



Akademia Górnictwo-Hutnicza  
im. Stanisława Staszica  
w Krakowie

---

---

Praca magisterska

## Zastosowanie modeli kopułowych do modelowania spreadu aktywów

Piotr Mikler

Kierunek: Matematyka  
Specjalność: Matematyka finansowa

Nr albumu: 409145

Promotor  
dr inż. Jerzy Dzieża



Wydział Matematyki Stosowanej

---

Kraków 2022

## Oświadczenie studenta

*Uprzedzony(-a) o odpowiedzialności karnej na podstawie art. 115 ust. 1 i 2 ustawy z dnia 4 lutego 1994 r. o prawie autorskim i prawach pokrewnych (t.j. Dz.U. z 2018 r. poz. 1191 z późn. zm.): „Kto przywłaszcza sobie autorstwo albo wprowadza w błąd co do autorstwa całości lub części cudzego utworu albo artystycznego wykonania, podlega grzywnie, karze ograniczenia wolności albo pozbawienia wolności do lat 3. Tej samej karze podlega, kto rozpowszechnia bez podania nazwiska lub pseudonimu twórcy cudzy utwór w wersji oryginalnej albo w postaci opracowania, artystyczne wykonanie albo publicznie zniekształca taki utwór, artystyczne wykonanie, fonogram, videogram lub nadanie.”, a także uprzedzony(-a) o odpowiedzialności dyscyplinarnej na podstawie art. 307 ust. 1 ustawy z dnia 20 lipca 2018 r. Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce (Dz. U. z 2018 r. poz. 1668 z późn. zm.) „Student podlega odpowiedzialności dyscyplinarnej za naruszenie przepisów obowiązujących w uczelni oraz za czyn uchybiający godność studenta.”, oświadczam, że niniejszą pracę dyplomową wykonałem(-am) osobiście i samodzielnie i nie korzystałem(-am) ze źródeł innych niż wymienione w pracy. Jednocześnie Uczelnia informuje, że zgodnie z art. 15a ww. ustawy o prawie autorskim i prawach pokrewnych Uczelnia przysługuje pierwszeństwo w opublikowaniu pracy dyplomowej studenta. Jeżeli Uczelnia nie opublikowała pracy dyplomowej w terminie 6 miesięcy od dnia jej obrony, autor może ją opublikować, chyba że praca jest częścią utworu zbiorowego. Ponadto Uczelnia jako podmiot, o którym mowa w art. 7 ust. 1 pkt 1 ustawy z dnia 20 lipca 2018 r. – Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce (Dz. U. z 2018 r. poz. 1668 z późn. zm.), może korzystać bez wynagrodzenia i bez konieczności uzyskania zgody autora z utworu stworzonego przez studenta w wyniku wykonywania obowiązków związanych z odbywaniem studiów, udostępniać utwór ministrowi właściwemu do spraw szkolnictwa wyższego i nauki oraz korzystać z utworów znajdujących się w prowadzonych przez niego bazach danych, w celu sprawdzania z wykorzystaniem systemu antyplagiatowego. Minister właściwy do spraw szkolnictwa wyższego i nauki może korzystać z prac dyplomowych znajdujących się w prowadzonych przez niego bazach danych w zakresie niezbędnym do zapewnienia prawidłowego utrzymania i rozwoju tych baz oraz współpracujących z nimi systemów informatycznych.*

.....  
(Podpis czytelny studenta)

## Oświadczenie promotora

*Oświadczam, że praca spełnia wymogi stawiane pracom magisterskim.*

.....  
(Podpis promotora)

# **Streszczenie**

Spready grają dziś ogromną rolę na rynkach finansowych. Służą inwestorom, spekulantom i zarządzającym ryzykiem do oceny potencjalnych zysków z inwestycji, implikowania zmiennych rynkowych, czy kontrolowania ekspozycji na ryzyko. W pracy prezentujemy modele kopołowe jako narzędzia odpowiednie do statystycznej analizy współzależności między komponentami spreadu.

Literatura bogata jest w przykłady zastosowania dwuwymiarowych kopołów do modelowania dwuwymiarowych spreadów. Te modele, oparte o połączenie analizy szeregow czasowych oraz modelowania reziduów przy pomocy kopołów stały się jednym z klasycznych podejść do problemu wyceny instrumentów pochodnych na spread. Na początku lat 2000 dodatkowo rozwinęła się teoria modeli Vine Copula, pozwalających na elastyczny opis zależności wielowymiarowych. Od tamtego czasu konsekwentnie odnoszą one sukcesy w modelowaniu zjawisk w wielu dziedzinach nauki: od lotnictwa, przez biologię po finanse. Mimo tego, literatura dotycząca aplikacji Vine Copula do modelowania wielowymiarowych spreadów jest zdecydowanie ograniczona.

Praca poszerza literaturę Vine Copula o aplikację tych modeli do spreadu na 3 aktywa. Prezentujemy niezbędną teorię, oraz pokazujemy w jaki sposób zbudować symulacyjny model dla soybean crush spread, w którym numerycznie wyceniamy europejskie opcje na ten rodzaj spreadu.

## **Słowa kluczowe**

spread, soja, opcje, copuła, vine copula

# Abstract

Nowadays, spreads play a vital role on global financial markets. They serve both investors, speculators and risk managers alike as a measure of potential investment turnover, to imply market variables, or as tools for controlling market risk exposures associated with combinations of risk factors. In this paper, we present copula models as a suitable tool for statistical modelling of dependency between spread components.

The literature is rich with examples of bivariate copulas applied to model bivariate spreads. These models which are a combination of time series analysis and copulas have become one of the classical solutions to the problem of pricing spread derivatives. In early 2000s the copula theory was extended to Vine Copula models, allowing the flexibility of copulas to be used in higher dimensions. Since then they have been successfully applied to model phenomena in a wide range of industries: from aviation to biology to finance. Nevertheless, the literature on modelling spreads in higher dimensions using Vine Copulas is relatively limited.

This paper extends the literature of Vine Copula models by presenting an application to 3-dimensional spread modelling. We present the necessary theory, and show how to build a simulation model for soybean crush spread, as well as how to numerically price European options on that asset.

## Key words

spread, soybean, option, copula, vine copula

# Spis treści

<b>Streszczenie</b> . . . . .	1
<b>Abstract</b> . . . . .	2
<b>Wprowadzenie</b> . . . . .	4
<b>Rozdział 1. Wielowymiarowe zmienne losowe</b> . . . . .	5
1.1. Zmienne losowe . . . . .	5
1.2. Rozkłady wielowymiarowe . . . . .	7
1.3. Miary współzależności . . . . .	8
<b>Rozdział 2. Modele kopułowe</b> . . . . .	13
2.1. Dwuwymiarowe kopuły . . . . .	14
2.1.1. Wprowadzenie i definicja . . . . .	14
2.1.2. Probabilistyczna interpretacja . . . . .	17
2.1.3. Popularne kopuły i ich własności . . . . .	19
2.2. Vine Copulas . . . . .	30
2.2.1. Wielowymiarowe kopuły . . . . .	30
2.2.2. Pair Copula Constructions . . . . .	30
2.2.3. Vine Copula . . . . .	30
<b>Rozdział 3. Spready na rynkach finansowych</b> . . . . .	31
3.1. Popularne rodzaje spreadów . . . . .	31
3.2. Modelowanie spreadów . . . . .	31
3.3. Model kopułowy . . . . .	31
<b>Rozdział 4. Zastosowanie modelu do danych rynkowych</b> . . . . .	32
<b>Wnioski</b> . . . . .	33
<b>Bibliografia</b> . . . . .	34

# Wprowadzenie

Celem tej pracy jest zbadanie skuteczności modeli *Vine Copula* w zastosowaniu do modelowania spreadu na różnicę cen 3 aktywów. Podajemy teorię niezbędną do zdefiniowania tych modeli, omawiamy obecne podejścia do modelowania spreadu i kalibrujemy model *Vine Copula* do danych rzeczywistych dotyczących *soybean crush spreadu*. W tym modelu numerycznie wyceniamy europejskie opcje na spread.

W pierwszym rozdziale wprowadzamy istotne dla teorii kopoł obiekty z zakresu probabiliistyki i statystyki. Przedstawiamy wielowymiarowe zmienne losowe, z naciiskiem na modele ich rozkładów najczęściej stosowane w praktyce, oraz wskazując na ich istotne ograniczenia. Definiujemy również miary współzależności zmiennych losowych, wychodząc ze statystycznego punktu odniesienia.

Drugi rozdział stanowi opis dwuwymiarowych modeli kopołowych i ich rozszerzenia do *Vine Copulas*. Definiujemy w nim dwuwymiarowe kopoły, podajemy przykłady i pokazujemy że są rozszerzeniem rozkładów wielowymiarowych z rozdziału pierwszego. Redefiniujemy przy tym również miary współzależności z rozdziału pierwszego, tym razem w języku kopoł.

W rozdziale trzecim skupiamy się na pojęciu spreadu aktywów, podajemy ich przykłady obecne na rynkach finansowych i wymieniamy podejścia do ich modelowania. Skupiamy się na podejściu kopołowym, łączącym modelowanie szeregów czasowych z dwuwymiarowymi kopołami. Ideę tę w naturalny sposób rozszerzamy do modelowania spreadów na więcej niż jedno aktywo z wykorzystaniem *Vine Copulas*.

Ostatni rozdział prezentuje wynik kalibracji modelu do rzeczywistych danych, tj. cen *soybean crush spread*, czyli różnicy między ceną surowca (ziaren soi), a powstających z niej produktów: mączki sojowej i olejku sojowego. Pokazujemy jak w numeryczny sposób można wycenić w tym modelu opcje europejskie, oraz omawiamy jego wady ujawnione w analizie symulacji.

---

## Rozdział 1

---

# Wielowymiarowe zmienne losowe

W klasycznym studium doboru struktury portfela ([Markowitz, 1952]), Markovitz analizuje portfel aktywów. Przedmiotem tej pracy jest opis sposobu, w jaki indywidualne pozycje w portfelu wpływają na jego całociowy zwrot i ryzyko. Współczesna teoria portfela która została zapoczątkowana tą pracą wymaga zamodelowania całego systemu jakim jest zbiór akcji w portfelu. Markovitz pokazuje w swojej pracy istotę współzależności między poszczególnymi aktywami, od której zależy czy ryzyko portfela ulega dywersyfikacji, czy jest amplifikowane. Modelowanie każdego aktywa z osobna jest niewystarczające, ponieważ istota ich wpływu na portfel tkwi w przeważającym stopniu we współzależnościach pomiędzy nimi.

Problem wielowymiarowości i poprawnego jej opisu pojawia się nie tylko w finansach, ale w prawie każdej dziedzinie gdzie do realnych problemów aplikuje się modelowanie matematyczne. Zanim wprowadzimy więc pojęcie kopyły, które posłuży nam do analizy wielowymiarowych zależności, w tym rozdziale skupimy się na  $d$ -wymiarowych wektorach losowych  $\mathbf{X} = [X_1, X_2, \dots, X_d]$  i przypomnimy elementy rachunku prawdopodobieństwa i statystyki istotnych z punktu widzenia teorii kopył.

### 1.1. Zmienne losowe

Rozpatrywać będziemy przestrzeń probabilistyczną  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , czyli niech  $\Omega$  to pewien niepusty zbiór,  $\mathcal{F}$  to  $\sigma$ -ciało zdarzeń losowych, a  $\mathbb{P}$  to funkcja  $\mathbb{P}: \Omega \rightarrow [0, 1]$ .

**Definicja 1.1** ( $n$ -wymiarowa zmienna losowa). [Kordecki, 2010]  $n$ -wymiarową zmienną losową nazywamy funkcję określoną na przestrzeni zdarzeń elementarnych  $\Omega$  i przyjmującą wartości rzeczywiste:

$$X: \Omega \mapsto \mathbb{R}^n,$$

taką, że

$$\{\omega: X(\omega) < x\} \in \mathcal{F},$$

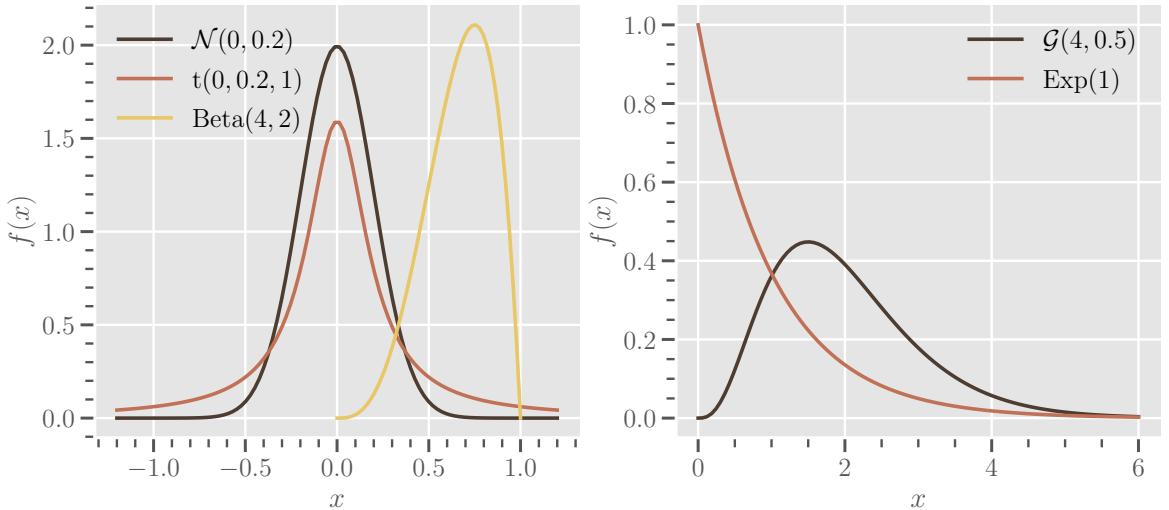
dla każdego  $x \in \mathbb{R}$ .

