Raport nr 2

Testowanie hipotez

Piotr Mikler 236895

Spis treści

1 Wstęp

Przedmiotem tej pracy jest zagadnienie testowania hipotez. Testy statystyczne są powszechnie stosowanym narzędziem pozwalającym zweryfikować (na pewnym poziomie pewności) hipotezy, na podstawie pewnej próbki z całej populacji. Z tego powodu są niezwykle przydatne podczas rozwiązywania praktycznych problemów, takich jak np testowanie jakości produktów. W tym sprawozdaniu przybliżę metody służące do testowania hipotez w rodzinie rozkładów normalnych. Przedstawię sposób konstrukcji testu statystycznego dla średniej przy znanej wariancji, oraz dla wariancji przy znanej średniej. Pokażę również jak takie testy wyglądają w praktyce, pracując na danych pobranych ze strony kursowej dr hab inż. Agnieszki Wyłomańskiej.

2 Ogólne uwagi

Konstrukcja testu statystycznego wymusza na nas postawienie dwóch hipotez. Pierwszą z nich oznaczamy H_0 i nazywamy **hipotezą zerową**. Zadaniem testu, jest orzeczenie, czy hipoteza zerowa jest fałszywa na pewnym rozsądnym, ustalonym poziomie pewności (nigdy nie będziemy pewni na 100%). Jeżeli test wykryje jakąś nieprawidłowość, to hipotezę zerową odrzucamy na rzecz **hipotezy alternatywnej** H_1. Jednak w odwrotnym przypadku gdy test nie wykryje nieprawidłowości, nie odrzucamy hipotezy alternatywnej- mówimy jedynie, że nie mamy podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej. Żaden test o którym mówię w tej pracy nie jest bowiem w stanie sprawdzić hipotezy jednoznacznie. Zawsze istnieje szansa, że nasza próbka była "pechowo dobrana", i ma charakterystyki rozkładu, z którego nie pochodzi. Hipotezy mogą być proste, lub złożone- czyli zezwalać parametrowi na przyjęcie jednej wartości (np $\gamma = 4$), lub wartości ze zbioru (np $\gamma > 4$). W tej pracy będę mówił jedynie o przypadkach, w których hipoteza zerowa jest prosta.

Jednym ze sposobów na sprawdzenie nieprawidłowości w hipotezie zerowej jest wyznaczenie **przedziałów ufności** dla danego parametru. Jest to przedział na osi liczbowej, w którym z wybranym prawdopodobieństwem $1-\alpha$ znajduje się nasz parametr. Wartości w tym przedziale uznawane są za "typowe" dla danego rozkładu i nie będą prowadziły do odrzucania hipotezy zerowej. Kiedy natomiast nasz parametr nie znajdzie się w tym przedziale, będzie to dla nas sygnał ostrzegawczy. Takie wartości parametru tworzą **zbiór krytyczny** i prowadzą do odrzucenia hipotezy zerowej. $1-\alpha$ nazywamy **poziomem ufności**- im większe weźmiemy α, tym większy będzie zbiór krytyczny, więcej wartości nasz test będzie uznawał za "nietypowe" i tym

samym częściej odrzucał hipotezę zerową. Gdy mówimy o teście, α jest nazywana **poziomem istotności** testu. Wyraża ona prawdopodobieństwo pomyłki polegającej na odrzuceniu hipotezy zerowej, gdy była prawdziwa. Taką pomyłkę nazywamy **błędem pierwszego rodzaju**. Naturalną tendencją wydaje się być minimalizacja poziomu istotności, by nie popełniać takiego błędu. Nie jest to jednak dobra droga, ponieważ jeśli popchnęlibyśmy α do 0, to nasz test zawsze zwracałby brak zastrzeżeń do hipotezy zerowej- bo zawsze istnieje jakieś prawdopodobieństwo, że statystyka testowa przyjmie akurat daną wartość. Istotą testu jest odrzucenie mało prawdopodobnych wyników, co wymusza $\alpha > 0$.
Innym rodzajem pomyłki który może się pojawić podczas testowania hipotez jest przyjęcie hipotezy zerowej, gdy była fałszywa. Taki błąd nazywamy **błędem drugiego rodzaju**. Okazuje się, że dla ustalonej długości próby, prawdopodobieństwo popełnienia błędu drugiego rodzaju rośnie, gdy próbujemy zmniejszyć prawdopodobieństwo popełnienia błędu pierwszego rodzaju- i vice versa. Dlatego test statystyczny powinien mieć tak dobrane parametry, aby dobrze bilansować obie te strony. Bardziej precyzyjna konstrukcja testów będzie omówiona już niżej dla konkretnych przypadków testów.

3 Test dla średniej przy znanej wariancji

Załóżmy, że dysponujemy próbą prostą $\mathbf{X}$ o długości n ze zbioru danych o rozkładzie $N(\mu; \sigma)$, ze znanym odchyleniem standardowym σ. Postawmy sobie hipotezę zerową $H_0 : \mu = \mu_h$, gdzie μ_h jest ustaloną liczbą i rozważmy następujące hipotezy alternatywne:

3.1 $H_1 : \mu \neq \mu_h$

Ta hipoteza alternatywna jest dwustronna, co oznacza, że powinna wykrywać wahania statystyki testowej w obu kierunkach osi, zarówno gdy będzie za mała, jak i za duża. Naturalną konstrukcją przedziału ufności, jest przedział dwustronny. Pamiętając, że elementy próby losowej $\mathbf{X}$ mają rozkład normalny z parametrami μ i σ możemy z pewnością powiedzieć, że zmienna losowa

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{(\frac{\sigma}{\sqrt{n}})}$$

gdzie $\overline{X}$ to średnia z próby, ma rozkład normalny standardowy. To pozwala nam, przy pomocy kwantyli "z" tego rozkładu zapisać równość:

$$P(-z_{1-\frac{\alpha}{2}} < Z < z_{1-\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \alpha \tag{1}$$

Korzystając z założeń hipotezy zerowej, podstawiając za Z i wykonując operacje matematyczne na nierównościach wewnątrz nawiasu dochodzimy do postaci

$$P_{H_0}(\overline{X} - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu_h < \overline{X} + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 1 - \alpha$$

Widzimy zatem, że μ_h powinno z prawdopodobieństwem $1 - \alpha$
znaleźć się w przedziale $(\overline{x} - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \overline{x} + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$
Jest to zatem przedział ufności dla μ poziomie ufności $1-\alpha$. W rzeczywistości testowanie hipotezy sprowadza się do użycia równości (1). Obliczamy zgodnie z nim odpowiednio unormowaną statystykę Z, wyliczamy odpowiednie kwantyle i sprawdzamy czy Z należy do powyższego przedziału, a więc czy jest typową wartością, czy może należy do zbioru krytycznego, który w tym przypadku przyjmuje postać

$$C = \{x : x \leq -z_{1-\alpha/2} \vee z_{1-\alpha/2} \leq x\}$$

Pomocną wartością przy testowaniu hipotez jest tak zwana **p-wartość**. Określa ona minimalny poziom istotności, przy którym zaobserwowana wartość statystyki testowej powoduje odrzucenie hipotezy zerowej. Intuicyjnie, wtedy wartość naszej statystyki musiałaby się równać co do modułu brzegom zbioru krytycznego Im mniejsza jest p-wartość tym bardziej "nietypowa" była nasza statystyka. Przy tej hipotezie alternatywnej można ją wyrazić wzorem

$$p = 2 \cdot (1 - \Phi(|Z|))$$

gdzie $\Phi(x)$ jest dystrybuantą rozkładu standardowego normalnego.

