UBS

Public

Modelowanie wielowymiarowe za pomocą kopuł

Przykład opcji spread

Piotr Mikler
Risk Modeling & Analytics Specialist
FSM-QSA I Data and Model Intelligence

X KKMF - May 14th, 2022

Disclaimer

UBS is an Equal Opportunity Employer. We respect and seek to empower each individual and the diverse cultures, perspectives, skills and experiences within our workforce.

This presentation is prepared by UBS Business Solutions Poland Sp. z o.o. and/or any of its subsidiaries and/or any of its affiliates ("UBS").

The views and opinions expressed during this presentation are those of the respective speakers and may not be those of UBS Group AG or UBS AG, or their subsidiaries or affiliate companies (collectively "UBS"). Such views and opinions are subject to change without notice and may differ or be contrary to opinions expressed by other business areas or groups of UBS as a result of using different assumptions and criteria.

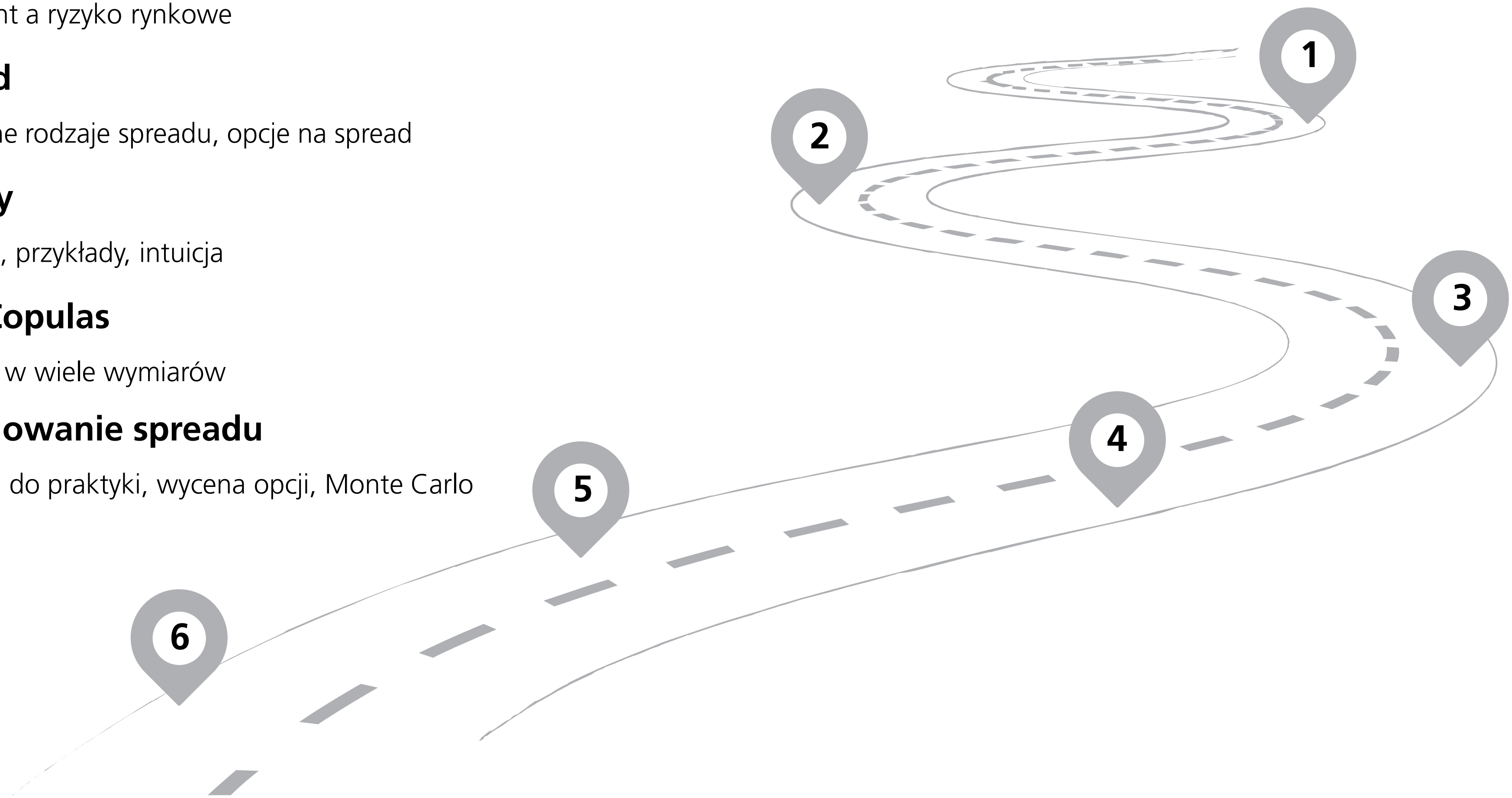
This presentation and related materials and discussions (collectively, the "Content") have been prepared, and are provided, for general information purposes only. The Content has not been prepared with regard to the specific investment objectives, financial situation or particular needs of any specific audience or participant. The participant should not construe the Content as legal, tax, accounting, regulatory, or other specialist or technical advice or services or investment advice or a personal recommendation. No representation or warranty, either express or implied, and including the warranties of merchantability and fitness for a particular purpose, is provided in relation to the accuracy, completeness or reliability of the Content, nor is it intended to be a complete statement or summary of the events or developments referred to in this presentation. It should not be regarded by participants as a substitute for the exercise of their own judgment. UBS is under no obligation to update or keep the Content current or up-to-date, and past performance is not necessarily indicative of future results.

Neither UBS nor any of its directors, officers, employees or agents accepts any liability for any loss or damage arising out of the use of all or any part of this presentation or the Content or reliance upon all or any part thereof.

UBS is making this presentation electronically available, on the condition that participants will not copy, distribute, share or further reproduce any or all of the Content in any way without UBS's prior consent.

Agenda

- **Wstęp**
  O czym będziemy mówić?
- **Motywacja**
  Producent a ryzyko rynkowe
- **Spread**
  Popularne rodzaje spreadu, opcje na spread
- **Kopuły**
  Definicja, przykłady, intuicja
- **Vine Copulas**
  Przejście w wiele wymiarów
- **Modelowanie spreadu**
  Od teorii do praktyki, wycena opcji, Monte Carlo
- **Q&A**

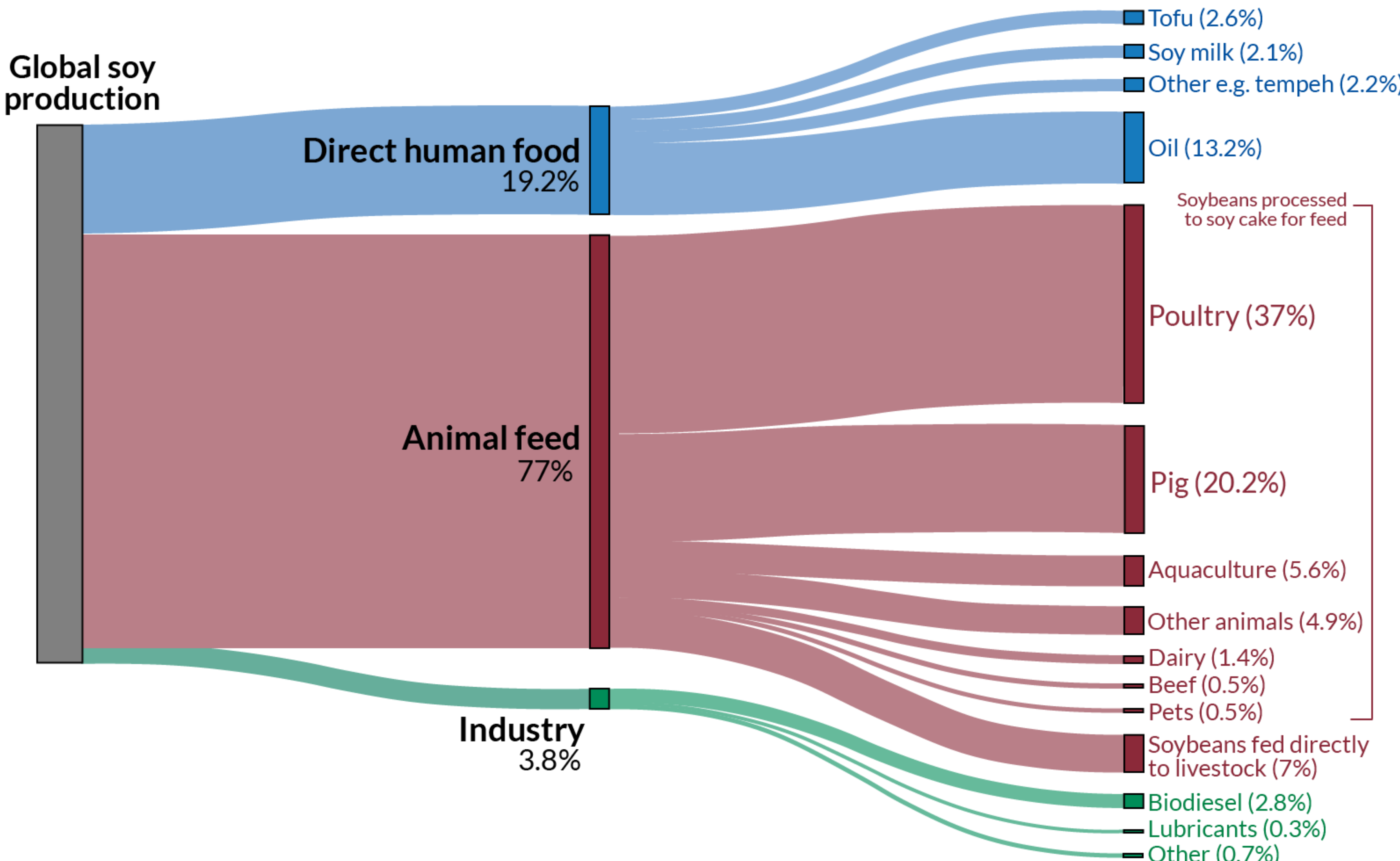


UBS

The World's Soy: is it used for Food, Fuel, or Animal Feed?

Shown is the allocation of global soy production to its end uses by weight. This is based on data from 2017 to 2019.

Our World in Data



Data source: Food Climate Resource Network (FCRN), University of Oxford; and USDA PSD Database.

OurWorldinData.org – Research and data to make progress against the world's largest problems.

UBS

Spread w roli aktywa

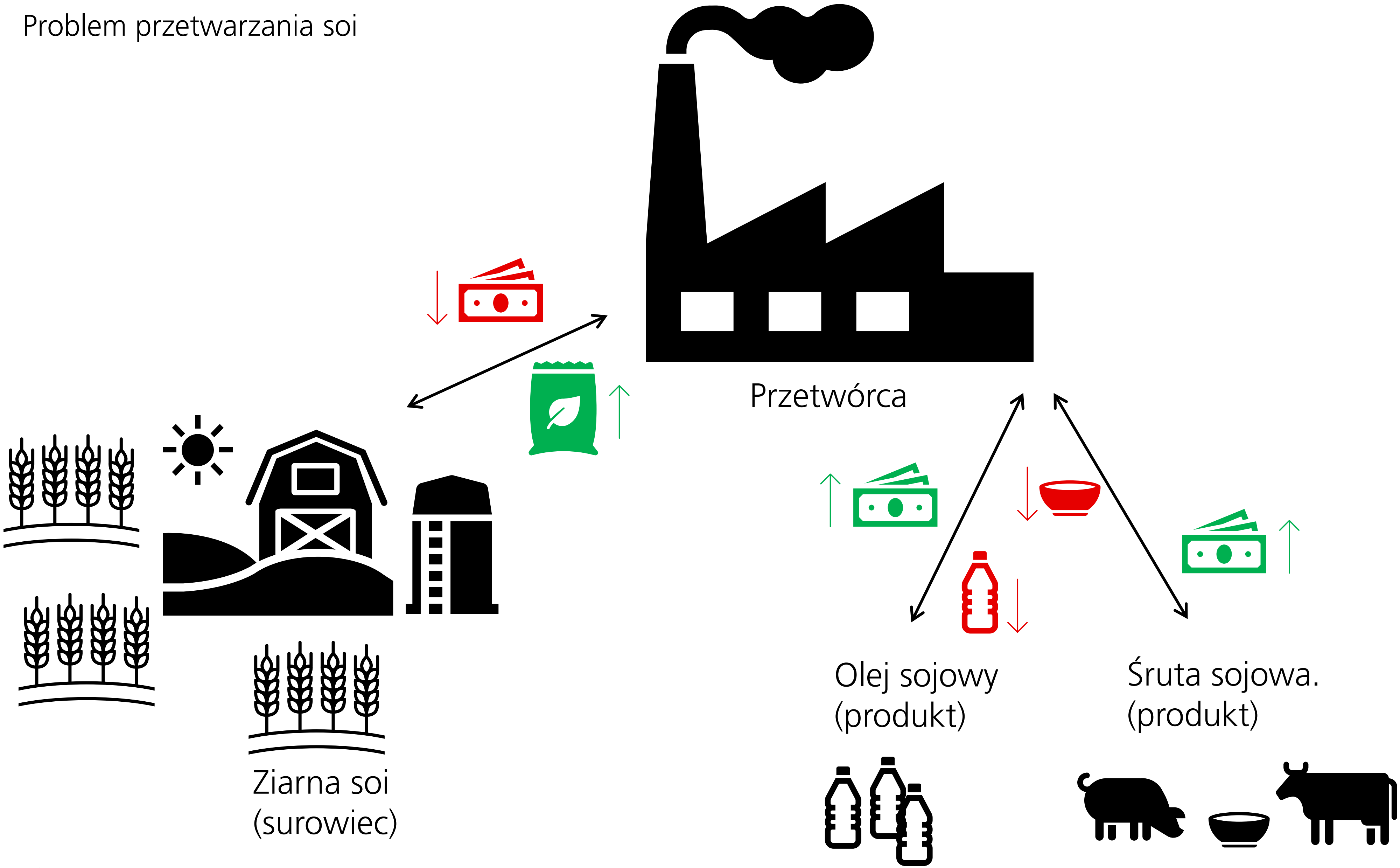
Problem przetwarzania soi

Spread w roli aktywa

Problem przetwarzania soi

Spread w roli aktywa

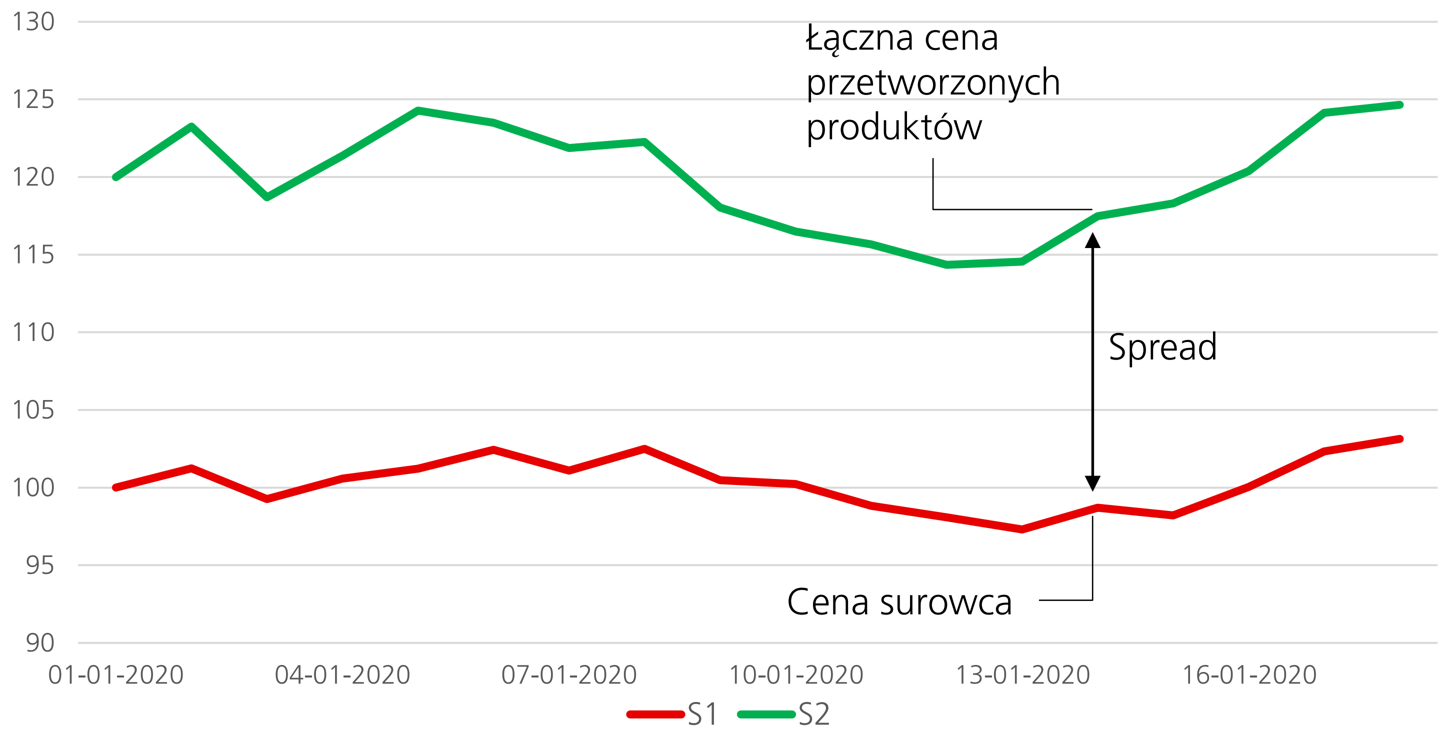
Problem przetwarzania soi



Spread w roli aktywa

Kluczowy jest spread

Dwa źródła ryzyka rynkowego



Source: Opracowanie własne

Spread w roli aktywa

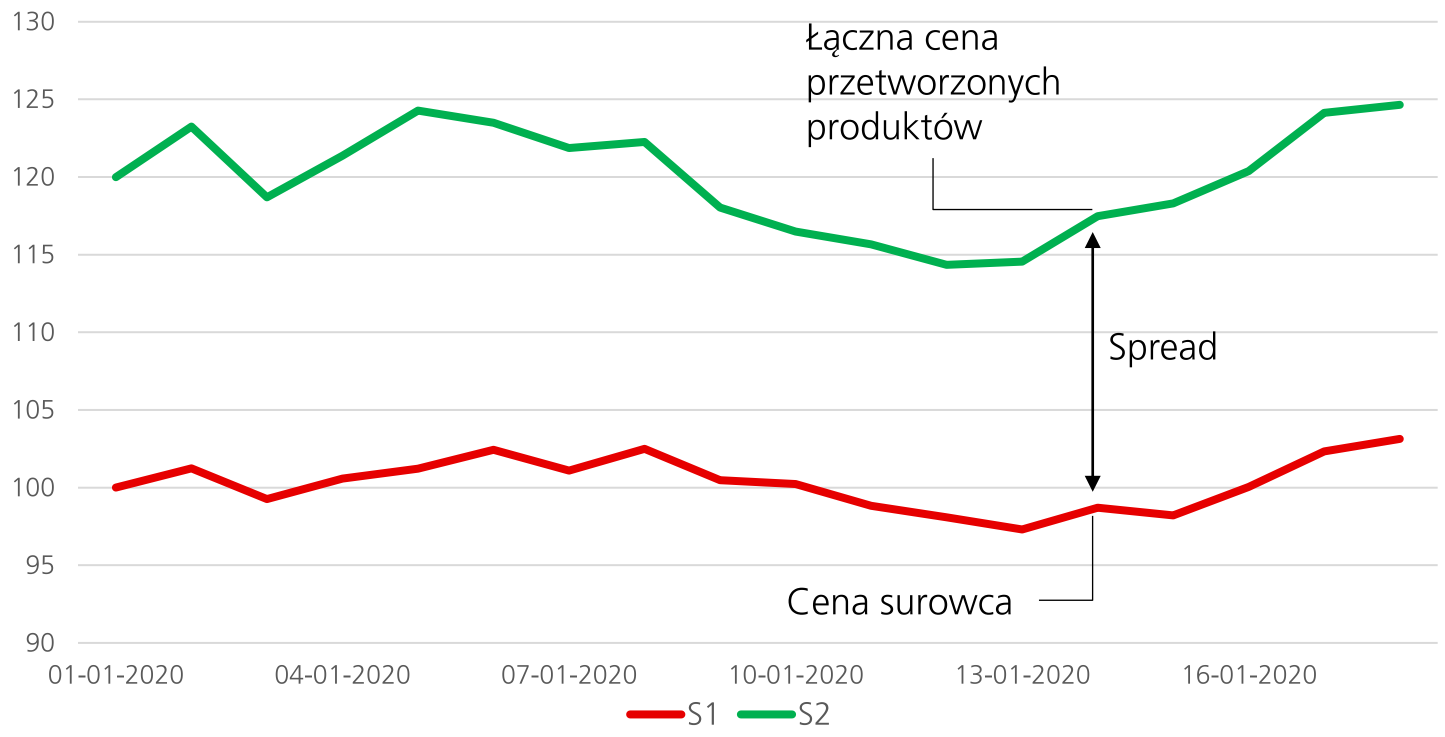
Kluczowy jest spread

A gdy się zmniejsza?

