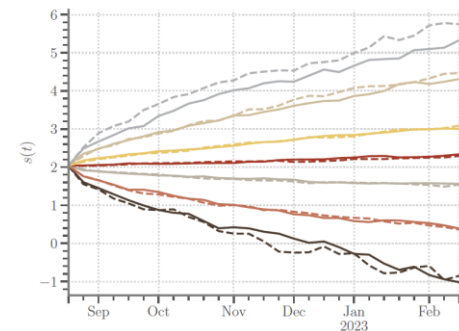
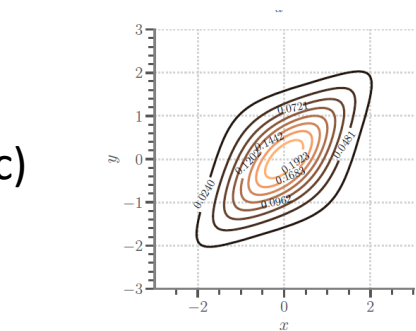
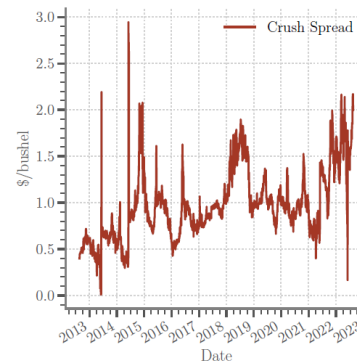
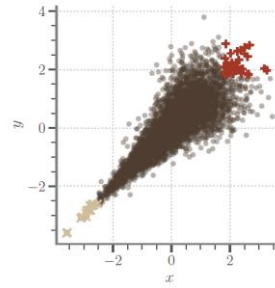


Zastosowania i efektywność modeli kopułowych w wybranych obszarach zarządzania ryzykiem

Praca dyplomowa – Piotr Mikler

Cel pracy

- ❖ Przedstawienie modeli Vine Copula jako modeli wielowymiarowych zależności
- ❖ Analiza 3-wymiarowych danych rzeczywistych
- ❖ Symulacyjna wycena opcji na spread aktywów
- ❖ Porównanie wyników symulacji Vine Copula vs GMV



Motywacja

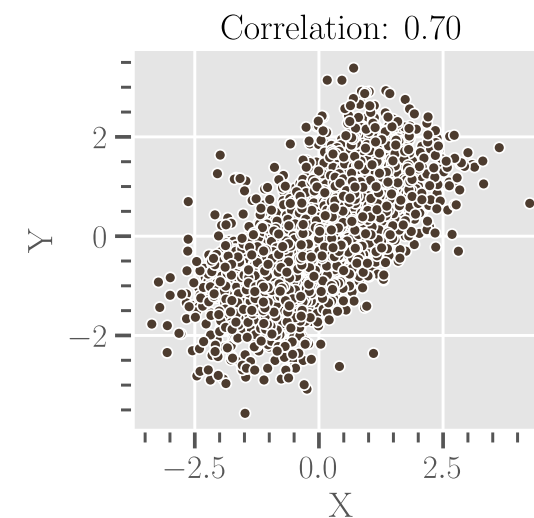
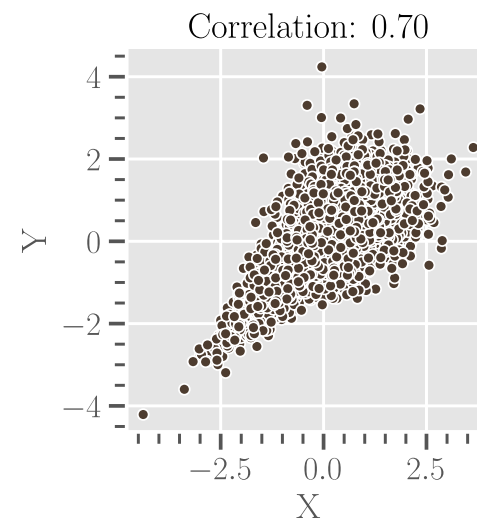
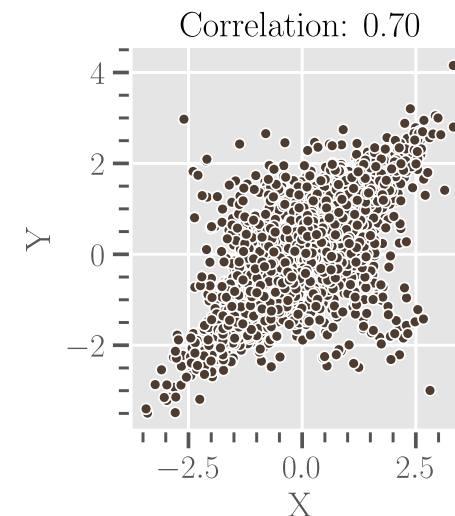
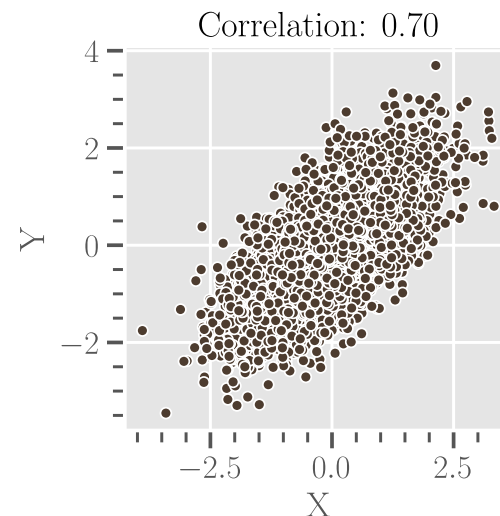
Teoria (szkic)

Dane

Wyniki

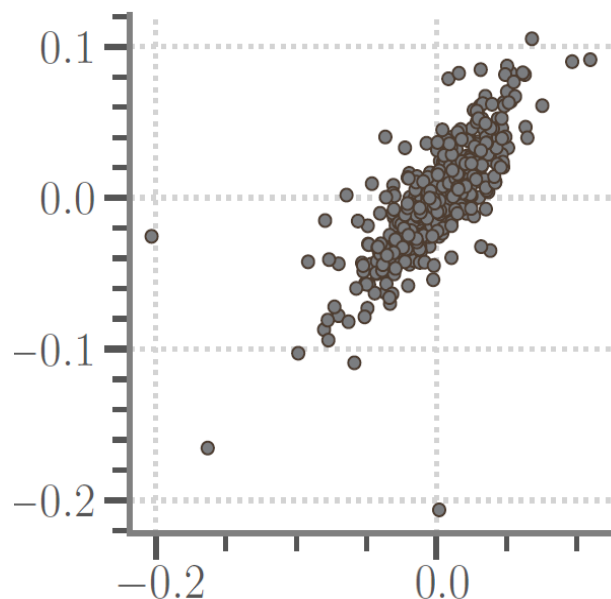
Motywacja

- ❖ Powszechność problemów opartych o wielowymiarowe zmienne losowe
- ❖ Nieskuteczność najpopularniejszych narzędzi
- ❖ Ryzyko modelu
- ❖ Vine Copula jako elastyczne narzędzie, posiadające pożądane własności

