

正则表达式

- 正则表达式
- 自动机和正则表达式
 - 由自动机到正则表达式
 - 由正则表达式到自动机
- 正则表达式的代数定律

DFA, NFA, ϵ -NFA 和 正则表达式 在表示语言的能力上等价.

DFA

正则表达式

NFA

ϵ -NFA

字符串表示路径

由 DFA 到正则表达式, 递归表达式法

定理 3

若 $L = \mathbf{L}(A)$ 是某 DFA A 的语言, 那么存在正则表达式 R 满足 $L = \mathbf{L}(R)$.

证明: 对 DFA A 的状态编号, 令 1 为开始状态, 即

自左向右

不超过

$$A = (\{1, 2, \dots, n\}, \Sigma, \delta, 1, F),$$

设正则表达式 $R_{ij}^{(k)}$ 表示从 i 到 j 但 中间节点不超过 k 全部路径的字符串集:

$$R_{ij}^{(k)} = \{x \mid \hat{\delta}(i, x) = j, x \text{ 经过的状态除两端外都} \text{不超过 } k\}.$$



那么与 $A = (\{1, 2, \dots, n\}, \Sigma, \delta, 1, F)$ 等价的正则表达式为

$$\bigcup_{j \in F} R_{1j}^{(n)}$$

且递归式为

$$R_{ij}^{(k)} = R_{ij}^{(k-1)} + R_{ik}^{(k-1)} (R_{kk}^{(k-1)})^* R_{kj}^{(k-1)}$$

$$R_{ij}^{(0)} = \begin{cases} \{a \mid \delta(q_i, a) = q_j\} & i \neq j \\ \{a \mid \delta(q_i, a) = q_j\} \cup \{\varepsilon\} & i = j \end{cases}$$

下面对 k 归纳, 证明可用以上递归式求得 $R_{ij}^{(k)}$.

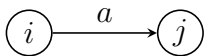
归纳基础: 当 $i \neq j$, $k \equiv 0$ 时, 即 i 到 j 没经过任何中间节点

- 没有 i 到 j 的状态转移



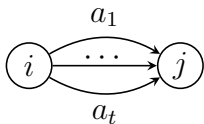
$$R_{ij}^{(0)} = \emptyset$$

- 有一个 i 到 j 的状态转移



$$R_{ij}^{(0)} = \mathbf{a}$$

- 有多个 i 到 j 的状态转移



$$R_{ij}^{(0)} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \cdots + \mathbf{a}_t$$

$$R_{ij}^{(k)} = R_{ij}^{(k-1)} + R_{ik}^{(k-1)}(R_{kk}^{(k-1)})^* R_{kj}^{(k-1)}$$

$$R_{ij}^{(0)} = \begin{cases} \{a \mid \delta(q_i, a) = q_j\} & i \neq j \\ \{a \mid \delta(q_i, a) = q_j\} \cup \{\varepsilon\} & i = j \end{cases}$$

归纳基础 (续): 当 $i = j$, $k = 0$ 时, 即从 i 到自身没经过任何中间节点

- 状态 i 没有到自己的转移



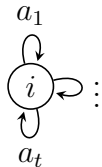
$$R_{ii}^{(0)} = \epsilon$$

- 状态 i 有一个到自己的转移



$$R_{ii}^{(0)} = \mathbf{a} + \epsilon$$

- 状态 i 有多个到自己的转移



$$R_{ii}^{(0)} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \cdots + \mathbf{a}_t + \epsilon$$

$$R_{ij}^{(k)} = R_{ij}^{(k-1)} + R_{ik}^{(k-1)}(R_{kk}^{(k-1)})^* R_{kj}^{(k-1)}$$

$$R_{ij}^{(0)} = \begin{cases} \{a \mid \delta(q_i, a) = q_j\} & i \neq j \\ \{\mathbf{a} \mid \delta(q_i, \mathbf{a}) = q_j\} \cup \{\epsilon\} & i = j \end{cases}$$

