Politechnika Wrocławska

Średniowieczna katapulta

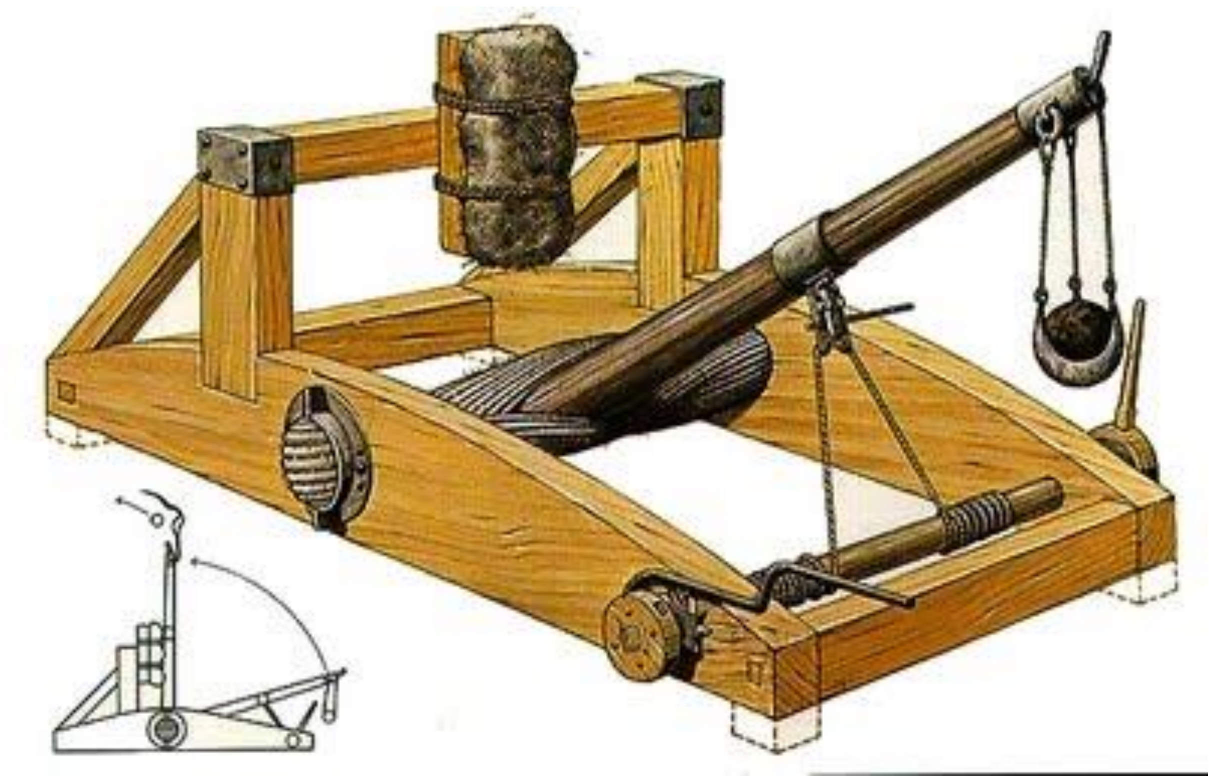
Sebastian Kupisiewicz, Jagoda Lewicka, Piotr Mikler,
Weronika Niewiora

HR EXCELLENCE IN RESEARCH

Skąd wzięła się katapulta?