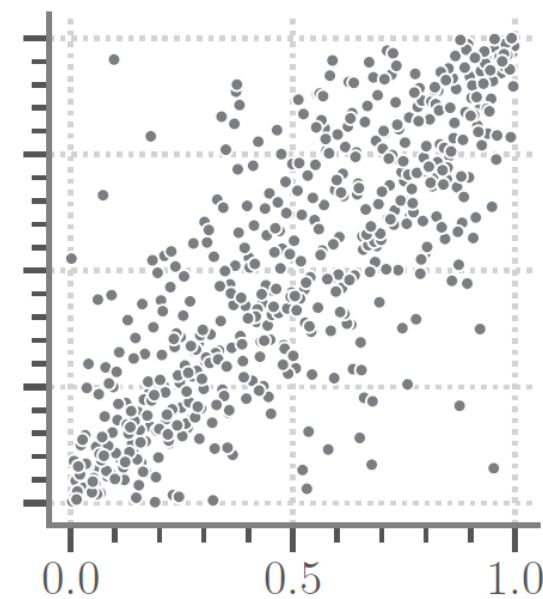


Rysunek: **Współczynnik korelacji dla rozkładów nie-gaussowskich.**
Wykresy punktowe symulacji z czterech różnych dwuwymiarowych rozkładów łącznych, o tych samych rozkładach brzegowych.

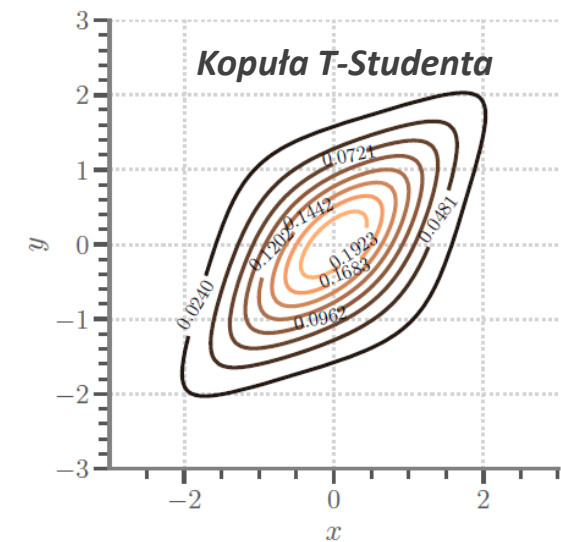
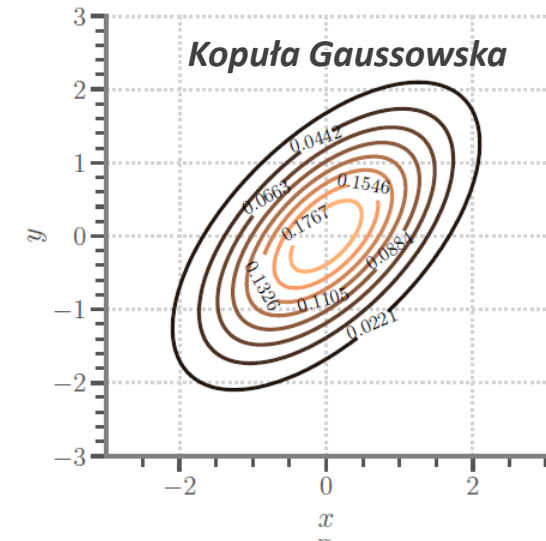
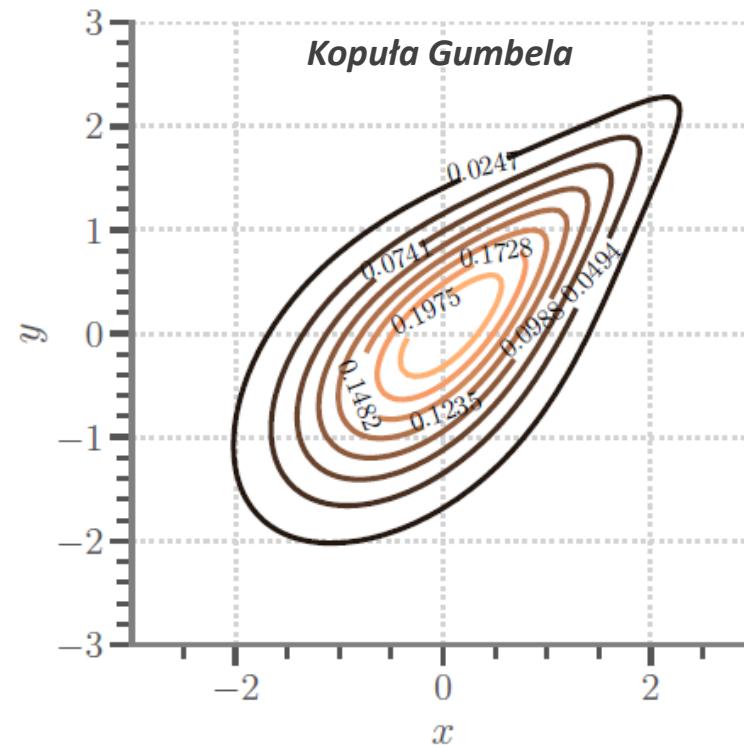
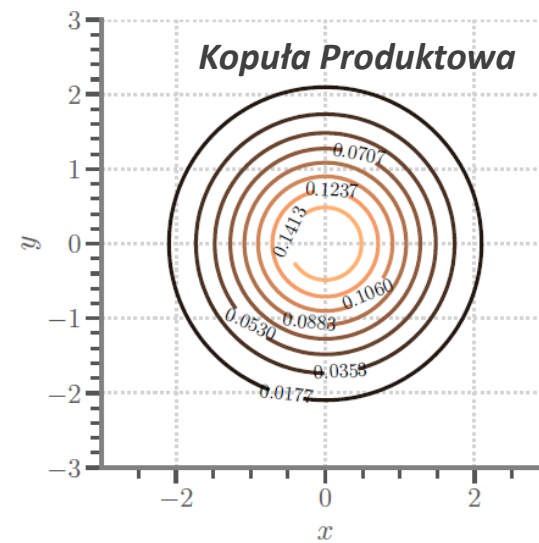
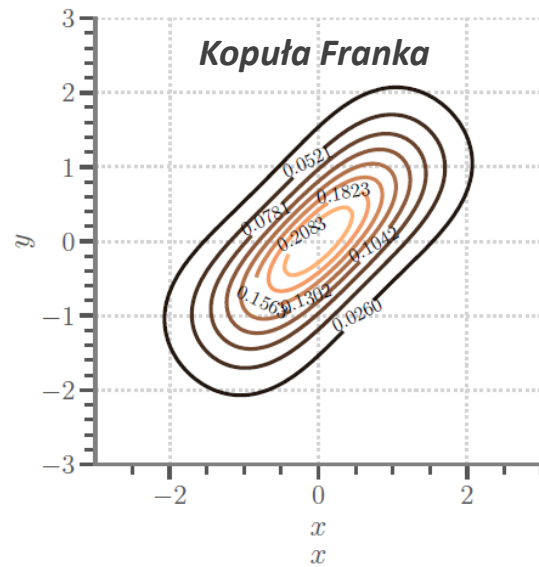
Twierdzenie 2.6 (Probability integral transform). *Jeśli $X \sim F$ jest ciągłą zmienną losową, to $U := F(X)$ ma rozkład jednostajny.*



