



Akademia Górnictwo-Hutnicza  
im. Stanisława Staszica  
w Krakowie

---

---

Praca magisterska

## Zastosowanie modeli kopułowych do modelowania spreadu aktywów

Piotr Mikler

Kierunek: Matematyka  
Specjalność: Matematyka finansowa

Nr albumu: 409145

Promotor  
dr inż. Jerzy Dzieża



Wydział Matematyki Stosowanej

---

Kraków 2022

## Oświadczenie studenta

*Uprzedzony(-a) o odpowiedzialności karnej na podstawie art. 115 ust. 1 i 2 ustawy z dnia 4 lutego 1994 r. o prawie autorskim i prawach pokrewnych (t.j. Dz.U. z 2018 r. poz. 1191 z późn. zm.): „Kto przywłaszcza sobie autorstwo albo wprowadza w błąd co do autorstwa całości lub części cudzego utworu albo artystycznego wykonania, podlega grzywnie, karze ograniczenia wolności albo pozbawienia wolności do lat 3. Tej samej karze podlega, kto rozpowszechnia bez podania nazwiska lub pseudonimu twórcy cudzy utwór w wersji oryginalnej albo w postaci opracowania, artystyczne wykonanie albo publicznie zniekształca taki utwór, artystyczne wykonanie, fonogram, videogram lub nadanie.”, a także uprzedzony(-a) o odpowiedzialności dyscyplinarnej na podstawie art. 307 ust. 1 ustawy z dnia 20 lipca 2018 r. Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce (Dz. U. z 2018 r. poz. 1668 z późn. zm.) „Student podlega odpowiedzialności dyscyplinarnej za naruszenie przepisów obowiązujących w uczelni oraz za czyn uchybiający godność studenta.”, oświadczam, że niniejszą pracę dyplomową wykonałem(-am) osobiście i samodzielnie i nie korzystałem(-am) ze źródeł innych niż wymienione w pracy. Jednocześnie Uczelnia informuje, że zgodnie z art. 15a ww. ustawy o prawie autorskim i prawach pokrewnych Uczelnia przysługuje pierwszeństwo w opublikowaniu pracy dyplomowej studenta. Jeżeli Uczelnia nie opublikowała pracy dyplomowej w terminie 6 miesięcy od dnia jej obrony, autor może ją opublikować, chyba że praca jest częścią utworu zbiorowego. Ponadto Uczelnia jako podmiot, o którym mowa w art. 7 ust. 1 pkt 1 ustawy z dnia 20 lipca 2018 r. – Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce (Dz. U. z 2018 r. poz. 1668 z późn. zm.), może korzystać bez wynagrodzenia i bez konieczności uzyskania zgody autora z utworu stworzonego przez studenta w wyniku wykonywania obowiązków związanych z odbywaniem studiów, udostępniać utwór ministrowi właściwemu do spraw szkolnictwa wyższego i nauki oraz korzystać z utworów znajdujących się w prowadzonych przez niego bazach danych, w celu sprawdzania z wykorzystaniem systemu antyplagiatowego. Minister właściwy do spraw szkolnictwa wyższego i nauki może korzystać z prac dyplomowych znajdujących się w prowadzonych przez niego bazach danych w zakresie niezbędnym do zapewnienia prawidłowego utrzymania i rozwoju tych baz oraz współpracujących z nimi systemów informatycznych.*

.....  
(Podpis czytelny studenta)

## Oświadczenie promotora

*Oświadczam, że praca spełnia wymogi stawiane pracom magisterskim.*

.....  
(Podpis promotora)

# Streszczenie

Spready grają dziś ogromną rolę na rynkach finansowych. Służą inwestorom, spekulantom i zarządzającym ryzykiem do oceny potencjalnych zysków z inwestycji, implikowania zmiennych rynkowych, czy kontrolowania ekspozycji na ryzyko. W pracy prezentujemy modele kopołowe jako narzędzia odpowiednie do statystycznej analizy współzależności między komponentami spreadu.

Literatura bogata jest w przykłady zastosowania dwuwymiarowych kopołów do modelowania dwuwymiarowych spreadów. Te modele, oparte o połączenie analizy szeregow czasowych oraz modelowania reziduów przy pomocy kopołów stały się jednym z klasycznych podejść do problemu wyceny instrumentów pochodnych na spread. Na początku lat 2000 dodatkowo rozwinęła się teoria modeli Vine Copula, pozwalających na elastyczny opis zależności wielowymiarowych. Od tamtego czasu konsekwentnie odnoszą one sukcesy w modelowaniu zjawisk w wielu dziedzinach nauki: od lotnictwa, przez biologię po finanse. Mimo tego, literatura dotycząca aplikacji Vine Copula do modelowania wielowymiarowych spreadów jest zdecydowanie ograniczona.

Praca poszerza literaturę Vine Copula o aplikację tych modeli do spreadu na 3 aktywa. Prezentujemy niezbędną teorię, oraz pokazujemy w jaki sposób zbudować symulacyjny model dla soybean crush spread, w którym numerycznie wyceniamy europejskie opcje na ten rodzaj spreadu.

## Słowa kluczowe

spread, soja, opcje, copuła, vine copula

# Abstract

Nowadays, spreads play a vital role on global financial markets. They serve both investors, speculators and risk managers alike as a measure of potential investment turnover, to imply market variables, or as tools for controlling market risk exposures associated with combinations of risk factors. In this paper, we present copula models as a suitable tool for statistical modelling of dependency between spread components.

The literature is rich with examples of bivariate copulas applied to model bivariate spreads. These models which are a combination of time series analysis and copulas have become one of the classical solutions to the problem of pricing spread derivatives. In early 2000s the copula theory was extended to Vine Copula models, allowing the flexibility of copulas to be used in higher dimensions. Since then they have been successfully applied to model phenomena in a wide range of industries: from aviation to biology to finance. Nevertheless, the literature on modelling spreads in higher dimensions using Vine Copulas is relatively limited.

This paper extends the literature of Vine Copula models by presenting an application to 3-dimensional spread modelling. We present the necessary theory, and show how to build a simulation model for soybean crush spread, as well as how to numerically price European options on that asset.

## Key words

spread, soybean, option, copula, vine copula

# Spis treści

<b>Streszczenie</b> . . . . .	1
<b>Abstract</b> . . . . .	2
<b>Wprowadzenie</b> . . . . .	4
<b>Rozdział 1. Wielowymiarowe zmienne losowe</b> . . . . .	5
1.1. Zmienne losowe . . . . .	5
1.2. Rozkłady wielowymiarowe . . . . .	7
1.3. Miary współzależności . . . . .	8
<b>Rozdział 2. Modele kopułowe</b> . . . . .	13
2.1. Dwuwymiarowe kopuły . . . . .	14
2.1.1. Wprowadzenie i definicja . . . . .	14
2.1.2. Probabilistyczna interpretacja . . . . .	17
2.1.3. Popularne kopuły i ich własności . . . . .	19
2.2. Vine Copulas . . . . .	30
2.2.1. Pair Copula Constructions . . . . .	31
2.2.2. Vine Copula . . . . .	32
<b>Rozdział 3. Spready na rynkach finansowych</b> . . . . .	38
3.1. Popularne rodzaje spreadów . . . . .	38
3.2. Modelowanie spreadów . . . . .	40
3.3. Model kopułowy . . . . .	42
<b>Rozdział 4. Zastosowanie modelu do danych rynkowych</b> . . . . .	45
4.1. Opis danych . . . . .	46
4.2. Kalibracja . . . . .	50
4.3. Wycena opcji . . . . .	58
<b>Wnioski</b> . . . . .	62
<b>Bibliografia</b> . . . . .	63

# Wprowadzenie

Celem tej pracy jest zbadanie skuteczności modeli *Vine Copula* w zastosowaniu do modelowania spreadu na różnicę cen 3 aktywów. Podajemy teorię niezbędną do zdefiniowania tych modeli, omawiamy obecne podejścia do modelowania spreadu i kalibrujemy model *Vine Copula* do danych rzeczywistych dotyczących *soybean crush spreadu*. W tym modelu numerycznie wyceniamy europejskie opcje na spread.

W pierwszym rozdziale wprowadzamy istotne dla teorii kopoł obiekty z zakresu probabiliistyki i statystyki. Przedstawiamy wielowymiarowe zmienne losowe, z naciiskiem na modele ich rozkładów najczęściej stosowane w praktyce, oraz wskazując na ich istotne ograniczenia. Definiujemy również miary współzależności zmiennych losowych, wychodząc ze statystycznego punktu odniesienia.

Drugi rozdział stanowi opis dwuwymiarowych modeli kopołowych i ich rozszerzenia do *Vine Copulas*. Definiujemy w nim dwuwymiarowe kopoły, podajemy przykłady i pokazujemy że są rozszerzeniem rozkładów wielowymiarowych z rozdziału pierwszego. Redefiniujemy przy tym również miary współzależności z rozdziału pierwszego, tym razem w języku kopoł.

W rozdziale trzecim skupiamy się na pojęciu spreadu aktywów, podajemy ich przykłady obecne na rynkach finansowych i wymieniamy podejścia do ich modelowania. Skupiamy się na podejściu kopołowym, łączącym modelowanie szeregów czasowych z wielowymiarowymi kopołami - w szczególności ze strukturami *Vine Copulas*.

Ostatni rozdział prezentuje wynik kalibracji modelu do rzeczywistych danych, tj. cen *soybean crush spread*, czyli różnicy między ceną surowca (ziaren soi), a powstających z niej produktów: mączki sojowej i olejku sojowego. Pokazujemy jak w numeryczny sposób można wycenić w tym modelu opcje europejskie, oraz porównujemy wyniki symulacji modelu używającego *Vine Copula*, a najprostszeego modelu wielowymiarowej kopoły gaussowskiej.

---

## Rozdział 1

---

# Wielowymiarowe zmienne losowe

W klasycznym studium doboru struktury portfela ([Markowitz, 1952]), Markovitz analizuje portfel aktywów. Przedmiotem tej pracy jest opis sposobu, w jaki indywidualne pozycje w portfelu wpływają na jego całociowy zwrot i ryzyko. Współczesna teoria portfela która została zapoczątkowana tą pracą wymaga zamodelowania całego systemu jakim jest zbiór akcji w portfelu. Markovitz pokazuje w swojej pracy istotę współzależności między poszczególnymi aktywami, od której zależy czy ryzyko portfela ulega dywersyfikacji, czy jest amplifikowane. Modelowanie każdego aktywa z osobna okazuje się być niewystarczające, ponieważ istotny wpływ na portfel mają współzależności pomiędzy aktywami.

Problem wielowymiarowości i poprawnego jej opisu pojawia się nie tylko w finansach, ale w prawie każdej dziedzinie gdzie do realnych problemów aplikuje się modelowanie matematyczne. Zanim wprowadzimy więc pojęcie kopyły, które posłuży nam do analizy wielowymiarowych zależności, w tym rozdziale skupimy się na  $d$ -wymiarowych wektorach losowych  $\mathbf{X} = [X_1, X_2, \dots, X_d]$  i przypomnimy elementy rachunku prawdopodobieństwa i statystyki istotnych z punktu widzenia teorii kopył.

### 1.1. Zmienne losowe

Rozpatrywać będziemy przestrzeń probabilistyczną  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , czyli niech  $\Omega$  to pewien niepusty zbiór,  $\mathcal{F}$  to  $\sigma$ -ciało zdarzeń losowych, a  $\mathbb{P}$  to funkcja  $\mathbb{P}: \Omega \rightarrow [0, 1]$ .

**Definicja 1.1** ( $n$ -wymiarowa zmienna losowa).  $n$ -wymiarową zmienną losową nazywamy funkcję określoną na przestrzeni zdarzeń elementarnych  $\Omega$  i przyjmującą wartości rzeczywiste:

$$X: \Omega \mapsto \mathbb{R}^n,$$

taką, że

$$\{\omega: X(\omega) < x\} \in \mathcal{F},$$

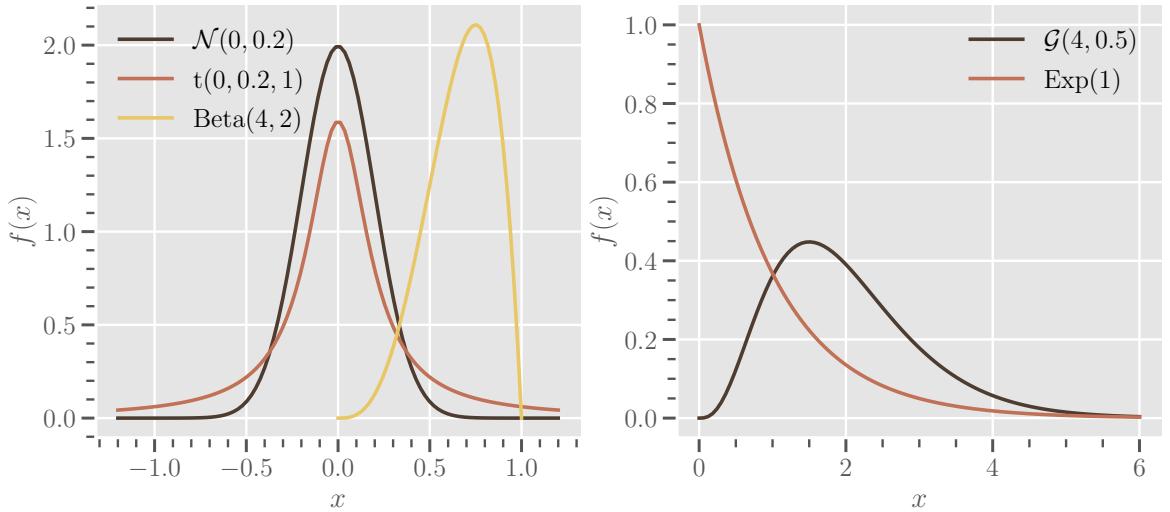
dla każdego  $x \in \mathbb{R}$ .

W całej pracy zakładając będziemy że poruszamy się w przestrzeni zmiennych ciągłych, ponieważ dotyczyć będziemy problematyki danych rynkowych o takim charakterze. Teoria kopołów jest rozwinięta co prawda również dla zmiennych dyskretnych ([Genest and Nešlehová, 2007]) i dorobiła się już ciekawych aplikacyjnych prac (np. [Koopman et al., 2018], czy [Schefzik, 2015]), jednak literatura jest tu zdecydowanie uboższa. Do opisu interesujących nas rozkładów dostępne będą więc mieć analityczne postaci ich dystrybuanty lub gęstości. Ponieważ często podaje się różne ich parametryzacje, w tabeli 1.1 podajemy gęstości zmiennych losowych przewijających się w tej pracy. Ich wykresy widoczne są na wykresie 1.2.

Warto wspomnieć, że istnieją również użyteczne rozkłady, które nie dają się wyrazić za pomocą gęstości czy dystrybuanty. Najpopularniejszym przykładem mogą być rozkłady stabilne, gdzie jedyne czym może my się posługiwać to funkcja charakterystyczna. [Borak et al., 2005], czy [McCulloch, 1996] podają bardzo dobry przegląd teorii rozkładów stabilnych i pokazują ich przewagę w kontekście modelowania nie-gaussowskich zwrotów na rynkach finansowych.

Tabela 1.1. **Popularne jednowymiarowe zmienne losowe.** Tabela przedstawia dystrybuanty, oraz gęstości popularnych jednowymiarowych zmiennych losowych powtarzających się w tej pracy.

Rozkład	Oznaczenie	Nośnik	Gęstość
Normalny	$\mathcal{N}(\mu, \sigma)$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$
T-studenta	$t(\mu, \sigma, \nu)$	$\mathbb{R}$	$\frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\Gamma(\frac{\nu}{2})\sqrt{\pi\nu}\sigma} \left[1 + \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2 \frac{1}{\nu}\right]^{-\frac{\nu+1}{2}}$
Beta	$\text{Beta}(\alpha, \beta)$	$[0, 1]$	$x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}$
Wykładniczy	$\text{Exp}(\lambda)$	$\mathbb{R}^+$	$\lambda e^{-\lambda x}$
Gamma	$\mathcal{G}(\alpha, \beta)$	$\mathbb{R}^+$	$x^{\alpha-1}e^{-\beta x} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}$



Rysunek 1.2. **Jednowymiarowe zmienne losowe.** Przykładowe gęstości zmiennych losowych z tabeli 1.1.

Do opisu zmiennych losowych *wielowymiarowych*, oprócz gęstości łącznej rozkładu wyróżniamy dodatkowo gęstości warunkowe i brzegowe. Opisują one jak zachowuje się współrzędna wektora losowego, jeśli pozostałe z nich przyjmą pewne wartości, lub jeśli kompletnie wyłączymy ich wpływ.

**Definicja 1.2** (Rozkłady brzegowy). *Rozpatrzmy d-wymiarową zmienną losową  $\mathbf{X} = [X_1, X_2, \dots, X_d]$  o gęstości  $f(x_1, \dots, x_d)$ . Gęstość rozkładu brzegowego  $X_j$  definiujemy jako:*

$$f_j(x_j) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \dots, x_{j-1}, x, x_{j+1}, \dots, x_d) dx_1 \dots dx_{j-1} dx_{j+1} \dots dx_d.$$

**Definicja 1.3** (Rozkład warunkowy). *Rozpatrzmy d-wymiarową zmienną losową  $\mathbf{X} = [X_1, X_2, \dots, X_d]$  o gęstości  $f(x_1, \dots, x_d)$ . Gęstość rozkładu warunkowego  $X_j | X_k$  definiujemy jako:*

$$f_{j|k}(x_j | x_k) = \frac{f(x_1, \dots, x_d)}{f_k(x_k)}.$$

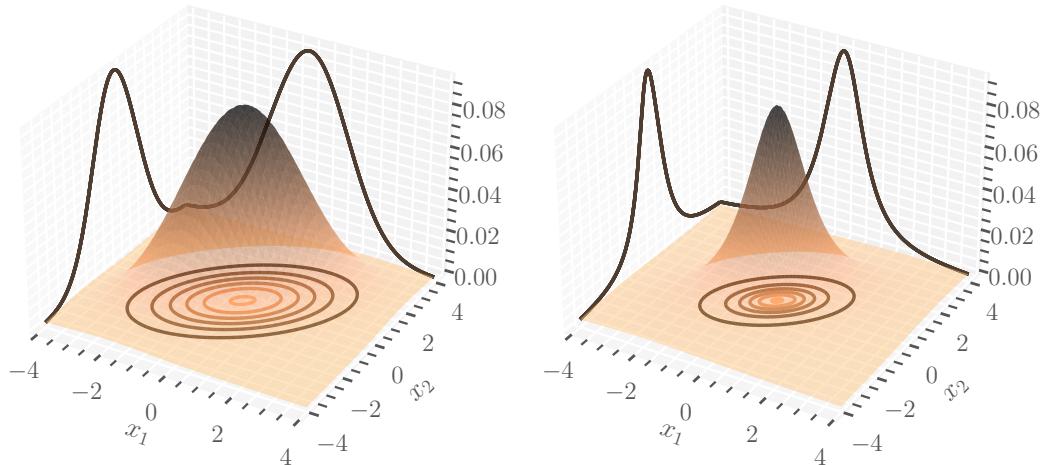
## 1.2. Rozkłady wielowymiarowe

Naturalnym jest więc, że w praktyce często rozważamy modele wielowymiarowych zmiennych losowych, które mają regularne, łatwe do opisania gęstości łączne. Rozkłady jednowymiarowe z tabeli 1.1 w naturalny sposób znajdują swoje rozszerzenia na więcej wymiarów ([Anderson, 2003], [Cherubini et al., 2004]). Najpopularniejszym tego przykładem jest rodzina d-wymiarowych rozkładów eliptycznych, do której należą rozkłady o gęstości postaci:

$$f_{\mathcal{N}}(x, \mu, \Sigma) = k_d |\Sigma|^{-0.5} g((x - \mu)^T \Sigma^{-1} (x - \mu)).$$

W powyższej reprezentacji,  $k_d \in \mathbb{R}$  jest stałą zależną od wymiaru,  $\mu$  jest  $d$ -wymiarowym wektorem średnich,  $\Sigma \in \mathbb{R}^{d \times d}$  to symetryczna, dodatnio zdefiniowana macierz, a  $g: [0, \infty) \mapsto [0, \infty)$  jest pewną funkcją która nie zależy od wymiaru wektora.

Dla odpowiednio dobranych  $g$  i  $k_d$  otrzymamy w tej rodzinie wielowymiarowy rozkład normalny, czy wielowymiarowy rozkład t. Powstają one przy odpowiednio  $k_d = (2\pi)^{-0.5d}$  i  $g(s) = \exp(-0.5t)$ , lub  $k_d = \Gamma(\frac{\nu+d}{2})/\Gamma(\frac{\nu}{2})$  i  $g(s) = (1 + \frac{t}{\nu})^{-(\nu+d)/2}$ .



Rysunek 1.3. **Rozkłady eliptyczne.** Gęstości przykładowych rozkładów eliptycznych ( $d = 2, \mu = [0, 0], \Sigma = [\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}]$ ). Lewy panel: 2-wymiarowy rozkład normalny. Prawy panel: 2-wymiarowy rozkład t ( $\nu = 0.5$ ).

Używając rozkładów eliptycznych implikujemy model w którym rozkłady brzegowe pochodzą z tej samej rodziny. Obserwując rysunek 1.3, można rozpoznać charakterystyczne kształty rozkładów brzegowych. Manipulując różnymi rozkładami eliptycznymi możemy więc zamodelować różne struktury korelacji między zmiennymi, czy też ciężkość ogonów, lecz tracimy swobodę wyboru rozkładów brzegowych. [Markowitz, 1952] i jego model bazują właśnie na rozkładzie multinormalnym ponieważ zakładają, że wektor średnich i macierz korelacji wystarczająco opisuje rozkład zwrotów aktywów rynkowych. Podejście to łatwo obalić ze względu na empiryczne dowody ciężkoogonowego charakteru zachowania rynku akcji ([Haug and Taleb, 2007], [Mandelbrot, 1997]), czy zjawiska niesymetrycznej, silniejszej korelacji w lewym ogonie ([Haug and Taleb, 2007], [Vaz de Melo Mendes, 2005]). Nie mniej jednak nie da się odmówić, że ten prosty model jest wystarczający aby uświadomić jak istotny jest wpływ zależności komponentów na zachowanie całego systemu.

### 1.3. Miary współzależności

Problemem w poprawnym opisie zależności między zmiennymi losowymi jest fakt, że dostępnych mamy wiele statystyk które ją mierzą. Każda z nich uchwycia pewien konkretny aspekt współzależności, i nie da się jasno wyróżnić konkretnej jako „naj-

lepszej”. W tej sekcji pracy zaprezentujemy wybrane narzędzia służące do badania struktury zależności zmiennych losowych.

### $\rho$ Pearsona

Podstawową i najbardziej znaną miarą współzależności zmiennych losowych jest korelacja Pearsona.

**Definicja 1.4** (Korelacja Pearsona). *Niech  $X$  i  $Y$  będą zmiennymi losowymi o skończonych drugich momentach. Współczynnikiem korelacji pearsona  $\rho$  nazywamy*

$$\rho(X, Y) := \text{Cor}(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)} \sqrt{\text{Var}(Y)}}.$$

Ten współczynnik korelacji przyjmuje wartości z zakresu  $[-1, 1]$ , gdzie  $|\rho| = 1$  oznacza idealną liniową relację. Korelacja pearsona jest podstawową miarą zależności podawaną w każdym podręczniku do statystyki. Ma jednak szereg wad: nie jest zdefiniowana dla ciężkoogonowych rozkładów (przez nieokreoloną wariancję), oraz jest wrażliwa na monotonicznie rosnące przekształcenia  $X$  i  $Y$ . Te i wiele innych ograniczeń korelacji pearsona stoi w sprzeczności z aksjomatycznym podejściem do miar zgodności (czyt. 1.5).

Gdy w rozdziale 2.1.1 zdefiniujemy czym jest główny obiekt tej pracy, czyli kopytu, zależeć nam będzie, żeby móc opisać zależność zmiennych losowych  $X, Y$  w terminach łączącej je kopytu  $C$ . Z tego powodu, interesujące dla nas będą miary zależności, które są niezmiennicze na monotonicznie rosnące przekształcenia (ze względu na transformację PIT 2.5, czyt. rozdział 2.1.1). Korelacja pearsona nam tego nie zapewni, ale możemy zdefiniować inne miary: zgodności zmiennych losowych, które posiadają lepsze własności z punktu widzenia teorii kopytów.

Aby w pełni zdefiniować aksjomatyczne podejście do miar zgodności jak wprowadził to Scarsini w [Scarsini, 1984], potrzebujemy mieć dostępne pojęcie kopytu. W tej pracy formalnie zostaną one wprowadzone dopiero w definicji 2.4, w związku z czym na ten moment powiemy jedynie (nieformalnie), że kopytu jest funkcją która opisuje charakter i siłę zależności między zmiennymi losowymi. Pełną definicję i opis czym są kopytu można przeczytać w rozdziale 2.1.

**Definicja 1.5** (Miara zgodności). *Rozpatrzmy zmienne losowe  $X$  i  $Y$  powiązane kopytu  $C$ .  $M_{X,Y} = M_C$  nazywiemy miarą zgodności, wtedy i tylko wtedy gdy:*

1. jest zdefiniowana dla dowolnych zmiennych  $X, Y$
2. jest relatywna, lub znormalizowana:  $M_{X,Y} \in [-1, 1]$
3. jest symetryczna:  $M_{X,Y} = M_{Y,X}$
4. jeśli  $X$  i  $Y$  są niezależne, to  $M_{X,Y} = 0$
5.  $M_{-X,Y} = M_{X,-Y} = -M_{Y,X}$
6. jest zbieżna, gdy kopytu jest punktowo zbieżna, tzn. jeśli  $\{(X_n, Y_n)\}$  jest ciągiem ciągłych zmiennych losowych o kopytach  $\{C_n\}$ , oraz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_n(u, v) = C(u, v), \text{ dla każdych } (u, v) \in [0, 1]^2,$$

to wtedy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_{X_n, Y_n} = M_{X, Y}.$$

7. przestrzega relacji zgodności: jeśli  $C_1(u, v) \leq C_2(u, v)$  dla wszystkich  $(u, v) \in [0, 1]^2$ , to  $M_{C_1} \leq M_{C_2}$ .

Aksjomatyczne podejście z powyższej definicji zawęża przestrzenie miar zgodności do takich, które są niezmienne wzgldem rosnących transformacji, czyli:

$$M_{X, Y} = M_{\alpha(X), \beta(Y)},$$

dla dowolnych funkcji  $\alpha, \beta$  rosnących prawie wszędzie.

