Kopuły w analizie wielowymiarowych danych finansowych.

Piotr Mikler

O czym dzisiaj?

1. Kopuły- po co?.
2. Kopuły - co to?.
3. Bivariate Copulas.
4. Struktury R-Vine.
5. Możliwe kierunki badań.
6. Q&A.

Motywacja

Historical Correlation[1]: January 2011–December 2020

	Positive	Negative
High	0.7-1.0	(0.7)-(1.0)
Moderate	0.4-0.7	(0.4)-(0.7)
Low	0.0-0.4	(0.0)-(0.4)

	Investment Grade Bonds	Cash	Commodities	Currencies	Equity Market Neutral	Event Driven	Global	Hedge Funds	International Equity
Investment Grade Bonds	1.00								
Cash	0.12	1.00							
Commodities	(0.17)	(0.12)	1.00						
Currencies	(0.04)	(0.03)	(0.47)	1.00					
Equity Market Neutral	0.05	(0.15)	0.35	(0.58)	1.00				
Event Driven	(0.05)	(0.25)	0.65	(0.33)	0.39	1.00			
Global	(0.03)	(0.16)	0.60	(0.49)	0.42	0.83	1.00		
Hedge Funds	0.10	(0.22)	0.60	(0.36)	0.50	0.91	0.84	1.00	
International Equity	(0.02)	(0.15)	0.60	(0.57)	0.45	0.80	0.96	0.81	1.00

Źródło: Guggenheim Investments.

Kryzys finansowy 2007-2009r.

FELIX SALMON BUSINESS 02.23.2009 12:00 PM

Recipe for Disaster: The Formula That Killed Wall Street

In the mid-'80s, Wall Street turned to the quants—brainy financial engineers—to invent new ways to boost profits. Their methods for minting money worked brilliantly... until one of them devastated the global economy.

Kopuły dwuwymiarowe

Definicja (Kopuła)

d- wymiarowa kopuła C to dystrybuanta wielowymiarowego rozkładu o jednostajnych rozkładach brzegowych, określonego na d-wymiarowym hiperszcześcianie $[0,1]^d$.

Twierdzenie (Gęstość kopuły)

Gęstość kopuły c (dla kopuł absolutnie ciągłych) otrzymujemy poprzez pochodne cząstkowe, tzn.

$$c(u_1,\ldots,u_d) = \frac{\partial^d}{\partial u_1,\ldots,\partial u_d} C(u_1,\ldots,u_d).$$

Przykład

Definicja (Kopuła Claytona)

Kopułą Claytona o parametrze $\theta \in [0; \infty)$ *nazywamy:*

$$C(u_1, u_2; \theta) = \left(u_1^{-\theta} + u_2^{-\theta} - 1\right)^{-\frac{1}{\theta}}.$$

Jej gęstość zadana jest więc przez:

$$c(u_1, u_2; \theta) = (1 + \theta)(u_1^{-\theta} + u_2^{-\theta} - 1)^{-\frac{1+2\theta}{\theta}}(u_1 u_2)^{-(\theta+1)},$$

gdzie w obu funkcjach $(u_1, u_2) \in [0, 1]^2$*.*

Przykład

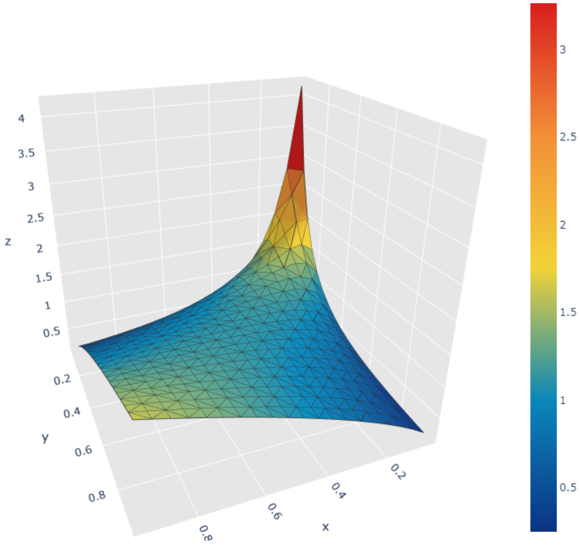


Figure: Kopuła Claytona, $\theta = 0.75$

Gęstości kopuł

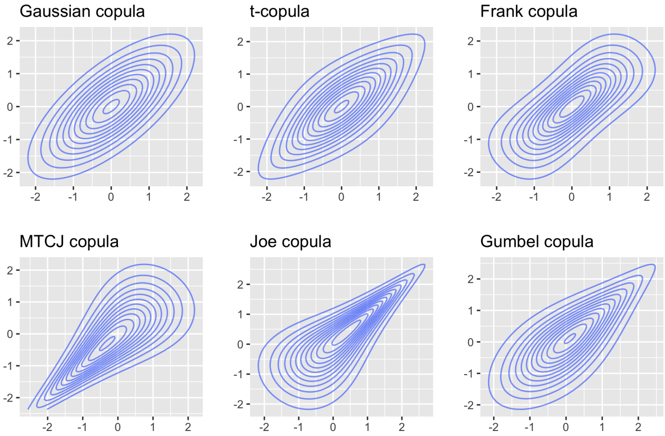


Figure: Gęstości wybranych kopuł.

