

Robin J. Wilson

**WPROWADZENIE
DO TEORII
GRAFÓW**

Z języka angielskiego przełożył
Wojciech Guzicki

Wydanie drugie



WYDAWNICTWO NAUKOWE PWN
WARSZAWA 2007

Dane oryginału

Introduction to Graph Theory
Robin J. Wilson
Fourth edition

© Robin Wilson 1972, 1996

This translation of *Introduction to Graph Theory*, Fourth Edition is published by arrangement with Addison Wesley Longman Limited, London.

Projekt okładki i stron tytułowych **Małgorzata Podziomek**

Redaktor **Agnieszka Grabarczyk**

Redaktor techniczny **Beata Stelęgowska**

Korekta **Małgorzata Kopczyńska**

Copyright © for the Polish edition by
Wydawnictwo Naukowe PWN SA
Warszawa 1998

ISBN 978-83-01-15066-2

Wydawnictwo Naukowe PWN SA
00-251 Warszawa, ul. Miodowa 10
tel. 022 69 54 321
faks 022 69 54 031
e-mail: pwn@pwn.com.pl
www.pwn.pl

Wydawnictwo Naukowe PWN SA
Wydanie drugie, 3 dodruk
Arkuszy drukarskich 14
Druk ukończono w styczniu 2007 r.
Druk i oprawa: Wrocławska Drukarnia Naukowa PAN
im. St. Kulczyńskiego Sp. z o.o.

Spis treści

Przedmowa do nowego wydania	7	7. Digrafy	135
Wykaz oznaczeń	9	22. Definicje	135
1. Wprowadzenie	11	23. Digrafy eulerowskie i turnieje .	141
1. Co to jest graf?	11	24. Łańcuchy Markowa	146
2. Definicje i przykłady	19	8. Skojarzenia, małżeństwa i twierdzenie Mengera	151
2. Definicje	19	25. Twierdzenie Halla o kojarzeniu małżeństw	151
3. Przykłady	29	26. Teoria transwersal	155
4. Trzy łamigłówki	35	27. Zastosowania twierdzenia Halla	159
3. Drogi i cykle	41	28. Twierdzenie Mengera	163
5. Spójność	41	29. Przepływy w sieciach	169
6. Grafy eulerowskie	47	9. Matroidy	176
7. Grafy hamiltonowskie	53	30. Wprowadzenie do matroidów .	176
8. Kilka algorytmów	56	31. Przykłady matroidów	180
4. Drzewa	63	32. Matroidy i grafy	185
9. Własności drzew	63	33. Matroidy i transwersale	191
10. Zliczanie drzew	68	10. Dodatek	196
11. Dalsze zastosowania	74	Bibliografia	197
5. Planarność	82	Rozwiązania wybranych ćwiczeń .	200
12. Grafy planarne	82	Skorowidz	220
13. Twierdzenie Eulera	89		
14. Grafy na innych powierzchniach	95		
15. Grafy dualne	99		
16. Grafy nieskończone	105		
6. Kolorowanie grafów	110		
17. Kolorowanie wierzchołków	110		
18. Twierdzenie Brooksa	117		
19. Kolorowanie map	119	Dalej moja książeczko! podążaj swą drogą!	
20. Kolorowanie krawędzi	125	Dalej, by radować szlachetnych i dobrych!	
21. Wielomiany chromatyczne	130	WILLIAM WORDSWORTH	



Przedmowa do nowego wydania

W ostatnich latach teoria grafów ugruntowała swoją pozycję jako ważne narzędzie matematyczne w wielu różnych dziedzinach, od rachunku operacyjnego i chemii po genetykę i lingwistykę oraz od elektroniki i geografii po socjologię i architekturę. Jednocześnie okazała się dyscypliną matematyczną wartą samodzielnego badania.

Dlatego też potrzebny jest niedrogi i przystępny podręcznik, odpowiedni zarówno dla matematyków uczęszczających na wykłady z teorii grafów, jak i dla niespecjalistów pragnących poznać tę dyscyplinę możliwie szybko. Mam nadzieję, że ta książka w jakimś stopniu spełni te oczekiwania. Do zrozumienia tej książki potrzebna jest jedynie podstawowa znajomość elementarnej teorii mnogości oraz algebry macierzy, chociaż do rozwiązywania niektórych trudniejszych ćwiczeń może być potrzebna głębsza znajomość algebry abstrakcyjnej.

Treść tej książki dzieli się w naturalny sposób na cztery części. Pierwsza (rozdziały 1–4) dostarcza materiału na wykład wstępny: podstawowe definicje i przykłady grafów, spójność, drogi i cykle Eulera i Hamiltona oraz drzewa. Po niej następuje druga część (rozdziały 5 i 6), w której omówione są planarność i kolorowanie, ze szczególnym uwzględnieniem twierdzenia o czterech barwach. Trzecia część (rozdziały 7 i 8) dotyczy teorii grafów skierowanych i teorii transwersal oraz zastosowania ich do analizy dróg krytycznych, łańcuchów Markowa i przepływów w sieciach. Książka kończy się rozdziałem poświęconym matroidom (rozdział 9), który wiąże razem materiał z poprzednich rozdziałów i wprowadza pewne najnowsze osiągnięcia.

W całej książce starałem się ograniczyć przedstawiany materiał do najbardziej podstawowego, wykorzystując ćwiczenia do wprowadzenia treści o mniejszym znaczeniu. Część spośród 250 ćwiczeń to przykłady rutynowe, których celem jest sprawdzenie, czy wykład został dobrze zrozumiany, inne pokazują Czytelnikowi nowe wyniki i pomysły. Czytelnik powinien przeczytać każde ćwiczenie, niezależnie od tego, czy będzie je szczegółowo wykonywał, czy nie. Ćwiczenia trudniejsze są oznaczone gwiazdką.

Używałem symbolu ■ do oznaczenia końca dowodu, a pisma półgrubego do wyróżnienia definicji. Liczbę elementów zbioru S oznaczałem symbolem $|S|$, a zbiór pusty symbolem \emptyset .

W tym wydaniu książki wprowadziłem znaczne zmiany. Cały tekst ponownie przejrzałem i pewne określenia zmieniłem na używane obecnie. Ponadto dodałem rozwiązania niektórych ćwiczeń; te ćwiczenia są oznaczone symbolem "obok numeru. Pewne zmiany są wynikiem uwag zgłoszonych przez wiele osób i chciałbym skorzystać z okazji, by podziękować im za te cenne wskazówki.

Wreszcie chcę wyrazić wdzięczność moim byłym studentom, dzięki którym ta książka nie została ukończona rok wcześniej, oraz Panu Williamowi Szekspirowi i innym osobom za ich celne i dowcipne uwagi na początku każdego rozdziału; przede wszystkim jednak chciałbym podziękować mojej żonie Joy za wiele rzeczy, które nie mają nic wspólnego z teorią grafów.

R. J. W.

Maj 1995 r.

The Open University

Wykaz oznaczeń

Mam krótką listę.

W. S. GILBERT

A	macierz sąsiedztwa	n	liczba wierzchołków
$A(D)$	zbiór łuków digrafu D	N_n	graf pusty
B	baza matroidu M	$P_G(K)$	wielomian chromatyczny grafu G
C_n	graf cykliczny	P_n	graf liniowy
$\text{cr}(G)$	liczba przecięć grafu G	Q_k	k -kostka
D	digraf	r	funkcja rzędu matroidu M
$\deg(v)$	stopień wierzchołka v	r^*	funkcja rzędu matroidu
E	niepusty zbiór skończony		M^*
$E(G)$	zbiór krawędzi grafu G	$t(G)$	grubość grafu G
f	liczba ścian	T	drzewo
F	matroid Fano	u, v, w, z	wierzchołki grafu G
g	genus	$v_0 \rightarrow \dots \rightarrow v_m$	trasa
G	graf	$V(D)$	zbiór wierzchołków digrafu D
\overline{G}	dopełnienie grafu G	$V(G)$	zbiór wierzchołków grafu G
G^*	graf dualny grafu G	W	podprzestrzeń cykli grafu G
$G(V_1, V_2)$	graf dwudzielny	W^*	podprzestrzeń rozcięć grafu G
$G_1 \cup G_2$	suma grafów	W_n	koło
I	zbiór niezależny matroidu M	α, β, γ	kolory
k	liczba składowych	$\gamma(G)$	liczba cyklotomyczna grafu G
K_n	graf pełny	$\Gamma(G)$	grupa automorfizmów grafu G
$K_{r,s}$	pełny graf dwudzielny	Δ	największy stopień wierzchołka grafu G
$K_{r,s,t}$	pełny graf trójdzielny	$\kappa(G)$	spójność (wierzchołkowa) grafu G
$L(G)$	graf krawędziowy grafu G		
m	liczba krawędzi		
M	matroid		
M^*	matroid dualny		
$M.A$	ściągnięcie matroidu		
$M \times A$	ograniczenie matroidu		
$M(G)$	matroid cykliczny		
$M(S_1, \dots, S_m)$	matroid transwersalny		

$\lambda(G)$	spójność krawędziowa grafu G	$\chi'(G)$	indeks chromatyczny grafu G
$\xi(G)$	rzad rozcięcia (rzad spójności) grafu G	\mathcal{B}	bazy matroidu M
$\chi(G)$	liczba chromatyczna grafu G	\mathcal{C}	cykle matroidu M

1 Rozdział

Wprowadzenie

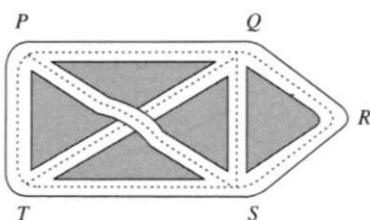
Ostatnią rzeczą, jaką się odkrywa układając dzieło, jest to, co należy pomieścić na początku.

BLAISE PASCAL

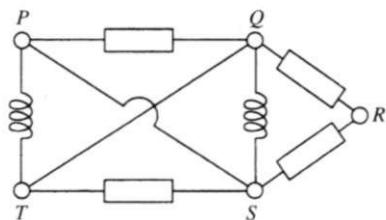
W tym wstępny rozdziale zauważmy intuicyjne podstawy tego wszystkiego, co będziemy omawiać w sposób bardziej formalny w następnych rozdziałach. Określenia pojęć, które pojawią się tu wyróżnione pismem półgrubym, należy rozumieć raczej jako opisy niż jako definicje. Zapoznawszy się z nimi w sposób nieformalny, łatwiej przyswoisz je sobie, gdy spotkasz je dalej. A więc przeczytaj ten rozdział szybko i szybko zapomnij o nim!

§1 Co to jest graf?

Zaczniemy od przyjrzenia się rysunkom 1.1 i 1.2, które pokazują fragmenty mapy drogowej i obwodu elektrycznego.

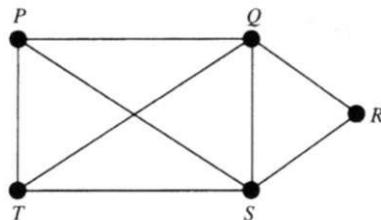


Rysunek 1.1



Rysunek 1.2

Każda z tych sytuacji może być przedstawiona na rysunku za pomocą punktów i odcinków, tak jak na rysunku 1.3. Punkty P, Q, R, S i T nazywamy **wierzchołkami**, odcinki nazywamy **krawędziami**, a cały wykres nazwiemy **grafem**. Zauważmy, że punkt przecięcia odcinków PS i QT nie jest wierzchołkiem, ponieważ nie odpowiada on ani skrzyżowaniu dróg, ani połączeniu dwóch przewodów. **Stopniem** wierzchołka nazwiemy liczbę krawędzi, których końcem jest ten wierzchołek; na rysunku 1.1 odpowiada on liczbie dróg schodzących się na skrzyżowaniu. Na przykład stopień wierzchołka Q wynosi 4.

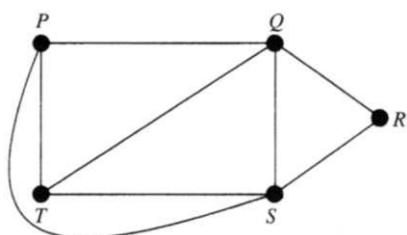


Rysunek 1.3

Graf pokazany na rysunku 1.3 może również opisywać inne sytuacje. Na przykład, jeśli P, Q, R, S i T odpowiadają drużynom piłkarskim, to obecność krawędzi może świadczyć o tym, że mecz, w którym brały udział drużyny odpowiadające końcom tej krawędzi, już się odbył. Tak więc, na podstawie rysunku 1.3 widzimy, że drużyna P grała już z drużynami Q, S oraz T i nie grała z drużyną R . W tej reprezentacji grafu stopień wierzchołka jest liczbą meczów rozegranych przez daną drużynę.