### Współmonotoniczność i przeciwnomonotoniczność

Współmonotoniczność i przeciwnomonotoniczność to szczególne przypadki zależności zmiennych losowych, w których są one od siebie perfekcyjnie zależne.

**Definicja 1.6** (Zbiór współmonotoniczny). *Zbiór  $A \subset \mathbb{R}^2$  nazywamy współmonotonicznym, wtedy i tylko wtedy gdy dla dowolnych  $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$  z  $A$  zachodzi:*

$$(x_1 - y_1)(x_2 - y_2) > 0.$$

**Definicja 1.7** (Zbiór przeciwnomonotoniczny). *Zbiór  $A \subset \mathbb{R}^2$  nazywamy przeciwnomonotonicznym, wtedy i tylko wtedy gdy dla dowolnych  $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$  z  $A$  zachodzi:*

$$(x_1 - y_1)(x_2 - y_2) < 0.$$

**Definicja 1.8** (Zmienne losowe współ- i przeciwnomonotoniczne). *Wektor losowy  $(X, Y)$  nazywamy współmonotonicznym (przeciwnomonotonicznym), lub perfekcyjnie dodatnio (ujemnie) zależnym wtedy i tylko wtedy gdy istnieje zbiór współmonotoniczny (przeciwnomonotoniczny)  $A \subset \mathbb{R}^2$ :*

$$\mathbb{P}[(X, Y) \in A] = 1.$$

Współmonotoniczność i przeciwnomonotoniczność zmiennych losowych jest ważnym konceptem w teorii kopyuł, ponieważ definiuje najsilniejszy rodzaj zależności jakie kopyuły mogą reprezentować (czyt. twierdzenie 2.9).

### $\tau$ Kendalla i $\rho$ Spearmana

Współczynniki  $\tau$  Kendalla i  $\rho$  Spearmana oba spełniają aksjomaty miar zgodności z [Scarsini, 1984]. Są współczynnikami rangowymi, więc nie zależą od monotonicznych przekształceń rozkładów brzegowych  $X$  czy  $Y$ . Ich zaletą jest to, że mogą być przez to jednoznacznie przedstawione w języku kopyuły - co znajduje zastosowanie przy estymacji parametrów modeli kopyułowych. Ta własność zazwyczaj nie zachodzi w przypadku korelacji Pearsona.

**Definicja 1.9** ( $\tau$  Kendalla). *Współczynnik  $\tau$  Kendalla między ciągłymi zmiennymi losowymi  $X$  i  $Y$  o kopule definiujemy jako:*

$$\tau = \mathbb{P}[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] - \mathbb{P}[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0],$$

gdzie  $(X_1, Y_1)$  i  $(X_2, Y_2)$  są kopiami iid wektora  $(X, Y)$ .

**Definicja 1.10** ( $\rho$  Spearmana). *Współczynnik  $\rho$  Spearmana między ciągłymi zmiennymi losowymi  $X$  i  $Y$  o rozkładach brzegowych  $F_X$  i  $F_Y$  zadany jest przez:*

$$\rho = \text{Cor}[F_X(X), F_Y(Y)].$$

Współczynniki te dają się jednoznacznie wyrazić za pomocą kopuł łączących  $X$  i  $Y$  - właściwość tę podamy w rozdziale 2.1.1. Istotny również jest fakt, że ich ekstremalne wartości, tj.  $\rho = 1$ , czy  $\tau = 1$  odpowiadają współmonotoniczności zmiennych losowych, a  $\rho = -1$ , czy  $\tau = -1$  odpowiadają przeciwnomonotoniczności.

### Zależność ogonów

Na zależność zmiennych losowych można popatrzeć również ze strony zależności obserwacji ekstremalnych. Rozważmy następującą statystykę:

**Definicja 1.11** (Współczynnik zależności ogonów). *Górnym współczynnikiem zależności ogonów  $(X_1, X_2)$  o rozkładach brzegowych  $F_1$  i  $F_2$  i kopuli  $C$  nazywamy:*

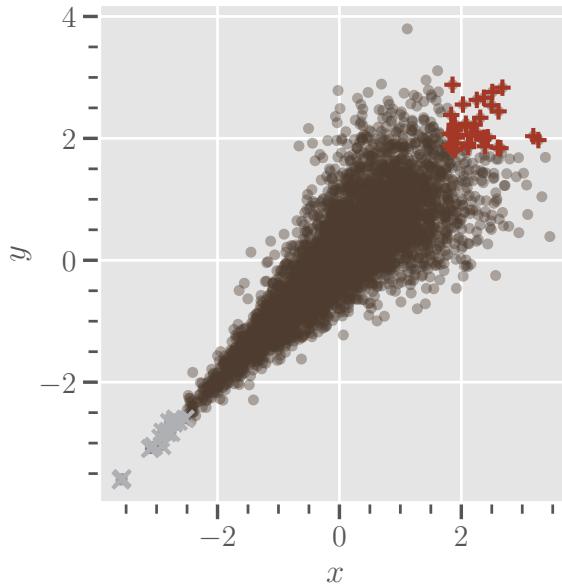
$$\lambda^u = \lim_{t \rightarrow 1^-} \mathbb{P}[X_2 > F_2^{-1}(t) | X_1 > F_1^{-1}(t)].$$

Dolnym współczynnikiem nazywamy:

$$\lambda^l = \lim_{t \rightarrow 0^+} \mathbb{P}[X_2 \leq F_2^{-1}(t) | X_1 \leq F_1^{-1}(t)].$$

Współczynniki zależności ogonów informują o sile zależności zmiennych losowych w granicy, gdy dążymy z jedną z nich coraz dalej w jej ogon. Mówimy, że zmienne losowe posiadają zależność ogonów jeśli  $\lambda \in (0, 1]$ , lub jej nie posiadają gdy  $\lambda = 0$ . Te współczynniki zależą przede wszystkim od obserwacji będących ekstremalnymi względem obu zmiennych. Rysunek 1.4 prezentuje przykładowy rozkład posiadający dolny współczynnik zależności ogonów, lecz nie posiadający górnego współczynnika. Kolorami zaznaczone są obserwacje które wpływają na dolny (szare punkty) i górny (czerwone punkty) współczynnik zależności ogonów.

W praktycznych zastosowaniach, jest on jednak trudny do kalibracji z danych - koncept ten działa raczej w drugą stronę: z parametrów skalibrowanego modelu implikowany jest współczynnik zależności ogonów.



Rysunek 1.4. **Współczynnik zależności ogonów.** Rozkład o dolnym współczynniku i braku górnego współczynnika. Obserwacje zaznaczone na szaro wpływają na dolny współczynnik. Obserwacje zaznaczone na czerwono wpływają na górny współczynnik zależności ogonów.

W tym rozdziale zdefiniowaliśmy różne miary pomagające nam zrozumieć zależność zmiennych losowych. Widzimy zatem, że korelacja Pearsona i modele eliptyczne to za mało, aby w pełni uchwycić charakter współzależności. W kolejnym rozdziale podamy teorię *kopuł*, które dadzą nam odpowiednie narzędzia do walki z tym problemem.

---

## Rozdział 2

---

### Modele kopułowe

Zgodnie z drugim filarem Basel II instytucje finansowe zobowiązane są dokonywać regularnych ćwiczeń stress testowych, podczas których ich kondycja finansowa poddawana jest ekstremalnym negatywnym ruchom rynkowym. Ma to na celu postawienie instytucji przed hipotetycznym kryzysowym scenariuszem i ocenę czy instytucja ma zgromadzoną wystarczającą ilość kapitału ekonomicznego aby przetrwać taką sytuację ([The Basel Committee on Banking Supervision, 2010]). Podczas ćwiczeń stress testowych, regulator podaje instytucjom ogólny scenariusz rynkowy w postaci trajektorii pewnych wiodących zmiennych makroekonomicznych. Każda instytucja musi następnie zinterpretować zadany scenariusz i rozszerzyć go na zbiór zmiennych istotnych z punktu widzenia ich biznesu. Standardową praktyką w tym procesie, nazywanym *shock expansion*, wciąż są modele ekonometryczne, wynikiem których są w większości pojedyncze trajektorie. [Hasan et al., 2019]

Podejście to ma istotną wadę: nie jesteśmy w nim w stanie sensownie oszacować prawdopodobieństwa wystąpienia akurat takiej realizacji *shock expansion*, ponieważ wynikiem są jedynie pojedyncze trajektorie. Nowym kierunkiem w procesie shock expansion zaczyna być natomiast tzw. probabilistic stress testing (np. [Aste, 2021]). Ideą jest tu zamodelowanie wielowymiarowego systemu zmiennych makroekonomicznych i rynkowych, w sposób pozwalający zaaplikowanie rynkowej narracji regulatora jako zbioru warunkującego ten system. Umożliwia to odzyskanie rozkładów warunkowych dla innych komponentów systemu, w szczególności dla tych które są potrzebne jako wynik *shock expansion*.

[Aste, 2021] w swojej pracy bada potencjalne zastosowanie rozkładów eliptycznych, wprowadzonych w rozdziale 1.1 jako jednego, wielowymiarowego modelu wyżej opisanego systemu. Wyniki które otrzymuje wskazują, że mimo iż rozkłady eliptyczne dają intuicyjne wyniki co do ogólnego kierunku rozwoju warunkowanych rozkładów, to nie są wystarczająco elastyczne aby poprawnie uchwycić wszystkie cechy systemu. Jako tego powód, Aste wymienia *symetrię* modelu, która przejawia się w konieczności wy-

boru tych samych rodzin rozkładów brzegowych i jest implikowana użyciem rozkładów eliptycznych.

Powyższy przykład to jeden z długiego szeregu który ilustruje, że praktyczne problemy wymagają dowolności w wyborze rozkładów brzegowych (wiele innych interesujących przykładów podają [Cherubini et al., 2004], czy [Cherubini et al., 2012]). Dlatego mimo, że istnieje wiele matematycznie poprawnych rozszerzeń zmiennych losowych z  $d = 1$  do  $d > 2$  (jak wielowymiarowy rozkład normalny, wielowymiarowy rozkład t, wielowymiarowy rozkład gamma, etc.), to nie cieszą się one dużym zastosowaniem w praktyce. Odpowiedzią na to ograniczenie są kopuły - modele wielowymiarowych zmiennych losowych, pozwalające na oddzielenie wpływu rozkładów brzegowych od wpływu struktury zależności na cały system.

## 2.1. Dwuwymiarowe kopuły

### 2.1.1. Wprowadzenie i definicja

Teorię kopuł zapoczątkował Abe Sklar w [Sklar, 1959], podając następujące twierdzenie:

**Twierdzenie 2.1** (Twierdzenie Sklara). *Niech  $X_1, X_2, \dots, X_d$  będą zmiennymi losowymi ciągłymi, o dystrybuantach  $F_1, \dots, F_d$ , i rozkładzie łącznym z dystrybuantą  $F$ . Wtedy istnieje unikalna kopuła  $C$ , taka że dla wszystkich  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^n$ :*

$$F(x_1, \dots, x_d) = C(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)). \quad (2.1)$$

*Zachodzi również twierdzenie odwrotne: Mając dowolne dystrybuanty  $F_1, \dots, F_d$  i kopułę  $C$ , funkcja  $F$  zdefiniowana według 2.1 jest d-wymiarową dystrybuantą, o rozkładach brzegowych  $F_1, \dots, F_d$ .*

Twierdzenie 2.1 przede wszystkim podaje więc algorytm postępowania mówiący w jaki sposób otrzymać wielowymiarowy rozkład o dowolnie wybranych, potencjalnie różnych rozkładach brzegowych. Dodatkowo, Sklar stwierdza istnienie pewnego obiektu, nazwanego kopułą/funkcją łączającą (łac. *copulae*: łączyć) który jest jednoznacznie zdefiniowany dla dowolnego ciągłego rozkładu wielowymiarowego, w taki sposób, że rozkład łączny da się przedstawić jako tę funkcję zaaplikowaną do rozkładów brzegowych.

Oczywistym jest, że nie wszystkie wielowymiarowe funkcje mogą pełnić taką rolę. Rozważymy więc jakie warunki musi spełniać  $C$  z twierdzenia 2.1, aby mogła być kopułą.

**Definicja 2.2** (Grounded function). *Rozważmy  $A_1$  i  $A_2$  - dwa niepuste podzbiory  $\mathbb{R}$ , oraz funkcję  $G: A_1 \times A_2 \mapsto \mathbb{R}$ . Niech  $a_i$  oznacza najmniejszy element  $A_i$ , dla  $i = 1, 2$ . Funkcję  $G$  będziemy nazywać uziemioną (eng. grounded), jeśli dla każdej pary  $(v, z)$  z  $A_1 \times A_2$ ,*

$$G(a_1, z) = 0 = G(v, a_2). \quad (2.2)$$

**Definicja 2.3** (2-increasing function).  $G: A_1 \times A_2 \mapsto \mathbb{R}$  nazywamy dwu-rosnącą (eng. 2-increasing), jeśli dla każdego prostokąta  $[v_1, v_2] \times [z_1, z_2]$  ( $v_1 \leq v_2, z_1 \leq z_2$ ) którego wierzchołki leżą w  $A_1 \times A_2$  mamy

$$G(v_2, z_2) - G(v_2, z_1) - G(v_1, z_2) + G(v_1, z_1) \geq 0. \quad (2.3)$$

Definicje 2.2 oraz 2.3 pozwalają na poprawne zdefiniowanie kopuły:

**Definicja 2.4** (Dwuwymiarowa kopuła). Dwuwymiarową kopułę  $C$  nazwiemy funkcję rzeczywistą zdefiniowaną na kwadracie jednostkowym:

$$C: [0, 1] \times [0, 1] \mapsto \mathbb{R},$$

o następujących właściwościach:

- uziemiona ( $C(v, 0) = 0 = C(0, z)$ )
- dwu-rosnąca
- $C(v, 1) = v$  oraz  $C(1, z) = z$  dla wszystkich  $(v, z) \in [0, 1] \times [0, 1]$ .

Aby zrozumieć czym kopuła tak naprawdę jest warto wrócić do twierdzenia 2.1. Równość 2.1 implikuje, że kopuła musi być dystrybuantą pewnego wielowymiarowego rozkładu. Definicja kopuły w 2.4 mówi natomiast, że ta dystrybuanta jest zdefiniowana na *kwadracie jednostkowym*. Kopuła jest więc niczym innym jak dystrybuantą wielowymiarowego rozkładu jednostajnego. Istotnie: można pokazać, że argumenty kopuli w równaniu 2.1 mają rozkład jednostajny, co udowadniamy poniżej i ilustrujemy na rysunku 2.1.

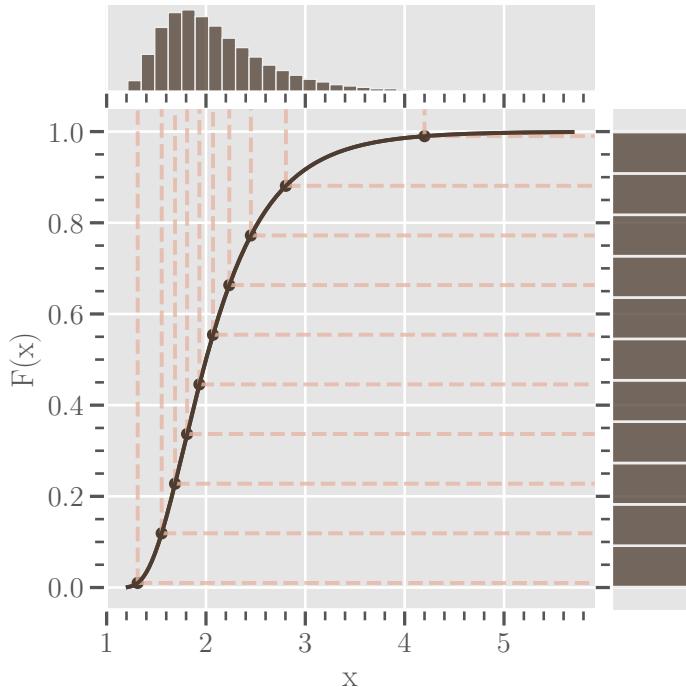
**Definicja 2.5** (Probability integral transform). Jeśli  $X \sim F$  jest ciągłą zmienną losową, a  $x$  jest jej realizacją, to transformację  $u := F(x)$  nazywamy probability integral transform (PIT) w punkcie  $x$ .

**Twierdzenie 2.6** (Probability integral transform). Jeśli  $X \sim F$  jest ciągłą zmienną losową, to  $U := F(X)$  ma rozkład jednostajny.

Dowód.

$$P(U \leq u) = P(F(X) \leq u) = P(X \leq F^{-1}(u)) = F(F^{-1}(u)) = u.$$

□



Rysunek 2.1. **Probability Integral Transform.** Ilustracja działania PIT. Zmienna losowa z rozkładu lognormalnego  $\mathcal{LN}(0.5, 1)$  (pozioma osł) przekształcana jest przez własną dystrybuantę do rozkładu jednostajnego  $\mathcal{U}(0, 1)$  (pionowa osł).

Wróćmy na chwilę do oryginalnego pytania, czyli modelowania wielowymiarowych zmiennych losowych. Na początku rozdziału zdefiniowaliśmy kopułę jako funkcję spełniającą równanie 2.1 z twierdzenia Sklara, czyli:

$$F(x_1, \dots, x_d) = C(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)).$$

Prawą stronę równania stanowią wyizolowane rozkłady brzegowe, oraz pewna funkcja  $C$ , postać której jest kompletnie od nich niezależna. Lewa strona równania, to natomiast rozkład łączny pewnej zmiennej losowej. Jeśli zastanowimy się co wpływa na charakter rozkładu łącznego zmiennej losowej, dojdziemy do wniosku, że istnieją dwa komponenty: zachowanie rozkładów brzegowych, oraz ich współzależności. Biorąc znów pod uwagę prawą stronę równania, kopuła musi więc odpowiadać za współzależności między rozkładami brzegowymi.

Istotnie, kopuły pozwalają na rozdzielenie problemu modelowania rozkładu łącznego, na modelowanie osobno rozkładów brzegowych, a osobno struktury ich współzależności ([Sklar, 1959], [Joe, 1997]). Ta pozorna prostota tworzenia wielowymiarowych modeli przyczyniła się do szybkiej ich popularyzacji, ale i przyniosła ze sobą duże ryzyko modelu. Najbardziej znanym tego przykładem jest zapewne fiasko modeli wyceniających produkty typu CDO ([Li, 1999]), które niedoszacowywały nasilenia korelacji bankructw wewnętrz struktury tego kontraktu.

Zauważamy zatem dualizm kopuł - można patrzeć na nie zarówno jak na funkcje łączące ze sobą dowolne rozkłady brzegowe w spójny rozkład łączny, lub też jak na

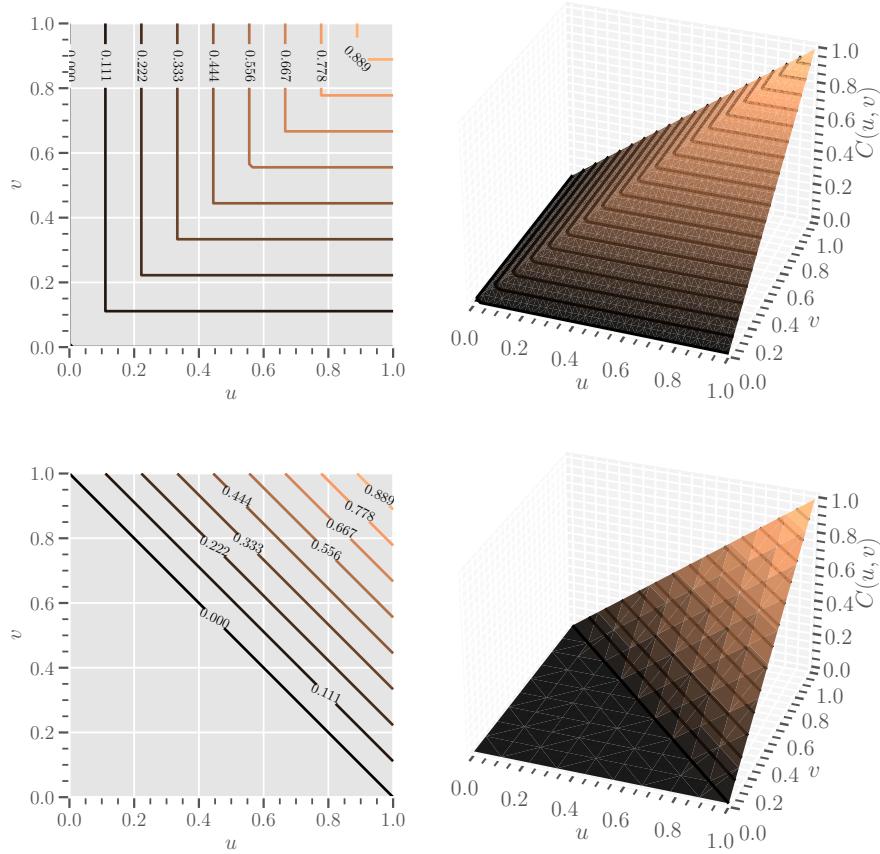
dystrybuanty wielowymiarowych rozkładów jednostajnych.

### 2.1.2. Probabilistyczna interpretacja

Przyjrzymy się więc jednej stronie powyższego dualizmu i przeanalizujmy kopuły jako struktury zależności.

**Definicja 2.7** (Kopuła minimum). *Dwuwymiarowa kopuła minimum  $C^-$  to kopuła zadana wzorem  $C^-(u, v) = \max(u + v - 1, 0)$ .*

**Definicja 2.8** (Kopuła maximum). *Dwuwymiarowa kopuła maksimum  $C^+$ , to kopuła zadana wzorem  $C^+(u, v) = \min(u, v)$ .*



Rysunek 2.2. **Kopuły minimum i maksimum.** Kontury (po lewej) i dystrybuanty (po prawej) kopuł: maximum (górný panel) i minimum (dolny panel)

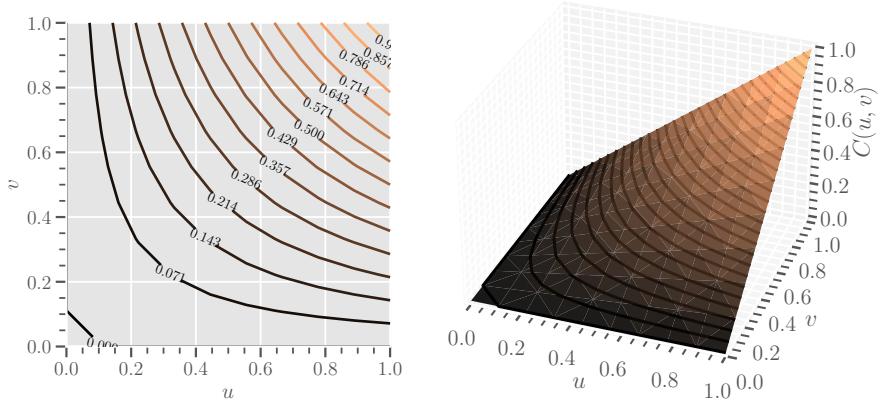
Kopuły minimum i maximum stanowią horyzont osiągalnych kopuł, ponieważ jak mówi twierdzenie 2.9, są one ograniczeniem dolnym i górnym dla dowolnej innej kopuły. Ich powierzchnie i kontury przedstawia rysunek 2.2.

**Twierdzenie 2.9** (Fréchet-Hoeffding bounds). *Niech  $C$  będzie 2-wymiarową kopułą. Wtedy dla każdego  $(u, v) \in [0, 1]^2$  zachodzi*

$$C^-(u, v) \leq C(u, v) \leq C^+(u, v).$$

Twierdzenie to, choć z pozoru teoretyczne, ciągnie za sobą bardzo praktyczne konsekwencje: pozwala otrzymać niezależne od modelu ograniczenia górne i dolne na dowolną kopułę. [Cherubini et al., 2004] pokazuje przykład, gdzie twierdzenie Frécheta-Hoeffdinga pozwala na uzyskanie dolnego i górnego ograniczenia na pewne statystyki modelu, jak np. łączne prawdopodobieństwo bankructwa dwóch firm w strukturalnym modelu Mertona, czy cena opcji binarnej na dwa aktywa.

**Definicja 2.10** (Kopuła produktowa). *Dwuwymiarowa kopuła produktowa  $C^\perp$  to kopuła zadana wzorem  $C^\perp(u, v) = uv$ .*



Rysunek 2.3. **Kopuła produktowa.** Kontur (po lewej) i dystrybuanta (po prawej).

Kopuła produktowa jest trzecim istotnym punktem odniesienia w świecie kopuł, ponieważ posiada pewną unikalną właściwość. Z jednej strony z definicji kopuły mamy:

$$C(u, v) = P(U \leq u, V \leq v) \quad (2.4)$$

Z drugiej jednak strony, wiemy że  $U$  i  $V$  mają rozkłady jednostajne - więc:

$$F_U(u) = P(U \leq u) = u, \text{ oraz } F_V(v) = P(V \leq v) = v. \quad (2.5)$$

Z równań 2.4 i 2.5, dla przypadku kopuły produktowej mamy zatem:

$$P(U \leq u, V \leq v) \equiv C^\perp(u, v) = uv = P(U \leq u)P(V \leq v). \quad (2.6)$$

Równanie 2.6 mówi nam, że zmienne losowe  $V$  i  $U$  są od siebie niezależne. Model kopuły produktowej, implikuje więc niezależność jednostajnych rozkładów brzegowych. Co więcej, uzupełniając opis kopuł minimum i maksimum - te z kolei odpowiadają współmonotonicznej i przeciwnomonotonicznej zależności jednostajnych rozkładów brzegowych. Rodzinę kopuł zawierającą w sobie  $C^-$ ,  $C^\perp$ , oraz  $C^+$  nazywać będziemy wyczerpującą (eng. *comprehensive*). Widzimy zatem, że kopuły potrafią modelować

pełne spektrum możliwych zależności: od współmonotonicznych, przez niezależne, aż po przeciwnomonotoniczne.

**Własność 2.11** ( $\rho$  Spearmana i  $\tau$  Kendalla). *Dla  $X$  i  $Y$ : ciągłych zmiennych losowych o kopule  $C$  możemy przedstawić  $\tau$  Kendalla jako:*

$$\tau = 4 \int \int_{[0,1]^2} C(u, v) dC(u, v) - 1. \quad (2.7)$$

*Współczynnik korelacji Spearmana  $\rho$  można przedstawić natomiast w postaci:*

$$\rho = 12 \int \int_{[0,1]^2} uv dC(u, v) - 3. \quad (2.8)$$

Przypomnijmy, że w rozdziale 1.3 połączylismy współ- i przeciwnomonotoniczność z miarami zgodności. Istotnie, bezpośrednio ze wzorów 2.7 i 2.8 otrzymujemy teraz dla  $C^+$ :  $\tau = 1$  oraz  $\rho = 1$ , dla  $C^\perp$ :  $\tau = 0$  i  $\rho = 0$ , natomiast dla  $C^-$  mamy  $\tau = -1$  i  $\rho = -1$ . Wzory z własności 2.11 mają jednak głębsze znaczenie: zadają bijekcję (niezależną od rozkładów brzegowych) między miarami zgodności a konkretną kopułą. Z tego powodu, estymacja  $\tau$  jest równoważna estymacji parametrów kopuły, co jest wykorzystywane do kalibracji.