Źródło: https://bochang.me/blog/posts/copula/

Kopuły dwuwymiarowe

Definicja (Kopuła)

d- wymiarowa kopuła C to dystrybuanta wielowymiarowego rozkładu o ***jednostajnych rozkładach brzegowych****, określonego na d-wymiarowym hipersześcianie $[0,1]^d$.*

Twierdzenie (Probability integral transform)

Jeśli X jest ciągłą zmienną losową o dystrybuancie $F(x)$, to $U := F(X)$ ma rozkład jednostajny.

Probability integral transform

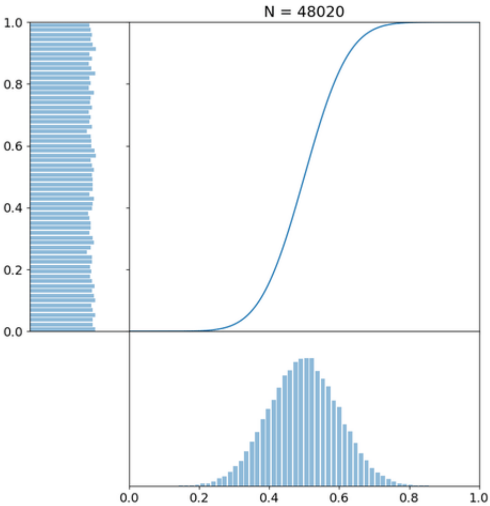
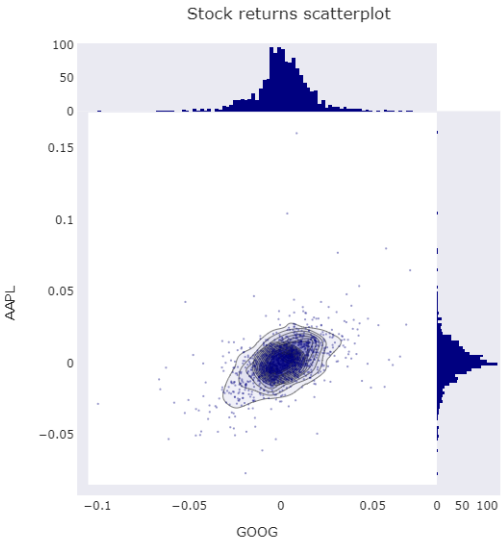
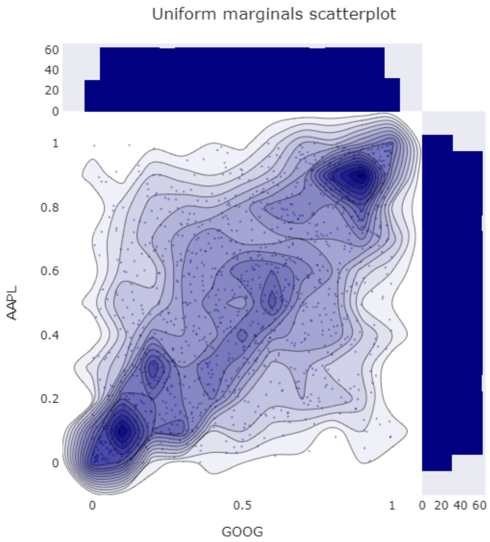


Figure: Transformacja zmiennej normalnej.

Kopuły dwuwymiarowe



Kopuły dwuwymiarowe



Kopuły dwuwymiarowe

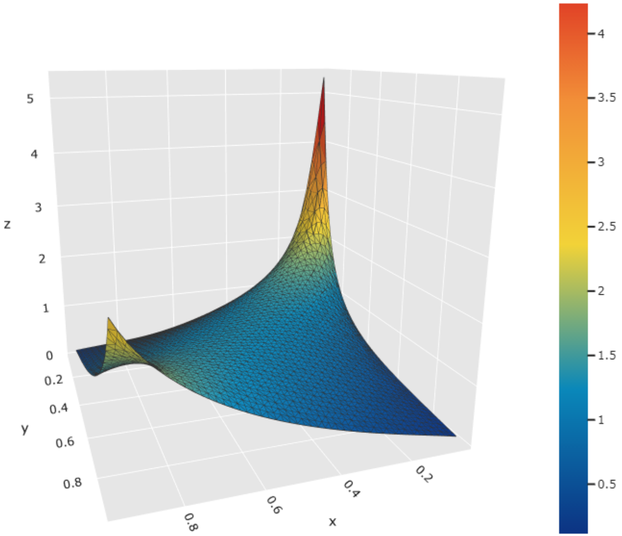


Figure: Kopuła Gumbela, *Rotacja* : $180^\circ, \theta = 1.61$

Struktury R-vine

Co w przypadku rozkładów wielowymiarowych (d>2) ?

Definicja (Pair-Copula Contruction (PCC))

Pair copula construction to dekompozycja wielowymiarowego rozkładu na komponenty jednowymiarowe, połączone już tylko dwuwymiarowymi kopułami.