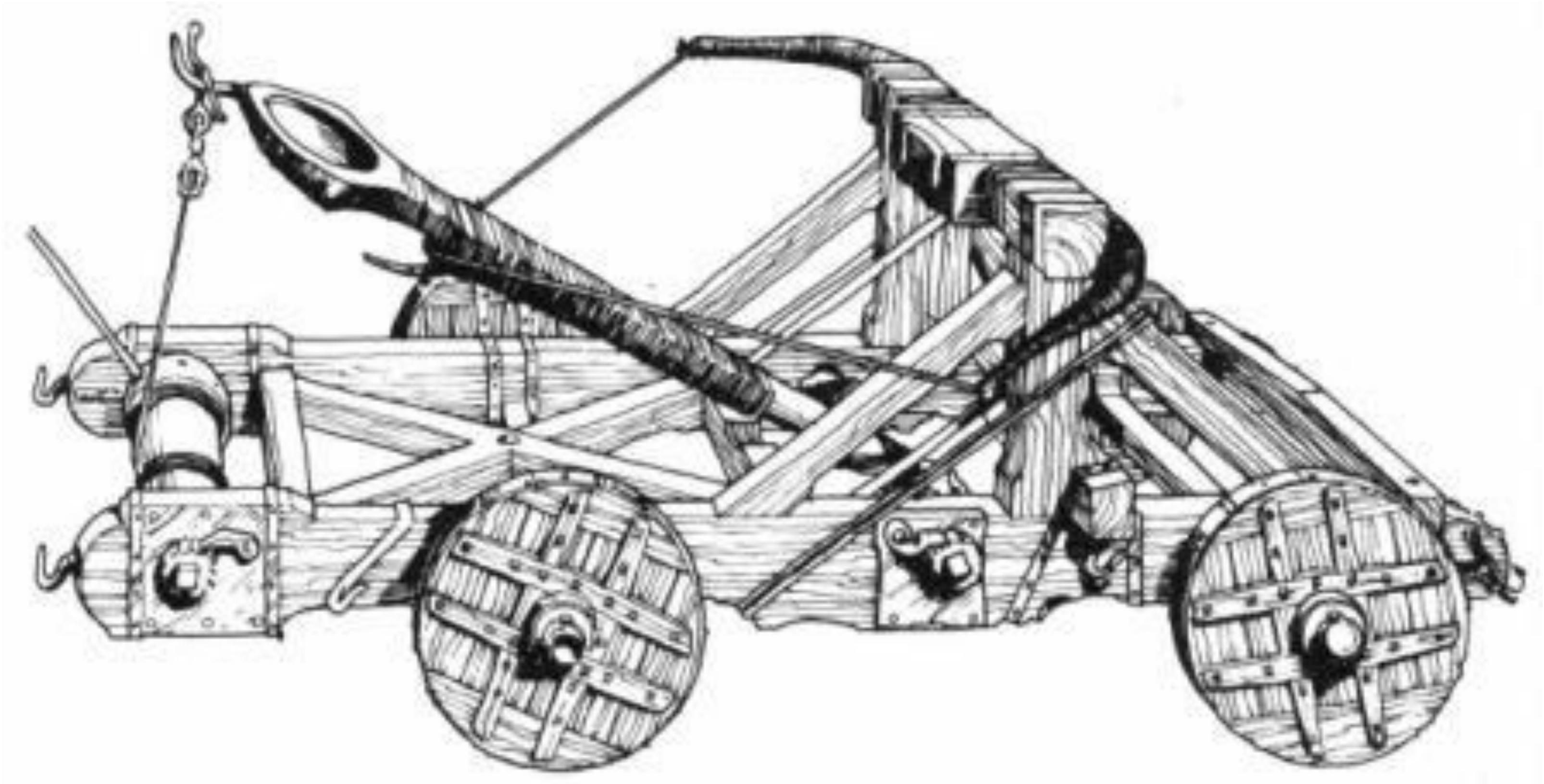
- Łac. *catapulta*, a to z greckiego słowa *καταπέλτης* (katapeltēs)
- Głównie starożytność i średniowiecze.

Wyobrażenia katapulty



Wyobrażenia katapulty

Wyobrażenia katapulty



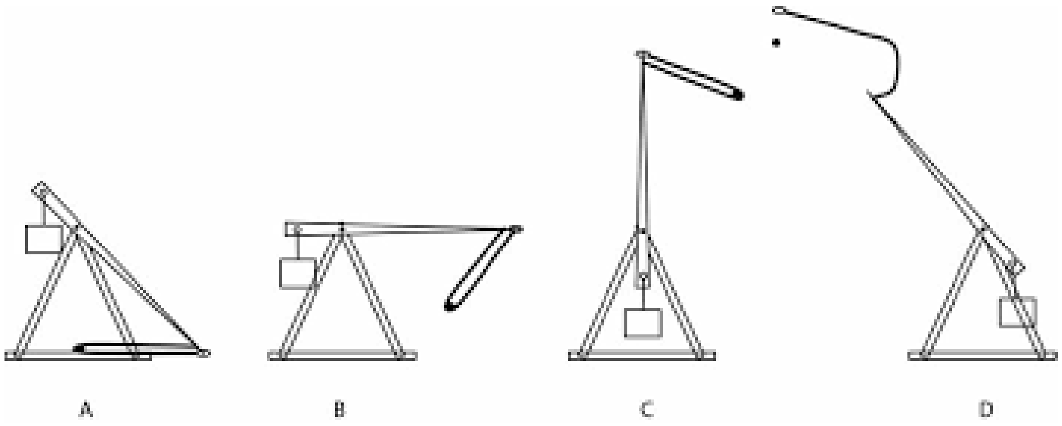
Jak działa?

- Energia sprężystości.
- Prosty mechanizm, podobny do działania łuku.
- Katapulta rzymska (mangonela)

Mit czy prawda?

Pierwsze pomysły dot. modelowania

- Nie konstrukcja, lecz stan pocisku



Potrzebne dane

- Masa pocisku
- Prędkość początkowa
- Kąt
- Współczynnik oporu ośrodka
- Wymiary katapulty

Mangonela

Po co grzebiemy w starych kronikach?

- Wymiary katapulty

Różnorakie na przestrzeni wieków, interesuje nas tak naprawdę tylko wysokość ramienia i rozmiar łyżki:

$h\_łyżki = 8\ ft \approx 2.5m$

Po co grzebiemy w starych kronikach?