W całej pracy zakładamy że poruszamy się w przestrzeni zmiennych ciągłych, ponieważ dotyczyć będziemy problematyki danych rynkowych o takim charakterze. Teoria kopołów jest rozwinięta co prawda również dla zmiennych dyskretnych ([Genest and Nešlehová, 2007]) i dorobiła się już ciekawych aplikacyjnych prac (np. [Koopman et al., 2018], czy [Schefzik, 2015]), jednak literatura jest tu zdecydowanie uboższa. Do opisu interesujących nas rozkładów dostępne będą więc mieć analityczne postaci ich dystrybuanty lub gęstości. Ponieważ często podaje się różne ich parametryzacje, w tabeli 1.1 podajemy gęstości zmiennych losowych przewijających się w tej pracy. Ich wykresy widoczne są na wykresie 1.2.

Warto wspomnieć, że istnieją również użyteczne rozkłady, które nie dają się wyrazić za pomocą gęstości czy dystrybuanty. Najpopularniejszym przykładem mogą być rozkłady stabilne, gdzie jedyne czym może my się posługiwać to funkcja charakterystyczna. [Borak et al., 2005], czy [McCulloch, 1996] podają bardzo dobry przegląd teorii rozkładów stabilnych i pokazują ich przewagę w kontekście modelowania nie-gaussowskich zwrotów na rynkach finansowych.

**Tabela 1.1. Popularne jednowymiarowe zmienne losowe.** Tabela przedstawia dystrybuanty, oraz gęstości popularnych jednowymiarowych zmiennych losowych pojawiających się w tej pracy.

Rozkład	Oznaczenie	Nośnik	Gęstość
Normalny	$\mathcal{N}(\mu, \sigma)$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$
T-studenta	$t(\mu, \sigma, \nu)$	$\mathbb{R}$	$\frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\Gamma(\frac{\nu}{2})\sqrt{\pi\nu}\sigma} \left[1 + \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2 \frac{1}{\nu}\right]^{-\frac{\nu+1}{2}}$
Beta	Beta( $\alpha, \beta$ )	$[0, 1]$	$x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}$
Wykładniczy	Exp( $\lambda$ )	$\mathbb{R}^+$	$\lambda e^{-\lambda x}$
Gamma	$\mathcal{G}(\alpha, \beta)$	$\mathbb{R}^+$	$x^{\alpha-1}e^{-\beta x} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}$



Rysunek 1.2. Przykładowe gęstości zmiennych losowych z tabeli 1.1.

Do opisu zmiennych losowych *wielowymiarowych*, oprócz gęstości łącznej rozkładu wyróżniamy dodatkowo gęstości warunkowe i brzegowe. Opisują one jak zachowuje się współrzędna wektora losowego, jeśli pozostałe przyjmą pewne wartości, lub kompletnie wyłączając ich wpływ.

**Definicja 1.2** (Rozkłady brzegowy). *Rozpatrzmy d-wymiarową zmienną losową  $\mathbf{X} = [X_1, X_2, \dots, X_d]$  o gęstości  $f(x_1, \dots, x_d)$ . Gęstość rozkładu brzegowego  $X_j$  definiujemy jako:*

$$f_j(x_j) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \dots, x_{j-1}, x, x_{j+1}, \dots, x_d) dx_1 \dots dx_{j-1} dx_{j+1} \dots dx_d.$$

**Definicja 1.3** (Rozkład warunkowy). *Rozpatrzmy d-wymiarową zmienną losową  $\mathbf{X} = [X_1, X_2, \dots, X_d]$  o gęstości  $f(x_1, \dots, x_d)$ . Gęstość rozkładu warunkowego  $X_j | X_k$  definiujemy jako:*

$$f_{j|k}(x_j | x_k) = \frac{f(x_1, \dots, x_d)}{f_k(x_k)}.$$

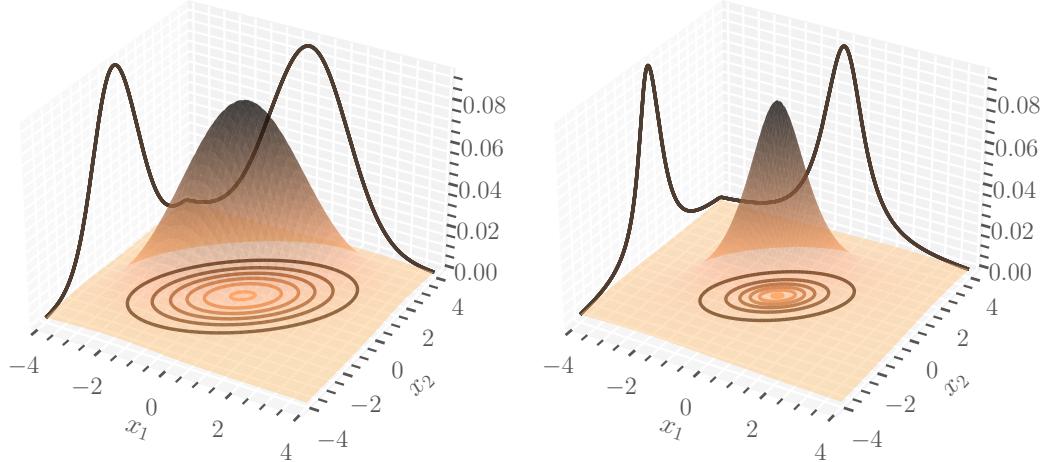
## 1.2. Rozkłady wielowymiarowe

Naturalnym jest więc, że w praktyce często rozważamy modele wielowymiarowych zmiennych losowych, które mają regularne, łatwe do opisania gęstości łączne. Rozkłady jednowymiarowe z tabeli 1.1 w naturalny sposób znajdują swoje rozszerzenia na więcej wymiarów ([Anderson, 2003], [Cherubini et al., 2004]). Najpopularniejszym tego przykładem jest rodziną *d*-wymiarowych rozkładów eliptycznych, do której należą rozkłady o gęstości postaci:

$$f_{\mathcal{N}}(x, \mu, \Sigma) = k_d |\Sigma|^{-0.5} g((x - \mu)^T \Sigma^{-1} (x - \mu)).$$

W powyższej reprezentacji,  $k_d \in \mathbb{R}$  jest stałą zależną od wymiaru,  $\mu$  jest *d*-wymiarowym wektorem średnich,  $\Sigma \in \mathbb{R}^{d \times d}$  to symetryczna, dodatnio zdefiniowana macierz, a  $g: [0, \infty) \mapsto [0, \infty)$  jest pewną funkcją która nie zależy od wymiaru wektora.

Dla odpowiednio dobranych  $g$  i  $k_d$  otrzymamy w tej rodzinie wielowymiarowy rozkład normalny, czy wielowymiarowy rozkład t. Powstają one przy odpowiednio  $k_d = (2\pi)^{-0.5d}$  i  $g(s) = \exp(-0.5t)$ , lub  $k_d = \Gamma(\frac{\nu+d}{2})/\Gamma(\frac{\nu}{2})$  i  $g(s) = (1 + \frac{t}{\nu})^{-(\nu+d)/2}$ .



Rysunek 1.3. Gęstości przykładowych rozkładów eliptycznych ( $d = 2, \mu = [0, 0], \Sigma = [\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}]$ ). Lewy panel: 2-wymiarowy rozkład normalny. Prawy panel: 2-wymiarowy rozkład t ( $\nu = 0.5$ ).

Używając rozkładów eliptycznych, implikujemy model w którym rozkłady brzegowe pochodzą z tej samej rodziny. Obserwując rysunek 1.3, można rozpoznać charakterystyczne kształty rozkładów brzegowych. Manipulując różnymi rozkładami eliptycznymi możemy więc zamodelować różne struktury korelacji między zmiennymi, czy też ciężkość ogonów, lecz tracimy swobodę wyboru rozkładów brzegowych. [Markowitz, 1952] i jego model bazują właśnie na rozkładzie multinormalnym ponieważ zakładają, że wektor średnich i macierz korelacji wystarczająco opisuje rozkład zwrotów aktywów rynkowych. Podejście to łatwo obalić ze względu na empiryczne dowody ciężkoogonowego charakteru zachowania rynku akcji [Mandelbrot, 1997], czy zjawiska niesymetrycznej, silniejszej korelacji w lewym ogonie [Kurowicka and Joe, 2010]. Nie mniej jednak nie da się odmówić, że ten prosty model jest wystarczający aby uświadomić jak istotny jest wpływ zależności komponentów na zachowanie całego systemu.

### 1.3. Miary współzależności

Problemem w poprawnym opisie zależności między zmiennymi losowymi jest fakt, że dostępnych mamy wiele statystyk, czy funkcji które ją mierzą. Każda z nich uchwycia pewien konkretny aspekt współzależności, i nie da się jasno wyróżnić konkretnej. W tej sekcji pracy zaprezentujemy wybrane narzędzia służące do badania struktury zależności zmiennych losowych.

#### $\rho$ Pearsona

Podstawową i najbardziej znaną miarą współzależności zmiennych losowych jest korelacja Pearsona.

**Definicja 1.4** (Korelacja Pearsona). *Niech  $X$  i  $Y$  będą zmiennymi losowymi o skończonych drugich momentach. Współczynnikiem korelacji pearsona  $\rho$  nazywamy*

$$\rho(X, Y) := \text{Cor}(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)} \sqrt{\text{Var}(Y)}}.$$

Ten współczynnik korelacji przyjmuje wartości z zakresu  $[-1, 1]$ , gdzie  $|\rho| = 1$  oznacza idealną liniową relację. Korelacja pearsona jest podstawową miarą zależności podawaną w każdym podręczniku do statystyki. Ma jednak szereg wad: nie jest zdefiniowana dla ciężkoogonowych rozkładów (przez nieokreśloną wariancję), oraz jest wrażliwa na monotonicznie rosnące przekształcenia  $X$  i  $Y$ . Te i wiele innych ograniczeń korelacji pearsona stoi w sprzeczności z aksjomatycznym podejściem do miar zgodności (czyt. 1.5).

Gdy w rozdziale 2.1.1 zdefiniujemy czym jest główny obiekt tej pracy, czyli kopuła, zależeć nam będzie, żeby móc opisać zależność zmiennych losowych  $X$ ,  $Y$  w terminach łączącej je kopuły  $C$ . Z tego powodu, interesujące dla nas będą miary zależności, które są niezmiennicze na monotonicznie rosnące przekształcenia (ze względu na transformację PIT 2.5, czyt. rozdział 2.1.1). Korelacja pearsona nam tego nie zapewni, ale możemy zdefiniować inne miary: zgodności zmiennych losowych, które posiadają lepsze własności z punktu widzenia teorii kopuł.

Aby w pełni zdefiniować aksjomatyczne podejście do miar zgodności jak wprowadził to Scarsini w [Scarsini, 1984], potrzebujemy mieć dostępne pojęcie kopuły. W tej pracy formalnie zostaną one wprowadzone dopiero w definicji 2.4, w związku z czym na ten moment powiemy jedynie (nieformalnie), że kopuła jest funkcją która opisuje charakter i siłę zależności między zmiennymi losowymi. Pełną definicję i opis czym są kopuły można przeczytać w rozdziale 2.1.