- Znika dochód
- Wstrzymujemy produkcję?
- Na jak długo?
- Jak kosztowna jest taka decyzja?

Nie lepiej się zabezpieczyć?

Dwa źródła ryzyka rynkowego



Source: Opracowanie własne

Opcja spread

To europejska opcja waniliowa, w której instrumentem bazowym zamiast pojedynczego aktywa jest różnica cen określonych w kontrakcie aktywów.

Funkcja wypłaty opcji spread (o cenie wykonania K, na spread pomiędzy aktywami S_2 i S_1) to:

- dla opcji call:

$$h\big(S_1(T), S_2(T)\big) = ([S_1(T) - S_2(T)] \ - K)^+$$

- dla opcji put:

$$h\big(S_1(T), S_2(T)\big) = (K \ - [S_1(T) - S_2(T) \ ])^+$$

Opcja spread

To europejska opcja waniliowa, w której instrumentem bazowym zamiast pojedynczego aktywa jest różnica cen określonych w kontrakcie aktywów.

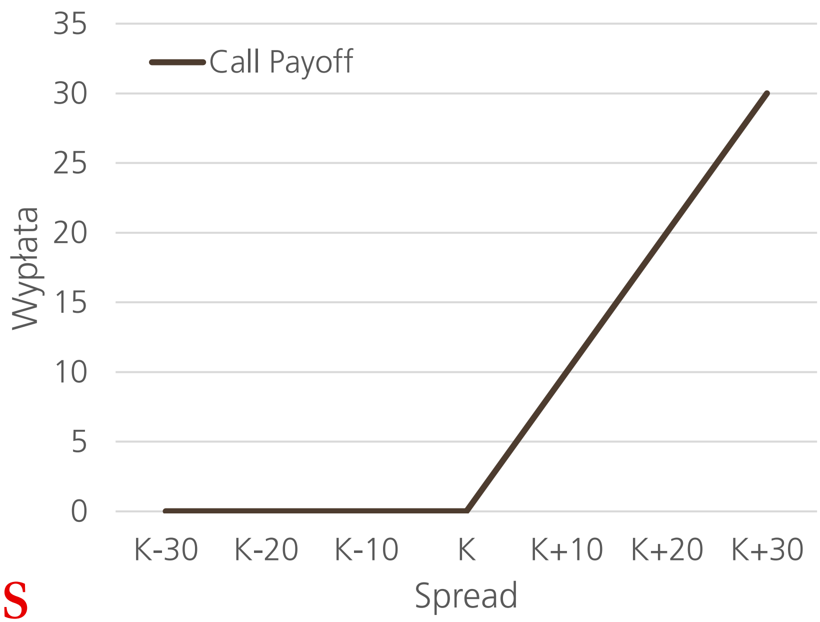
Funkcja wypłaty opcji spread (o cenie wykonania K, na spread pomiędzy aktywami S_2 i S_1) to:

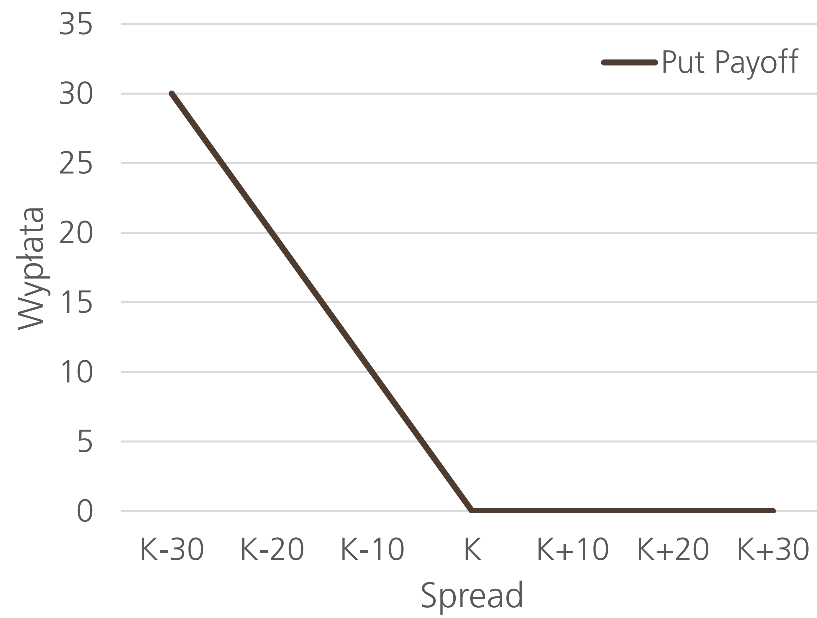
- dla opcji call:

$$h\big(S_1(T), S_2(T)\big) = ([S_1(T) - S_2(T)] \ - K)^+$$

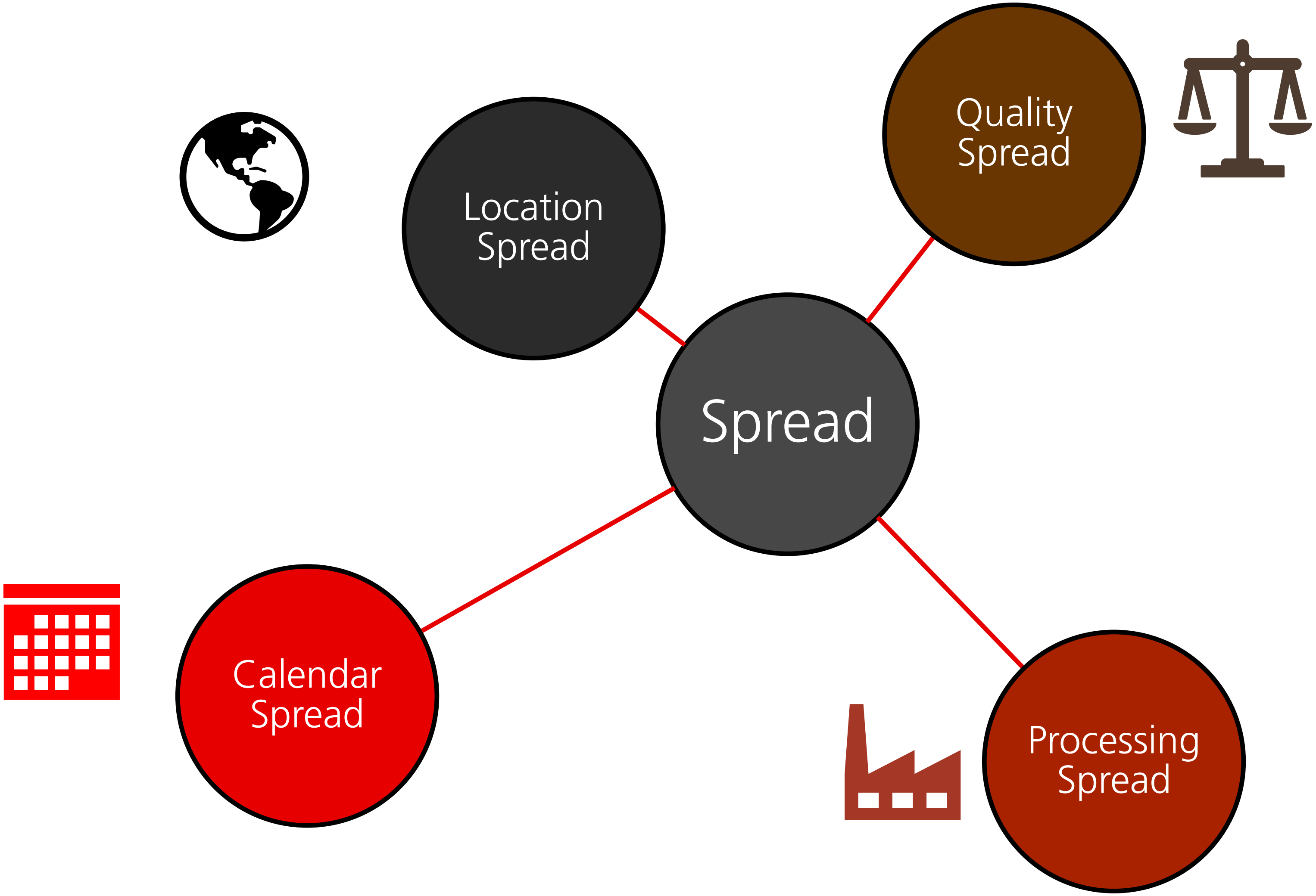
- dla opcji put:

$$h\big(S_1(T), S_2(T)\big) = (K \ - [S_1(T) - S_2(T) \ ])^+$$





Galeria spreadów

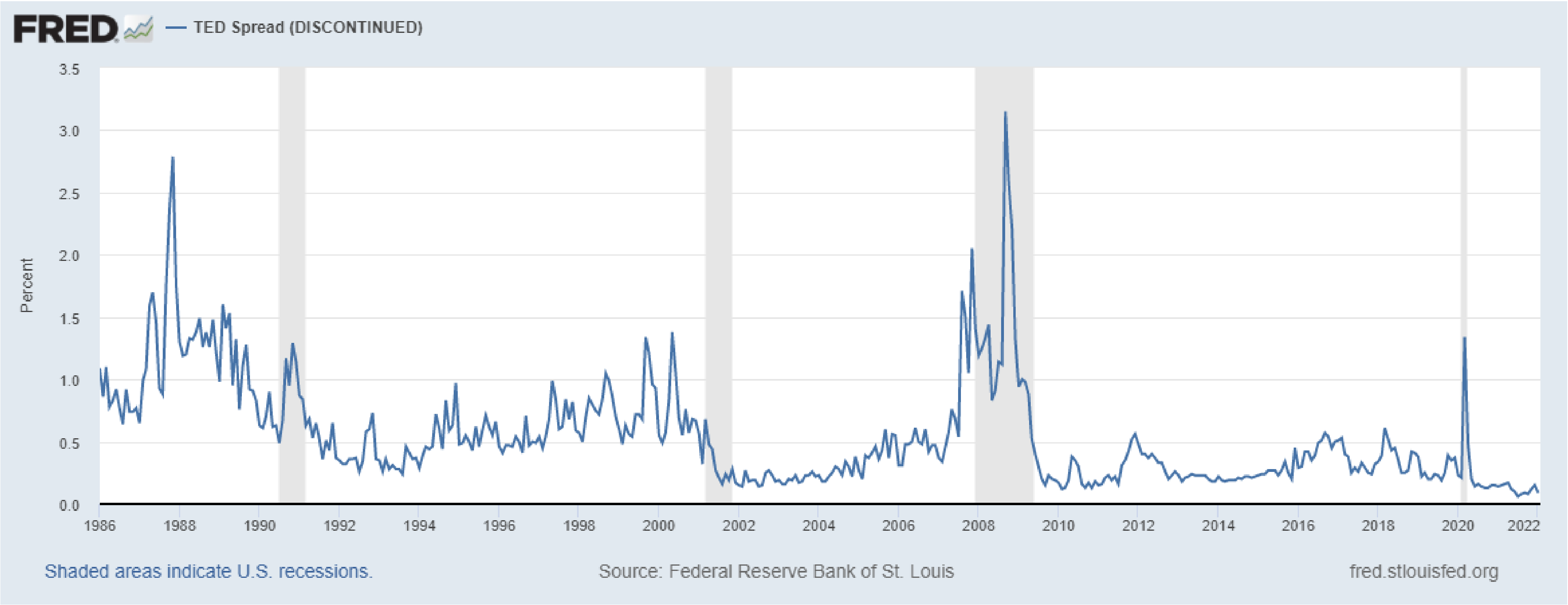


Galeria spreadów

$$TS_t = LIB_t - TB_t$$

Przykład z rynku Fixed Income:

TED spread (US Libor 3M - T-Bill 3M)



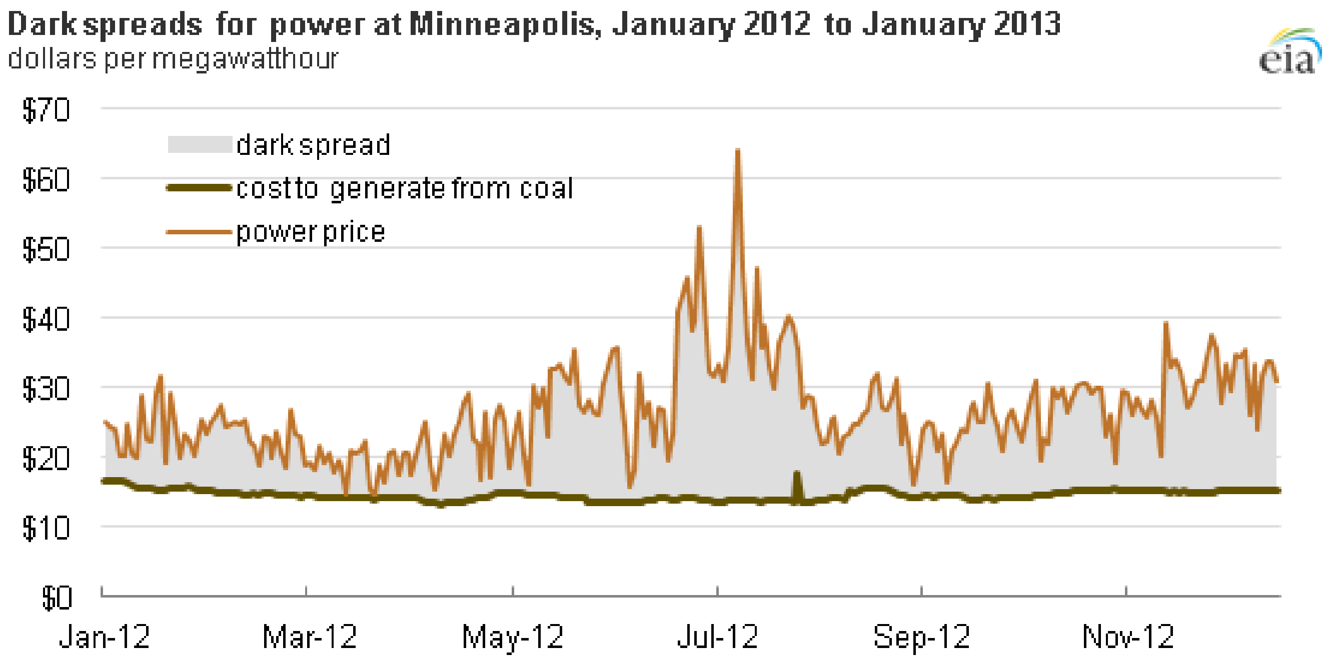
Source: https://fred.stlouisfed.org/series/TEDRATE

Galeria spreadów

$$DS_t = E_t - 0.35 \cdot C_t$$

Przykład z rynku energii:

Dark spread (Cena energii - Koszt węgla użytego do jej produkcji)



Source:eia.gov

Galeria spreadów

Przykład z rynku surowców:

Crush spread (Cena śruty sojowej + oleju sojowego - Cena soi użytej do produkcji)

Soja: $\$/buszel$

(1 buszel soi ≈ 60 funtów)

Śruta sojowa: $\$/\text{short ton}$

(1 buszel soi $\rightarrow 44$ funty śruty)

Olej sojowy: $\$/\text{pound}$

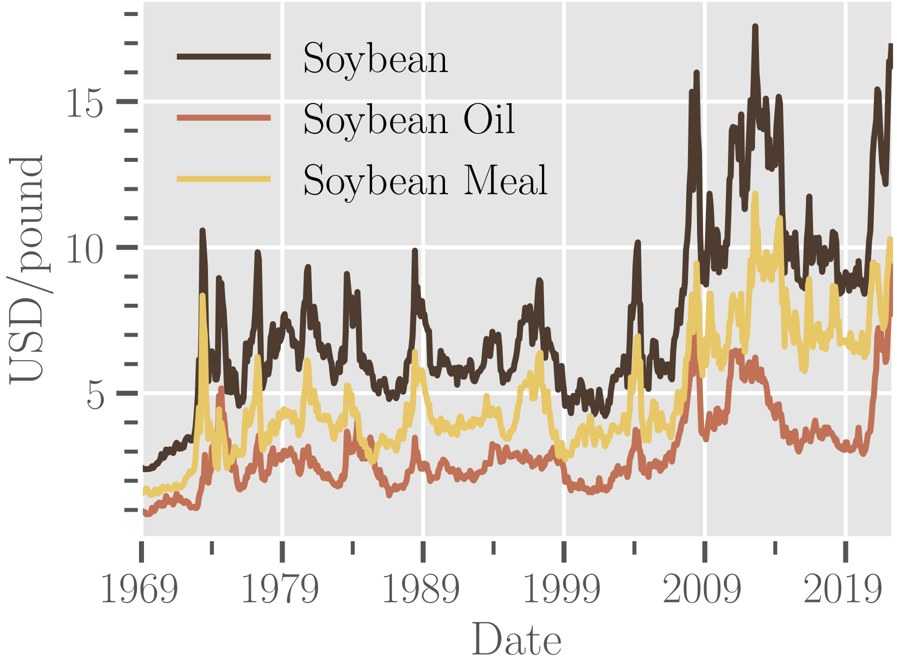
(1 buszel soi $\rightarrow 11$ funtów oleju)