Podobnie jest ze współczynnikami zależności ogonów, wprowadzonymi w rozdziale 1.3. Wprost z definicji kopuły wynika, że można je przedstawić używając jedynie kopuły:

**Własność 2.12** (Zależność ogonów). *Górny współczynnik zależności ogonów ( $X_1, X_2$ ) o rozkładach brzegowych  $F_1$  i  $F_2$  i kopuli  $C$  możemy przedstawić jako:*

$$\lambda^u = \lim_{t \rightarrow 1^-} \mathbb{P}[X_2 > F_2^{-1}(t) | X_1 > F_1^{-1}(t)] = \lim_{t \rightarrow 1^-} \frac{1 - 2t + C(t, t)}{1 - t}.$$

*Dolnym współczynnik możemy przedstawić natomiast w postaci:*

$$\lambda^l = \lim_{t \rightarrow 0^+} \mathbb{P}[X_2 \leq F_2^{-1}(t) | X_1 \leq F_1^{-1}(t)] = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{C(t, t)}{t}.$$

### 2.1.3. Popularne kopuły i ich własności

Rozdział 2.1.2 pokazał, że kopuły można intuicyjnie rozumieć jako modele zależności. W tej sekcji spojrzymy na nie z dualnej perspektywy, jako na dystrybuanty, co pozwoli nam zdefiniować użyteczne narzędzia do analizy charakteru tej zależności.

**Definicja 2.13** (Gęstość kopuły). *Niech  $C$  będzie  $d$ -wymiarową (jednostajnie ciągłą) kopułą. Gęstością tej kopuły nazywamy funkcję*

$$c(u_1, \dots, u_d) = \frac{\partial^d}{\partial u_1 \dots \partial u_d} C(u_1, \dots, u_d). \quad (2.9)$$

Widzimy, że równanie 2.9 jest jedynie przeniesieniem terminu gęstości wielowymiarowego rozkładu na grunt kopuł. Zanim zaczniemy wizualizować gęstości konkretnych kopuł, warto wspomnieć, że Sklar w [Sklar, 1959] podaje również alternatywną wersję swojego twierdzenia o istnieniu kopuły, tym razem w języku gęstości. Sens i zastosowania twierdzenia pozostają takie same jak dla twierdzenia 2.1.

**Twierdzenie 2.14** (Twierdzenie Sklara: gęstość kopuły). *Niech  $X$  będzie  $d$ -wymiarowym wektorem losowym o dystrybuancie rozkładu łącznego  $F$ , oraz rozkładami brzegowymi  $F_i$ ,  $i = 1, \dots, d$ . Wtedy rozkład łączny może być wyrażony jako*

$$F(x_1, \dots, x_d) = C(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)),$$

*lub równoważnie w terminach gęstości poprzez:*

$$f(x_1, \dots, x_d) = c(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)) \cdot f_1(x_1) \dots f_d(x_d),$$

*dla pewnej  $d$ -wymiarowej kopuły  $C$ , o gęstości  $c$ . Dla rozkładów bezwzględnie ciągłych, kopuła  $C$  jest jednoznacznie określona.*

*Zachodzi również twierdzenie odwrotne: kopuła związana z wielowymiarowym rozkładem  $F$  o rozkładach brzegowych  $F_1, \dots, F_d$  może być wyrażona jako:*

$$C(u_1, \dots, u_d) = F(F_1^{-1}(u_1), \dots, F_d^{-1}(u_d)),$$

*a jej gęstość wyraża się poprzez:*

$$c(u_1, \dots, u_d) = \frac{f(F_1^{-1}(u_1), \dots, F_d^{-1}(u_d))}{f_1(F_1^{-1}(u_1)) \dots f_d(F_d^{-1}(u_d))}$$

Resztę rozdziału stanowić będzie omówienie różnych rodzin kopuł o istotnych zastosowaniach w praktyce. Będziemy prezentować ich gęstości, ponieważ w intuicyjny sposób przedstawiają one mapę osłabień i nasileń współzależności dla konkretnych kopuł. Informatywne w tym względzie są ich wykresy konturowe, przedstawiające izohipsy powierzchni gęstości. Standardowo przedstawia się je w naturalnej skali kopuły, tzn. na kwadracie jednostkowym wizualizuje się bezpośrednio gęstość kopuły:

$$c(u, v), \text{ dla } (u, v) \in [0, 1]^2.$$

Pomocna jest jednak również wizualizacja w skali brzegowo-znormalizowanej, czyli po dokonaniu transformacji przez dystrybuantę  $\Phi$  i gęstość  $\phi$  standardowego rozkładu normalnego:

$$g(x, y) = c(\Phi(x), \Phi(y))\phi(x)\phi(y), \text{ dla } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Powyższa transformacja nie wizualizuje już gęstości kopuły  $c$ , ale raczej gęstość rozkładu wielowymiarowego  $g$ , który powstałby gdybyśmy kopułę  $c$  połączyli zmienne ze standardowego rozkładu normalnego, zgodnie z twierdzeniem 2.1. Ta reprezentacja jest bardzo intuicyjna, ponieważ podstawowe kursy statystyki przyzwyczajają ludzkie oko do utożsamiania silnej/słabej korelacji z wydłużonymi/okrągłymi elipsami dwóchzonymi przez gęstość wielowymiarowego rozkładu normalnego. Reprezentacja w skali

brzegowo-znormalizowanej jest intuicyjna, ponieważ dla kopuły gaussowskiej pokazuje dokładnie te same, znane elipsy. Natomiast w przypadku innych kopuł, obserwujemy rozbieżność izohips od eliptycznego kształtu co daje się łatwo zinterpretować.

W praktyce istnieją trzy główne nurty tworzenia kopuł. Można wykorzystać do tego twierdzenie Sklara 2.1 jako twierdzenie konstrukcyjne, tj. wziąć pewien istniejący, znany rozkład wielowymiarowy, zaaplikować *PIT* (2.5) do jego rozkładów brzegowych i odzyskać w ten sposób  $C$  z twierdzenia Sklara. Drugą metodą konstrukcji kopuł jest zdefiniowanie ich przez tzw. *generator* - powstają w ten sposób kopuły archimedejskie. Trzeci sposób natomiast to rozszerzenie *extreme-value theory* z jedego do wielu wymiarów, co skutkuje powstaniem kopuł typu *extreme-value*.

### Rodzina kopuł eliptycznych

Kopuły eliptyczne są przykładem konstrukcji kopuł poprzez bezpośrednią aplikację twierdzenia Sklara 2.1 do rozkładów eliptycznych, zdefiniowanych na początku rozdziału 1.2. Można więc tę konstrukcję rozumieć jako implikowanie struktury zależności z wielowymiarowych rozkładów, poprzez wyeliminowanie wpływu rozkładów brzegowych. W tej rodzinie zobaczymy przede wszystkim kopuły reprezentujące zależności „implikowane” z wielowymiarowego rozkładu normalnego, czy wielowymiarowego rozkładu  $t$ .

**Definicja 2.15** (Kopuła produktowa). *Kopuła produktowa to kopuła o gęstości:*

$$c(u_1, u_2) = 1.$$

Dystrybuantę tej kopuły przedstawiliśmy wcześniej na rysunku 2.3, jednak w tym rozdziale pokazujemy ją w nieco innym świetle. Jednakowa gęstość widoczna na rysunku 2.4 w każdym punkcie kwadratu jednostkowego mówi, że każda para  $(u, v) \in [0, 1]^2$  ma jednakową szansę na wystąpienie, więc nie ma żadnej zależności między  $U$  a  $V$ . Jest to zgodne z uwagą z rozdziału 2.1.2, mówiącą że ta kopuła odpowiada niezależnemu połączeniu zmiennych losowych. Zwróćmy uwagę na prawy dolny panel rysunku 2.4, który prezentuje izohipsy w skali brzegowo-znormalizowanej. Widzimy koncentryczne okręgi, kojarzące się z wielowymiarowym rozkładem normalnym o korelacji 0. Istotnie, kopuła produktowa reprezentuje strukturę zależności w tym wielowymiarowym rozkładzie.

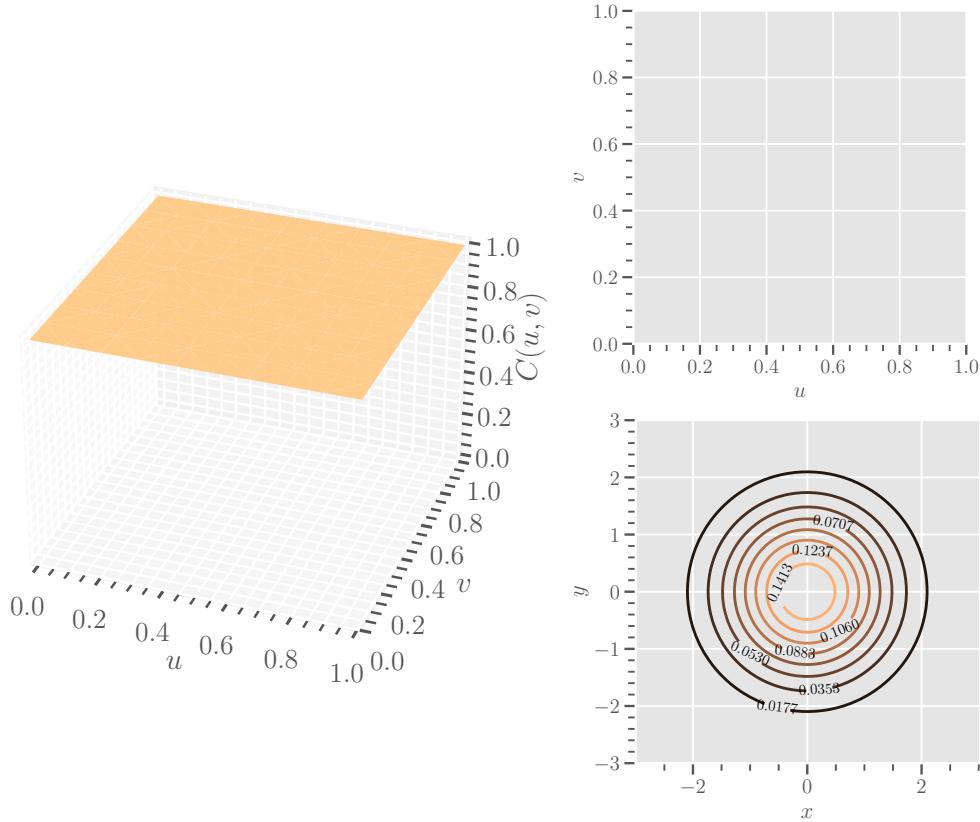
**Definicja 2.16** (Kopuła gaussowska). *Kopuła gaussowska o korelacji  $\rho$ , to kopuła zadana wzorem:*

$$C(u_1, u_2; \rho) = \Phi_2(\Phi^{-1}(u_1), \Phi^{-1}(u_2); \rho),$$

gdzie  $\Phi$  oraz  $\phi$  to odpowiednio dystrybuanta i gęstość standardowego rozkładu normalnego. Gęstość kopuły gaussowskiej zadana jest wzorem:

$$c(u_1, u_2; \rho) = \frac{1}{\phi(x_1)\phi(x_2)} \frac{1}{\sqrt{1 - \rho^2}} \exp \left[ -\frac{\rho^2(x_1^2 + x_2^2) - 2\rho x_1 x_2}{2(1 - \rho^2)} \right],$$

gdzie  $x_i := \Phi^{-1}(u_i)$ .



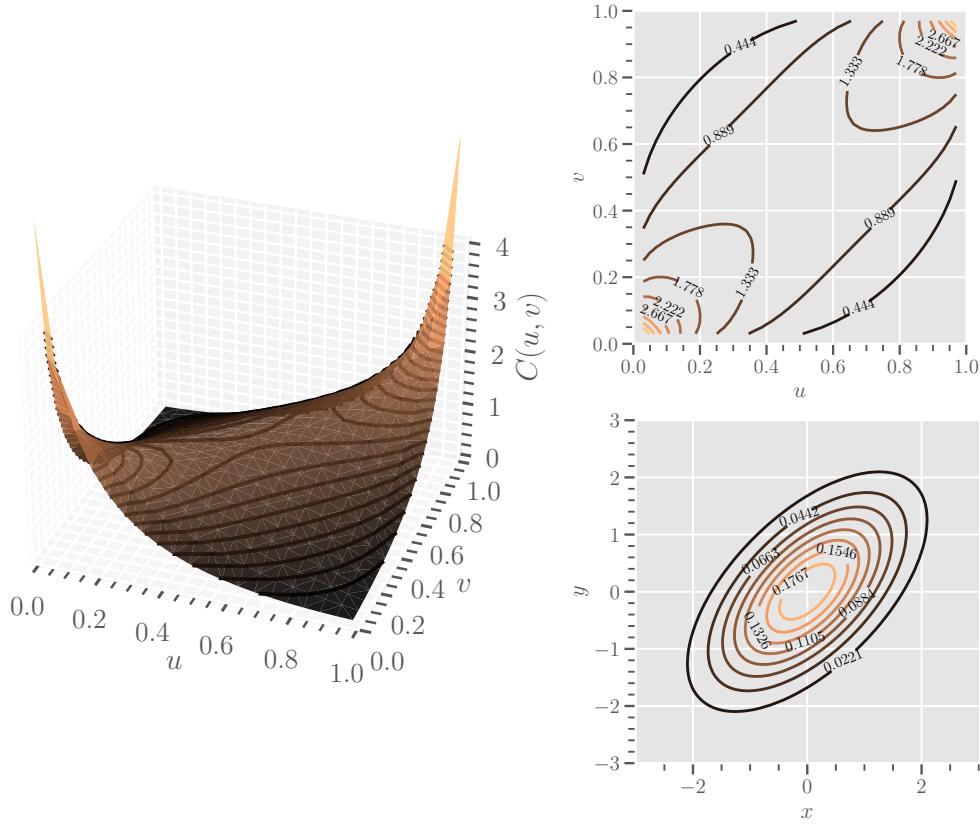
Rysunek 2.4. **Kopuła produktowa.** Powierzchnia gęstości (lewy panel), jej kontur w skali kopuły (prawy górny panel) i kontur w skali brzegowo-znormalizowanej (prawy dolny panel).

Kopuła gaussowska modeluje strukturę zależności implikowaną przez wielowymiarowy rozkład normalny, tj. wielowymiarowy rozkład normalny jest równoważny modelowi o normalnych rozkładach brzegowych, połączonych kopułą gaussowską. Rodzina kopuł gaussowskich jest wyczerpująca. Przykładowa powierzchnia gęstości oraz kontury kopuły gaussowskiej przedstawione są na rysunku 2.5.

**Definicja 2.17** (Kopuła studenta). *Kopuła studenta to jednoparametryczna kopuła o  $\nu$  stopniach swobody i korelacji  $\rho$  zadana jest gęstością:*

$$C(u_1, u_2; \nu, \rho) = \frac{t(T_\nu^{-1}(v_1), T_\nu^{-1}(v_2); \nu, \rho)}{t_\nu(T_\nu^{-1}(v_1))t_\nu(T_\nu^{-1}(v_2))}.$$

Kopuła studenta, podobnie do gaussowskiej, jest implikowana z rozkładu eliptycznego studenta. Oznacza to, że wielowymiarowy rozkład studenta jest równoważny modelowi o rozkładach brzegowych  $t$  połączonych kopułą studenta. Wraz z rosnącą ilością stopni swobody kopuła studenta zbiega do gaussowskiej. Ta rodzina nie jest jednak wyczerpująca, ponieważ przy  $\rho = 0$ , dla żadnej skończonej liczby stopni swobody nie zawiera w sobie  $C^\perp$ .



Rysunek 2.5. **Kopuła gaussowska**,  $\rho = 0.6$ , Powierzchnia gęstości (lewy panel), jej kontur w skali kopuły (prawy górny panel) i kontur w skali brzegowo-znormalizowanej (prawy dolny panel).

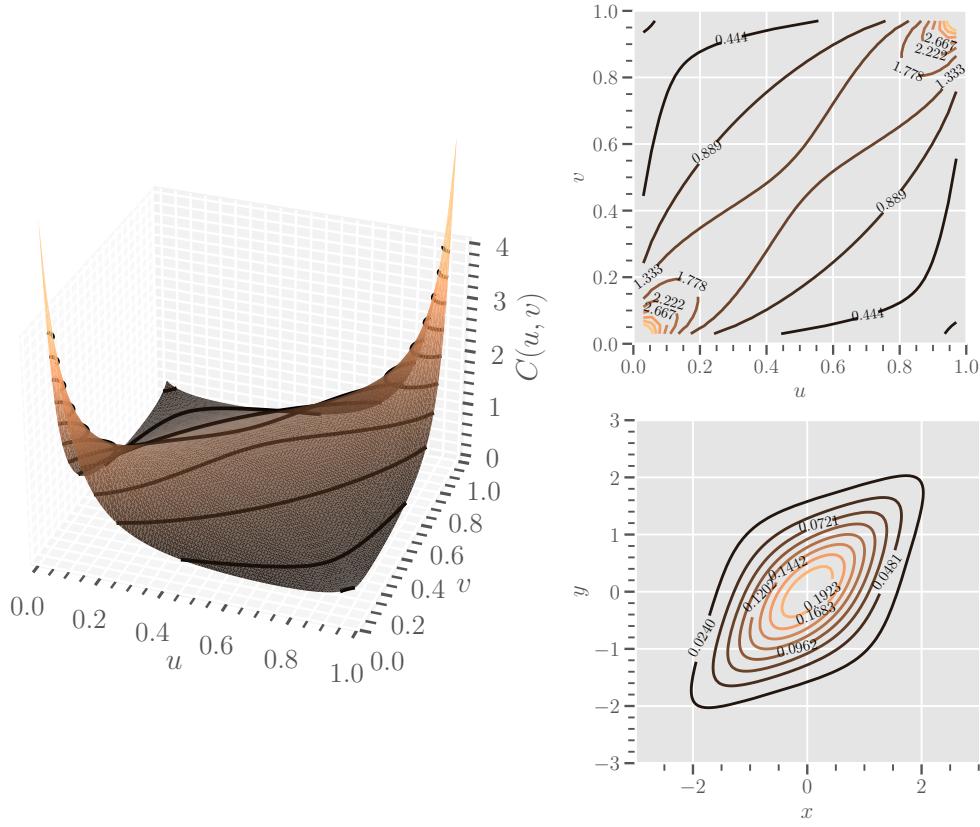
Kopuły eliptyczne cieszą się dużą popularnością w instytucjach finansowych, ponieważ mają swoje naturalne  $d$ -wymiarowe rozszerzenia. Kopuły uważane są mimo wszystko za skomplikowane modele, i w obliczu szczególnych regulacji nakładanych na wewnętrzne modele (np. w podejściu AMA do modelowania ryzyka operacyjnego [The Basel Committee on Banking Supervision, 2010]) dużo łatwiej jest uzasadnić i utrzymać w produkcji model bazujący na kilku intuicyjnych parametrach. Z tego powodu, kopuła  $t$  studenta jest najczęściej wybieraną w praktyce - pozwala bowiem na modelowanie ciężkich ogonów i korelacji, a jednocześnie jest zaledwie dwuparametryczna ([Peters and Shevchenko, 2015]).

### Rodzina kopuł archimedejskich

**Definicja 2.18** (Kopuły archimedejskie). *Niech  $\mathcal{F}$  będzie zbiorem ciągłych, jednostajnie malejących i wypukłych funkcji  $\phi: [0, 1] \mapsto [0, \infty]$ , takich, że  $\phi(1) = 0$ . Wtedy*

$$C(u_1, u_2) = \phi^{[-1]}(\phi(u_1) + \phi(u_2))$$

*jest kopułą. Uściślając, nazwiemy ją kopułą archimedejską o generatorze  $\phi$ . W powyższej definicji, przez  $\phi^{[-1]}$  rozumiemy pseudoodwrotność  $\phi$ , czyli funkcję  $\phi^{[-1]}: [0, \infty] \mapsto [0, 1]$  zadaną przez:*



Rysunek 2.6. **Kopuła studenta**,  $\nu = 3, \rho = 0.5$ : powierzchnia gęstości (lewy panel), jej kontur w skali kopuły (prawy górnny panel) i kontur w skali brzegowo-znormalizowanej (prawy dolny panel).

$$\phi^{[-1]}(t) := \phi^{-1}(t) \mathbb{1}_{\{0 \leq t \leq \phi(0)\}}.$$

Ta rodzina została wprowadzona przez Claytona w [Clayton, 1978] w kontekście modelowania zapadalności na choroby przewlekłe, gdzie posłużyła do opisania zależności w aktuarialnych tabelach średniego dalszego trwania życia. Dziś kopuły archimedejskie wymieniane są pośród najczęściej wykorzystywanych do analizy zależności dwuwymiarowych. W przeciwieństwie do rodziny eliptycznej, kopuły z rodziny archimedejskiej potrafią modelować asymetryczne zależności. Oznacza to, że osiągalne są w nich struktury, w których dolne ogony zmiennych losowych są bardziej od siebie zależne niż ogony prawe i *vice versa*. Najprostsze tego zastosowanie to model zwrotów na rynku akcji, które przejawiają silniejszą korelację w lewym ogonie niż w prawym ([Vaz de Melo Mendes, 2005]).

Ponadto, kopuły archimedejskie pozwalają wyrazić  $\tau$  Kendalla, czy współczynnik zależności ogonów w języku generatora, co powoduje, że są łatwe w estymacji.

**Własność 2.19.** *Dla dwóch zmiennych losowych połączonych kopułą archimedeską o generatorze  $\phi$ , współczynnik  $\tau$  Kendalla ma reprezentację:*

$$\tau = 4 \int_{[0,1]} \frac{\phi(v)}{\phi'(v)} dv + 1.$$

Współczynniki zależności ogonów wyrażają się natomiast przez:

$$\begin{aligned}\lambda^l &= 2 \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\phi'(s)}{\phi(2s)} \\ \lambda^u &= 2 - 2 \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{\phi'(s)}{\phi(2s)}\end{aligned}\tag{2.10}$$

Powyzsze uwagi powodują, że rodzina kopuł archimedejskich jest zazwyczaj wystarczająco dobra dla większości praktycznych zastosowań. Do tej klasy należą m.in. kopuły Claytona, Gumbela czy Franka.

**Definicja 2.20** (Kopuła Claytona). *Kopuła Claytona to kopuła archimedajska o generatorze  $\phi(t; \delta) = \frac{1}{\delta}(t^{-\delta} - 1)$ . Jest ona jednoparametryczną kopułą, wyrażoną poprzez dystrybuantę zadaną wzorem:*

$$C(u_1, u_2; \delta) = (u_1^{-\delta} + u_2^{-\delta} - 1)^{-\frac{1}{\delta}},$$

dla  $\delta \in [-1, 0) \cup (0, \infty)$ .

**Własność 2.21.** *Dla kopuły Claytona o parametrze  $\delta$ , współczynnik Kendall'a wynosi:*

$$\tau = 1 - \frac{1}{\delta}.$$

Współczynniki zależności ogonów wynoszą zaś odpowiednio:

$$\begin{aligned}\lambda^l &= 2^{-\frac{1}{\delta}} \\ \lambda^u &= 0.\end{aligned}\tag{2.11}$$

Kopuła Claytona pozwala modelować niesymetryczne zależności zmiennych losowych. Jest rodziną wyczerpującą, mamy bowiem:  $C(u, v; \delta = 1) = C^\perp$ ,  $C(u, v; \delta = -1) = C^-$ , oraz  $C(u, v; \delta \rightarrow \infty) \rightarrow C^+$ . Rysunek 2.7 przedstawia powierzchnię gęstości i kontury w przypadku  $\delta = 1.2$ . Na rysunku widoczny jest dobrze wpływ istnienia dolnego współczynnika zależności ogonów na kształt konturów i gęstości.

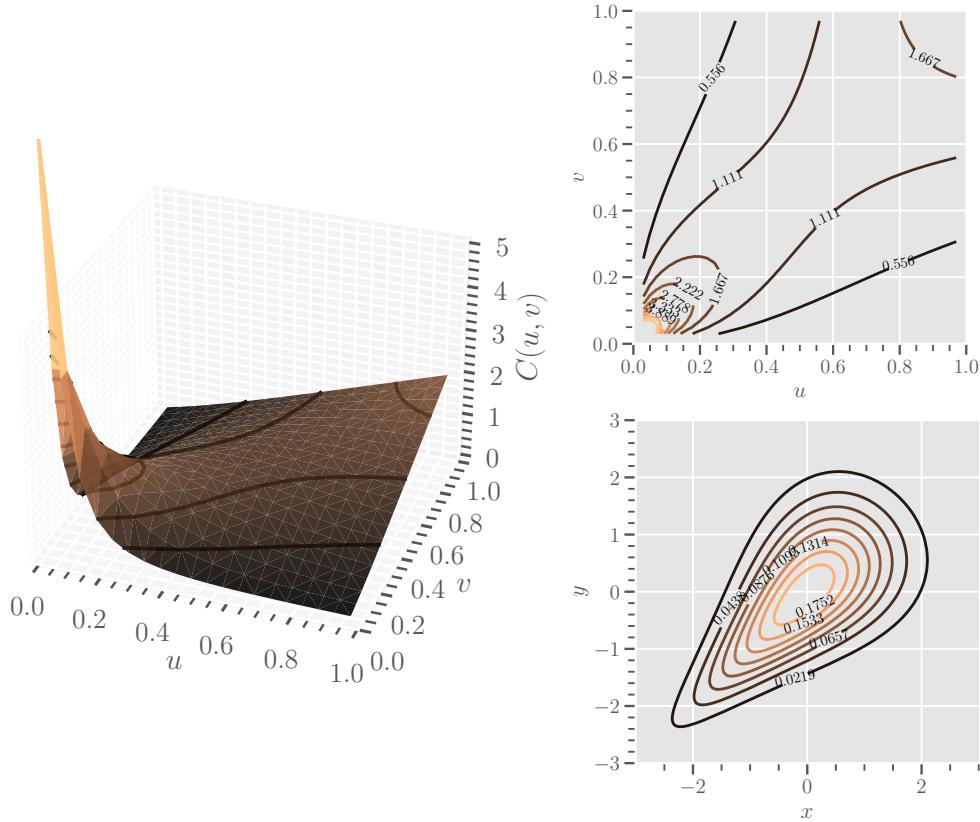
**Definicja 2.22** (Kopuła Gumbela). *Kopuła Gumbela to kopuła archimedajska o generatorze  $\phi(t; \delta) = (-\ln t)^\delta$ . Jest ona jednoparametryczną kopułą, wyrażoną poprzez dystrybuantę zadaną wzorem:*

$$C(u_1, u_2; \delta) = \exp \left[ - [(-\ln u_1)^\delta + (-\ln u_2)^\delta]^{\frac{1}{\delta}} \right],$$

dla  $\delta \geq 1$ .