Tę samą sytuację możemy zilustrować inaczej za pomocą grafu z rysunku 1.4. Usuneliśmy na nim „przecięcie” odcinków PS i QT , rysując linię PS na zewnątrz prostokąta $PQST$. Otrzymany graf nadal informuje nas o tym, czy istnieje bezpośrednia droga z jednego skrzyżowania do drugiego, w jaki sposób zostały połączone przewody w obwodzie elektrycznym i które drużyny piłkarskie rozegrały już ze sobą mecze. Jedyna informacja, którą tracimy, dotyczy własności „metrycznych”, takich jak długość drogi lub to, czy przewód jest prosty czy zakrzywiony.

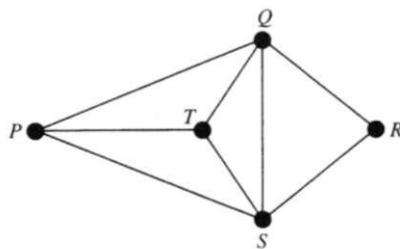
Zatem graf przedstawia pewien zbiór punktów i pokazuje, w jaki sposób są one połączone, nie uwzględnia natomiast własności metrycznych. Z tego powodu, dowolne grafy opisujące tę samą sytuację, takie jak na rysunkach 1.3 i 1.4, traktujemy jako ten sam graf.



Rysunek 1.4

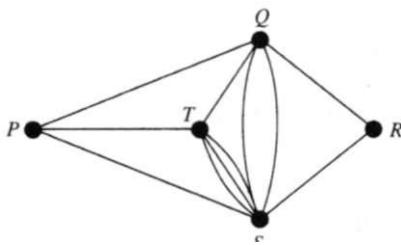
Mówiąc bardziej ogólnie, dwa grafy są identyczne, jeśli dowolne dwa wierzchołki są połączone krawędzią w jednym grafie wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiadające im wierzchołki są połączone krawędzią w drugim grafie. Inny graf iden-

tyczny z grafami z rysunków 1.3 i 1.4 jest pokazany na rysunku 1.5. Patrząc na niego, utraciliśmy wszelkie wyobrażenie o położeniu i wzajemnych odległościach punktów, ale nadal na pierwszy rzut oka widzimy, które punkty są połączone drogą lub przewodem.

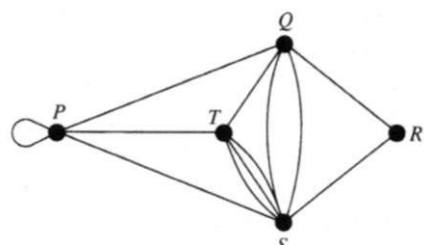


Rysunek 1.5

W grafie pokazanym na powyższym rysunku każdą parę wierzchołków łączy co najwyżej jedna krawędź. Przypuśćmy teraz, że drogi łączące Q i S oraz S i T na rysunku 1.5 są zbyt przeciążone ruchem drogowym. Można temu zaradzić, dobudowując dodatkowe drogi łączące te punkty; otrzymamy sytuację przedstawioną na rysunku 1.6. Krawędzie łączące wierzchołki Q i S oraz S i T nazywamy **krawędziami wielokrotnymi**. Jeśli ponadto potrzebny jest parking dla samochodów w punkcie P , to zaznaczmy go na rysunku za pomocą krawędzi prowadzącej z wierzchołka P do niego samego, nazywanej **pętlą** (patrz rys. 1.7). W tej książce dopuścimy możliwość występowania krawędzi wielokrotnych i pętli w grafach. Grafy bez krawędzi wielokrotnych i pętli, takie jak graf na rysunku 1.5, nazywamy **grafami prostymi**.

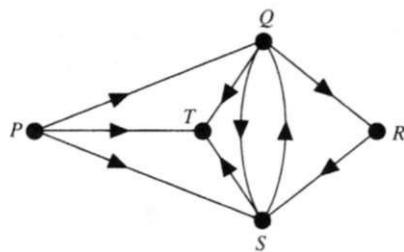


Rysunek 1.6



Rysunek 1.7

Konieczność badania **grafów skierowanych** (po angielsku nazywanych **directed graphs**, w skrócie **digraphs** — stąd używany po polsku skrót **digrafy**) wynika z przekształcania pewnych dróg w ulice jednokierunkowe. Przykład digrafu pokazany jest na rysunku 1.8, kierunki ruchu na ulicach jednokierunkowych zostały zaznaczone na nim strzałkami. (W tym przykładzie w punkcie T



Rysunek 1.8

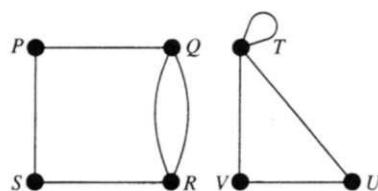
zapanowałby chaos, co jednak nie przeszkadza nam zajmować się również takimi sytuacjami!) Grafami skierowanymi będziemy się zajmować w rozdziale 7.

Znaczna część teorii grafów poświęcona jest różnego rodzaju „trasom”. **Trasa** jest to „linia, po której przedostajemy się z jednego wierzchołka do innego”, składająca się z ciągu kolejno przechodzonych krawędzi. Na przykład ciąg $P \rightarrow Q \rightarrow R$ w grafie przedstawionym na rysunku 1.5 jest trasą długości 2, a ciąg $P \rightarrow S \rightarrow Q \rightarrow T \rightarrow S \rightarrow R$ jest trasą długości 5. Trasę, w której żaden wierzchołek nie występuje więcej niż jeden raz, nazwiemy **drogą**; na przykład $P \rightarrow T \rightarrow S \rightarrow R$ jest drogą. Trasę postaci $Q \rightarrow S \rightarrow T \rightarrow Q$ nazywamy **cyklem**.

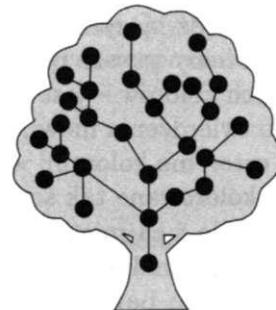
Większa część rozdziału 3 jest poświęcona drogom o specjalnych własnościach. W szczególności, będziemy zajmować się takimi grafami, w których istnieją trasy przechodzące przez każdą krawędź lub przez każdy wierzchołek dokładnie jeden raz i kończące się w punkcie wyjścia; takie grafy nazywamy odpowiednio grafami **eulerowskimi** i **hamiltonowskimi**. Na przykład graf pokazany na rysunkach 1.3–1.5 jest hamiltonowski; odpowiednią trasą jest $P \rightarrow Q \rightarrow R \rightarrow S \rightarrow T \rightarrow P$. Nie jest on grafem eulerowskim, gdyż dowolna trasa, która przechodzi przez każdą krawędź dokładnie jeden raz (taka jak $P \rightarrow Q \rightarrow R \rightarrow S \rightarrow T \rightarrow P \rightarrow S \rightarrow Q \rightarrow T$), musi zakończyć się w wierzchołku różnym od początkowego.

Pewne grafy składają się z dwóch lub większej liczby części. Rozważmy na przykład graf, którego wierzchołkami są stacje metra londyńskiego i nowojorskiego, a jego krawędziami linie metra łączące te stacje. Nie jest możliwe przejście z Trafalgar Square do Grand Central Station, poruszając się wyłącznie po krawędziach tego grafu, ale jeśli ograniczymy naszą uwagę tylko do metra londyńskiego, to możemy dostać się z dowolnej stacji do każdej innej. Graf składający się z jednego kawałka, tzn. taki, w którym dowolne dwa wierzchołki można połączyć drogą, nazywamy **grafem spójnym**; graf składający się z wielu kawałków nazywamy **grafem niespójnym** (por. rys. 1.9). Spójnością grafów zajmiemy się w rozdziale 3.

Czasami zajmujemy się grafami spójnymi, w których każdą parę wierzchołków można połączyć dokładnie jedną drogą. Takie grafy nazywamy **drzewami**, biorąc nazwę od drzew genealogicznych; będziemy zajmować się nimi w rozdziale 4. Jak zobaczymy, drzewo można zdefiniować jako graf spójny bez cykli (por. rys. 1.10).



Rysunek 1.9

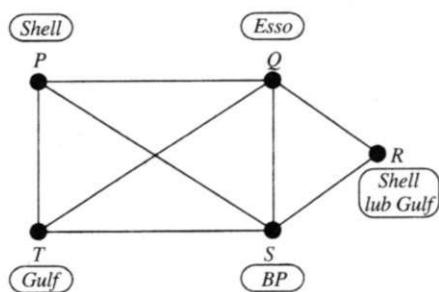


Rysunek 1.10

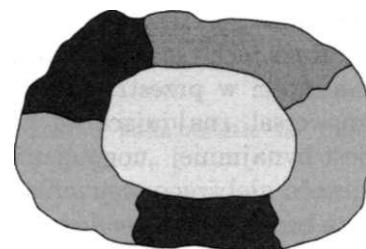
Wcześniej już zauważyliśmy, że graf pokazany na rysunku 1.3 może być narysowany (tak jak na rysunkach 1.4 i 1.5) w ten sposób, by uniknąć przecinania się krawędzi. Graf, który może być narysowany bez takich przecięć, nazywamy **grafem planarnym**. W rozdziale 5 podamy kilka kryteriów planarności. Niektóre z nich odwołują się do własności „podgrafów” badanego grafu, inne wykorzystują podstawowe pojęcie dualności.

Grafy planarne odgrywają ważną rolę w problemach kolorowania. Przypuśćmy, że cztery koncerny Shell, Esso, BP i Gulf chcą rozmieścić pięć stacji benzynowych na pięciu skrzyżowaniach pokazanych na naszym grafie „połączeń drogowych”. Ze względów ekonomicznych żaden koncern nie chce budować stacji na sąsiednich skrzyżowaniach. Wtedy Shell może wybudować stację na skrzyżowaniu P , Esso na skrzyżowaniu Q , BP na skrzyżowaniu S i Gulf na skrzyżowaniu T . W ten sposób skrzyżowanie R pozostanie wolne dla koncernu Shell lub Gulf (patrz rys. 1.11). Jeśli jednak Gulf wycofa się z tego porozumienia, to pozostałe trzy koncerny nie będą mogły wybudować swoich stacji benzynowych zgodnie z dotychczasowymi zamierzeniami.

Takimi zagadnieniami zajmiemy się w rozdziale 6. Będziemy tam próbować kolorować wierzchołki grafu prostego daną z góry liczbą kolorów w taki sposób,



Rysunek 1.11

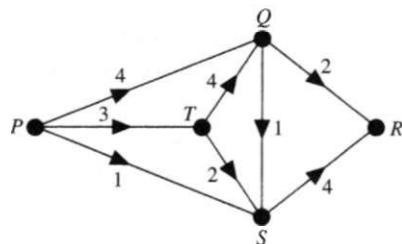


Rysunek 1.12

by każda krawędź łączyła wierzchołki dwóch różnych kolorów. Jeśli graf jest planarny, to możemy zawsze pokolorować w ten sposób jego wierzchołki za pomocą tylko czterech kolorów – jest to słynne **twierdzenie o czterech barwach**. Inna wersja tego twierdzenia mówi, że możemy zawsze pokolorować państwa na dowolnej mapie czterema kolorami w taki sposób, by żadne graniczące ze sobą państwa nie były pokolorowane tak samo (por. rys. 1.12).

W rozdziale 8 zajmiemy się słynnym **problemem kojarzenia małżeństw**, polegającym na znalezieniu warunków, jakie musi spełniać grupa dziewcząt, z których każda zna pewną liczbę chłopców, by każda z nich mogła wyjść za mąż za któregoś ze swoich znajomych. Ten problem może być sformułowany w języku teorii transwersal i jest związany z problemem znalezienia rozłącznych dróg łączących dane dwa wierzchołki grafu lub digrafu.

Rozdział 8 kończąc rozważania dotyczące przepływów w sieciach i problemów transportowych. Przypuśćmy, że dana jest sieć połączeń, taka jak na rysunku 1.13, w której P jest fabryką, R jest rynkiem zbytu, a krawędzie grafu są liniami, którymi mogą być przesyłane wyprodukowane dobra. Każda z tych linii przesyłowych ma swoją przepustowość, która jest oznaczona liczbą obok odpowiedniej krawędzi. Ta liczba wyraża maksymalną ilość dóbr, które mogą być przesłane daną linią. Problem polega na wyznaczeniu maksymalnej ilości dóbr, które mogą być przesłane z fabryki na rynek.