3.1.1 Przykład- zad. 1.1

Przyjmijmy hipotezę alternatywną $H_1 : \mu \neq 1.5$ Na podstawie danych podanych w zadaniu mamy $\sigma = 0.2$, oraz $\alpha = 0.05$. W programie Matlab wyliczamy kolejno:

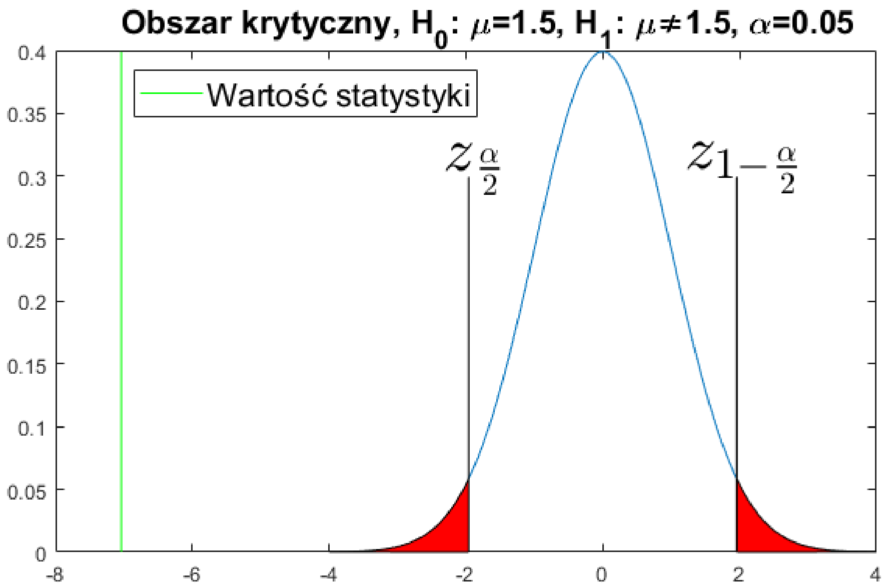
1. $n = \#X = 1000$
2. $\overline{X} \approx 1.45$
3. $z_{1-\alpha/2} \approx 1.96$
4. $Z = \sqrt{n}\frac{\overline{X}-1.5}{\sigma} \approx -7.04$

Kod programu można znaleźć na końcu pracy, w załączniku nr 1.

Dzięki tym wartościom widzimy, że zbiór krytyczny to (rys 1)

$$C = \{x : x \leq -1.96 \vee 1.96 \leq x\}$$

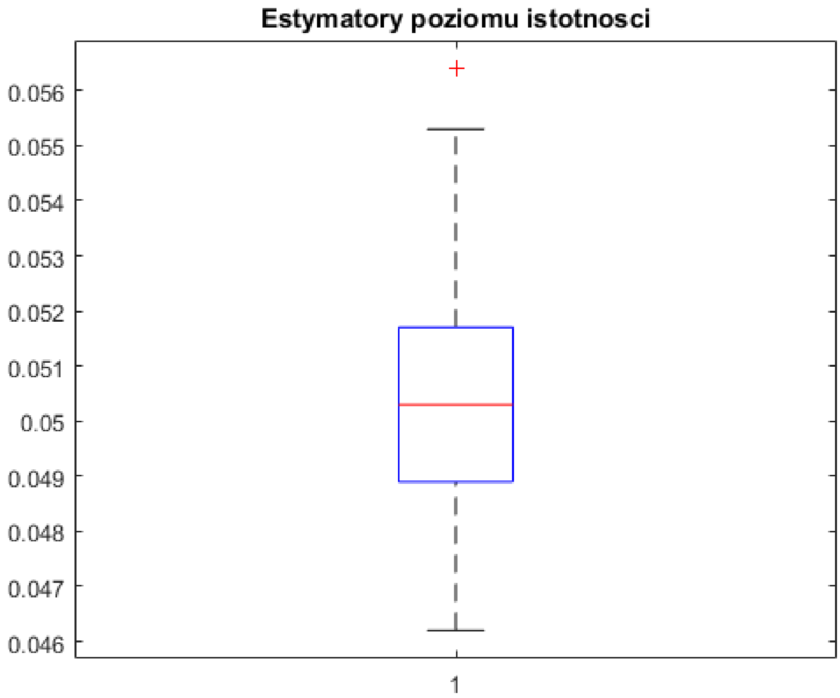
Ponieważ statystyka Z przyjęła wartość -7.04, która do niego należy, odrzucamy hipotezę



Rysunek 1: Obszar krytyczny dla $H_1 : \mu \neq 1.5$- na czerwono

zerową $H_0 : \mu = 1.5$ na rzecz hipotezy alternatywnej $H_1 : \mu \neq 1.5$

p-wartość okazała się tu ekstremalnie małą liczbą, bowiem $p = 1.9025 \cdot 10^{-12}$, więc możemy mieć sporą pewność co do naszego werdyktu. Przy okazji tego eksperymentu, postanowiłem wysymulować więcej (10 000) prób z rozkładu $N(1.5; 0.2)$ i sprawdzić ile razy nasz test stwierdził jakąś nieprawidłowość, mimo że w tych przypadkach hipoteza zerowa była prawdziwa. Tę czynność kazałem programowi wykonać 100 razy, za każdym razem zapisując w jakim odsetku sie mylił. Estymuję w ten sposób prawdopodobieństwo popełnienia błędu pierwszego rodzaju. Wyniki zaprezentowane na boxplocie są zadowalające, ponieważ wartość ta powinna estymować $\alpha = 0.05$.



Rysunek 2: Boxplot wartości estymatora poziomu istotności- podpunkt 1

W podobny sposób można estymować prawdopodobieństwo popełnienia błędu drugiego rodzaju- z jedną różnicą. Należy "zepsuć" prawdziwość tezy, zadając próbę
z rozkładu $N(1.5+\Delta;0.2)$, gdzie $\Delta \neq 0$. Prawdopodobieństwo popełnienia błędu drugiego rodzaju jest zależne od przyjętej wartości Δ, czyli od tego jak bardzo nasz rozkład odbiega od hipotetycznego. Im są bliżej siebie, tym test ma większe szanse na uznanie wartości za typowe. Zadałem cztery różne $\Delta = [-0.01, 0.01, 0.03, 3]$, żeby sprawdzić jak zachowają się te prawdopodobieństwa dla symetrycznie położonych rozkładów, jednego nieco bardziej odbiegającego, a jeszcze innego położonego zupełnie w innym miejscu. Mówiąc o błędach drugiego rodzaju warto wspomnieć o **mocy testu**. Jest to prawdopodobieństwo odrzucenia hipotezy zerowej, gdy jest fałszywa.Moc testu również zależy od tego jak bardzo rozkład który w rzeczywistości stoi za próbą jest odchylony od hipotetycznego. Obliczamy ją przy ustalonej Δ jako $\theta = 1-\mathrm{P(Bł\ 2)}$. Otrzymałem następujące wyniki:

Δ	-0.01	0.01	0.03	3
P(Bł 2)	0.892	0.889	0.436	0
θ	0.108	0.111	0.564	1

Tabela 1: Tabela prawdopodobieństw popełnienia błędu II rodzaju i mocy testów

Wyniki ładnie ilustrują, że test zachowuje się tak samo dla rozkładów odchylonych o tę samą wartość. Widać również, że prawdopodobieństwo pomyłki maleje gdy są od siebie bardziej odchylone, aż w pewnym momencie maleje tak bardzo, że numerycznie licząc jest to 0.