**Własność 2.23.** *Dla kopuły Gumbela o parametrze  $\delta$ , współczynnik Kendall'a wynosi:*

$$\tau = \frac{\delta}{\delta + 2}.$$



Rysunek 2.7. **Kopuła Claytona**,  $\delta = 1.2$ : powierzchnia gęstości (lewy panel), jej kontur w skali kopyły (prawy górnny panel) i kontur w skali brzegowo-znormalizowanej (prawy dolny panel).

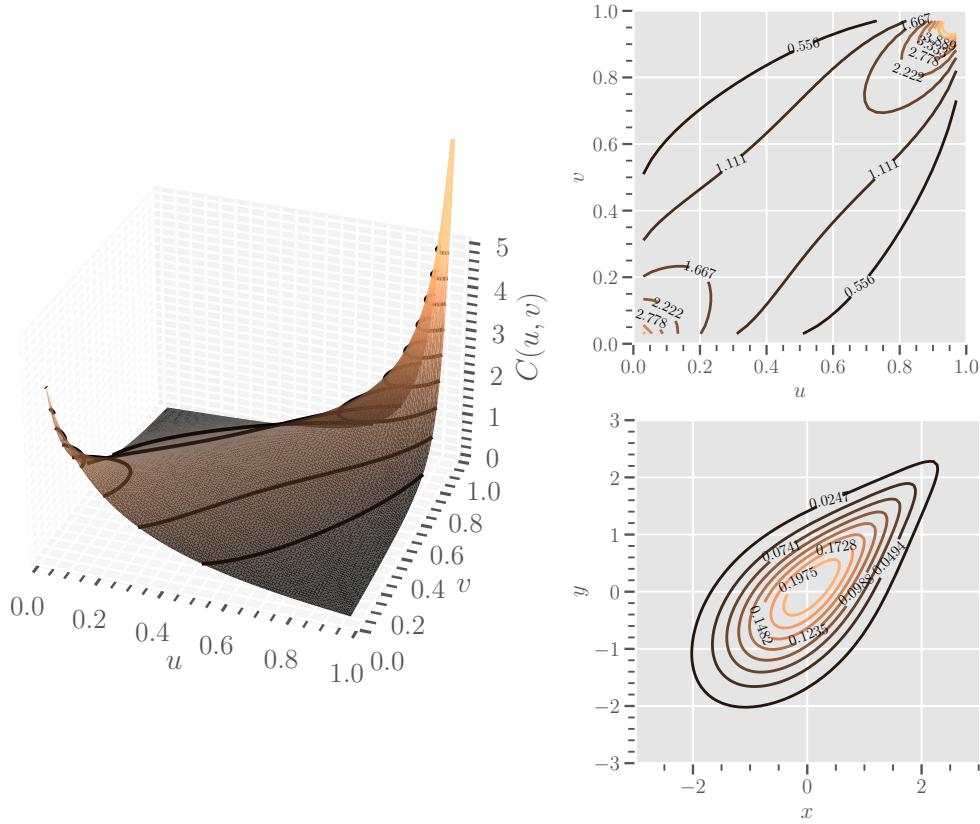
*Współczynniki zależności ogonów wynoszą zaś odpowiednio:*

$$\begin{aligned}\lambda^l &= 0 \\ \lambda^u &= 2 - 2^{\frac{1}{\delta}}.\end{aligned}\tag{2.12}$$

Kopuła Gumbela również pozwala modelować niesymetryczne zależności zmiennych losowych. Rysunek 2.8 przedstawia powierzchnię gęstości i kontury w przypadku  $\delta = 1.8$ , gdzie widzimy powyższą niesymetryczność. Ta rodzina nie jest jednak wyyczerpującą, ponieważ mamy jedynie  $C(u, v; \delta = 1) = C^\perp$ , oraz  $C(u, v; \delta \rightarrow \infty) \rightarrow C^+$ , natomiast kopuła  $C^-$  nie jest częścią tej rodziny.

Kopuły Gumbela mogą więc posługiwać do modelowania jedynie dodatnich zależności, lub w granicznym przypadku niezależności. Nie przeszkodziło to jednak w skutecznej aplikacji tych kopuł do badań klinicznych, gdzie spopularyzował je Hougaard, w [Hougaard, 1986] wykorzystując do testowania hipotez o pozytywnym wpływie leku przeciw guzom na długość życia szczurów w grupie leczenia.

**Definicja 2.24** (Kopuła Franka). *Kopuła Franka to kopuła archimedejska o generatorze  $\phi(t; \delta) = -\ln \frac{\exp(-\alpha t) - 1}{\exp(-\alpha) - 1}$ . Jest ona jednoparametryczną kopułą, wyrażoną poprzez dystrybuantę zadaną wzorem:*



Rysunek 2.8. **Kopuła Gumbela**,  $\delta = 1.8$ : powierzchnia gęstości (lewy panel), jej kontur w skali kopuły (prawy górnny panel) i kontur w skali brzegowo-znormalizowanej (prawy dolny panel).

$$C(u_1, u_2; \delta) = -\frac{1}{\delta} \ln \left[ \frac{1}{1 - e^{-\delta}} \left[ (1 - e^{-\delta}) - (1 - e^{-\delta u_1})(1 - e^{-\delta u_2}) \right] \right],$$

dla  $\delta \in (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$ .

**Własność 2.25.** Dla kopuły Franka o parametrze  $\delta$ , współczynnik Kendalla wynosi:

$$\tau = 1 + 4[D(\delta) - 1]/\delta,$$

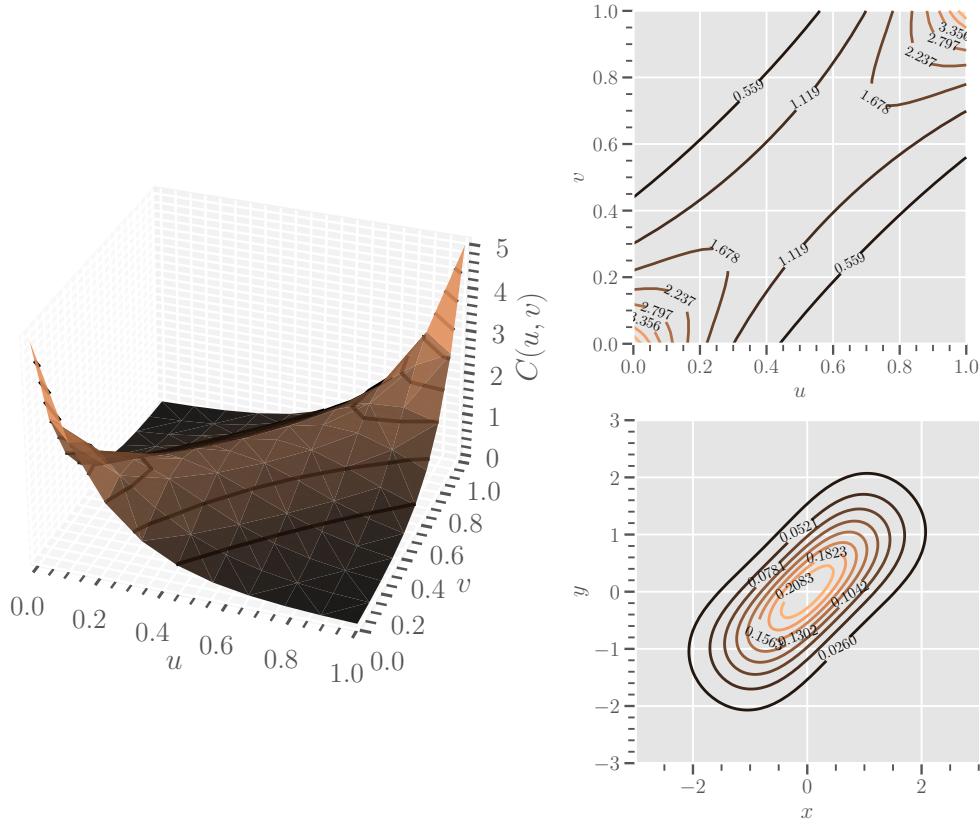
gdzie  $D(\alpha)$  to:

$$D(\alpha) = \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha \frac{t}{\exp(t) - 1} dt.$$

Współczynniki zależności ogonów wynoszą zaś odpowiednio:

$$\begin{aligned} \lambda^l &= 0 \\ \lambda^u &= 0. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Rodzina kopuł Franka jest rodziną wyczerpującą, bowiem  $C(u, v; \delta = 0) = C^\perp$ ,  $C(u, v; \delta \rightarrow \infty) \rightarrow C^+$ , oraz  $C(u, v; \delta \rightarrow -\infty) \rightarrow C^-$ . Kopuła Franka jako jedyna z wymienionych kopuł archimedejskich jest symetryczna. Rysunek 2.9 przedstawia



Rysunek 2.9. **Kopuła Franka**,  $\delta = 5$ : powierzchnia gęstości (lewy panel), jej kontur w skali kątowej (prawy górnny panel) i kontur w skali brzegowo-znormalizowanej (prawy dolny panel).

powierzchnię gęstości i kontury w przypadku  $\delta = 5$ .

Jedno z ciekawych jej zastosowań, przedstawia [Gao et al., 2021]. W swojej pracy Jianwei rozważa problem optymalizacji częstości ładowania pojazdów elektrycznych. Kopuła Franka jest przez niego używana do modelowania zależności między siłą wiatru, a ilością energii z ogniw fotowoltaicznych, co wykorzystuje do wyznaczenia optymalnej strategii ładowania pojazdu, która stabilizuje popyt/podaż na energię w sieci energetycznej, skutkując niższymi kosztami utrzymania pojazdu.

### Rodzina kopuł *extreme-value*

Ostatnią z prezentowanych metod konstrukcji kopuł jest konstrukcja asymptotyczna, poprzez teorię wartości ekstremalnych.

Zakładając, że  $X_1$  i  $X_2$  są dwoma zmiennymi losowymi o rozkładach  $F_1$ ,  $F_2$ , zdefiniujemy kopułę *extreme-value* jako kopułę odpowiadającą za zależność pomiędzy maksimum z  $n$  realizacji  $X_1$  a maksimum z  $n$  realizacji  $X_2$ .

**Definicja 2.26** (Kopuła *extreme-value*). *Dwuwymiarowa kopuła  $C$  nazywana jest kopułą *extreme-value*, jeżeli istnieje dwuwymiarowa kopuła  $C_X$ , taka że dla  $n \rightarrow \infty$  mamy:*

$$[C_X(u_1^{\frac{1}{n}}, u_2^{\frac{1}{n}})]^n \rightarrow C(u_1, u_2) \forall_{(u_1, u_2)} \in [0, 1]^2.$$

Mówimy wówczas, że kopuła  $C_X$  jest w obszarze przyciągania kopuły  $C$ .

To samo można zdefiniować posługując się pojęciem kopuł *max-stabilnych*

**Definicja 2.27** (Kopuła max-stabilna). Dwuwymiarowa kopuła  $C$  nazywana jest kopułą max-stabilną, jeśli spełnia warunek:

$$C(u_1, u_2) = [C(u_1^{\frac{1}{n}}, u_2^{\frac{1}{n}})]^n,$$

Dla każdej liczby całkowitej  $n \geq 1$ , oraz dla każdej pary  $(u_1, u_2) \in [0, 1]^2$ .

**Twierdzenie 2.28.** Dwuwymiarowa kopuła  $C$  jest kopułą extreme-value, tylko i tylko wtedy gdy jest max-stabilna.

Przykładem kopuły *extreme-value* z podanych już wcześniej jest kopuła Gumbela. Inną, nietypową, ale często spotykaną kopułą z tej rodziny jest kopuła Marshalla-Olkina.

**Definicja 2.29** (Kopuła Marshalla-Olkina). Dwuwymiarową kopułę Marshalla-Olkina o parametrach  $m$  i  $n$  nazwiemy kopułę o dystrybuancie:

$$C(u_1, u_2; m, n) = \min[u_1^{1-m}u_2; u_1u_2^{1-n}].$$

Gęstość tej kopuły zadana jest przez:

$$c(u_1, u_2; m, n) = \begin{cases} (1-m)u_1^{-m}, & \text{dla } u_1^m > u_2^n \\ (1-n)u_2^{-n}, & \text{dla } u_1^m < u_2^n \end{cases}$$

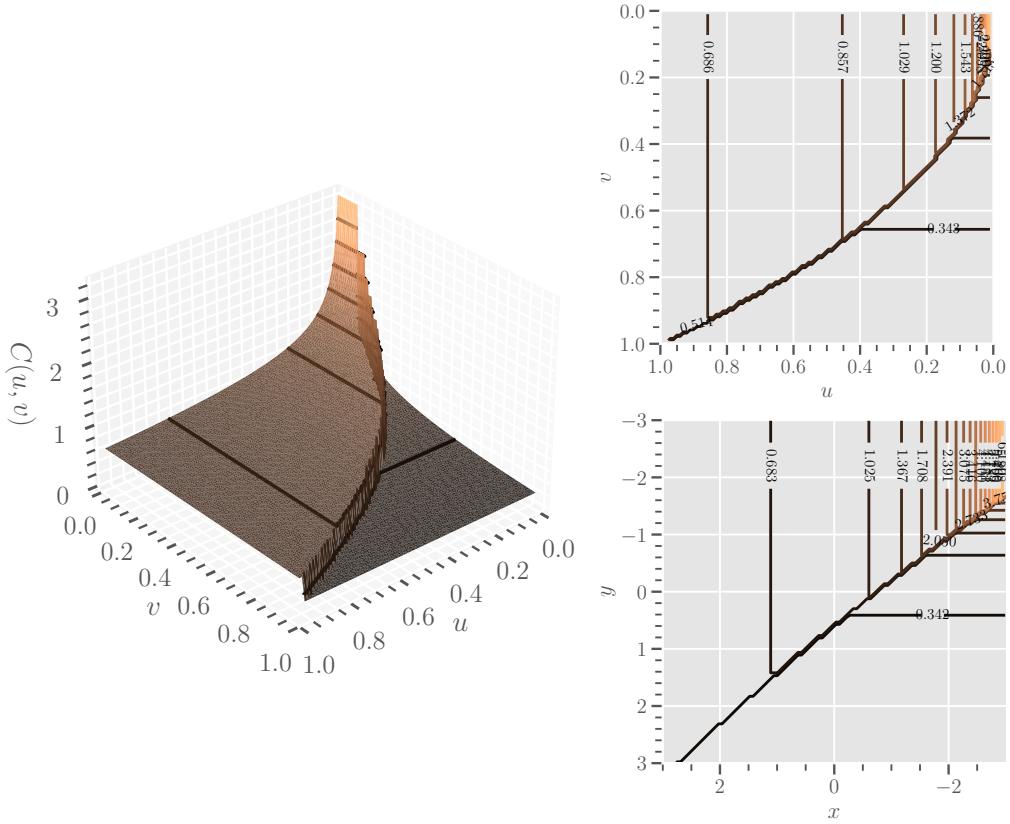
**Własność 2.30.** Dla kopuły Marshalla-Olkina o parametrach  $m, n$ , współczynnik Kendalla wynosi:

$$\tau = \frac{mn}{m - mn + n}.$$

Współczynniki zależności ogonów wynoszą zaś odpowiednio:

$$\begin{aligned} \lambda^l &= 0 \\ \lambda^u &= \min(m, n). \end{aligned} \tag{2.14}$$

Kopuła Marshalla-Olkina jest nietywna, bo posiada część ciągłą, o powyższej gęstości, jak i część singularną wzdłuż krzywej  $u_1^m = u_2^n$ . Ta rodzina nie jest wyczerpująca, ponieważ nie zawiera  $C^-$ . Natomiast dla  $m = 0 \vee n = 0$  mamy  $C^\perp$ , a przy  $m = 1 = n$  dostajemy  $C^+$ . Wizualizację kopuły Marshalla-Olkina można zobaczyć na rysunku 2.10. Kopuły Marshalla-Olkina powstają naturalnie w teorii niezawodności systemów. Rozważając system o wielu komponentach, gdzie awaria dowolnego komponentu powoduje awarię całego systemu, w klasycznym podejściu zakłada się rozkład wykładniczy dla czasu życia każdego z komponentów (z powodu braku pamięci), oraz niezależność między komponentami. W praktyce jednak, czasy do awarii poszczególnych komponentów nie są niezależne. Rozważenie momentu awarii systemu jako moment pierwnej awarii któregoś z jego komponentów prowadzi właśnie do kopuły Marshalla-Olkina [Matus et al., 2019].



Rysunek 2.10. **Kopuła Marshalla-Olkina**,  $m = 0.35, n = 0.75$ : powierzchnia gęstości (lewy panel), kontur w skali kopyły (prawy górnny panel), kontur w skali brzegowo-znormalizowanej (prawy dolny panel).

## 2.2. Vine Copulas

Problemy z którymi spotykamy się w praktyce są nierzadko z natury wielowymiarowe. W rozdziale 3.1 opowiemy o clean dark spreadach, czyli mierze rentowności elektrowni węglowej który wymaga modelowania zależności trzech komponentów (ceny węgla, ceny certyfikatów emisyjnych i ceny prądu). Model LDA dla ryzyka operacyjnego nadmieniony w rozdziale 2.1.3 wymaga segmentacji strat względem przynależności do jednej z kilkunastu/kilkudziesięciu homogenicznych kategorii (ORC) i modelowania zależności między nimi. Natomiast modelowanie zależności komponentów portfela inwestycyjnego może okazać się problemem o wymiarowości rzędu setek.

Widzimy więc, że przekrój zastosowań praktycznych jest bardzo duży i istnieje zapotrzebowanie na wielowymiarowe modele zależności. Dwuwymiarowe kopuły przedstawione w 2.1.3 mają często swoje wielowymiarowe odpowiedniki ([Cherubini et al., 2004], [Kurowicka and Joe, 2010]). Są one jednak stosunkowo mało elastyczne, ponieważ nie pozwalają „dostroić” modelu na poziomie interakcji każdej pary wymiarów zmiennej losowej. W tym rozdziale sięgniemy po modele Vine Copula, które pozwolą bardzo granularnie modelować wielowymiarowe zależności, do stopnia gdzie będziemy w stanie określić zależność między dowolnymi dwoma rozkładami brzegowymi.

### 2.2.1. Pair Copula Constructions

Zaczniemy od przykładu w trzech wymiarach, aby zilustrować czym jest *Pair copula construction* (PCC). Ogólną ideą jest aby wielowymiarowy rozkład zmiennej losowej rozbić na dwuwymiarowe komponenty modelowane za pomocą dwuwymiarowych kopol.

W poniższych rozważaniach przydadzą nam się następujący lemat dotyczący relacji między gęstością kopyły a rozkładami warunkowymi:

**Lemat 2.31.** *Rozkład warunkowy dwuwymiarowej zmiennej losowej można przedstawić w języku kopyły:*

$$f_{1|2}(x_1|x_2) = c_{12}(F_1(x_1), F_2(x_2))f_2(x_2).$$

*Dowód.* Posługując się twierdzeniem Sklara 2.14 mamy:

$$\begin{aligned} f_{1|2}(x_1, x_2) &= \frac{f_{12}(x_1, x_2)}{f_2(x_2)} \\ &= \frac{c_{12}(F_1(x_1), F_2(x_2))f_1(x_1)f_2(x_2)}{f_2(x_2)} \\ &= c_{12}(F_1(x_1), F_2(x_2))f_1(x_1) \end{aligned}$$

□

#### Przykład ilustrujący

Aby zilustrować PCC, rozpatrzmy rozkład 3-wymiarowy o gęstości  $f(x_1, x_2, x_3)$ . Tę gęstość można przedstawić w postaci:

$$f(x_1, x_2, x_3) = f_{3|12}(x_3|x_1, x_2)f_{2|1}(x_2|x_1)f_1(x_1).$$

Celem jest sfaktoryzowanie tego wyrażenia do postaci wykorzystującej co najwyżej dwuwymiarowe kopyły lub jednowymiarowe rozkłady brzegowe. Widzimy, że w tym celu należy rozwinać  $f_{3|12}$  oraz  $f_{2|1}$ .

Korzystając z lematu 2.31 otrzymujemy bezpośrednio  $f_{2|1}$  oraz  $f_{3|1}$  (które przyda się za chwilę) jako:

$$\begin{aligned} f_{1|2}(x_1|x_2) &= c_{12}(F_1(x_1), F_2(x_2))f_2(x_2), \\ f_{3|2}(x_3|x_2) &= c_{32}(F_3(x_3), F_2(x_2))f_2(x_2) \end{aligned}$$

Natomiast w celu otrzymania  $f_{3|12}$  będziemy musieli przejść przez dwuwymiarowy rozkład  $f_{13|2}(x_1, x_3|x_2)$ . Ma on rozkłady brzegowe  $F_{1|2}(x_1|x_2)$  oraz  $F_{3|2}(x_3|x_2)$  i kopyłę warunkową  $c_{13;2}$  - czyli kopyłę rozkładu  $(X_1, X_3)|X_2 = x_2$ . Zaaplikujemy do niego twierdzenie Sklara 2.14:

$$\begin{aligned}
f_{3|12}(x_3|x_1, x_2) &= \frac{f_{13|2}(x_1, x_3|x_2)}{f_{1|2}(x_1|x_2)} \\
&= \frac{c_{13;2}(F_{1|2}(x_1|x_2), F_{3|2}(x_3|x_2); x_2) f_{1|2}(x_1|x_2) f_{3|2}(x_3|x_2)}{f_{1|2}(x_1|x_2)} \\
&= c_{13;2}(F_{1|2}(x_1|x_2), F_{3|2}(x_3|x_2); x_2) f_{3|2}(x_3|x_2) \\
&= c_{13;2}(F_{1|2}(x_1|x_2), F_{3|2}(x_3|x_2); x_2) c_{32}(F_3(x_3), F_2(x_2)) f_2(x_2)
\end{aligned}$$

Finalnie otrzymujemy dekompozycję  $f(x_1, x_2, x_3)$  do postaci:

$$\begin{aligned}
f(x_1, x_2, x_3) &= c_{13;2}(F_{1|2}(x_1|x_2), F_{3|2}(x_3|x_2); x_2) \cdot \\
&\quad c_{23}(F_2(x_2), F_3(x_3)) \cdot c_{12}(F_1(x_1), F_2(x_2)) \cdot \\
&\quad f_3(x_3) f_2(x_2) f_1(x_1).
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Powyższe czynniki są jedynie dwuwymiarowymi kopołami oraz rozkładami warunkowymi lub brzegowymi. Taką dekompozycję nazwiemy Pair Copula Construction (PCC). Zaletą takiej reprezentacji nad wielowymiarową kopołą jest to, że ma większą liczbę niżej-wymiarowych komponentów, przez co pozwala lepiej dopasować model do danych. Realne dane rzadko mają regularną strukturę zależności która może być dobrze opisana jedną, wielowymiarową kopołą ([Czado, 2019]), dlatego też PCC radzi sobie z tym lepiej.

Zwróćmy jednak uwagę na fakt, że nie jest to jedyna PCC która opisuje rozkład  $f(x_1, x_2, x_3)$ . Istnieją poniższe, równoważne reprezentacje - do których wrócimy pod koniec sekcji 2.2.2.

$$\begin{aligned}
f(x_1, x_2, x_3) &= c_{12;3}(F_{1|3}(x_1|x_3), F_{2|3}(x_2|x_3); x_3) \cdot \\
&\quad c_{13}(F_1(x_1), F_3(x_3)) \cdot c_{23}(F_2(x_2), F_3(x_3)) \cdot \\
&\quad f_3(x_3) f_2(x_2) f_1(x_1).
\end{aligned} \tag{2.16}$$

$$\begin{aligned}
f(x_1, x_2, x_3) &= c_{23;1}(F_{2|1}(x_2|x_1), F_{3|1}(x_3|x_1); x_1) \cdot \\
&\quad c_{13}(F_1(x_1), F_3(x_3)) \cdot c_{12}(F_1(x_1), F_2(x_2)) \cdot \\
&\quad f_3(x_3) f_2(x_2) f_1(x_1).
\end{aligned}$$

### 2.2.2. Vine Copula

Ideę rozbijania rozkładu na dwuwymiarowe bloki da się rozszerzyć na  $d$ -wymiarów. Podobnie jednak jak w przykładzie 3-wymiarowym z sekcji 2.2.1, nie mamy jedyności tej reprezentacji - istnieje wiele różnych dróg do osiągnięcia tego samego celu.

**Twierdzenie 2.32** ( $d$ -wymiarowa PCC). *Niech  $f_{1,2,\dots,d}$  będzie gęstością łączną  $d$ -wymiarowego rozkładu. Możemy ją wyrazić poprzez:*

$$f_{1,\dots,d}(x_1, \dots, x_d) = \left[ \prod_{j=1}^{d-1} \prod_{i=1}^{d-j} c_{i,(i+j);(i+1)\dots(i+j-1)} \right] \cdot \left[ \prod_{k=1}^d f_k(x_k) \right]. \tag{2.17}$$

*Dowód.* Zaczniemy od rozważenia rozkładu łącznego i jego ogólnej rekursywnej dekompozycji:

$$\begin{aligned} f_{1,\dots,d}(x_1, \dots, x_d) &= f_{d|1,\dots,d-1}(x_d|x_1, \dots, x_{d-1})f_{1,\dots,d-1}(x_1, \dots, x_{d-1}) \\ &= \dots = \left[ \prod_{t=2}^d f_{t|1,\dots,t-1}(x_t|x_1, \dots, x_{t-1}) \right] \cdot f_1(x_1) \end{aligned} \quad (2.18)$$

Teraz użyjemy lematu 2.31 do rozkładu warunkowego  $(X_1, X_t)|(X_2, \dots, X_{t-1})$  żeby wyrazić  $f_{t|1,\dots,t-1}(x_t|x_1, \dots, x_{t-1})$ .

$$\begin{aligned} f_{t|1,\dots,t-1}(x_t|x_1, \dots, x_{t-1}) &= c_{1,t|2,\dots,t-1} \cdot f_{t|2,\dots,t-1}(x_t|x_2, \dots, x_{t-1}) \\ &= \left[ \prod_{s=1}^{t-2} c_{s,t;s+1,\dots,t-1} \right] c_{(t-1),t} f_t(x_t). \end{aligned} \quad (2.19)$$

Aplikując 2.17 do równania 2.18, oraz oznaczając  $s = i, t = i + j$  możemy zapisać:

$$\begin{aligned} f_{1,\dots,d}(x_1, \dots, x_d) &= \left[ \prod_{t=2}^d \prod_{s=1}^{t-2} c_{s,t;s+1,\dots,t-1} \right] \cdot \left[ \prod_{t=2}^d c_{(t-1),t} \right] \cdot \left[ \prod_{k=1}^d f_k(x_k) \right] = \\ &= \left[ \prod_{j=1}^{d-1} \prod_{i=1}^{d-j} c_{i,(i+j);(i+1)\dots(i+j-1)} \right] \cdot \left[ \prod_{k=1}^d f_k(x_k) \right]. \end{aligned}$$

□

Jak widać z równania 2.18, dekompozycje te potrafią być zawiłe i mało interpretowalne. Do tego dochodzi fakt, że podobnie jak w przykładzie 3-wymiarowym, nie jest to jedyna postać dekompozycji. Dlatego wprowadzimy teraz fragmenty teorii grafów, która pozwoli nam lepiej komunikować i zrozumieć strukturę PCC.