Definicja (PCC typu D-vine)

Każda gęstość łączna $f_{1,\dots,d}$ może być zdekomponowana jako:

$$f_{1,\dots,d}(x_1,\dots,x_d) = \left[\prod_{j=1}^{d-1}\prod_{i=1}^{d-j} c_{i,(i+j);(i+1)\dots(i+j-1)}\right]\cdot\left[\prod_{k=1}^{d} f_k(x_k)\right]$$

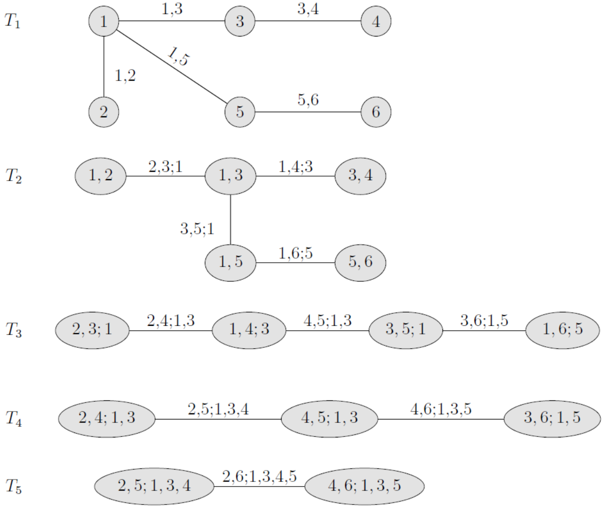
PCC (przykład)

Rozważmy rozkład 6-wymiarowy $[X_1, \ldots, X_6]$ o gęstości $f_{123456}(x_1, \ldots, x_6)$. Dekompozycji (jednej z ok. 23 tyś. możliwych!) można dokonać następująco:

$$
\begin{aligned}
f_{123456}(x_1, \ldots, x_6) = & c_{26;1345} \cdot \\
& \cdot c_{25;134} \cdot c_{46;135} \cdot \\
& \cdot c_{45;13} \cdot c_{24;13} \cdot c_{36;15} \cdot \\
& \cdot c_{35;1} \cdot c_{14;3} \cdot c_{23;1} \cdot c_{16;5} \cdot \\
& \cdot c_{15} \cdot c_{34} \cdot c_{13} \cdot c_{12} \cdot c_{56} \cdot \\
& \cdot f_6 \cdot f_5 \cdot f_4 \cdot f_3 \cdot f_2 \cdot f_1 .
\end{aligned}
$$

Przez $c_{ij;klm}$ oznaczamy gęstość (dwuwymiarowej!) kopuły łączącej rozkłady warunkowe $X_i|X_k, X_l, X_m$ oraz $X_j|X_k, X_l, X_m$.

Struktury R-vine



Źródło: C.Czado, Analyzing Dependent Data with Vine Copulas

Dalsze rozwinięcia konstrukcji kopułowych

- Rozkłady brzegowe zadane pewną strukturą (np. ARIMA, GARCH, itp.)
- Markov-switching copulas/ kopuła zmieniająca się w czasie
- Copula process

Copula process - idea

Myśląc o procesie Wienera jako kolekcji zmiennych losowych o rozkładach normalnych, można próbować odzyskać strukturę zależności między nimi przy pomocy kopuły.

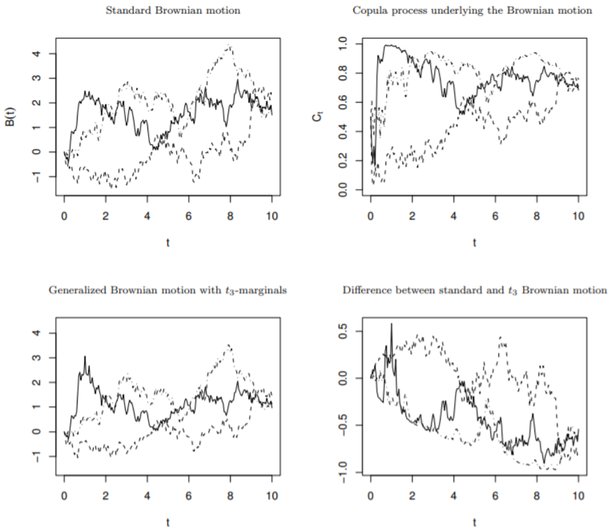
Definicja (Kopuła Browna)

Kopuła Browna to struktura zależności generowana przez proces Wienera. Możemy opisać ją za pomocą gęstości:

$$c^B_{s,t}(u,v) = \sqrt{\frac{t}{t-s}}\frac{\varphi\left((\sqrt{t}\Phi^{-1}(v) - \sqrt{s}\Phi^{-1}(u))/\sqrt{t-s}\right)}{\varphi(\Phi^{-1}(v))},$$

gdzie s, t to indeksy czasowe, a Φ, φ to dystrybuanta i gęstość standardowego rozkładu normalnego.

Kopuła Browna - idea



Źródło: V. Schmitz, Copulas and Stochastic Processes (2003).

Pora na pytania

Dziękuję bardzo za uwagę!