

Regresja kwantylowa D-vine a stress testing.
Krótkie case study.

PIOTR MIKLER, AGH

O czym dzisiaj?

Kopułowa regresja
kwantylowa to:

- Uogólnienie regresji
- Realistyczne założenia
- Elastyczne narzędzie



(+ D-vine!)

Kopuły:



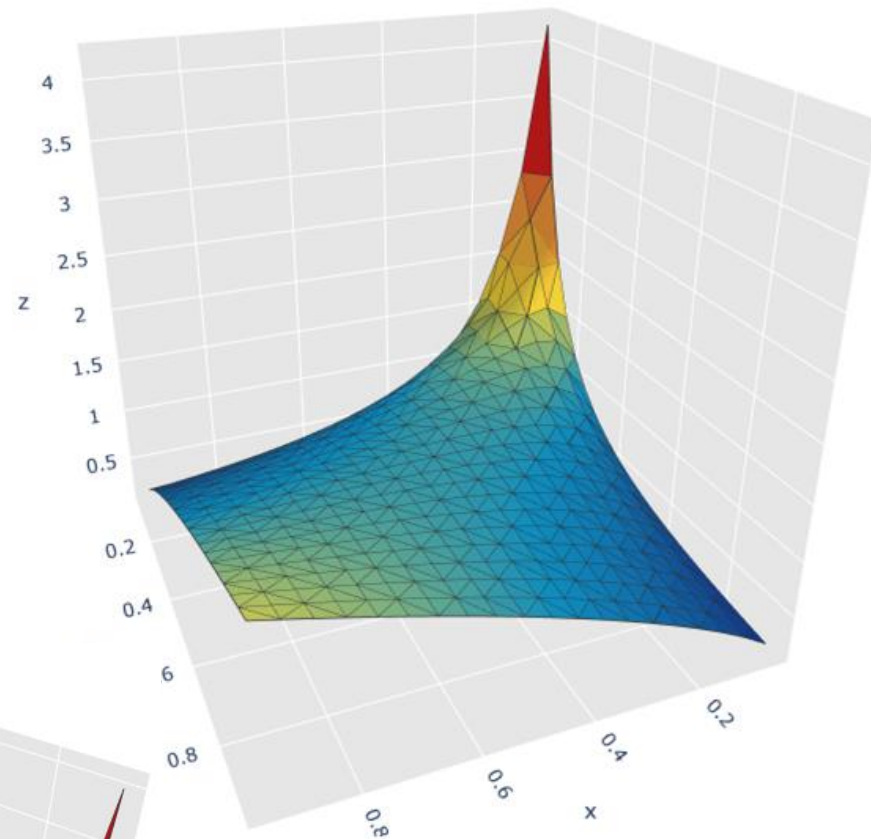
Przypomnienie (z wczoraj):

Tw. Sklara:

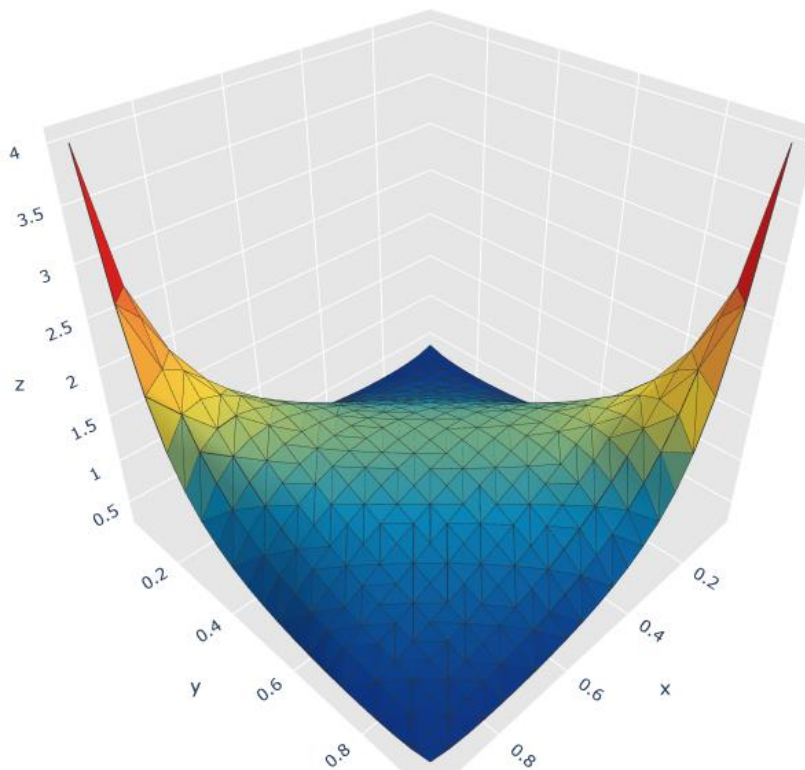
$$F_{X,Y}(x,y) = C(F_X(x), F_Y(y))$$

- ❖ Wielowymiarowe rozkłady jednostajne
- ❖ Modele zależności w wektorach losowych
- ❖ Fajny temat na pracę magisterską 😊

Kopuła Claytona



Kopuła t



Kopuły:



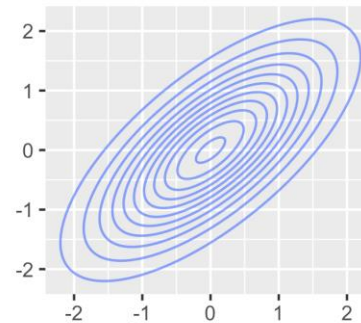
Przypomnienie (z wczoraj):

Tw. Sklara:

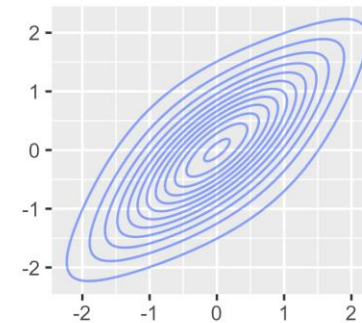
$$F_{X,Y}(x,y) = C(F_X(x), F_Y(y))$$

- ❖ Wielowymiarowe rozkłady jednostajne
- ❖ Modele zależności w wektorach losowych
- ❖ Fajny temat na pracę magisterską 😊

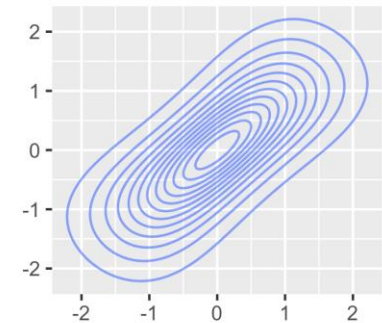
Gaussian copula



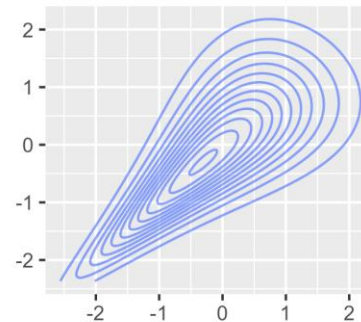
t-copula



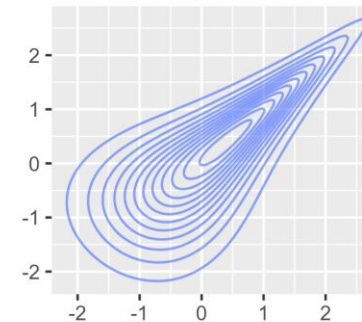
Frank copula



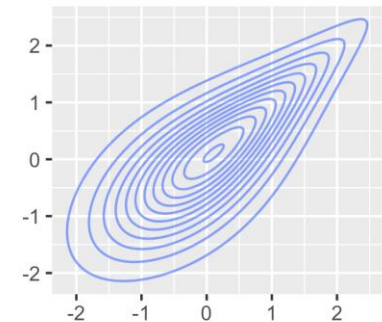
MTCJ copula



Joe copula



Gumbel copula



Źródło: <https://bochang.me/blog/posts/copula/>

Kopuły:

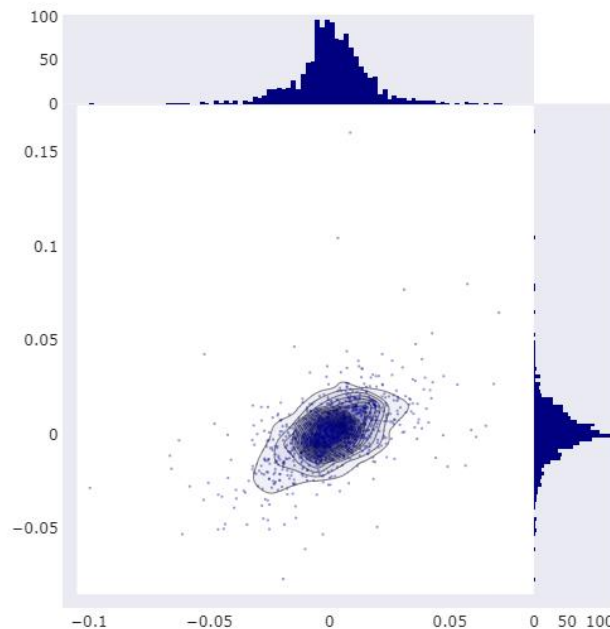


Przypomnienie (z wczoraj):

Tw. Sklara:

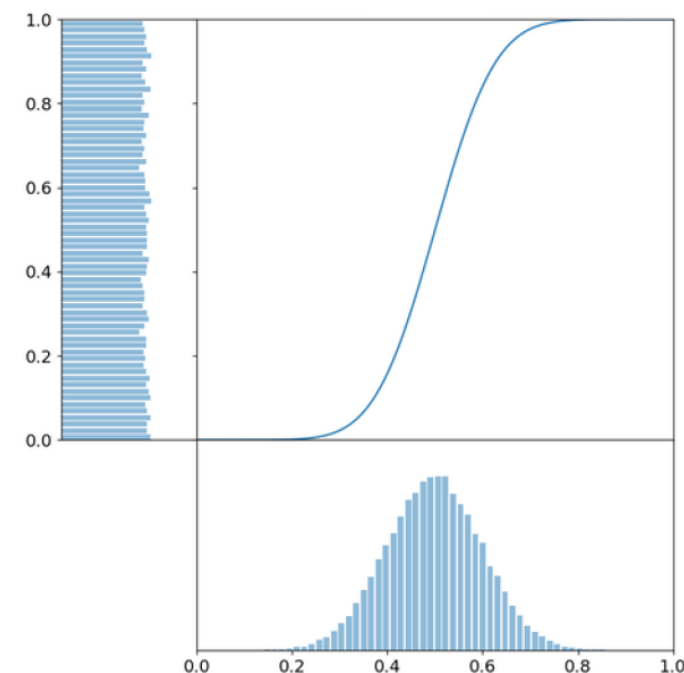
$$F_{X,Y}(x,y) = C(F_X(x), F_Y(y))$$

- ❖ Wielowymiarowe rozkłady **jednostajne**
- ❖ Modele zależności w wektorach losowych
- ❖ Fajny temat na pracę magisterską 😊



PIT (Probability integral transform)

- ❖ Jeśli X_j jest zmienną losową o dystrybuancie $F_{X_j}(x_j)$
- ❖ To $U_j := F_{X_j}(X_j)$ ma rozkład jednostajny.



