 equazioni in 15 incognite, date dall'insieme di equazioni indefinite di equilibrio (3), legami costitutivi (6) ed equazioni indefinite di congruenza (6).

INCOGNITE:
- Spostamenti: $u_1 \quad u_2 \quad u_3$
- Deformazioni: $\varepsilon_1 \quad \varepsilon_2 \quad \varepsilon_3 \quad \gamma_{12} \quad \gamma_{13} \quad \gamma_{23}$
- Tensioni: $\sigma_1 \quad \sigma_2 \quad \sigma_3 \quad \tau_{12} \quad \tau_{13} \quad \tau_{23}$



$$\underline{\underline{T}}(\underline{x}) = \underline{\underline{T}}' + \underline{\underline{T}}'' + \underline{\underline{T}}'''$$

Nell'esempio, il tensore di Cauchy del corpo continuo C (che gode di proprietà additiva) è dato dalla somma dei tensori di Cauchy dei corpi C', C'' e C''', ossia lo stesso corpo C sotto l'effetto delle tre forze considerate separatamente.
Tale è la conseguenza del principio di sovrapposizione degli effetti.