**Definicja 1.5** (Miara zgodności). *Rozpatrzmy zmienne losowe  $X$  i  $Y$  powiązane kopułą  $C$ .  $M_{X,Y} = M_C$  nazwiemy miarą zgodności, wtedy i tylko wtedy gdy:*

1. jest zdefiniowana dla dowolnych zmiennych  $X$ ,  $Y$
2. jest relatywna, lub znormalizowana:  $M_{X,Y} \in [-1, 1]$
3. jest symetryczna:  $M_{X,Y} = M_{Y,X}$
4. jeśli  $X$  i  $Y$  są niezależne, to  $M_{X,Y} = 0$
5.  $M_{-X,Y} = M_{X,-Y} = -M_{Y,X}$
6. jest zbieżna, gdy kopuła jest punktowo zbieżna, tzn. jeśli  $\{(X_n, Y_n)\}$  jest ciągiem ciągłych zmiennych losowych o kopułach  $\{C_n\}$ , oraz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_n(u, v) = C(u, v), \text{ dla każdych } (u, v) \in [0, 1]^2,$$

to wtedy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_{X_n, Y_n} = M_{X, Y}.$$

7. przestrzega relacji zgodności: jeśli  $C_1(u, v) \leq C_2(u, v)$  dla wszystkich  $(u, v) \in [0, 1]^2$ , to  $M_{C_1} \leq M_{C_2}$ .

Aksjomatyczne podejście z powyższej definicji zawęża przestrzeń miar zgodności do takich, które są niezmienne wzgldem rosnących transformacji, czyli:

$$M_{X,Y} = M_{\alpha(X), \beta(Y)},$$

dla dowolnych funkcji  $\alpha, \beta$  rosnących prawie wszędzie.

### Współmonotoniczność i przeciwnomonotoniczność

Współmonotoniczność i przeciwnomonotoniczność to szczególne przypadki zależności zmiennych losowych, w których są one od siebie perfekcyjnie zależne.

**Definicja 1.6** (Zbiór współmonotoniczny). *Zbiór  $A \subset \mathbb{R}^2$  nazywamy współmonotonicznym, wtedy i tylko wtedy gdy dla dowolnych  $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$  z  $A$  zachodzi:*

$$(x_1 - y_1)(x_2 - y_2) > 0.$$

**Definicja 1.7** (Zbiór przeciwnomonotoniczny). *Zbiór  $A \subset \mathbb{R}^2$  nazywamy przeciwnomonotonicznym, wtedy i tylko wtedy gdy dla dowolnych  $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$  z  $A$  zachodzi:*

$$(x_1 - y_1)(x_2 - y_2) < 0.$$

**Definicja 1.8** (Zmienne losowe współ- i przeciwnomonotoniczne). *Wektor losowy  $(X, Y)$  nazywamy współmonotonicznym (przeciwnomonotonicznym), lub perfekcyjnie dodatnio (ujemnie) zależnym wtedy i tylko wtedy gdy istnieje zbiór współmonotoniczny (przeciwnomonotoniczny)  $A \subset \mathbb{R}^2$ :*

$$\mathbb{P}[(X, Y) \in A] = 1.$$

Współmonotoniczność i przeciwnomonotoniczność zmiennych losowych jest ważnym konceptem w teorii kopyuł, ponieważ definiuje najsilniejszy rodzaj zależności jakie kopyuły mogą reprezentować (czyt. twierdzenie 2.9).

### $\tau$ Kendalla i $\rho$ Spearmana

Oba te współczynniki spełniają aksjomaty miary zgodności z [Scarsini, 1984]. Są współczynnikami rangowymi, więc nie zależą od monotonicznych przekształceń rozkładów brzegowych  $X$  czy  $Y$ . Ich zaletą jest, że mogą być przez to jednoznacznie przedstawione w języku kopyuły - co znajduje zastosowanie przy estymacji parametrów modeli kopyułowych. Ta własność zazwyczaj nie zachodzi w przypadku korelacji Pearsona.

**Definicja 1.9** ( $\tau$  Kendalla). *Współczynnik  $\tau$  Kendalla między ciągłymi zmiennymi losowymi  $X$  i  $Y$  o kopule definiujemy jako:*

$$\tau = \mathbb{P}[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] - \mathbb{P}[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0],$$

gdzie  $(X_1, Y_1)$  i  $(X_2, Y_2)$  są kopiami iid wektora  $(X, Y)$ .

**Definicja 1.10** ( $\rho$  Spearmana). *Współczynnik  $\rho$  Spearmana między ciągłymi zmiennymi losowymi  $X$  i  $Y$  o rozkładach brzegowych  $F_X$  i  $F_Y$  zadany jest przez:*

$$\rho = Cor[F_X(X), F_Y(Y)].$$

Współczynniki te dają się jednoznacznie wyrazić za pomocą kopuł łączących  $X$  i  $Y$  - właściwość tę podamy w rozdziale 2.1.1. Istotny również jest fakt, że ich ekstremalne wartości, tj.  $\rho = 1$ , czy  $\tau = 1$  odpowiadają współmonotoniczności zmiennych losowych, a  $\rho = -1$ , czy  $\tau = -1$  odpowiadają przeciwnomonotoniczności.

### Zależność ogonów

Na zależność zmiennych losowych można popatrzeć również ze strony zależności obserwacji ekstremalnych. Rozważmy następującą statystykę:

**Definicja 1.11** (Współczynnik zależności ogonów). *Górnym współczynnikiem zależności ogonów ( $X_1, X_2$ ) o rozkładach brzegowych  $F_1$  i  $F_2$  i kopuli  $C$  nazywamy:*

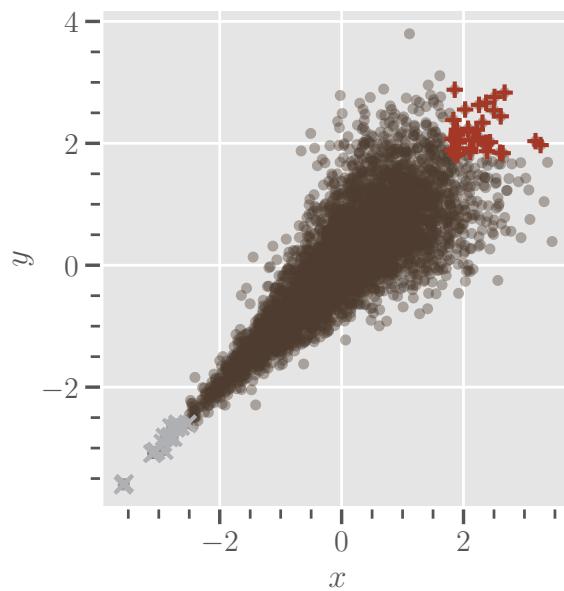
$$\lambda^u = \lim_{t \rightarrow 1^-} \mathbb{P}[X_2 > F_2^{-1}(t) | X_1 > F_1^{-1}(t)].$$

Dolnym współczynnikiem nazywamy:

$$\lambda^l = \lim_{t \rightarrow 0^+} \mathbb{P}[X_2 \leq F_2^{-1}(t) | X_1 \leq F_1^{-1}(t)].$$

Współczynniki zależności ogonów informują o sile zależności zmiennych losowych w granicy, gdy dążymy z jedną z nich coraz dalej w jej ogon. Mówimy, że zmienne losowe posiadają zależność ogonów jeśli  $\lambda \in (0, 1]$ , lub jej nie posiadają gdy  $\lambda = 0$ . Te współczynniki zależą przede wszystkim od obserwacji będących ekstremalnymi względem obu zmiennych. Rysunek 1.4 prezentuje przykładowy rozkład posiadający dolny współczynnik zależności ogonów, lecz nie posiadający górnego współczynnika. Kolorami zaznaczone są obserwacje które wpływają na dolny (szare punkty) i górny (czerwone punkty) współczynnik zależności ogonów.

W praktycznych zastosowaniach, jest on jednak trudny do kalibracji z danych - koncept ten działa raczej w drugą stronę: z parametrów skalibrowanego modelu implikowany jest współczynnik zależności ogonów.



Rysunek 1.4. Ilustracja górnego i dolnego współczynnika zależności ogonów.



---

## Rozdział 2

---

### Modele kopułowe

Zgodnie z drugim filarem Basel II instytucje finansowe zobowiązane są dokonywać regularnych ćwiczeń stress testowych, podczas których ich kondycja finansowa poddawana jest ekstremalnym negatywnym ruchom rynkowym ([BCBS, 2010]). Ma to na celu postawienie instytucji przed hipotetycznym kryzysowym scenariuszem i ocenę czy instytucja ma zgromadzoną wystarczającą ilość kapitału ekonomicznego aby taką sytuację przetrwać. Podczas ćwiczeń stress testowych, regulator podaje instytucjom ogólny scenariusz rynkowy w postaci narracji trajektorii pewnych wiodących zmiennych makroekonomicznych. Każda instytucja musi następnie zinterpretować zadany scenariusz i rozszerzyć go na zbiór zmiennych istotnych z punktu widzenia ich biznesu. Standardową praktyką w tym procesie, nazywanym *shock expansion*, wciąż są modele ekonometryczne, zwracające w większości pojedyncze trajektorie. [Hasan et al., 2019] Podejście to ma istotną wadę: nie jesteśmy w nim w stanie sensownie oszacować prawdopodobieństwa wystąpienia akurat takiej realizacji *shock expansion*, ponieważ wynikiem są jedynie pojedyncze trajektorie. Nowym kierunkiem w procesie *shock expansion* zaczyna być natomiast tzw. probabilistic stress testing (np. [Aste, 2021]). Ideą jest tu zamodelowanie wielowymiarowego systemu zmiennych makroekonomicznych i rynkowych, w sposób pozwalający zaaplikowanie rynkowej narracji regulatora jako zbioru warunkującego ten system. Umożliwia to odzyskanie rozkładów warunkowych dla innych komponentów systemu, w szczególności dla tych które są potrzebne jako wynik *shock expansion*. [Aste, 2021] w swojej pracy bada potencjalne zastosowanie rozkładów eliptycznych, wprowadzonych w rozdziale 1.1 jako jednego, wielowymiarowego modelu wyżej opisanego systemu. Wyniki które otrzymuje wskazują, że mimo iż rozkłady eliptyczne dają intuicyjne wyniki co do ogólnego kierunku rozwoju warunkowanych rozkładów, to nie są wystarczająco elastyczne aby poprawnie uchwycić wszystkie cechy systemu. Jako tego powód, Aste wymienia *symetrię* modelu, która przejawia się w konieczności wyboru tych samych rodzin rozkładów brzegowych i jest

implikowana użyciem rozkładów eliptycznych.

Powyzszy przykład to jeden z długiego szeregu który ilustruje, że praktyczne problemy wymagają dowolności w wyborze rozkładów brzegowych (wiele innych interesujących przykładów podają [Cherubini et al., 2004], czy [Cherubini et al., 2012]). Dlatego mimo, że istnieje wiele matematycznie poprawnych rozszerzeń zmiennych losowych z  $d = 1$  do  $d > 2$  (jak wielowymiarowy rozkład normalny, wielowymiarowy rozkład t, wielowymiarowy rozkład gamma, etc.), to nie cieszą się one dużym zastosowaniem w praktyce. Odpowiedzią na to ograniczenie są kopuły - modele wielowymiarowych zmiennych losowych, pozwalające na oddzielenie wpływu rozkładów brzegowych od wpływu struktury zależności na cały system.

## 2.1. Dwuwymiarowe kopuły

### 2.1.1. Wprowadzenie i definicja

Teorię kopuł zapoczątkował Abe Sklar w [Sklar, 1959], podając następujące twierdzenie:

**Twierdzenie 2.1** (Twierdzenie Sklara). *Niech  $X_1, X_2, \dots, X_d$  będą zmiennymi losowymi ciągłymi, o dystrybuantach  $F_1, \dots, F_d$ , i rozkładzie łącznym z dystrybuantą  $F$ . Wtedy istnieje unikalna kopuła  $C$ , taka że dla wszystkich  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^n$ :*

$$F(x_1, \dots, x_d) = C(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)). \quad (2.1)$$

Zachodzi również twierdzenie odwrotne: Mając dowolne dystrybuanty  $F_1, \dots, F_d$  i kopułę  $C$ , funkcja  $F$  zdefiniowana według 2.1 jest d-wymiarową dystrybuantą, o rozkładach brzegowych  $F_1, \dots, F_d$ .

Twierdzenie 2.1 przede wszystkim podaje więc algorytm postępowania mówiący w jaki sposób otrzymać wielowymiarowy rozkład o dowolnie wybranych, potencjalnie różnych rozkładach brzegowych. Dodatkowo, Sklar stwierdza istnienie pewnego obiektu, nazwanego kopułą/funkcją łączącą (łac. *copulae*: łączyć) który jest jednoznacznie zdefiniowany dla dowolnego ciągłego rozkładu wielowymiarowego, w taki sposób, że rozkład łączny da się przedstawić jako tę funkcję zaaplikowaną do rozkładów brzegowych.

Oczywistym jest, że nie wszystkie wielowymiarowe funkcje mogą pełnić taką rolę. Rozważymy więc jakie warunki musi spełniać  $C$  z twierdzenia 2.1, aby mogła być kopułą.