归纳假设: 已知 $R_{ij}^{(k-1)}$ 是从 i 到 j 但中间节点不超过 $k-1$ 的全部路径,
 同理已知 $R_{ik}^{(k-1)}$, $R_{kk}^{(k-1)}$ 和 $R_{kj}^{(k-1)}$. ≤ k-1

归纳递推: 那么 $R_{ij}^{(k)}$ 中全部路径, 可用节点 k 分为两部分

- 从 i 到 j 不经过 k 的



- 从 i 到 j 经过 k 的



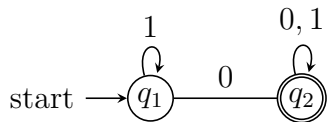
$$R_{ij}^{(k)} = R_{ik}^{(k-1)} (R_{kk}^{(k-1)})^* R_{kj}^{(k-1)}$$

$$R_{ij}^{(k)} = R_{ij}^{(k-1)} + R_{ik}^{(k-1)} (R_{kk}^{(k-1)})^* R_{kj}^{(k-1)}$$

$$R_{ij}^{(0)} = \begin{cases} \{a \mid \delta(q_i, a) = q_j\} & i \neq j \\ \{a \mid \delta(q_i, a) = q_j\} \cup \{\varepsilon\} & i = j \end{cases}$$

因此 $R_{ij}^{(k)} = R_{ij}^{(k-1)} + R_{ik}^{(k-1)} (R_{kk}^{(k-1)})^* R_{kj}^{(k-1)}$.

例8. 将如图 DFA 转换为正则表达式.



- 计算 $R_{ij}^{(0)}$

$R_{ij}^{(k)}$	$k = 0$
$R_{11}^{(0)}$	$\epsilon + 1$
$R_{12}^{(0)}$	0
$R_{21}^{(0)}$	\emptyset
$R_{22}^{(0)}$	$\epsilon + 0 + 1$

续例 8.

- 计算 $R_{ij}^{(1)} = R_{ij}^{(0)} + R_{i1}^{(0)}(R_{11}^{(0)})^*R_{1j}^{(0)}$

$R_{ij}^{(k)}$	$k = 0$	$R_{ij}^{(k)}$	$k = 1$
$R_{11}^{(0)}$	$\varepsilon + \mathbf{1}$	$R_{11}^{(1)}$	$(\varepsilon + \mathbf{1}) + (\varepsilon + \mathbf{1})(\varepsilon + \mathbf{1})^*(\varepsilon + \mathbf{1})$
$R_{12}^{(0)}$	$\mathbf{0}$	$R_{12}^{(1)}$	$\mathbf{0} + (\varepsilon + \mathbf{1})(\varepsilon + \mathbf{1})^*\mathbf{0}$
$R_{21}^{(0)}$	\emptyset	$R_{21}^{(1)}$	$\emptyset + \emptyset(\varepsilon + \mathbf{1})^*(\varepsilon + \mathbf{1})$
$R_{22}^{(0)}$	$\varepsilon + \mathbf{0} + \mathbf{1}$	$R_{22}^{(1)}$	$\varepsilon + \mathbf{0} + \mathbf{1} + \emptyset(\varepsilon + \mathbf{1})^*\mathbf{0}$

续例 8.

- 几个基本的化简规则

如果 \mathbf{r} 和 \mathbf{s} 是两个正则表达式

$$(\epsilon + \mathbf{r})^* = \mathbf{r}^*$$

$$(\epsilon + \mathbf{r})\mathbf{r}^* = \mathbf{r}^*$$

$$\mathbf{r} + \mathbf{r}\mathbf{s}^* = \mathbf{r}\mathbf{s}^*$$

$$\emptyset\mathbf{r} = \mathbf{r}\emptyset = \emptyset \quad (\text{零元})$$

$$\emptyset + \mathbf{r} = \mathbf{r} + \emptyset = \mathbf{r} \quad (\text{单位元})$$

续例 8.