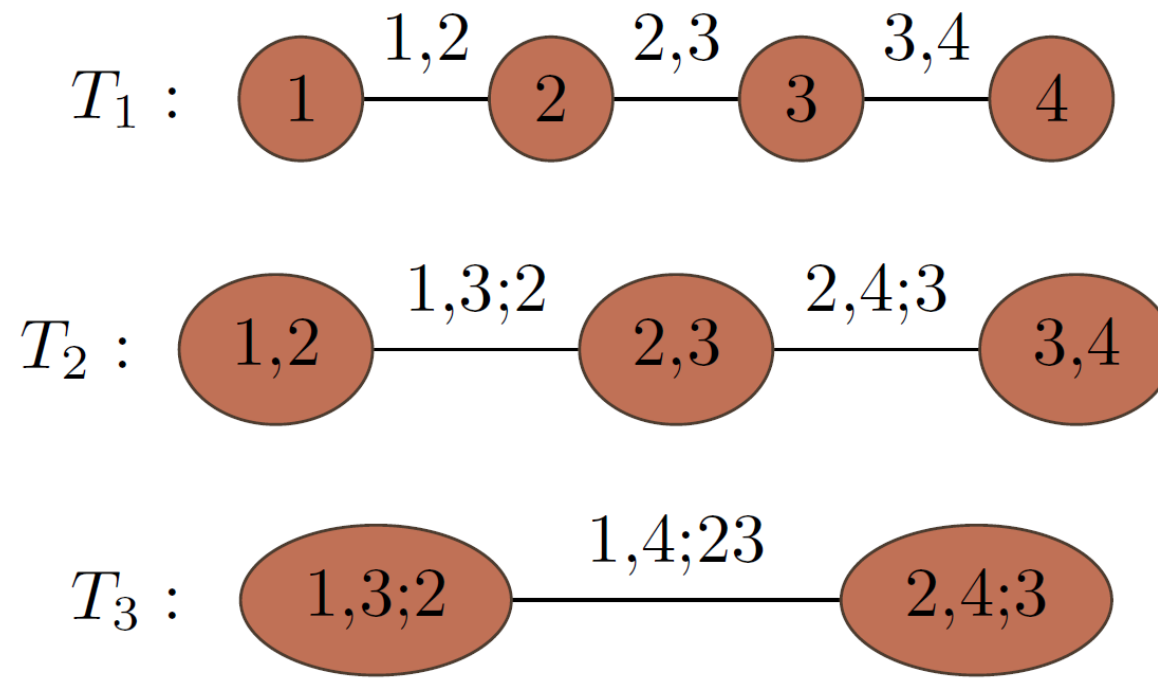
Rysunek: **Dane w skali rzeczywistej.**
Oryginalne dane,
o dowolnych ciągłych rozkładach brzegowych.



Rysunek: **Dane w skali kopuły.**
Dane przetransformowane poprzez PIT,
o jednostajnych rozkładach brzegowych.



Rysunek: Różnorodność kopuł.
Wykresy konturowe gęstości kopuł, w skali brzegowo-znormalizowanej.



Rysunek: **Przykładowa struktura D-Vine.**
 Struktura R-Vine w 4 wymiarach, należąca do podklasy D-Vine

Model

Struktura proponowanego modelu

GARCH

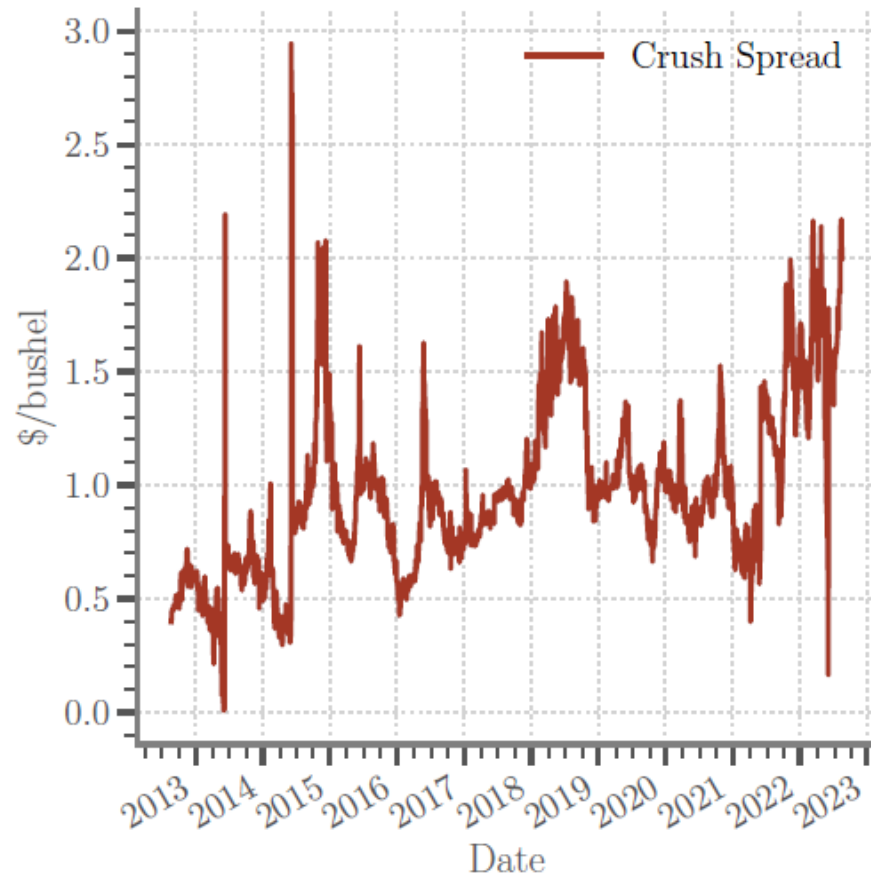
$$\left\{ \begin{array}{l} \phi(B)(1-B)^d r_{i,t} = \theta(B)\varepsilon_{i,t}, \\ \varepsilon_{i,t} = \sqrt{\sigma_{i,t}^2} e_{i,t}, \\ \sigma_{i,t}^2 = \omega_i + \sum_{j=1}^m \alpha_i \varepsilon_{i,t-j}^2 + \sum_{k=1}^n \beta_i \sigma_{i,t-k}^2, \\ e_{i,t} \sim_{\mathbb{P}} IID_i(0, 1), \\ F_{e_{1,t}, \dots, e_{d,t}}(x_1, \dots, x_d) = \mathcal{V}^{\mathbb{P}}(F_{e_{1,t}}(x_1), \dots, F_{e_{d,t}}(x_d)). \end{array} \right.$$

ARIMA

Vine Copula

Dane

Definicja soybean crush spreadu



Rysunek: **Historyczne wartości Soybean Crush Spreadu.**
Tygodniowe ceny spot dla soybean crush spreadu, obliczone z cen spot jego komponentów.