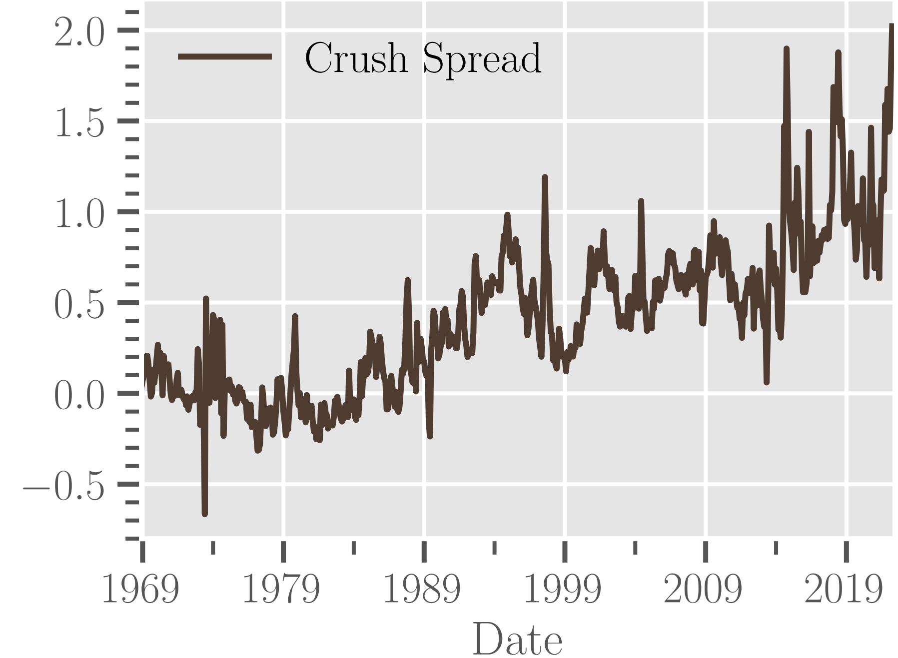
Galeria spreadów

Przykład z rynku surowców:

Crush spread (Cena śruty sojowej + oleju sojowego - Cena soi użytej do produkcji)

$$CS_t = (0.022 \cdot SM_t + 0.11 \cdot SO_t) - S_t$$





Data source: www.macrotrends.net

UBS

Zmienne zależne

Korelacja Pearsona

Współczynnik korelacji Pearsona

$$\rho \coloneqq Cor(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)}\sqrt{Var(Y)}}$$

UBS

Zmienne zależne

Korelacja Pearsona

Współczynnik korelacji Pearsona

$$\rho := Cor(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)}\sqrt{Var(Y)}}$$

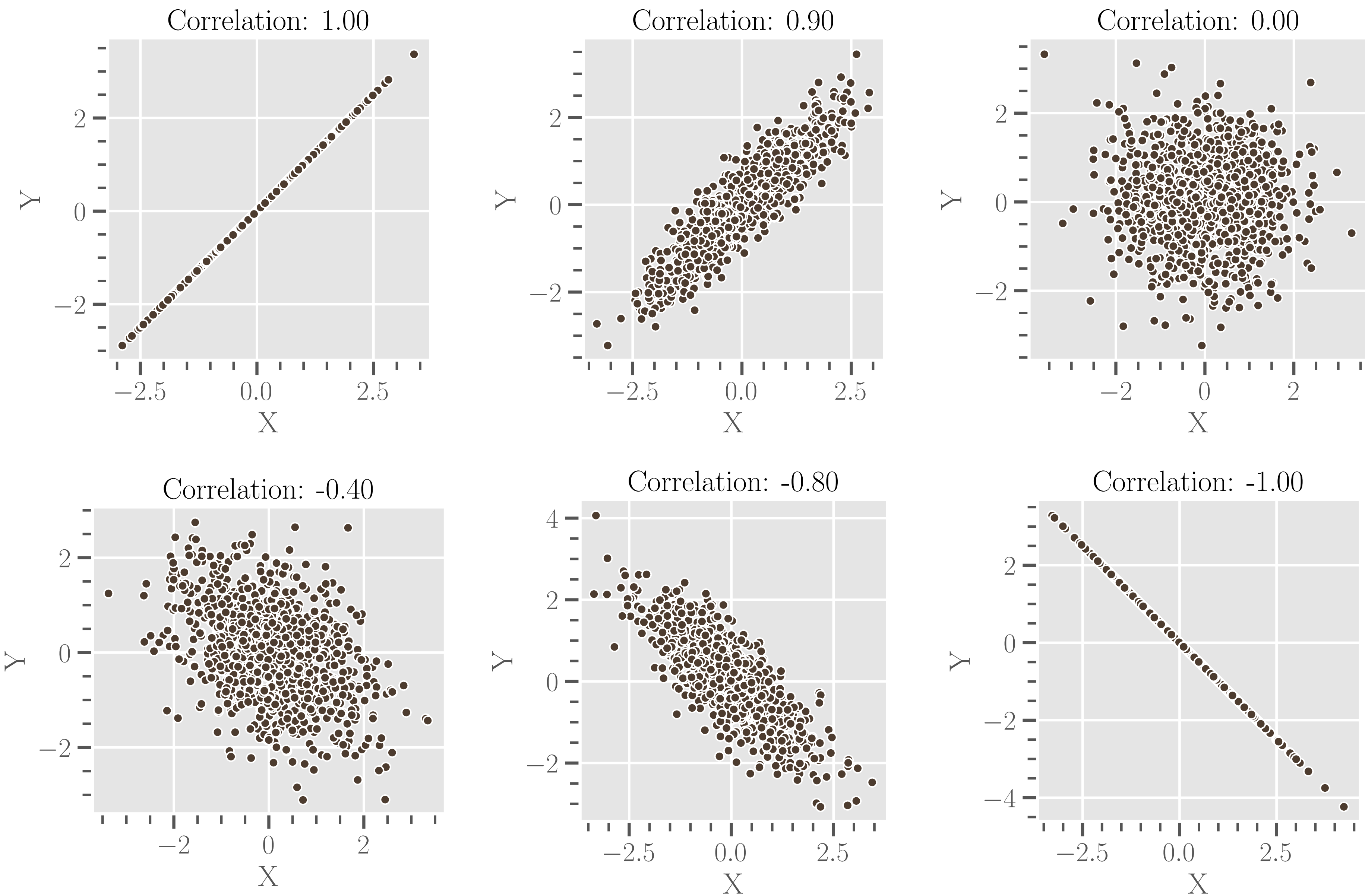
$-1 \leq \rho \leq 1$

Miara liniowej zależności

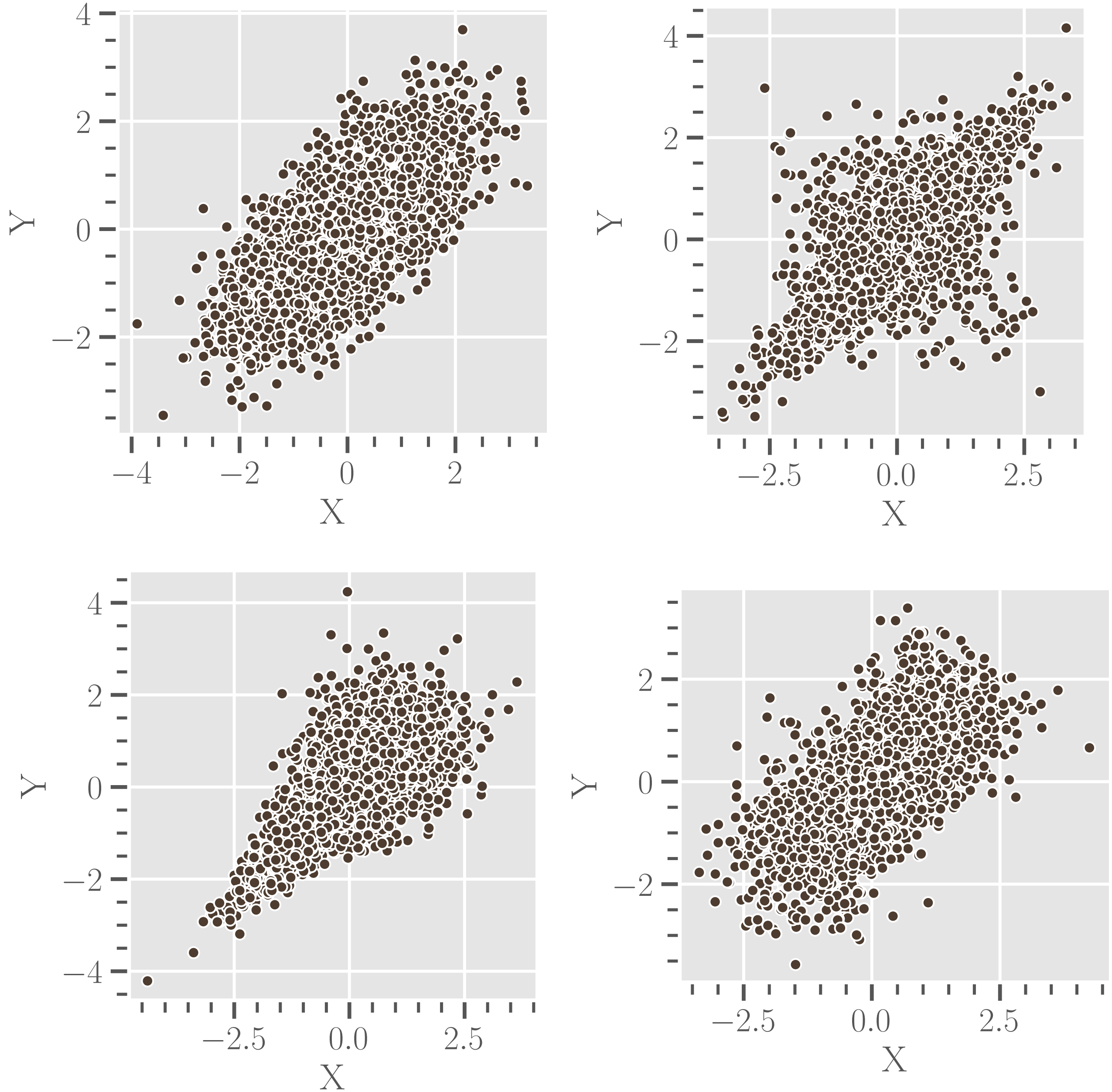
Alternatywy?