3.2 $H_1 : \mu > \mu_h$

Inną hipotezą alternatywną którą możemy się posłużyć jest powyższa hipoteza. Ta, w przeciwieństwie do poprzedniej jest jednostronna- wykrywa wahania statystyki tylko w jednym kierunku. Do konstrukcji testu użyjemy zatem przedziału jednostronnego. Postępując podobnie jak we wcześniejszej hipotezie można pokazać, że

$$P_{H_0}(Z \geq z_{1-\alpha}) = \alpha$$

Prawdopodobieństwo że statystyka Z przyjmie wartość większą od $z_{1-\alpha}$ jest równe α, a więc zbiór krytyczny przyjmie właśnie taką postać.

$$C = \{x : x \geq z_{1-\alpha}\}$$

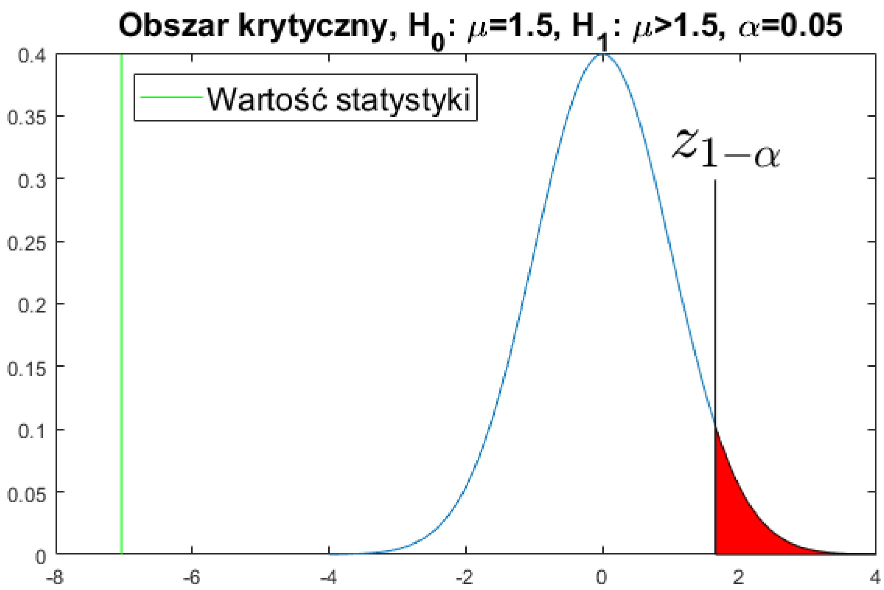
Natomiast p-wartość można tu opisać wzorem

$$p = 1 - \Phi(Z)$$

3.2.1 Przykład- zad.1.2

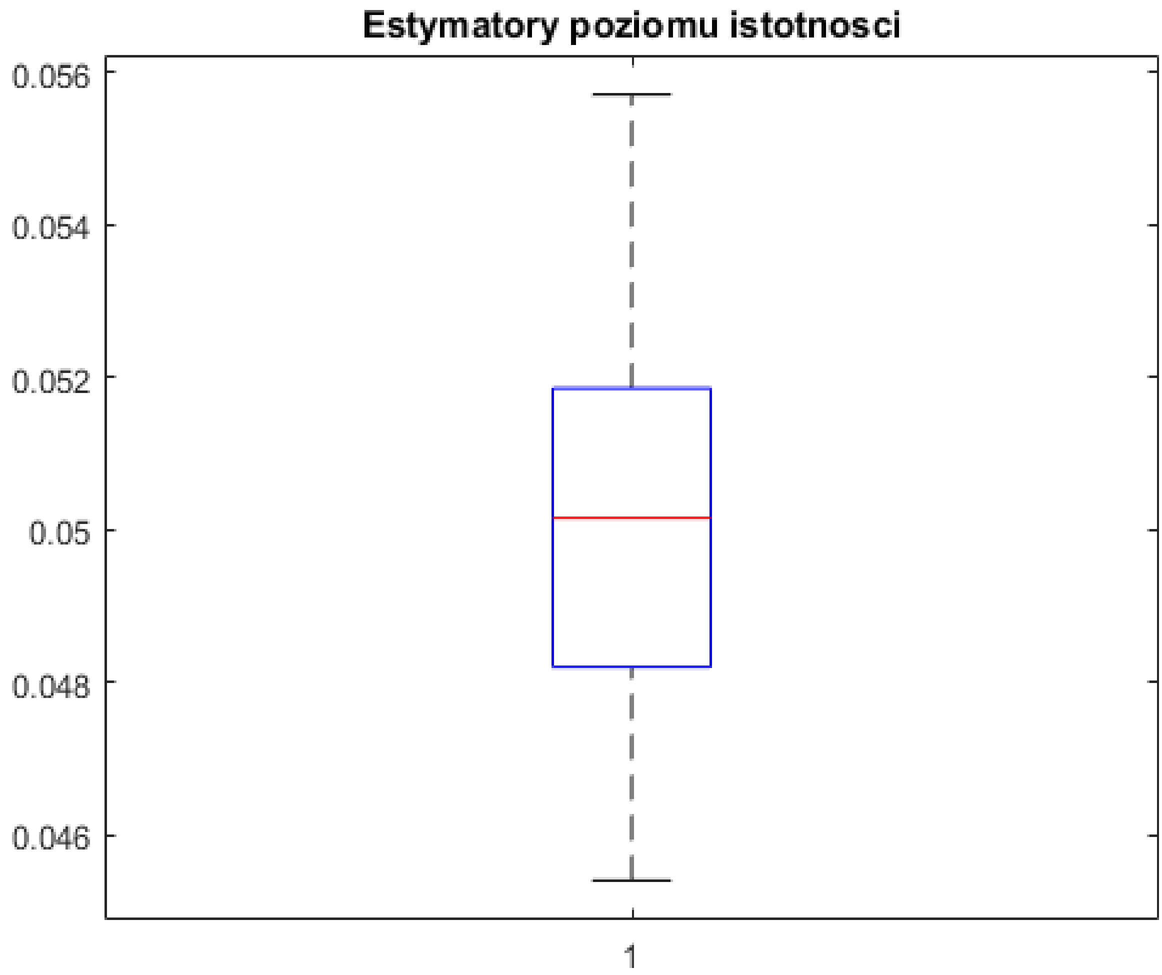
Przyjmijmy hipotezę alternatywną $H_0 > 1.5$. Wyliczamy:

1. $n = \#X = 1000$
2. $\overline{X} \approx 1.45$
3. $z_{1-\alpha} \approx 1.64$
4. $Z = \sqrt{n}\frac{\overline{X}-1.5}{\sigma} \approx -7.04$



Rysunek 3: Obszar krytyczny dla $H_1 : \mu > 1.5$- na czerwono

Na ilustracji (3) widzimy że w tym przypadku statystyka $Z \approx -7.04$ nie zawiera się w obszarze krytycznym $C = \{x : x \geq z_{1-\alpha}\}$, więc nie mamy podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej. p-wartość wyniosła $p = 1$, co absolutnie nie podważa wyniku próby. Sprawdziłem czy symulacyjnie zgadza się poziom istotności testu



Rysunek 4: Boxplot wartości estymatora poziomu istotności- podpunkt 2

Również tutaj nie można mieć zastrzeżeń, na rysunku (4) mediana wyników znajduje się w okolicy 0.05. Co z prawdopodobieństwem popełnienia błędu drugiego rodzaju i mocą testu? Przyjmując $\Delta = [0.05, 0.01, -0.01]$ otrzymujemy:

Δ	0.05	0.01	-0.01
P(Bł 2)	0.033	0.836	0.992
θ	0.967	0.164	0.008

Tabela 2: Tabela prawdopodobieństw popełnienia błędu II rodzaju i mocy testów

Widać tutaj problem jaki powstał przy wykonywaniu tego testu. Hipotez jednostronnych powinno się używać, kiedy ma się absolutną pewność, że badany parametr nie może znaleźć się po drugiej stronie. Prawdą jest, że nie mamy podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej, ale na pierwszy rzut oka widać, że jest nieprawdziwa- czego test nie wykazał. Obrazuje to dobrze trzecia kolumna tabeli (2). Widać z niej, że test jest kompletnie bezbronny, gdy zawiedzie nasze założenie, że μ spełnia jedną z hipotez. Program Matlabowski można znaleźć w załączniku.