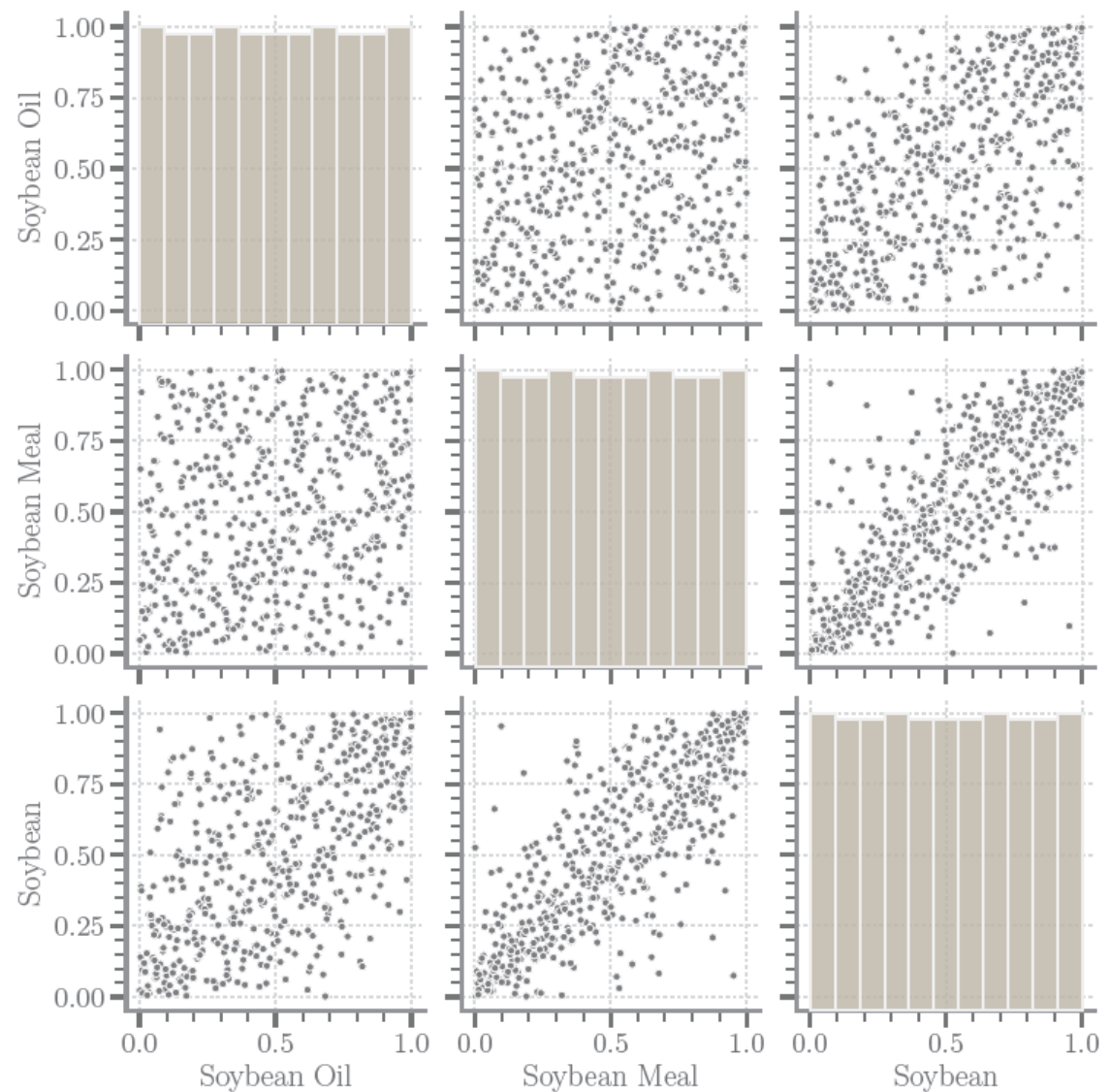
Zgodnie z definicją giełdy CME:

- ❖ M_t - cena futures na mączkę sojową
- ❖ O_t - cena futures na olej sojowy
- ❖ S_t - cena futures na soję

$$s_t = (0.022 \cdot M_t + 0.11 \cdot O_t) - S_t$$

Wyniki

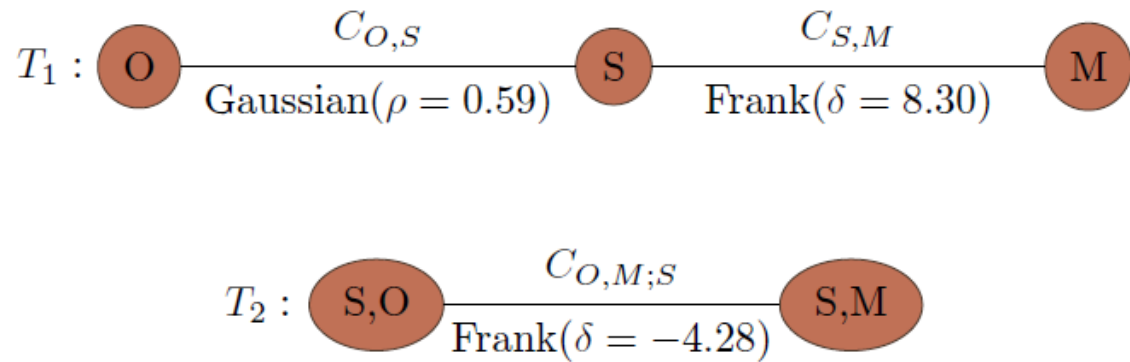
Model ARIMA(0,0,0)-GARCH(2,3)