Prosta, intuicyjna miara zależności

Zmienne zależne

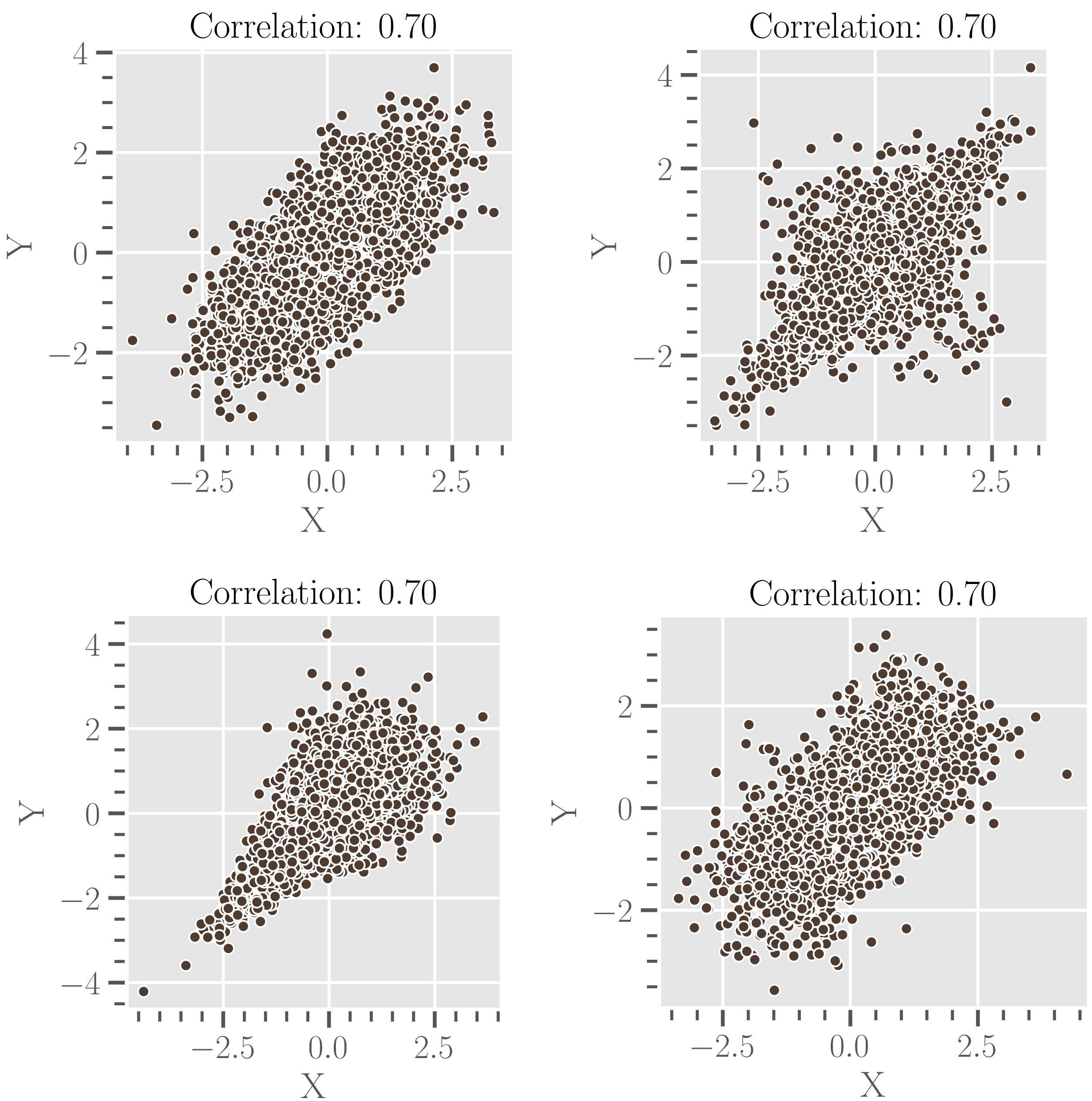


Zmienne zależne

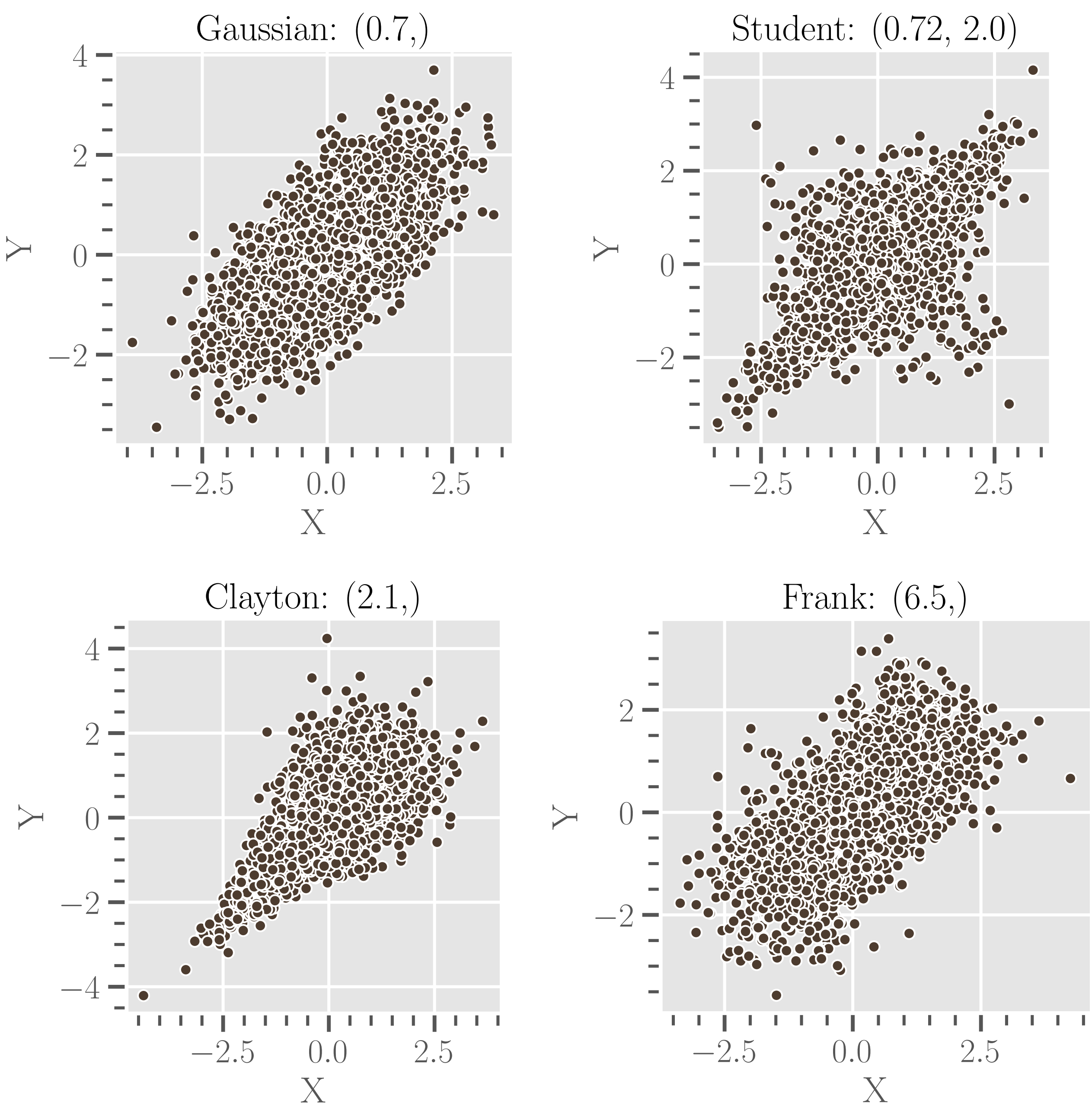


UBS

Zmienne zależne



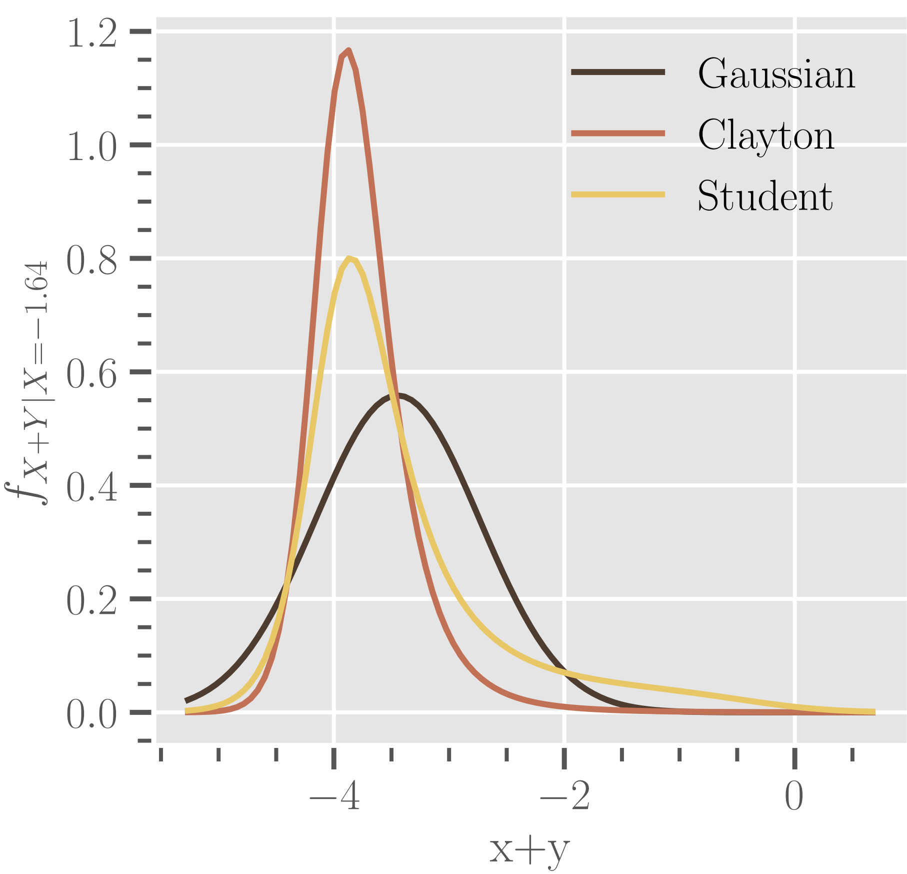
Zmienne zależne

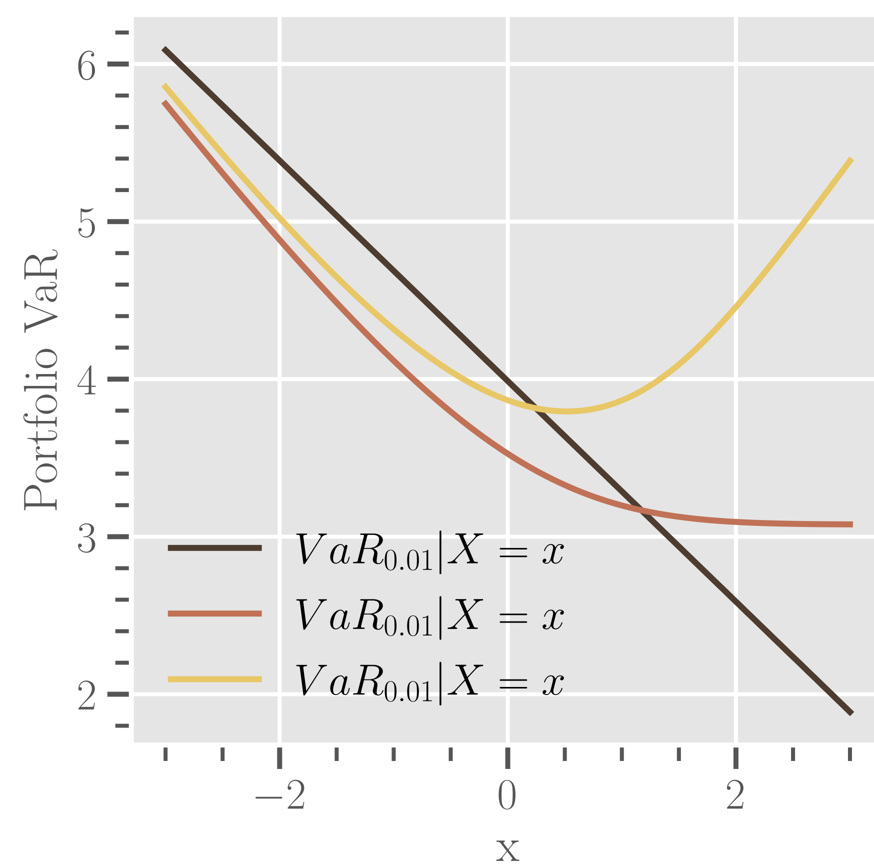


UBS

Zmienne zależne

Niepoprawne założenia → Niepoprawny model → Niepoprawne wnioski

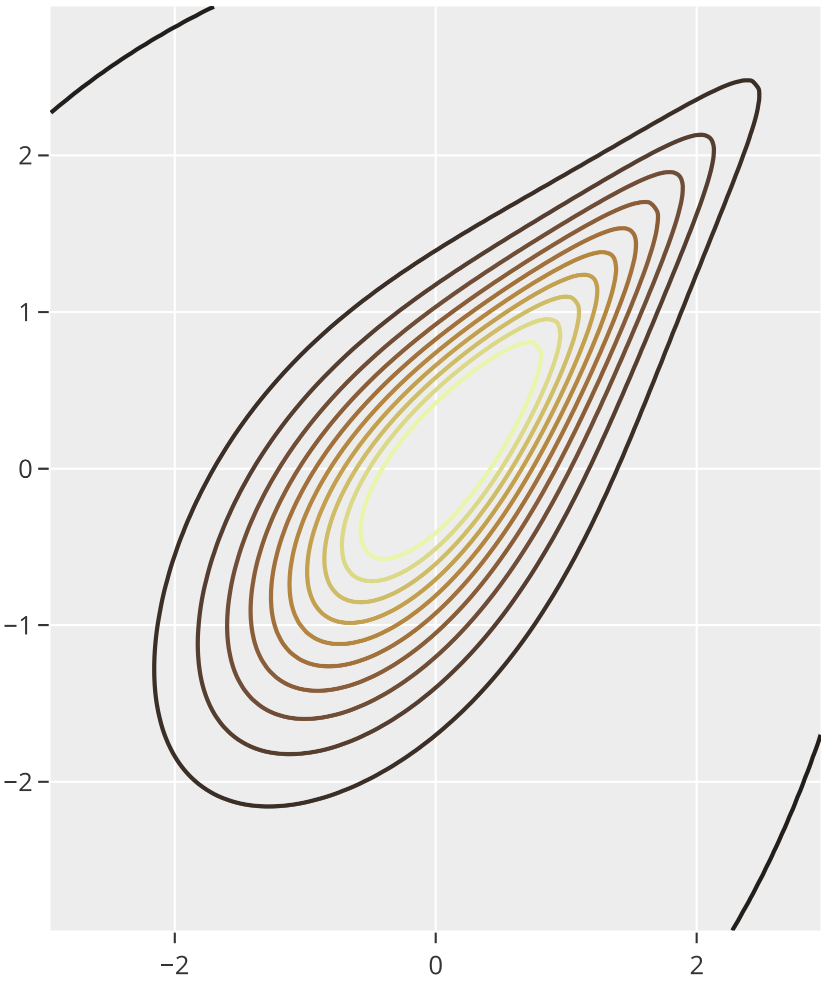


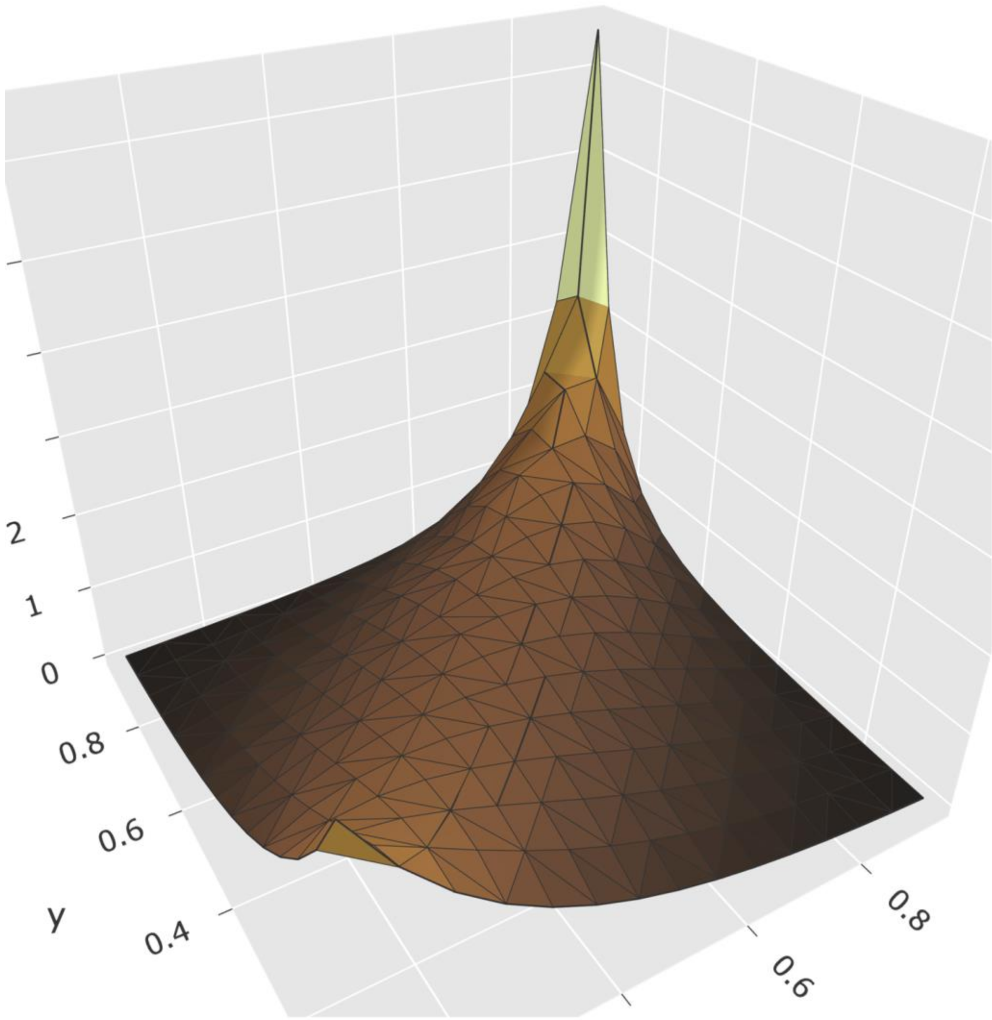


UBS

Kopuły

Co to właściwie jest?





UBS

Kopuły

Formalna definicja

Dwuwymiarowa kopuła

To funkcja $\mathrm{C}: [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$, spełniająca warunki:

- $C(u,0) = C(0,v) = 0$
- $C(u,1) = u, \; C(1,v) = v$
- Rosnąca ze względu na oba argumenty

Kopuły

Formalna definicja

Dwuwymiarowa kopuła

To funkcja $C: [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$, spełniająca warunki:

- $C(u,0) = C(0,v) = 0$
- $C(u,1) = u,\ C(1,v) = v$
- Rosnąca ze względu na oba argumenty

Kopuły to nic innego jak rozkłady łączne, dla zmiennych jednostajnych.

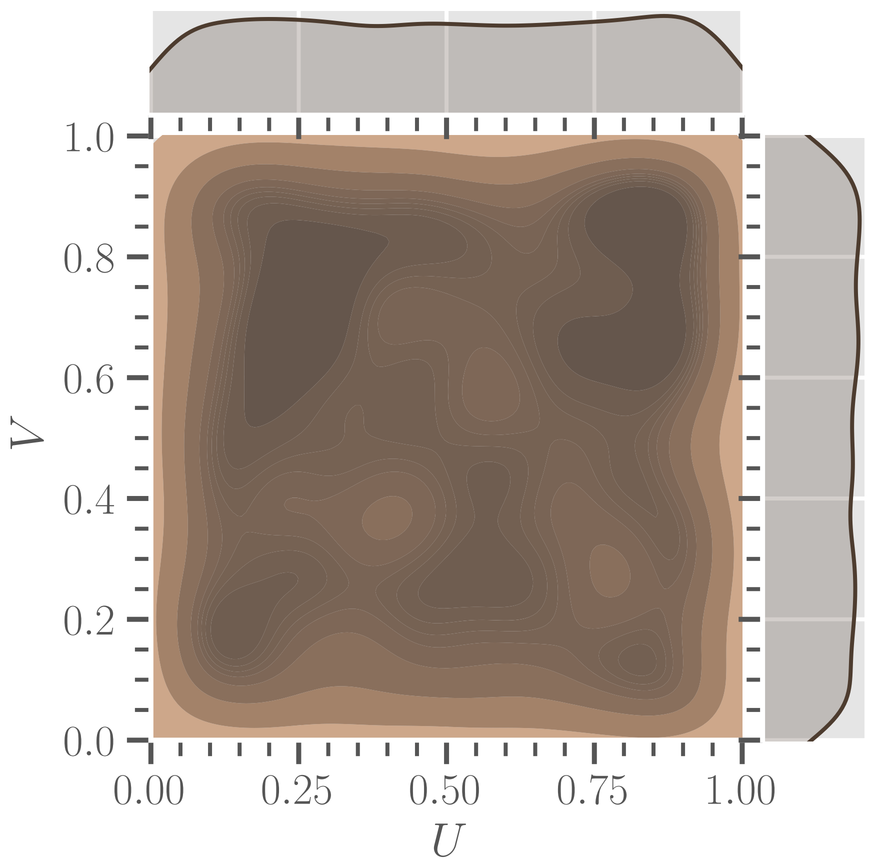
$$C(u,v) = P(U \leq u, V \leq v)$$

Można też więc rozważać gęstość kopuły $c(u,v)$, czy rozkłady warunkowe $C_{U|V}(u|v)$

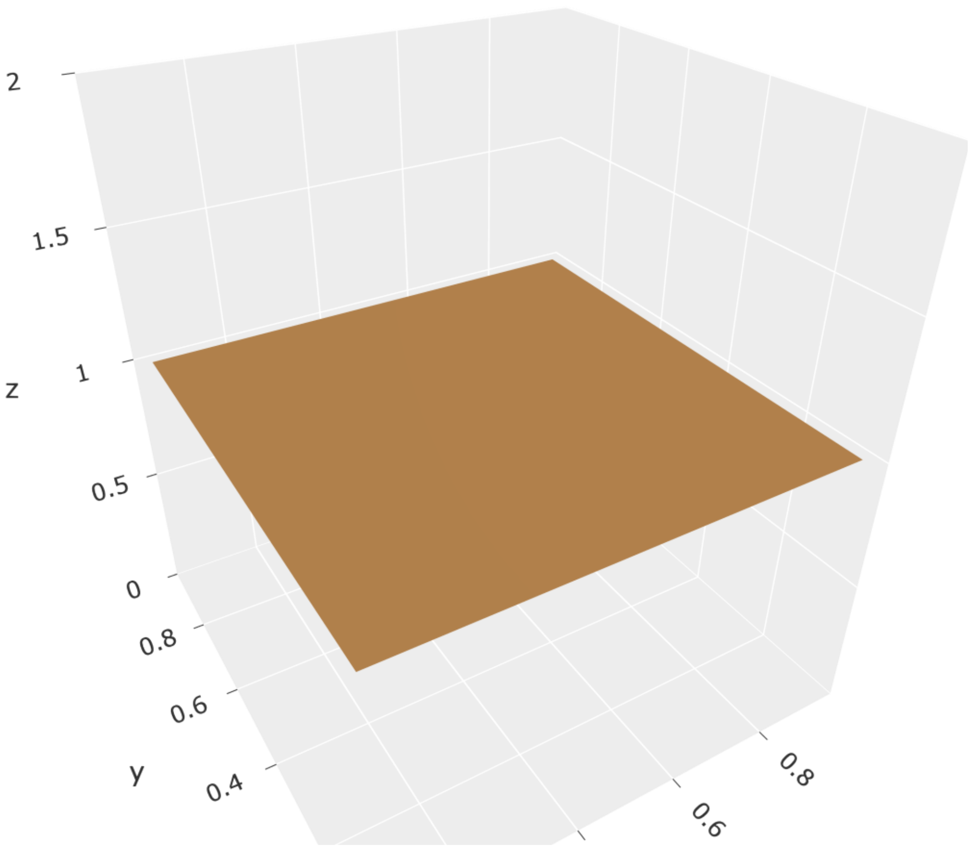
- $c(u,v) = \frac{\partial^2 C(u,v)}{\partial u \partial v}$
- $C_{U|V}(u|v) = P(U \leq u \,|V = v) = \frac{\partial C(u,v)}{\partial v}$