Rysunek 1.13

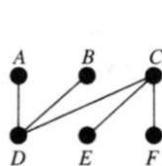
Ostatni rozdział jest poświęcony matroidom. Wiąże on razem treści poprzednich rozdziałów zgodnie z zasadą „czyń mądrze — uogólniaj!” (ang. „be wise — generalize!”). Teoria matroidów, zajmująca się badaniem zbiorów ze zdefiniowanymi na nich „strukturami niezależności”, uogólnia zarówno pojęcie liniowej niezależności w przestrzeniach liniowych, jak i pewne wyniki dotyczące grafów i transwersal, znajdujące się wcześniej w tej książce. Jednakże teoria matroidów nie jest bynajmniej „uogólnieniem dla samego uogólnienia”. Przeciwnie, daje ona możliwość głębszego wejrzenia w wiele problemów dotyczących grafów oraz dostarcza prostszych dowodów twierdzeń dotyczących transwersal niż dowody prowadzone metodami tradycyjnymi. Matroidy odegrały ważną rolę w rozwoju pojęć kombinatorycznych w ostatnich latach.

Mamy nadzieję, że ten rozdział wprowadzający wskazał Czytelnikowi, o czym jest ta książka i jakimi zagadnieniami się zajmuje. Teraz rozpoczęmy bardziej formalny wykład.

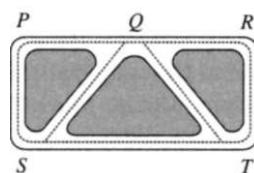
Ćwiczenia do §1

1.1^r Podaj liczbę wierzchołków i krawędzi oraz stopnie poszczególnych wierzchołków:

- (a) w grafie pokazanym na rysunku 1.3,
- (b) w drzewie pokazanym na rysunku 1.14.



Rysunek 1.14

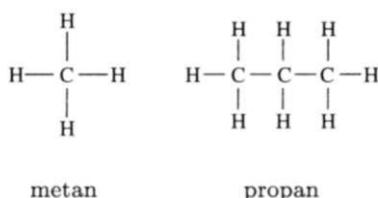


Rysunek 1.15

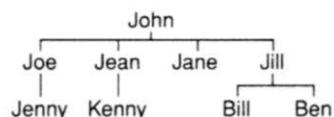
1.2 Narysuj graf odpowiadający sieci dróg pokazanej na rysunku 1.15 i podaj liczbę wierzchołków, liczbę krawędzi i stopień każdego wierzchołka.

1.3^r Na rysunku 1.16 widzimy wzory cząsteczek metanu (CH_4) i propanu (C_3H_8).

- (a) Jeśli potraktujemy te wzory jako grafy, to co możemy powiedzieć o wierzchołkach odpowiadających atomom węgla (C) i wodoru(H)?
- (b) Istnieją dwie różne cząsteczki mające ten sam wzór sumaryczny C_4H_{10} . Narysuj grafy odpowiadające tym cząsteczkom.



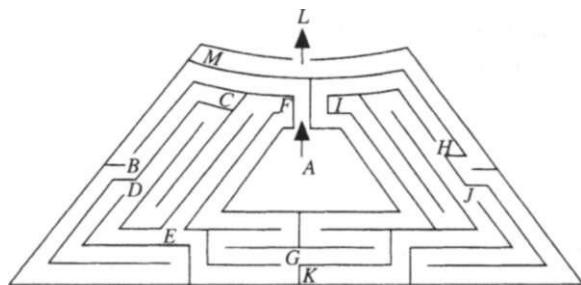
Rysunek 1.16



Rysunek 1.17

1.4 Narysuj graf odpowiadający drzewu genealogicznemu pokazanemu na rysunku 1.17.

1.5^r Narysuj graf, którego wierzchołki są oznaczone literami od A do M i który pokazuje drogi poruszania się po labiryncie znajdującym się w Hampton Court i przedstawionym na rysunku 1.18.



Rysunek 1.18

1.6^r Maciek lubi Marię, Martę i Magdę; Marek lubi Marię i Magdę; Maria i Marta lubią się nawzajem. Narysuj graf skierowany ukazujący te wzajemne relacje między Maćkiem, Markiem, Marią, Martą i Magdą.

1.7 Węże zjadają żaby, a ptaki zjadają pajęki; ptaki i pajęki zjadają owady; żaby jedzą ślimaki, pajęki i owady. Narysuj graf skierowany reprezentujący te drapieżne zachowania.

2 Rozdział Definicje i przykłady

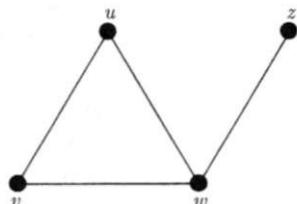
Nienawidzę definicji!

BENJAMIN DISRAELI

Ten rozdział zawiera podstawy do dalszego studiowania teorii grafów. Paragraf 2 formalizuje pewne podstawowe definicje z rozdziału 1, a paragraf 3 dostarcza wielu przykładów. W paragrafie 4 zobaczymy, w jaki sposób można użyć grafów do przedstawienia i rozwiązania trzech zadań matematyki rekreacyjnej. Zajmowanie się poważniejszymi zastosowaniami odłożymy do czasu, gdy będziemy dysponować bardziej zaawansowaną techniką (por. paragrafy 8 i 11).

§2 Definicje

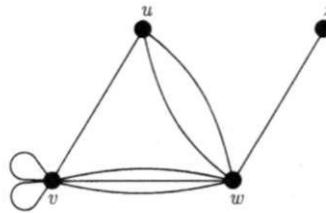
Graf prosty G składa się z niepustego zbioru skończonego $V(G)$, którego elementy nazywamy **wierzchołkami** (lub **węzłami**), i skończonego zbioru $E(G)$ różnych par nieuporządkowanych różnych elementów zbioru $V(G)$, które nazywamy **krawędziami**. Zbiór $V(G)$ nazywamy **zbiorem wierzchołków**, a zbiór $E(G)$ **zbiorem krawędzi** grafu G . Mówimy, że krawędź $\{v, w\}$ łączy wierzchołki v i w , i na ogół oznaczamy ją krócej symbolem vw . Na przykład na rysunku 2.1 widzimy graf prosty G , którego zbiorem wierzchołków $V(G)$ jest zbiór $\{u, v, w, z\}$ i którego zbiór krawędzi $E(G)$ składa się z krawędzi uv , uw , vw i wz .



Rysunek 2.1

W każdym grafie prostym istnieje co najwyżej jedna krawędź łącząca daną parę wierzchołków. Jednakże wiele wyników dotyczących grafów prostych można

rozszerzyć tak, by dotyczyły obiektów ogólniejszych, w których dwa wierzchołki mogą być połączone więcej niż jedną krawędzią. Ponadto możemy pozbyć się ograniczenia mówiącego, że krawędź łączy dwa *różne* wierzchołki i dopuścić **pętle** — krawędzie łączące wierzchołek z samym sobą. Taki obiekt, w którym mogą występować krawędzie wielokrotne i pętle, nazywamy **grafem ogólnym**, lub po prostu **grafem** (patrz rys. 2.2). Zatem każdy graf prosty jest grafem, ale nie każdy graf jest grafem prostym.



Rysunek 2.2

Zatem graf G składa się z niepustego zbioru skończonego $V(G)$, którego elementy nazywamy **wierzchołkami**, i skończonej rodziny $E(G)$ par nieuporządkowanych (niekoniecznie różnych) elementów zbioru $V(G)$ nazywanych **krawędziami**; użycie słowa „rodzina” oznacza, że dopuszcamy istnienie krawędzi wielokrotnych¹.

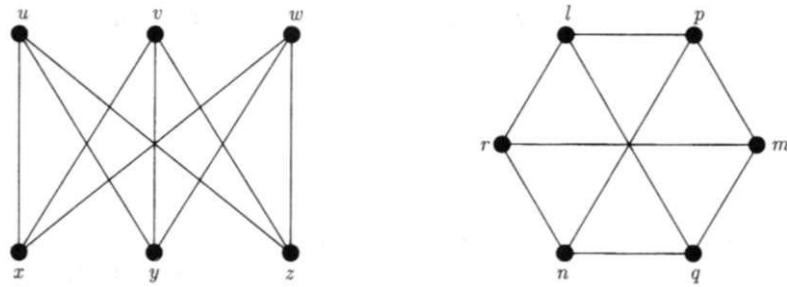
Zbiór $V(G)$ nazywamy **zbiorem wierzchołków**, a zbiór $E(G)$ **rodziną krawędzi** grafu G . Mówimy, że krawędź $\{v, w\}$ łączy wierzchołki v i w i również w tym przypadku oznaczamy ją krócej symbolem vw . Zatem na rysunku 2.2 zbiorem wierzchołków $V(G)$ jest zbiór $\{u, v, w, z\}$, a rodzina $E(G)$ składa się z krawędzi uv , vv (występującej dwukrotnie), vw (występującej trzykrotnie), uw (występującej dwukrotnie) i wz . Zauważmy, że każda pętla vv łączy wierzchołek v z samym sobą. Chociaż czasami musimy ograniczyć uwagę do grafów prostych, to wszędzie tam, gdzie będzie to możliwe, będziemy dowodzić twierdzeń dla grafów ogólnych.

Teoria grafów nie ma ustalonego języka — każdy autor używa swojej terminologii. Niektórzy nazywają grafem to, co my nazywamy grafem prostym, albo graf ze skierowanymi krawędziami, albo graf mający nieskończenie wiele wierzchołków lub krawędzi; grafami skierowanymi będąmy się zajmować w rozdziale 7, a grafami nieskończonymi — w paragrafie 16. Wszystkie takie definicje są całkowicie poprawne, pod warunkiem, że używa się ich konsekwentnie. W tej książce, *wszystkie grafy są skończone i nie są skierowane, z pętlami i krawędziami wielokrotnymi, chyba że zaznaczamy, iż jest inaczej*.

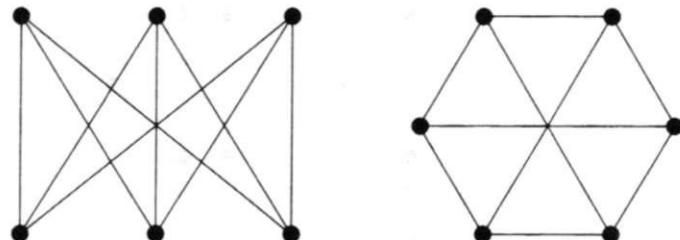
¹ Używamy słowa „rodzina” do oznaczenia zbioru z powtórzeniami, czyli zbiorowości elementów, z których niektóre mogą występować wielokrotnie; na przykład $\{a, b, c\}$ jest zbiorem, ale (a, a, c, b, a, c) jest rodziną.

Izomorfizm

Mówimy, że dwa grafy G_1 i G_2 są **izomorficzne**, jeśli istnieje wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość między wierzchołkami grafu G_1 i grafu G_2 taka, że liczba krawędzi łączących dane dwa wierzchołki grafu G_1 jest równa liczbie krawędzi łączących odpowiadające im wierzchołki grafu G_2 . Zatem dwa grafy pokazane na rysunku 2.3 są izomorficzne przy odpowiedniości $u \leftrightarrow l$, $v \leftrightarrow m$, $w \leftrightarrow n$, $x \leftrightarrow p$, $y \leftrightarrow q$, $z \leftrightarrow r$. W wielu zadaniach nazwy wierzchołków są niepotrzebne, więc je pomijamy. Mówimy wtedy, że dwa „nieoznakowane grafy” są izomorficzne, jeśli możemy tak przyporządkować nazwy wierzchołkom, by otrzymane „grafy oznakowane” były izomorficzne. Na przykład grafy nieoznakowane na rysunku 2.4 są izomorficzne, gdyż możemy oznać wierzchołki tak, jak na rysunku 2.3.

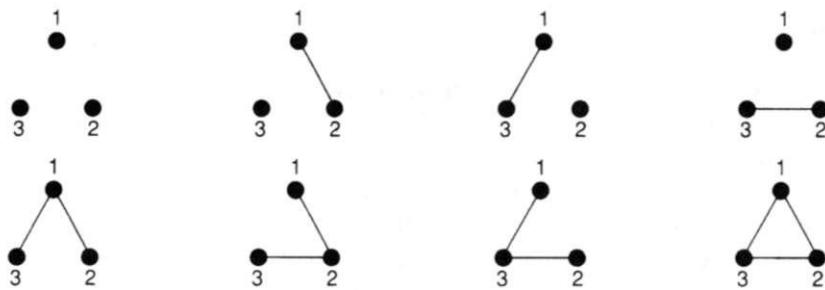


Rysunek 2.3



Rysunek 2.4

Różnica między grafami oznakowanymi i nieoznakowanymi staje się wyraźniejsza, gdy próbujemy je zliczać. Na przykład, jeśli ograniczamy nasze zainteresowanie do grafów mających trzy wierzchołki, to istnieje, z dokładnością do izomorfizmu, osiem różnych grafów oznakowanych, ale tylko cztery grafy nieoznakowane (zob. rysunki 2.5 i 2.6). Zazwyczaj z kontekstu jasno wynika, czy mamy na myśli grafy oznakowane, czy nieoznakowane.



