Piotr Rowicki 320730 grupa 4 projekt 1 zadanie 35

Wstęp

Celem zadania jest przybliżanie całek podwójnych na obszarze D będącym prostokątem. Aby go osiągnąć zastosujemy dwie kwadratury: złożoną kwadraturę trapezów po zmiennej x opartą na n podprzedziałach i złożoną kwadraturę Simosona po zmiennej y opartą na m podprzedziałach. Optymalna proporcja n do m wynosi około 40:1. Jeżeli jest spełniona, jesteśmy w stanie osiągnąć dokładniejszy wynik, nie zwiększając ilości podprzedziałów. Całki z prostych funkcji metoda przybliża w miarę szybko, bardziej wymagające natomiast, wymagają znacznie więcej zasobów.

Wyprowadzenie metody

Niech D=$[a,b]\times[c,d]$ będzie obszarem całkowania a $f:[a,b]\times[c,d]\to R$ funkcją całkowalną, wówczas całka, której przybliżenia szukamy ma postać:

$$\int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)dx\right)dy.$$

W ogólności na wynik nie wpływa kolejność całkowania, dlatego w celu ułatwienia obliczeń całka po zmiennej x będzie całką wewnętrzną. Zastosujmy dla niej złożoną kwadraturę trapezów, traktując zmienną y jako parametr i w ten sposób otrzymamy:

$$\int_c^d \frac{H_1}{2}\left(f(a,y)+f(b,y)+2\sum_{i=1}^{n-1}f(a+iH_1,y)\right)dy, \tag{1}$$

gdzie $H_1=\frac{b-a}{n}$.

Pozostaje nam zastosować złożoną kwadraturę Simspona po zmiennej y. W wyniku tej operacji dostajemy:

$$\begin{aligned}\frac{H_1H_2}{6}\Bigg(&f(a,c)+f(a,d)+4\sum_{i=1}^{m}f(a,c+(2i-1)H_2)+2\sum_{i=1}^{m-1}f(a,c+2iH_2)+f(b,c)+f(b,d)\\&+4\sum_{i=1}^{m}f(b,c+(2i-1)H_2)+2\sum_{i=1}^{m-1}f(b,c+2iH_2)+2\sum_{i=1}^{n-1}f(a+iH_1,c)+2\sum_{i=1}^{n-1}f(a+iH_1,d)\\&+8\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}f(a+iH_1,c+(2i-1)H_2)+4\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m-1}f(a+iH_1,c+2iH_2)\Bigg),\end{aligned}$$

gdzie $H_2=\frac{d-c}{2m}$.

Metoda przybliża szukaną całkę, wyznaczając wartość powyższej sumy.

Eksperymenty numeryczne

Wiemy, że błąd naszej metody zależy od błędów obu zastosowanych kwadratur. Te z kolei zależą od ilości podprzedziałów danej kwadratury, których zwiększenie powoduje wzrost kosztu obliczeniowego. Aby zminimalizować koszty możemy ograniczyć sumaryczną liczność podprzedziałów, i rozłożyć je pomiędzy kwadratury, tak, aby błąd był jak najmniejszy.

W tabeli 1 przedstawione zostały błędy przybliżenia całek podwójnych z kilku funkcji dwóch zmiennych $f(x,y)$ na obszarach $[0,1]\times[0,1]$, dzieląc przedziały zmiennej x na n podprzedziałów a przedziały zmiennej y na m podprzedziałów. Liczby te spełniają warunek $m+n=1000$, gdzie 1000 to arbitralnie ustalony limit. Wartość n na początku będzie rosła liniowo, aż do wartości 800. Jeżeli to nie wystarczy do wyciągnięcia wniosków, zbliżać się będzie do 1000.

Jak widać, zdecydowanie więcej podprzedziałów można przeznaczyć na kwadraturę mniej dokładną i uzyskać przy tym wynik bardziej dokładny. Niestety, jak pokazują przykłady z tabeli 1, nie ma uniwersalnej proporcji n do m dla której błąd jest najmniejszy. Możemy jednak przyjąć, że proporcja około 40:1 daje nam wystarczająco zadowalające wyniki, aby stanowić w praktyce najbardziej optymalny stosunek.

Tabela 1: ilość podprzedziałów złożonej kwadratury trapezów n, ilość podprzedziałów złożonej kwadratury Simpsona m, błąd przybliżenia całki $E(f)$ spełniający $E(f) = |I(f) - S(f)|$, gdzie $I(f)$ - dokładna wartość całki, $S(f)$ - przybliżenie wyznaczone przez metodę z zadania

funkcja $f(x, y)$	n	m	$E(f)$
atan(xy)	200	800	$3.196{\times}10^{-7}$
	400	600	$7.991{\times}10^{-8}$
	600	800	$3.552{\times}10^{-8}$
	800	200	$1.998{\times}10^{-8}$
	900	100	$1.578{\times}10^{-8}$
	950	50	$1.413{\times}10^{-8}$
	975	25	$1.293{\times}10^{-8}$
	985	15	$9.199{\times}10^{-9}$
	990	10	$7.125{\times}10^{-9}$
	993	7	$7.127{\times}10^{-8}$
3exp$(x + y^2)xy/7$	200	800	$2.555{\times}10^{-5}$
	400	600	$6.389{\times}10^{-6}$
	600	800	$2.839{\times}10^{-6}$
	800	200	$1.597{\times}10^{-6}$
	900	100	$3.155{\times}10^{-7}$
	950	50	$2.833{\times}10^{-7}$
	975	25	$2.713{\times}10^{-7}$
	985	15	$2.833{\times}10^{-7}$
$2y^4 + x^2y^2 + 6x^3$	200	800	$1.556{\times}10^{-4}$
	400	600	$3.889{\times}10^{-5}$
	600	800	$1.728{\times}10^{-5}$
	800	200	$9.722{\times}10^{-6}$
	900	100	$1.921{\times}10^{-6}$
	950	50	$1.726{\times}10^{-6}$
	975	25	$1.679{\times}10^{-6}$
	985	15	$1.932{\times}10^{-6}$

Ważne dla naszej metody jest to, jak szybko osiągnie zadaną poprawność. W tabeli 2 przedstawiono sumę $n + m$ podprzedziałów obu kwadratur dla której przybliżenie całki podwójnej z funkcji $f(x, y)$ na przedziale $[0, 2] \times [0, 2]$ jest z błędem rzędu 10^{-9} i czas t wykonania tej operacji.proporcja n do m wynosi 40:1.

Jak widać, dla prostych funkcji uzyskanie rezultatu jest w miarę szybkie, dla bardziej wymagających natomiast, stanowi to problem.

funkcja $f(x, y)$	$n + m$	t
atan(xy)	8200	0.0.019874
3exp$(x + y^2)xy/7$	262400	19.621320
$2y^4 + x^2y^2 + 6x^3$	98400	8.732748
sqrt$(x^2 + y^2)$	12300	0.030007
$2y$sin$(x)+$ $x$cos$(2y)$	16400	0.069968
$x^2/(y^2{+}1)$	16400	0.034005

Tabela 2: suma ilości podprzedziałów obu kwadratur $m + n$ dla której otrzymaliśmy szukaną poprawność, czas wykonoywania obliczeń t w sekundach