Kopuły

Formalna definicja

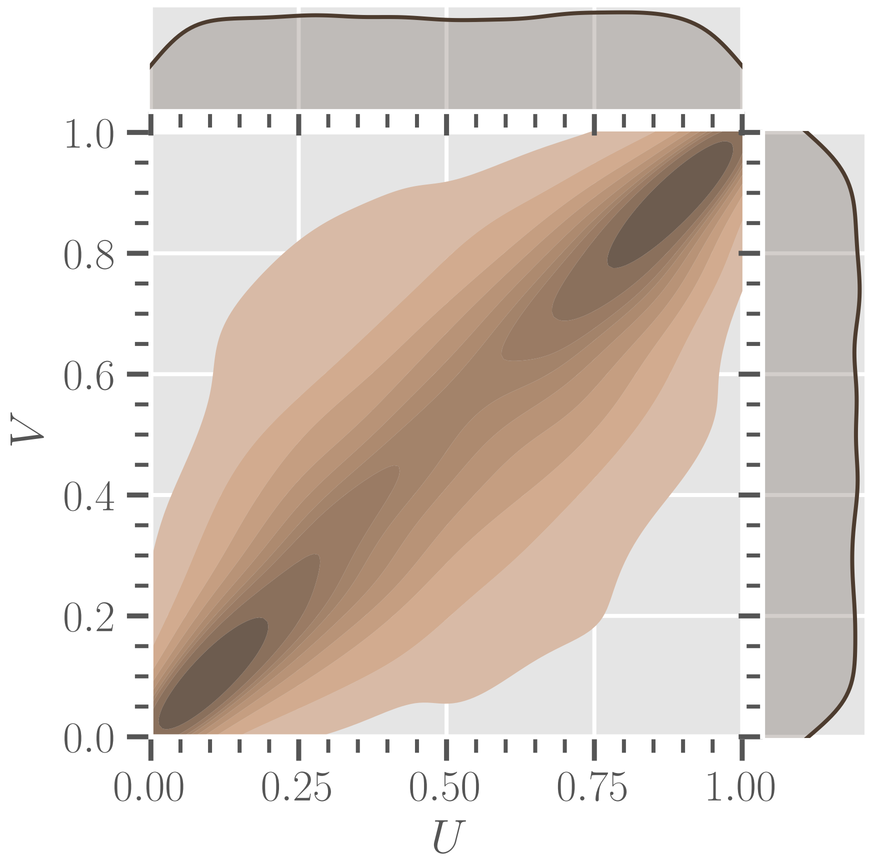


Independence copula

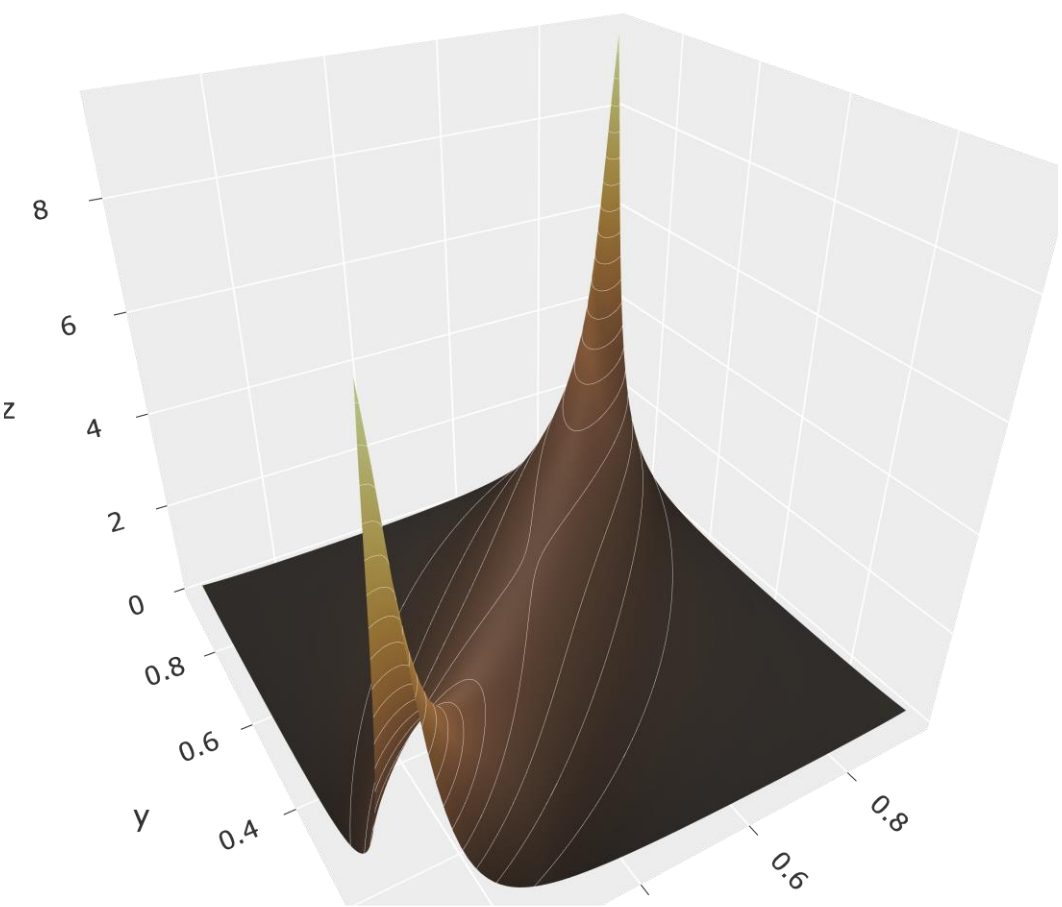


Kopuły

Formalna definicja



Student copula



Kopuły

Formalna definicja

Twierdzenie Sklara (1959)

Jeśli X jest d-wymiarowym wektorem losowym o rozkładzie łącznym $F(x_1, \dots, x_d)$ i rozkładach brzegowych $F_i(x_i)$, gdzie $i = 1, \dots, d$, to dystrybuanta i gęstość tego rozkładu łącznego daje się przedstawić jako:

$$F(x_1, \dots, x_d) = C\big(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)\big)$$

$$f(x_1, \dots, x_d) = c\big(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)\big) \cdot f_1(x_1) \cdot \dots \cdot f_d(x_d)$$

Kopuły

Formalna definicja

Twierdzenie Sklara (1959)

Jeśli X jest d-wymiarowym wektorem losowym o rozkładzie łącznym $F(x_1, \dots, x_d)$ i rozkładach brzegowych $F_i(x_i)$, gdzie $i = 1, \dots, d$, to dystrybuanta i gęstość tego rozkładu łącznego daje się przedstawić jako:

$$F(x_1, \dots, x_d) = C\big(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)\big)$$

$$f(x_1, \dots, x_d) = c\big(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)\big) \cdot f_1(x_1) \cdot \dots \cdot f_d(x_d)$$

Jest i odwrotnie: kopuła $C(\boldsymbol{u})$ i jej gęstość $c(\boldsymbol{u})$ która odpowiada rozkładowi łącznemu F o rozkładach brzegowych F_i, daje się przedstawić jako:

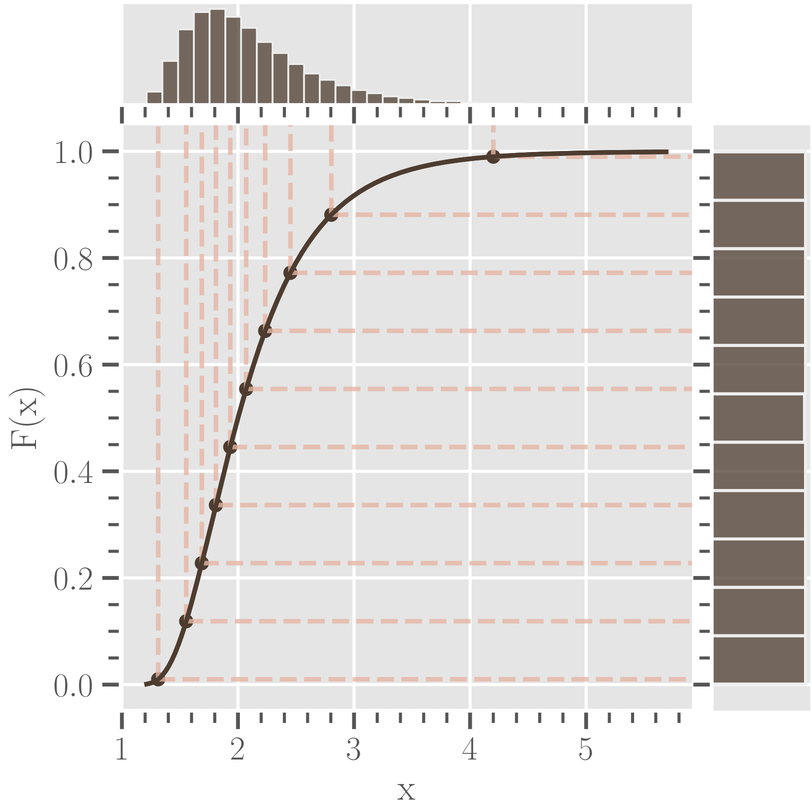
$$C(u_1, \dots, u_d) = F\left(F_1^{-1}(u_1), \dots, F_d^{-1}(u_d)\right)$$

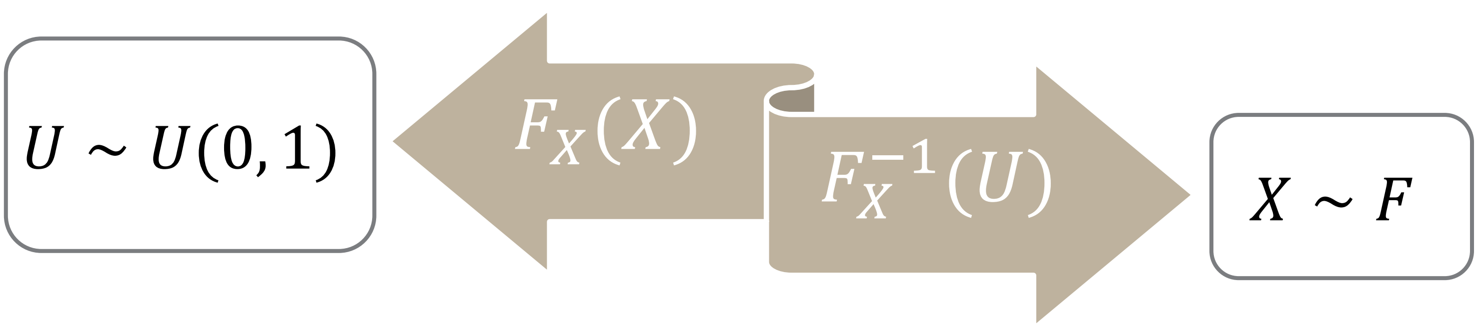
$$c(u_1, \dots, u_d) = \frac{f(F_1^{-1}(u_1), \dots, F_d^{-1}(u_d))}{f_1\big(F_1^{-1}(u_1)\big) \cdot \dots \cdot f_d\big(F_d^{-1}(u_d)\big)}$$

Estymacja

Probability integral transform

Jeżeli X jest ciągłą zmienną losową o dystrybuancie $F(x)$, to zmienna losowa $U := F(X)$ ma rozkład jednostajny na odcinku $[0,1]$

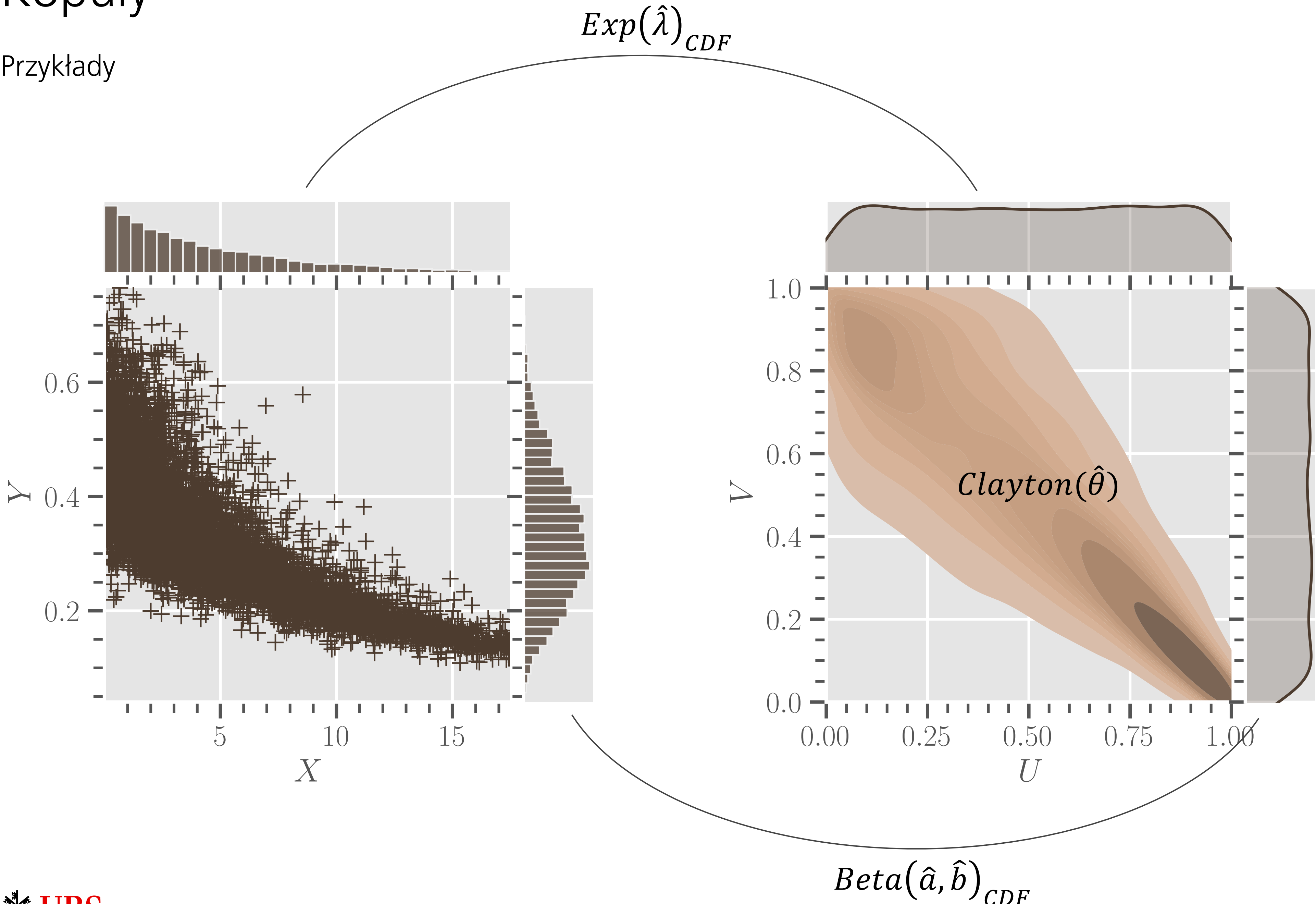




UBS

Kopuły

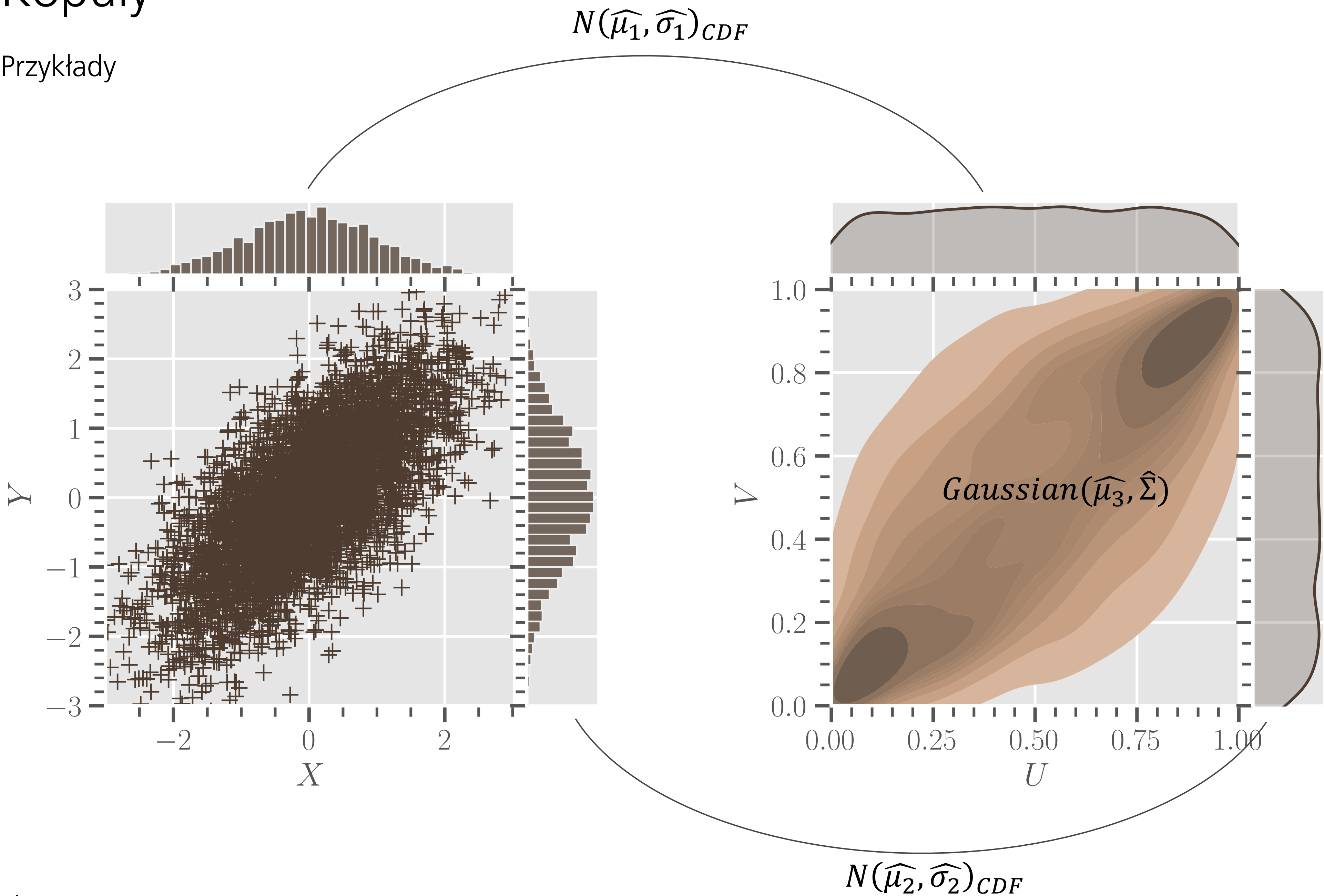
Przykłady



UBS

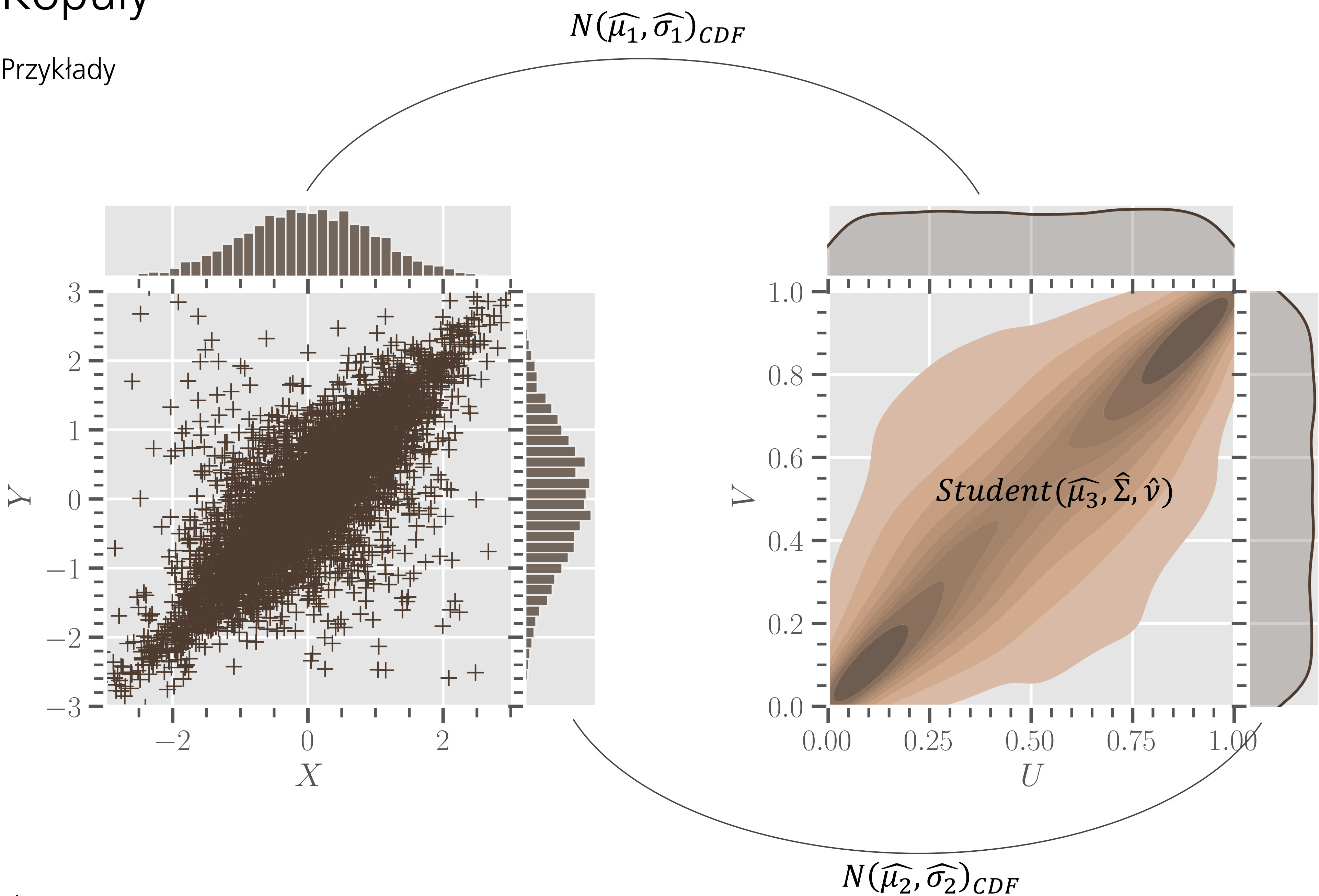
Kopuły

Przykłady



Kopuły

Przykłady



Vine Copula

Krok do większej ilości wymiarów

Vine Copula

Krok do większej ilości wymiarów

$$f(x_1, x_2, x_3) = f_{3|12}(x_3|x_1, x_2) \cdot f_{2|1}(x_2|x_1) \cdot f_1(x_1)$$