- 化简 $R_{ij}^{(1)}$

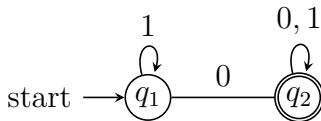
$R_{ij}^{(k)}$	$k = 1$	化简
$R_{11}^{(1)}$	$(\varepsilon + 1) + (\varepsilon + 1)(\varepsilon + 1)^*(\varepsilon + 1)$	1^*
$R_{12}^{(1)}$	$0 + (\varepsilon + 1)(\varepsilon + 1)^*0$	1^*0
$R_{21}^{(1)}$	$\emptyset + \emptyset(\varepsilon + 1)^*(\varepsilon + 1)$	\emptyset
$R_{22}^{(1)}$	$\varepsilon + 0 + 1 + \cancel{\emptyset}(\varepsilon + 1)^*0$	$\varepsilon + 0 + 1$

续例 8.

- 计算 $R_{ij}^{(2)} = R_{ij}^{(1)} + R_{i2}^{(1)}(R_{22}^{(1)})^*R_{2j}^{(1)}$

$R_{ij}^{(k)}$	$k = 1$	$R_{ij}^{(k)}$	$k = 2$
$R_{11}^{(1)}$	$\mathbf{1}^*$	$R_{11}^{(2)}$	$\mathbf{1}^* + \mathbf{1}^*\mathbf{0}(\boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{0} + \mathbf{1})^*\emptyset$
$R_{12}^{(1)}$	$\mathbf{1}^*\mathbf{0}$	$R_{12}^{(2)}$	$\mathbf{1}^*\mathbf{0} + \mathbf{1}^*\mathbf{0}(\boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{0} + \mathbf{1})^*(\boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{0} + \mathbf{1})$
$R_{21}^{(1)}$	\emptyset	$R_{21}^{(2)}$	$\emptyset + (\boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{0} + \mathbf{1})(\boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{0} + \mathbf{1})^*\emptyset$
$R_{22}^{(1)}$	$\boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{0} + \mathbf{1}$	$R_{22}^{(2)}$	$\boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{0} + \mathbf{1} + (\boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{0} + \mathbf{1})(\boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{0} + \mathbf{1})^*(\boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{0} + \mathbf{1})$

续例 8.



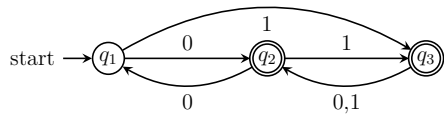
- 化简 $R_{ij}^{(2)}$

$R_{ij}^{(k)}$	$k = 2$	化简
$R_{11}^{(2)}$	$1^* + 1^*0(\epsilon + 0 + 1)^*\emptyset$	1^*
$R_{12}^{(2)}$	$1^*0 + 1^*0(\epsilon + 0 + 1)^*(\epsilon + 0 + 1)$	$1^*0(0 + 1)^*$
$R_{21}^{(2)}$	$\emptyset + (\epsilon + 0 + 1)(\epsilon + 0 + 1)^*\emptyset$	\emptyset
$R_{22}^{(2)}$	$\epsilon + 0 + 1 + (\epsilon + 0 + 1)(\epsilon + 0 + 1)^*(\epsilon + 0 + 1)$	$(0 + 1)^*$

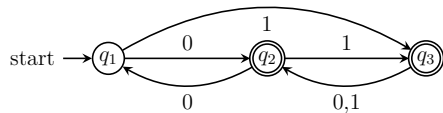
- 因只有 q_2 是接受状态, 所以该 DFA 正则表达式为

$$R_{12}^{(2)} = 1^*0(0 + 1)^*.$$

例 9. 将如图 DFA 转换为正则表达式.