**Definicja 2.33** (Graf, wierzchołek, krawędź, stopień). *Grafem nazywamy parę zbiorów  $G = (N, E)$ , takich że  $E \subseteq \{\{x, y\} : x, y \in N\}$ .*

- Elementy  $E$  nazywać będziemy krawędziami grafu  $G$ , a elementy  $N$  wierzchołkami
- Liczbę sąsiadów wierzchołka  $v \in N$  nazywać jego stopniem i oznaczać  $d(v)$

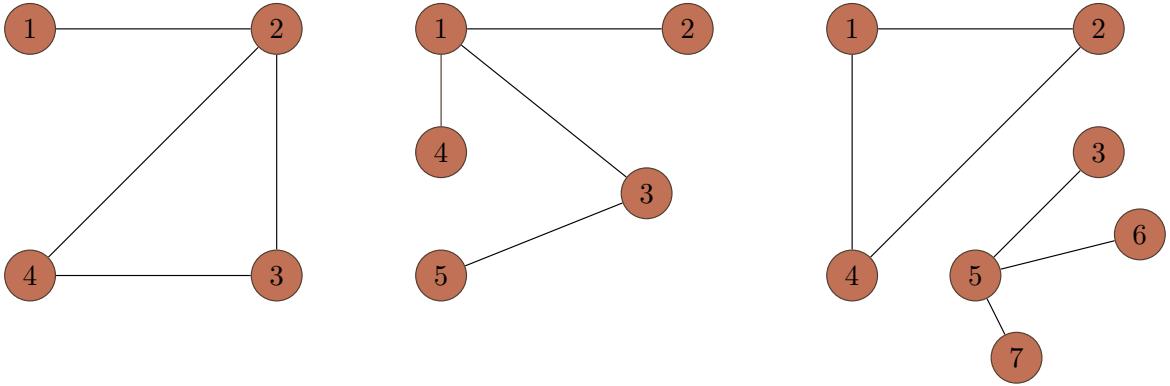
**Definicja 2.34** (Ścieżka, cykl, graf spójny, graf acykliczny). *Ścieżką to rodzaj grafu  $P = (N, E)$  o wierzchołkach  $N = \{v_0, v_1, \dots, v_k\}$  i krawędziach  $E = \{\{v_0, v_1\}, \{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \dots, \{v_{k-1}, v_k\}\}$ .*

*Cykiem nazywamy ścieżkę gdzie  $v_0 = v_k$ .*

*Jeżeli dla każdej pary wierzchołków istnieje łącząca je ścieżka, to graf nazywamy spójnym. Jeżeli graf nie zawiera w sobie cykli, to nazywamy go acyklicznym.*

Przykładowe grafy przedstawione są na rysunku 2.11. Nas interesować będą jednak szczególne rodzaje grafów, nazywane drzewami.

**Definicja 2.35** (Charakteryzacja drzewa). *Poniższe stwierdzenia są równoważne dla grafu  $T = (N, E)$ :*



Rysunek 2.11. **Przykłady grafów.** Cykliczny spójny (po lewej), acykliczny spójny (na środku), cykliczny niespójny (po prawej)

1.  $T$  jest drzewem
2. Dowolne dwa węzły grafu  $T$  są połączone unikalną ścieżką w  $T$ .
3.  $T$  jest grafem spójnym, ale  $T - e$  jest niespójnym dla dowolnej krawędzi  $e \in E$
4.  $T$  jest grafem acyklicznym, ale  $T + \{x, y\}$  będzie zawierać cykl dla dowolnych dwóch niesąsiadujących wierzchołków  $x, y \in N$ .

Jedynym drzewem widocznym na rysunku 2.11 jest graf na środkowym panelu. Drzewa są istotne w teorii wielowymiarowych kopy, ponieważ stanowią podstawowy element budujący *regular vines*, czyli zbiory grafów które posłużą nam do przedstawiania struktury PCC.

**Definicja 2.36** (Regular vine). *Zbiór drzew  $\mathcal{V} = (T_1, \dots, T_{d-1})$  nazywamy regular vine, lub R-vine jeżeli:*

1. Każde drzewo  $T_j = (N_j, E_j)$  jest spójne
2.  $T_1$  jest drzewem o zbiorze wierzchołków  $N_1$  i zbiorze krawędzi  $E_1$
3. Dla  $j \geq 2$ ,  $T_j$  jest drzewem o zbiorze wierzchołków  $N_j = E_{j-1}$  i zbiorze krawędzi  $E_{j-1}$
4. Dla  $j = 2, \dots, d-1$  oraz  $\{a, b\} \in E_j$  mamy  $|a \cap b| = 1$ .

Na wykresie 2.12 pokazujemy przykładową strukturę R-vine. Opisu krawędzi i wierzchołków dokonujemy zgodnie z wprowadzanym poniżej pojęciem warunkowego i warunkowanego zbioru.

**Definicja 2.37** (Zbiór warunkowy, zbiór warunkowany). *Dla dowolnej krawędzi  $e \in E_i$  zdefiniujmy zbiór:*

$$A_e := \{j \in N_1 \mid \exists e_1 \in E_1, \dots, e_{i-1} \in E_{i-1} : j \in e_1 \in \dots \in e_{i-1} \in e\}.$$

*Zbiorem warunkującym  $D_e$  krawędzi  $e = \{a, b\}$  nazywamy:*

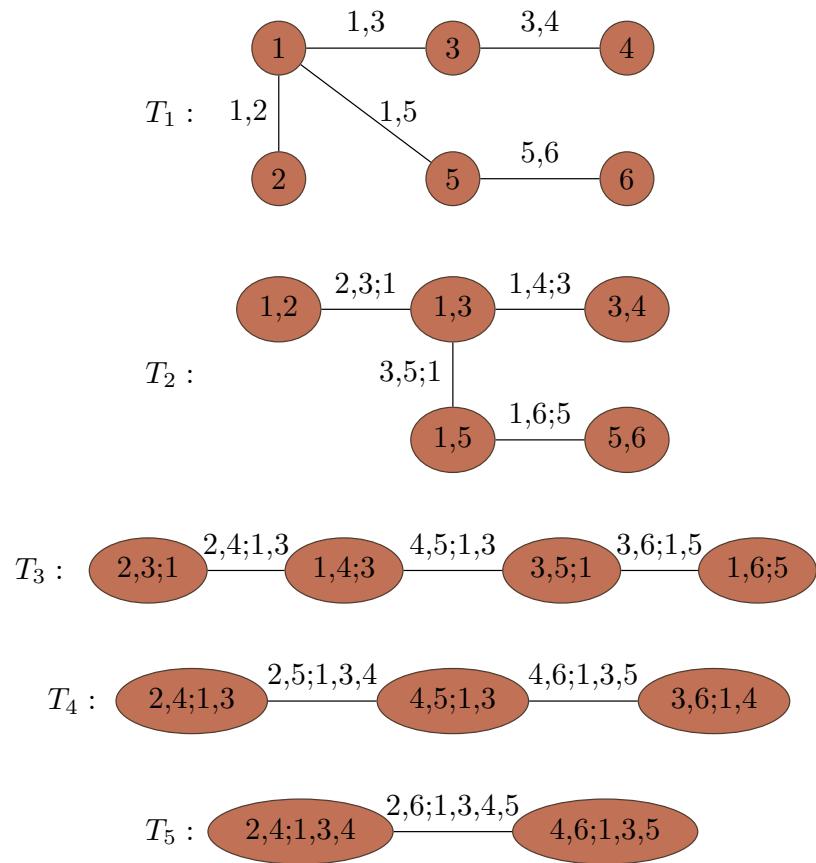
$$D_e := A_a \cup A_b,$$

*zbiorami warunkowanymi  $C_{e,a}$  i  $C_{e,b}$  nazywamy natomiast:*

$$C_{e,a} := A_a D_e$$

$$C_{e,b} := A_b D_e.$$

Skrótowo, będziemy opisywać krawędź  $e = (C_{e,a}, C_{e,b}; D_e)$  jako  $e = (e_a, e_b; D_e)$ .

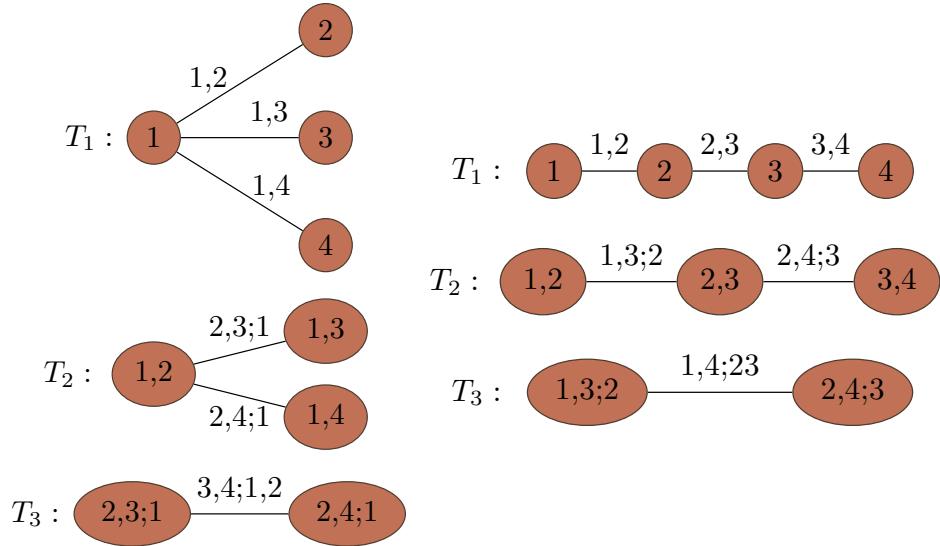


Rysunek 2.12. **Regular vine.** Przykładowa 6-wymiarowa struktura R-vine.

Definicja struktury R-vine nie narzuca szczególnej postaci drzew. Jeżeli zaczniemy stawiać pewne warunki na ich strukturę, to trafimy w szczególności w dwie podklasy: D-vine i C-vine (rysunek 2.13). D-vine zachodzi gdy każdy wierzchołek ma stopień co najwyżej równy dwa - powoduje to że drzewa wyglądają jak łańcuchy i nie mają odgałęzień. C-vine natomiast pojawia się w przypadku gdy każde drzewo ma pewien *root node*, który jest połączony z każdym innym wierzchołkiem.

**Definicja 2.38** (D-vine, C-vine). *Niech  $\mathcal{V}$  będzie strukturą R-vine.*

1. Jeżeli dla każdego wierzchołka  $n \in N_i$  zachodzi warunek  $|\{e \in E_i | n \in e\}| \leq 2$ , to należy ona do podklasy D-vine (drawable vine).
2. Jeżeli dla każdego drzewa  $T_i$  istnieje wierzchołek  $n \in N_i$  taki, że  $|\{e \in E_i | n \in e\}| = d - i$ , to należy ona do podklasy C-vine (canonical vine).



Rysunek 2.13. **Canonical vine i Drawable vine.** Przykładowa 4-wymiarowa struktura C-vine (lewy panel) i D-vine (prawy panel).

Struktury R-vine są przydatne do wyjaśniania struktury zależności wielowymiarowych rozkładów, ponieważ jak pokazali [Bedford and Cooke, 2002], istnieje połączenie między PCC a pewnym R-vine.

**Definicja 2.39** (Rozkłady R-vine). *Mówimy, że rozkład  $F$  dla  $d$ -wymiarowego wektora losowego  $(X_1, \dots, X_d)$  jest rozkładem R-vine, jeśli możemy podać trójkę  $(\mathcal{F}, \mathcal{V}, \mathcal{B})$  o własnościach:*

- $\mathcal{F} = (F_1, \dots, F_d)$  jest wektorem ciągłych, odwracalnych dystrybuant rozkładów brzegowych  $(X_1, \dots, X_d)$
- $\mathcal{V}$  jest  $d$ -wymiarową strukturą R-vine
- Zbiór  $\mathcal{B} = \{C_e | e \in E_i; i = 1, \dots, d-1\}$ , gdzie  $C_e$  jest radialnie symetryczną dwuwymiarową kopułą posiadającą gęstość.
- Dla każdego  $e \in E_i, i = 1, \dots, d-1, e = \{a, b\}$ ,  $C_e$  jest kopułą związaną z rozkładem warunkowym  $X_{C_{e,a}}, X_{C_{e,b}}$  pod warunkiem  $X_{D_e} = x_{D_e}$ .

W swojej pracy, Bedford i Cooke pokazują w szczególności, że dowolną trójkę  $(\mathcal{F}, \mathcal{V}, \mathcal{B})$  o własnościach z definicji 2.39 można związać z pewnym  $d$ -wymiarowym rozkładem  $F$ .

**Twierdzenie 2.40** (Istnienie rozkładu R-vine). *Niech  $(\mathcal{F}, \mathcal{V}, \mathcal{B})$  spełnia warunki z definicji 2.39. Wtedy istnieje dokładnie jeden  $d$ -wymiarowy rozkład  $F$  o gęstości:*

$$\begin{aligned} f_{1,\dots,d}(x_1, \dots, x_d) &= f_1(x_1) \dots f_d(x_d) \cdot \\ &\cdot \prod_{i=1}^{d-1} \prod_{e \in E_i} c_{C_{e,a} C_{e,b}; D_e} (F_{C_{e,a}|D_e}(x_{C_{e,a}|x_{D_e}}), F_{C_{e,b}|D_e}(x_{C_{e,b}|x_{D_e}})), \end{aligned}$$

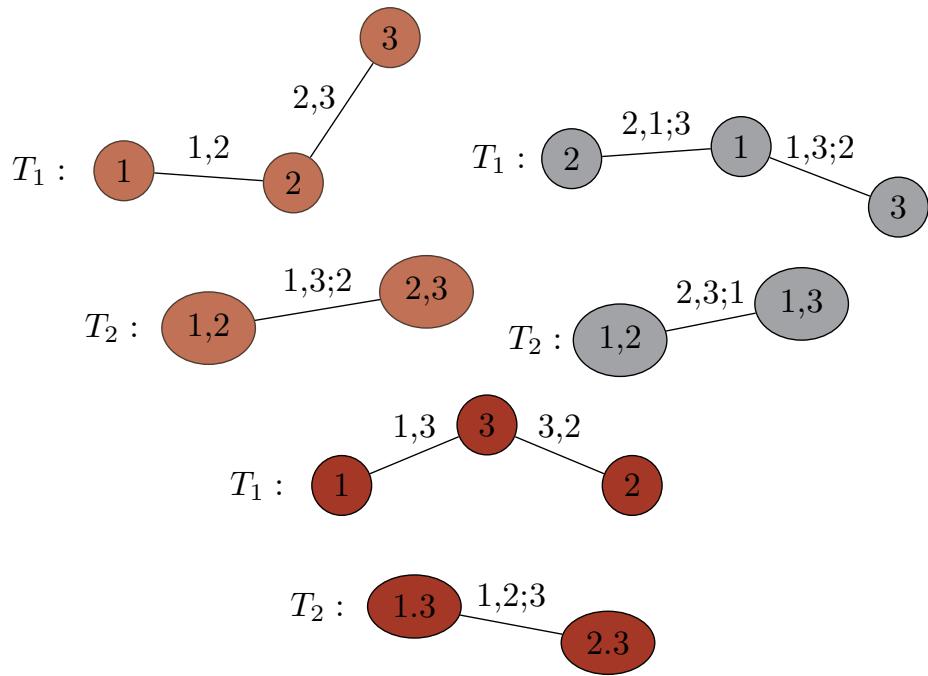
taki, że dla każdego  $e \in E_i, i = 1, \dots, d-1$  oraz  $e = \{a, b\}$  rozkład  $X_{C_{e,a}}$  i  $X_{C_{e,b}}$  pod warunkiem  $X_{D_e} = x_{D_e}$  wyraża się poprzez:

$$F_{C_{e,a}C_{e,b}|D_e}(x_{C_{e,a}}, x_{C_{e,b}}|x_{D_e}) = C_e(F_{C_{e,a}|D_e}(x_{C_{e,a}|x_{D_e}}), F_{C_{e,b}|D_e}(x_{C_{e,b}|x_{D_e}})).$$

Ponadto rozkłady brzegowe  $F$  zadane są jako  $F_i(x_i), i = 1, \dots, d$ .

Warunki z twierdzenia 2.39, nie są znacząco restrykcyjne - jedynym potencjalnie problematycznym założeniem jest tu ciągłość rozkładów brzegowych i odwracalność dystrybuant. W praktyce więc można korzystać z wyniku 2.40 aby związać wielowymiarowy rozkład z reprezentacją R-vine.

Z twierdzenia 2.40 wynika nie tylko istnienie rozkładu R-vine, ale i również to, że dekompozycja używa kopuł związanych ze zbiorami warunkowymi obecnymi na grafie struktury R-vine i *vice versa*. Z każdym wierzchołkiem i krawędzią struktury można więc związać pewien element dekompozycji - dwuwymiarową kopułę lub rozkład brzegowy. Wracając do przykładu z rozdziału 2.2.1, gdzie dla 3-wymiarowego rozkładu dostępne były trzy dekompozycje, możemy teraz zwizualizować te możliwości poprzez użycie struktury D-vine. Na rysunku 2.14 widać, że dekompozycja zależy jedynie od kolejności wymiarów w drzewie  $T_1$ .



Rysunek 2.14. **Pair Copula Constructions.** Trzy możliwe dekompozycje PCC 3-wymiarowego rozkładu, przedstawione w postaci R-vine.

Widzimy zatem, że Vine Copula są przydatnym narzędziem pozwalającym na tworzenie bardzo elastycznych modeli, mających na celu lepsze, bardziej skrojone na wymiar uchwycenie struktury zależności w danych.

W kolejnym rozdziale opiszemy finansowe *spready* będące funkcją ceny kilku aktywów rynkowych. Zaprezentujemy kilka sposobów na ich modelowanie, i pokażemy bardzo ogólną metodę wykorzystującą Vine Copulas.

---

## Rozdział 3

---

# Spready na rynkach finansowych

Według prognoz [U.S. Energy Information Administration, 2022] z sierpnia 2022 roku, średnie zapotrzebowanie na paliwa w całym 2022 wyniesie 99.4 milionów baryłek ropy dziennie. Ta średnia jest o 2.1 miliona baryłek wyższa niż w roku 2021. Koncerny naftowe przerabiające na dużą skalę ropę na produkty ropopochodne muszą więc obracać gigantyczną ilością towaru, którego cena fluktuuje każdego dnia. Niezależnie od woli koncernu zmienia się nie tylko cena nabywanej ropy ale i cena sprzedawanego paliwa. Na ich zyski, oprócz długiej listy kosztów operacyjnych wpływa naturalnie różnicą pomiędzy ceną sprzedaży produktu, a ceną zakupu surowca. Różnica ta jest przykładem *processing spreadu*, który jest źródłem ryzyka rynkowego dla producenta dowolnego towaru. Jeśli spread niebezpiecznie się zawęża, producent tracić będzie zyski, a przy pewnej krytycznej wartości zmuszony wręcz będzie wstrzymać produkcję. Uczestnicy rynku świadomi ryzyka, mogą użyć instrumentów pochodnych na spread w celu zagwarantowania ciągłości produkcji nawet w wypadku niekorzystnych warunków rynkowych ([KGHM Polska Miedź S.A. Group, 2021]). W szczególności na rynku surowców, używanie kontraktów futures czy opcji na spread jest popularną metodą zabezpieczania się przed ryzykiem rynkowym ([Halkos and Tsirivis, 2019]).

W tym rozdziale opiszemy popularne rodzaje spreadów, odwołamy się do popularnych modeli pozwalających wyceniać instrumenty pochodne na spread, oraz w szczególności omówimy model bazujący na dwuwymiarowych kopułach.

### 3.1. Popularne rodzaje spreadów

Rynki finansowe pełne są przykładów spreadów pomiędzy różnymi aktywami. Od spreadów między stopami procentowymi, po różnorakie spready na rynkach energii, wiele z nich wykształciło swoją pozycję jako samoistne aktywa, nierazko z płynnym rynkiem na instrumenty pochodne [Carmona and Durrleman, 2003].

Poniżej wymienimy różne rodzaje spreadów z wybranych rynków, aby dać czytelnikowi

ideę o ich różnorodnej naturze. Jednak w obliczu mnogości rodzajów spreadów, tej listy w żaden sposób nie można nazwać wyczerpującą.

Spreadem nazywać będziemy różnicę pomiędzy cenami dwóch aktywów  $S_1$  i  $S_2$ :

$$s(t) = S_1(t) - S_2(t).$$

Jest to najprostsza wersja spreadu, jaką jest np. *bid-ask spread*, czyli różnica między ceną kupna a sprzedażą aktywa na giełdzie. Definicję tę rozszerzać można jednak do liniowych kombinacji, oraz do większej liczby aktywów - co w praktyce jest nieuniknione (ze względu na różne jednostki komponentów spreadu, lub większą ilość komponentów) więc w pełnej ogólności rozważać będziemy:

$$s(t) = \alpha_1 S_1(t) - \alpha_2 S_2(t) - \dots - \alpha_n S_n(t).$$

### Rynek instrumentów o stałym dochodzie

Rynek instrumentów o stałym dochodzie posiada bogatą gamę spreadów. Spread między stopami swapowymi różnych krajów, mierzy (implikowane) różnice pomiędzy tymi rynkami dotyczące ryzyka kredytowego i ryzyka płynności. Przykładami mogą być spready francusko-niemieckie, czy niemiecko-duńskie. Inną klasą spreadów na tym rynku jest spread kredytowy - czyli różnica między stopą zwrotu obligacji obarczonych ryzykiem, jak korporacyjne, względem zwrotu z obligacji o znakomitym ryzyku, jak rządowe. Jest to przykład *quality spreadu*, czyli spreadu gdzie  $S_1$  i  $S_2$  są to ceny podobnego produktu, ale różniącego się jakością.

Inne klasy spreadów na tym rynku to *tenor spreads*, jak różnica między wartościami LIBORu dla tenorów 6M i 3M, czy różnica między stopami zwrotu długoterminowych obligacji a bonów skarbowych. Finalnie warto wspomnieć o istnieniu *issuer yield spreadów*, jak *municipal-government* czy *municipal-corporate* spread ([Choudhry, 2005]).

### Rynek energii

Przechodząc na inny rynek, zazwyczaj zmieniać się będzie charakter popularnych na nim spreadów. Rynek energii to przede wszystkim *processing spready*, czyli spready wynikające z różnicy ceny zakupu surowca, a ceny sprzedaży wytworzzonego produktu, oraz *temporal spready/calendar spready* - jak różnice w cenie energii o różnych porach dnia/różnych porach roku.

Na tym rynku, spready pozwalają oszacować koszty produkcji, transportu, przechowania towaru; czyli efektywność linii produkcyjnej. Wśród najpilniej obserwowanych z nich należy wymienić *crack spread*, czyli różnica między ceną ropy naftowej a wyprodukowanych z niej produktów ropopochodnych. Podobnego rodzaju spreadów, o równie istotnym znaczeniu jest jednak dużo więcej - między innymi *dark spread*, *spark spread*, *quark spread* i inne. Każdy odnosi się do różnicy ceny konkretnego surowca (gazu, węgla, uranu i innych) a ceny wyprodukowanej z niego energii.

Wraz ze wzrostem świadomości społeczeństwa na temat zmian klimatycznych, oraz wzrostem regulacji mających na celu zmniejszenie ilości wytwarzanych gazów cieplarnianych, pojawiły się również nowe rodzaje spreadów jak *dark green spread*, *clean dark spread*, czy *clean spark spread*. Są one wariacjami powyższych spreadów energetycznych, z dodatkowym uwzględnieniem trzeciego komponentu, jakim jest konieczność

nabycia certyfikatów emisyjnych i służą jako wskaźniki „green premium”, czyli dodatkowego kosztu środowiskowego ([Carmona et al., 2012]).

### Rynek surowców

Pod hasłem spreadów na rynku surowców w dużej mierze kryją się processing spready wymienione wcześniej w ramach rynku energii. Poza tym jednak istotną rolę pełnią tu *futures spready* - czyli różnice w cenach spot i futures na surowce oraz *locational spready* - różnice między cenami tego samego surowca w dwóch różnych miejscach na świecie. Spredy te, jak *corn-oat* czy *wheat-corn* spread są obecne na rynkach tak dugo, że traktowane jako osobne aktywa pozwalające spekulować na rynkach zbóż.

Przykładem processing spreadu na rynku surowców będzie *soybean crush spread*, dokładniej omówiony w rozdziale 4, polegający na kupnie ziaren soi a sprzedaży olejku sojowego oraz mączki sojowej - realizowany najczęściej w formie forward spreadu lub futures spreadu ([Barrett and Kolb, 1995]).