- Masa pocisku i kształt

Pojedynczy kamienny pocisk o masie 50 kg w kształcie zbliżonym do kuli

$$m = 50\ \mathrm{kg}$$

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Po co grzebiemy w starych kronikach?

- Rozmiar pocisku

$$\rho_{kamien} = 1500 - 2000 \ {}^{kg}/_{m^3},$$

dla uproszczenia przyjmujemy $\rho_{kamien} = 1500 \ {}^{kg}/_{m^3}$.

$$\rho_{kamien} = \frac{m}{V} = \frac{50}{\frac{4}{3}\pi\, r^3} \rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{1}{40\pi}} \approx 0.2\, m$$

Po co grzebiemy w starych kronikach?

- Zasięg

Doniesienia o miotaniu 50 kg pocisków na odległość ponad 180 metrów małych rozmiarów mangoneli. Przyjmijmy zatem

$$z = 180 \text{ m}.$$

Po co grzebiemy w starych kronikach?

- Kąt

Kąt wyrzutu pocisku od 30˚ – 90˚ w zależności od konstrukcji, najczęściej jest to 45˚ , co jest zrozumiałe (maksymalizacja zasięgu dla krzywej parabolicznej), zatem dla naszego modelu:

$$\alpha = 45^\circ$$

Szukamy prędkości początkowej

- Równanie trajektorii z wys. początkową
- $y = H + x\ \tan\alpha\ -\ x^2 \frac{g}{2v_0^2}(1 + \tan\alpha^2)$
- $y = 0$ i niech $L = \frac{v_0^2}{g}$, wtedy
- $H + x\tan\alpha\ -\ \frac{1}{2L}x^2(1 +\ \tan\alpha^2) = 0\ / \frac{dx}{d\theta}$

Szukamy prędkości początkowej

$$H + x\tan\alpha - \frac{1}{2L}x^2(1 + (\tan\alpha)^2) = 0 \,/\, \frac{dx}{d\alpha}$$

$$\frac{dx}{d\alpha}\tan\alpha + x\,\frac{1}{(\cos\alpha)^2} - [\frac{1}{L}x\frac{dx}{d\alpha}(1 + (\tan\alpha)^2 + \frac{1}{2L}x^2 \cdot 2\frac{\tan\alpha}{(\cos\alpha)^2})] = 0$$

$$\frac{dx}{d\alpha} = \frac{(x/(\cos\alpha)^2\,)[\frac{x}{L}\tan\alpha - 1]}{\tan\alpha - \frac{x}{L}[1 + (\tan\alpha)^2}$$

$\frac{dx}{d\alpha} = 0$ dla $\tan\alpha = \frac{L}{X}$, zatem

$$H + L - \frac{1}{2L}x^2 - \frac{L}{2} = 0$$

Szukamy prędkości początkowej

To równanie kwadratowe prowadzi do

$$x = \sqrt{L^2 + 2\,L\,H},$$

gdzie nasze x to zasięg maksymalny. Przekształćmy równanie:

$$x^2 = \frac{{v_0}^4}{g^2} + 2\,\frac{v_0^2}{g}\,H$$

Niech $v_0^2 = p$, wtedy po prostych przekształceniach

$$p^2 + 2\,g\,H\,p - x^2 g^2 = 0$$

Wstawiając

$$g \approx 9.81\,{}^{m}/_{s^2}, H = 2.5\,m, x = 180\,m$$

Szukamy prędkości początkowej

$$p^2 + 2 \cdot 9.81 \cdot 2.5 \cdot p - 180^2 \cdot 9.81^2 = 0$$

$$p = v_0^2 \approx 1741 \rightarrow v_0 \approx 42\, m/s$$

Szukamy prędkości początkowej

$$p^2 + 2 \cdot 9.81 \cdot 2.5 \cdot p - 210^2 \cdot 9.81^2 = 0$$

$$p = v_0^2 \approx 2036 \rightarrow v_0 \approx 45\, m/s$$

Wyznaczyliśmy prędkość początkową, mając wszystkie dane należy się jeszcze zastanowić nad jednym współczynnikiem.

Opory powietrza

- Opór liniowy

$$F = -kv$$

- Wielkość oporu aero(hydro)dynamicznego.