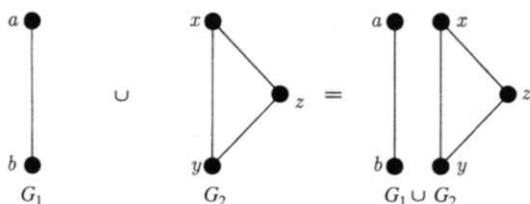
Rysunek 2.5



Rysunek 2.6

Spójność

Możemy połączyć dwa grafy, by otrzymać graf większy. Jeśli tymi dwoma grafami są $G_1 = (V(G_1), E(G_1))$ i $G_2 = (V(G_2), E(G_2))$, gdzie zbiory $V(G_1)$ i $V(G_2)$ są rozłączne, to **sumą** tych grafów $G_1 \cup G_2$ jest graf, którego zbiorem wierzchołków jest zbiór $V(G_1) \cup V(G_2)$, a zbiorem krawędzi zbiór $E(G_1) \cup E(G_2)$ (patrz rys. 2.7).



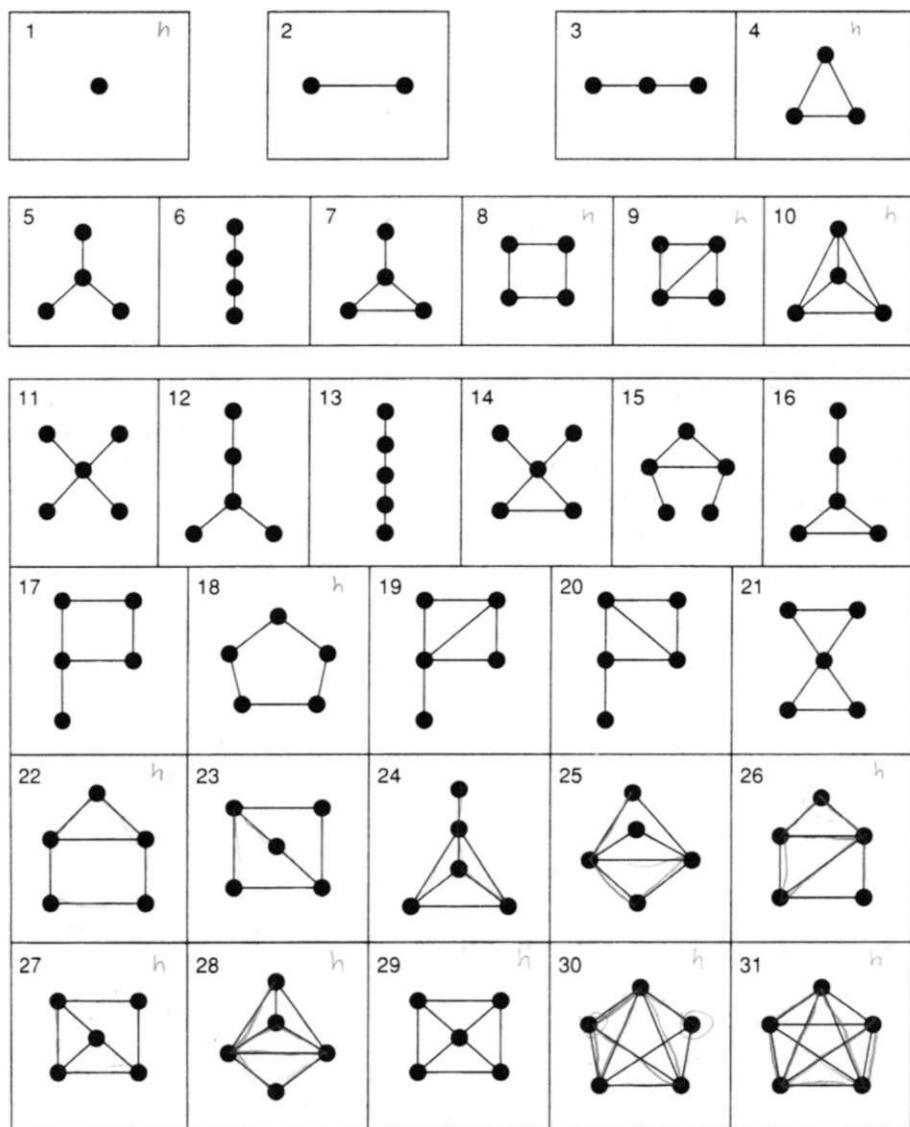
Rysunek 2.7

W większości grafów, z którymi mieliśmy dotychczas do czynienia, składały się „z jednego kawałka”. Graf nazywamy **spójnym**, jeśli nie można go przedstawić w postaci sumy dwóch grafów — w przeciwnym razie nazywamy go grafem **nie-spójnym**. Oczywiście każdy graf niespójny G można przedstawić w postaci sumy grafów spójnych, nazywanych **składowymi** grafu G . Na przykład na rysunku 2.8 jest przedstawiony graf mający trzy składowe.

Kiedy dowodzimy ogólnych twierdzeń o grafach, często dowodzimy odpowiedniego twierdzenia dla grafów spójnych i następnie stosujemy je oddzielnie



Rysunek 2.8



Rysunek 2.9

do każdej składowej. W tabeli na rysunku 2.9 widzimy wszystkie spójne grafy nieoznakowane mające co najwyżej pięć wierzchołków.

Sąsiedztwo

Mówimy, że dwa wierzchołki v i w grafu G są **sąsiednie**, jeśli istnieje krawędź vw , która je łączy. Mówimy też wtedy, że wierzchołki v i w są **incydentne** z tą krawędzią. Podobnie, dwie krawędzie e i f są **sąsiednie**, jeśli mają wspólny wierzchołek (por. rys. 2.10).

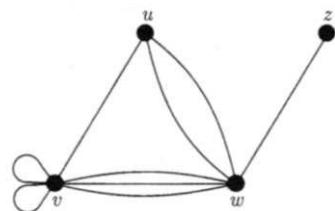


Rysunek 2.10

Stopień wierzchołka v grafu G oznaczany symbolem $\deg(v)$ jest liczbą krawędzi incydentnych z v ; przy obliczaniu stopnia wierzchołka v przyjmujemy zwykle, że pętla w wierzchołku v powiększa stopień tego wierzchołka o 2 (a nie o 1). Wierzchołek stopnia 0 nazywamy **wierzchołkiem izolowanym**, a wierzchołek stopnia 1 **wierzchołkiem końcowym**. Zatem każdy z dwóch grafów na rysunku 2.11 ma dwa wierzchołki końcowe i trzy wierzchołki stopnia 2, a graf pokazany na rysunku 2.12 ma jeden wierzchołek końcowy, jeden wierzchołek stopnia 3, jeden wierzchołek stopnia 6 i jeden stopnia 8. **Ciąg stopni** grafu składa się ze stopni wierzchołków w kolejności wzrastającej, przy czym uwzględnione są w nim powtórzenia. Na przykład ciągami stopni grafów z rysunków 2.11 i 2.12 są $(1, 1, 2, 2, 2)$ i $(1, 3, 6, 8)$.



Rysunek 2.11



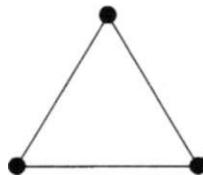
Rysunek 2.12

Zauważmy, że w każdym grafie suma stopni wszystkich wierzchołków jest liczbą parzystą — dokładniej, jest równa podwojonej liczbie krawędzi, gdyż każda krawędź zwiększa tę sumę o 2. Ten fakt wykazany przez Leonharda Eulera w roku

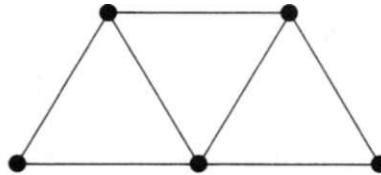
1736 nazywamy **lematem o uściskach dloni**. Wynika z niego, że jeśli pewne osoby witają się, podając sobie dlonie, to łączna liczba uściśniętych dloni jest parzysta — dlatego, że w każdym uścisku uczestniczą dokładnie dwie dlonie. Naukowym wnioskiem z lematu o uściskach dloni jest to, że *w dowolnym grafie liczba wierzchołków o nieparzystych stopniach jest parzysta*.

Podgrafy

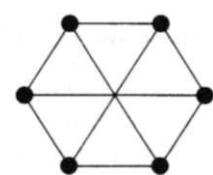
Podgrafem grafu G nazywamy graf, którego wszystkie wierzchołki należą do $V(G)$, a krawędzie należą do $E(G)$. Zatem graf pokazany na rysunku 2.13 jest podgrafem grafu z rysunku 2.14, ale nie jest podgrafem grafu z rysunku 2.15, gdyż ten ostatni graf nie zawiera żadnego „trójkąta”.



Rysunek 2.13

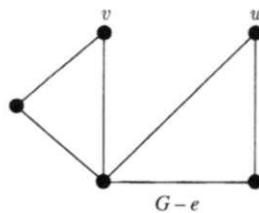
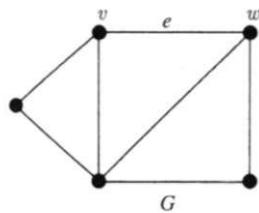


Rysunek 2.14

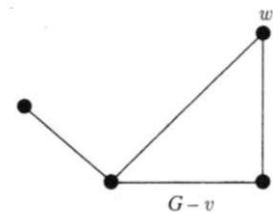


Rysunek 2.15

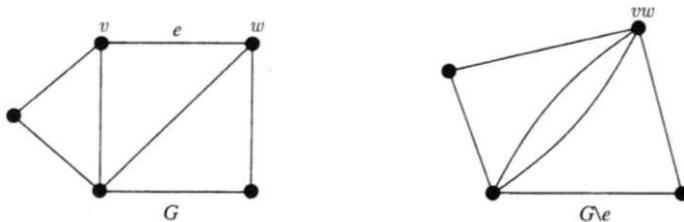
Możemy otrzymać podgraf danego grafu, usuwając niektóre krawędzie i wierzchołki. Jeśli e jest krawędzią grafu G , to symbolem $G - e$ oznaczamy graf otrzymany z grafu G przez usunięcie krawędzi e . Ogólnie, jeśli F jest dowolnym zbiorem krawędzi grafu G , to symbolem $G - F$ oznaczamy graf powstający z grafu G przez usunięcie krawędzi należących do F . Podobnie, jeśli v jest wierzchołkiem grafu G , to symbolem $G - v$ oznaczamy graf powstający z G przez usunięcie wierzchołka v i wszystkich krawędzi incydentnych z v . Ogólnie, jeśli S jest dowolnym zbiorem wierzchołków grafu G , to symbolem $G - S$ oznaczamy graf powstający z G przez usunięcie wszystkich wierzchołków należących do S i wszystkich krawędzi incydentnych z każdymkolwiek z tych wierzchołków. Kilka przykładów widzimy na rysunku 2.16.



Rysunek 2.16



Symbolom $G \setminus e$ oznaczamy graf otrzymany przez ściągnięcie krawędzi e , czyli usunięcie jej i zidentyfikowanie jej końców v i w tak, że otrzymany wierzchołek jest incydentny z tymi krawędziami (różnymi od e), które były incydentne z v lub w . Widzimy przykład na rysunku 2.17.

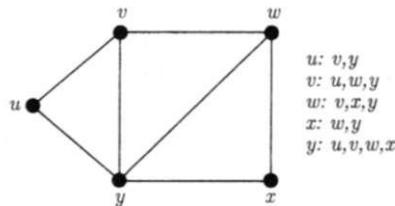


Rysunek 2.17

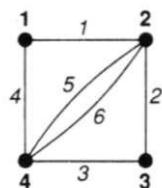
Reprezentacja macierzowa

Chociaż wygodnie jest przedstawiać graf w postaci rysunku, na którym punkty są połączone liniami, to taka reprezentacja może być nieodpowiednia, jeśli chcemy przechować duży graf w pamięci komputera. Jednym ze sposobów zapamiętywania grafu prostego jest podanie listy wierzchołków sąsiednich dla każdego wierzchołka tego grafu. Na rysunku 2.18 widzimy przykład takiej reprezentacji.

Inny przydatny sposób reprezentacji wykorzystuje macierze. Jeśli G jest grafem, którego wierzchołki są oznakowane liczbami ze zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$, to **macierzą sąsiedztwa A** jest macierz wymiaru $n \times n$, której wyraz o indeksach



Rysunek 2.18



$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Rysunek 2.19

i, j jest równy liczbie krawędzi łączących wierzchołek i z wierzchołkiem j . Jeśli oznakujemy również krawędzie liczbami ze zbioru $\{1, 2, \dots, m\}$, to **macierzą incydencji M** nazwiemy macierz wymiaru $n \times m$, której wyraz o indeksach i, j jest równy 1, jeśli wierzchołek i jest incydentny z krawędzią j , i równy 0 w przeciwnym razie. Na rysunku 2.19 widzimy graf oznakowany G z jego macierzami sąsiedztwa i incydencji.