**Definicja 2.2** (Grounded function). *Rozważmy  $A_1$  i  $A_2$  - dwa niepuste podzbiory  $\mathbb{R}$ , oraz funkcję  $G: A_1 \times A_2 \mapsto \mathbb{R}$ . Niech  $a_i$  oznacza najmniejszy element  $A_i$ , dla  $i = 1, 2$ . Funkcję  $G$  będziemy nazywać uziemioną (eng. grounded), jeśli dla każdej pary  $(v, z)$  z  $A_1 \times A_2$ ,*

$$G(a_1, z) = 0 = G(v, a_2). \quad (2.2)$$

**Definicja 2.3** (2-increasing function).  $G: A_1 \times A_2 \mapsto \mathbb{R}$  nazywamy dwu-rosnącą (eng. 2-increasing), jeśli dla każdego prostokąta  $[v_1, v_2] \times [z_1, z_2]$  ( $v_1 \leq v_2, z_1 \leq z_2$ ) którego wierzchołki leżą w  $A_1 \times A_2$  mamy

$$G(v_2, z_2) - G(v_2, z_1) - G(v_1, z_2) + G(v_1, z_1) \geq 0. \quad (2.3)$$

Definicje 2.2 oraz 2.3 pozwalają na poprawne zdefiniowanie kopuły:

**Definicja 2.4** (Dwuwymiarowa kopuła). Dwuwymiarową kopułę  $C$  nazwiemy funkcję rzeczywistą zdefiniowaną na kwadracie jednostkowym:

$$C: [0, 1] \times [0, 1] \mapsto \mathbb{R},$$

o następujących właściwościach:

- uziemiona ( $C(v, 0) = 0 = C(0, z)$ )
- dwu-rosnąca
- $C(v, 1) = v$  oraz  $C(1, z) = z$  dla wszystkich  $(v, z) \in [0, 1] \times [0, 1]$ .

Aby zrozumieć czym kopuła tak naprawdę jest warto wrócić do twierdzenia 2.1. Równość 2.1 implikuje, że kopuła musi być dystrybuantą pewnego wielowymiarowego rozkładu. Definicja kopuły w 2.4 mówi natomiast, że ta dystrybuanta jest zdefiniowana na *kwadracie jednostkowym*. Kopuła jest więc niczym innym jak dystrybuantą wielowymiarowego rozkładu jednostajnego. Istotnie: można pokazać, że argumenty kopuli w równaniu 2.1 mają rozkład jednostajny, co udowadniamy poniżej i ilustrujemy na rysunku 2.1.

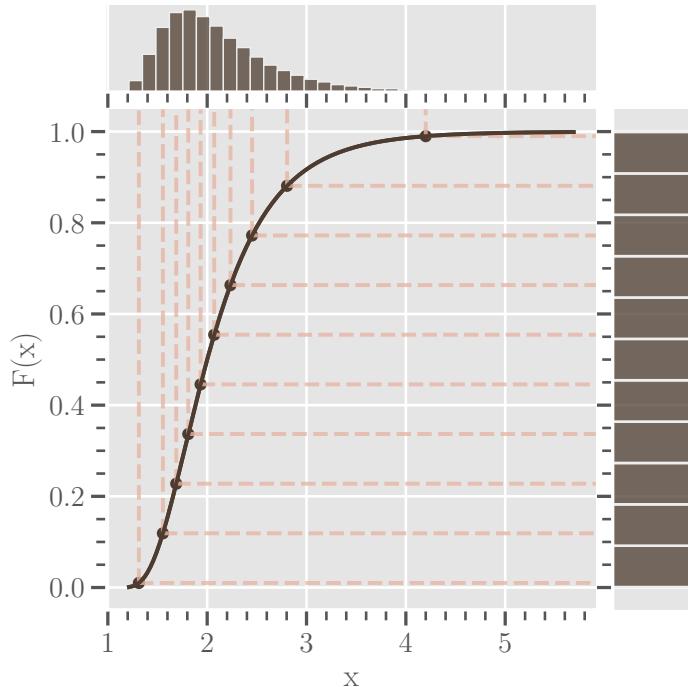
**Definicja 2.5** (Probability integral transform). Jeśli  $X \sim F$  jest ciągłą zmienną losową, a  $x$  jest jej realizacją, to transformację  $u := F(x)$  nazywamy probability integral transform (PIT) w punkcie  $x$ .

**Twierdzenie 2.6** (Probability integral transform). Jeśli  $X \sim F$  jest ciągłą zmienną losową, to  $U := F(X)$  ma rozkład jednostajny.

Dowód.

$$P(U \leq u) = P(F(X) \leq u) = P(X \leq F^{-1}(u)) = F(F^{-1}(u)) = u.$$

□



Rysunek 2.1. Ilustracja działania PIT. Zmienna losowa z rozkładu lognormalnego  $\mathcal{LN}(0.5, 1)$  (pozioma oś) przekształcana jest przez własną dystrybuantę do rozkładu jednostajnego  $\mathcal{U}(0, 1)$  (pionowa oś).

Wróćmy na chwilę do oryginalnego pytania, czyli modelowania wielowymiarowych zmiennych losowych. Na początku rozdziału zdefiniowaliśmy kopułę jako funkcję spełniającą równanie 2.1 z twierdzenia Sklara, czyli:

$$F(x_1, \dots, x_d) = C(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)).$$

Prawą stronę równania stanowią wyizolowane rozkłady brzegowe, oraz pewna funkcja  $C$ , postać której jest kompletnie od nich niezależna. Lewa strona równania, to natomiast rozkład łączny pewnej zmiennej losowej. Jeśli zastanowimy się co wpływa na charakter rozkładu łącznego zmiennej losowej, dojdziemy do wniosku, że istnieją dwa komponenty: zachowanie rozkładów brzegowych, oraz ich współzależności. Biorąc znów pod uwagę prawą stronę równania, kopuła musi więc odpowiadać za współzależności między rozkładami brzegowymi.

Istotnie, kopuły pozwalają na rozdzielenie problemu modelowania rozkładu łącznego, na modelowanie osobno rozkładów brzegowych, a osobno struktury ich współzależności ([Sklar, 1959], [Joe, 1997]). Ta pozorna prostota tworzenia wielowymiarowych modeli przyczyniła się do szybkiej ich popularyzacji, ale i przyniosła ze sobą duże ryzyko modelu. Najbardziej znanym tego przykładem jest zapewne fiasko modeli wyceniających produkty typu CDO ([Li, 1999]), które niedoszacowywały nasilenia korelacji bankructw wewnętrz struktury tego kontraktu.

Zauważamy zatem dualizm kopuł - można patrzeć na nie zarówno jak na funkcje łączące ze sobą dowolne rozkłady brzegowe w spójny rozkład łączny, lub też jak na

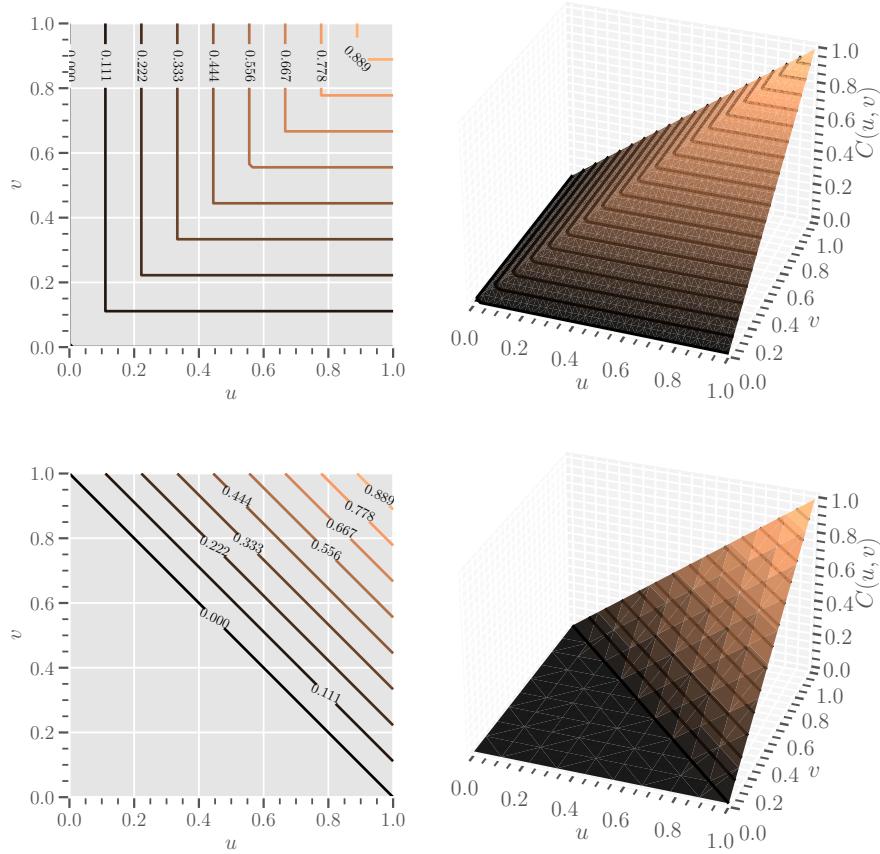
dystrybuanty wielowymiarowych rozkładów jednostajnych.

### 2.1.2. Probabilistyczna interpretacja

Przyjrzymy się więc jednej stronie powyższego dualizmu i przeanalizujmy kopuły jako struktury zależności.

**Definicja 2.7** (Kopuła minimum). *Dwuwymiarowa kopuła minimum  $C^-$  to kopuła zadana wzorem  $C^-(u, v) = \max(u + v - 1, 0)$ .*

**Definicja 2.8** (Kopuła maximum). *Dwuwymiarowa kopuła maksimum  $C^+$ , to kopuła zadana wzorem  $C^+(u, v) = \min(u, v)$ .*



Rysunek 2.2. Kontury (po lewej) i dystrybuanty (po prawej) kopuł: maximum (górnny panel) i minimum (dolny panel)

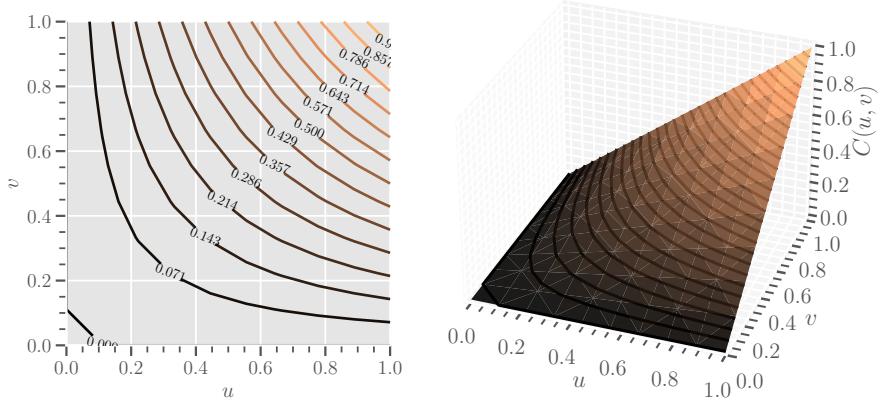
Powyższe kopuły stanowią horyzont osiągalnych kopuł, ponieważ jak mówi twierdzenie 2.9, są one ograniczeniem dolnym i górnym dla dowolnej innej kopuły. Ich powierzchnie i kontury przedstawia rysunek 2.2.

**Twierdzenie 2.9** (Fréchet-Hoeffding bounds). *Niech  $C$  będzie 2-wymiarową kopułą. Wtedy dla każdego  $(u, v) \in [0, 1]^2$  zachodzi*

$$C^-(u, v) \leq C(u, v) \leq C^+(u, v).$$

Twierdzenie to, choć z pozoru teoretyczne, ciągnie za sobą bardzo praktyczne konsekwencje: pozwala otrzymać niezależne od modelu ograniczenia górne i dolne na dowolną kopułę. [Cherubini et al., 2004] pokazuje przykład, gdzie twierdzenie Frécheta-Hoeffdinga pozwala na uzyskanie dolnego i górnego ograniczenia na pewne statystyki modelu, jak np. łączne prawdopodobieństwo bankructwa dwóch firm w strukturalnym modelu Mertona, czy cena opcji binarnej na dwa aktywa.

**Definicja 2.10** (Kopuła produktowa). *Dwuwymiarowa kopuła produktowa  $C^\perp$  to kopuła zadana wzorem  $C^\perp(u, v) = uv$ .*



Rysunek 2.3. Kontury (po lewej) i dystrybuanty (po prawej) kopuły produktowej.