3.3 $H_1 : \mu < \mu_h$

Teraz sytuacja jest symetryczna do poprzedniego podpunktu, więc nie powinny dziwić następujące postacie równań i przedziałów:

$$P_{H_0}(Z \leq z_\alpha) = \alpha$$

$$C = \{x : x \leq z_\alpha\}$$

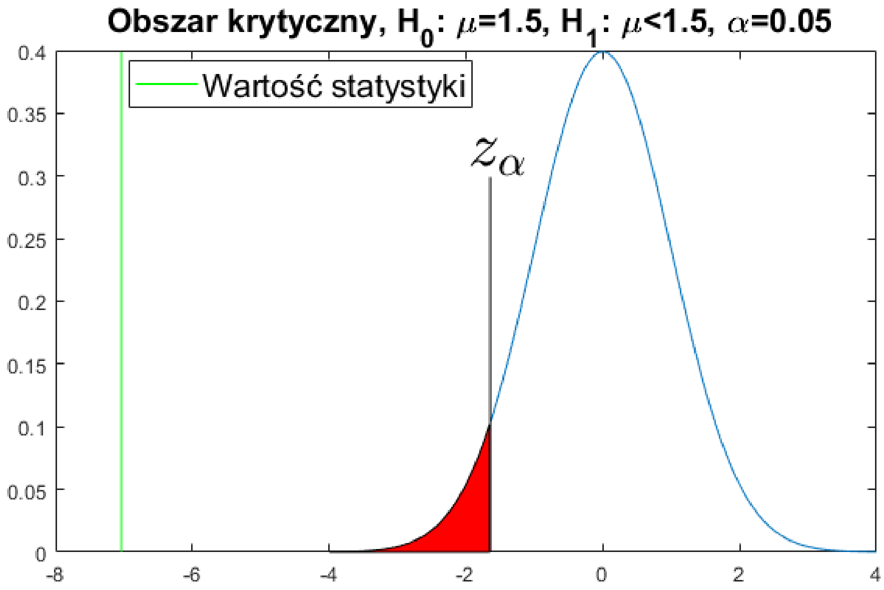
$$p = \Phi(Z)$$

3.3.1 Przykład- zad.1.3

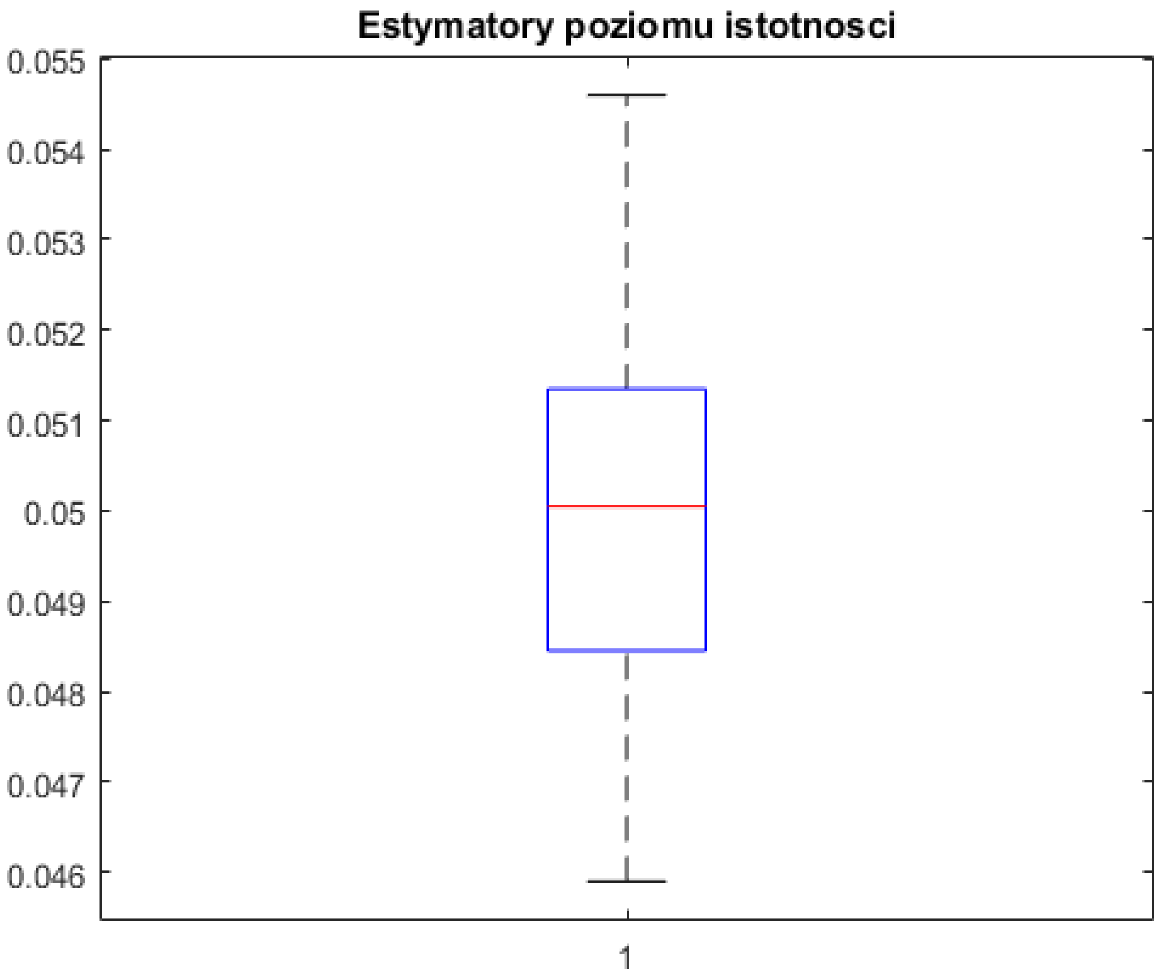
Rozważmy hipotezę alternatywną $H_1 : \mu < 1.5$ Wyliczając odpowiednie parametry otrzymujemy:

1. $n = \#X = 1000$
2. $\overline{X} \approx 1.45$
3. $z_\alpha \approx -1.64$
4. $Z = \sqrt{n}\frac{\overline{X}-1.5}{\sigma} \approx -7.04$

Tym razem statystyka $Z \approx -7.04$ wpadła głęboko w przedział $(-\infty; -1.64)$, który jak widać na rysunku (5) jest tu obszarem krytycznym. Zatem test sugeruje odrzucenie hipotezy zerowej na rzecz hipotezy alternatywnej. Zobaczmy co na ten temat mogą nam powiedzieć inne parametry. $p = 9.5124 \cdot 10^{-13}$, co mówi nam o tym, że statystyka przyjęła niespotykaną wartość, jeśli hipoteza zerowa byłaby prawdziwa. Jakie jest prawdopodobieństwo, że hipoteza była jednak prawdziwa, a my ją odrzuciliśmy? W teorii jest to 0.05, z czym zgadza się symulacja na rysunku (6)



Rysunek 5: Obszar krytyczny dla $H_1 : \mu < 1.5$- na czerwono



Rysunek 6: Boxplot wartości estymatora poziomu istotności- podpunkt 3

Natomiast przyjmując $\Delta = [-0.05, -0.03, -0.01]$ otrzymujemy następujące prawdopodobieństwa popełnienia błędu II rodzaju, oraz moce testu.