Ćwiczenia do §2

2.1^r Podaj zbiór wierzchołków i zbiór krawędzi każdego grafu z rysunku 2.3.

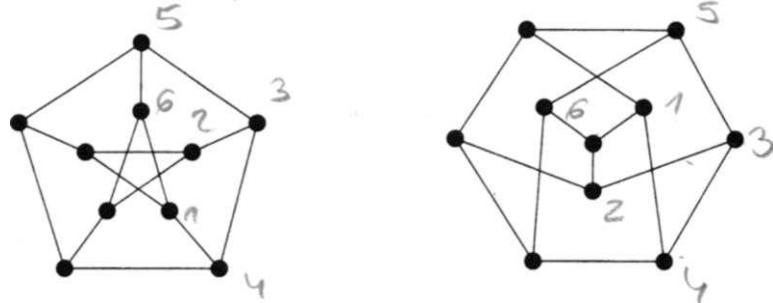
2.2 Narysuj:

- (a) graf prosty;
- (b) graf, który nie jest prosty, ale nie ma pętli;
- (c) graf, który nie jest prosty, ale nie ma krawędzi wielokrotnych.

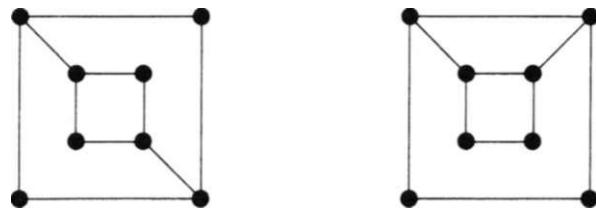
Każdy z nich ma mieć pięć wierzchołków i osiem krawędzi.

2.3^r (a) Oznaczając odpowiednio wierzchołki, wykaż, że dwa grafy pokazane na rysunku 2.20 są izomorficzne.

(b) Wyjaśnij, dlaczego dwa grafy z rysunku 2.21 nie są izomorficzne.

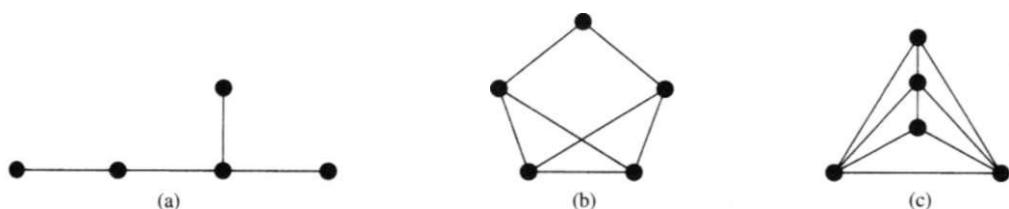


Rysunek 2.20



Rysunek 2.21

- 2.4** Sprawdź, czy następujące zdania są prawdziwe, czy fałszywe:
- każde dwa grafy izomorficzne mają ten sam ciąg stopni;
 - każde dwa grafy mające ten sam ciąg stopni są izomorficzne.
- 2.5** (a) Wykaż, że istnieje dokładnie $2^{n(n-1)/2}$ oznakowanych grafów prostych mających n wierzchołków.
(b) Ile z nich ma dokładnie m krawędzi?
- 2.6^r** Umieść każdy z grafów pokazanych na rysunku 2.22 w odpowiednim miejscu tabeli na rysunku 2.9.



Rysunek 2.22

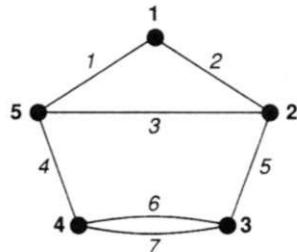
- 2.7^r** Wyznacz ciąg stopni każdego z grafów w tabeli na rysunku 2.9 i sprawdź, że w każdym przypadku lemat o uściskach dłoni jest słuszny.
- 2.8** (a) Narysuj graf mający sześć wierzchołków i ciąg stopni $(3, 3, 5, 5, 5, 5)$; czy istnieje graf *prosty* mający takie stopnie?
(b) Jaka będzie odpowiedź na (a) w przypadku ciągu stopni $(2, 3, 3, 4, 5, 5)$?
- 2.9^{*}** Udowodnij, że jeśli G jest grafem prostym mającym co najmniej dwa wierzchołki, to G musi zawierać dwa wierzchołki tego samego stopnia lub więcej.
- 2.10^r** Które grafy pokazane na rysunku 2.23 są podgrafami grafów z rysunku 2.20?



Rysunek 2.23

- 2.11** Niech G będzie grafem mającym n wierzchołków i m krawędzi, niech v będzie wierzchołkiem grafu G stopnia k i niech e będzie krawędzią G . Ile wierzchołków i krawędzi mają grafy $G - e$, $G - v$ i $G \setminus e$?

2.12^r Wyznacz macierze sąsiedztwa i incydencji grafu przedstawionego na rysunku 2.24.



Rysunek 2.24

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Rysunek 2.25

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Rysunek 2.26

2.13 (a) Narysuj graf, którego macierz sąsiedztwa jest podana na rysunku 2.25.
 (b) Narysuj graf, którego macierz incydencji jest podana na rysunku 2.26.

2.14 Jeśli G jest grafem bez pętli, to co możesz powiedzieć o sumie wyrazów
 (a) dowolnego wiersza lub dowolnej kolumny macierzy sąsiedztwa grafu G ?
 (b) dowolnego wiersza macierzy incydencji grafu G ?
 (c) dowolnej kolumny macierzy incydencji grafu G ?

2.15* Jeśli G jest grafem prostym, którego zbiorem krawędzi jest $E(G)$, to **przestrzenią wektorową** grafu G jest przestrzeń liniowa nad ciałem \mathbb{Z}_2 liczb całkowitych modulo 2, której elementami są podzbiory $E(G)$. Sumą $E + F$ dwóch podzbiorów E i F jest zbiór krawędzi należących do E lub do F , ale nie do obu tych zbiorów jednocześnie, a mnożenie przez skalar jest zdefiniowane wzorami $1 \cdot E = E$ i $0 \cdot E = \emptyset$. Udowodnij, że jest to rzeczywiście przestrzeń liniowa nad ciałem \mathbb{Z}_2 i znajdź jej bazę.

§3 Przykłady

W tym paragrafie zbadamy pewne ważne typy grafów. Czytelnik powinien je poznać, gdyż będą one często występować w przykładach i zadaniach.

Grafy puste

Graf, którego zbiór krawędzi jest zbiorem pustym, nazywamy **grafem pustym**. Graf pusty mający n wierzchołków będziemy oznaczać symbolem N_n ; na rysunku

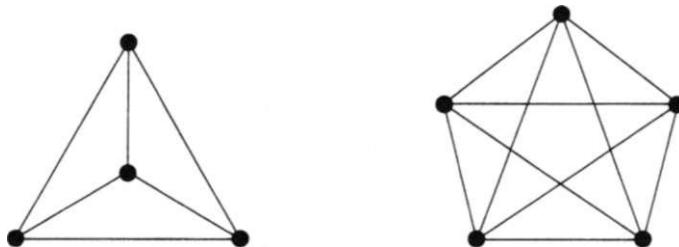


Rysunek 3.1

3.1 widzimy graf N_4 . Zauważmy, że każdy wierzchołek grafu pustego jest izolowany. Grafy puste nie są zbyt interesujące.

Grafy pełne

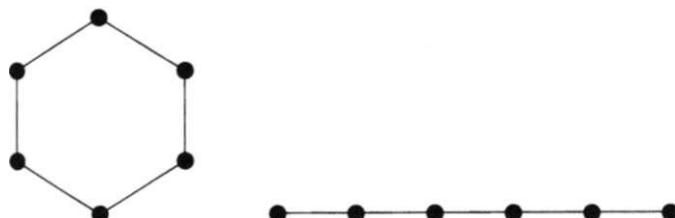
Graf prosty, w którym każda para różnych wierzchołków jest połączona krawędzią, nazywamy **grafem pełnym**. Graf pełny mający n wierzchołków oznaczamy symbolem K_n ; na rysunku 3.2 widzimy grafy K_4 i K_5 . Powinniście sprawdzić, że graf K_n ma $n(n - 1)/2$ krawędzi.



Rysunek 3.2

Grafy cykliczne, grafy liniowe i koła

Graf spójny, regularny stopnia 2 nazywamy **grafem cyklicznym**. Graf cykliczny mający n wierzchołków oznaczamy symbolem C_n . Graf otrzymany z grafu C_n przez usunięcie jednej krawędzi nazywamy **grafem liniowym** o n wierzchołkach

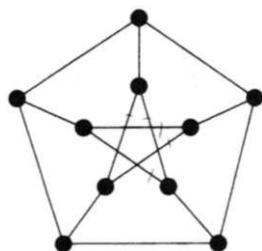


Rysunek 3.3

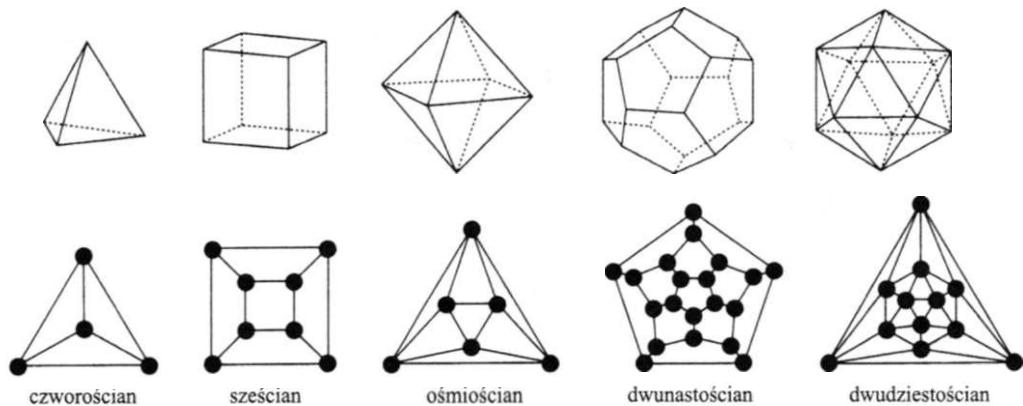
i oznaczamy symbolem P_n . Graf powstający z grafu C_{n-1} przez połączenie każdego wierzchołka z nowym wierzchołkiem v nazywamy **kołem** o n wierzchołkach; oznaczamy je symbolem W_n . Na rysunku 3.3 pokazane są grafy: cykliczny C_6 , liniowy P_6 i koło W_6 .

Grafy regularne

Graf, w którym każdy wierzchołek ma ten sam stopień, nazywamy **grafem regularnym**. Jeśli każdy wierzchołek ma stopień r , to ten graf nazywamy **grafem regularnym stopnia r** lub krócej **grafem r -regularnym**. Szczególne znaczenie mają **grafy kubiczne**, tzn. grafy regularne stopnia 3; przykładem grafu kubicznego jest **graf Petersena** pokazany na rysunku 3.4. Zauważmy, że graf pusty N_n jest grafem regularnym stopnia 0, graf cykliczny C_n jest grafem regularnym stopnia 2 i graf pełny K_n jest grafem regularnym stopnia $n - 1$.



Rysunek 3.4



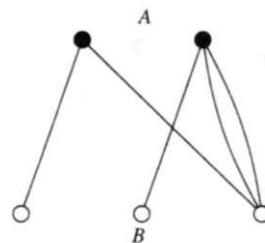
Rysunek 3.5

Grafy platońskie

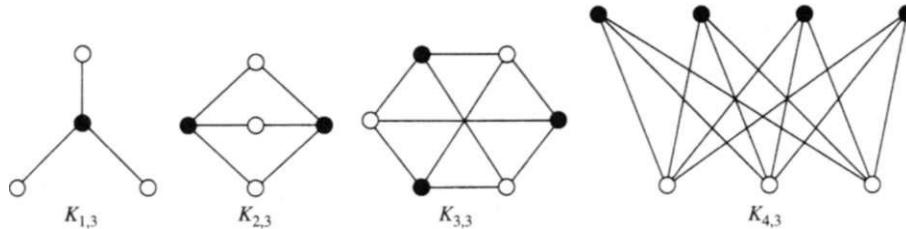
Szczególne miejsce wśród grafów regularnych zajmują **grafy platońskie**, utworzone z wierzchołków i krawędzi pięciu wielościanów foremnych (platońskich) — czworościanu, sześciangu, ośmiościanu, dwunastościanu i dwudziestościanu (patrz rys. 3.5 na stronie 31).