Kopuła produktowa jest trzecim istotnym punktem odniesienia w świecie kopuł, ponieważ posiada pewną unikalną właściwość. Z jednej strony z definicji kopuły mamy:

$$C(u, v) = P(U \leq u, V \leq v) \quad (2.4)$$

Z drugiej jednak strony, wiemy że  $U$  i  $V$  mają rozkłady jednostajne - więc:

$$F_U(u) = P(U \leq u) = u, \text{ oraz } F_V(v) = P(V \leq v) = v. \quad (2.5)$$

Z równań 2.4 i 2.5, dla przypadku kopuły produktowej mamy zatem:

$$P(U \leq u, V \leq v) \equiv C^\perp(u, v) = uv = P(U \leq u)P(V \leq v). \quad (2.6)$$

Równanie 2.6 mówi nam, że zmienne losowe  $V$  i  $U$  są od siebie niezależne. Model kopuły produktowej, implikuje więc niezależność jednostajnych rozkładów brzegowych. Co więcej, uzupełniając opis kopuł minimum i maksimum - te z kolei odpowiadają współmonotonicznej i przeciwnomonotonicznej zależności jednostajnych rozkładów brzegowych. Rodzinę kopuł zawierającą w sobie  $C^-$ ,  $C^\perp$ , oraz  $C^+$  nazywać będziemy wyczerpującą (eng. *comprehensive*). Widzimy zatem, że kopuły potrafią modelować

pełne spektrum możliwych zależności: od współmonotonicznych, przez niezależne, aż po przeciwnomonotoniczne.

**Własność 2.11** ( $\rho$  Spearmana i  $\tau$  Kendalla). *Dla  $X$  i  $Y$ : ciągłych zmiennych losowych o kopule  $C$  możemy przedstawić  $\tau$  Kendalla jako:*

$$\tau = 4 \int \int_{[0,1]^2} C(u, v) dC(u, v) - 1. \quad (2.7)$$

*Współczynnik korelacji Spearmana  $\rho$  można przedstawić natomiast w postaci:*

$$\rho = 12 \int \int_{[0,1]^2} uv dC(u, v) - 3. \quad (2.8)$$

Przypomnijmy, że w rozdziale 1.3 połączylismy współ- i przeciwnomonotoniczność z miarami zgodności. Istotnie, bezpośrednio ze wzorów 2.7 i 2.8 otrzymujemy teraz dla  $C^+$ :  $\tau = 1$  oraz  $\rho = 1$ , dla  $C^\perp$ :  $\tau = 0$  i  $\rho = 0$ , natomiast dla  $C^-$  mamy  $\tau = -1$  i  $\rho = -1$ . Wzory z twierdzenia 2.11 mają jednak głębsze znaczenie: zadają bijekcję między miarami zgodności a konkretną kopułą. Z tego powodu, estymacja  $\tau$  jest równoważna estymacji parametrów kopuły, co jest wykorzystywane do kalibracji modeli kopułowych.

Podobnie jest ze współczynnikami zależności ogonów, wprowadzonymi w rozdziale 1.3. Wprost z definicji kopuły wynika, że można je przedstawić w języku kopuły, i użyć do kalibracji modelu:

**Własność 2.12** (Zależność ogonów). *Górny współczynnik zależności ogonów ( $X_1, X_2$ ) o rozkładach brzegowych  $F_1$  i  $F_2$  i kopuli  $C$  możemy przedstawić jako:*

$$\lambda^u = \lim_{t \rightarrow 1^-} \mathbb{P}[X_2 > F_2^{-1}(t) | X_1 > F_1^{-1}(t)] = \lim_{t \rightarrow 1^-} \frac{1 - 2t + C(t, t)}{1 - t}.$$

*Dolnym współczynnik możemy przedstawić natomiast w postaci:*

$$\lambda^l = \lim_{t \rightarrow 0^+} \mathbb{P}[X_2 \leq F_2^{-1}(t) | X_1 \leq F_1^{-1}(t)] = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{C(t, t)}{t}.$$

### 2.1.3. Popularne kopuły i ich własności

Rozdział 2.1.2 pokazał, że kopuły można intuicyjnie rozumieć jako modele zależności. W tej sekcji spojrzymy na nie z dualnej perspektywy, jako na dystrybuanty, co pozwoli nam zdefiniować użyteczne narzędzia do analizy charakteru tej zależności.

**Definicja 2.13** (Gęstość kopuły). *Niech  $C$  będzie  $d$ -wymiarową (jednostajnie ciągłą) kopułą. Gęstością tej kopuły nazywamy funkcję*

$$c(u_1, \dots, u_d) = \frac{\partial^d}{\partial u_1 \dots \partial u_d} C(u_1, \dots, u_d). \quad (2.9)$$

Widzimy, że równanie 2.9 jest jedynie przeniesieniem terminu gęstości wielowymiarowego rozkładu na grunt kopuł. Zanim zaczniemy wizualizować gęstości konkretnych kopuł, warto wspomnieć, że Sklar w [Sklar, 1959] podaje również alternatywną wersję swojego twierdzenia o istnieniu kopuły, tym razem w języku gęstości. Sens i zastosowania twierdzenia pozostają takie same jak dla twierdzenia 2.1.

**Twierdzenie 2.14** (Twierdzenie Sklara: gęstość kopuły). *Niech  $X$  będzie  $d$ -wymiarowym wektorem losowym o dystrybuancie rozkładu łącznego  $F$ , oraz rozkładami brzegowymi  $F_i$ ,  $i = 1, \dots, d$ . Wtedy rozkład łączny może być wyrażony jako*

$$F(x_1, \dots, x_d) = C(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)),$$

*lub równoważnie w terminach gęstości poprzez:*

$$f(x_1, \dots, x_d) = c(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)) \cdot f_1(x_1) \dots f_d(x_d),$$

*dla pewnej  $d$ -wymiarowej kopuły  $C$ , o gęstości  $c$ . Dla rozkładów bezwzględnie ciągłych, kopuła  $C$  jest jednoznacznie określona.*

*Zachodzi również twierdzenie odwrotne: kopuła związana z wielowymiarowym rozkładem  $F$  o rozkładach brzegowych  $F_1, \dots, F_d$  może być wyrażona jako:*

$$C(u_1, \dots, u_d) = F(F_1^{-1}(u_1), \dots, F_d^{-1}(u_d)),$$

*a jej gęstość wyraża się poprzez:*

$$c(u_1, \dots, u_d) = \frac{f(F_1^{-1}(u_1), \dots, F_d^{-1}(u_d))}{f_1(F_1^{-1}(u_1)) \dots f_d(F_d^{-1}(u_d))}$$

Resztę rozdziału stanowić będzie omówienie różnych rodzin kopuł o istotnych zastosowaniach w praktyce. Będziemy prezentować ich gęstości, ponieważ w intuicyjny sposób przedstawiają one mapę osłabień i nasileń współzależności dla konkretnych kopuł. Informatywne w tym względzie są ich wykresy konturowe, przedstawiające izohipsy powierzchni gęstości. Standardowo przedstawia się je w naturalnej skali kopuły, tzn. na kwadracie jednostkowym wizualizuje się bezpośrednio gęstość kopuły:

$$c(u, v), \text{ dla } (u, v) \in [0, 1]^2.$$

Pomocna jest jednak również wizualizacja w skali brzegowo-znormalizowanej, czyli po dokonaniu transformacji przez dystrybuantę  $\Phi$  i gęstość  $\phi$  standardowego rozkładu normalnego:

$$g(x, y) = c(\Phi(x), \Phi(y))\phi(x)\phi(y), \text{ dla } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Powyższa transformacja nie wizualizuje już gęstości kopuły  $c$ , ale raczej gęstość rozkładu wielowymiarowego  $g$ , który powstałby gdybyśmy kopułę  $c$  połączyli zmienne ze standardowego rozkładu normalnego, zgodnie z twierdzeniem 2.1. Ta reprezentacja jest bardzo intuicyjna, ponieważ podstawowe kursy statystyki przyzwyczajają ludzkie oko do utożsamiania silnej/słabej korelacji z wydłużonymi/okrągłymi elipsami dwóchzonymi przez gęstość wielowymiarowego rozkładu normalnego. Reprezentacja w skali

brzegowo-znormalizowanej jest intuicyjna, ponieważ dla kopuły gaussowskiej pokazuje dokładnie te same, znane elipsy. Natomiast w przypadku innych kopuł, obserwujemy rozbieżność izohips od eliptycznego kształtu co daje się łatwo zinterpretować.

W praktyce istnieją trzy główne nurty tworzenia kopuł. Można wykorzystać do tego twierdzenie Sklara 2.1 jako twierdzenie konstrukcyjne, tj. wziąć pewien istniejący, znany rozkład wielowymiarowy, zaaplikować *PIT* (2.5) do jego rozkładów brzegowych i odzyskać w ten sposób  $C$  z twierdzenia Sklara. Drugą metodą konstrukcji kopuł jest zdefiniowanie ich przez tzw. *generator* - powstają w ten sposób kopuły archimedejskie. Trzeci sposób natomiast to rozszerzenie *extreme-value theory* z jedego do wielu wymiarów, co skutkuje powstaniem kopuł typu *extreme-value*.

### Rodzina kopuł eliptycznych

Kopuły eliptyczne są przykładem konstrukcji kopuł poprzez bezpośrednią aplikację twierdzenia Sklara 2.1 do rozkładów eliptycznych, zdefiniowanych na początku rozdziału 1.2. Można więc tę konstrukcję rozumieć jako implikowanie struktury zależności z wielowymiarowych rozkładów, poprzez wyeliminowanie wpływu rozkładów brzegowych. W tej rodzinie zobaczymy przede wszystkim kopuły reprezentujące zależności "implikowane" z wielowymiarowego rozkładu normalnego, czy wielowymiarowego rozkładu  $t$ .

**Definicja 2.15** (Kopuła produktowa). *Kopuła produktowa to kopuła o gęstości:*

$$c(u_1, u_2) = 1.$$

Dystrybuantę tej kopuły przedstawiliśmy wcześniej na rysunku 2.3, jednak w tym rozdziale pokazujemy ją w nieco innym świetle. Jednakowa gęstość widoczna na rysunku 2.4 w każdym punkcie kwadratu jednostkowego mówi, że każda para  $(u, v) \in [0, 1]^2$  ma jednakową szansę na wystąpienie, więc nie ma żadnej zależności między  $U$  a  $V$ . Jest to zgodne z uwagą z rozdziału 2.1.2, mówiącą że ta kopuła odpowiada niezależnemu połączeniu zmiennych losowych. Zwróćmy uwagę na prawy dolny panel rysunku 2.4, który prezentuje izohipsy w skali brzegowo-znormalizowanej. Widzimy koncentryczne okręgi, kojarzące się z wielowymiarowym rozkładem normalnym o korelacji 0. Istotnie, kopuła produktowa reprezentuje strukturę zależności w tym wielowymiarowym rozkładzie.

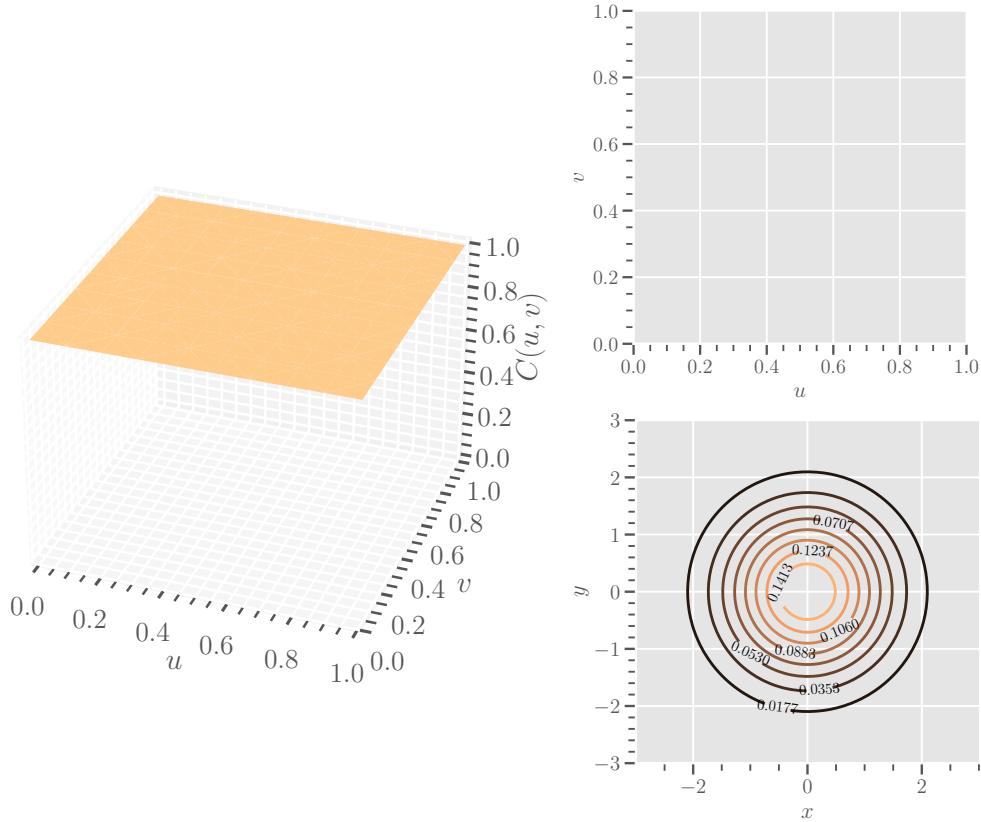
**Definicja 2.16** (Kopuła gaussowska). *Kopuła gaussowska o korelacji  $\rho$ , to kopuła zadana wzorem:*

$$C(u_1, u_2; \rho) = \Phi_2(\Phi^{-1}(u_1), \Phi^{-1}(u_2); \rho),$$

gdzie  $\Phi$  oraz  $\phi$  to odpowiednio dystrybuanta i gęstość standardowego rozkładu normalnego. Gęstość kopuły gaussowskiej zadana jest wzorem:

$$c(u_1, u_2; \rho) = \frac{1}{\phi(x_1)\phi(x_2)} \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \exp \left[ -\frac{\rho^2(x_1^2 + x_2^2) - 2\rho x_1 x_2}{2(1-\rho^2)} \right],$$

gdzie  $x_i := \Phi^{-1}(u_i)$ .