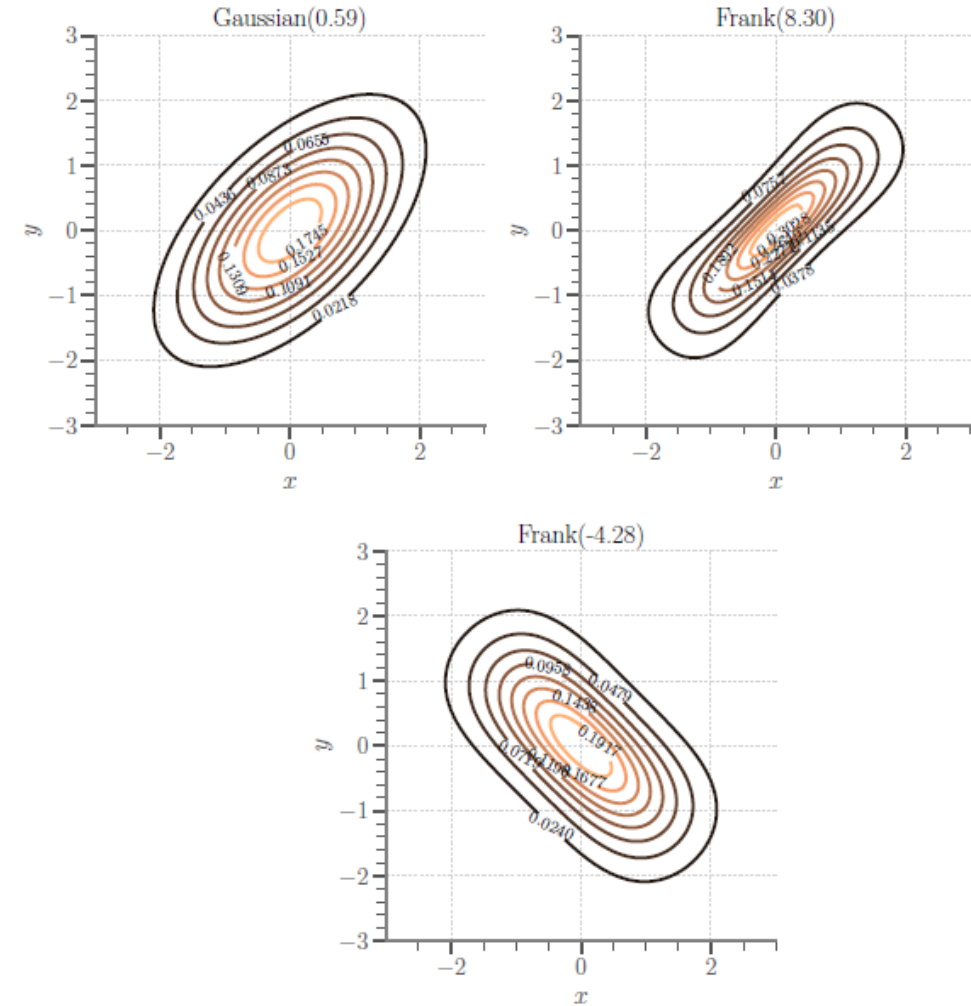
*Rysunek: **Struktura zależności reziduów.**
Wykresy punktowe każdy-z-każdym, oraz histogramy reziduów.*

Wyniki

Vine Copula



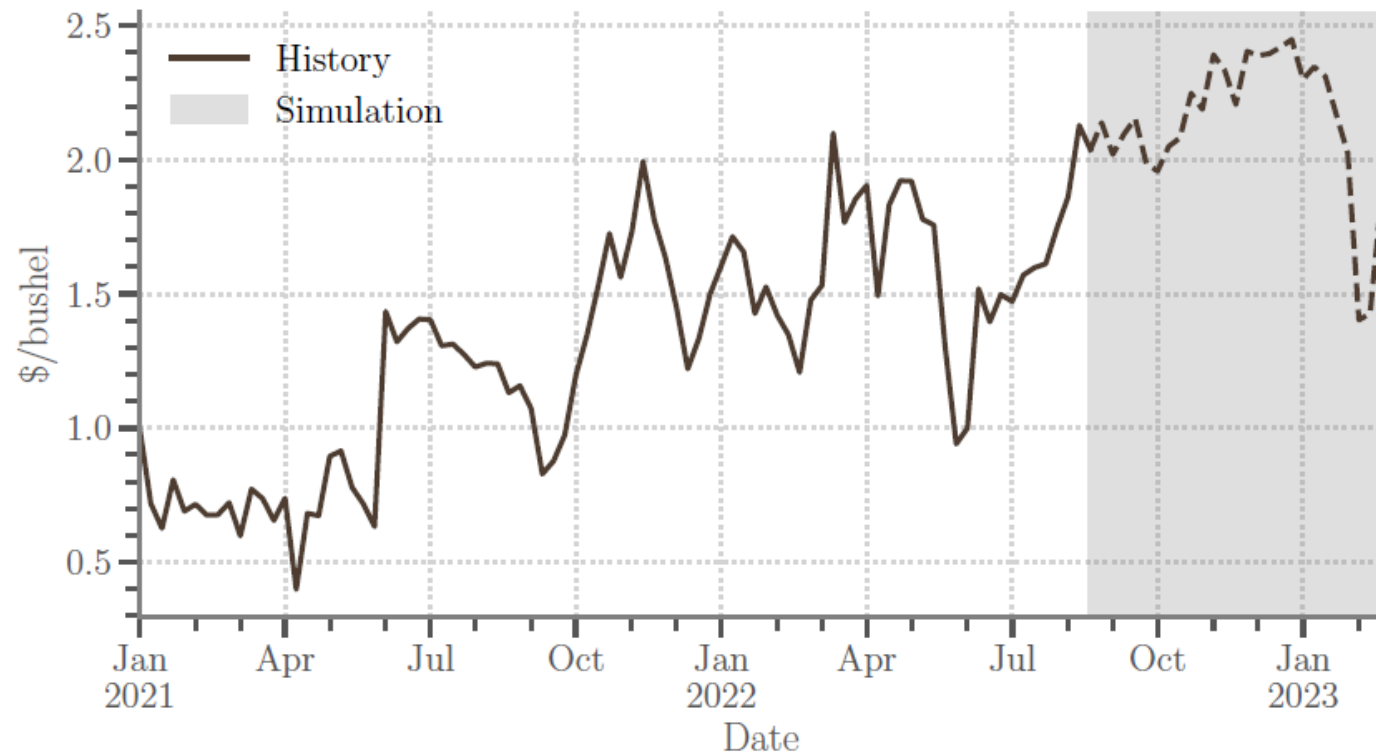
Rysunek: **Dopasowana struktura D-vine.**
Struktura modelu Vine Copula pomiędzy
komponentami spreadu.