Grafy dwudzielne

Jeśli zbiór wierzchołków grafu G może być podzielony na dwa zbiory rozłączne A i B w taki sposób, by każda krawędź G łączyła wierzchołek zbioru A z wierzchołkiem zbioru B , to taki graf G nazywamy **grafem dwudzielnym** (por. rys. 3.6). Równoważnie, graf dwudzielny to taki graf, którego wierzchołki można pokolorować dwoma kolorami, czarnym i białym, w taki sposób, by każda krawędź łączyła wierzchołek czarny (należący do zbioru A) z wierzchołkiem białym (należącym do zbioru B).



Rysunek 3.6



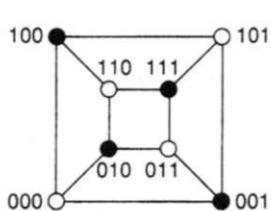
Rysunek 3.7

Graf pełny dwudzielny jest to graf dwudzielny, w którym każdy wierzchołek zbioru A jest połączony dokładnie jedną krawędzią z każdym wierzchołkiem zbioru B . Graf pełny dwudzielny mający r czarnych i s białych wierzchołków

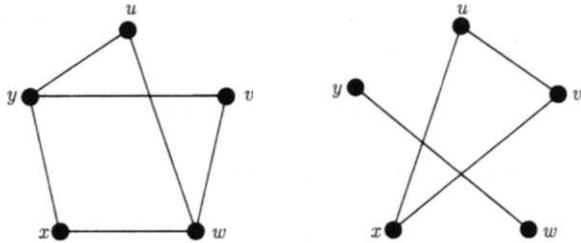
oznaczamy symbolem $K_{r,s}$; grafy $K_{1,3}$, $K_{2,3}$, $K_{3,3}$ i $K_{4,3}$ są pokazane na rysunku 3.7. Powinniście sprawdzić, że graf $K_{r,s}$ ma $r + s$ wierzchołków i rs krawędzi.

Kostki

Szczególnie ważną rolę wśród regularnych grafów dwudzielnych odgrywają kostki. **k -kostką** Q_k nazywamy graf, którego wierzchołki odpowiadają ciągom (a_1, a_2, \dots, a_k) takim, że każdy wyraz a_i jest równy 0 lub 1, i którego krawędzie łączą ciągi różniące się dokładnie jednym wyrazem. Zauważmy, że grafem sześciianu jest graf Q_3 (patrz rys. 3.8). Powinniście sprawdzić, że graf Q_k ma 2^k wierzchołków i $k \cdot 2^{k-1}$ krawędzi oraz jest grafem regularnym stopnia k .



Rysunek 3.8



Rysunek 3.9

Dopełnienie grafu prostego

Jeśli G jest grafem prostym, którego zbiorem wierzchołków jest $V(G)$, to **dopełnieniem** \bar{G} grafu G jest graf prosty, którego zbiorem wierzchołków jest $V(G)$ i w którym dwa wierzchołki są sąsiednie wtedy i tylko wtedy, gdy *nie* są sąsiednie w grafie G . Na przykład na rysunku 3.9 widzimy graf i jego dopełnienie. Zauważmy, że dopełnieniem grafu pełnego jest graf pusty, a dopełnieniem grafu pełnego dwudzielnego jest suma dwóch grafów pełnych.

Ćwiczenia do §3

3.1^r Narysuj następujące grafy:

- (a) graf pusty N_5 ,
- (b) graf pełny K_6 ,
- (c) graf pełny dwudzielny $K_{2,4}$,
- (d) sumę grafów $K_{1,3}$ i W_4 ,
- (e) dopełnienie grafu cyklicznego C_4 .

- 3.2^r** Ile krawędzi ma każdy z następujących grafów:
- K_{10} ,
 - $K_{5,7}$,
 - Q_4 ,
 - W_8 ,
 - graf Petersena?
- 3.3** Ile wierzchołków i krawędzi ma każdy z grafów platońskich?
- 3.4^r** Znajdź w tabeli na rysunku 2.9 wszystkie grafy regularne i grafy dwudzielne.
- 3.5** Podaj przykład (o ile istnieje) następujących grafów:
- grafu dwudzielnego regularnego stopnia 5;
 - dwudzielnego grafu platońskiego;
 - grafu pełnego będącego kołem;
 - grafu kubicznego mającego 11 wierzchołków;
 - grafu regularnego stopnia 4, różnego od K_4 , $K_{4,4}$ i Q_4 .
- 3.6^r** Narysuj wszystkie proste grafy kubiczne mające co najwyżej 8 wierzchołków.
- 3.7** **Graf pełny trójdzielny** $K_{r,s,t}$ składa się z trzech zbiorów wierzchołków (mających odpowiednio r , s i t elementów), a jego krawędzie łączą dwa wierzchołki wtedy i tylko wtedy, gdy te wierzchołki leżą w różnych zbiorach. Narysuj grafy $K_{2,2,2}$ i $K_{3,3,2}$ oraz wyznacz liczbę krawędzi grafu $K_{3,4,5}$.
- 3.8** Graf prosty izomorficzny ze swoim dopełnieniem nazywamy grafem **samodopełniającym**.
- Udowodnij, że jeśli graf G jest samodopełniający, to ma $4k$ lub $4k + 1$ wierzchołków, gdzie k jest liczbą całkowitą.
 - Wyznacz wszystkie grafy samodopełniające mające 4 i 5 wierzchołków.
 - Znajdź graf samodopełniający mający 8 wierzchołków.
- 3.9^{*}** **Grafem krawędziowym** $L(G)$ grafu prostego G nazywamy graf, którego wierzchołki stoją we wzajemnie jednoznacznej odpowiedniości z krawędziami grafu G i taki, że jego wierzchołki są sąsiednie wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiadające im krawędzie grafu G są sąsiednie.
- Pokaż, że grafy K_3 i $K_{1,3}$ mają ten sam graf krawędziowy.
 - Pokaż, że graf krawędziowy czworościanu jest grafem ośmiościanu.
 - Udowodnij, że jeśli graf G jest grafem regularnym stopnia k , to jego graf krawędziowy $L(G)$ jest grafem regularnym stopnia $2k - 2$.
 - Wyznacz wzór na liczbę krawędzi grafu $L(G)$ w zależności od stopni wierzchołków grafu G .
 - Wykaż, że graf $L(K_5)$ jest dopełnieniem grafu Petersena.
- 3.10^{*}** **Automorfizmem** φ grafu prostego G nazywamy przekształcenie wzajemnie jednoznaczne zbioru wierzchołków G w ten sam zbiór o tej własności, że wierzchołki

$\varphi(v)$ i $\varphi(w)$ są sąsiednie wtedy i tylko wtedy, gdy v i w są sąsiednie. **Grupą automorfizmów** $\Gamma(G)$ grafu G nazywamy grupę wszystkich automorfizmów G ze składaniem jako działaniem grupowym.

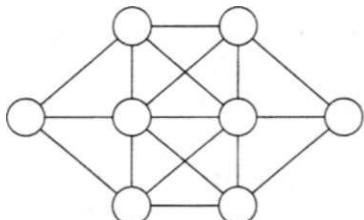
- (a) Udowodnij, że grupy $\Gamma(G)$ i $\Gamma(\bar{G})$ są izomorficzne.
- (b) Wyznacz grupy $\Gamma(K_n)$, $\Gamma(K_{r,s})$ i $\Gamma(C_n)$.
- (c) Wykorzystaj ćwiczenia (a) i (b) oraz ćwiczenie 3.9(e) do wyznaczenia grupy automorfizmów grafu Petersena.

§4 Trzy łamigłówki

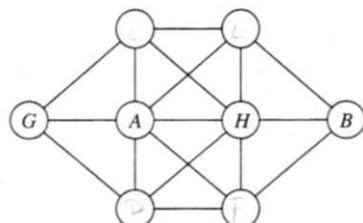
W tym paragrafie pokażemy trzy łamigłówki, do rozwiązania których można wykorzystać pomysły z teorii grafów. Zwróć uwagę na to, że w każdej z tych łamigłówek narysowanie odpowiedniego grafu ułatwia zrozumienie problemu.

Zadanie o ośmiu kółkach

Umieść litery A, B, C, D, E, F, G, H w ośmiu kółkach na rysunku 4.1 w taki sposób, by żadna litera nie sąsiadowała z literą występującą bezpośrednio po niej w alfabetie.



Rysunek 4.1



Rysunek 4.2

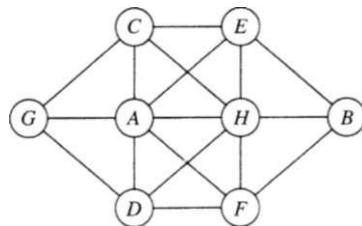
Zauważmy najpierw, że próbowanie wszystkich możliwości nie jest rozwiązaniem praktycznym, gdyż istnieje $8! = 40\ 320$ sposobów rozmieszczenia ośmiu liter w ośmiu kółkach. Potrzebujemy zatem bardziej systematycznego podejścia do problemu.

Zauważmy, że:

- (1) najłatwiej umieścić litery A i H , gdyż każda z nich ma tylko jedną literę, z którą nie może sąsiadować (mianowicie B i G , odpowiednio);
- (2) najtrudniej wypełnić kółka w środku, gdyż każde sąsiaduje z sześcioma innymi.

To sugeruje, by umieścić litery A i H w środkowych kółkach. Jeśli umieścimy literę A na lewo od H , to jedynymi możliwymi miejscami dla B i G będą miejsca pokazane na rysunku 4.2.

Literę C należy teraz umieścić w lewej części rysunku, a F w prawej. Teraz już łatwo umieścić pozostałe litery tak, jak na rysunku 4.3.



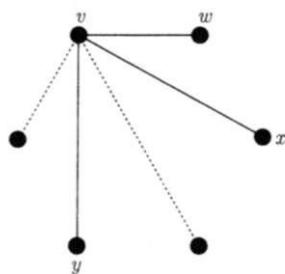
Rysunek 4.3

Sześć osób na przyjęciu

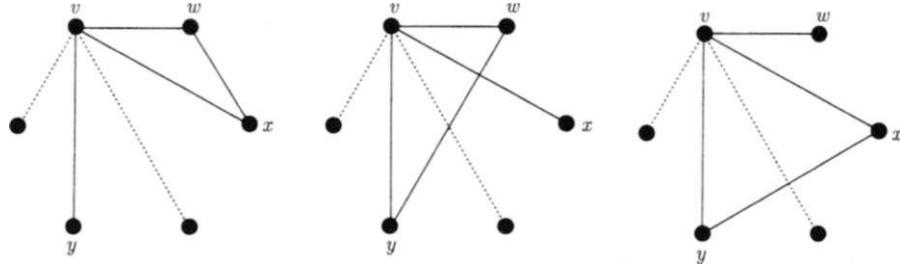
Udowodnij, że w dowolnej grupie sześciu osób zawsze istnieją albo trzy osoby znające się nawzajem, albo trzy osoby, z których żadna nie zna pozostałych dwóch.

Aby rozwiązać to zadanie, narysujemy graf, w którym wierzchołki będą reprezentować osoby i dwa wierzchołki będą połączone linią ciągłą, jeśli odpowiednie osoby znają się, a linią przerywaną, jeśli się nie znają. Musimy wykazać, że zawsze istnieje trójkąt narysowany linią ciągłą lub trójkąt narysowany linią przerywaną.

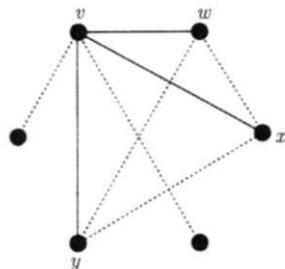
Niech v będzie dowolnym wierzchołkiem. Wtedy musi istnieć dokładnie pięć krawędzi incydentnych z v , ciągłych lub przerywanych, a więc co najmniej trzy z nich muszą być tego samego typu. Przypuśćmy, że istnieją trzy ciągłe krawędzie (patrz rys. 4.4); przypadek, gdy istnieją trzy krawędzie przerywane, jest analogiczny.



Rysunek 4.4



Rysunek 4.5



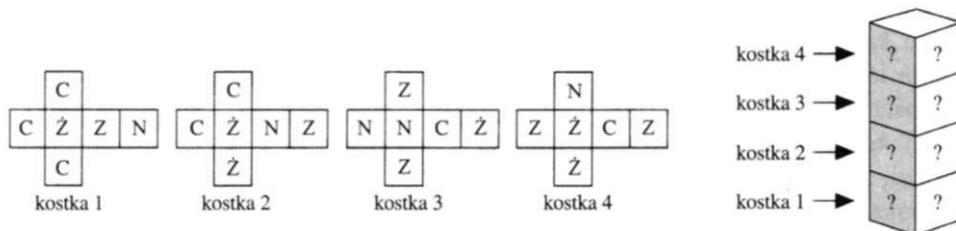
Rysunek 4.6

Jeśli osoby odpowiadające wierzchołkom w i x znają się, to wierzchołki v , w i x tworzą trójkąt narysowany linią ciągłą, co zakończy dowód. Podobnie, jeśli osoby odpowiadające wierzchołkom w i y lub wierzchołkom x i y znają się, to znów otrzymamy trójkąt narysowany linią ciągłą. Te trzy przypadki są pokazane na rysunku 4.5.