Δ	-0.05	-0.03	-0.01
P(Bł 2)	0.030	0.316	0.829
θ	0.970	0.684	0.171

Tabela 3: Tabela prawdopodobieństw popełnienia błędu II rodzaju i mocy testów

Podsumowując ten test, zdecydowanie należy odrzucić hipotezę zerową $H_0 : \mu = 1.5$ na rzecz hipotezy alternatywnej $H_1 : \mu < 1.5$.

4 Test dla wariancji przy znanej średniej

Przy tych testach nie zmienia się ogólna zasada ich konstrukcji. Jedyne co może sprawić problem, to wyznaczenie przedziału ufności. Korzysta się tutaj bowiem nie z rozkładu normalnego, ale z rodziny rozkładów χ^2 Jeżeli elementy próby losowej $\mathbf{X}$ pochodzą z rozkładu normalnego, oraz są niezależne, to zmienna losowa

$$Z = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{X_i - \overline{X}}{\sigma} \right)^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \tag{2}$$

ma rozkład χ^2 z $n-1$ stopniami swobody, gdzie S^2 jest wariancją z próby, a n długością próby. W dalszych rozważaniach przyjmijmy, że próba którą dysponujemy pochodzi właśnie z rozkładu normalnego, o znanej średniej μ, a nieznanej wariancji σ^2. Wszystko co było powiedziane wyżej o testach dla wartości średniej może być przeniesione tutaj, z jedną modyfikacją- zamiast kwantyli rozkładu normalnego należy używać kwantyli rozkładu chi kwadrat z $n-1$ stopniami swobody. Przyjmijmy prostą hipotezę zerową $H_0 : \sigma^2 = 1.5$. Zweryfikujmy ją na poziomie istotności $\alpha = 0.05$.

4.1 $H_1 : \sigma^2 \neq 1.5$

Zakładając taką hipotezę alternatywną staramy się odrzucić odstające obserwacje statystyki testowej Z z obu stron. Można zapisać równość

$$P_{H_0}(\chi^2_{\alpha/2,n-1} < Z < \chi^2_{1-\alpha/2,n-1}) = 1 - \alpha \tag{3}$$

Z czego wynika, że będziemy odrzucać wartości statystyki znajdujące się w przedziale

$$C = \{Z \le \chi^2_{\alpha/2,n-1} \vee Z \ge \chi^2_{1-\alpha/2,n-1}\} \tag{4}$$

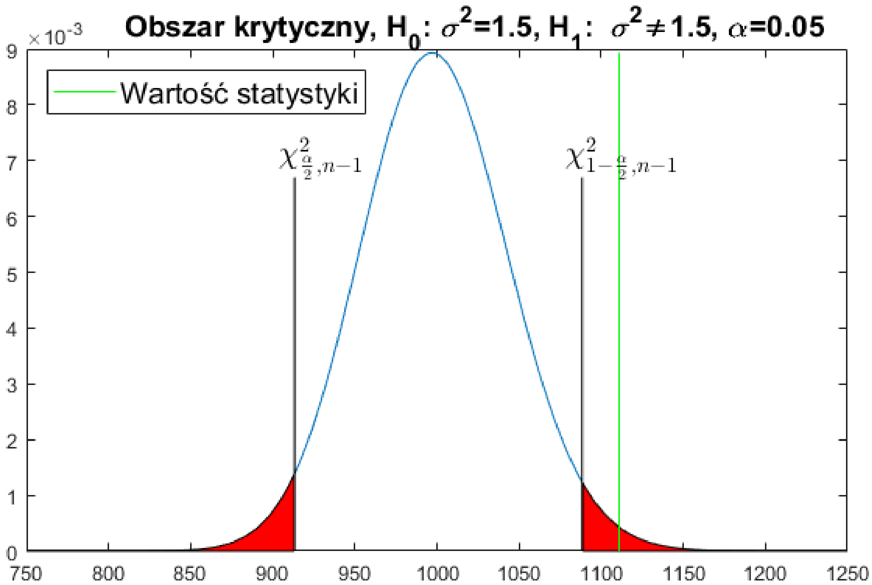
Wyrażenie na p-wartość przyjmuje tu nieco bardziej skomplikowaną postać, ponieważ rozkład nie jest symetryczny względem zera. Można zapisać mianowicie, że

$$p = 1 - F_{\chi^2_{n-1}}(|Z - \chi^2_{0.5,n-1}| + \chi^2_{0.5,n-1})$$

Ten wzór przypomina wzór na p-wartość w pierwszym teście dla wartości średniej, ale ma inne kwantyle- ponieważ używamy innego rozkładu, oraz jest przesunięty o $\chi^2_{0.5,n-1}$, czyli o jego oś symetrii. Licząc odpowiednie wartości w Matlabie otrzymujemy:

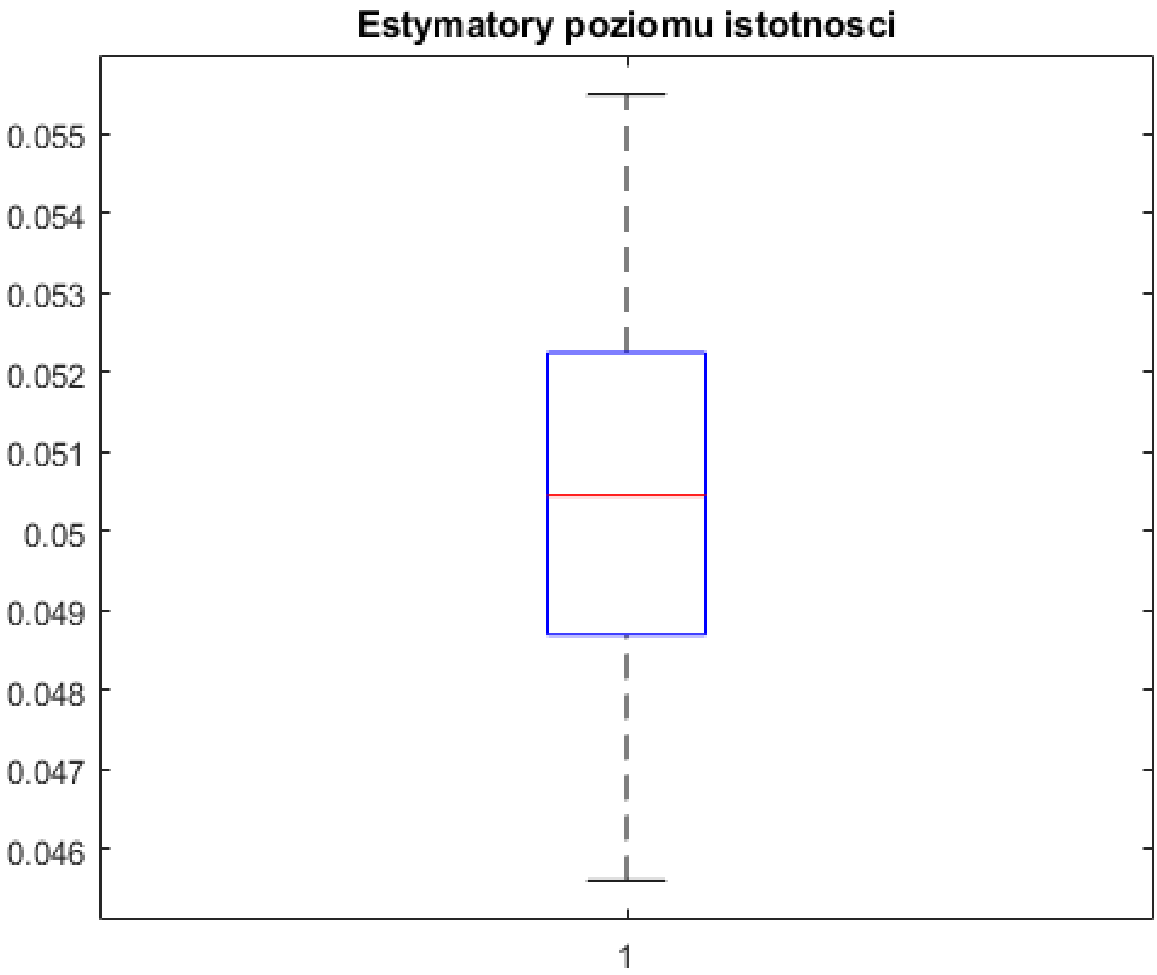
1. $n = \#X = 1000$
2. $S^2 \approx 1.668$
3. $\chi^2_{1-\alpha/2,n-1} \approx 1088.5$
4. $\chi^2_{\alpha/2,n-1} \approx 913.301$
5. $Z = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \approx 1111$