Siłę oporu można przedstawić jako

$$F = C_D \frac{p|v|^2}{2} S_D,$$

C_D- współczynnik oporu, (0.45 zakładamy ze nasz pocisk jest kulą)

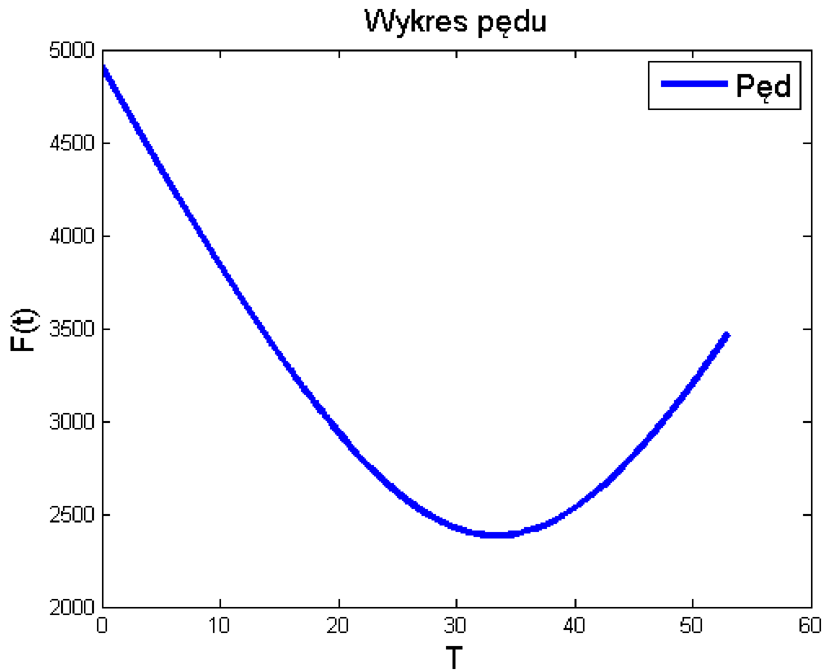
p- gęstość ośrodka, (na poziomie morza w temp 20 °C powietrze suche ma gęstość około 1,2 kg/m³)

v- prędkość,

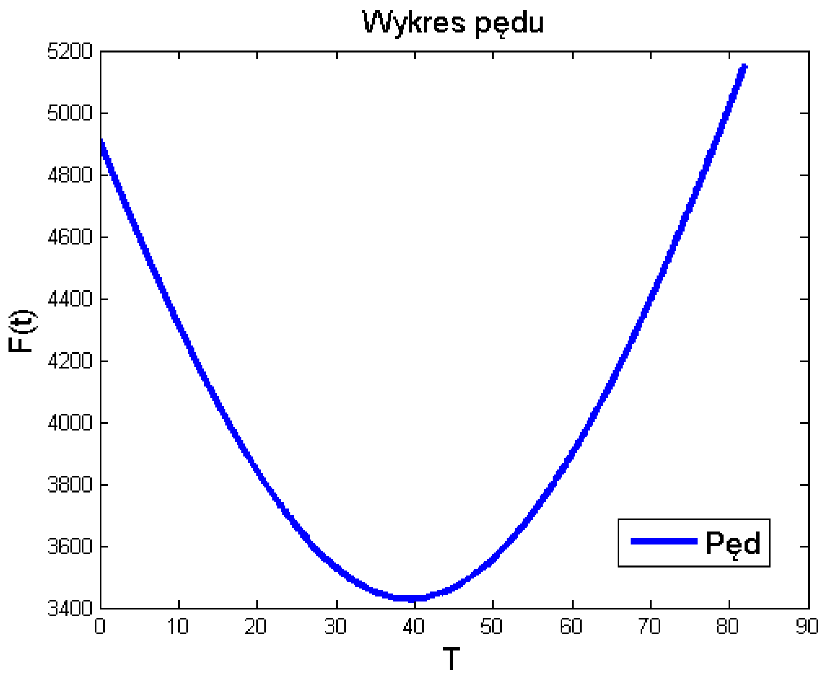
S_D- pole przekroju.