Wreszcie, jeśli żadne dwie osoby odpowiadające wierzchołkom w , x i y nie znają się, to wierzchołki w , x i y tworzą trójkąt narysowany linią przerywaną, co kończy dowód (por. rys. 4.6).

Zadanie o czterech kostkach

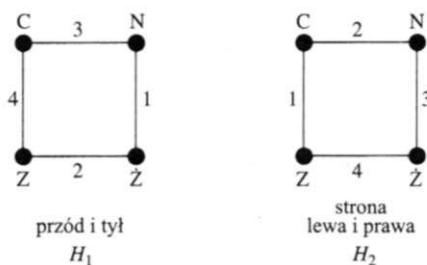
Ten paragraf zakończymy łamigłówką, która kiedyś była popularna pod nazwą *Instant Insanity*.



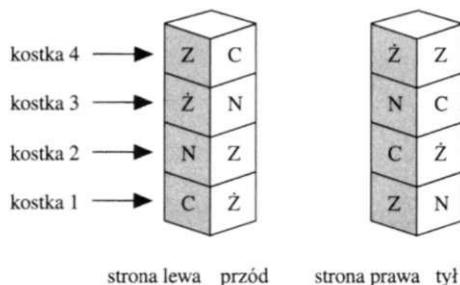
Rysunek 4.7

(c) każdy podgraf jest grafem regularnym stopnia 2; stąd wyniknie, że każdy kolor pojawi się dokładnie dwa razy na ścianach przedniej i tylnej (po jednym razie na każdej) i dokładnie dwa razy na ścianach bocznych (po jednym razie na każdej).

Te podgrafy dla naszego konkretnego przykładu są pokazane na rysunku 4.10, a rozwiązanie zadania może być odczytane z tych podgrafów tak, jak na rysunku 4.11.



Rysunek 4.10



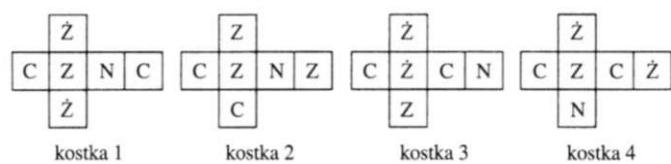
Rysunek 4.11

Ćwiczenia do §4

4.1^r Znajdź inne rozwiązanie zadania o ośmiu kółkach.

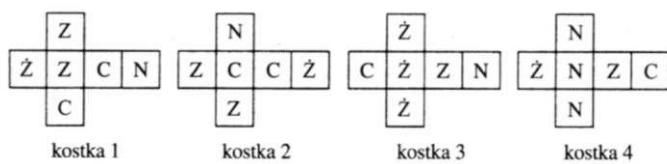
4.2^r Pokaż, że istnieje taka grupa pięciu osób, w której nie ma ani trzech osób znających się nawzajem, ani trzech osób takich, że żadna z nich nie zna dwóch pozostałych.

4.3^r Znajdź rozwiązanie zadania o czterech kostkach dla zestawu kostek pokazanego na rysunku 4.12.



Rysunek 4.12

4.4 Pokaż, że zadanie o czterech kostkach dla zestawu kostek pokazanego na rysunku 4.13 nie ma rozwiązania.



Rysunek 4.13

4.5* Udowodnij, że podane w tekście rozwiązanie zadania o czterech kostkach jest jedynym rozwiązaniem dla tego zestawu kostek.

3 Rozdział Drogi i cykle

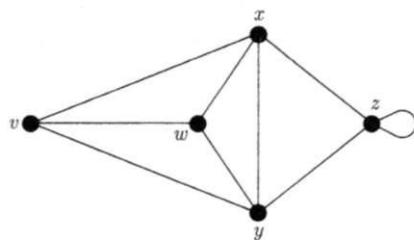
... Tak wiele dróg się wiję,
choć świat jedynie oczekuje,
by miłym być.

ELLA WHEELER WILCOX

Teraz, gdy znamy wiele przykładów grafów, możemy przyjrzeć się ich własnościom. Na początek potrzebujemy pewnych pojęć opisujących sposoby „przechodzenia z jednego wierzchołka do innego”. Definicje tych pojęć poznamy w paragrafie 5 i tam też udowodnimy pewne fakty dotyczące spójności. W paragrafach 6 i 7 zajmiemy się dwoma szczególnymi typami grafów — grafami mającymi ścieżki zawierające wszystkie krawędzie oraz grafami mającymi cykle przechodzące przez wszystkie wierzchołki. Ostatni w tym rozdziale paragraf 8 jest poświęcony pewnym zastosowaniom dróg i cykli.

§5 Spójność

Trasą (lub **marszrutą**) w danym grafie G nazywamy skończony ciąg krawędzi postaci $v_0v_1, v_1v_2, \dots, v_{m-1}v_m$, zapisywany również w postaci $v_0 \rightarrow v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_m$, w którym każde dwie kolejne krawędzie są albo sąsiednie, albo identyczne. Taka trasa wyznacza ciąg wierzchołków v_0, v_1, \dots, v_m . Wierzchołek v_0 nazywamy **wierzchołkiem początkowym**, a wierzchołek v_m **wierzchołkiem końcowym** trasy; mówimy też wtedy o **trasie od wierzchołka v_0 do wierzchołka v_m** . Liczbę krawędzi na trasie nazywamy **długością trasy**; na przykład ciąg $v \rightarrow w \rightarrow x \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow z \rightarrow y \rightarrow w$ na rysunku 5.1 jest trasą długości 7 od wierzchołka v do wierzchołka w .

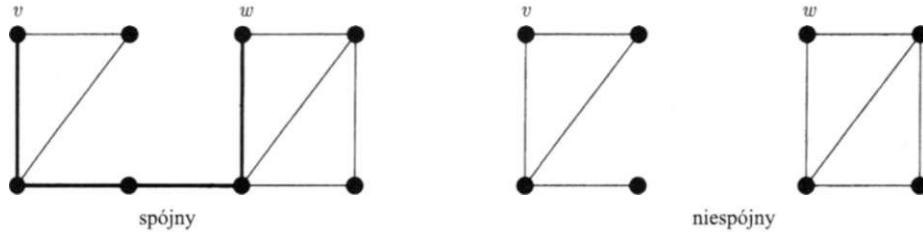


Rysunek 5.1

Pojęcie trasy jest na ogół zbyt ogólne jak na nasze potrzeby, wprowadzimy więc pewne ograniczenia. Trasę, w której wszystkie krawędzie są różne, nazywamy **ścieżką**. Jeśli ponadto wierzchołki v_0, v_1, \dots, v_m są różne (z wyjątkiem, być może, równości $v_0 = v_m$), to ścieżkę nazwiemy **drogą**. Droga lub ścieżka jest **zamknięta**, jeśli $v_0 = v_m$, a ścieżkę zamkniętą zawierającą co najmniej jedną krawędź nazywamy **cyklem**. Zauważmy, że każda pętla lub para krawędzi wielokrotnych jest cyklem.

Aby wyjaśnić te pojęcia, przyjrzyjmy się rysunkowi 5.1. Zobaczmy, że trasa $v \rightarrow w \rightarrow x \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow z \rightarrow x$ jest ścieżką, trasa $v \rightarrow w \rightarrow x \rightarrow y \rightarrow z$ drogą, trasa $v \rightarrow w \rightarrow x \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow x \rightarrow v$ ścieżką zamkniętą, a trasa $v \rightarrow w \rightarrow x \rightarrow y \rightarrow v$ cyklem. Cykl długości 3, taki jak $v \rightarrow w \rightarrow x \rightarrow v$, nazywamy **trójkątem**.

Zauważmy, że graf jest **spójny** wtedy i tylko wtedy, gdy każda para wierzchołków jest połączona drogą (por. rys. 5.2).



Rysunek 5.2

Zauważmy też, że G jest grafem dwudzielnym wtedy i tylko wtedy, gdy każdy cykl w G ma długość parzystą. Udowodnimy teraz połowę tego twierdzenia, pozostawiając drugą połowę Czytelnikowi (zob. ćwiczenie 5.3).

TWIERDZENIE 5.1. *Jeśli G jest grafem dwudzielnym, to każdy cykl w G ma długość parzystą.*

Dowód. Ponieważ graf G jest dwudzielny, więc możemy podzielić jego zbiór wierzchołków na dwa zbiory rozłączne A i B w taki sposób, by każda krawędź grafu G łączyła wierzchołek ze zbioru A z wierzchołkiem ze zbioru B . Niech $v_0 \rightarrow v_1 \rightarrow \dots \rightarrow v_m \rightarrow v_0$ będzie cyklem w grafie G i założymy (bez straty ogólności), że wierzchołek v_0 należy do zbioru A . Wtedy wierzchołek v_1 należy do zbioru B , v_2 należy do A i tak dalej. Ponieważ wierzchołek v_m musi należeć do zbioru B , cykl ma długość parzystą. ■

Zbadamy teraz, jakie mogą być ograniczenia liczby krawędzi spójnego grafu prostego mającego n krawędzi. Taki graf ma najmniej krawędzi wtedy, gdy nie ma cykli, a najwięcej wtedy, gdy jest grafem pełnym. Stąd wynika, że liczba krawędzi

musi być zawarta między $n - 1$ a $n(n - 1)/2$. Co więcej, udowodnimy twierdzenie silniejsze, którego szczególnym przypadkiem jest to ograniczenie.

TWIERDZENIE 5.2. *Niech G będzie grafem prostym mającym n wierzchołków. Jeśli graf G ma k składowych, to liczba m jego krawędzi spełnia nierówności*

$$n - k \leq m \leq (n - k)(n - k + 1)/2.$$

Dowód. Udosowodnimy prawdziwość dolnego ograniczenia $m \geq n - k$ przez indukcję względem liczby krawędzi grafu G . Dla grafu pustego ta nierówność jest trywialna. Jeśli graf G ma najmniejszą możliwą liczbę krawędzi (powiedzmy m_0), to usunięcie którejkolwiek krawędzi powoduje zwiększenie liczby składowych o 1 i powstały w ten sposób graf ma n wierzchołków, $k + 1$ składowych oraz $m_0 - 1$ krawędzi. Z założenia indukcyjnego wynika, że $m_0 - 1 \geq n - (k + 1)$, skąd otrzymujemy $m_0 \geq n - k$, czego należało dowieść.

Aby dowieść ograniczenia górnego, możemy założyć, że każda składowa grafu G jest grafem pełnym. Przypuśćmy zatem, że istnieją dwie składowe C_i oraz C_j mające odpowiednio n_i i n_j wierzchołków, przy czym $n_i \geq n_j \geq 1$. Jeśli zastąpimy składowe C_i oraz C_j grafami pełnymi mającymi odpowiednio $n_i + 1$ i $n_j - 1$ wierzchołków, to całkowita liczba wierzchołków nie zmieni się, a liczba krawędzi zmieni się o wielkość

$$((n_i + 1)n_i - n_i(n_i - 1))/2 - (n_j(n_j - 1) - (n_j - 1)(n_j - 2))/2 = n_i - n_j + 1,$$

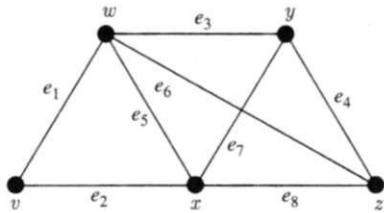
która jest liczbą dodatnią. Wynika stąd, że aby graf G miał maksymalną liczbę krawędzi, musi składać się z grafu pełnego mającego $n - k + 1$ wierzchołków i z $k - 1$ wierzchołków izolowanych. Stąd wynika teza twierdzenia. ■

WNIOSEK 5.3. *Każdy graf prosty, który ma n wierzchołków i więcej niż $(n - 1)(n - 2)/2$ krawędzi, jest spójny.*

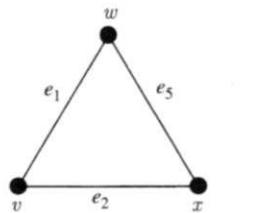
Inne podejście do badania grafów spójnych polega na zadaniu pytania „jak bardzo spójny jest graf spójny?” Jednym z możliwych sposobów rozumienia tego pytania jest zapytanie o to, ile krawędzi lub wierzchołków należy usunąć z grafu, by stał się on niespójny. Zakończymy ten paragraf paroma definicjami pojęć użytecznych w badaniu takich zagadnień.