Zatem obszar krytyczny to zbiór $C = \{Z \le 913.301 \vee Z \ge 1088.5\}$ Jak widać na rysunku (7)



Rysunek 7: Obszar krytyczny dla $H_1 : \sigma^2 \neq 1.5$- na czerwono

statystyka Z trafiła do zbioru krytycznego, co sugeruje odrzucenie hipotezy zerowej. p-wartość wyniosła 0.015. Symulacyjnie poziom istotności zgadza się, co jest przedstawione na rysunku (8)



Rysunek 8: Boxplot wartości estymatora poziomu istotności- podpunkt 1

Biorąc $\Delta = [0.01, 0.05, 0.1]$, które w tym przypadku jest przesunięciem wariancji, otrzymujemy następujące wartości prawdopodobieństwa błędu II rodzaju oraz mocy testu:

Δ	0.01	0.05	0.1
P(Bł 2)	0.93	0.56	0.06
θ	0.07	0.44	0.94

Tabela 4: Tabela prawdopodobieństw popełnienia błędu II rodzaju i mocy testów

4.2 $H_1 : \sigma^2 > 1.5$

Postępując analogicznie do poprzednich przykładów, tutaj zbiór krytyczny przyjmuje postać:

$$C = \{x : x \geq \chi^2_{1-\alpha,n-1}\}$$

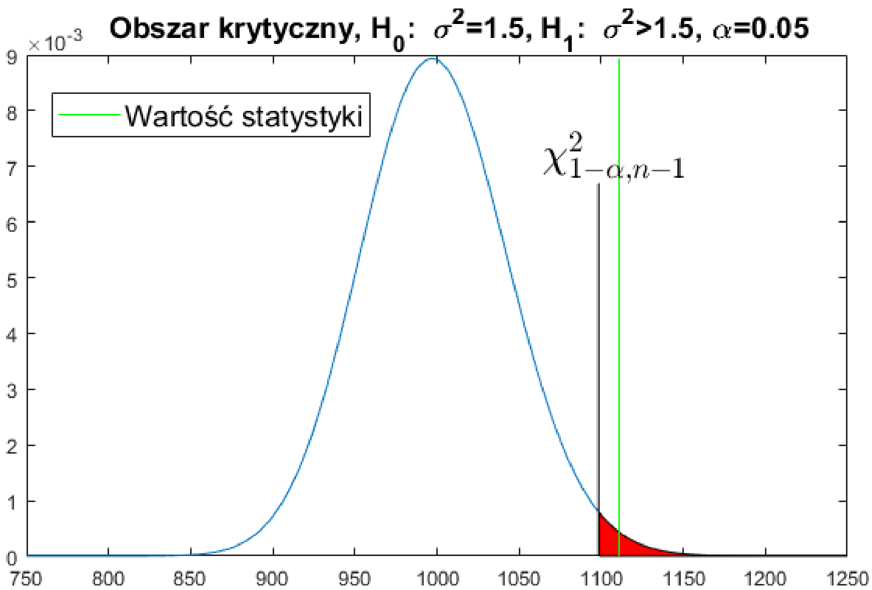
A p-wartość można wyliczyć jako

$$p = 1 - F_{\chi^2_{n-1}}(Z)$$

Wyliczając otrzymujemy:

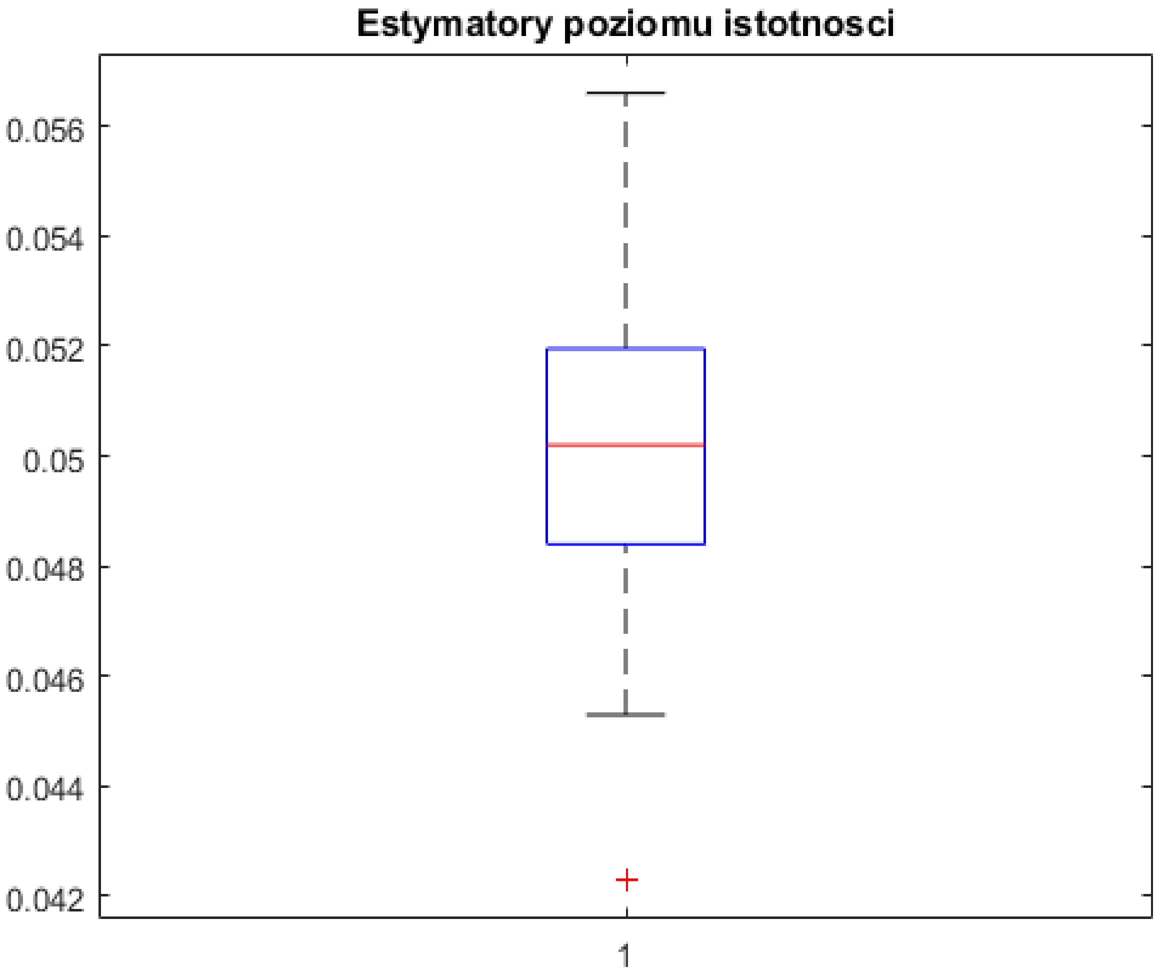
1. $n = \#X = 1000$
2. $S^2 \approx 1.668$
3. $\chi^2_{1-\alpha,n-1} \approx 1098.5$
4. $Z = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \approx 1111$