续例9. 将如图 DFA 转换为正则表达式.

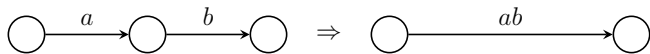


	$k = 0$	$k = 1$	$k = 2$	仅状态 2 和 3 是接受状态:
$R_{11}^{(k)}$	ϵ	ϵ	$(00)^*$	
$R_{12}^{(k)}$	0	0	$0(00)^*$	$R_{12}^{(3)} = R_{12}^{(2)} + R_{13}^{(2)}(R_{33}^{(2)})^*R_{32}^{(2)}$
$R_{13}^{(k)}$	1	1	0^*1	$= 0(00)^* + 0^*1(\epsilon + (0+1)0^*1)^*(0+1)(00)^*$
$R_{21}^{(k)}$	0	0	$0(00)^*$	$= 0(00)^* + 0^*1((0+1)0^*1)^*(0+1)(00)^*$
$R_{22}^{(k)}$	ϵ	$\epsilon + 00$	$(00)^*$	
$R_{23}^{(k)}$	1	$1 + 01$	0^*1	$R_{13}^{(3)} = R_{13}^{(2)} + R_{13}^{(2)}(R_{33}^{(2)})^*R_{33}^{(2)}$
$R_{31}^{(k)}$	\emptyset	\emptyset	$(0+1)(00)^*0$	$= 0^*1 + 0^*1(\epsilon + (0+1)0^*1)^*(\epsilon + (0+1)0^*1)$
$R_{32}^{(k)}$	$0+1$	$0+1$	$(0+1)(00)^*$	$= 0^*1((0+1)0^*1)^*$
$R_{33}^{(k)}$	ϵ	ϵ	$\epsilon + (0+1)0^*1$	

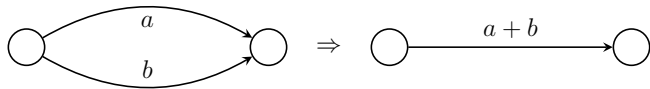
$$R_{12}^{(3)} + R_{13}^{(3)} = 0^*1((0+1)0^*1)^*(\epsilon + (0+1)(00)^*) + 0(00)^*.$$

由 DFA 到正则表达式, 状态消除法

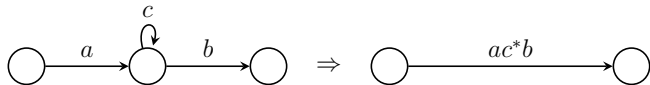
- 从 DFA 中逐个删除状态
- 用标记了正则表达式的新路径替换被删掉的路径
- 保持“自动机”等价.