Kopuły:

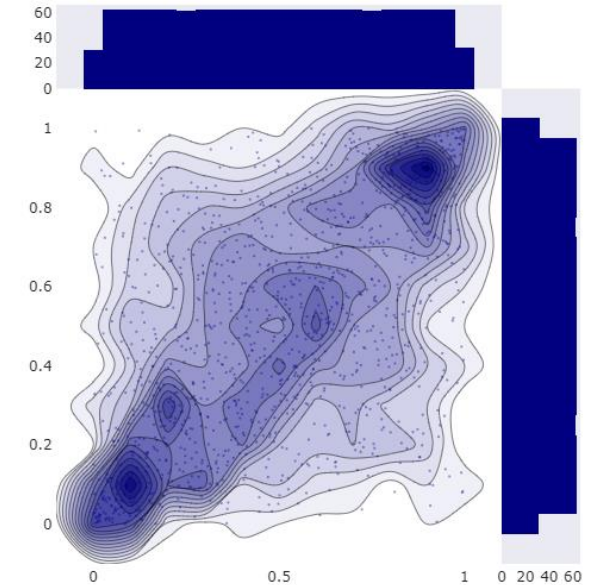
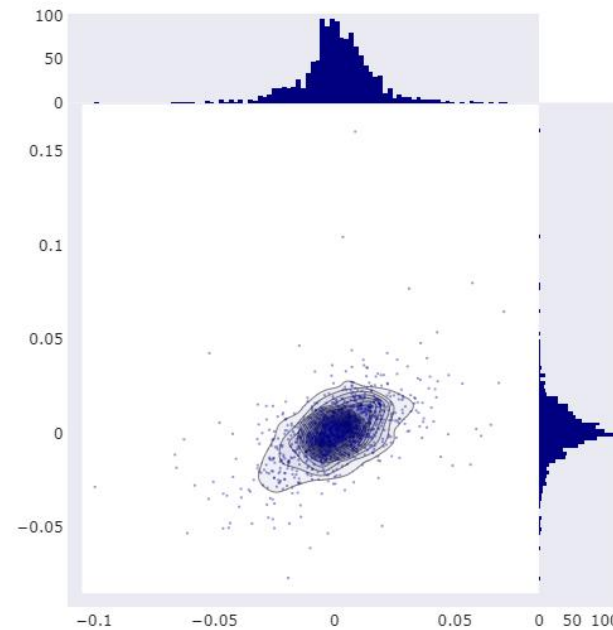


Przypomnienie (z wczoraj):

Tw. Sklara:

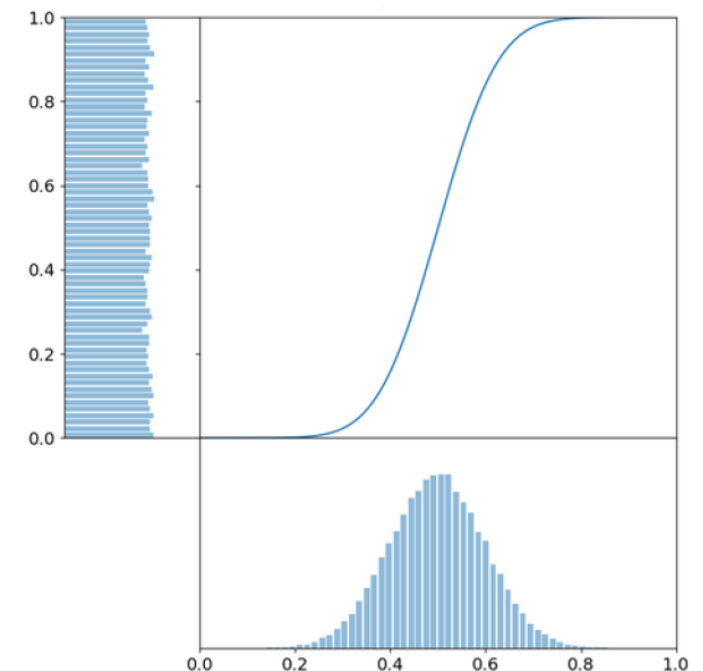
$$F_{X,Y}(x,y) = C(F_X(x), F_Y(y))$$

- ❖ Wielowymiarowe rozkłady **jednostajne**
- ❖ Modele zależności w wektorach losowych
- ❖ Fajny temat na pracę magisterską 😊



PIT (Probability integral transform)

- ❖ Jeśli X_j jest zmienną losową o dystrybucji $F_{X_j}(x_j)$
- ❖ To $U_j := F_{X_j}(X_j)$ ma rozkład jednostajny.



Kopułowa Regresja Kwantylowa

Cel



Estymacja kwantyla α
rozkładu Y

$$q_\alpha|x_t = F_Y^{-1}(C_{V|U}^{-1}(\alpha|u_t))$$

Metoda



Estymacja:
Rozkładów brzegowych: F_Y, F_X ,
($u_t = F_X(x_t), v_t = F_Y(y_t)$)
Kopuły: $C_{V|U}(v|u)$

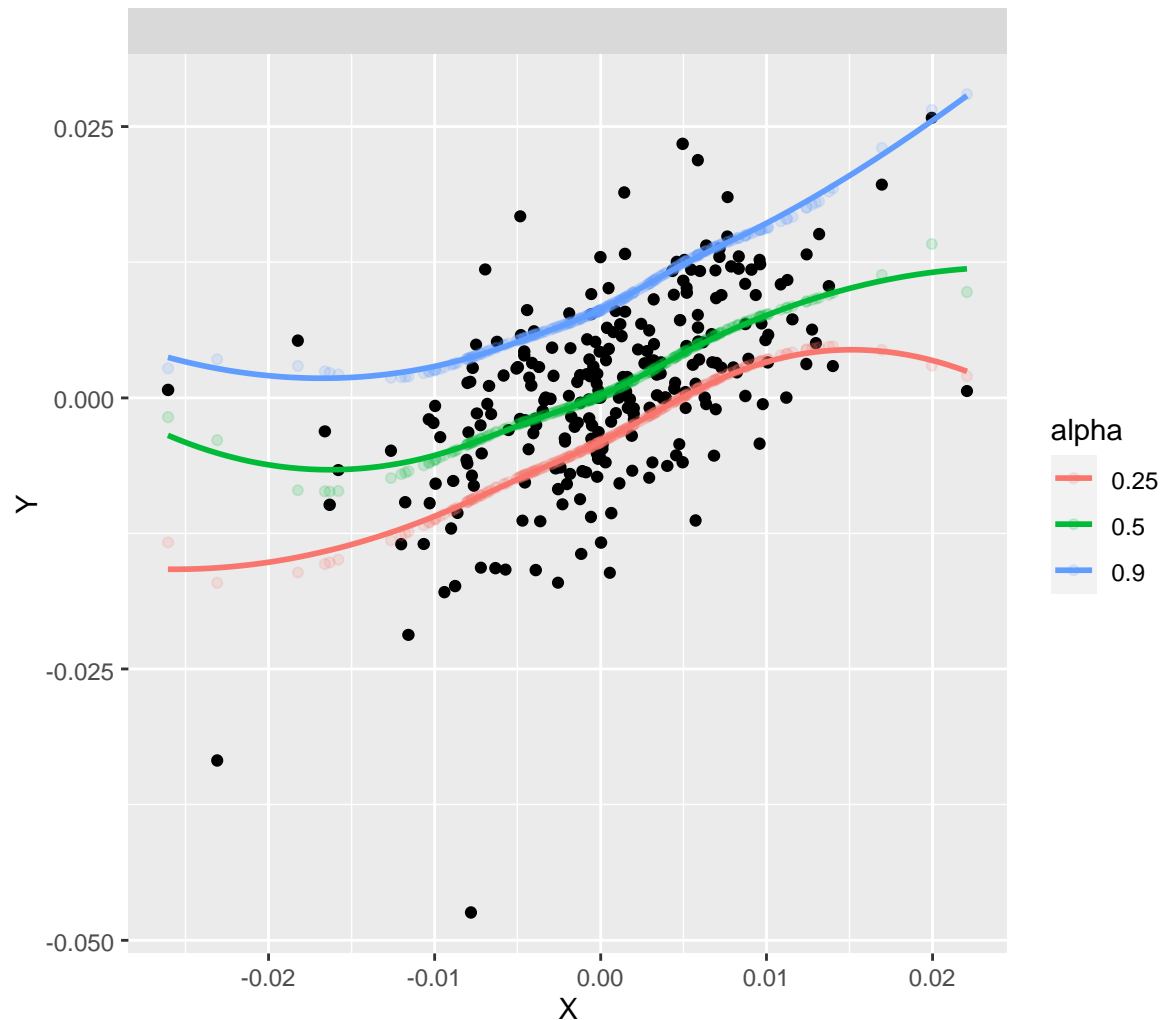
Zalety



Nieliniowa zależność w
kwantylach

Brak quantile crossing

Kopułowa regresja kwantylowa



Konstrukcje D-vine



Konstrukcje D-vine

n wymiarowy rozkład  n wymiarowa kopuła

Ok! Ale można też bardziej elastycznie:

R-vine

- Ogólny sposób dekompozycji n -wymiarowego rozkładu na rozkłady brzegowe i kopuły

Dekompozycja R-vine:

$$f(x_1, \dots, x_d) = \prod_{k=1}^d f_k(x_k) \prod_{i=1}^{d-1} \prod_{j=i+1}^d c_{ij|i+1, \dots, j-1} (F_{i|i+1, \dots, j-1} (x_i | x_{i+1}, \dots, x_{j-1}), F_{j|i+1, \dots, j-1} (x_j | x_{i+1}, \dots, x_{j-1}); x_{i+1}, \dots, x_{j-1}).$$

5-wymiarowy przykład:

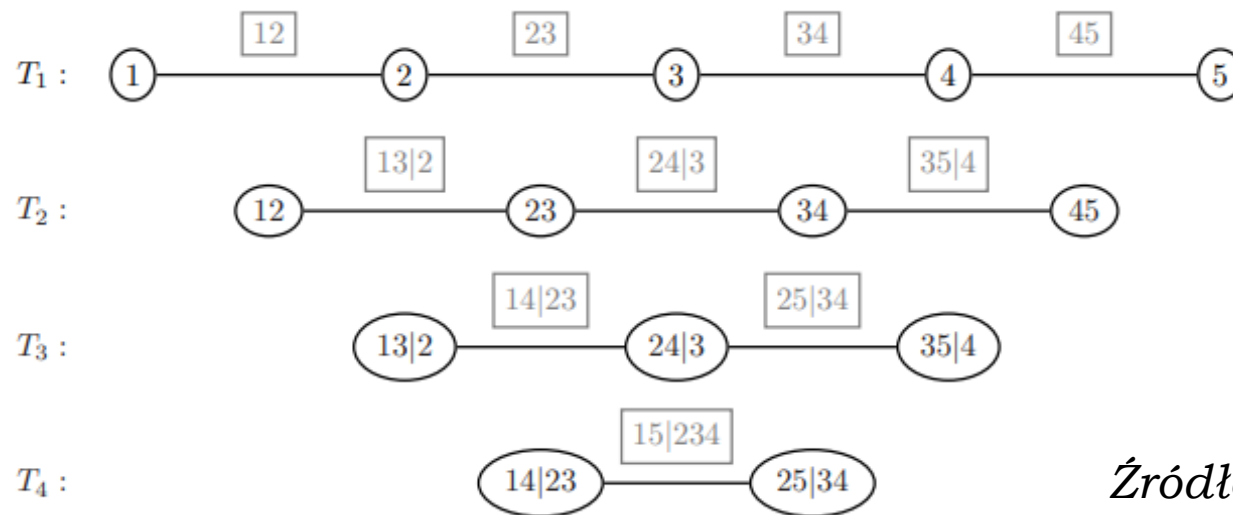
$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = f_1(x_1) f_2(x_2) f_3(x_3) f_4(x_4) f_5(x_5)$$

$$\cdot c_{12} \cdot c_{23} \cdot c_{34} \cdot c_{45} \quad (T_1)$$

$$\cdot c_{13|2} \cdot c_{24|3} \cdot c_{35|4} \quad (T_2)$$

$$\cdot c_{14|23} \cdot c_{25|34} \quad (T_3)$$

$$\cdot c_{15|234}, \quad (T_4)$$



Źródło: [3]