Rysunek 2.4. Gęstość kopuły produktowej: powierzchnia (lewy panel), kontur w skali kopuły (prawy górnny panel), kontur w skali brzegowo-znormalizowanej (prawy dolny panel).

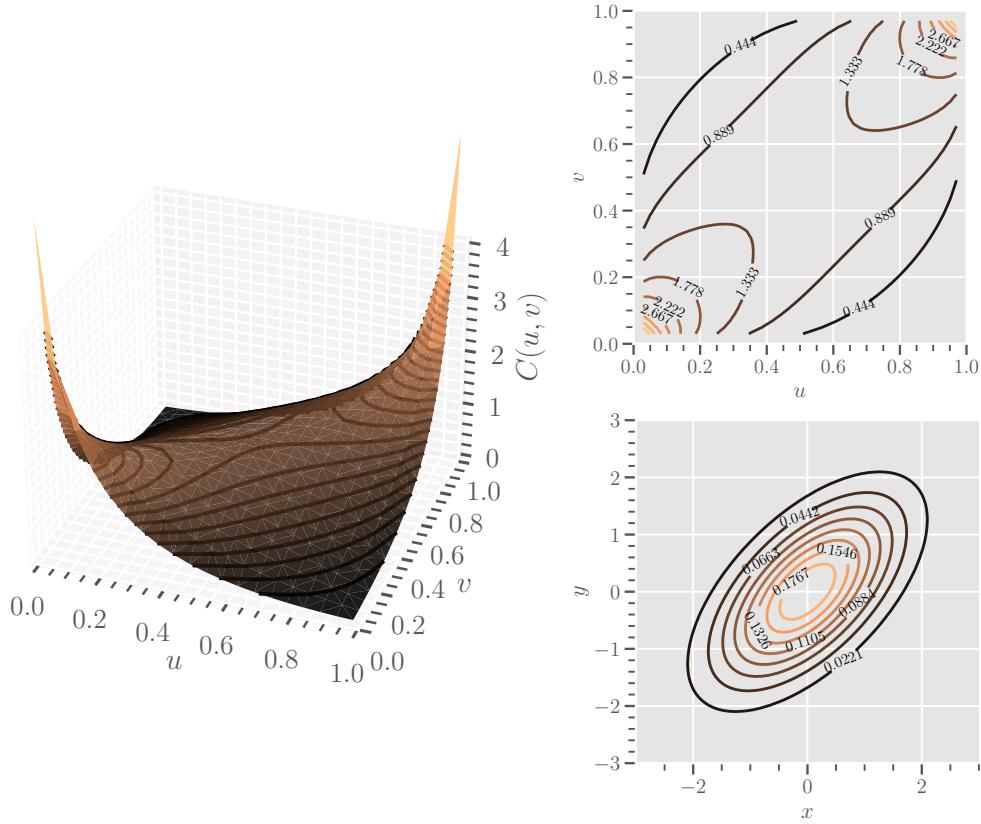
Kopuła gaussowska modeluje strukturę zależności implikowaną przez wielowymiarowy rozkład normalny, tj. wielowymiarowy rozkład normalny jest równoważny modelowi o normalnych rozkładach brzegowych, połączonych kopułą gaussowską. Rodzina kopuł gaussowskich jest wyczerpująca. Przykładowa powierzchnia gęstości oraz kontury kopuły gaussowskiej przedstawione są na rysunku 2.5.

**Definicja 2.17** (Kopuła studenta). *Kopuła studenta to jednoparametryczna kopuła o  $\nu$  stopniach swobody i korelacji  $\rho$  zadana jest gęstością:*

$$C(u_1, u_2; \nu, \rho) = \frac{t(T_\nu^{-1}(v_1), T_\nu^{-1}(v_2); \nu, \rho)}{t_\nu(T_\nu^{-1}(v_1))t_\nu(T_\nu^{-1}(v_2))}.$$

Kopuła studenta, podobnie do gaussowskiej, jest implikowana z rozkładu eliptycznego studenta. Oznacza to, że wielowymiarowy rozkład studenta jest równoważny modelowi o rozkładach brzegowych  $t$  połączonych kopułą studenta. Wraz z rosnącą ilością stopni swobody kopuła studenta zbiega do gaussowskiej. Ta rodzina nie jest jednak wyczerpująca, ponieważ przy  $\rho = 0$ , dla żadnej skończonej liczby stopni swobody nie zawiera w sobie  $C^\perp$ .

Kopuły eliptyczne cieszą się dużą popularnością w instytucjach finansowych, ponieważ mają swoje naturalne  $d$ -wymiarowe rozszerzenia. Kopuły uważane są mimo



Rysunek 2.5. Gęstość kopuły gaussowskiej,  $\rho = 0.6$ : powierzchnia (lewy panel), kontur w skali kopuły (prawy górnny panel), kontur w skali brzegowo-znormalizowanej (prawy dolny panel).

wszystko za skomplikowane modele, i w obliczu szczegółowych regulacji nakładanych na wewnętrzne modele (np. w podejściu AMA do modelowania ryzyka operacyjnego [BCBS, 2010]) dużo łatwiej jest uzasadnić i utrzymać w produkcji model bazujący na kilku intuicyjnych parametrach. Z tego powodu, kopuła  $t$  studenta jest najczęściej wybieraną w praktyce - pozwala bowiem na modelowanie ciężkich ogonów i korelacji, a jednocześnie jest zaledwie dwuparametryczna ([Peters and Shevchenko, 2015]).

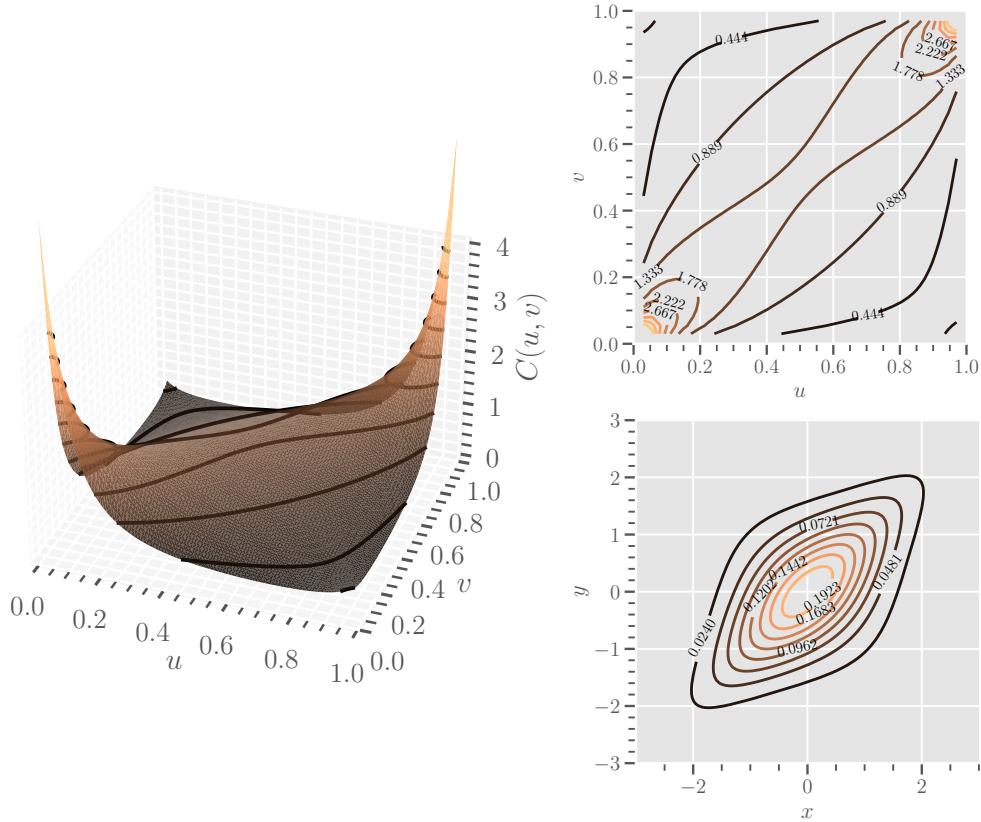
### Rodzina kopuł archimedejskich

**Definicja 2.18** (Kopuły archimedejskie). *Niech  $\mathcal{F}$  będzie zbiorem ciągłych, jednostajnie malejących i wypukłych funkcji  $\phi: [0, 1] \mapsto [0, \infty]$ , takich, że  $\phi(1) = 0$ . Wtedy*

$$C(u_1, u_2) = \phi^{[-1]}(\phi(u_1) + \phi(u_2))$$

*jest kopułą. Uściślając, nazwiemy ją kopułą archimedejską o generatorze  $\phi$ . W powyższej definicji, przez  $\phi^{[-1]}$  rozumiemy pseudoodwrotność  $\phi$ , czyli funkcję  $\phi^{[-1]}: [0, \infty] \mapsto [0, 1]$  zadaną przez:*

$$\phi^{[-1]}(t) := \phi^{-1}(t) \mathbb{1}_{\{0 \leq t \leq \phi(0)\}}.$$



Rysunek 2.6. Gęstość kopuły studenta,  $\nu = 3, \rho = 0.5$ : powierzchnia (lewy panel), kontur w skali kopyły (prawy górnny panel), kontur w skali brzegowo-znormalizowanej (prawy dolny panel).

Ta rodzina została wprowadzona została przez Claytona w [Clayton, 1978] w kontekście modelowania zapadalności na choroby przewlekłe, gdzie posłużyła do opisania zależności w aktuarialnych tabelach średniego dalszego trwania życia. Dziś kopuły archimedejskie wymieniane są pośród najczęściej wykorzystywanych do analizy zależności dwuwymiarowych. W przeciwieństwie do rodziny eliptycznej, kopuły z rodziną archimedejską potrafią modelować asymetryczne zależności. Oznacza to, że osiągalne są w nich struktury, w których dolne ogony zmiennych losowych są bardziej od siebie zależne niż ogony prawe i *vice versa*. Najprostsze tego zastosowanie to model zwrotów na rynku akcji, które przejawiają silniejszą korelację w lewym ogonie niż w prawym ([Vaz de Melo Mendes, 2005]).

Ponadto, kopuły archimedejskie pozwalają wyrazić  $\tau$  Kendalla, czy współczynnik zależności ogonów w języku generatora, co powoduje, że są łatwe w estymacji.

**Własność 2.19.** Dla dwóch zmiennych losowych połączonych kopułą archimedeską o generatorze  $\phi$ , współczynnik  $\tau$  Kendalla ma reprezentację:

$$\tau = 4 \int_{[0,1]} \frac{\phi(v)}{\phi'(v)} dv + 1.$$

Współczynniki zależności ogonów wyrażają się natomiast przez:

$$\begin{aligned}\lambda^l &= 2 \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\phi'(s)}{\phi(2s)} \\ \lambda^u &= 2 - 2 \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{\phi'(s)}{\phi(2s)}\end{aligned}\tag{2.10}$$

Powyższe uwagi powodują, że rodzina kopuł archimedejskich jest zazwyczaj wystarczająco dobra dla większości praktycznych zastosowań. Do tej klasy należą m.in. kopuły Claytona, Gumbela czy Franka.

**Definicja 2.20** (Kopuła Claytona). *Kopuła Claytona to kopuła archimedajska o generatorze  $\phi(t; \delta) = \frac{1}{\delta}(t^{-\delta} - 1)$ . Jest ona jednoparametryczną kopułą, wyrażoną poprzez dystrybuantę zadaną wzorem:*

$$C(u_1, u_2; \delta) = (u_1^{-\delta} + u_2^{-\delta} - 1)^{-\frac{1}{\delta}},$$

dla  $\delta \in [-1, 0) \cup (0, \infty)$ .