## 3.2. Modelowanie spreadów

Jak pokazał rozdział 3.1, spready mogą powstawać w naturalny sposób pomiędzy różnymi rodzajami aktywów co powoduje, że ich modelowanie nie jest proste. Możemy podać prosty przykład ilustrujący problem rozważając dwa spready: *spark spread*, oraz *LIBOR-OIS spread*. Pierwszy jest różnicą między ceną sprzedanej energii a ceną gazu ziemnego z którego została wyprodukowana. Komponent „energetyczny” spreadu porusza się zgodnie z dynamiką charakterystyczną dla rynku energii. Można spodziewać się ciężkoogonowości dziennych zmian, ostrych pików cenowych jak i równie szybkich powrotów do średniej, czy regularnej sezonowości spowodowanej zmianami popytu na elektryczność w obrębie dnia. Gaz ziemny natomiast wykazuje obecne, choć mniej agresywne piki cenowe, sezonowość w obrębie roku, oraz podobnie jak dla cen energii *mean-reversion* i ciężkie ogony przejawiające się w jego dynamice [Espen and Kettler, 2011]. Crack spread, będąc ich różnicą, jest ciężkoogonowy, asymetryczny, potrafiący osiągać zarówno dodatnie jak i ujemne wartości. LIBOR-OIS spread z drugiej strony jest różnicą między dwoma stopami procentowymi - w porównaniu z crack spreadem jest względnie stabilny, dodatni, i nie wykazuje sezonowości. W momentach kryzysów o podłożu kredytowym, potrafi jednak wykazać bardzo ciężki prawy ogon i zwielokrotnić swoje wartości w bardzo krótkim okresie czasu [Cui et al., 2016].

Dynamika spreadu jest więc wypadkową dynamiki jego komponentów. Zatem model przystosowany do jednego spreadu może nie uchwycić *stylized facts* dotyczących dynamiki innego spreadu. Z tego powodu modele specyfikowane są raczej do konkretnej klasy spreadów i nie da się wskazać jednego, dominującego modelu odpowiedniego do każdej sytuacji. Podejście kopułowe opisane niżej jest jednym z najbardziej uogólnionych podejść, pozwalającym na osobne modelowanie jednowymiarowych modeli szeregowów czasowych dla komponentów spreadu i swobodne łączenie ich dzięki elastyczności kopuł w spójny model dla samego spreadu. W tym rozdziale naszkicujemy popularne sposoby modelowania spreadu i wskażemy drogę generalizowania od najprostszej idei modelu Blacka-Scholesa do modelu kopułowego.

## Modele Blacka-Scholesa oraz Bacheliera

Najprostszą ideą jest zaadaptowanie dobrze znanego i popularnego modelu Blacka-Scholesa [Black and Scholes, 1973] do modelowania komponentów spreadu. Takie podejście zaprezentowane jest w [Bjerksund and Stensland, 2014]. Dynamika komponentów wyrażana jest tu poprzez stochastyczne równanie różniczkowe:

$$dS_i(t) = \mu_i S_i(t)dt + \sigma_i S_i(t)dW_i(t),$$

dla  $\mu_i \in \mathbb{R}$ ,  $\sigma_i > 0$ , gdzie  $\{W_1(t)\}_t$  i  $\{W_2(t)\}_t$  są dwoma procesami Wienera o korelacji  $\rho$ .

Podejście to powoduje, że ceny aktywów  $S_1(t)$  i  $S_2(t)$  są nieujemne, o znany rozkładzie lognormalnym, oraz mamy dostępną dobrze wypracowaną teorię dotyczącą zachowania modelu i wyceny instrumentów pochodnych. Mimo tych zalet model ten nie zyskał jednak popularności w zastosowaniu do spreadów. Powodem jest fakt, że spready mogą być tworzone na podstawie aktywów które mogą osiągać wartości ujemne - w momencie pisania tej pracy w wielu europejskich państwach mamy do czynienia z ujemnymi stopami procentowymi, a nie tak dawno obserwować można było ujemną cenę kontraktu futures na ropę WTI. Dodatkowo model ten nie daje jawnych wzorów na ceny instrumetów pochodnych na spread.

Zauważono jednak, że w sporej ilości przypadków histogramy spreadu pozwalają się dość dobrze modelować przy pomocy rozkładu normalnego [Carmona and Durrleman, 2003]. Ta obserwacja doprowadziła do zastosowania modelu Bacheliera jako bezpośredniego modelu dla spreadu. Taki pomysł pokazuje [Poitras, 1998], stosując model o dynamice:

$$ds(t) = \mu s(t)dt + \sigma dW(t),$$

pozwalającej spreadom osiągnąć zarówno dodatnie jak i ujemne wartości. Zaletą takiego podejścia nad modelem lognormalnym jest możliwość otrzymania analitycznych wzorów na europejskie opcje na spread ([Poitras, 1998]). [Carmona and Durrleman, 2003] w swojej pracy dodatkowo pokazują, że ten model choć prosty, zaskakująco dobrze dopasowuje się do rynkowych cen europejskich opcji na spark spread - w szczególności dla krótkich terminów wyjaśnienia opcji.

Mimo tych zalet [Herath et al., 2011], [Carmona and Durrleman, 2003], czy [Kim et al., 2020] wyliczają wiele wad tego modelu: brak struktury autokorelacji, ciężkoogonowości, czy brak sposobu na oddanie struktury zależności między komponentami spreadu. W realnych danych na porządku dziennym znaleźć można empiryczne dowody na statystyczną istotność powyższych własności spreadów ([Kim et al., 2020], czy [Schwartz, 1997]), w związku z czym poszukiwano innych modeli potrafiących rozwiązać te problemy.

## Model Ornstein'a-Uhlenbecka i szeregi czasowe

Próbą uwzględnienia autokorelacji w modelach komponentów spreadu jest użycie procesu Ornsteina-Uhlenbecka do modelowania ich dynamiki:

$$dS_i(t) = S_i(t)[- \lambda(\log S_i(t) - \mu_i)dt + \sigma_i dW_i(t)],$$

gdzie  $\lambda_i > 0$ ,  $\mu_i \in \mathbb{R}$ ,  $\sigma_i > 0$ , oraz  $\{W_1(t)\}_t$  i  $\{W_2(t)\}_t$  są dwoma procesami Wienera o korelacji  $\rho$ .

Spread jest modelowany wtedy jako różnica tych dwóch procesów. Nie poprawia to problemu gaussowskości procesu czy struktury korelacji między komponentami, oraz dodatkowo zmuszeni jesteśmy do numerycznej analizy rozwiązania. Jest to jednak pierwszy krok w stronę modeli dla komponentów spreadu wykorzystujących techniki modelowania szeregów czasowych. Wychodząc z tej idei pojawiła się liczna lista prac wykorzystujących bardziej zaawansowane modele, w których analityczność jest porzucona w zamian za poprawniejszy model opisujący dynamikę komponentów. [Herath et al., 2011], [Eyigunor, 2006], [Espen and Kettler, 2011], czy [Bernard and Czado, 2012] pokazują różne podejścia, od modeli ARMA-GARCH, przez procesy Levy'ego, po modele *Markov switching regime* do opisu komponentów spreadu, które dobrze radzą sobie z empiryczną ciężkoogonowością i rozwiązują problem gaussowskości.

Wybór modeli dla komponentów spreadu można więc uzależnić od rodzaju modelowanego aktywa, w sposób uchwycający jego unikatowe własności, co jest najbardziej ogólnym podejściem. Mając wybrane modele dla komponentów spreadu (modele brzegowe), wciąż otwarty pozostaje jednak problem połączenia ich w spójny, łączny model dla spreadu. W modelach Blacka-Scholesa i Ornsteina'a-Uhlenbecka za strukturę zależności odpowiadała korelacja  $\rho$  źródeł losowości (procesów Wienera). Zwykła korelacja tam wystarczała, ponieważ posługiwaliśmy się procesami Wienera, o normalnych rozkładach skończenie-wymiarowych. W ogólniejszym podejściu jednak będziemy chcieli osłabić założenie normalności innowacji modelu, przez co potrzebny będzie dokładniejszy opis ich struktury zależności. Tę problematykę poruszamy w kolejnym rozdziale opisując podejście kopułowe.

### 3.3. Model kopułowy

Dla skupienia uwagi rozważmy model bazujący na rozszerzeniu idei z [Herath et al., 2011]. Używać będziemy procesów ARIMA-GARCH do opisu dynamiki rozkładów brzegowych, po czym zastosujemy kopuły do modelowania zależności w reziduach. Należy zaznaczyć, że jest to algorytm o dużej dowolności „podmiany” elementów, który daje się łatwo rozszerzać poprzez uwzględnianie innych procesów brzegowych, czy dynamicznej struktury zależności. Przykłady takich rozszerzeń znaleźć można w [Espen and Kettler, 2011], [Herath et al., 2011], [Sukcharoen and Leatham, 2017] czy [Bernard and Czado, 2012].

#### Model ARIMA-GARCH Vine Copula

Niech  $S_1(t), S_2(t), \dots, S_d(t)$  będą cenami  $d$  aktywów. Rozważać będziemy proces ich log-zwrotów:

$$r_{i,t+1} = \log[S_i(t+1)] - \log[S_i(t)], \quad (3.1)$$

gdzie  $i \in \{1, \dots, d\}$ . Niech  $\mathcal{F}_t = \sigma(r_{1,s}, \dots, r_{d,s}, s \leq t)$  będzie filtracją reprezentującą całą wiedzę o procesie cen aktywów do momentu  $t$ .

Celem jest otrzymanie spójnego modelu łącznego dla  $(S_1, \dots, S_d)$ , pozwalającego na symulację i obliczenie spreadu. Model składać się będzie kilku komponentów: indywidualnych modeli szeregów czasowych dla komponentów spreadu, oraz modelu struktury zależności między nimi. Uściślając: zakładając, że aktywa poruszają się zgodnie z pewnym procesem klasy ARIMA(p,d,q)-GARCH(m,n), oraz że struktura zależności między reziduami zadana jest poprzez strukturę Vine Copula  $\mathcal{V}$  względem miary probabilistycznej  $\mathbb{P}$ .

Najpierw, w celu uchwycenia struktury zależności czasowej każdego z aktywów osobno, modelujemy warunkową wartość oczekiwanych ich logzwrotów poprzez proces ARIMA(p,d,q):

$$\phi(B)(1 - B)^d r_{i,t} = c + \theta(B)\varepsilon_{i,t}, \quad (3.2)$$

gdzie  $B$  to operator *backshift* ( $B^k r_{i,t} = r_{i,t-k}$ ), a  $\phi(z)$  i  $\theta(z)$  to wielomiany odpowiadające za strukturę zależności w czasie:  $\theta(z) = 1 + \theta_1 z + \dots + \theta_q z^q$ , i  $\phi(z) = 1 - \phi_1 z - \dots - \phi_p z^p$  gdzie  $\theta_j \in \mathbb{R}, \phi_j \in \mathbb{R}$ , oraz  $\phi(z) \neq 0 \forall_{|z| \leq 1}$ .

Losowość/zmienność tego procesu zależy więc od rozkładu innowacji  $\varepsilon_{i,t}$ . Ponieważ empiryczne dane rynkowe często wykazują heteroskedastyczność i *volatility clustering* ([Herath et al., 2011]), będziemy szli o krok dalej i modelowali warunkową wariancję procesu za pomocą modelu GARCH(m, n):

$$\begin{cases} \varepsilon_{i,t} = \sigma_{i,t} e_{i,t}, \\ \sigma_{i,t}^2 = \omega_i + \sum_{j=1}^m \alpha_i \varepsilon_{i,t-j}^2 + \sum_{k=1}^n \beta_k \sigma_{i,t-k}^2, \\ e_{i,t} \sim IID(0, 1), \end{cases} \quad (3.3)$$

gdzie  $\omega_i > 0, \alpha_i, \beta_i \geq 0$

Równania 3.2 oraz 3.3 zapewnić mają uchwycenie *temporal dependency structure* w szeregach czasowych komponentów, i wyłuskanie innowacji  $e_{i,t}$ , które są w wymiarze czasowym  $t$  niezależne i o jednakowych ustalonych rozkładach  $F_{e_{i,t}}$ . W oryginalnym modelu GARCH zakłada się tu standardowy rozkład normalny - jednak w praktyce często osłabia się to założenie do rozkładów skcentrowanych, aby pozwolić na obecność cięższych ogonów. Tak też robimy w tym przypadku. Mimo wyeliminowania zależności czasowej, rezidua aktywów wciąż jednak posiadać będą strukturę zależności między sobą. Do jej modelowania posłuży nam  $d$ -wymiarowa struktura Vine Copula  $\mathcal{V}$ :

$$F_{e_{1,t}, \dots, e_{d,t}}(x_1, \dots, x_d) = \mathcal{V}^{\mathbb{P}}(F_{e_{1,t}}(x_1), \dots, F_{e_{d,t}}(x_d)). \quad (3.4)$$

Wobec tego w mierze fizycznej  $\mathbb{P}$ , log-zwroty komponentów spreadu w modelu ARIMA-GARCH copula zadajemy dynamiką:

$$\begin{cases} \phi(B)(1-B)^d r_{i,t} = \theta(B) \varepsilon_{i,t}, \\ \varepsilon_{i,t} = \sqrt{\sigma_{i,t}^2} e_{i,t}, \\ \sigma_{i,t}^2 = \omega_i + \sum_{j=1}^m \alpha_i \varepsilon_{i,t-j}^2 + \sum_{k=1}^n \beta_i \sigma_{i,t-k}^2, \\ e_{i,t} \sim_{\mathbb{P}} IID_i(0, 1), \\ F_{e_{1,t}, \dots, e_{d,t}}(x_1, \dots, x_d) = \mathcal{V}^{\mathbb{P}}(F_{e_{1,t}}(x_1), \dots, F_{e_{d,t}}(x_d)). \end{cases} \quad (3.5)$$

gdzie poszczególne oznaczenia opisane zostały w równaniach 3.2-3.4 powyżej.

---

## Rozdział 4

---

# Zastosowanie modelu do danych rynkowych

W gałęzi przemysłu zajmującej się soją, *crushing* (*eng. miażdżenie*) odnosi się do procesu jej przetwarzania, ponieważ ziarna soi są miażdżone i poddawane procesowi destylacji w celu otrzymania dwóch produktów: śruty sojowej (*soybean meal*), oraz oleju sojowego (*soybean oil*). Różnica między ceną przerobionych produktów a ceną surowca nazywana jest *crush spreadem* i jest instrumentem handlowanym zarówno na rynku spot, jak i rynku futures ([CME Group, 2015]).

Obecnie soja jest jednym z najbardziej znaczących źródeł olejów roślinnych i białka dla pasz zwierzęcych. Najwięksi jej eksporterzy to USA, Brazylia, Argentyna, Chiny i India, dzielące między sobą około 90% światowej produkcji soi. Wraz ze stale powiększającą się populacją, stale rośnie również zapotrzebowanie na produkty agrokultury. Do 2050 roku prognozuje się roczny wzrost podaży soi na poziomie około 1.3% - co będzie niewystarczające do zaspokojenia potrzeb konsumpcyjnych ([Pagano and Miransari, 2016]). Soybean crush, jako wskaźnik kosztu produkcji, oraz wystawione na niego kontrakty futures służą więc jako ważne ekonomiczne monitory kondycji rynku agrokultury i ziaren.

W tym rozdziale zajmiemy się analizą soybean crush spreadu przy pomocy modelu wyrażonego równaniami 3.5. W kolejnych sekcjach opiszemy dostępne rynkowe dane, użyte metody kalibracji i zaprezentujemy jej wyniki wraz z symulacyjnym sposobem wyceny opcji na soybean crush.

Analizy i wyniki zaprezentowane w całym rozdziale dokonane zostały z użyciem języka programowania Python i jego typowych pakietów do obróbki i wizualizacji danych. Do bardziej specjalistycznych zastosowań użyliśmy funkcji i obiektów zaimplementowanych w bibliotekach: *statsmodels* i *scipy* (testy statystyczne), *arch* (ARIMA-GARCH), oraz *pyvinecopulib* (kopyły i Vine Copula). Wszystkie testy statystyczne w tym rozdziale przeprowadzane były na poziomie istotności  $\alpha = 0.05$ .

## 4.1. Opis danych

Do analizy użyliśmy danych pochodzących z giełdy *Nasdaq* - powszechnie dostępna jest tam historia cen spot ziaren soi, śruty sojowej oraz oleju sojowego. Dostępne mamy 3650 dziennych kwotowań OHCL (open/high/close/low), czyli 10 lat obserwacji od sierpnia 2012 do sierpnia 2022 roku. Do analizy użyliśmy wartości z zamknięcia.

Analizę rozpoczęliśmy od sprawdzenia jakości danych. Zauważone negatywne wartości dla szeregu czasowego śruty sojowej zostały sprawdzone do alternatywnego źródła kwotowań ([Investing.com](#)) i jako że to zjawisko nie zostało tam zaobserwowane, usunęliśmy 3 obserwacje w połowie sierpnia 2018. Ze względu jednostki użyte przez źródło danych (ceny w centach), przeskalowaliśmy szeregi czasowe tak, aby odpowiadały opisowi w dokumencie technicznym [CME Group, 2015] - w celu weryfikacji czy przyjmują sensowne wartości. Finalny zbiór danych można obserwować na wykresie 4.1.

Zgodnie z [CME Group, 2015], soybean crush spread - a dokładniej 1 : 1 : 1 soybean crush spread definiujemy jako:

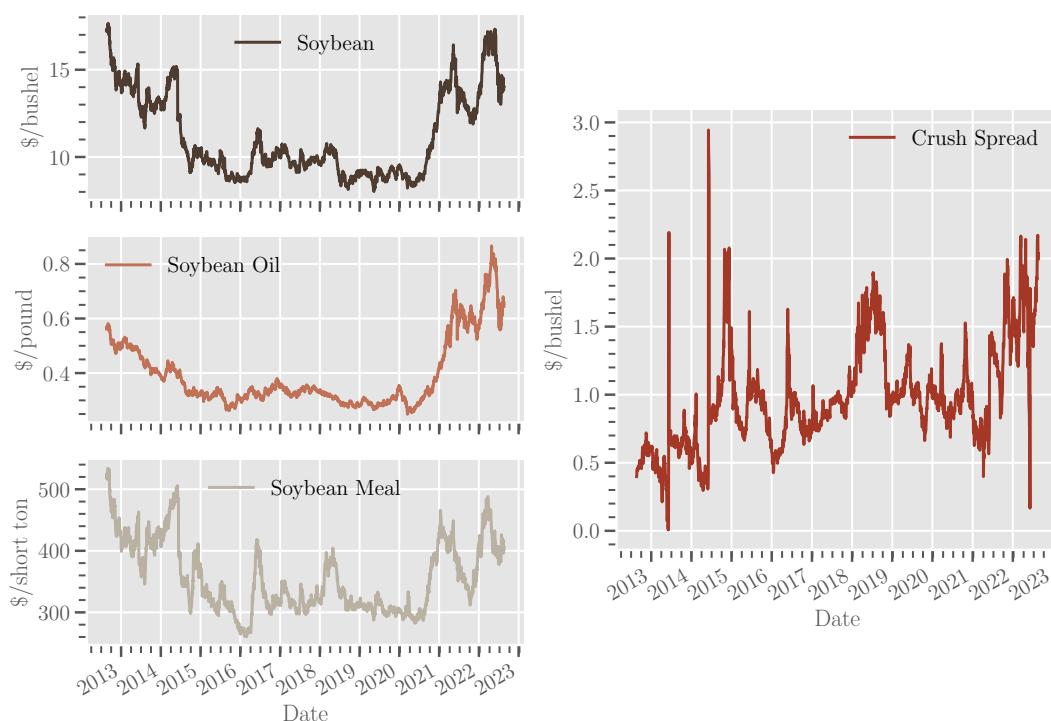
$$s(t) = (11O_t + 0.022M_t) - S_t, \quad (4.1)$$

gdzie  $O_t$ ,  $M_t$  i  $S_t$  to ceny odpowiednio: jednostki oleju, jednostki śruty i jednostki soi (stąd nazwa 1: 1: 1). Współczynniki 11 i 0.022 w równaniu 4.1 spowodowane są faktem, że soję sprzedaje się na buszle, olej na funty a śrutę na tony krótkie - należy więc sprowadzić je do wspólnego mianownika. Ponieważ buszel soi to około 60 funtów, z których produkuje się średnio 11 funtów oleju, oraz 44 funty śruty ( $44[\text{lb}] \times 2000[\frac{\text{short ton}}{\text{lb}}] = 0.022$ ), takie współczynniki przyjęte są przez Chicago Mercantile Exchange do obliczania soybean crush. Finalna wartość spreadu kwotowanego jest więc w dolarach za buszel.

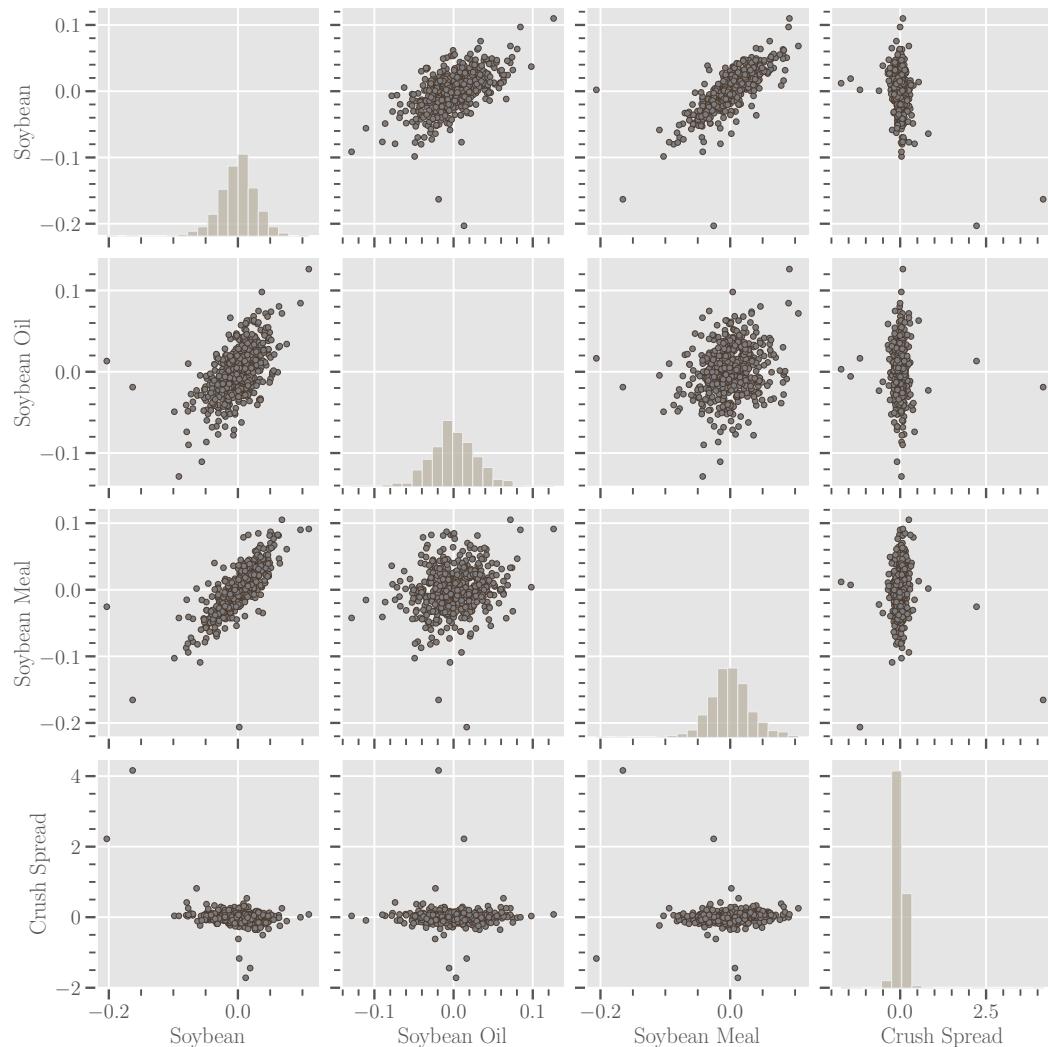
Szeregi czasowe były kompletne, poza wyjątkiem trzech obserwacji usuniętych manualnie z szeregu śruty sojowej. Użyliśmy strategii *forward-fill*, aby uzupełnić tę lukę w danych przy pomocą ostatniej dostępnej wartości. Ponieważ soybean crush spreadem najczęściej handluje się w horyzontach miesięcy, zdecydowaliśmy, że modelowanie na dziennych przyrostach wartości nie będzie dobrym wyborem. Wszystkie szeregi zostały przekształcone do częstotliwości tygodniowej, poprzez wzięcie ostatniej dostępnej wartości w danym tygodniu, na podstawie czego policzyliśmy następnie log-zwroty zgodnie z równaniem 3.1.

*Exploratory data analysis* (EDA) rozpoczęliśmy od struktury zależności logzwrotów, rysując wykresy punktowe widoczne na rysunku 4.2. Widzimy na nich wysoki stopień zależności między komponentami spreadu, chociaż relacja samego spreadu z poszczególnymi z nich nie wydaje się być oczywista.

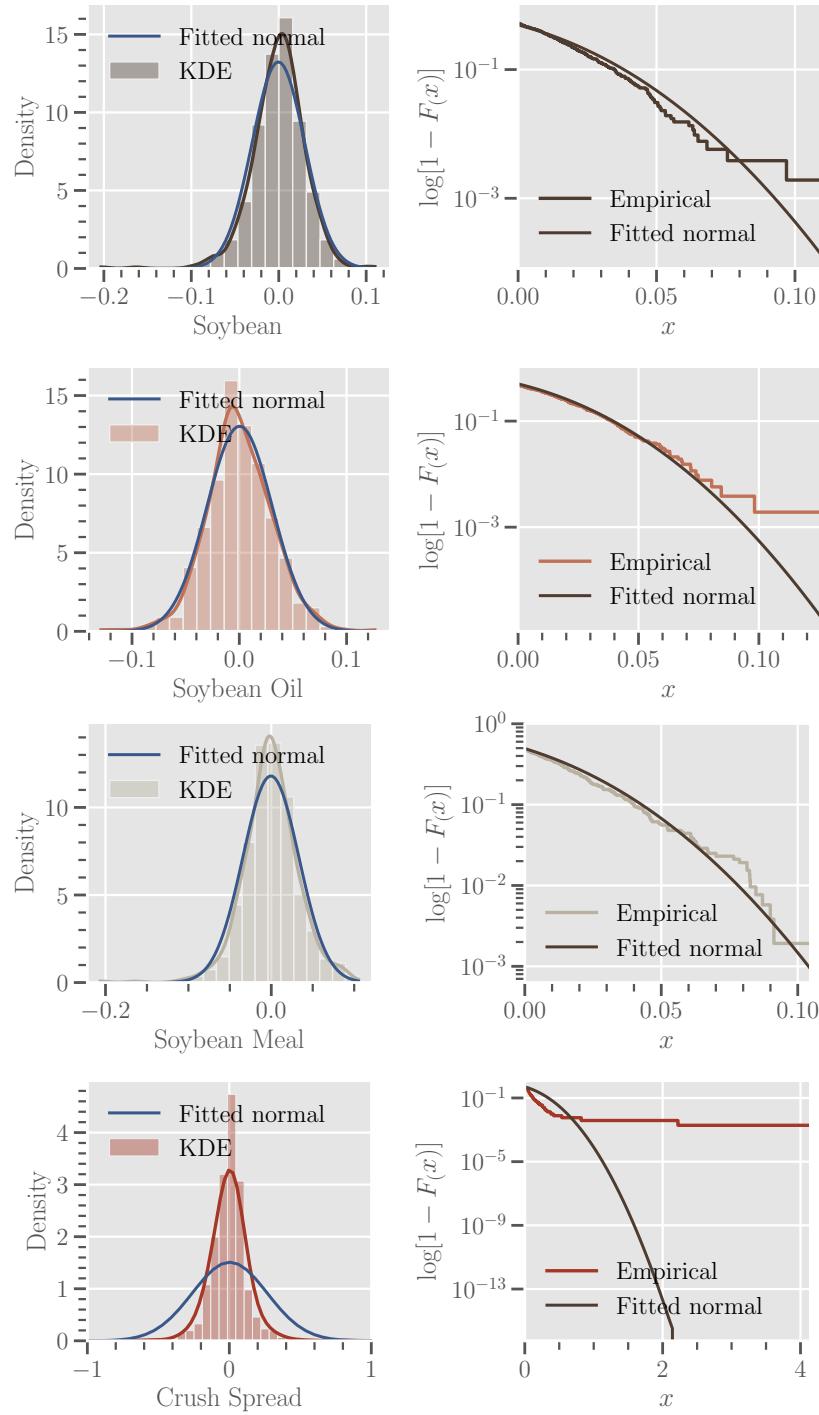
Następnie zbadaliśmy ogony rozkładów logzwrotów, kalibrując do nich rozkład normalny i porównując gęstości, oraz wykres ogonu w skali logarytmicznej. Rysunek 4.3, a szczególnie ich prawe panele wskazują na ciężkoogonowość logzwrotów, która uwydawniona jest najbardziej dla samego crush spreadu.