Konstrukcje D-vine

R-vine

- Ogólny sposób dekompozycji n -wymiarowego rozkładu na rozkłady brzegowe i kopuły

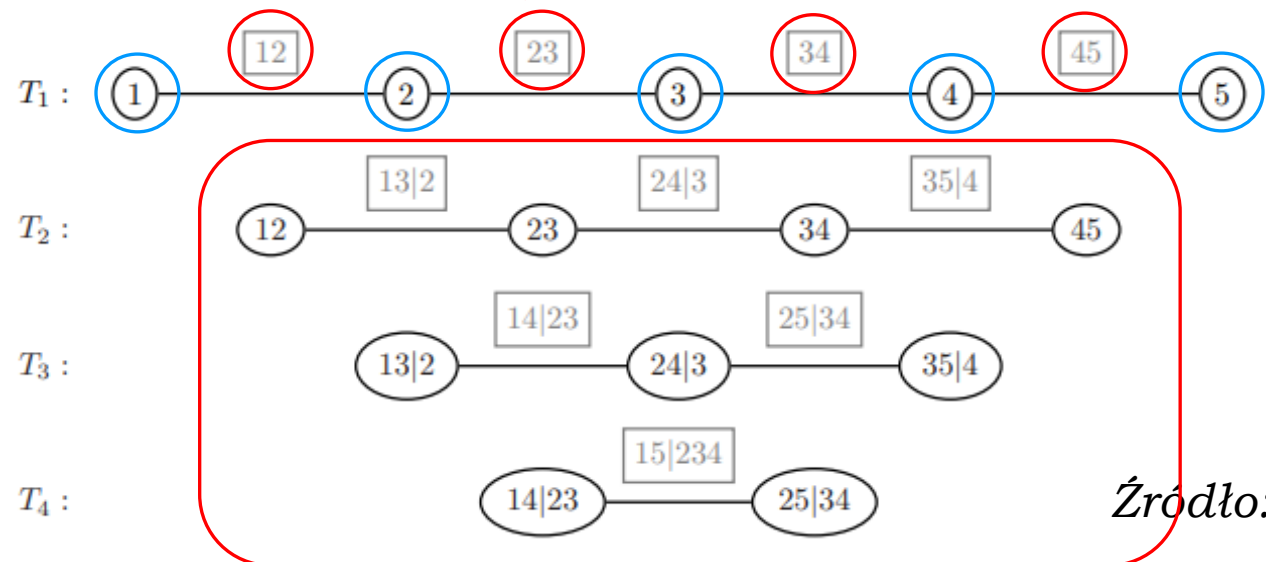
Dekompozycja R-vine:

$$f(x_1, \dots, x_d) = \prod_{k=1}^d \underline{f_k(x_k)} \prod_{i=1}^{d-1} \prod_{j=i+1}^d \underline{c_{ij;i+1,\dots,j-1}} (F_{i|i+1,\dots,j-1}(x_i|x_{i+1}, \dots, x_{j-1}), F_{j|i+1,\dots,j-1}(x_j|x_{i+1}, \dots, x_{j-1}); x_{i+1}, \dots, x_{j-1}).$$

5-wymiarowy przykład:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \underline{f_1(x_1)f_2(x_2)f_3(x_3)f_4(x_4)f_5(x_5)}$$

$$\begin{aligned} & \cdot c_{12} \cdot c_{23} \cdot c_{34} \cdot c_{45} & (T_1) \\ & \cdot c_{13;2} \cdot c_{24;3} \cdot c_{35;4} & (T_2) \\ & \cdot c_{14;23} \cdot c_{25;34} & (T_3) \\ & \cdot c_{15;234} & (T_4) \end{aligned}$$



Źródło: [3]

Konstrukcje D-vine

R-vine

- Ogólny sposób dekompozycji n -wymiarowego rozkładu na rozkłady brzegowe i kopuły

D-vine

- Podklasa R-vine
- Każdy węzeł ma co najwyżej dwie krawędzie

Dekompozycja **D**-vine:

$$f(x_1, \dots, x_d) = \prod_{k=1}^d f_k(x_k) \prod_{i=1}^{d-1} \prod_{j=i+1}^d c_{ij;i+1,\dots,j-1} (F_{i|i+1,\dots,j-1} (x_i | x_{i+1}, \dots, x_{j-1}), F_{j|i+1,\dots,j-1} (x_j | x_{i+1}, \dots, x_{j-1}); x_{i+1}, \dots, x_{j-1}).$$

5-wymiarowy przykład:

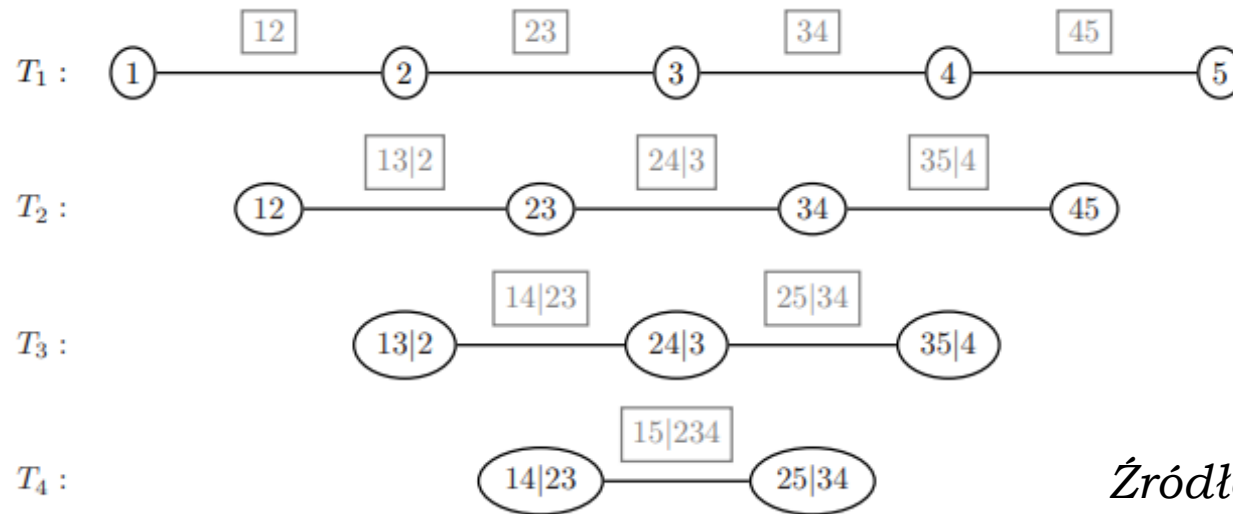
$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = f_1(x_1) f_2(x_2) f_3(x_3) f_4(x_4) f_5(x_5)$$

$$\cdot c_{12} \cdot c_{23} \cdot c_{34} \cdot c_{45} \quad (T_1)$$

$$\cdot c_{13;2} \cdot c_{24;3} \cdot c_{35;4} \quad (T_2)$$

$$\cdot c_{14;23} \cdot c_{25;34} \quad (T_3)$$

$$\cdot c_{15;234}, \quad (T_4)$$



Źródło: [3]

Konstrukcje D-vine

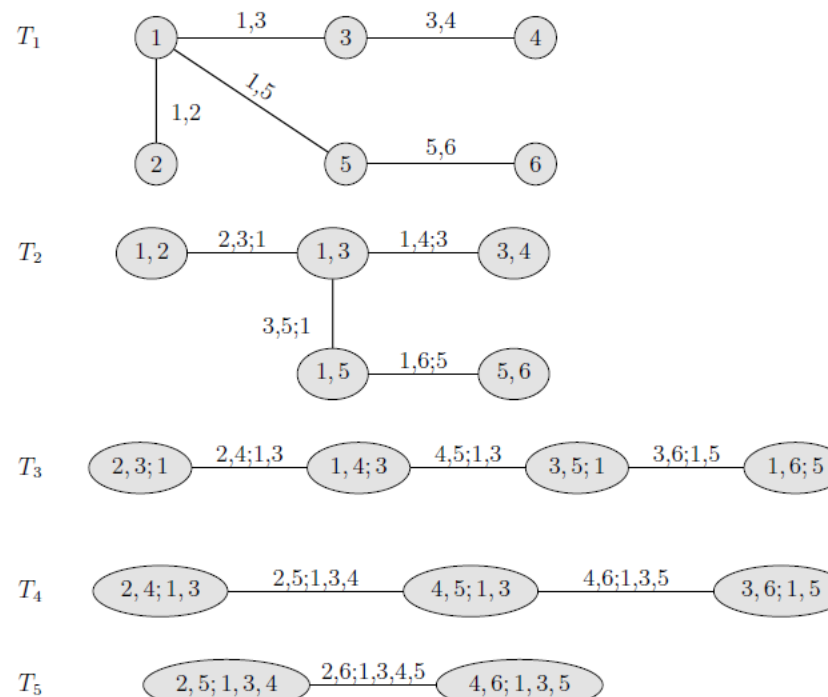
R-vine

- Ogólny sposób dekompozycji n -wymiarowego rozkładu na rozkłady brzegowe i kopuły