$a \cdot b$

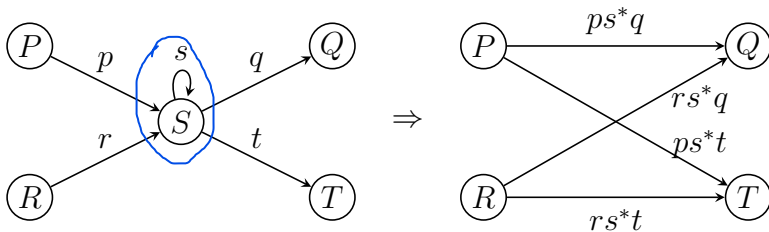


$a + b$

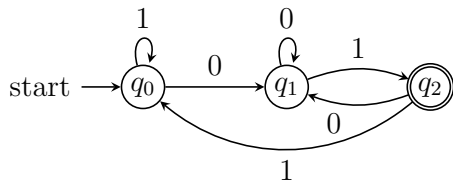


$a \cdot c^* \cdot b$

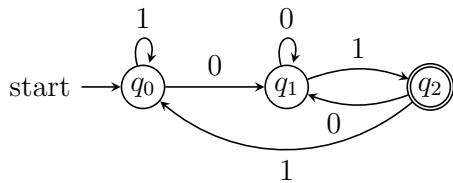
- 更一般的情况如图
- 若要删除状态 S , 需添加相应路径



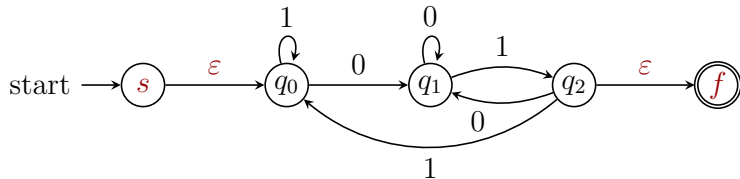
例 9. 利用状态消除法, 构造下图自动机的正则表达式.



续例9. 利用状态消除法, 构造下图自动机的正则表达式.

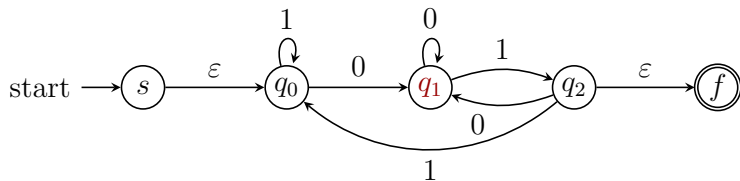


① 利用空转移, 添加新的开始 s 和结束状态 f :

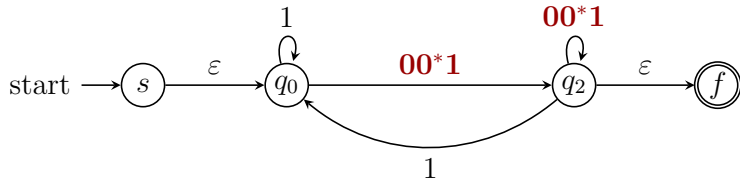


续例9. 利用状态消除法, 构造下图自动机的正则表达式.

- ① 利用空转移, 添加新的开始 s 和结束状态 f :

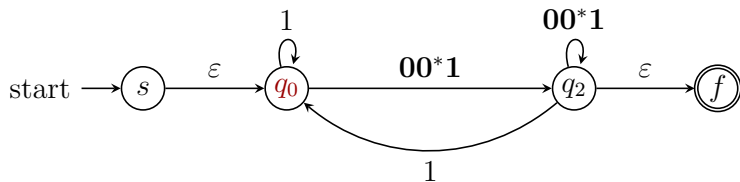


- ② 消除状态 q_1 , 添加路径 $q_0 \rightarrow q_2$ 和 $q_2 \rightarrow q_0$:

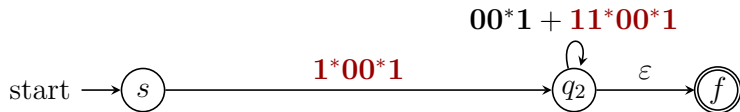


续例 9. 利用状态消除法, 构造下图自动机的正则表达式.

- ② 消除状态 q_1 , 添加路径 $q_0 \rightarrow q_2$ 和 $q_2 \rightarrow q_2$:

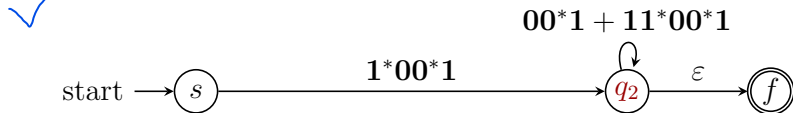


- ③ 消除状态 q_0 , 添加路径 $s \rightarrow q_2$ 和 $q_2 \rightarrow q_2$:



续例9. 利用状态消除法, 构造下图自动机的正则表达式.