Zatem obszar krytyczny przyjmuje postać $C = \{x : x \geq 1098.5\}$, co ilustruje rysunek (9) Statystyka Z trafiła do zbioru krytycznego, więc będziemy odrzucać hipotezę zerową, na ko-



Rysunek 9: Obszar krytyczny dla $H_1 : \sigma^2 > 1.5$- na czerwono

rzyść hipotezy alternatywnej $H_1 : \sigma^2 > 1.5$. p-wartość wyniosła 0.0075. Symulacyjnie poziom istotności pokrywa się z rzeczywistym, co widać na rysunku (10)



Rysunek 10: Boxplot wartości estymatora poziomu istotności- podpunkt 2

Biorąc $\Delta = [0.01, 0.05, 0.1]$ otrzymujemy następujące wartości prawdopodobieństwa błędu II rodzaju oraz mocy testu:

Δ	0.01	0.05	0.1
P(Bł 2)	0.89	0.43	0.03
θ	0.11	0.57	0.97

Tabela 5: Tabela prawdopodobieństw popełnienia błędu II rodzaju i mocy testów

4.3 $H_1 : \sigma^2 < 1.5$

Postępując analogicznie do poprzednich przykładów, tutaj zbiór krytyczny przyjmuje postać:

$$C = \{x : x \leq \chi^2_{\alpha,n-1}\}$$

A p-wartość można wyliczyć jako

$$p = F_{\chi^2_{n-1}}(Z)$$

Wyliczając otrzymujemy:

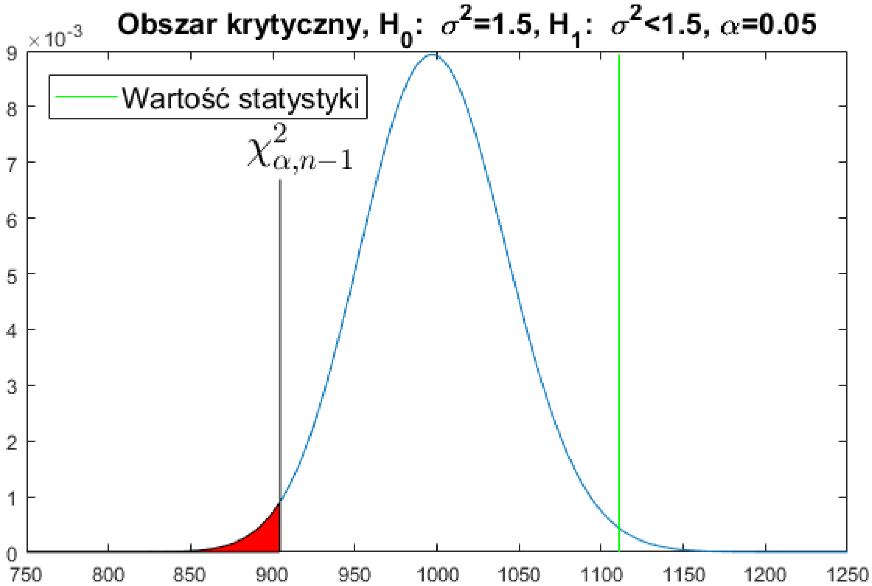
1. $n = \#X = 1000$

2. $S^2 \approx 1.668$

3. $\chi^2_{\alpha,n-1} \approx 904.48$

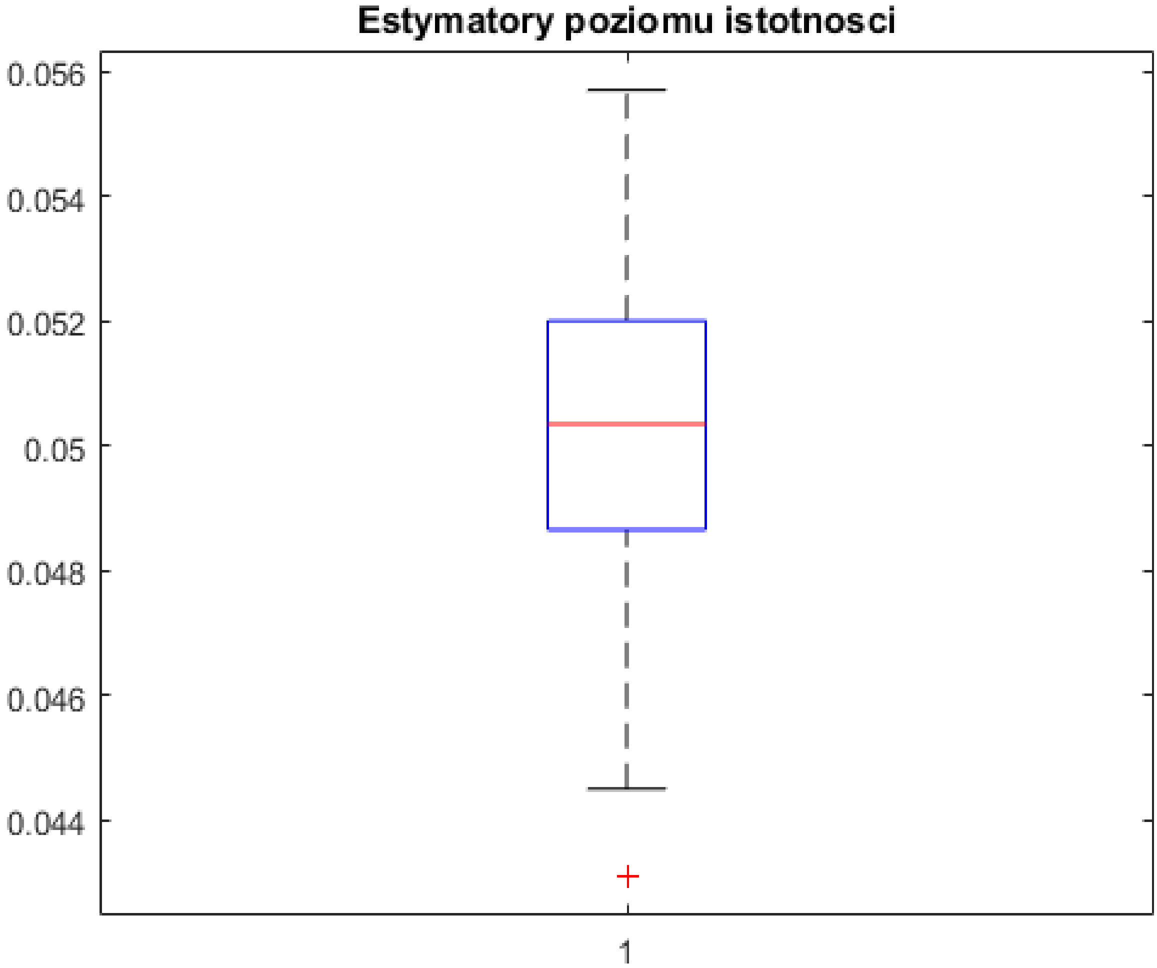
4. $Z = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \approx 1111$

Zatem obszar krytyczny przyjmuje postać $C = \{x : x \leq 904.48\}$, co ilustruje rysunek (11) Statystyka Z nie trafiła do zbioru krytycznego, więc nie ma podstaw by odrzucać hipotezę