Wykres pędu dla oporu

a) opór liniowy

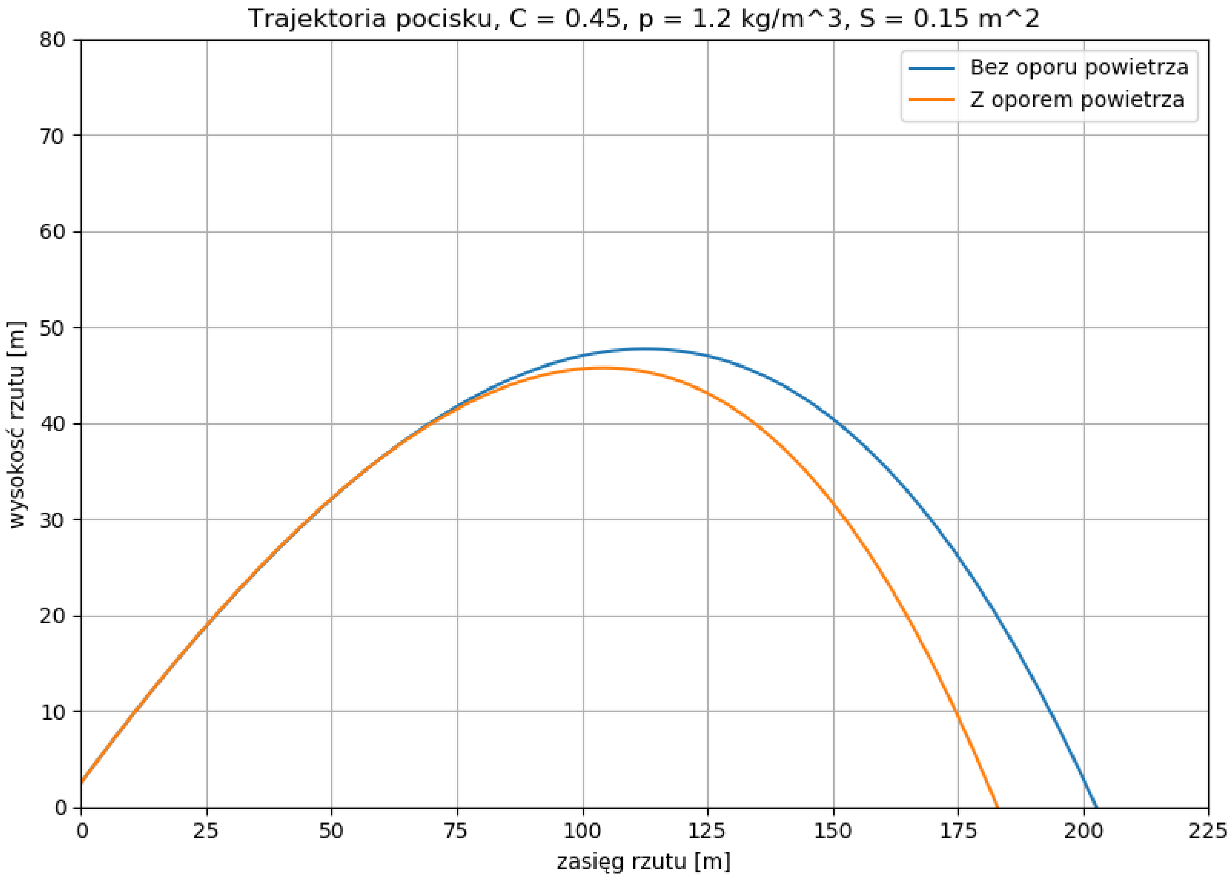


b) opór kwadratowy



Liniowy opór powietrza nie sprawdza się dla dużych prędkości!

Symulacja uwzględniająca opór powietrza



Kiedy mur zostanie zburzony?

1) Energia Kinetyczna

2) Pęd

3) Ciśnienie

$$E_k = \frac{mv^2}{2}$$

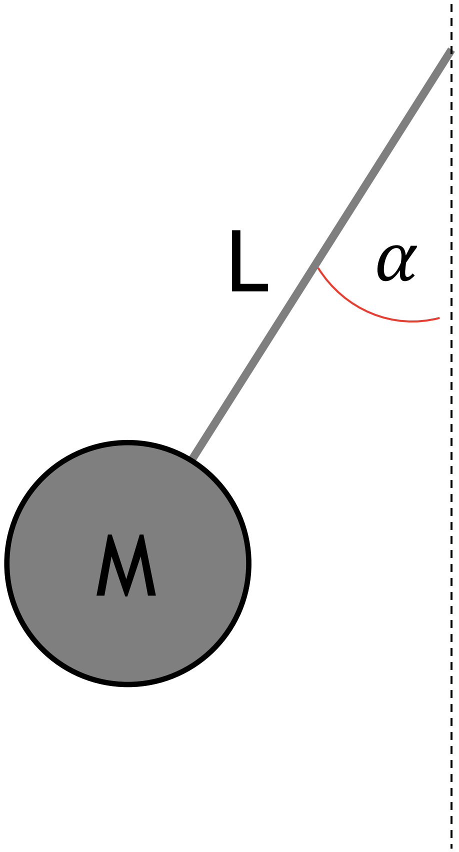
$$\vec{p} = m\vec{v}$$

$$p = \frac{F}{S}$$

Udarność- odporność materiału na pękanie przy obciążeniu dynamicznym.