Vine Copula

Krok do większej ilości wymiarów

$$f(x_1, x_2, x_3) = f_{3|12}(x_3|x_1, x_2) \cdot f_{2|1}(x_2|x_1) \cdot f_1(x_1)$$

I)

$$f_{2|1}(x_2|x_1) = c_{12}\big(F_1(x_1), F_2(x_2)\big) \cdot f_2(x_2)$$

$$f_{3|12}(x_3|x_1, x_2) = c_{13;2}\big(F_{1|2}(x_1|x_2), F_{3|2}(x_3|x_2); x_2\big) \cdot f_{3|2}(x_3|x_2)$$

II)

$$f_{3|2}(x_3|x_2) = c_{23}\big(F_2(x_2), F_3(x_3)\big) \cdot f_3(x_3)$$

UBS

Vine Copula

Krok do większej ilości wymiarów

$$f(x_1, x_2, x_3) = f_{3|12}(x_3|x_1, x_2) \cdot f_{2|1}(x_2|x_1) \cdot f_1(x_1)$$

I)

$$f_{2|1}(x_2|x_1) = c_{12}\big(F_1(x_1), F_2(x_2)\big) \cdot f_2(x_2)$$

$$f_{3|12}(x_3|x_1, x_2) = c_{13;2}\big(F_{1|2}(x_1|x_2), F_{3|2}(x_3|x_2); x_2\big) \cdot f_{3|2}(x_3|x_2)$$

II)

$$f_{3|2}(x_3|x_2) = c_{23}\big(F_2(x_2), F_3(x_3)\big) \cdot f_3(x_3)$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = c_{13;2}\Big(F_{1|2}(x_1|x_2), F_{3|2}\,(x_3|x_2)\Big) \cdot c_{23}\big(F_2(x_2), F_3(x_3)\big) \cdot$$

$$c_{12}\big(F_1(x_1), F_2(x_2)\big) \cdot f_3(x_3) \cdot f_2(x_2) \cdot f_1(x_1)$$

Vine Copula

Krok do większej ilości wymiarów

Którą Pair Copula Construction wybrać?

- $f(x_1, x_2, x_3) = c_{13;2}\big(F_{1|2}(x_1|x_2), F_{3|2}(x_3|x_2); x_2\big) \cdot c_{23}\big(F_2(x_2), F_3(x_3)\big) \cdot c_{12}\big(F_1(x_1), F_2(x_2)\big) \cdot f_3(x_3) \cdot f_2(x_2) \cdot f_1(x_1)$

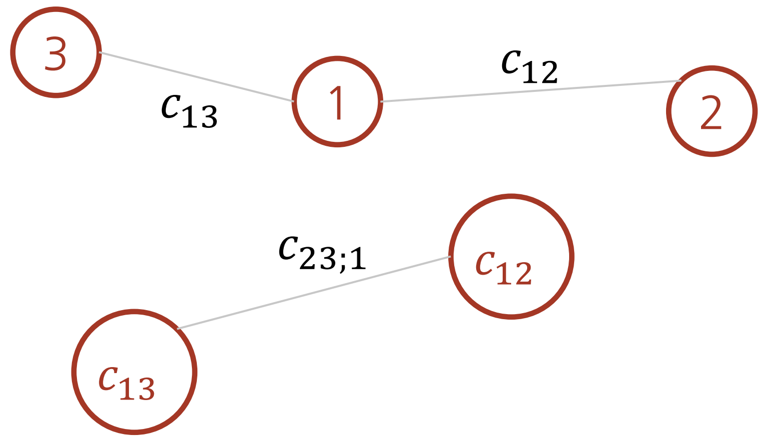
- $f(x_1, x_2, x_3) = c_{12;3}\big(F_{1|3}(x_1|x_3), F_{2|1}(x_2|x_3); x_3\big) \cdot c_{13}\big(F_1(x_1), F_3(x_3)\big) \cdot c_{23}\big(F_2(x_2), F_3(x_3)\big) \cdot \cdot f_3(x_3) \cdot f_2(x_2) \cdot f_1(x_1)$

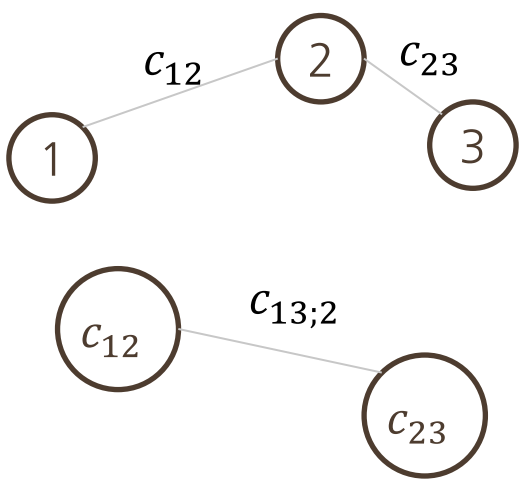
- $f(x_1, x_2, x_3) = c_{23;1}\big(F_{2|1}(x_2|x_1), F_{3|1}(x_3|x_1); x_1\big) \cdot c_{13}\big(F_1(x_1), F_3(x_3)\big) \cdot c_{12}\big(F_1(x_1), F_2(x_2)\big) \cdot \cdot f_3(x_3) \cdot f_2(x_2) \cdot f_1(x_1)$

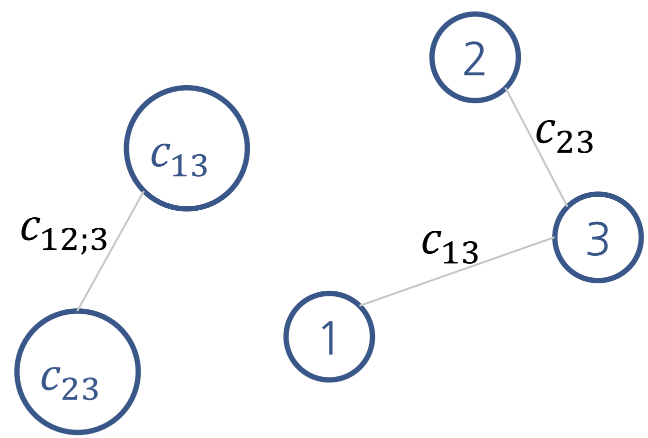
Vine Copula

Krok do większej ilości wymiarów

Którą Pair Copula Construction wybrać?



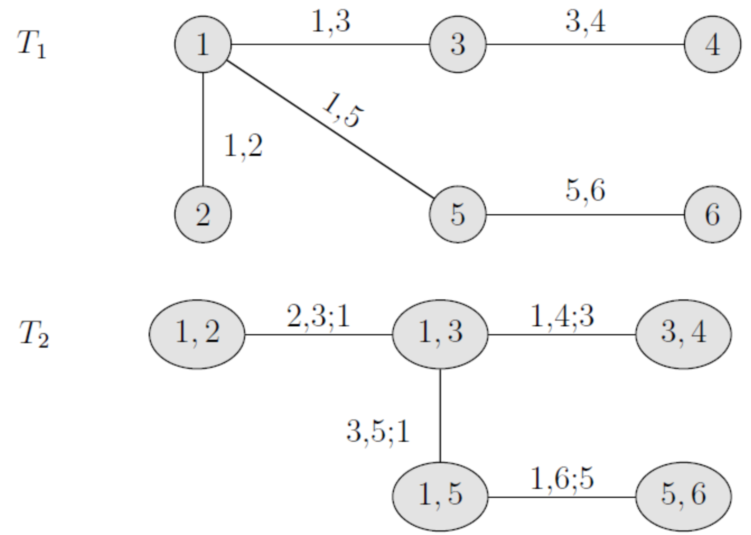


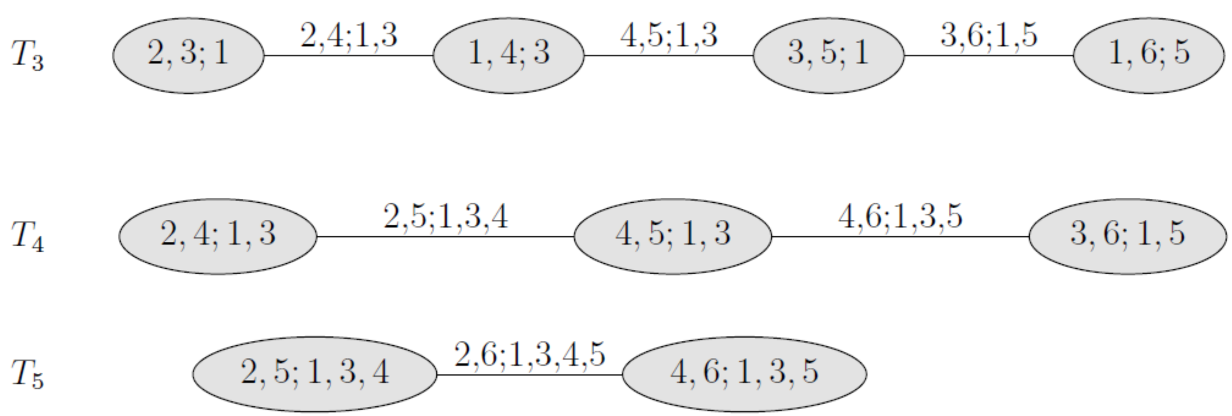


Vine Copula

Krok do większej ilości wymiarów

- Ilość możliwości (bardzo) szybko rośnie
- $\left(\frac{d!}{2}\right) \cdot 2^{\binom{d-2}{2}}$
- Przycinanie drzewek?
- Subklasy vine copula?





Source: Analyzing Dependent Data with Vine Copulas, C.Czado (2019)

Vine Copula

Krok do większej ilości wymiarów

D(rawable) **vine**

$$f_{1,\dots,d}(x_1,\dots,x_d) = \left[\prod_{j=1}^{d-1}\prod_{i=1}^{d-j} c_{i,(i+j);(i+1)\dots(i+j-1)}\right]\cdot\left[\prod_{k=1}^{d} f_k(x_k)\right]$$

C(anonical) **vine**

$$f_{1,\dots,d}(x_1,\dots,x_d) = \left[\prod_{j=1}^{d-1}\prod_{i=1}^{d-j} c_{j,(j+1);1\dots j-1}\right]\cdot\left[\prod_{k=1}^{d} f_k(x_k)\right]$$

UBS

Vine Copula

Krok do większej ilości wymiarów

D-vine

$$f(x_1, \dots, x_5) =$$

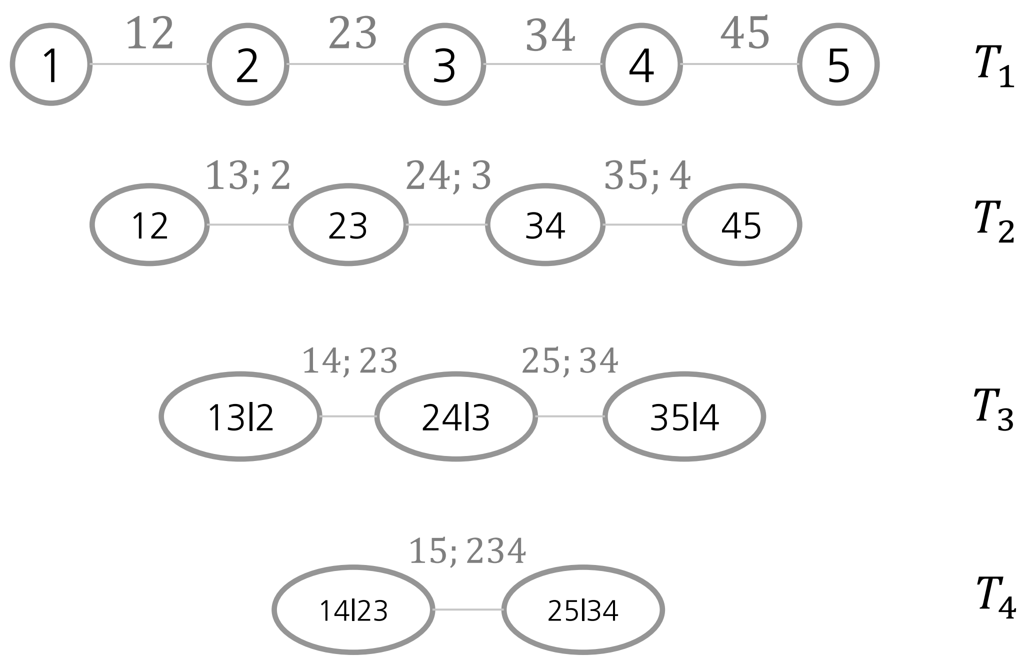
$$f_1(x_1) f_2(x_2) f_3(x_3) f_4(x_4) f_5(x_5) \cdot$$

$$\cdot\, c_{12} \cdot c_{23} \cdot c_{34} \cdot c_{45} \cdot$$

$$\cdot\, c_{13;2} \cdot c_{24;3} \cdot c_{35;4} \cdot$$

$$\cdot\, c_{14;23} \cdot c_{25;34} \cdot$$

$$\cdot\, c_{15;234}$$



Vine Copula

Krok do większej ilości wymiarów

D-vine

$f(x_1, \dots, x_5) =$

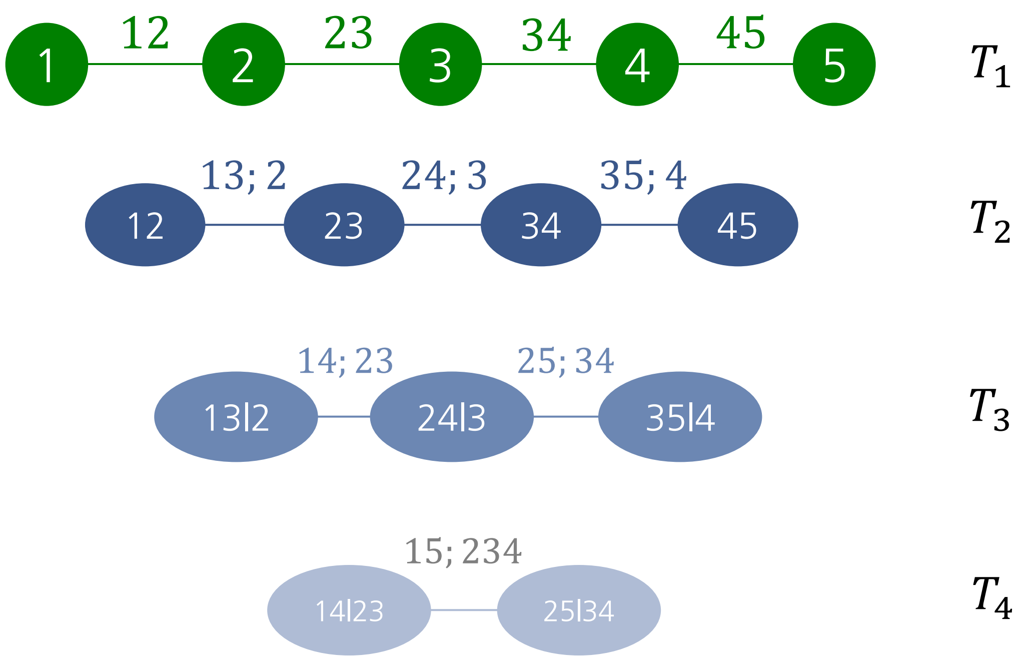
$f_1(x_1) f_2(x_2) f_3(x_3) f_4(x_4) f_5(x_5) \cdot$