Rysunek: **Kopuły dopasowanej struktury.**
Wykresy konturowe kopuł dopasowanych do danych
w strukturze D-Vine

Wyniki

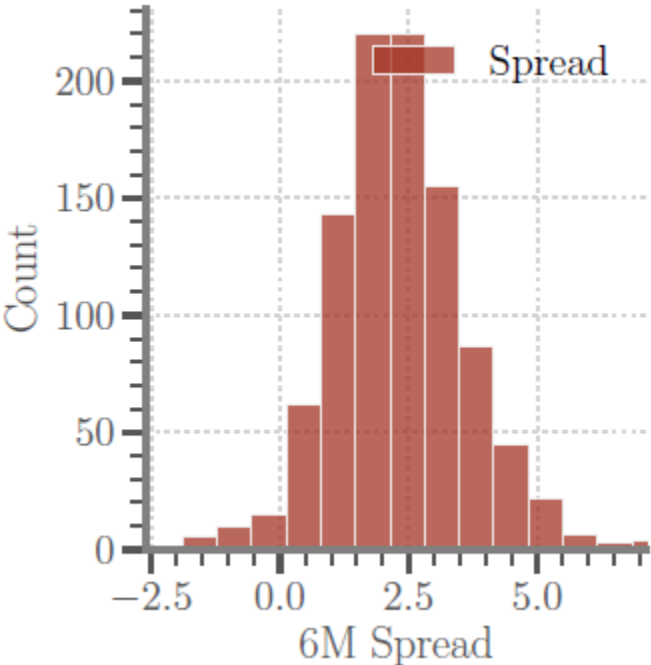
Przykładowa symulacja z modelu



*Rysunek: **Symulacja trajektorii spreadu.**
Przykładowa symulacja z dopasowanego modelu
ARIMA-GARCH-VineCopula*

Wyniki

Wycena opcji za pomocą modelu Vine Copula



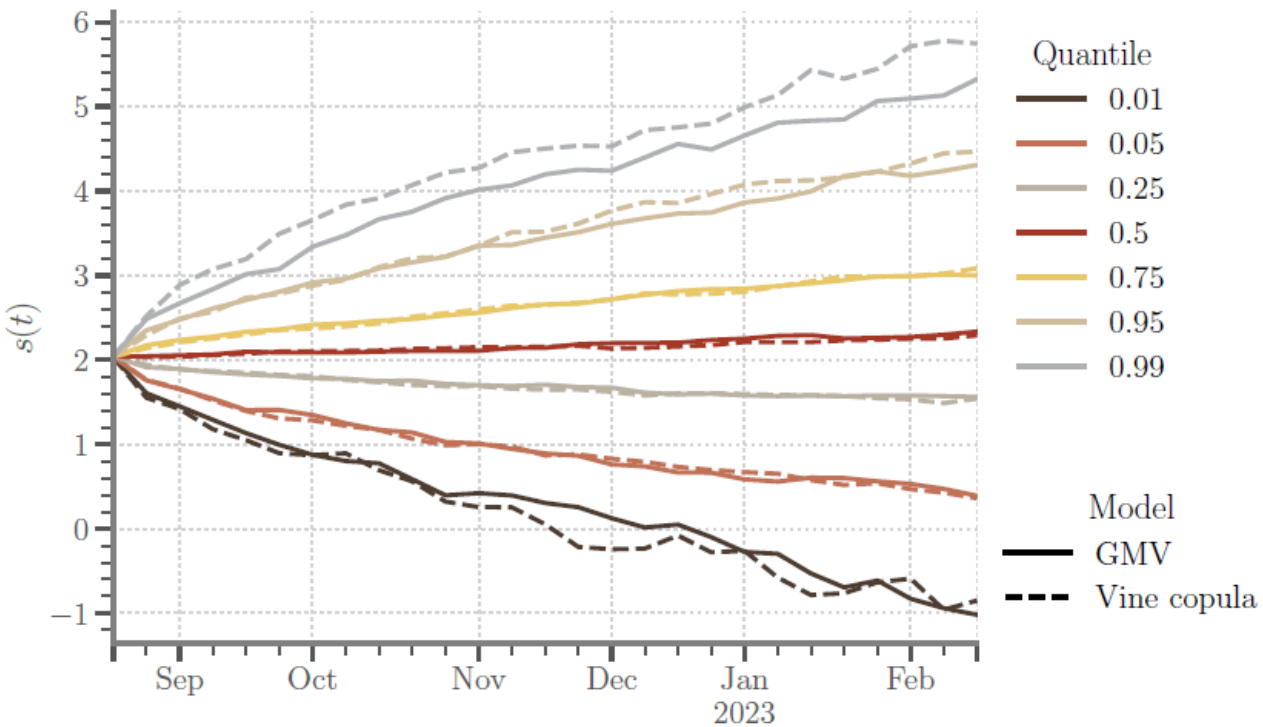
Rysunek: **6-miesięczna symulacja spreadu.**
Histogram wielkości wysymulowanego spreadu w momencie wykonania opcji

Strike	Call		Put	
	Price	Std. Err.	Price	Std. Err.
1.00	1.37	0.04	0.1	0.01
1.33	1.19	0.03	0.13	0.02
1.67	1.01	0.03	0.18	0.02
ATM	0.85	0.03	0.24	0.02
2.33	0.7	0.03	0.31	0.02
2.67	0.57	0.03	0.4	0.02
3.00	0.46	0.03	0.51	0.03
3.33	0.37	0.02	0.64	0.03
3.67	0.29	0.02	0.79	0.03
4.00	0.23	0.02	0.94	0.03

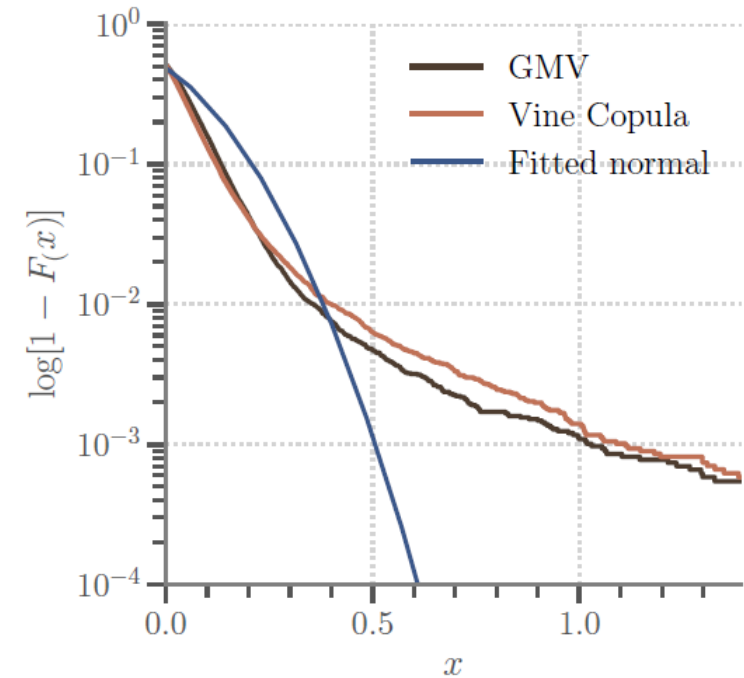
Tabela: **Ceny europejskich opcji.**
Ceny opcji europejskich kupna i sprzedaży w modelu symulacyjnym ARIMA-GARCH-VineCopula, razem z ich błędami standardowymi.
Wyniki otrzymane dla 1000 powtórzeń Monte Carlo

Wyniki

Vine Copula vs Gaussian Multivariate Copula



Rysunek: **Ewolucja kwantyli symulacji spreadu.**
Wybrane krzywe kwantylowe dla modeli Vine Copula i Gaussian Multivariate Copula (GMV) wyestymowane na podstawie symulacji.