$$KC = \frac{W}{S}\left[\frac{J}{cm^2}\right]$$

Poszukiwania Energii



Kula burząca

$$M \approx 450 - 5400\ [kg]$$

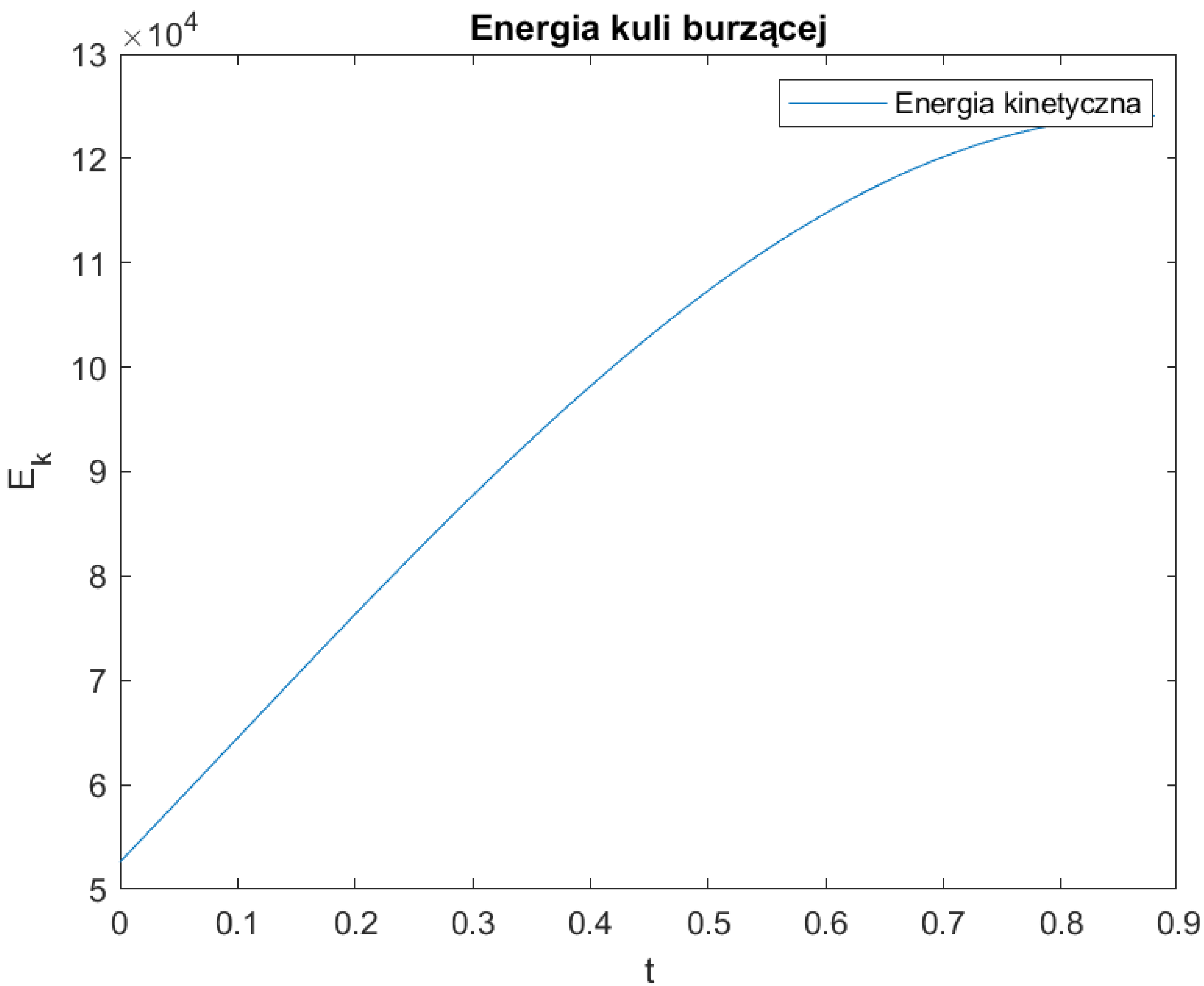
$$L \approx 10\ [m]$$

$$\alpha \approx 30°$$

Poszukiwania Energii

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\frac{g}{L}\sin(\alpha) + \frac{A}{mL}\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2$$

Poszukiwania Energii



Warunek na energię pocisku

Według modelu burzącej kuli:

Bez rozpędzania $$v \approx 53 \left[\frac{m}{s}\right]$$

Z rozpędzaniem $$v \approx 70 \left[\frac{m}{s}\right]$$

Parametry, które możemy zmieniać

- Wysokość położenia katapulty (stoi na wzniesieniu)
- Masa kuli (rozsądny przedział)

- A co w przypadku gdy zmienimy grubość muru?
- A co w przypadku gdy mur jest drewniany?

Rozchodzenie się energii w ciele stałym

- Fala poprzeczna w ciele stałym, prędkość rozchodzenia się fali

$$v = \sqrt{\frac{M}{\rho}},$$

M – moduł sprężystości postaciowej, moduł Kirchoffa

ρ – gęstość ciała

Prędkość rozchodzenia się fali

	Beton	Drewno (drzewo liściaste)
Moduł Kirchoffa	12.1 GPa	1.33 GPa
Gęstość ciała	1800 kg/m^3	800 kg/m^3
Prędkość fali	2593 m/s	1289 m/s

Modelowanie

- Model zależności między rozchodzeniem się energii w ciele stałym a energią potrzebną do uszkodzenia.