$\cdot\ c_{12} \cdot c_{23} \cdot c_{34} \cdot c_{45} \cdot$

$\cdot\ c_{13;2} \cdot c_{24;3} \cdot c_{35;4} \cdot$

$\cdot\ c_{14;23} \cdot c_{25;34} \cdot$

$\cdot\ c_{15;234}$



UBS

Vine Copula

Krok do większej ilości wymiarów

C-vine

$$f(x_1, \dots, x_5) =$$

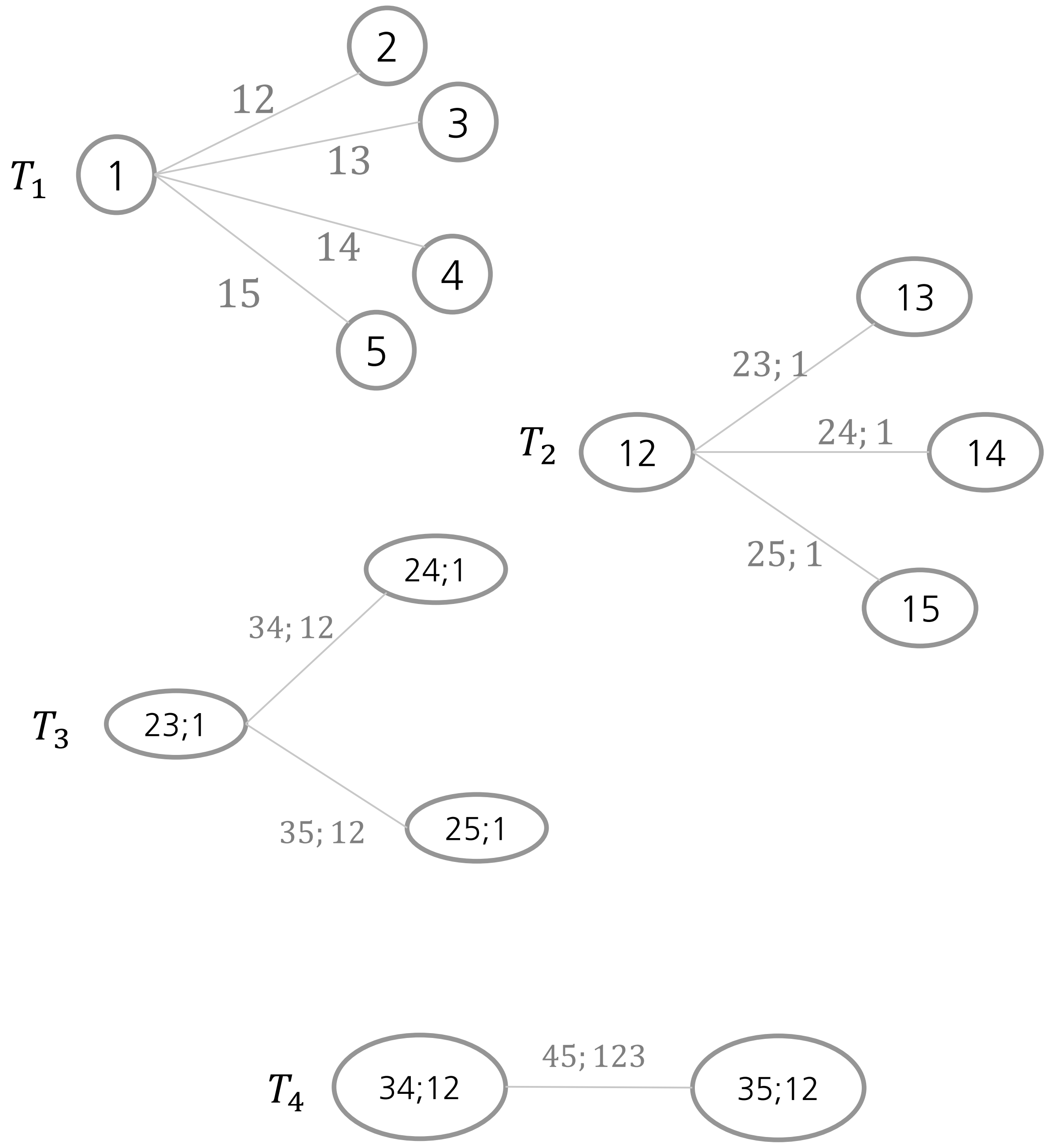
$$f_1(x_1) f_2(x_2) f_3(x_3) f_4(x_4) f_5(x_5) \cdot$$

$$\cdot\, c_{12} \cdot c_{13} \cdot c_{14} \cdot c_{15} \cdot$$

$$\cdot\, c_{23;1} \cdot c_{24;1} \cdot c_{25;1} \cdot$$

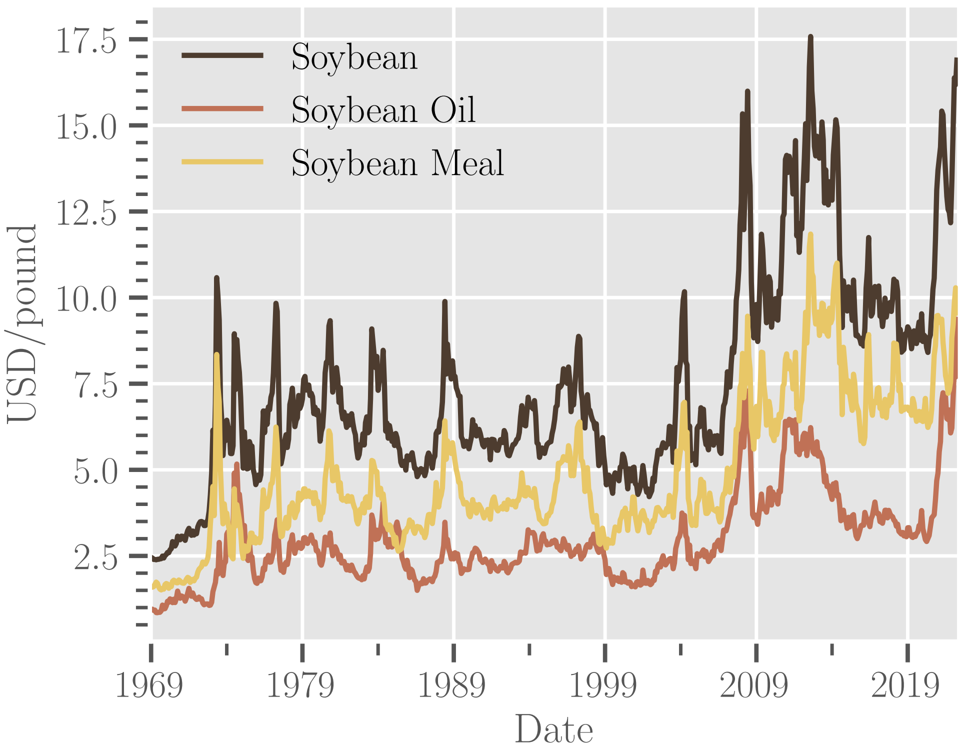
$$\cdot\, c_{34;12} \cdot c_{35;12} \cdot$$