Rysunek: **Ciężkoogonowość spreadu.**
Ogony logarytmicznych zwrotów spreadu dla modeli Vine Copula i Gaussian Multivariate Copula (GMV). Porównanie z ogonem rozkładu normalnego.

Dziękuję za uwagę

Teoria

Definicja 2.4 (Dwuwymiarowa kopuła). *Dwuwymiarową kopułą C nazwiemy funkcję rzeczywistą zdefiniowaną na kwadracie jednostkowym:*

$$C: [0, 1] \times [0, 1] \mapsto \mathbb{R},$$

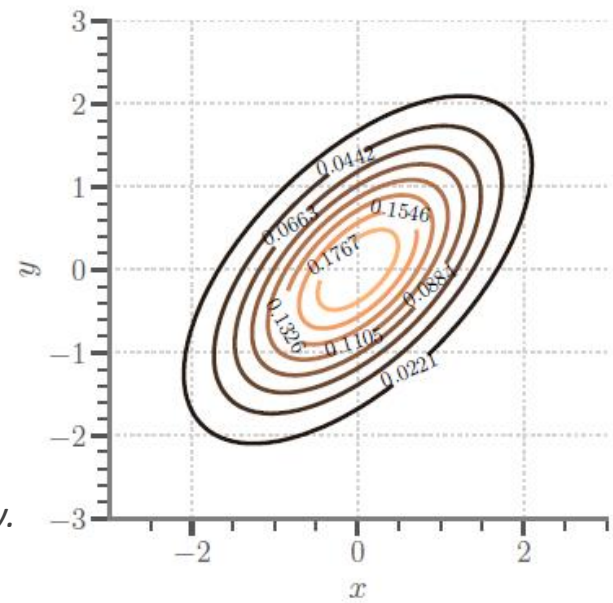
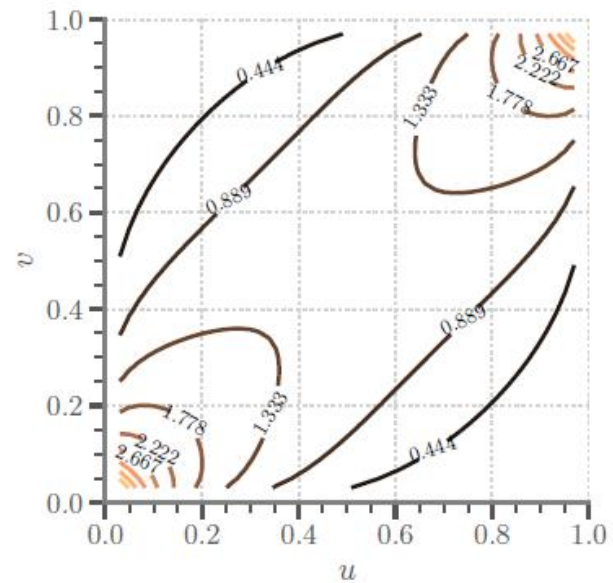
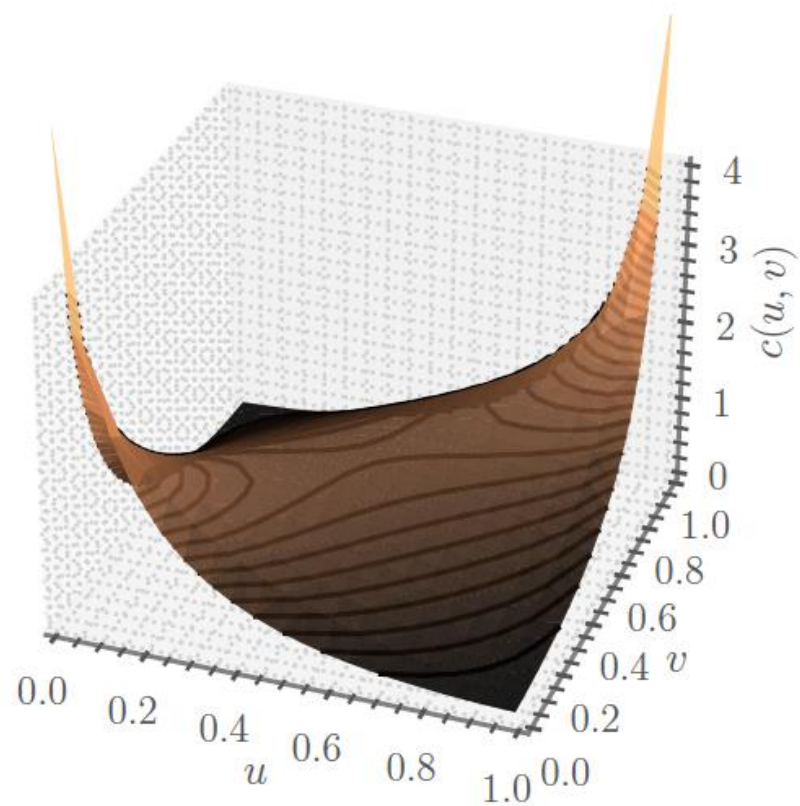
o następujących własnościach:

- *uziemiona* ($C(v, 0) = 0 = C(0, z)$)
- *dwu-rosnąca*
- $C(v, 1) = v$ oraz $C(1, z) = z$ dla wszystkich $(v, z) \in [0, 1] \times [0, 1]$.

Twierdzenie 2.1 (Twierdzenie Sklara). *Niech X_1, X_2, \dots, X_d będą zmiennymi losowymi ciągłymi, o dystrybuantach F_1, \dots, F_d , i rozkładzie łącznym z dystrybuantą F . Wtedy istnieje dokładnie jedna kopuła C , taka że dla wszystkich $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$:*

$$F(x_1, \dots, x_d) = C(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)). \quad (2.1)$$

Zachodzi również twierdzenie odwrotne: Mając dowolne dystrybuanty F_1, \dots, F_d i kopułę C , funkcja F zdefiniowana według [2.1](#) jest d -wymiarową dystrybuantą, o rozkładach brzegowych F_1, \dots, F_d .

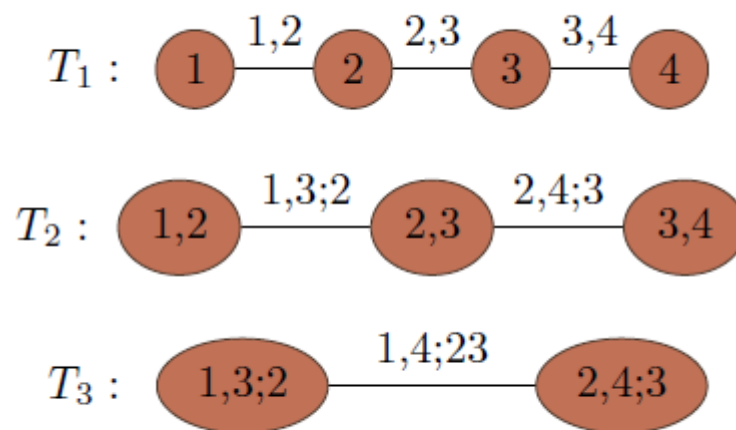


Rysunek: **Kopuła Gaussowska.**

Trzy reprezentacje graficzne. Lewy panel: Powierzchnia gęstości w skali kopuły.
Na prawym panelu od góry: kontur powierzchni gęstości w skali kopuły,
oraz kontur powierzchni gęstości w skali brzegowo-znormalizowanej.