	Beton	Drewno
Prędkość fali	2593 m/s	1289 m/s
Prędkość krytyczna	70m/s	V_d = ?

$$V_d = \frac{70 \cdot 1289}{2593} = 34.798 \left[\frac{m}{s}\right]$$

Zależność energii potrzebnej do uszkodzenia od grubości muru

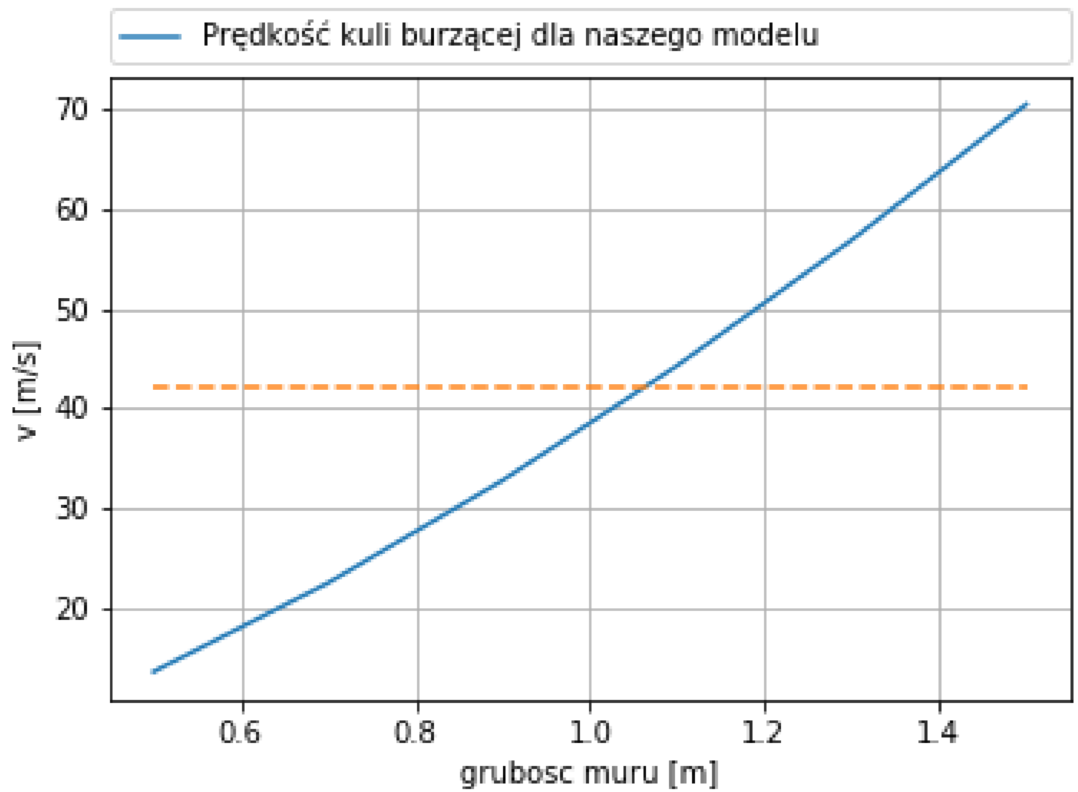
Propozycja modelu:

$$E(r) = A \cdot E_0 \cdot r^3,$$

gdzie: A $\left[\frac{1}{m^3}\right]$ - współczynnik

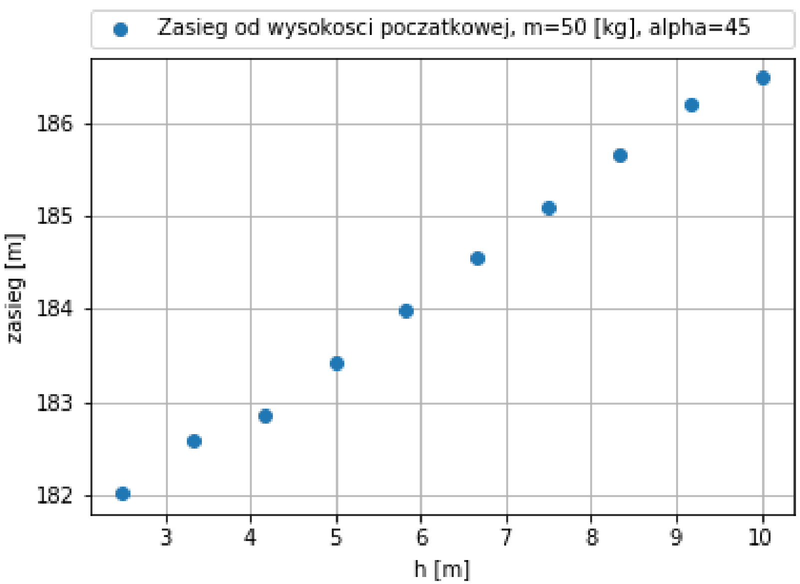
Energia rozchodzi się jednolicie w trzech wymiarach.