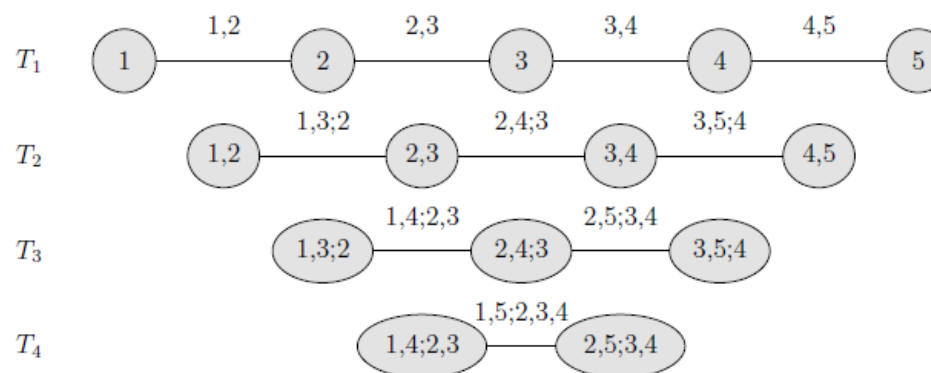
D-vine

- Podklasa R-vine
- Każdy węzeł ma co najwyżej dwie krawędzie

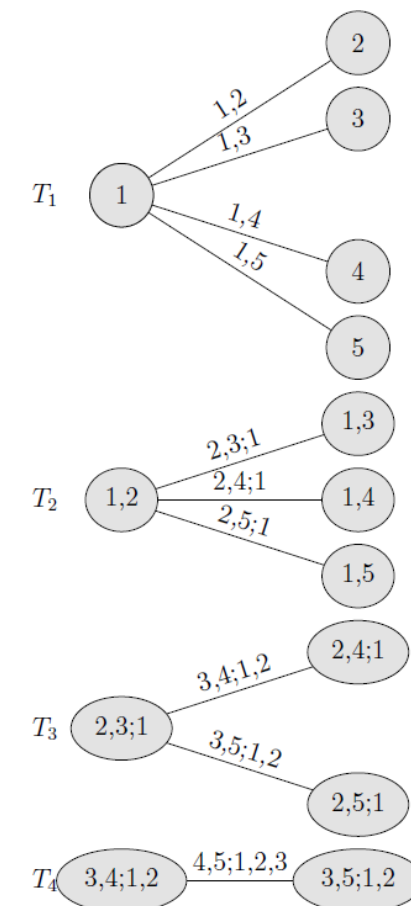
R-vine (ogólna rodzina):



D-vine (chains):



C-vine (root node):



Źródło: [2]

Kopułowa regresja kwantylowa D-vine

Zamiast jednego U , wektor
predyktorów \mathbf{U}

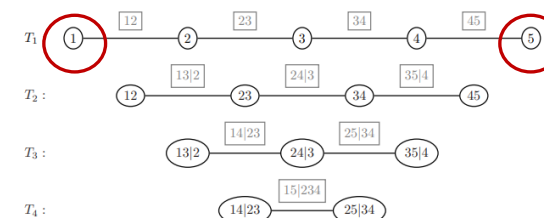
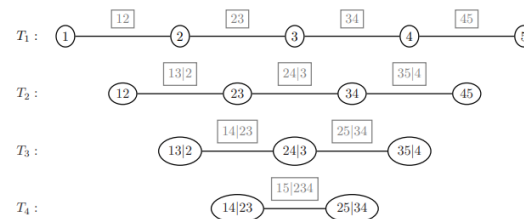
$$q_\alpha | \mathbf{x}_t = F_Y^{-1}(C_{V|\mathbf{U}}^{-1}(\alpha | \mathbf{u}_t))$$

Standardowa
kopułowa regresja
kwantylowa

$$q_\alpha | x_t = F_Y^{-1}(C_{V|U}^{-1}(\alpha | u_t))$$

Kopułę $C_{V,U}$ wyrażamy
poprzez D-vine

Jeśli V będzie na
krańcach T_1 ,
to istnieje analityczny
wzór na jego kwantyle.^[3]



Case study:

D-vine regression stress testing



Scenariusz:

Zbalansowany portfel
akcji różnych
rynków.

Jak wartość portfela
zależy od rynkowych
indeksów?

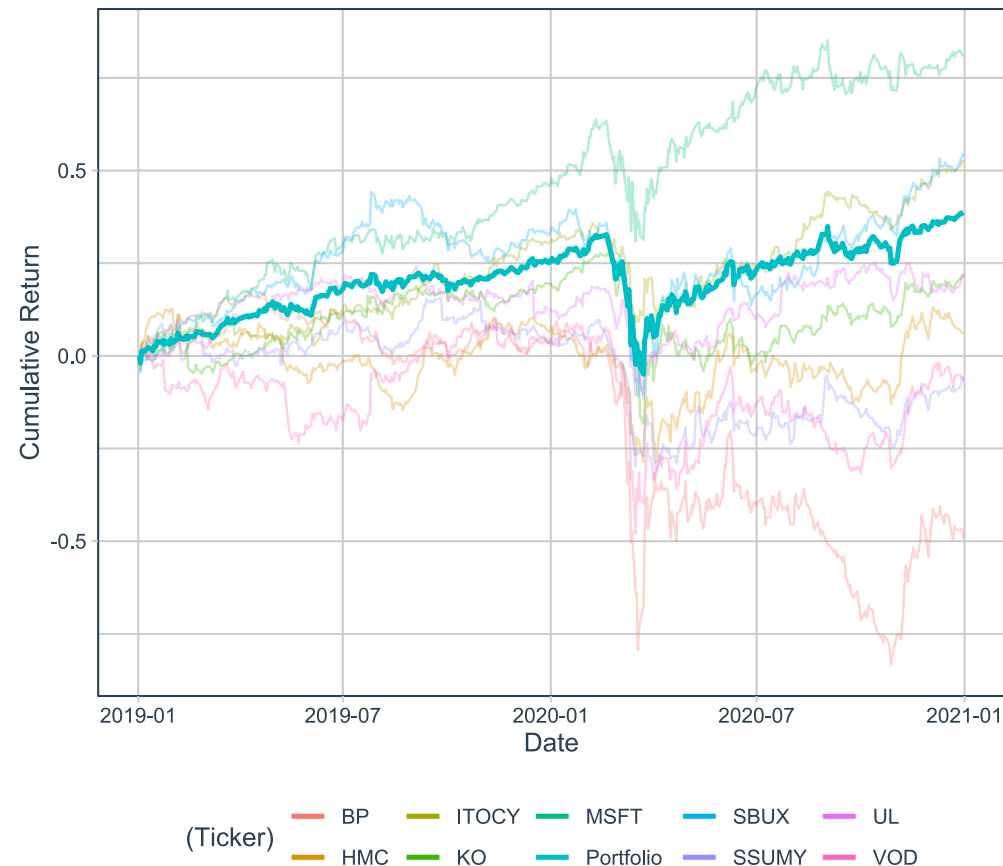
Co gdy się mocno
poruszają?



Struktura Portfela

Ticker	Nazwa	Rynek	Waga
VOD	Vodafone	UK	19.3%
UL	Unilever	UK	7.0%
BP	BP P.L.C.	UK	10.2%
MSFT	Microsoft	USA	3.4%
KO	Coca-Cola	USA	7.8%
SBUX	Starbucks	USA	5.6%
HMC	Honda	Jap.	12.8%
SSUMY	Sumitomo	Jap.	23.9%
ITOCY	Itochu	Jap.	10.0%

Portfolio cumulative returns

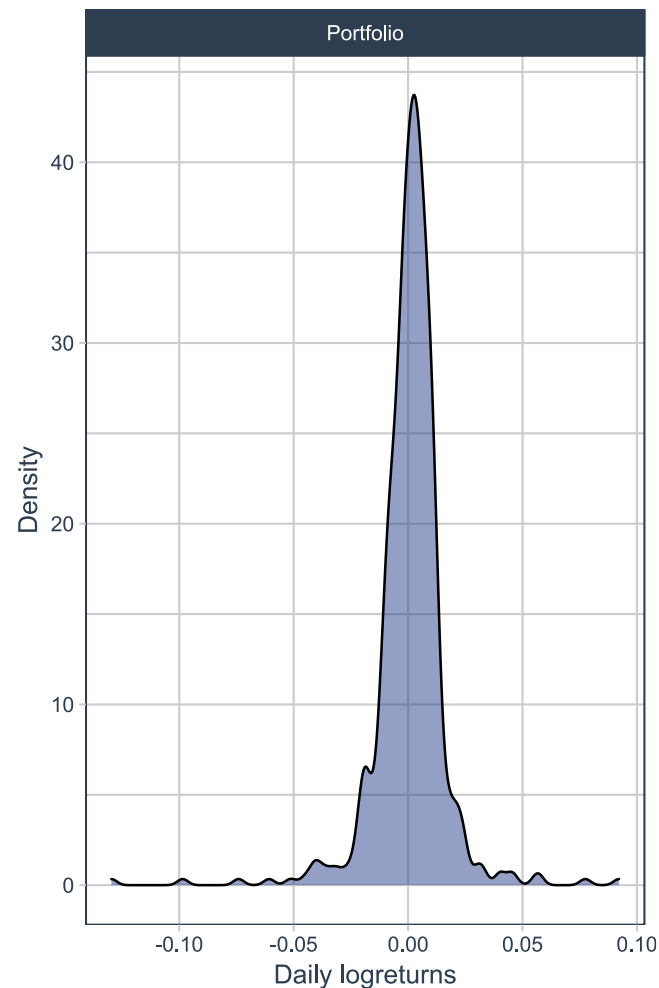


Case study:

D-vine regression stress testing



Ticker	Nazwa	Rynek	Waga	Benchmark
VOD	Vodafone	UK	19.3%	FTSE 100 (<i>FTSE</i>)
UL	Unilever	UK	7.0%	
BP	BP P.L.C.	UK	10.2%	
MSFT	Microsoft	USA	3.4%	S&P 500 (<i>GSPC</i>)
KO	Coca-Cola	USA	7.8%	
SBUX	Starbucks	USA	5.6%	
HMC	Honda	Jap.	12.8%	Nikkei 225 (<i>N225</i>)
SSUMY	Sumitomo	Jap.	23.9%	
ITOCY	Itochu	Jap.	10.0%	



Case study:

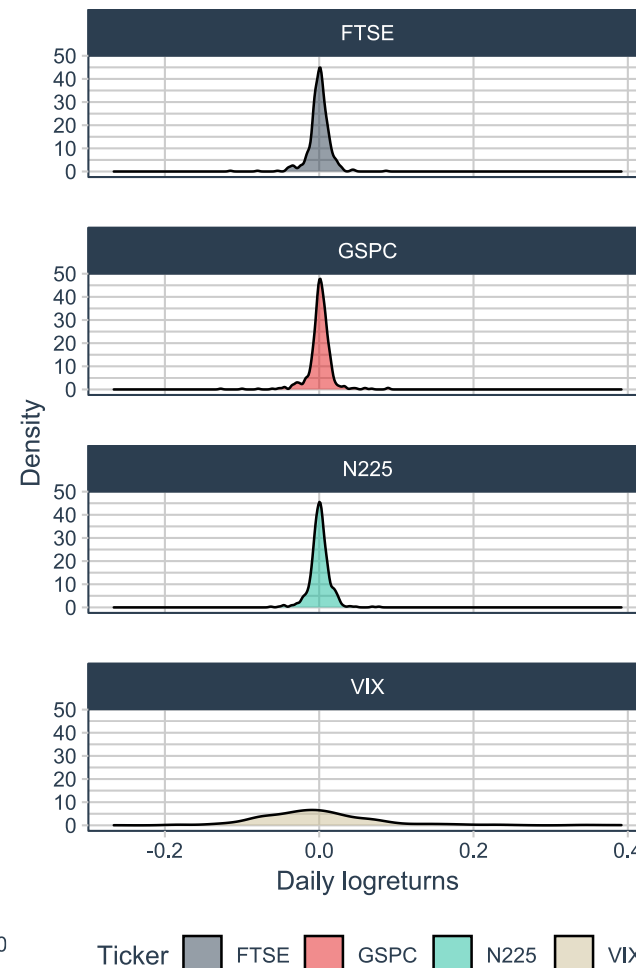
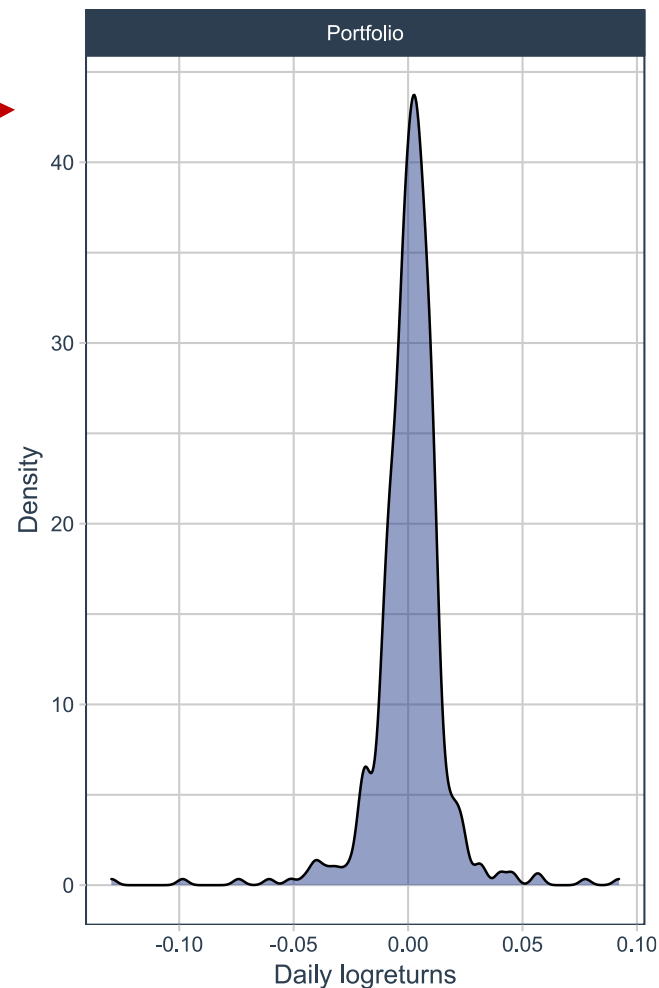
D-vine regression stress testing