Definicja 2.37 (Regular vine). Zbiór drzew $\mathcal{V} = (T_1, \dots, T_{d-1})$ nazywamy regular vine lub R-vine jeżeli:

1. Każde drzewo $T_j = (N_j, E_j)$ jest spójne
2. T_1 jest drzewem o zbiorze wierzchołków N_1 i zbiorze krawędzi E_1
3. Dla $j \geq 2$, T_j jest drzewem o zbiorze wierzchołków $N_j = E_{j-1}$ i zbiorze krawędzi E_{j-1}
4. Dla $j = 2, \dots, d-1$ oraz $\{a, b\} \in E_j$ mamy $|a \cap b| = 1$.



Rysunek: **Przykładowa struktura D-Vine.**
Struktura R-Vine w 4 wymiarach, należąca do podklasy D-Vine

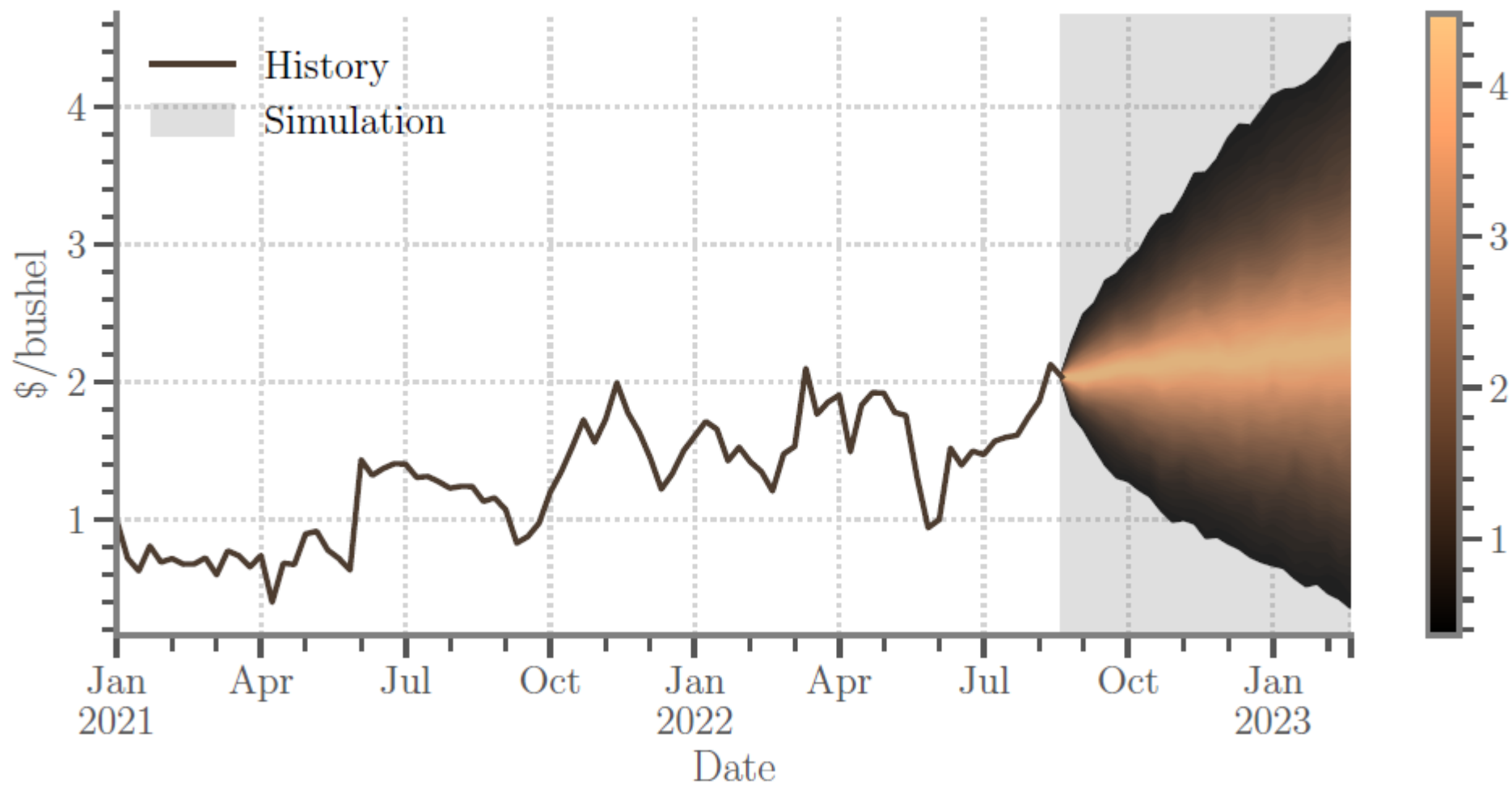
Twierdzenie 2.41 (Istnienie rozkładu R-vine). *Niech $(\mathcal{F}, \mathcal{V}, \mathcal{B})$ spełnia warunki z definicji 2.40. Wtedy istnieje dokładnie jeden d -wymiarowy rozkład F o gęstości:*

$$f_{1,\dots,d}(x_1, \dots, x_d) = f_1(x_1) \dots f_d(x_d) \cdot \prod_{i=1}^{d-1} \prod_{e \in E_i} c_{C_{e,a}C_{e,b};D_e}(F_{C_{e,a}|D_e}(x_{C_{e,a}|x_{D_e}}), F_{C_{e,b}|D_e}(x_{C_{e,b}|x_{D_e}})),$$

taki, że dla każdego $e \in E_i, i = 1, \dots, d-1$ oraz $e = \{a, b\}$ rozkład $X_{C_{e,a}}$ i $X_{C_{e,b}}$ pod warunkiem $X_{D_e} = x_{D_e}$ wyraża się poprzez:

$$F_{C_{e,a}C_{e,b}|D_e}(x_{C_{e,a}}, x_{C_{e,b}}|x_{D_e}) = C_e(F_{C_{e,a}|D_e}(x_{C_{e,a}}|x_{D_e}), F_{C_{e,b}|D_e}(x_{C_{e,b}}|x_{D_e})).$$

Ponadto rozkłady brzegowe F zadane są jako $F_i(x_i), i = 1, \dots, d$.



Rysunek: **Gęstość symulacji spreadu w czasie.**
 Wartości gęstości rozkładu symulowanego spreadu $S(t)$,
 dla każdego momentu czasowego