Rysunek 4.1. Szeregi czasowe cen spot. Lewy panel od góry: soja, olej sojowy, śruta sojowa. Prawy panel: 1-1-1 crush spread.



Rysunek 4.2. Wykresy zależności log-zwrotów. Wykresy punktowe każdy-z-każdym, oraz histogramy wszystkich zmiennych.



Rysunek 4.3. **Ogony log-zwrotów.** Histogramy oraz *kde* gęstości logzwrotów dla każdego aktywa, wraz z dopasowaną gęstością rozkładu normalnego (lewy panel). Empiryczny ogon danych w skali logarytmicznej, wraz z ogonem dopasowanego rozkładu normalnego (prawy panel).

## 4.2. Kalibracja

W dalszej części rozdziału skupimy się już tylko na komponentach spreadu, ponieważ to one, a nie sam spread będą modelowane. W ramach EDA dokonaliśmy standardowej analizy szeregów czasowych pod względem stacjonarności i heteroskedastyczności.

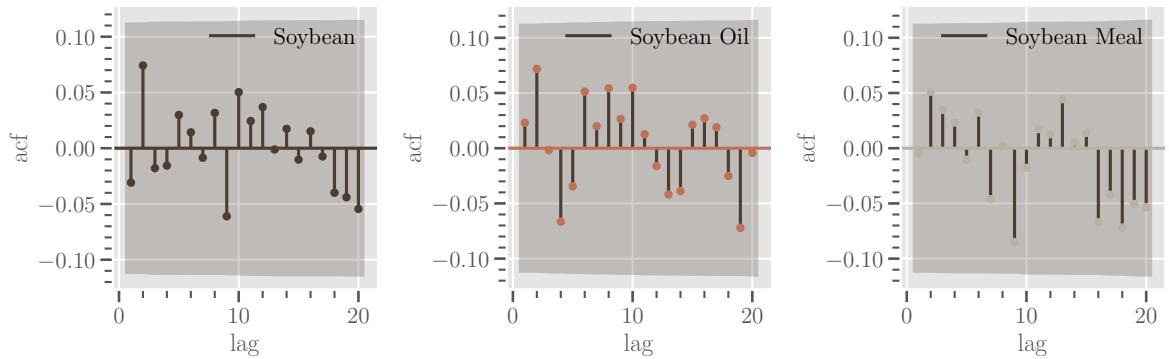
### Część ARIMA modelu

W celu przetestowania stacjonarności wykorzystaliśmy *Augmented Dickey-Fuller test*, którego wyniki widoczne są w tabeli 4.6. Test ADF bada stacjonarność szeregu czasowego, a jego hipotezą zerową jest brak stacjonarności. Widzimy, że w przypadku każdego aktywa p-wartość jest poniżej poziomu istotności 0.05, w związku z czym odrzucamy hipotezę zerową i wnioskujemy, że szeregi są stacjonarne i nadają się do modelowania technikami ARIMA.

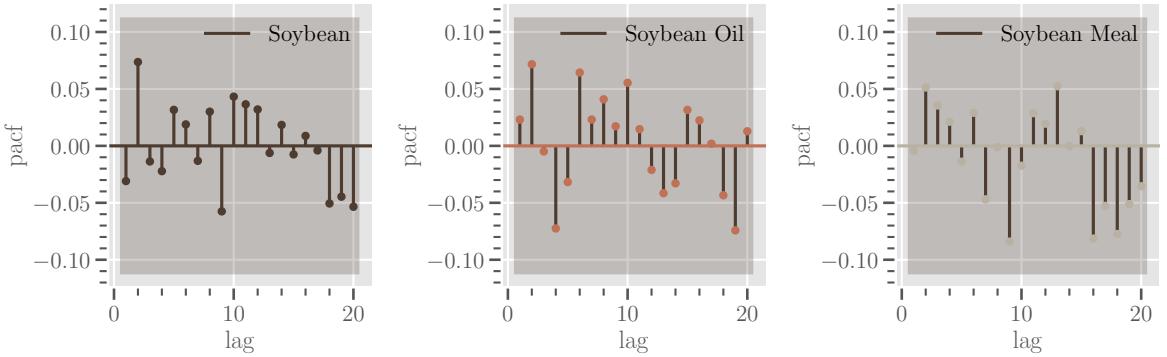
Przeanalizowaliśmy następnie wykresy funkcji autokorelacji, oraz częściowej autokorelacji dla komponentów spreadu. Rysunki odpowiednio: 4.4 i 4.5 przedstawiają ich wygląd. Widzimy kilka wartości *lagu* dla których funkcje te wystają poza przedziały ufności. Nie dzieje się to jednak w sposób znaczący, w związku z czym możemy wnioskować o braku struktury korelacji czy autokorelacji w szeregach czasowych komponentów. Hipotezę tę sprawdziliśmy próbując dopasować modele ARIMA( $p, d, q$ ) dla  $p, d, q \leq 5$ , jednak dla każdego aktywa najniższe AIC miały model ARIMA(0,0,0). Nie będziemy zatem używać w naszym modelu części ARIMA z równania 3.5. Dla każdego aktywa pozwolimy jedynie na dopasowanie pewnej niezerowej średniej  $\mu_i$ , tak że równanie 3.2 przyjmie postać:

$$r_{i,t} = \mu_i + \varepsilon_{i,t}.$$

Średnie  $\mu_i$  dla każdego aktywa estymowane będą łącznie z modelem GARCH i ich wyniki przedstawione są w tabeli 4.9.



Rysunek 4.4. **Analiza szeregów czasowych (1/2).** Funkcje autokorelacji dla każdego aktywa.



Rysunek 4.5. **Analiza szeregów czasowych (2/2).** Funkcje częściowej autokorelacji dla każdego aktywa.

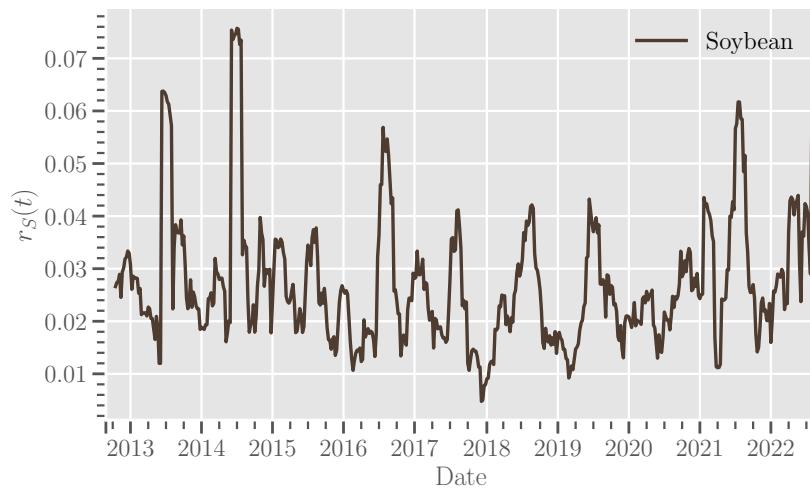
Asset	ADF Test Statistic	p-value
Soybean	-15.138	0.0
Soybean Oil	-14.761	0.0
Soybean Meal	-22.843	0.0

Tabela 4.6. **Test stacjonarności szeregów czasowych.** Tabela przedstawia statystyki testowe i p-wartości testu *Augmented Dickey-Fuller*. W każdym przypadku odrzucamy hipotezę zerową o niestacjonarności szeregów.

### Część GARCH modelu

W kolejnym kroku sprawdziliśmy homoskedastyczność szeregów czasowych. Dokonaliśmy wizualnej inspekcji wykresów odchylenia standardowego logzwrotów dla każdego aktywa przy pomocy ruchomego okna o długości 8 tygodni. Rysunek 4.7 prezentuje przykład takiego wykresu dla cen soi. Widać na nim, że zmienność nie jest stała, lecz ma oscylujący okresowy charakter. Aby uchwycić tę informację użyliśmy modelu GARCH( $m, n$ ) opisanego równaniem 3.3. Modele były dopasowywane dla każdego aktywa osobno, za pomocą metody SLSQP (sequential least squares programming) wbudowanej w pakiet *arch*, a następnie porównywane zostały pod względem kryterium informacyjnego AIC. Finalny model GARCH(2,3) został wybrany na podstawie najniższego średniego AIC ze względu na wszystkie aktywa. Wartości AIC, oraz wyniki kalibracji GARCH(2,3) zawarte są w tabelach odpowiednio: 4.8 oraz 4.9.

Finalnie, otrzymaliśmy szeregi czasowe reziduów  $e_{i,t}$ , które według czwartego równania założonego modelu 3.5 powinny być niezależne od siebie, oraz skcentrowane o jednostkowej wariancji. Przeprowadziliśmy więc testy: Ljunga-Boxa, t, oraz chi kwadrat aby sprawdzić hipotezy zerowe niezależności, średniej równej zero i wariancji równej jeden. Wyniki zaprezentowane w tabeli 4.10 pokazują, że w przypadku żadnego aktywa nie udało się odrzucić powyższych hipotez.



Rysunek 4.7. **Analiza homoskedastyczności.** Wykres odchylenia standardowego logzwrotów cen spot soi na ruchomym oknie o długości 8 tygodni.

<b>m</b>	<b>n</b>	<b>Soybean</b>	<b>Soybean Oil</b>	<b>Soybean Meal</b>	<b>Average</b>
2	3	2603.8	2583.96	348.97	1845.58
2	2	2605.1	2584.99	346.69	1845.6
3	2	2607.1	2586.99	343.1	1845.73
4	1	2606.17	2588.75	343.71	1846.21
2	1	2610.23	2584.81	344.69	1846.58
2	4	2605.8	2584.3	350.35	1846.81
3	1	2612.23	2586.81	341.71	1846.92
4	2	2608.17	2588.99	345.1	1847.42
3	3	2605.8	2585.96	350.92	1847.56
3	4	2607.8	2586.3	351.09	1848.4
4	3	2607.18	2587.96	351.11	1848.75
4	4	2609.18	2588.3	354.13	1850.54
1	1	2628.77	2582.88	345.3	1852.32
1	2	2630.77	2584.88	344.24	1853.3
1	3	2632.77	2586.28	346.24	1855.1
1	4	2634.77	2587.69	348.12	1856.86

Tabela 4.8. **Wybór modelu GARCH(m,n).** Wartości kryterium AIC dla różnych wartości  $m$  i  $n$  dopasowywanych modeli GARCH, posortowane rosnąco względem średniego AIC.

Asset	Parameter	Value	Std. Error	t-statistic
Soybean	$\mu$	-0.16	0.17	-0.93
	$\omega$	4.61	2.93	1.58
	$\alpha_1$	0.0	0.05	0.0
	$\alpha_2$	0.45	0.23	1.99
	$\beta_1$	0.0	0.12	0.0
	$\beta_2$	0.0	0.24	0.0
	$\beta_3$	0.13	0.18	0.74
Soybean Oil	$\mu$	-0.11	0.12	-0.97
	$\omega$	0.08	0.09	0.89
	$\alpha_1$	0.02	0.06	0.3
	$\alpha_2$	0.09	0.05	1.68
	$\beta_1$	0.0	0.17	0.0
	$\beta_2$	0.21	0.57	0.37
	$\beta_3$	0.68	0.51	1.34
Soybean Meal	$\mu$	-0.03	0.02	-1.37
	$\omega$	0.05	0.01	3.86
	$\alpha_1$	0.1	0.07	1.36
	$\alpha_2$	0.18	0.13	1.37
	$\beta_1$	0.27	0.23	1.17
	$\beta_2$	0.0	0.23	0.0
	$\beta_3$	0.1	0.19	0.5

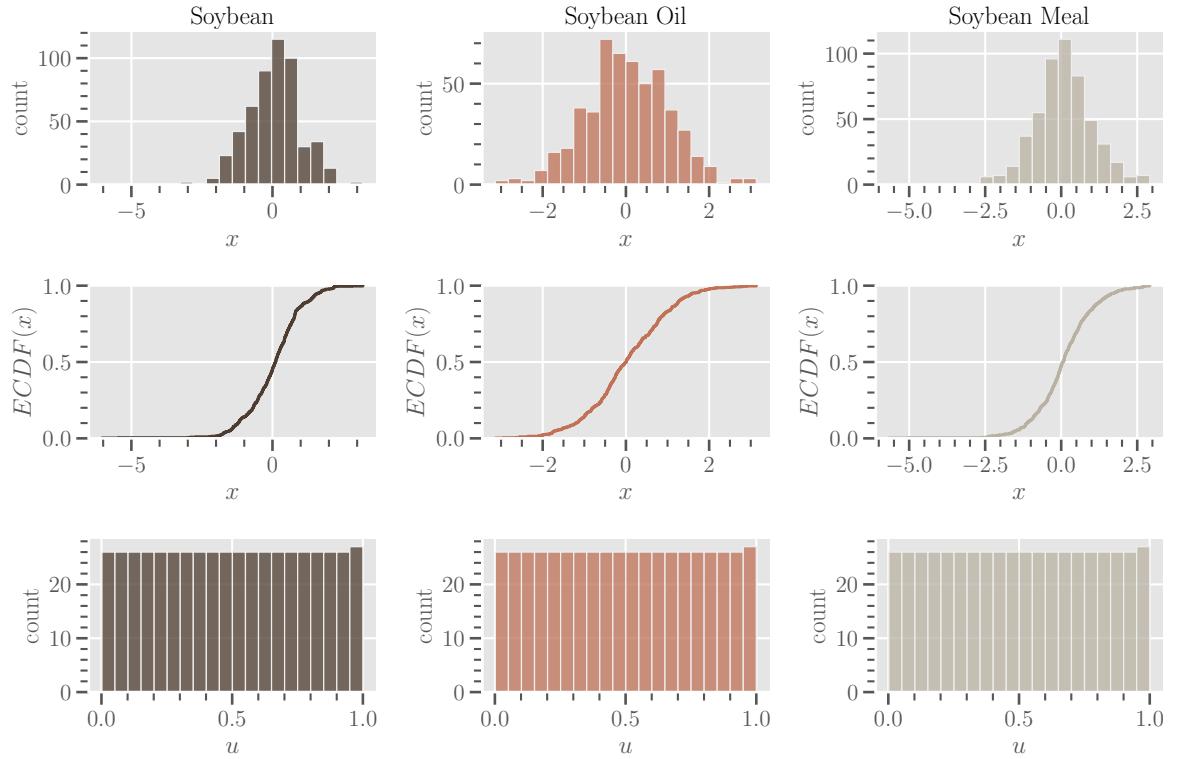
Tabela 4.9. **Parametry modeli GARCH(2,3).** Tabela przedstawia dopasowane wartości średniej logzwrotów  $\mu$ , oraz parametrów modelu GARCH(2,3) dla każdego aktywa.

Test	Soybean		Soybean Oil		Soybean Meal	
	Test statistic	p-value	Test statistic	p-value	Test statistic	p-value
Ljung-Box	10.002	0.169	0.664	0.088	21.439	0.544
t	1.01	0.313	0.657	0.511	1.583	0.114
$\chi^2$	519.909	0.507	520.627	0.516	518.438	0.489

Tabela 4.10. **Testy IID(0,1) reziduów.** Tabela przedstawia statystyki testowe i p-wartości testów: *Ljunga-Boxa* (na niezależność), *t testu* (średnia próbki równa 0) oraz  $\chi^2$  (wariancja próbki równa 1) dla reziduów modeli GARCH(2,3). W przypadku testu Ljunga-Boxa podano wartości dla lagu o najmniejszej p-wartości.

## Część Vine Copula modelu

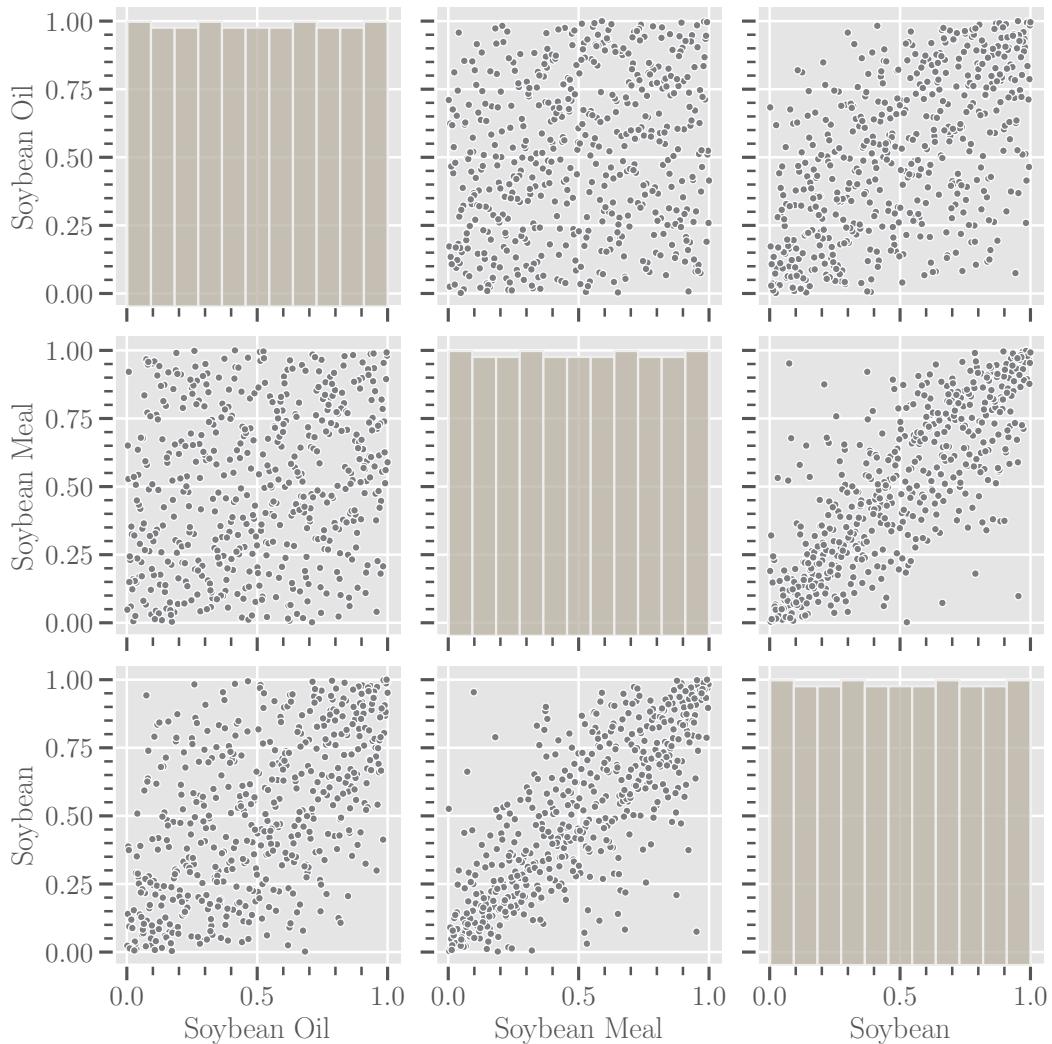
Mając szeregi czasowe reziduów będące  $IID(0, 1)$ , możemy dopasować kopułę do struktury zależności między nimi. Rezidua najpierw zostały przetransformowane poprzez transformację PIT (2.5) opartą o ich empiryczne dystrybuanty, co przedstawia rysunek 4.11. Rysunek 4.12 ukazuje natomiast zależności pomiędzy poszczególnymi ujednóstajnionymi reziduami do której będziemy dopasowywać rozkład Vine Copula.



Rysunek 4.11. **Transformacja PIT.** Histogramy rezidów (górný panel), empiryczne dystrybuanty (środkowy panel) i rezidua przetransformowane poprzez PIT (dolny panel).

Wybór odpowiedniej Vine Copula oznacza wybór rodzaju struktury (R-vine, D-vine, C-vine, ...), wybór dwuwymiarowych kopuł wewnętrz struktury, oraz estymację ich parametrów. Jak pokazaliśmy w przykładzie 2.2.1, w przypadku 3-wymiarowych danych R-vine jest w stanie przyjąć jedynie jeden rodzaj struktury, który jednocześnie spełnia warunki na C-vine oraz D-vine. Dodatkowo widzieliśmy, że cała struktura zależy jedynie od kolejności zmiennych w pierwszym drzewie  $T_1$ . Problem redukuje się tu więc do wyboru odpowiedniej kolejności, oraz estymacji dwuwymiarowych kopuł w takiej strukturze.

Używamy tu algorytmu podanego w [Dissmann et al., 2013], który dobiera strukturę w sposób krokowy: zaczyna od pary najsielniej związańych ze sobą zmiennych i rozszerza strukturę w każdym kroku, wykorzystując  $\tau$  Kendalla w celu dokonywania lokalnie optymalnych decyzji. Tabela 4.13 prezentuje wyniki tej estymacji dla różnych kolejności drzewa  $T_1$  - algorytm Dissmanna wskazuje na wybór struktury o kolejności zmien-



Rysunek 4.12. Struktura zależności reziduów. Wykresy punktowe każdy-z-każdym, oraz histogramy reziduów.

nych 132. Zwracamy uwagę na obserwację, że struktury o odwrotnych kolejnościach (jak 132 i 231) mają tę samą wartość AIC oraz log-likelihood. Wynika to z faktu, że gdy algorytm Dissmanna poszukuje optymalnej decyzji w danym kroku (czyli poszukuje odpowiednich dwuwymiarowych kopuł), pozwalamy mu na poruszanie się w dziedzinie kopuł przedstawionych w rozdziale 2.1.3 które są (radialnie) symetryczne. Z tego powodu grafy struktury D-vine nie są grafami skierowanymi i kolejność w drzewach można bez konsekwencji odwracać. Skupienie na kopułach radialnie symetrycznych jest popularnym podejściem w praktyce ([Cherubini et al., 2004], [Czado, 2019]), a rysunek 4.12 pokazuje że w przypadku naszych danych nie ma przesłanek do podejrzewania asymetrycznych zależności (obrót wykresów punktowych względem osi  $x = y$  nie powoduje zmiany charakteru zależności - są one radialnie symetryczne). O asymetrycznych kopułach przeczytać więcej w [Bedford and Cooke, 2002].

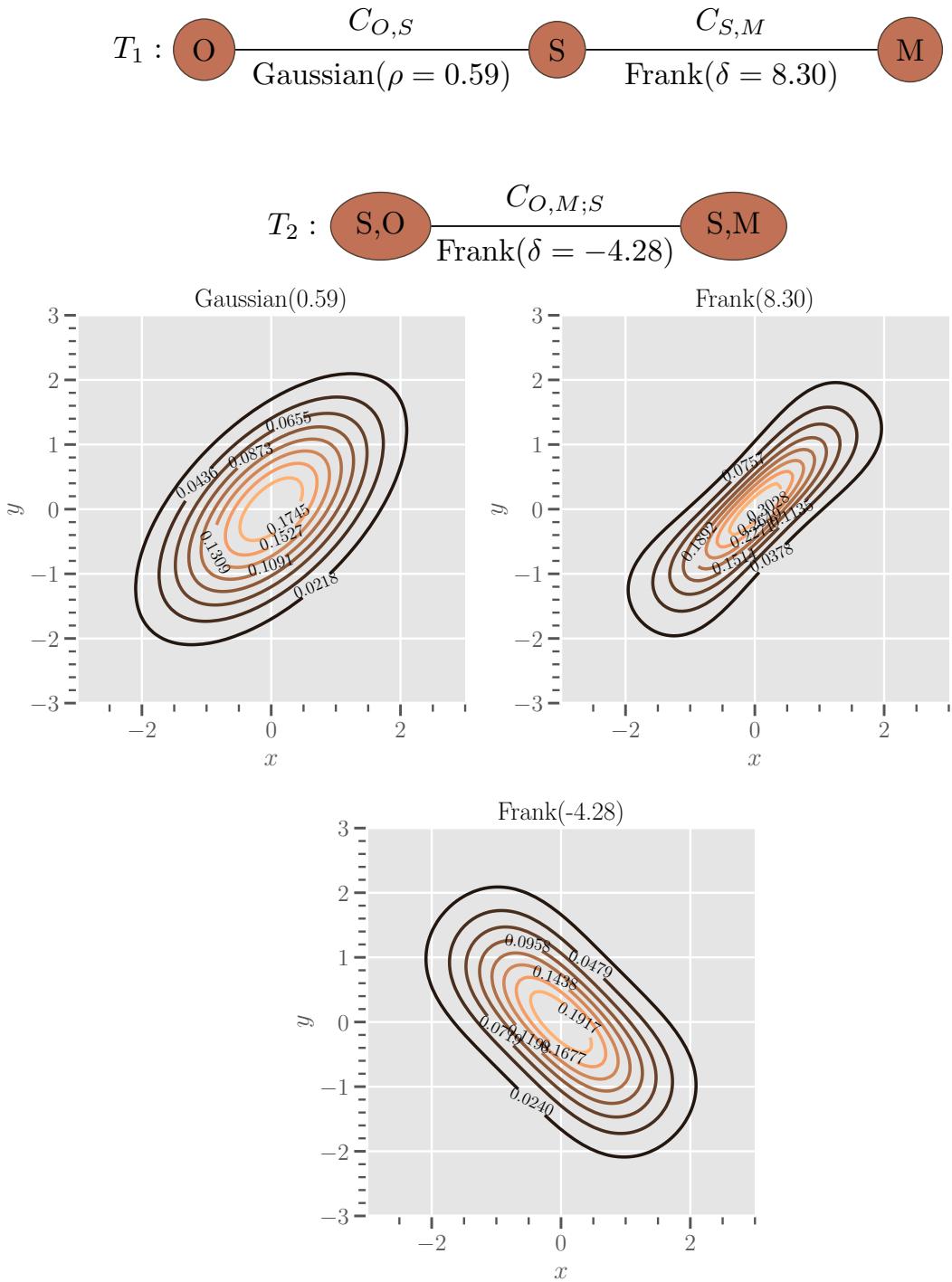
Dodatkowo ponieważ poruszamy się w dziedzinie kopuł *parametrycznych*, możemy przyspieszyć algorytm Dissmanna wykorzystując  $\tau$  Kendalla do dopasowania dwuwymiarowej struktury.