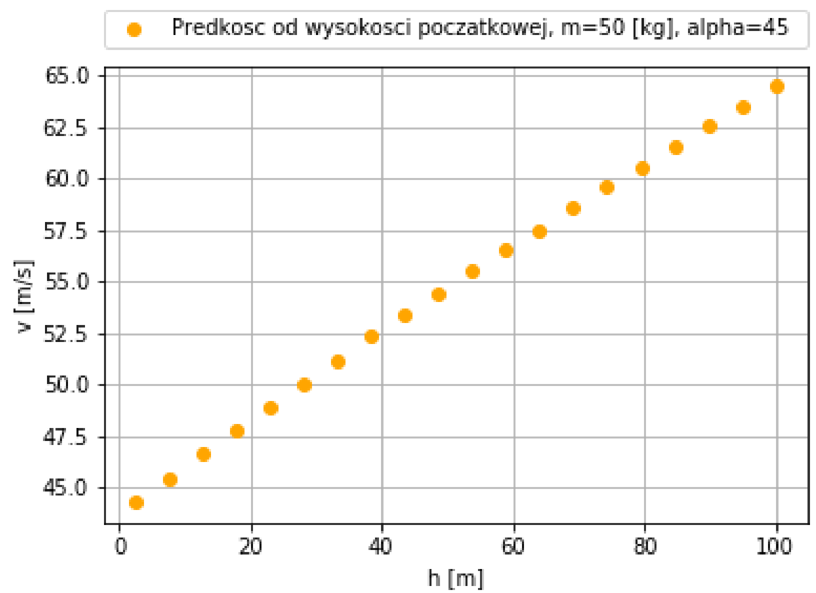
Jakiej grubości mur jesteśmy w stanie uszkodzić?



W poszukiwaniu najlepszej strategii

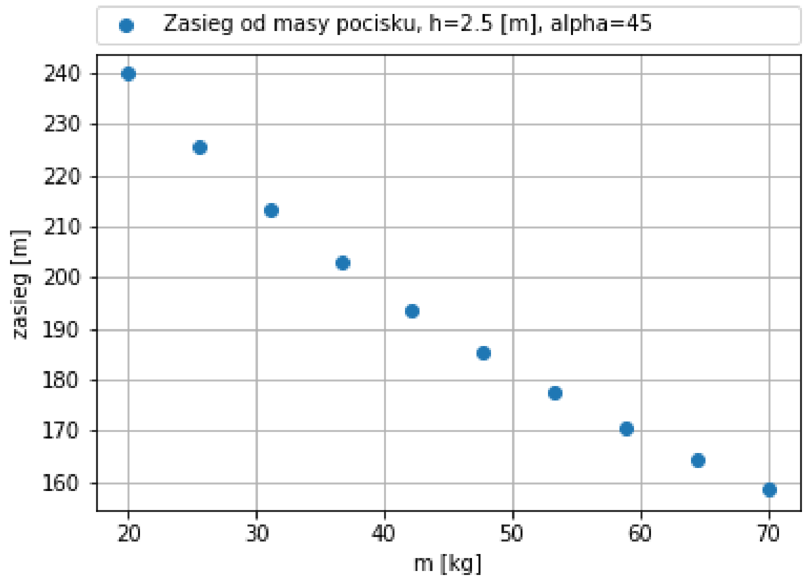
- Czy warto ustawić katapultę na wzniesieniu?

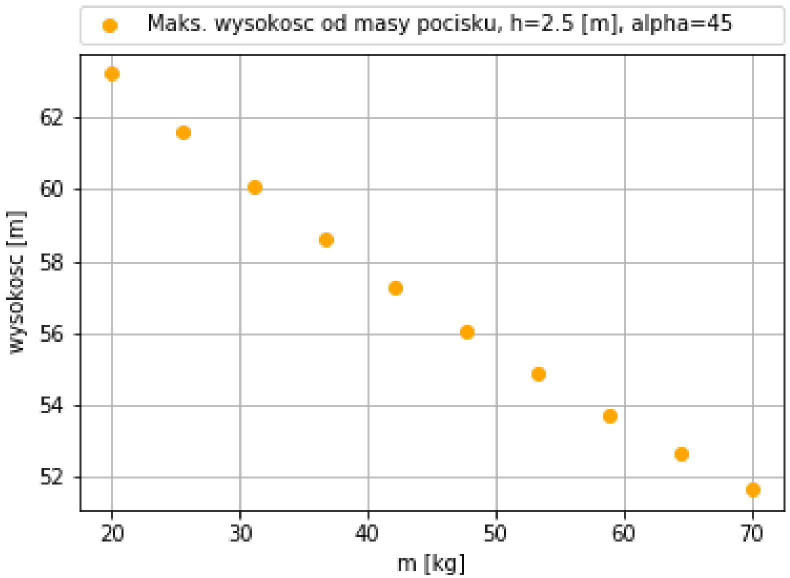




Politechnika Wrocławska

Czy warto zwracać szczególną uwagę na masę pocisku?





Politechnika Wrocławska

Zakończenie - końcowe wnioski