Rysunek 11: Obszar krytyczny dla $H_1 : \sigma^2 < 1.5$- na czerwono

zerową. p-wartość wyniosła 0.9925. Symulacyjnie poziom istotności pokrywa się z rzeczywistym, co widać na rysunku (12)



Rysunek 12: Boxplot wartości estymatora poziomu istotności- podpunkt 2

Biorąc $\Delta = [0.01, 0.05, 0.1]$ otrzymujemy następujące wartości prawdopodobieństwa błędu II rodzaju oraz mocy testu:

Δ	-0.01	-0.05	-0.1
P(Bł 2)	0.89	0.41	0.02
θ	0.11	0.59	0.98

Tabela 6: Tabela prawdopodobieństw popełnienia błędu II rodzaju i mocy testów

5 Podsumowanie

Testując dane na poziomie istotności 0.05 mogę ze sporą dozą pewności stwierdzić, że pierwszy zestaw pochodził rozkładu normalnego o średniej mniejszej od 1.5, a drugi z rozkładu normalnego o wariancji większej niż 1.5. Wartości p-wartości przy odpowiednich testach utwierdzają mnie w tym przekonaniu, a wartości mocy testów i sposób ich reakcji na zmianę estymowanego parametru sugeruje, że nasza próbka całkiem dobrze odzwierciedlała rozkład z którego pochodzi, usuwając ostatki wątpliwości.

6 Kody programów

6.1 Test dla wartości średniej na przykładzie podpunktu 1

```
clear all
% Pobieranie danych - kod generowany przez Matlaba
filename = 'C:\Users\Piotr\Desktop\Classes\Semestr_4\Statystyka_stosowana\Programy_z_zaj
delimiter = ' ';
formatSpec = '%f%[^\n\r]';
fileID = fopen(filename,'r');
dataArray = textscan(fileID, formatSpec, 'Delimiter', delimiter, 'MultipleDelimsAsOne',
fclose(fileID);
Data1 = dataArray{:, 1};
clearvars filename delimiter formatSpec fileID dataArray ans;

%parametry
a=.05;
s=0.2;
m=mean(Data1);
n1=length(Data1);

t=-4:.01:4;
y=normpdf(t,0,1);
```

```
%obszar1
Z=(m-1.5)*sqrt(n1)/s;

tl=t(t<=-norminv(1-a/2));
yl=normpdf(tl,0,1);
tl=[tl tl(end)];
yl=[yl 0];
tr=t(t>=norminv(1-a/2));
yr=normpdf(tr,0,1);
tr=[tr(1) tr];
yr=[0 yr];

plot(t,y)
hold on
fill(tl,yl,'r')
fill(tr,yr,'r')
l=line([Z,Z],[min(y),max(y)],'Color','g');
line([norminv(a/2),norminv(a/2)],[min(y),0.75*max(y)],'Color','black');
line([norminv(1-a/2),norminv(1-a/2)],[min(y),0.75*max(y)],'Color','black');
txt={'$z_{\frac{\alpha}{2}}$'};
text(norminv(a/2)-.07,0.75*max(y)+.01,txt,'Interpreter','latex','Fontsize',15)
txt={'$z_{1-\frac{\alpha}{2}}$'};
text(norminv(1-a/2)-.07,0.75*max(y)+.01,txt,'Interpreter','latex','Fontsize',15)
legend(l,'Wartość statystyki')
title('Obszar krytyczny, H_{0}: \mu=1.5, H_{1}: \mu\neq1.5, \alpha=0.05')

%p-wartosc
p(1)=2*(1-normcdf(abs(Z)));
```

6.2 Test dla wariancji na przykładzie podpunktu 2

```
clear all
% Pobieranie danych - kod generowany przez Matlaba
```

```
filename = 'C:\Users\Piotr\Desktop\Classes\Semestr_4\Statystyka_stosowana\Programy_
delimiter = ' ';
formatSpec = '%f%[^\n\r]';
fileID = fopen(filename,'r');
dataArray = textscan(fileID, formatSpec, 'Delimiter', delimiter, 'MultipleDelimsAsO
fclose(fileID);
Data2 = dataArray{:, 1};
clearvars filename delimiter formatSpec fileID dataArray ans;

a=0.0150;
m=0.2;
n2=length(Data2);
t=linspace(.75*n2,1.25*n2,1000);
y=chi2pdf(t,n2-1);
plot(t,y)

Z=(n2-1)*var(Data2)/1.5;

%obszar2
figure
plot(t,y)
hold on
tkr=t(t>=chi2inv(1-a,n2-1));
ykr=chi2pdf(tkr,n2-1);
fill([tkr(1) tkr tkr(end)],[0 ykr 0],'r')
l=line([Z,Z],[min(y),max(y)],'Color','g');
line([chi2inv(1-a,n2-1),chi2inv(1-a,n2-1)],[min(y),0.75*max(y)],'Color','black');
txt={'$\chi^{2}_{1-\alpha,n-1}$'};
text(chi2inv(1-a,n2-1)-10,.79*max(y),txt,'Interpreter','latex','Fontsize',15)
legend(l,'Wartość statystyki')
title('Obszar krytyczny, H_{0}:  \sigma^{2}=1.5, H_{1}:  \sigma^{2}>1.5, \alpha=0.0
p(2)=1-chi2cdf(Z,n2-1);
```

6.3 Błąd pierwszego rodzaju- na przykładzie zad. 1.3

```
function Pr_Bledu1=Blad_Pierwszego(Zadanie,Podpunkt,N)
  a=.05;
  Pr_Bledu1=zeros(1,N);
  %Pobieranie danych
  filename = 'C:\Users\Piotr\Desktop\Classes\Semestr_4\Statystyka_stosowana\Programy_z_z
  delimiter = ' ';
  formatSpec = '%f%[^\n\r]';
  fileID = fopen(filename,'r');
  dataArray = textscan(fileID, formatSpec, 'Delimiter', delimiter, 'MultipleDelimsAsOne'
  fclose(fileID);
  Data = dataArray{:, 1};
  clearvars filename delimiter formatSpec fileID dataArray ans;
  n=length(Data);
  z=norminv(a);

  for i=1:N
     D=normrnd(1.5,sqrt(.2),1,n);
     Z=(mean(D)-1.5)*sqrt(n)/sqrt(.2);
     Pr_Bledu1(i)=Z<z;
  end
  Pr_Bledu1=mean(Pr_Bledu1);
end

% FUNKCJA RYSUJĄCA BOXPLOT
function Boxy(n)
  r=zeros(1,n);
  for i=1:n
    r(i)=Blad_Pierwszego(1,3,10000);
```

```
  end
  boxplot(r)
end
```

6.4 Bład drugiego rodzaju na przykładzie zad. 2.2

```
function Pr_Bledu2=Blad_Drugiego(Zadanie,Podpunkt,delta,N)
a=.05;
Pr_Bledu2=zeros(1,N);
filename = 'C:\Users\Piotr\Desktop\Classes\Semestr_4\Statystyka_stosowana\Programy_z_zaj
delimiter = ' ';
formatSpec = '%f%[^\n\r]';
fileID = fopen(filename,'r');
dataArray = textscan(fileID, formatSpec, 'Delimiter', delimiter, 'MultipleDelimsAsOne',
fclose(fileID);
Data = dataArray{:, 1};
clearvars filename delimiter formatSpec fileID dataArray ans;
n=length(Data);
z=chi2inv(1-a,n-1);
for i=1:N
  D=normrnd(0.2,sqrt(1.5)+delta,1,n);
  Z=(n-1)*var(D)/1.5;
  Pr_Bledu2(i)=Z<=z;
end
Pr_Bledu2=mean(Pr_Bledu2);
end
```