③ 消除状态 q_0 , 添加路径 $s \rightarrow q_2$ 和 $q_2 \rightarrow q_2$:

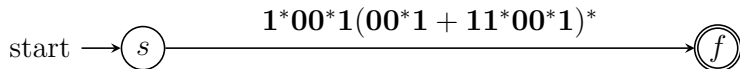


④ 消除状态 q_2 , 添加路径 $s \rightarrow f$:



续例 9. 利用状态消除法, 构造下图自动机的正则表达式.

- ④ 消除状态 q_2 , 添加路径 $s \rightarrow f$:



- ⑤ 因此该自动机的正则表达式为

$$1^*00^*1(00^*1 + 11^*00^*1)^*.$$

由正则表达式到自动机

定理 4

正则表达式定义的语言, 都可被有穷自动机识别.

由正则表达式构造 ϵ -NFA

任何正则表达式 e , 都存在与其等价的 ϵ -NFA A , 即 $L(A) = L(e)$, 并且 A 满足:

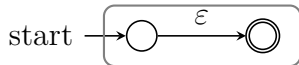
- ① 仅有一个接收状态;
- ② 没有进入开始状态的边;
- ③ 没有离开接受状态的边.

归纳基础:

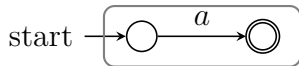
① 对于 \emptyset , 有 ε -NFA:



② 对于 ε , 有 ε -NFA:



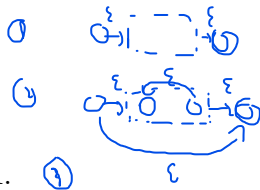
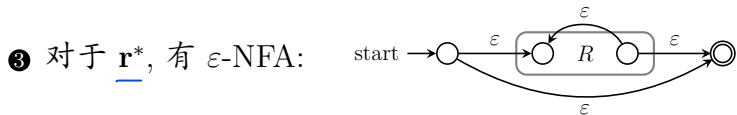
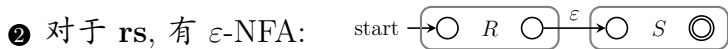
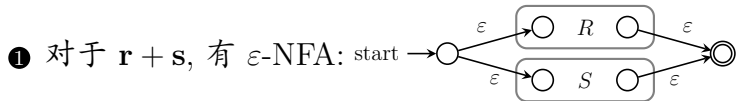
③ $\forall a \in \Sigma$, 对于 a , 有 ε -NFA:



归纳递推: 若 r 和 s 为正则表达式, 则它们对应的 ε -NFA 分别为 R 和 S

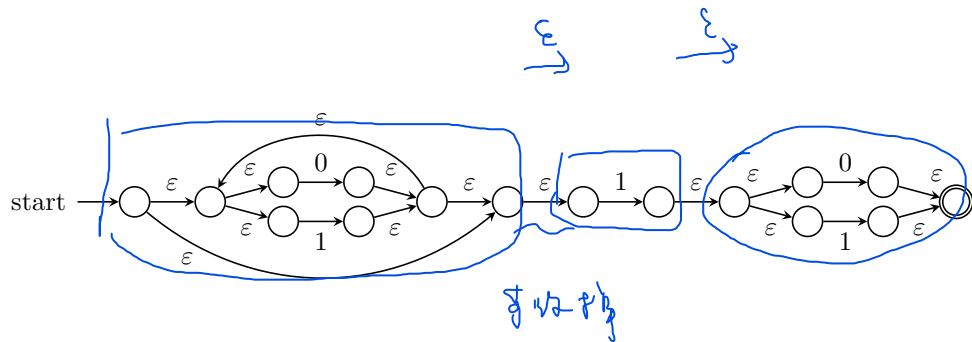


则正则表达式 $r + s$, rs 和 r^* , 可由 R 和 S 分别构造如下:



因此任何结构的正则表达式, 都可递归构造出等价的 ε -NFA. ①

例 9. 正则表达式 $(0 + 1)^*1(0 + 1)$ 构造为 ε -NFA.



思考题

正则表达式到 ε -NFA 构造方法中的 3 个限制条件, 都有必要吗?