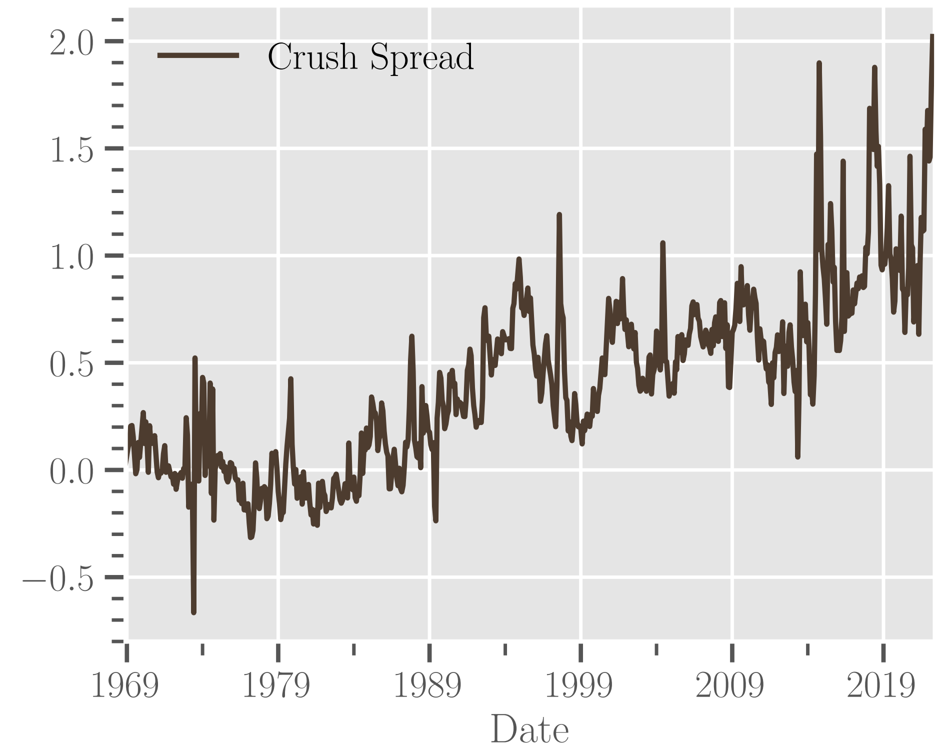
$$\cdot\, c_{45;123}$$



Wycena opcji na crush spread

Dane rynkowe

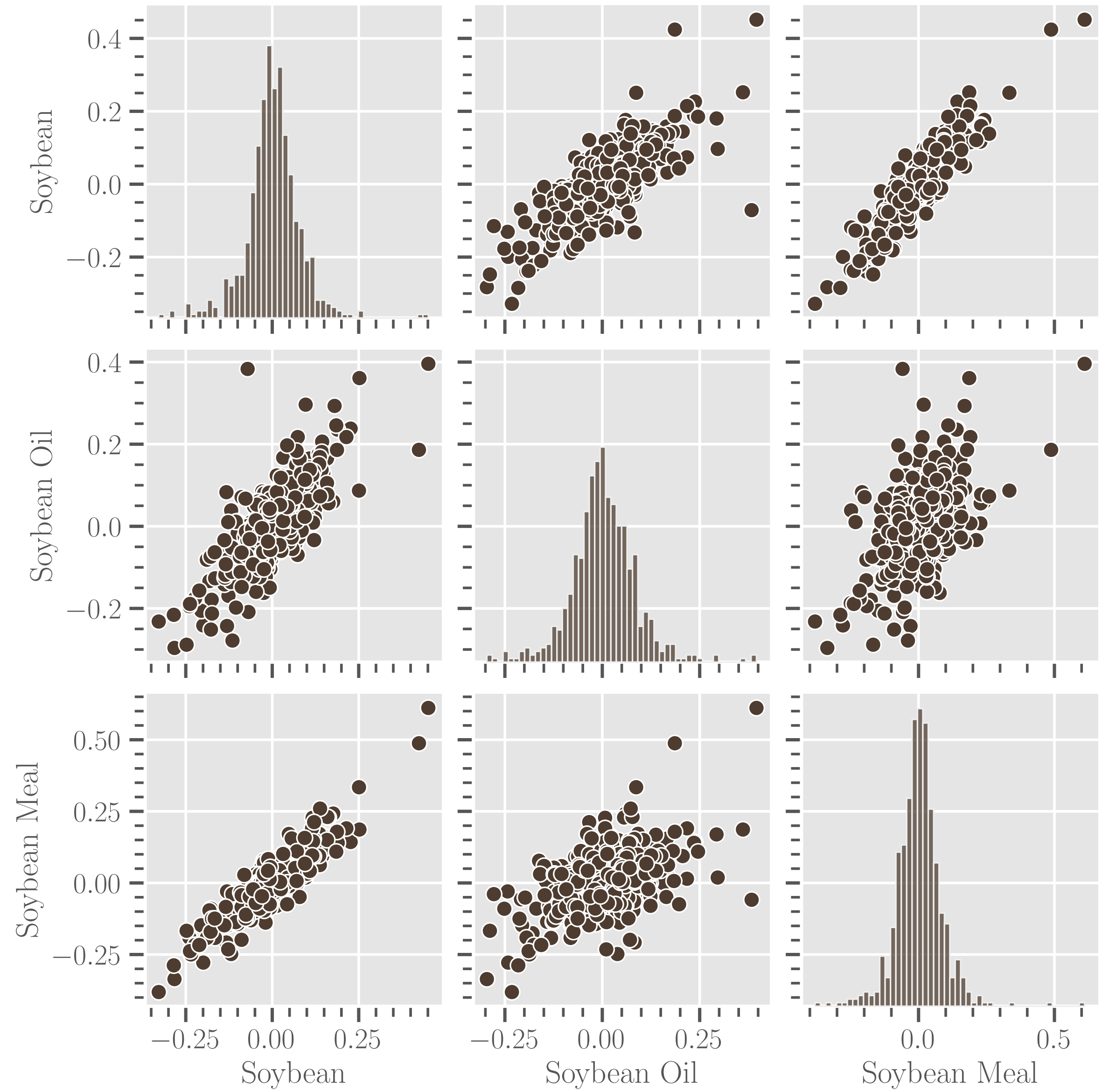




Data source: www.macrotrends.net

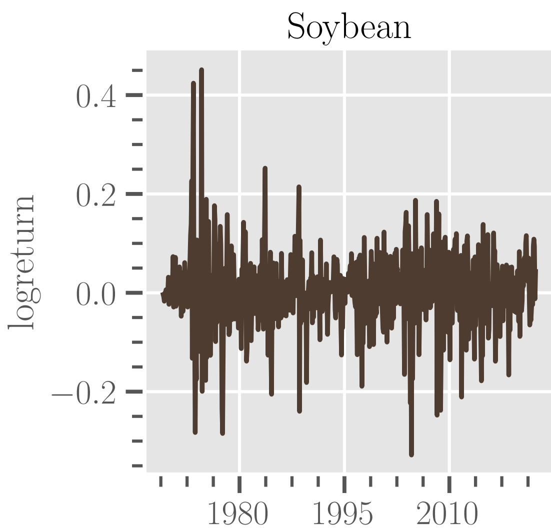
Wycena opcji na crush spread

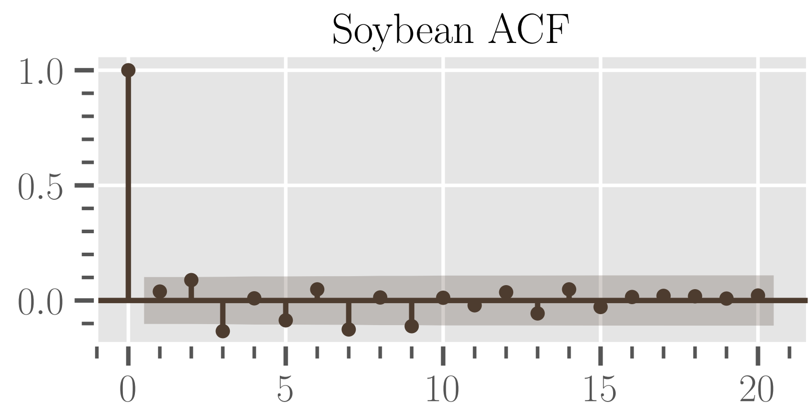
Zależności między zmiennymi

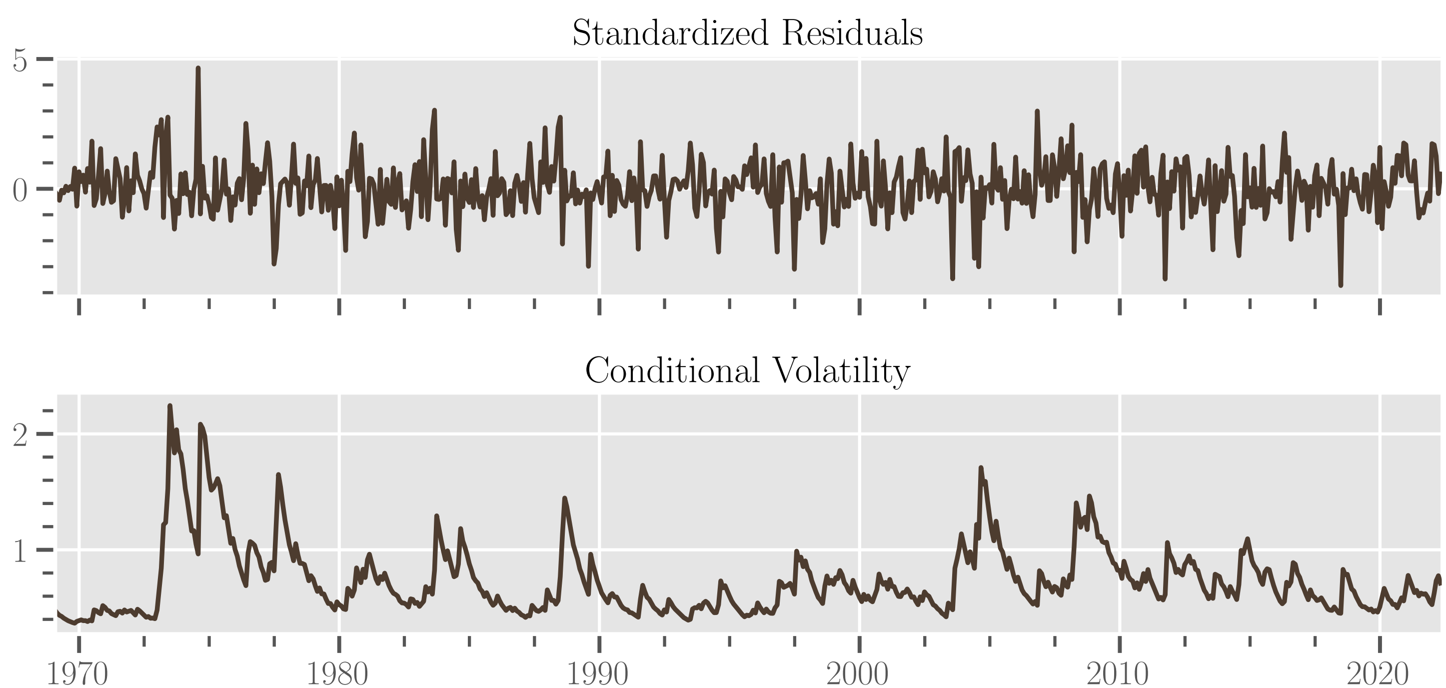


Wycena opcji na crush spread

TSA

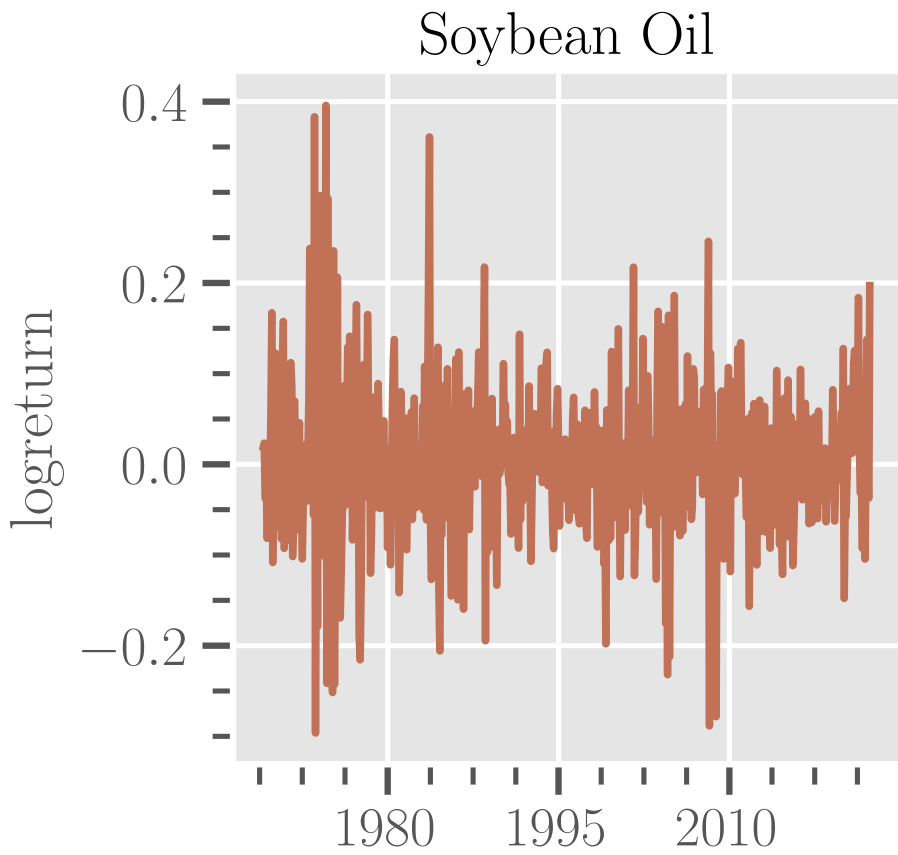


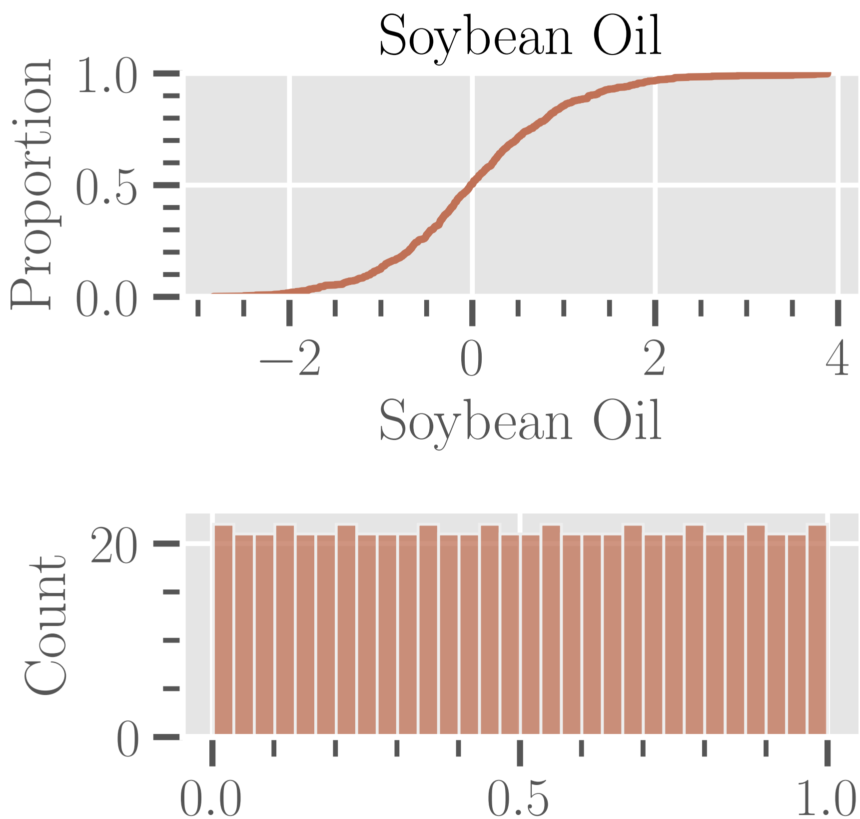




Wycena opcji na crush spread

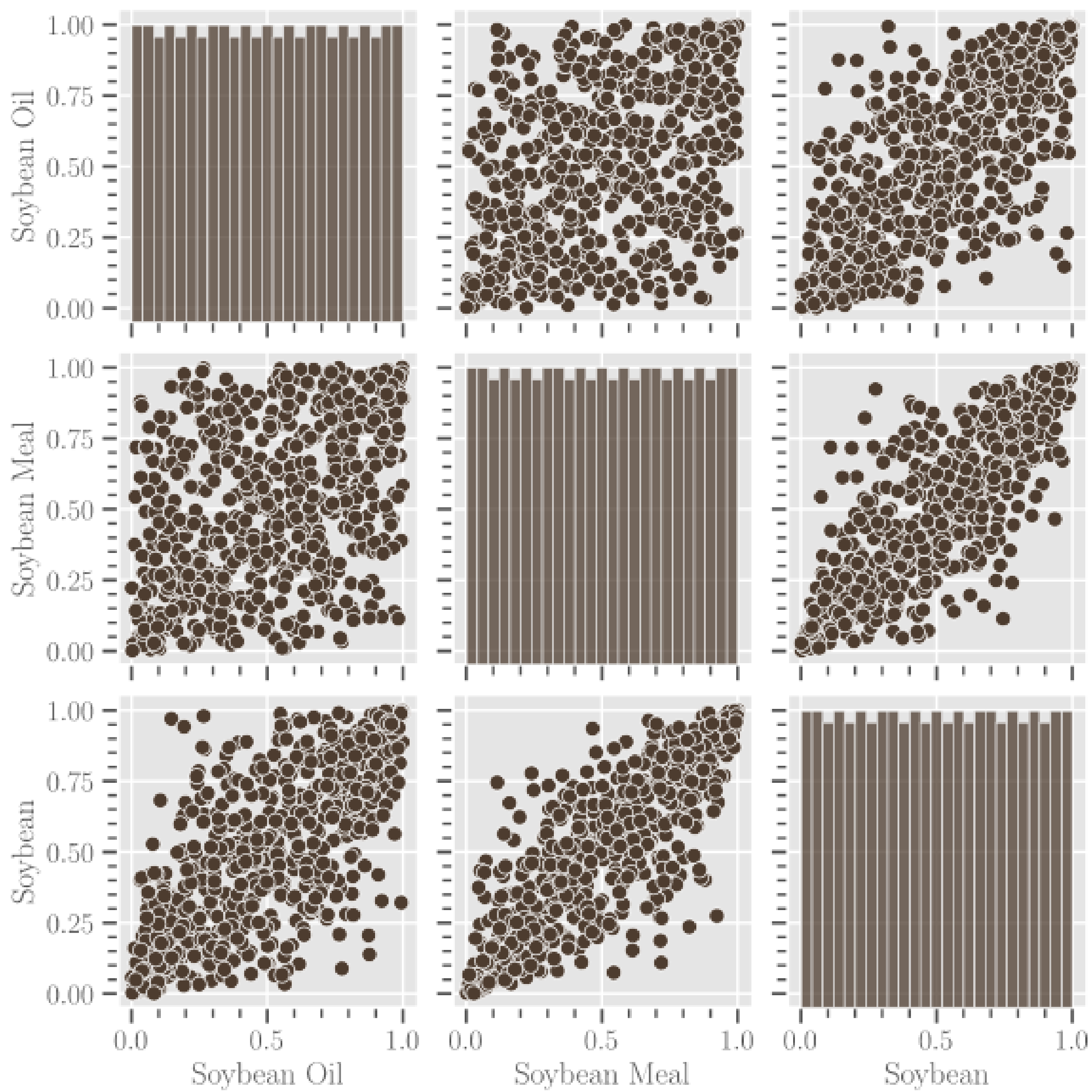
Probability integral transform



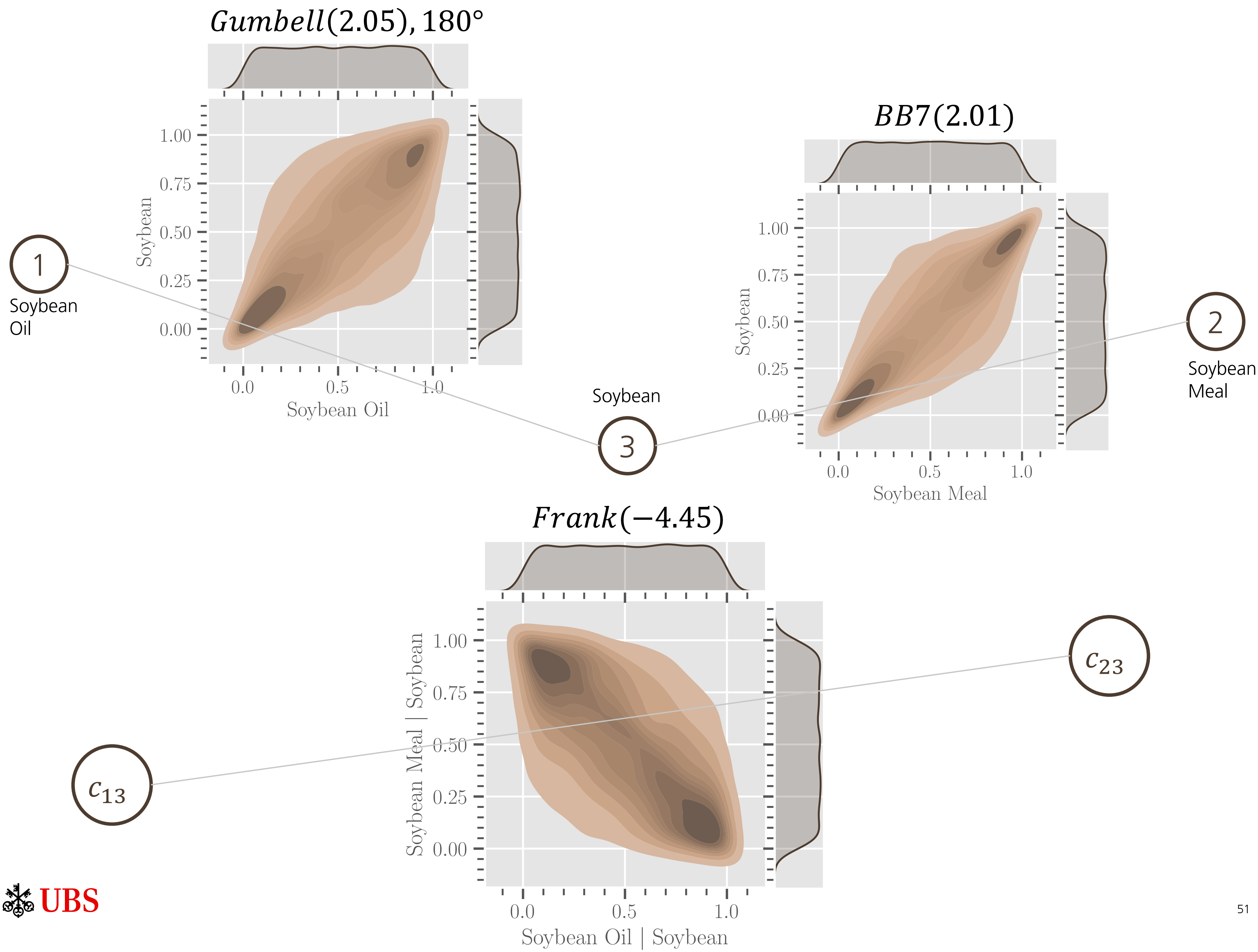


Wycena opcji na crush spread

Estymacja modelu



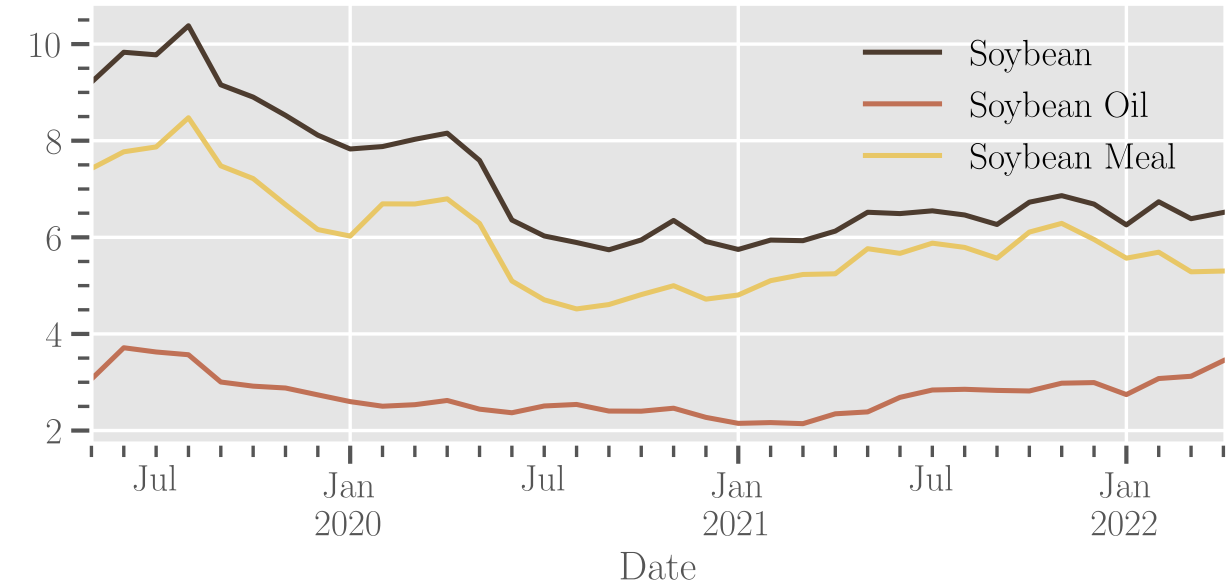
UBS

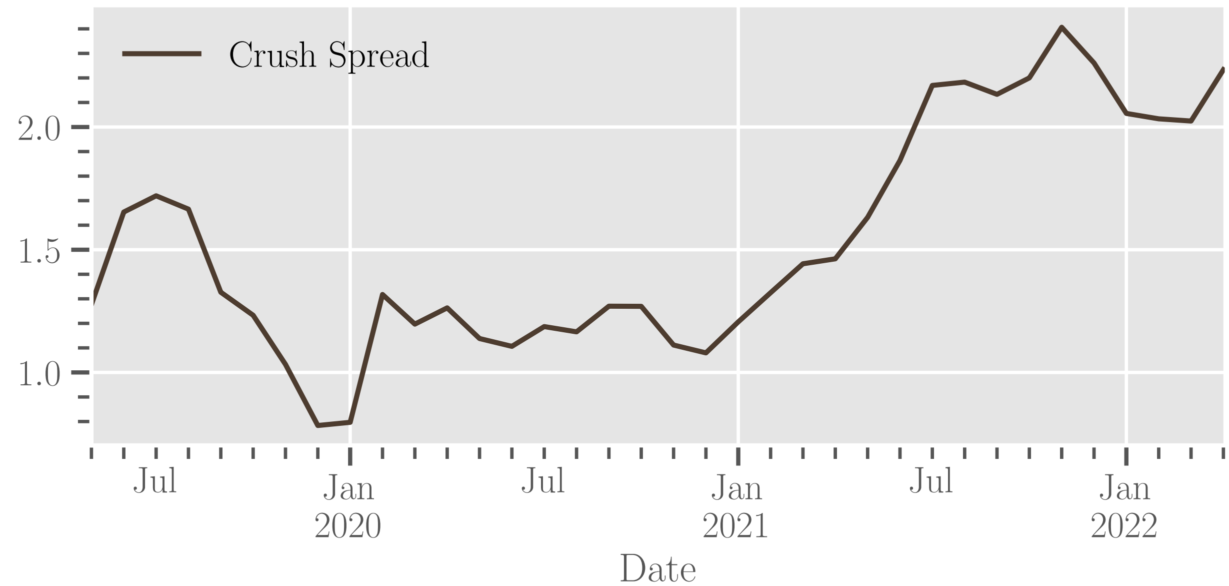


$Gumbell(2.05), 180°$
Soybean
Soybean Oil
1
Soybean
Oil
$BB7(2.01)$
Soybean
Soybean Meal
2
Soybean
Meal
Soybean
3
$Frank(-4.45)$
Soybean Meal | Soybean
Soybean Oil | Soybean
c_{23}
c_{13}

Wycena opcji na crush spread

Pełna symulacja

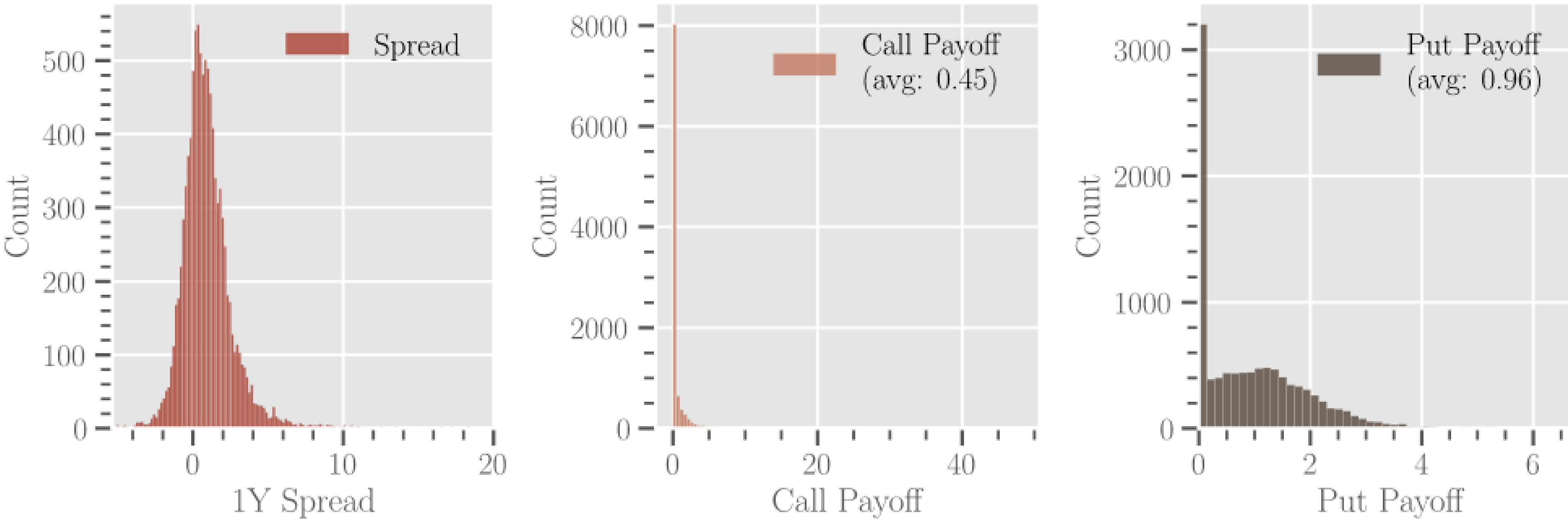




UBS

Wycena opcji na crush spread

Wysymulowany rozkład spreadu



Instrument	Cena	Std. Err.
Call option K = 1.5, T = 3Y	0.427	0.014
Put option K = 1.5, T = 3Y	0.899	0.0097

UBS

Thank you

Questions?