**Własność 2.21.** *Dla kopuły Claytona o parametrze  $\delta$ , współczynnik Kendalla wynosi:*

$$\tau = 1 - \frac{1}{\delta}.$$

*Współczynniki zależności ogonów wynoszą zaś odpowiednio:*

$$\begin{aligned}\lambda^l &= 2^{-\frac{1}{\delta}} \\ \lambda^u &= 0.\end{aligned}\tag{2.11}$$

Kopuła Claytona pozwala modelować niesymetryczne zależności zmiennych losowych. Jest rodziną wyczerpującą, mamy bowiem:  $C(u, v; \delta = 1) = C^\perp$ ,  $C(u, v; \delta = -1) = C^-$ , oraz  $C(u, v; \delta \rightarrow \infty) \rightarrow C^+$ . Rysunek 2.7 przedstawia powierzchnię gęstości i kontury w przypadku  $\delta = 1.2$ . Na rysunku widoczny jest dobrze wpływ istnienia dolnego współczynnika zależności ogonów na kształt konturów i gęstości.

**Definicja 2.22** (Kopuła Gumbela). *Kopuła Gumbela to kopuła archimedajska o generatorze  $\phi(t; \delta) = (-\ln t)^\delta$ . Jest ona jednoparametryczną kopułą, wyrażoną poprzez dystrybuantę zadaną wzorem:*

$$C(u_1, u_2; \delta) = \exp \left[ - [(-\ln u_1)^\delta + (-\ln u_2)^\delta]^{\frac{1}{\delta}} \right],$$

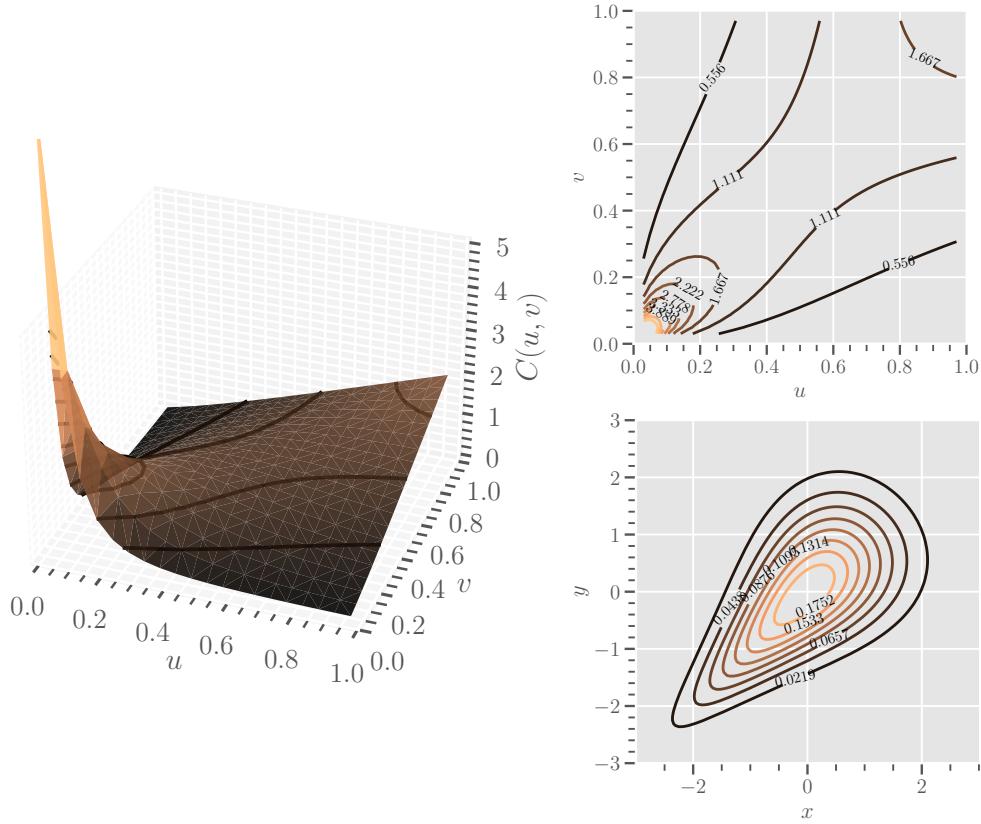
dla  $\delta \geq 1$ .

**Własność 2.23.** *Dla kopuły Gumbela o parametrze  $\delta$ , współczynnik Kendalla wynosi:*

$$\tau = \frac{\delta}{\delta + 2}.$$

*Współczynniki zależności ogonów wynoszą zaś odpowiednio:*

$$\begin{aligned}\lambda^l &= 0 \\ \lambda^u &= 2 - 2^{\frac{1}{\delta}}.\end{aligned}\tag{2.12}$$



Rysunek 2.7. Gęstość kopuły Claytona,  $\delta = 1.2$ : powierzchnia (lewy panel), kontur w skali kopuły (prawy górnny panel), kontur w skali brzegowo-znormalizowanej (prawy dolny panel).

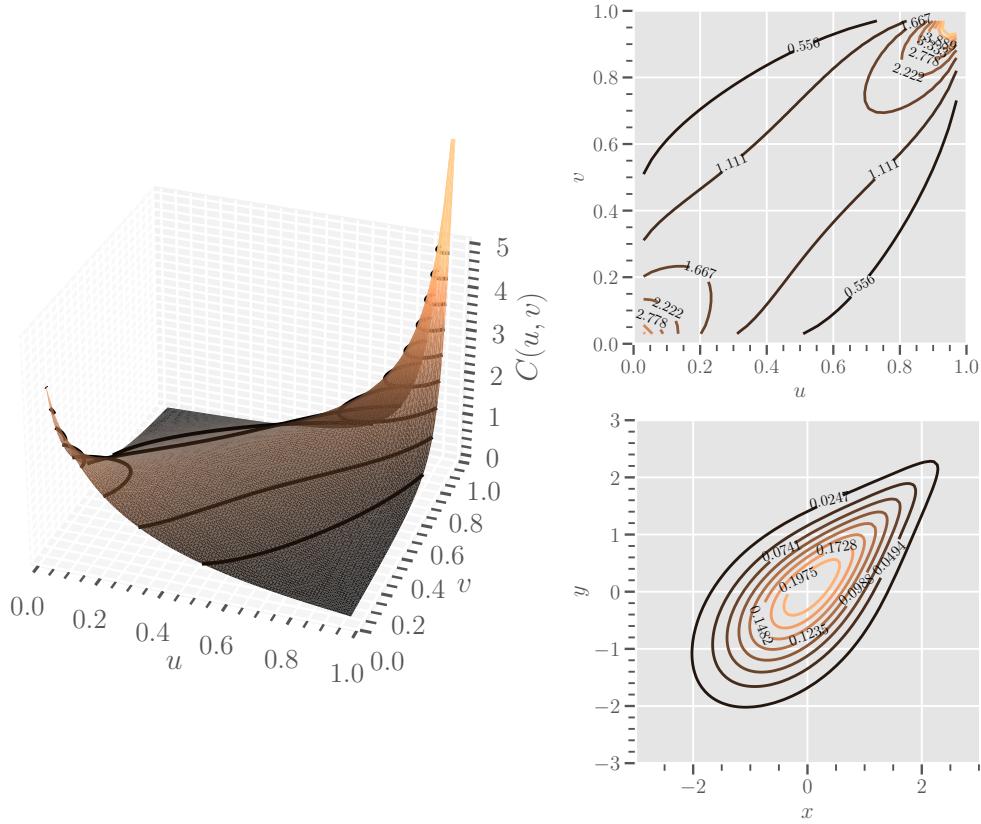
Kopuła Gumbela również pozwala modelować niesymetryczne zależności zmiennych losowych. Rysunek 2.8 przedstawia powierzchnię gęstości i kontury w przypadku  $\delta = 1.8$ , gdzie widzimy powyższą niesymetryczność. Ta rodzina nie jest jednak wyczerpującą, ponieważ mamy jedynie  $C(u, v; \delta = 1) = C^\perp$ , oraz  $C(u, v; \delta \rightarrow \infty) \rightarrow C^+$ , natomiast kopuła  $C^-$  nie jest częścią tej rodziny.

Kopuły Gumbela mogą więc posługiwać do modelowania jedynie dodatnich zależności, lub w granicznym przypadku niezależności. Nie przeszkodziło to jednak w skutecznej aplikacji tych kopuł do badań klinicznych, gdzie spopularyzował je Hougaard, w [Hougaard, 1986] wykorzystując do testowania hipotez o pozytywnym wpływie leku przeciw guzom na długość życia szczurów w grupie leczenia.

**Definicja 2.24** (Kopuła Franka). *Kopuła Franka to kopuła archimedejska o generatorze  $\phi(t; \delta) = -\ln \frac{\exp(-\alpha t) - 1}{\exp(-\alpha) - 1}$ . Jest ona jednoparametryczną kopułą, wyrażoną poprzez dystrybuantę zadaną wzorem:*

$$C(u_1, u_2; \delta) = -\frac{1}{\delta} \ln \left[ \frac{1}{1 - e^{-\delta}} [(1 - e^{-\delta}) - (1 - e^{-\delta u_1})(1 - e^{-\delta u_2})] \right],$$

dla  $\delta \in (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$ .



Rysunek 2.8. Gęstość kopuły Gumbela,  $\delta = 1.8$ : powierzchnia (lewy panel), kontur w skali kopuły (prawy górny panel), kontur w skali brzegowo-znormalizowanej (prawy dolny panel).

**Własność 2.25.** Dla kopuły Franka o parametrze  $\delta$ , współczynnik Kendall'a wynosi:

$$\tau = 1 + 4[D(\delta) - 1]/\delta,$$

gdzie  $D(\alpha)$  to:

$$D(\alpha) = \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha \frac{t}{\exp(t) - 1} dt.$$

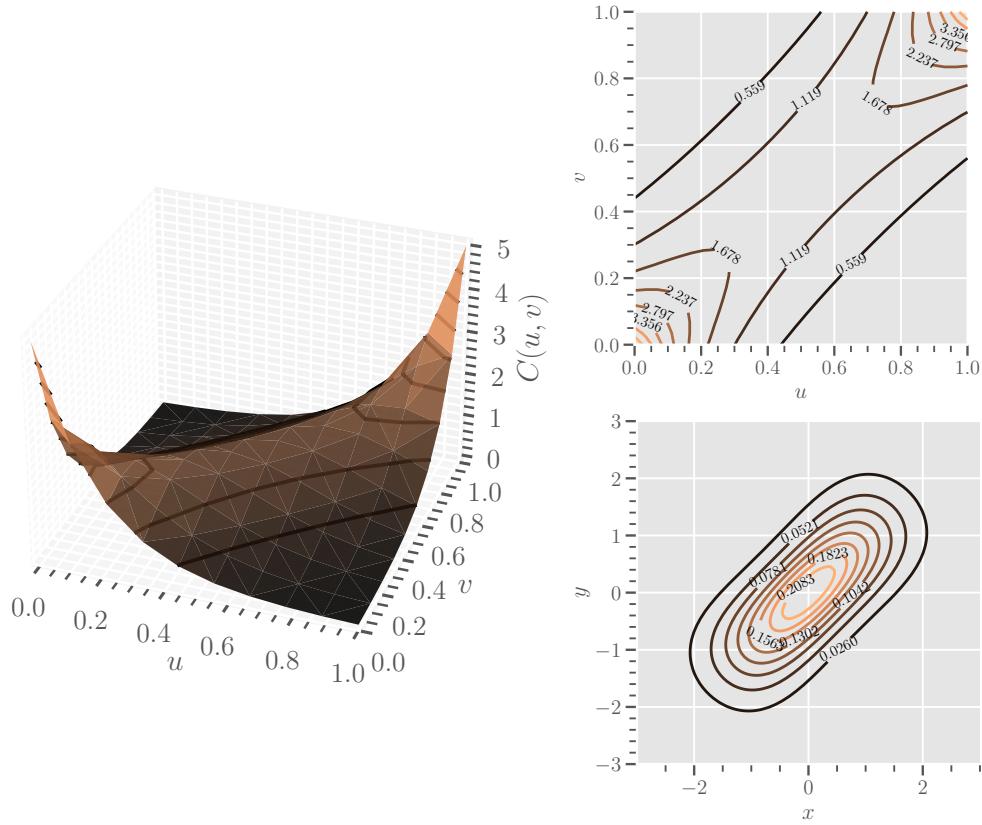
Współczynniki zależności ogonów wynoszą zaś odpowiednio:

$$\begin{aligned} \lambda^l &= 0 \\ \lambda^u &= 0. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Rodzina kopuł Franka jest rodziną wyczerpującą, bowiem  $C(u, v; \delta = 0) = C^\perp$ ,  $C(u, v; \delta \rightarrow \infty) \rightarrow C^+$ , oraz  $C(u, v; \delta \rightarrow -\infty) \rightarrow C^-$ . Kopuła Franka jako jedyna z wymienionych kopuł archimedejskich jest symetryczna. Rysunek 2.9 przedstawia powierzchnię gęstości i kontury w przypadku  $\delta = 5$ .