$T_1$ order	AIC	Log-likelihood
132	-940.333	473.167
231	-940.333	473.167
123	-927.937	466.969
321	-927.937	466.969
213	-923.761	465.881
312	-923.761	465.881

Tabela 4.13. **Wybór struktury Vine Copula.** Wartości kryterium AIC oraz log-likelihood dla finalnego modelu, w zależności od kolejności pierwszego drzewa.

miarowych kopuł. Ta statystyka i tak jest obliczana w każdym kroku dla każdej pary zmiennych w celu wybrania najsilniej związań zmiennych, więc algorytm może o razu użyć zależności wymienionych w 2.1.3 do przełożenia  $\hat{\tau}$  na  $\hat{\Theta}$ , czyli parametry konkretnej rodziny kopuł. Klasyczną alternatywą do estymacji parametrów byłaby metoda największej wiarodności ([Bedford and Cooke, 2002], [Czado, 2019]).

Dopasowana w ten sposób struktura zaprezentowana jest na rysunku 4.14. Widzimy w niej użycie kopuł: Gaussowskiej i Franka to modelowania zależności między reziduami. Obie te kopuły modelują zależności symetryczne i nie posiadają współczynnika zależności ogonów. Co ciekawe, rezidua soi zostały wskazane na środkowym miejscu  $T_1$ . Jako że tę strukturę można traktować z perspektywy C-vine, to jej *root node* (tutaj: soję) interpretować można jako najsilniejszy/najbardziej wpływowy wymiar ([Czado, 2019]), co zgadza się z intuicją.

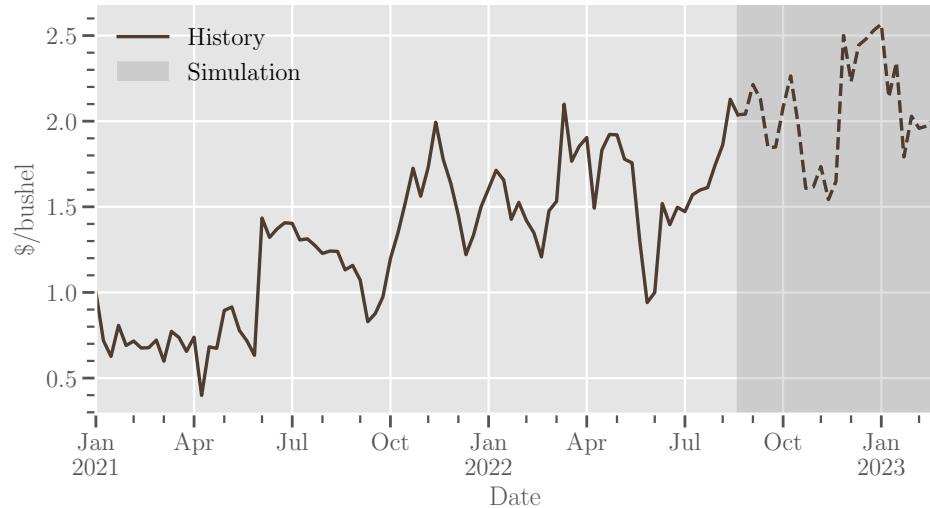


Rysunek 4.14. **Model struktury zależności.** R-vine dopasowana do danych przy pomocy algorytmu Dissmanna. Graf struktury (górny panel) i kontury kopuł w skali brzegowo-znormalizowanej (dolny panel).

### 4.3. Wycena opcji

Skalibrowany w ten sposób model integruje ze sobą strukturę czasową komponentów spreadu oraz ich współzależności. Całą strukturę można teraz odwrócić, żeby otrzymać model symulujący ścieżki komponentów spreadu, a finalnie samego spreadu. Wykonujemy w tym celu następujący algorytm:

1. Z dopasowanej struktury Vine Copula losujemy 3 ciągi jednostajnych obserwacji.
  - Efektem są ciągi  $IID \sim \mathcal{U}(0, 1)$ , o strukturze zależności zadanej przez Vine Copula.
2. Używamy jednostajnych ciągów oraz wyestymowanych wcześniej empirycznych dystrybuant do metody odwrotnej dystrybuanty.
  - Efektem są wysymulowane rezidua modelu GARCH(2, 3) o odpowiedniej strukturze zależności.
3. Używamy wysymulowanych reziduów, żeby dokonać predykcji logzwrotów według modeli ARIMA-GARCH(2, 3) dla każdego aktywu.
  - Efektem są wysymulowane logzwroty dla każdego aktywu, o odpowiedniej strukturze zależności.
4. Używamy wysymulowanych logzwrotów razem z ostatnią dostępną wartością ze zbioru danych, żeby dokonać predykcji trajektorii dla każdego aktywu.
  - Efektem są wysymulowane trajektorie dla każdego aktywu, o odpowiedniej strukturze zależności.
5. Używamy wysymulowanych trajektorii aktywów żeby obliczyć trajektorię soybean crush spreadu.



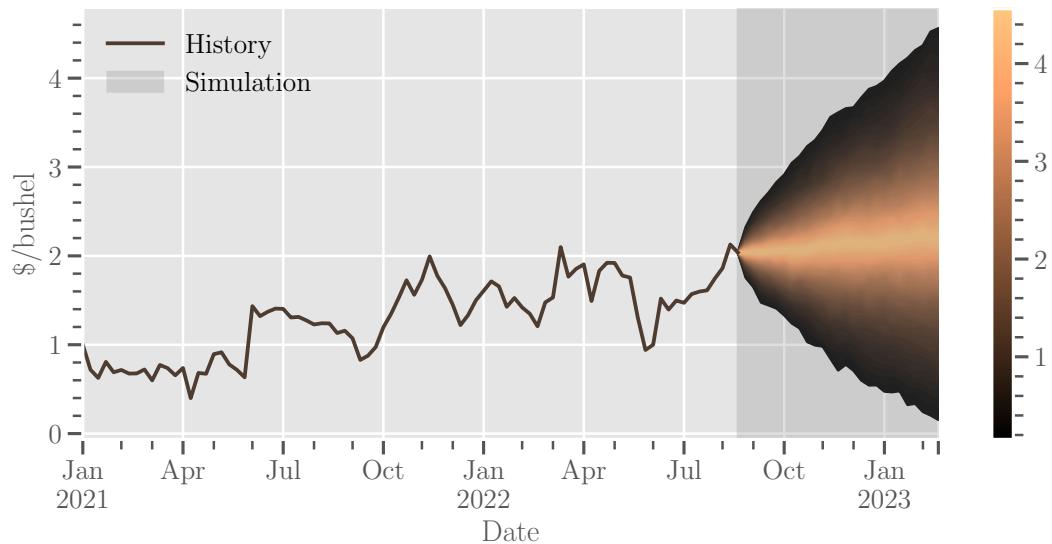
Rysunek 4.15. Symulacja trajektorii (1/2). Przykładowa 6-miesięczna symulacja crush spreadu, zgodnie z dopasowanym modelem.

Rysunek 4.15 przedstawia przykładowy wynik takiej symulacji dla crush spreadu. Widzimy, że wysymulowana trajektoria jest wiarygodna biorąc pod uwagę kontekst historii szeregu czasowego (tj. w sensie poziomu, oscylacji, czy dynamiki).

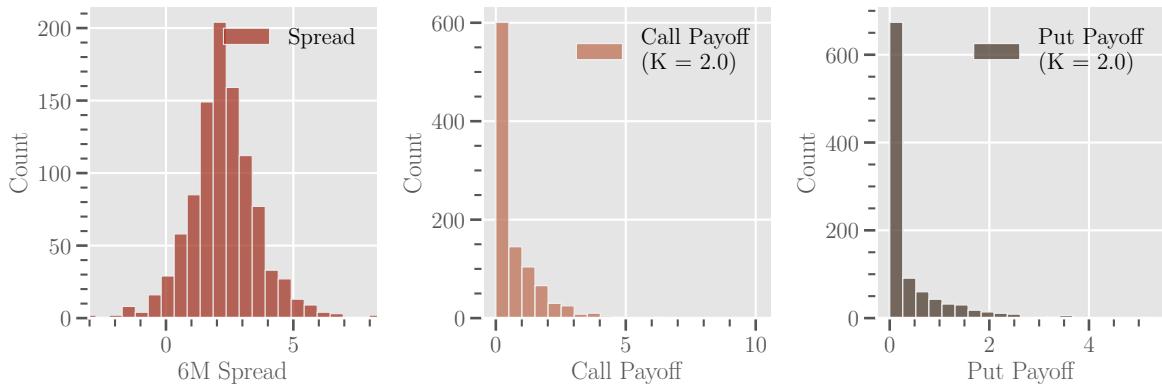
Możemy użyć metody Monte Carlo w celu otrzymania nie pojedynczej trajektorii, ale wielu możliwych realizacji, a następnie użyć tych symulacji do wyceny instrumentów pochodnych na spread. Zaprezentujemy ideę na przykładzie europejskich opcji na spread, o parametrach:

- Instrument pierwotny: soybean crush spread  $s(t)$
- Termin wygaśnięcia:  $T = 27$  tygodni
- Ceny wykonania: od  $0.5 \times K$  do  $1.5 \times K$ , gdzie  $ATM = K \approx \$2/\text{buszel}$
- Money-market rate:  $r = 5\%$

Podobnie jak w [Bernard and Czado, 2012], czy [Herath et al., 2011] przeprowadziliśmy powtórzenia Monte Carlo, w trakcie których dla każdej ścieżki obliczona została wypłata opcji kupna i sprzedaży, a następnie wyniki zostały uśrednione i zdyskontowane. W ten sposób otrzymujemy finalną cenę opcji w mierze rzeczywistej. Rysunek 4.16 prezentuje wynik symulacji trajektorii spreadu w postaci rozkładu wysymulowanych wartości dla każdego punktu czasowego (każdego tygodnia), natomiast rysunek 4.17 pokazuje rozkład spreadu w momencie wygaśnięcia opcji, wraz z rozkładem wypłat opcji call i put. Średnia wypłata, zdyskontowana do chwili  $T = 0$  daje cenę opcji - co prezentujemy dla różnych cen wykonania w tabeli 4.18.



Rysunek 4.16. **Symulacja trajektorii (2/2).** Rozkład symulacji Monte Carlo 6-miesięcznych trajektorii crush spreadu.

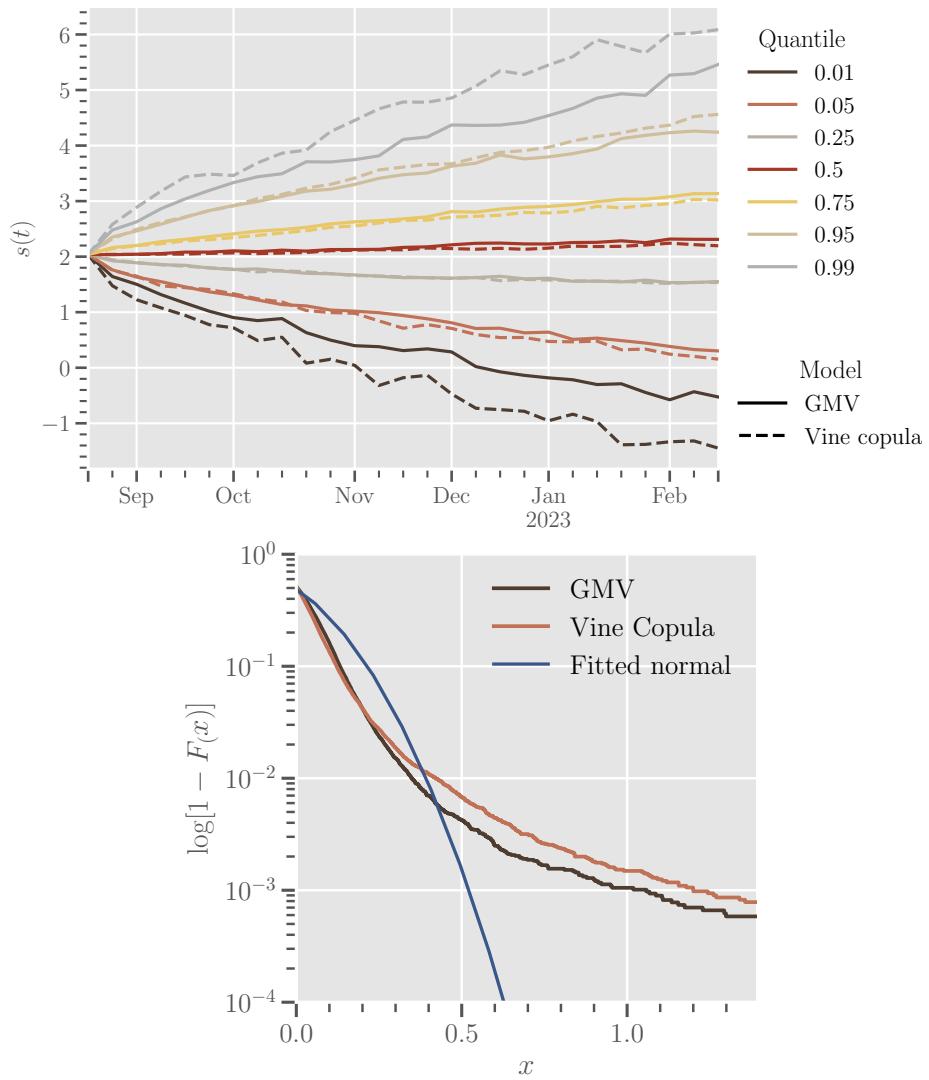


Rysunek 4.17. **Moment wykonania opcji.** Histogram wysymulowanych spreadów (lewy panel), oraz histogramy wypłat z opcji: call (środkowy panel) i put (prawy panel), przy cenie wykonania  $K = 2.0$ .

Strike	Call			Put		
	Price	Std. Err.		Price	Std. Err.	
1.00	1.35	0.04		0.12	0.01	
1.33	1.16	0.04		0.15	0.02	
1.67	0.98	0.03		0.2	0.02	
ATM	0.82	0.03		0.26	0.02	
2.33	0.68	0.03		0.34	0.02	
2.67	0.55	0.03		0.43	0.02	
3.00	0.45	0.03		0.55	0.03	
3.33	0.36	0.02		0.68	0.03	
3.67	0.29	0.02		0.83	0.03	
4.00	0.23	0.02		0.99	0.03	

Tabela 4.18. **Ceny europejskich opcji.** Ceny opcji europejskich kupna i sprzedaży w modelu symulacyjnym ARIMA-GARCH-VineCopula, razem z ich błędami standaryзовymi. Wyniki otrzymane metodą Monte Carlo dla 1000 powtórzeń.

Na koniec, w celu zilustrowania istotnego wpływu zastosowania Vine Copula, rozważyliśmy sytuację w której model zostałby uproszczony i zamiast struktury Vine do modelowania zależności użytoby najprostszego modelu GMV (gaussian multivariate copula). Rysunek 4.19 prezentuje porównanie rozkładu trajektorii spreadu między tymi dwoma modelami. Zaobserwować można, że użycie wielowymiarowej kopyły gaussowskiej skutkuje uchwytem ciężkoogonowego charakteru spreadu, oraz że kwantyle dla większości rzędów przebiegają blisko kwantyli powstałych z modelu Vine Copula. Jednak istnieje istotna różnica, widoczna w kwantylach ekstremalnych rzędów, jak 0.01 czy 0.99 które udowadniają, że model Vine Copula uchwyca jeszcze cięższe ogony logzwrotów spreadu w stosunku do modelu GMV.



Rysunek 4.19. **Porównanie modeli.** Kwantyle trajektorii wysymulowanych spreadów przy pomocy wielowymiarowej kopyły normalnej (GMV), oraz Vine Copula (górnny panel). Porównanie ciężkości ogonów logzwrotów spreadu (dolny panel).

## Wnioski

W pracy omówiliśmy model ARIMA-GARCH-VineCopula w kontekście symulacji spreadu wielu aktywów. Podaliśmy teorię kopyał, oraz struktur Vine Copula z wyrozumieniem ich zastosowań w praktyce, oraz omówiliśmy ich związek z rodzajami struktur zależności alternatywnymi dla najprostszej liniowej korelację Pearsona.

Przedstawiliśmy wyniki kalibracji modelu do tygodniowych cen zamknięcia komponentów *soybean crush spreadu*. W trakcie analizy udowodniliśmy ciężkoogonowość logzwrotów, oraz brak istotnej struktury autokorelacji czy częściowej autokorelacji w komponentach spreadu. Dane przejawiają heteroskedastyczność, dającą się skutecznie zamodelować przy pomocy modelu GARCH(2, 3).

Zbadana została struktura zależności reziduów modeli GARCH, do których dopasowany został model Vine Copula bazujący na kopyałach: Gaussowskiej i Franka. Model ukazał istotność soi jako wiodącego szeregu czasowego o największym wpływie na pozostałe komponenty, oraz wskazał na brak istotnej zależności w ogonach reziduów co przejawiało się w dopasowaniu kopyał o braku współczynnika zależności ogonów.

Porównaliśmy model Vine Copula z modelem wielowymiarowej kopyły gaussowskiej dochodząc do wniosku, że oba modele uchwycią ciężkoogonowość spreadu, oraz dają podobne rozkłady logzwrotów dla większości kwantyli - jednak Vine Copula przejawią cięższe ogony w kwantylach ekstremalnych (0.01, 0.99).

Finalny symulacyjny model potrafi produkować realistyczne realizacje trajektorii spreadu, co pozwala wykorzystywać go do wyceny instrumentów pochodnych na spread metodą Monte Carlo - co zaprezentowane zostało dla przypadku europejskich opcji.

# Bibliografia

- [Anderson, 2003] Anderson, T. W. (2003). *An Introduction to Multivariate Statistical Analysis*.
- [Aste, 2021] Aste, T. (2021). Stress testing and systemic risk measures using elliptical conditional multivariate probabilities.
- [Barrett and Kolb, 1995] Barrett, W. B. and Kolb, R. W. (1995). Analysis of spreads in agricultural futures. *Journal of Futures Markets*, 15(1):69–86.
- [Bedford and Cooke, 2002] Bedford, T. and Cooke, R. M. (2002). Vines: A new graphical model for dependent random variables. *The Annals of Statistics*, 30.
- [Bernard and Czado, 2012] Bernard, C. and Czado, C. (2012). Multivariate option pricing using copulae. *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, 29.
- [Bjerksund and Stensland, 2014] Bjerksund, P. and Stensland, G. (2014). Closed form spread option valuation. *Quantitative Finance*, 14(10):1785–1794.
- [Black and Scholes, 1973] Black, F. and Scholes, M. (1973). The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, 81(3):637–654.
- [Borak et al., 2005] Borak, S., Hrdle, K. W., and Weron, R. (2005). Stable distributions. *SFB 649 Discussion Paper*, 008.
- [Carmona et al., 2012] Carmona, R., Coulon, M., and Schwarz, D. (2012). The valuation of clean spread options: Linking electricity, emissions and fuels. *Quantitative Finance*, 12:1951–1965.
- [Carmona and Durrleman, 2003] Carmona, R. and Durrleman, V. (2003). Pricing and hedging spread options. *SIAM Review*, 45.
- [Cherubini et al., 2012] Cherubini, U., Gobbi, F., Mulinacci, S., and Romagnoli, S. (2012). *Dynamic Copula Methods in Finance*.
- [Cherubini et al., 2004] Cherubini, U., Luciano, E., and Vecchiato, W. (2004). *Copula Methods in Finance*.
- [Choudhry, 2005] Choudhry, M. (2005). *Fixed-income securities and derivatives handbook*.
- [Clayton, 1978] Clayton, D. G. (1978). A model for association in bivariate life tables and its application in epidemiological studies of familial tendency in chronic disease incidence. *Biometrika*, 65.
- [CME Group, 2015] CME Group (2015). *Agricultural Products: Soybean Crush Reference Guide*.
- [Cui et al., 2016] Cui, J., In, F., and Maharaj, E. A. (2016). What drives the libor–ois spread? evidence from five major currency libor–ois spreads. *International Review of Economics & Finance*, 45:358–375.
- [Czado, 2019] Czado, C. (2019). *Analyzing Dependent Data with Vine Copulas*.

- [Dissmann et al., 2013] Dissmann, J., Brechmann, E., Czado, C., and Kurowicka, D. (2013). Selecting and estimating regular vine copulae and application to financial returns. *Computational Statistics & Data Analysis*, 59:52–69.
- [Espen and Kettler, 2011] Espen, F. B. and Kettler, P. C. (2011). Dynamic copula models for the spark spread. *Quantitative Finance*, 11(3):407–421.
- [Eyigungor, 2006] Eyigungor, B. (2006). Sovereign debt spreads in a markov switching regime. *Manuscript, UCLA*.
- [Gao et al., 2021] Gao, J., Yang, Y., Gao, F., and Liang, P. (2021). Optimization of electric vehicles based on frank-copula-gluecvar combined wind and photovoltaic output scheduling research. *Energies*, 14(19).
- [Genest and Nešlehová, 2007] Genest, C. and Nešlehová, J. (2007). A primer on copulas for count data. *Astin Bulletin*, 37.
- [Halkos and Tsirivis, 2019] Halkos, G. E. and Tsirivis, A. S. (2019). Energy commodities: A review of optimal hedging strategies. *Energies*, 12(20).
- [Hasan et al., 2019] Hasan, I., Lynch, D., and Akhtar, S. (2019). *Stress Testing. Approaches, Methods and Applications*.
- [Haug and Taleb, 2007] Haug, E. and Taleb, N. (2007). Why we have never used the black-scholes-merton option pricing formula.
- [Herath et al., 2011] Herath, H., Kumar, P., and Amershi, A. (2011). Crack spread option pricing with copulas. *Journal of Economics and Finance*, 37:1–22.
- [Hougaard, 1986] Hougaard, P. (1986). A class of multivariate failure time distributions. *Biometrika*, 73(3).
- [Joe, 1997] Joe, H. (1997). *Multivariate Models and Multivariate Dependence Concepts*.
- [KGHM Polska Miedź S.A. Group, 2021] KGHM Polska Miedź S.A. Group (2021). The management board's report on the activities of kghm polska miedź s.a. and of the kghm polska miedź s.a. group in 2021.
- [Kim et al., 2020] Kim, J.-M., Kim, D. H., and Jung, H. (2020). Modeling non-normal corporate bond yield spreads by copula. *The North American Journal of Economics and Finance*, 53:101210.
- [Koopman et al., 2018] Koopman, S. J., Lit, R., Lucas, A., and Opschoor, A. (2018). Dynamic discrete copula models for high-frequency stock price changes. *Journal of Applied Econometrics*, 33.
- [Kurowicka and Joe, 2010] Kurowicka, D. and Joe, H. (2010). *Dependence Modeling: Vine Copula Handbook*.
- [Li, 1999] Li, D. X. (1999). On default correlation: A copula function approach.
- [Mandelbrot, 1997] Mandelbrot, B. B. (1997). *The variation of certain speculative prices*, pages 371–418. Springer New York, New York, NY.
- [Markowitz, 1952] Markowitz, H. (1952). Portfolio selection.
- [Matus et al., 2019] Matus, O., Barrera, J., Moreno, E., and Rubino, G. (2019). On the marshall–olkin copula model for network reliability under dependent failures. *IEEE Transactions on Reliability*, 68(2):451–461.
- [McCulloch, 1996] McCulloch, J. H. (1996). 13 financial applications of stable distributions. In *Statistical Methods in Finance*, volume 14 of *Handbook of Statistics*, pages 393–425. Elsevier.
- [Pagano and Miransari, 2016] Pagano, M. C. and Miransari, M. (2016). The importance of soybean production worldwide. In Miransari, M., editor, *Abiotic and Biotic Stresses in Soybean Production*, pages 1–26. Academic Press, San Diego.

- [Peters and Shevchenko, 2015] Peters, G. and Shevchenko, P. (2015). *Advances in Heavy Tailed Risk Modeling: A Handbook of Operational Risk*.
- [Poitras, 1998] Poitras, G. (1998). Spread options, exchange options, and arithmetic brownian motion. *Journal of Futures Markets*, 18(5):487–517.
- [Scarsini, 1984] Scarsini, M. (1984). On measures of concordance. *Stochastica*, 8(3):201–218.
- [Schefzik, 2015] Schefzik, R. (2015). Multivariate discrete copulas, with applications in probabilistic weather forecasting. *Publications de l'Institut de Statistique de l'Université de Paris*.
- [Schwartz, 1997] Schwartz, E. S. (1997). The stochastic behavior of commodity prices: Implications for valuation and hedging. *The Journal of Finance*, 52(3):923–973.
- [Sklar, 1959] Sklar, A. (1959). Fonctions de répartition à n dimensions et leurs marges. *Publications de l'Institut de statistique de l'Université de Paris*, 8:229–231.
- [Sukcharoen and Leatham, 2017] Sukcharoen, K. and Leatham, D. J. (2017). Hedging downside risk of oil refineries: A vine copula approach. *Energy Economics*, 66:493–507.
- [The Basel Committee on Banking Supervision, 2010] The Basel Committee on Banking Supervision (2010). *Revisions to the Basel II Market Risk Framework*.
- [U.S. Energy Information Administration, 2022] U.S. Energy Information Administration (2022). Short-term energy outlook.
- [Vaz de Melo Mendes, 2005] Vaz de Melo Mendes, B. (2005). Asymmetric extreme interdependence in emerging equity markets.