Struktura Portfela

Ticker	Nazwa	Rynek	Waga	Benchmark
VOD	Vodafone	UK	19.3%	FTSE 100 (<i>FTSE</i>)
UL	Unilever	UK	7.0%	
BP	BP P.L.C.	UK	10.2%	
MSFT	Microsoft	USA	3.4%	S&P 500 (<i>GSPC</i>)
KO	Coca-Cola	USA	7.8%	
SBUX	Starbucks	USA	5.6%	
HMC	Honda	Jap.	12.8%	Nikkei 225 (<i>N225</i>)
SSUMY	Sumitomo	Jap.	23.9%	
ITOCY	Itochu	Jap.	10.0%	

I jeszcze
dodamy **VIX!**



Case study:

D-vine regression stress testing: Rozkłady brzegowe

Case study:

D-vine regression stress testing: Rozkłady brzegowe

ARMA-
GARCH



- ❖ Autokorelacja
- ❖ Trend
- ❖ Heteroskedastyczność

Case study:

D-vine regression stress testing: Rozkłady brzegowe

ARMA-GARCH



- ❖ Autokorelacja
- ❖ Trend
- ❖ Heteroskedastyczność

Szeregi z autokorelacją, heteroskedastyczne.
Dobrze działa tu model $ARMA(0,1)-GARCH(1,1)$,
z innowacjami t .

Rezydua przeszły testy:



- ❖ KS zgodności z rozkładem t
- ❖ Ljunga-Boxa na autokorelację
- ❖ Engle Arch na homoskedastyczność



```
> box_pvalues
Portfolio    FTSE      GSPC      N225      VIX
0.6535509 0.3350844 0.3359882 0.3310874 0.6558776
> arch_pvalues
Portfolio    FTSE      GSPC      N225      VIX
0.347004 0.779790 0.845988 0.153714 0.940236
> ks_pvalues
Portfolio    FTSE      GSPC      N225      VIX
0.3490424 0.8711507 0.5899769 0.6814515 0.1676031
```

Case study:

D-vine regression stress testing: Rozkłady brzegowe

ARMA-
GARCH

PIT



- ❖ „Ujednostajnienie” danych
- ❖ Będzie można modelować kopuły
- ❖ Gaussian KDE zapewni zgodność estymatorów

Case study:

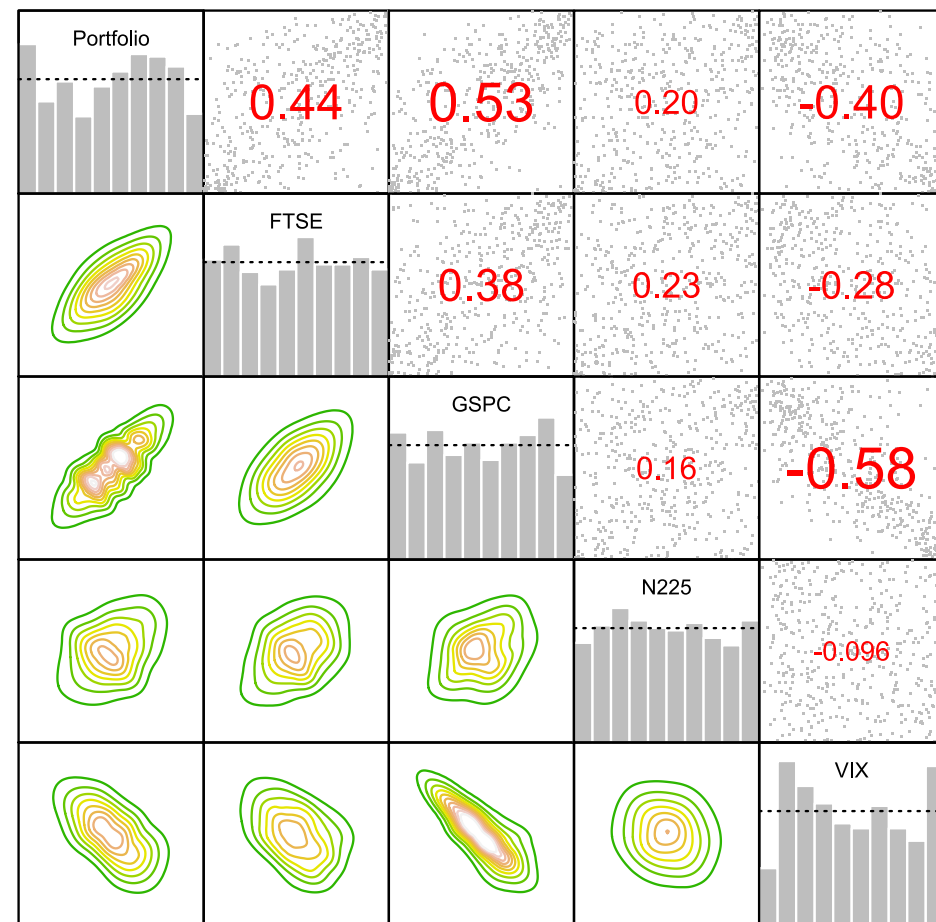
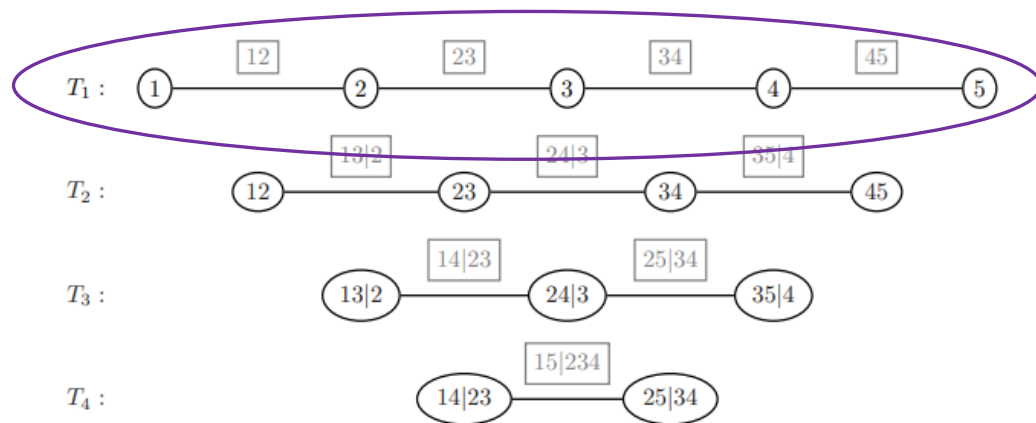
D-vine regression stress testing: Struktura D-vine

ARMA-
GARCH

PIT

Kopuły

- ❖ Łączymy rozkłady brzegowe strukturą D-vine.
- ❖ Każda D-vine jest jednoznacznie wyznaczona przez kolejność w **pierwszym drzewie**.

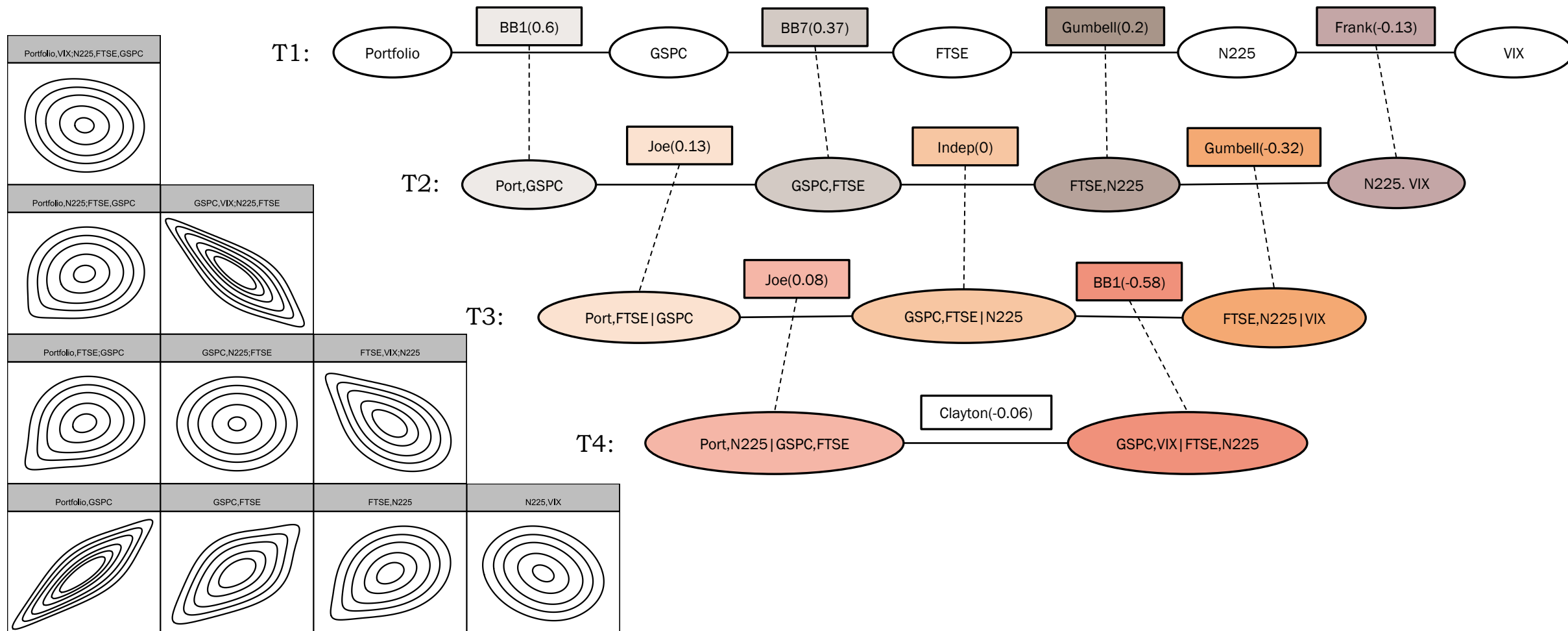


Case study:

D-vine regression stress testing: Struktura D-vine

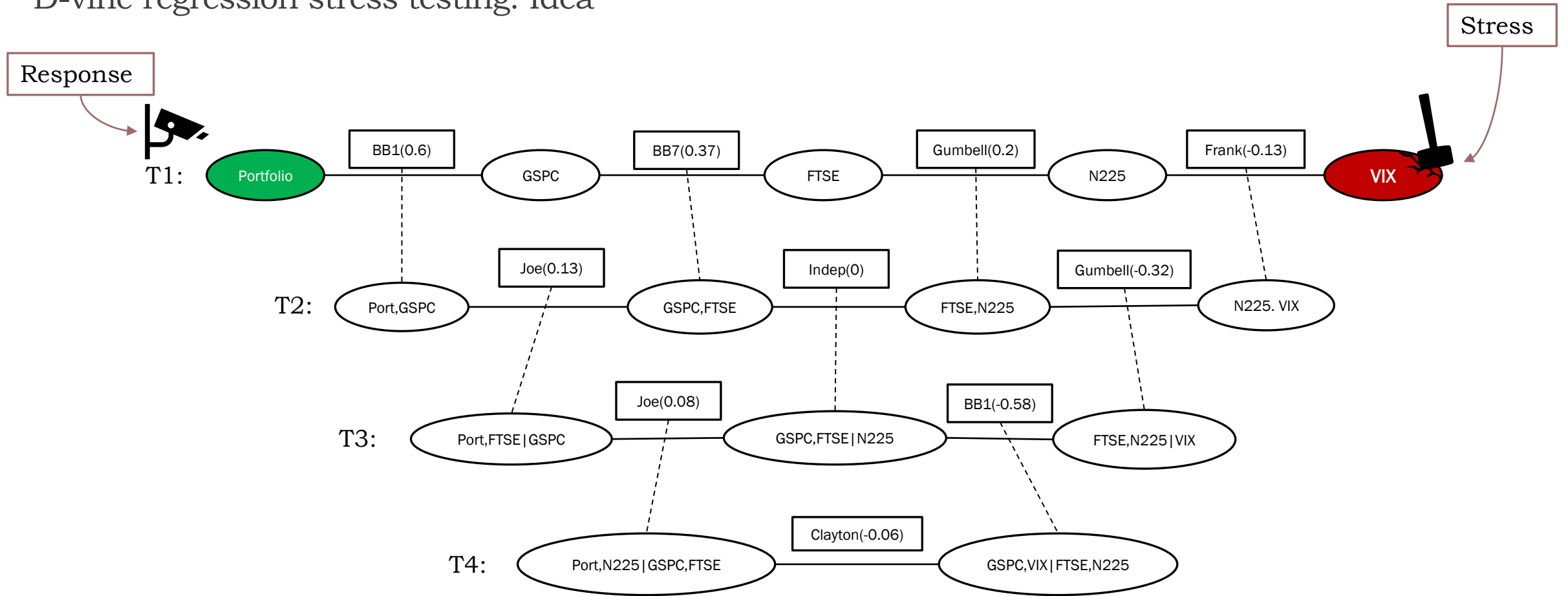


```
# Copula quantile regression
library(vinereg)
quant_cop_reg <- vinereg(Portfolio ~ .,
  family = "par", #(tylko parametryczne)
  selcrit = "aic", # kryterium wyboru struktury
  data = udata)
```



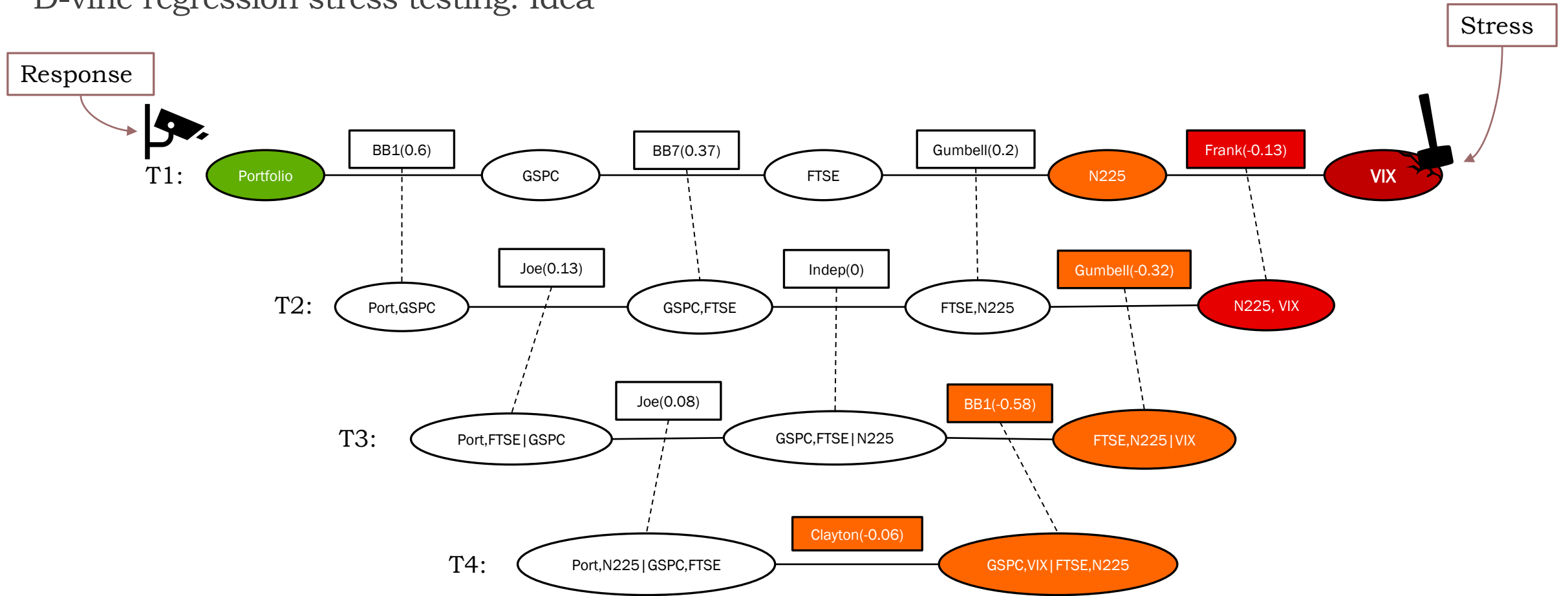
Case study:

D-vine regression stress testing: Idea



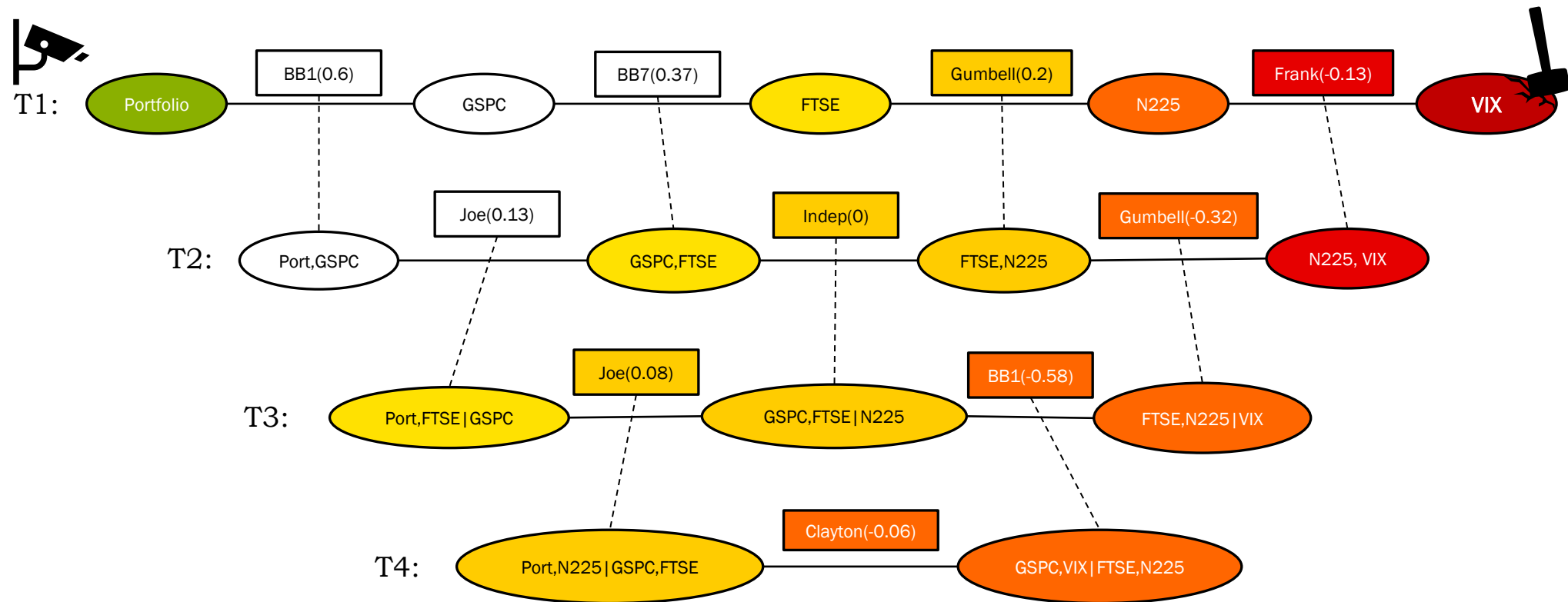
Case study:

D-vine regression stress testing: Idea



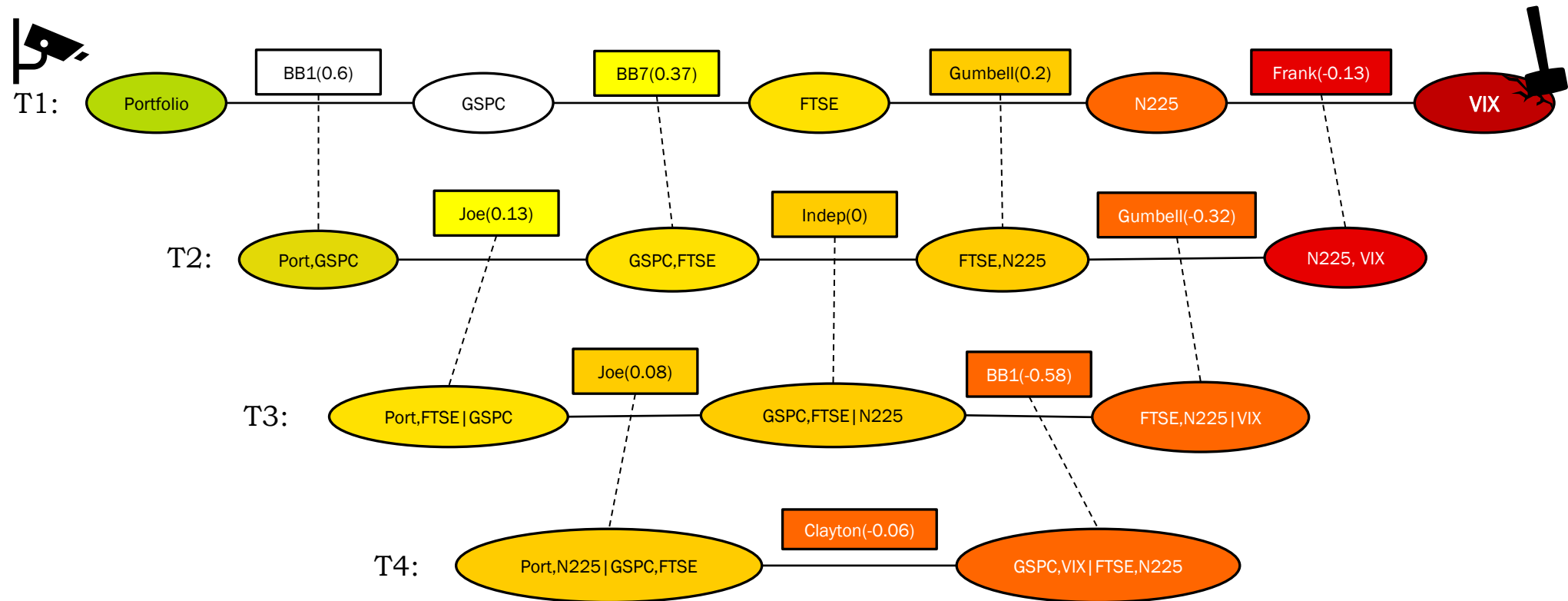
Case study:

D-vine regression stress testing: Idea



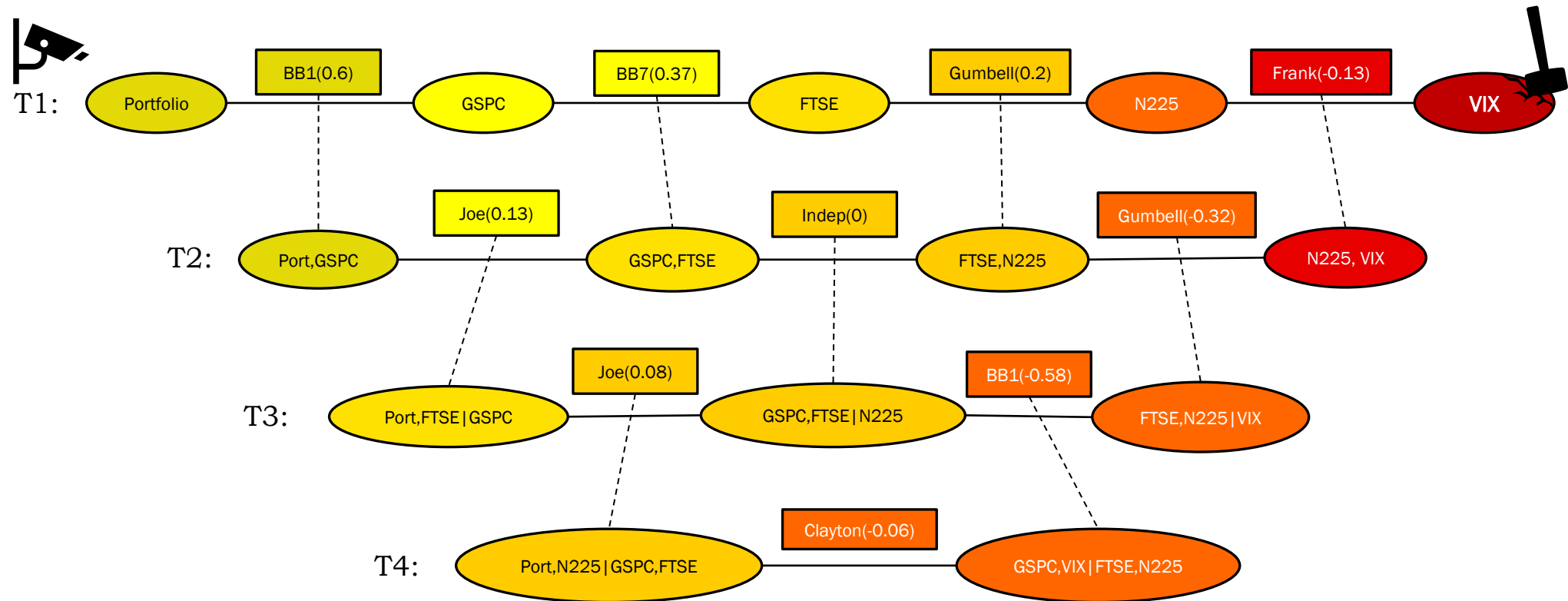
Case study:

D-vine regression stress testing: Idea



Case study:

D-vine regression stress testing: Idea



Case study:

D-vine regression stress testing: Wyniki

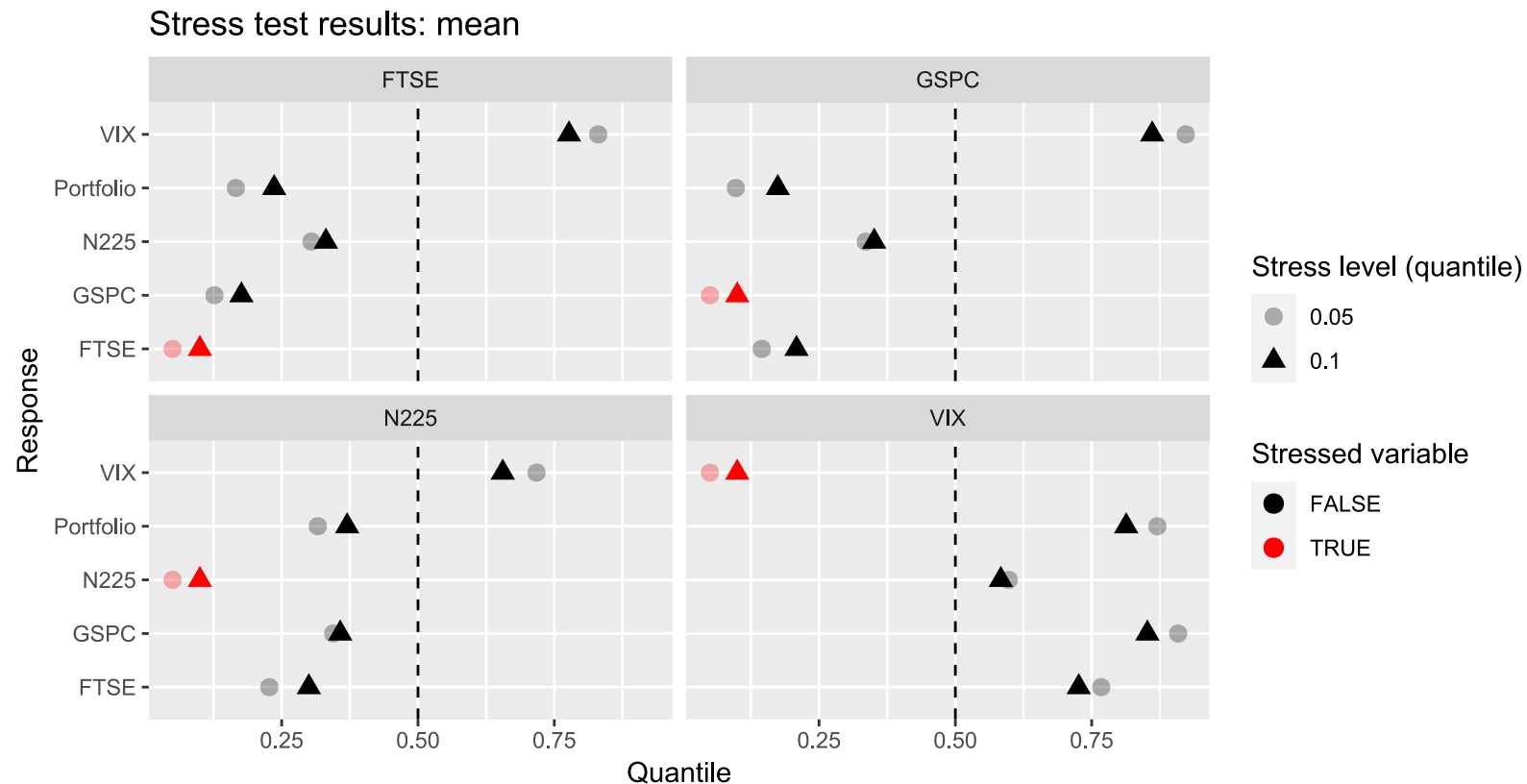


```
stress_test_results <- predict(quant_cop_reg,  
                                newdata = stress_scenario,  
                                alpha = c(NA) # predykuj srednia  
                                )
```



Predykcje średnich,
przy spadkach
pojedynczego indeksu
do poziomów:

- ❖ kwantyla 0.05
- ❖ kwantyla 0.1



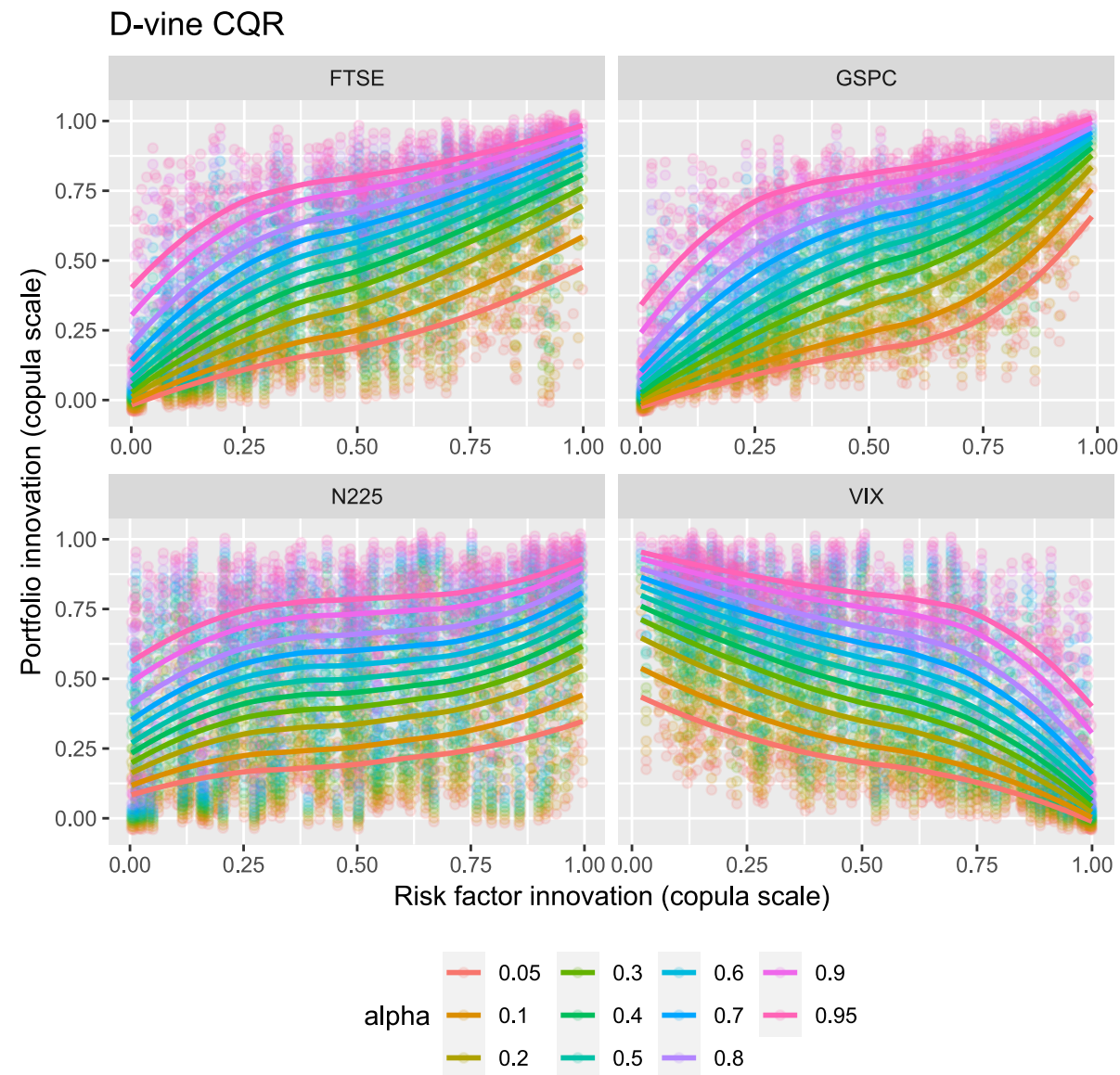
Case study:

D-vine regression stress testing: Wyniki



```
qs <- c(0.05, seq(0.1, 0.9, 0.1), 0.95)  
plot_effects(quant_cop_reg,  
             alpha=qs)
```

Krzywe kwantylowe portfela w
odpowiedzi na kwantyle indeksu



Case study:

D-vine regression stress testing: Wyniki

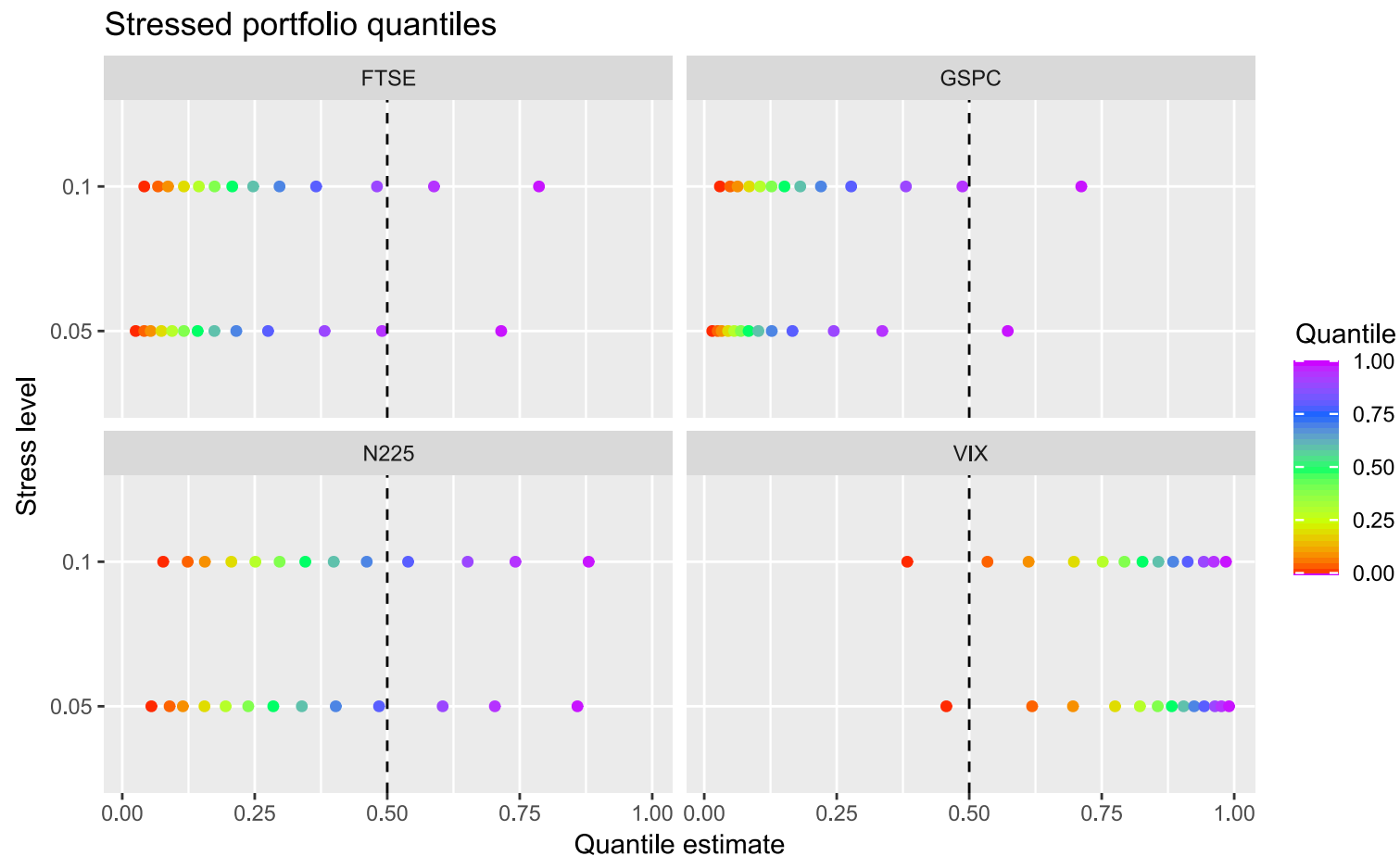


```
quantile_stress_results <- predict(quant_cop_reg,  
  newdata = stress_scenario,  
  alpha = c(0.05,0.1,0.2,0.3,  
            0.4,0.5,0.6,0.7,  
            0.8,0.9,0.95))
```



Predykcje kwantyli
ruchu portfela, przy
spadkach
pojedynczego indeksu
do poziomów:

- ❖ kwantyla 0.05
- ❖ kwantyla 0.1



Case study:

D-vine regression stress testing: Wyniki



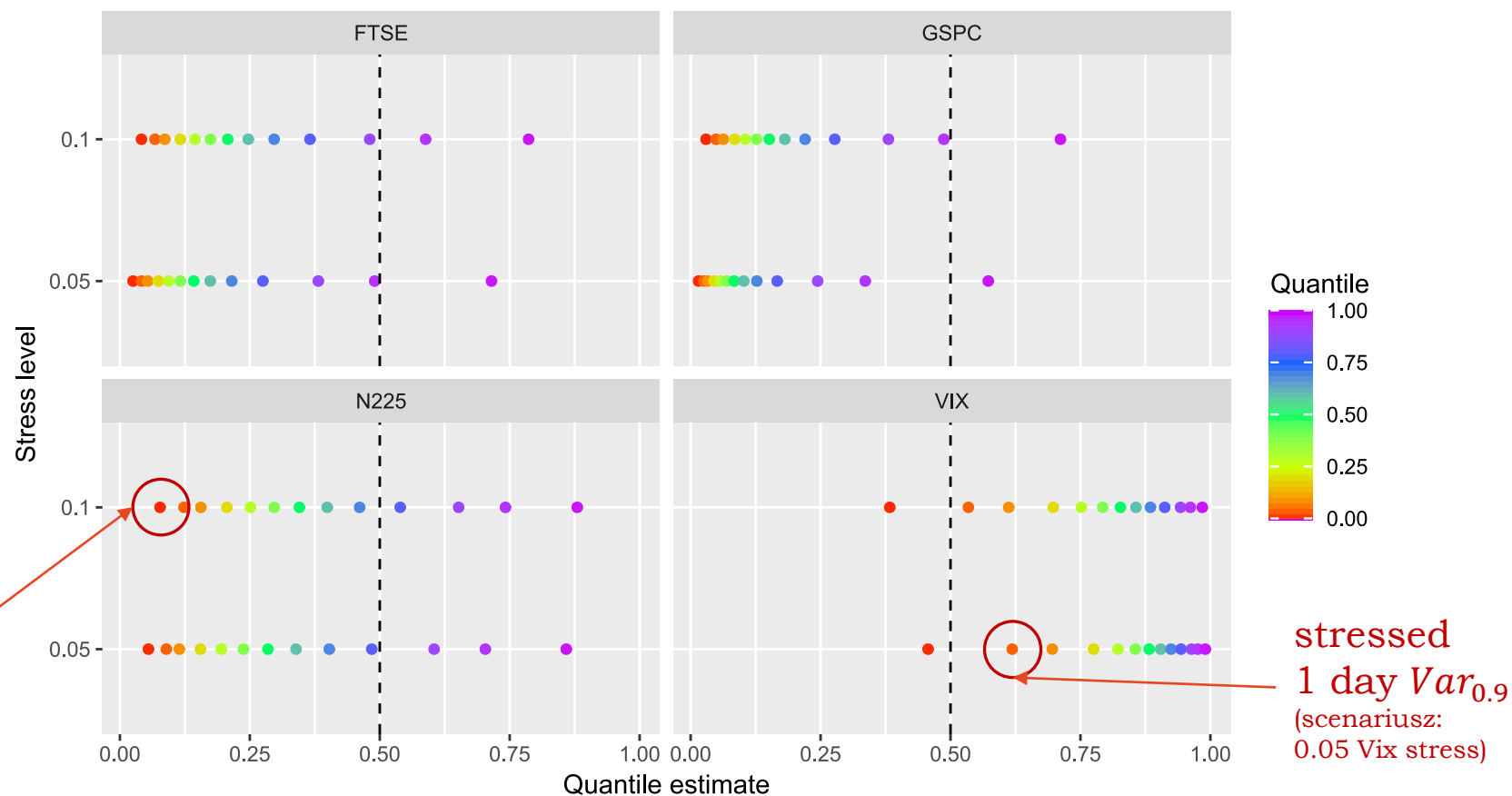
```
quantile_stress_results <- predict(quant_cop_reg,  
  newdata = stress_scenario,  
  alpha = c(0.05,0.1,0.2,0.3,  
            0.4,0.5,0.6,0.7,  
            0.8,0.9,0.95))
```



Predykcje kwantyli
ruchu portfela, przy
spadkach
pojedynczego indeksu
do poziomów:

- ❖ kwantyla 0.05
- ❖ kwantyla 0.1

Stressed portfolio quantiles



Pięknie dziękuję
za uwagę!

Piotr Mikler
mikler@student.agh.edu.pl

Źródła



[1] D. Kraus, C. Czado,
D-vine copula based quantile regression (2016)



[2] M. Fischer, D. Kraus, M. Pfeuffer, C. Czado,
**Stress Testing German Industry Sectors: Results from
a Vine Copula Based Quantile Regression** (2017)



[3] M. Tepegjozova, J. Zhou, G. Claeskens, C. Czado,
**Nonparametric C- and D-vine based quantile
regression** (2021)



[4] T. Nagler,
vinereg R library:
<https://cran.r-project.org/web/packages/vinereg/>