Jedno z ciekawych jej zastosowań, przedstawia [Gao et al., 2021]. W swojej pracy Jianwei rozważa problem optymalizacji częstości ładowania pojazdów elektrycznych. Kopuła Franka jest przez niego używana do modelowania zależności między siłą wiatru, a ilością energii z ogniw fotowoltaicznych, co wykorzystuje do wyznaczenia optymalnej

strategii ładowania pojazdu, która stabilizuje popyt/podaż na energię w sieci energetycznej, skutkując w niższych kosztach utrzymania pojazdu.



Rysunek 2.9. Gęstość kopyły Franka: powierzchnia (lewy panel), kontur w skali kopyły (prawy górny panel), kontur w skali brzegowo-znormalizowanej (prawy dolny panel).

### Rodzina kopyłów *extreme-value*

Ostatnią z prezentowanych metod konstrukcji kopyłów jest konstrukcja asymptotyczna, poprzez teorię wartości ekstremalnych.

Zakładając, że  $X_1$  i  $X_2$  są dwoma zmiennymi losowymi o rozkładach  $F_1$ ,  $F_2$ , zdefiniujemy kopyłę *extreme-value* jako kopydę odpowiadającą za zależność pomiędzy maksimum z  $n$  realizacji  $X_1$  a maksimum z  $n$  realizacji  $X_2$ .

**Definicja 2.26** (Kopyła *extreme-value*). *Dwuwymiarowa kopyła  $C$  nazywana jest kopyłą extreme-value, jeżeli istnieje dwuwymiarowa kopyła  $C_X$ , taka że dla  $n \rightarrow \infty$  mamy:*

$$[C_X(u_1^{\frac{1}{n}}, u_2^{\frac{1}{n}})]^n \rightarrow C(u_1, u_2) \forall_{(u_1, u_2)} \in [0, 1]^2.$$

Mówimy wówczas, że kopyła  $C_X$  jest w obszarze przyciągania kopyły  $C$ .

To samo można zdefiniować posługując się pojęciem kopyłów *max-stabilnych*

**Definicja 2.27** (Kopyła max-stabilna). *Dwuwymiarowa kopyła  $C$  nazywana jest kopyłą max-stabilną, jeśli spełnia warunek:*

$$C(u_1, u_2) = [C(u_1^{\frac{1}{n}}, u_2^{\frac{1}{n}})]^n,$$

Dla każdej liczby całkowitej  $n \geq 1$ , oraz dla każdej pary  $(u_1, u_2) \in [0, 1]^2$ .

**Twierdzenie 2.28.** Dwuwymiarowa kopuła  $C$  jest kopułą extreme-value, tylko i tyle wtedy gdy jest max-stabilna.

Przykładem kopuły *extreme-value* z podanych już wcześniej jest kopuła Gumbela. Inną, nietypową, ale często spotykaną kopułę z tej rodziny jest kopuła Marshalla-Olkina.

**Definicja 2.29** (Kopuła Marshalla-Olkina). Dwuwymiarową kopułę *Marshalla-Olkina* o parametrach  $m$  i  $n$  nazywiemy kopułą o dystrybuancie:

$$C(u_1, u_2; m, n) = \min[u_1^{1-m}u_2; u_1u_2^{1-n}].$$

Gęstość tej kopuły zadana jest przez:

$$c(u_1, u_2; m, n) = \begin{cases} (1-m)u_1^{-m}, & \text{dla } u_1^m > u_2^n \\ (1-n)u_2^{-n}, & \text{dla } u_1^m < u_2^n \end{cases}$$

**Własność 2.30.** Dla kopuły *Marshalla-Olkina* o parametrach  $m, n$ , współczynnik Kendalla wynosi:

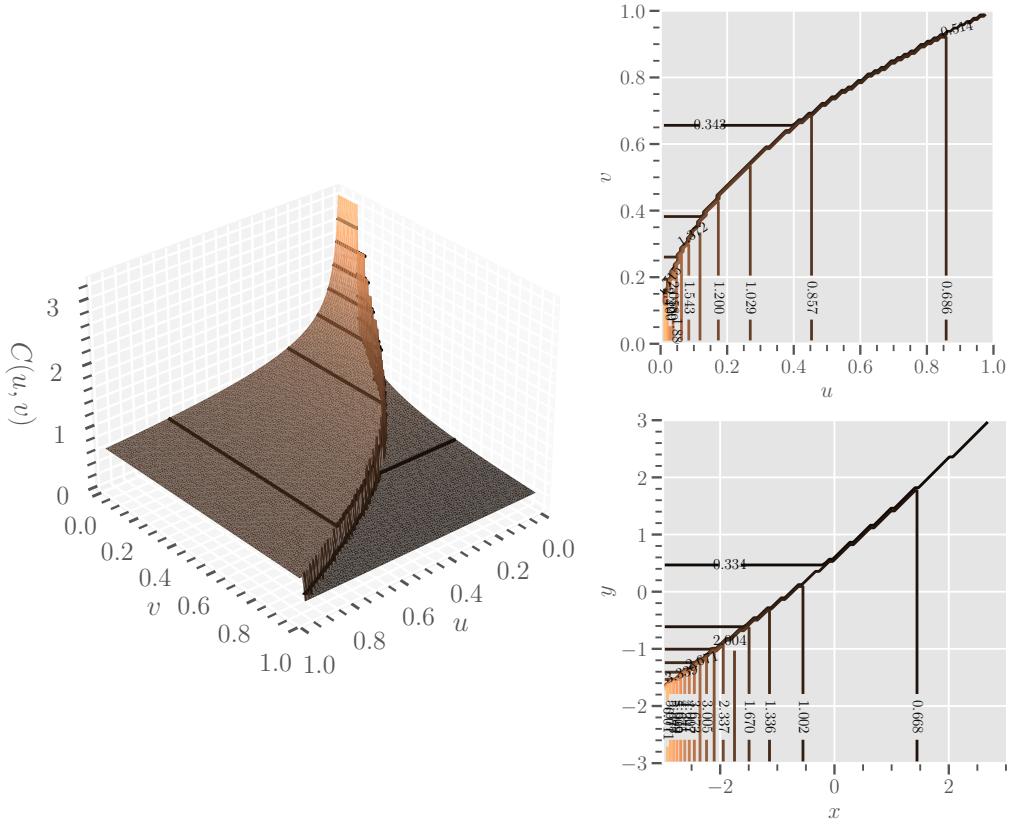
$$\tau = \frac{mn}{m - mn + n}.$$

Współczynniki zależności ogonów wynoszą zaś odpowiednio:

$$\begin{aligned} \lambda^l &= 0 \\ \lambda^u &= \min(m, n). \end{aligned} \tag{2.14}$$

Kopuła *Marshalla-Olkina* jest nietypowa, bo posiada część ciągłą, o powyższej gęstości, jak i część singularną wzdłuż krzywej  $u_1^m = u_2^n$ . Ta rodzina nie jest wyczerpująca, ponieważ nie zawiera  $C^-$ . Natomiast dla  $m = 0 \vee n = 0$  mamy  $C^\perp$ , a przy  $m = 1 = n$  dostajemy  $C^+$ .

Kopuły *Marshalla-Olkina* powstają naturalnie w teorii niezawodności systemów. Rozważając system o wielu komponentach, gdzie awaria dowolnego komponentu powoduje awarię całego systemu, w klasycznym podejściu zakłada się rozkład wykładniczy dla czasu życia każdego z komponentów (z powodu braku pamięci), oraz niezależność między komponentami. W praktyce jednak, czasy do awarii poszczególnych komponentów nie są niezależne: do modelowania tej zależności dużo lepiej służy właśnie kopuła *Marshalla-Olkina* [Matus et al., 2019].



Rysunek 2.10. Gęstość kopyły Marshalla-Olkina,  $m = 0.35, n = 0.75$ : powierzchnia (lewy panel), kontur w skali kopyły (prawy górnny panel), kontur w skali brzegowo-znormalizowanej (prawy dolny panel).

## 2.2. Vine Copulas

### 2.2.1. Wielowymiarowe kopuły

### 2.2.2. Pair Copula Constructions

### 2.2.3. Vine Copula

---

## Rozdział 3

---

# Spready na rynkach finansowych

- 3.1. Popularne rodzaje spreadów
- 3.2. Modelowanie spreadów
- 3.3. Model kopułowy

---

## Rozdział 4

---

# Zastosowanie modelu do danych rynkowych

## **Wnioski**

# Bibliografia

- [Anderson, 2003] Anderson, T. W. (2003). *An Introduction to Multivariate Statistical Analysis*.
- [Aste, 2021] Aste, T. (2021). Stress testing and systemic risk measures using elliptical conditional multivariate probabilities.
- [BCBS, 2010] BCBS (2010). *Revisions to the Basel II Market Risk Framework*.
- [Borak et al., 2005] Borak, S., Hardle, K. W., and Weron, R. (2005). Stable distributions. *SFB 649 Discussion Paper*, 008.
- [Cherubini et al., 2012] Cherubini, U., Gobbi, F., Mulinacci, S., and Romagnoli, S. (2012). *Dynamic Copula Methods in Finance*.
- [Cherubini et al., 2004] Cherubini, U., Luciano, E., and Vecchiato, W. (2004). *Copula Methods in Finance*.
- [Clayton, 1978] Clayton, D. G. (1978). A model for association in bivariate life tables and its application in epidemiological studies of familial tendency in chronic disease incidence. *Biometrika*, 65.
- [Gao et al., 2021] Gao, J., Yang, Y., Gao, F., and Liang, P. (2021). Optimization of electric vehicles based on frank-copula-gluecvar combined wind and photovoltaic output scheduling research. *Energies*, 14(19).
- [Genest and Nešlehová, 2007] Genest, C. and Nešlehová, J. (2007). A primer on copulas for count data. *Astin Bulletin*, 37.
- [Hasan et al., 2019] Hasan, I., Lynch, D., and Akhtar, S. (2019). *Stress Testing. Approaches, Methods and Applications*.
- [Hougaard, 1986] Hougaard, P. (1986). A class of multivariate failure time distributions. *Biometrika*, 73(3).
- [Joe, 1997] Joe, H. (1997). *Multivariate Models and Multivariate Dependence Concepts*.
- [Koopman et al., 2018] Koopman, S. J., Lit, R., Lucas, A., and Opschoor, A. (2018). Dynamic discrete copula models for high-frequency stock price changes. *Journal of Applied Econometrics*, 33.
- [Kordecki, 2010] Kordecki, W. (2010). *Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna. Definicje, twierdzenia, wzory*. Wydawnictwo GIS.
- [Kurowicka and Joe, 2010] Kurowicka, D. and Joe, H. (2010). *Dependence Modeling: Vine Copula Handbook*.
- [Li, 1999] Li, D. X. (1999). On default correlation: A copula function approach.
- [Mandelbrot, 1997] Mandelbrot, B. B. (1997). *The variation of certain speculative prices*, pages 371–418. Springer New York, New York, NY.
- [Markowitz, 1952] Markowitz, H. (1952). Portfolio selection.

- [Matus et al., 2019] Matus, O., Barrera, J., Moreno, E., and Rubino, G. (2019). On the marshall–olkin copula model for network reliability under dependent failures. *IEEE Transactions on Reliability*, 68(2):451–461.
- [McCulloch, 1996] McCulloch, J. H. (1996). 13 financial applications of stable distributions. In *Statistical Methods in Finance*, volume 14 of *Handbook of Statistics*, pages 393–425. Elsevier.
- [Peters and Shevchenko, 2015] Peters, G. and Shevchenko, P. (2015). *Advances in Heavy Tailed Risk Modeling: A Handbook of Operational Risk*.
- [Scarsini, 1984] Scarsini, M. (1984). On measures of concordance. *Stochastica*, 8(3):201–218.
- [Schefzik, 2015] Schefzik, R. (2015). Multivariate discrete copulas, with applications in probabilistic weather forecasting. *Publications de l'Institut de Statistique de l'Université de Paris*.
- [Sklar, 1959] Sklar, A. (1959). Fonctions de repartition an dimensions et leurs marges. *Publications de l'Institut de statistique de l'Universite de Paris*, 8:229–231.
- [Vaz de Melo Mendes, 2005] Vaz de Melo Mendes, B. (2005). Asymmetric extreme interdependence in emerging equity markets.