Zbiorem rozspajającym grafu spójnego G nazywamy zbiór krawędzi, których usunięcie spowoduje, że graf G przestanie być spójny. Na przykład w grafie pokazanym na rysunku 5.3 oba zbiory $\{e_1, e_2, e_5\}$ i $\{e_3, e_6, e_7, e_8\}$ są zbiorami rozspajającymi; graf niespójny, powstały po usunięciu drugiego z tych zbiorów, jest pokazany na rysunku 5.4.

Definiujemy następnie **rozcięcie** jako zbiór rozspajający, którego żaden podzbiór właściwy nie jest już zbiorem rozspajającym. W powyższym przykładzie tylko drugi ze zbiorów rozspajających jest rozcięciem. Zauważmy, że usunięcie

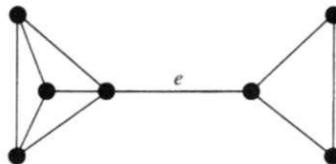


Rysunek 5.3



Rysunek 5.4

krawędzi należących do pewnego rozcięcia zawsze powoduje powstanie grafu mającego dokładnie dwie składowe. Jeśli rozcięcie składa się z jednej krawędzi e , to tę krawędź nazywamy **mostem** (patrz rys. 5.5).



Rysunek 5.5

Definicje tych pojęć można łatwo rozszerzyć na grafy niespójne. Jeśli G jest takim grafem, to **zbiorem rozspajającym** grafu G nazywamy zbiór krawędzi, których usunięcie zwiększa liczbę składowych grafu G , a **rozcięciem** grafu G nazywamy zbiór rozspajający, którego żaden podzbiór właściwy nie jest zbiorem rozspajającym.

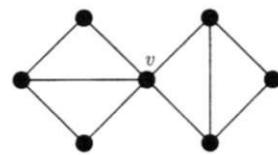
Jeśli graf G jest spójny, to jego **spójnością krawędziową** $\lambda(G)$ nazywamy liczbę krawędzi należących do najmniej licznego rozcięcia grafu G . Zatem $\lambda(G)$ jest najmniejszą liczbą krawędzi, które należy usunąć, by graf przestał być spójny. Na przykład, jeśli graf G jest grafem pokazanym na rysunku 5.3, to $\lambda(G) = 2$ i odpowiednim rozcięciem jest zbiór $\{e_1, e_2\}$. Mówimy też, że graf G jest **k -spójny krawędziowo**, jeśli $\lambda(G) \geq k$. Zatem graf przedstawiony na rysunku 5.3 jest 1-spójny krawędziowo i 2-spójny krawędziowo, ale nie jest 3-spójny krawędziowo.

Potrzebujemy również analogicznych pojęć dotyczących usuwania wierzchołków. **Zbiorem rozdzielającym** grafu spójnego G nazywamy zbiór wierzchołków, których usunięcie powoduje, że ten graf przestaje być spójny; przypomnijmy, że jeśli usuwamy wierzchołek, to usuwamy również wszystkie krawędzie z nim incydentne. Na przykład w grafie G pokazanym na rysunku 5.3 zbiory $\{w, x\}$ i $\{w, x, y\}$ są zbiorami rozdzielającymi; graf powstały z grafu G po usunięciu wierzchołków należących do pierwszego z tych zbiorów jest pokazany na rysunku

5.6. Jeśli zbiór rozdzielający składa się z jednego tylko wierzchołka v , to ten wierzchołek nazywamy **wierzchołkiem rozcinającym** (patrz rys. 5.7). Podobnie jak wyżej, przenosimy te definicje na przypadek grafów niespójnych.



Rysunek 5.6



Rysunek 5.7

Jeśli graf G jest spójny i nie jest grafem pełnym, to jego **spójnością** (wierzchołkową) $\kappa(G)$ nazywamy liczbę elementów najmniej licznego zbioru rozdzielającego. Zatem $\kappa(G)$ jest najmniejszą liczbą wierzchołków, które należy usunąć, by graf powstały w ten sposób z grafu G nie był spójny. Na przykład, jeśli graf G jest grafem pokazanym na rysunku 5.3, to $\kappa(G) = 2$ i odpowiednim zbiorem rozdzielającym jest zbiór $\{w, x\}$. Mówimy również, że graf G jest **k -spójny**, jeśli $\kappa(G) \geq k$. Zatem graf z rysunku 5.3 jest 1-spójny i jest 2-spójny, ale nie jest 3-spójny. Można udowodnić, że jeśli G jest dowolnym grafem spójnym, to $\kappa(G) \leq \lambda(G)$.

Na koniec zauważmy, że istnieją uderzające i nieoczekiwane podobieństwa między własnościami cykli i rozcięć. Przykłady tych podobieństw można zaobserwować w ćwiczeniach 5.11, 5.12, 5.13, 6.8 i 9.10. Przyczyny takiego stanu rzeczy ujawnimy w rozdziale 9 i wszystko wtedy stanie się jasne!

Ćwiczenia do §5

5.1^r Znajdź w grafie Petersena

- (a) ścieżkę długości 5,
- (b) drogę długości 9,
- (c) cykle długości 5, 6, 8 i 9,
- (d) rozcięcia składające się z 3, 4 i 5 krawędzi.

5.2^r **Obwodem** grafu nazywamy długość najkrótszego cyklu w tym grafie. Wyznacz obwód grafu

- (a) K_9 ,
- (b) $K_{5,7}$,
- (c) C_8 ,
- (d) W_8 ,
- (e) Q_5 ,
- (f) Petersena,
- (g) dwunastościanu.

- 5.3** Udowodnij twierdzenie odwrotne do twierdzenia 5.1, które mówi, że jeśli każdy cykl w grafie G ma długość parzystą, to ten graf jest grafem dwudzielnym.
- 5.4^r** Udowodnij, że graf prosty i jego dopełnienie nie mogą jednocześnie być niespójne.
- 5.5^r** Wyznacz liczby $\kappa(G)$ i $\lambda(G)$ dla następujących grafów G :
- (a) C_6 ,
 - (b) W_6 ,
 - (c) $K_{4,7}$,
 - (d) Q_4 .
- 5.6** (a) Wykaż, że jeśli graf G jest spójny i minimalny stopień wierzchołka wynosi k , to $\lambda(G) \leq k$.
 (b) Narysuj graf G , w którym minimalny stopień wierzchołka wynosi k i taki, że $\kappa(G) < \lambda(G) < k$.
- 5.7** (a) Udowodnij, że graf jest 2-spójny wtedy i tylko wtedy, gdy każda para wierzchołków znajduje się w tym samym cyklu.
 (b) Sformułuj podobne twierdzenie dla grafów 2-spójnych krawędziowo.
- 5.8** Niech G będzie grafem spójnym, którego zbiorem wierzchołków jest $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, i mającym m krawędzi i t trójkątów.
- (a) Udowodnij, że jeśli \mathbf{A} jest macierzą sąsiedztwa grafu G , to liczba tras długości 2 z wierzchołka v_i do wierzchołka v_j jest równa wyrazowi o indeksach i, j macierzy \mathbf{A}^2 .
 - (b) Wyprowadź stąd wniosek, że suma wyrazów stojących na przekątnej macierzy \mathbf{A}^2 wynosi $2m$.
 - (c) Wyznacz liczbę tras długości 3 prowadzących z wierzchołka v_i do wierzchołka v_j i wywniosuskij z niej, że suma wyrazów stojących na przekątnej macierzy \mathbf{A}^3 jest równa $6t$.
- 5.9** **Odległośćą** $d(v, w)$ wierzchołka v od wierzchołka w w grafie spójnym nazywamy długość najkrótszej drogi prowadzącej z v do w .
- (a) Wykaż, że jeśli $d(v, w) \geq 2$, to istnieje wierzchołek z taki, że $d(v, z) + d(z, w) = d(v, w)$.
 - (b) Wykaż, że w grafie Petersena $d(v, w) = 1$ lub $d(v, w) = 2$ dla dowolnej pary różnych wierzchołków v i w .
- 5.10*** Niech G będzie grafem prostym, który ma $2k$ wierzchołków i nie zawiera trójkątów. Wykaż za pomocą indukcji względem k , że graf G ma co najwyżej k^2 krawędzi i podaj przykład grafu, dla którego to ograniczenie górne jest przyjmowane. (To twierdzenie jest nazywane *twierdzeniem ekstremalnym Turána*.)

5.11* (a) Udowodnij, że jeśli dwa różne cykle w grafie G zawierają tę samą krawędź e , to w grafie G istnieje cykl nie zawierający e .
 (b) Udowodnij podobne twierdzenie dla rozcięć zamiast cykli.

5.12* (a) Udowodnij, że jeśli C jest cyklem i C^* rozcięciem w grafie spójnym G , to C i C^* mają parzystą liczbę wspólnych krawędzi.
 (b) Udowodnij, że jeśli pewien zbiór S krawędzi grafu G ma parzystą liczbę wspólnych krawędzi z każdym rozcięciem grafu G , to zbiór S może być podzielony na cykle o rozłącznych zbiorach krawędzi.

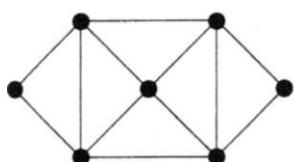
5.13* Podzbiór E zbioru krawędzi grafu G nazywamy zbiorem **niezależnym**, jeśli E nie zawiera żadnego cyklu. Udowodnij, że:

- (a) każdy podzbiór zbioru niezależnego jest zbiorem niezależnym;
- (b) jeśli I i J są niezależnymi zbiorami krawędzi oraz $|I| > |J|$, to istnieje krawędź e należąca do zbioru J i nie należąca do zbioru I taka, że zbiór $I \cup \{e\}$ jest niezależny.

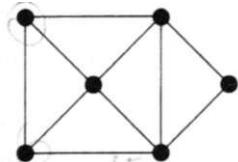
Wykaż, że twierdzenia (a) i (b) są prawdziwe również wtedy, gdy zastąpimy słowo „cykl” słowem „rozcięcie”.

§6 Grafy eulerowskie

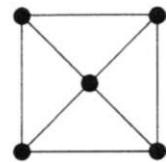
Graf spójny G nazywamy **grafem eulerowskim**, jeśli istnieje zamknięta ścieżka zawierająca każdą krawędź G . Taką ścieżkę nazywamy **cyklem Eulera**¹. Zauważmy, że ta definicja wymaga, by cykl Eulera przechodził przez każdą krawędź dokładnie jeden raz. Graf, który nie jest grafem eulerowskim, nazwiemy grafem **półeulerowskim**, jeśli istnieje ścieżka zawierająca każdą krawędź grafu G . Na rysunkach 6.1, 6.2 i 6.3 widzimy przykłady grafów: eulerowskiego, półeulerowskiego oraz grafu, który nie jest grafem eulerowskim.



Rysunek 6.1



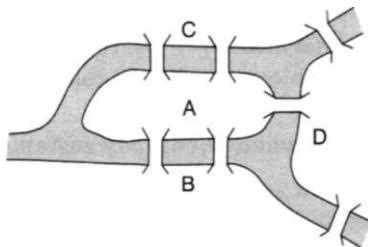
Rysunek 6.2



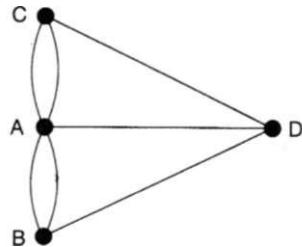
Rysunek 6.3

¹ Jest to pewna niekonsekwencja: od cyklu żądaliśmy, by był drogą, tzn. by nie przechodził przez żaden wierzchołek więcej niż jeden raz, co nie musi mieć miejsca w przypadku cykli Eulera. Jednak ta nazwa jest tak często używana, że należało uczynić ten wyjątek. (przyp. tłum.)

Zadania dotyczące grafów eulerowskich często występują w książkach z rozrywkami matematycznymi. Takie zadanie może polegać na tym, by narysować daną figurę bez odrywania ołówka od papieru i bez rysowania tej samej linii wiele razy. Nazwa „eulerowski” wywodzi się stąd, że Euler był pierwszym człowiekiem, który rozwiązał słynny **problem mostów królewieckich**. Pytanie brzmiało: czy można przejść dokładnie jeden raz przez każdy z siedmiu mostów pokazanych na rysunku 6.4 i powrócić do punktu wyjścia. Jest ono równoważne z pytaniem o to, czy graf pokazany na rysunku 6.5 ma cykl Eulera. Tłumaczenie oryginalnej pracy Eulera i dyskusję różnych podobnych problemów znajdzie Czytelnik w książce Biggsa, Lloyda i Wilsona [11].



Rysunek 6.4



Rysunek 6.5

Pytanie, które nasuwa się natychmiast, brzmi: „czy możliwe jest znalezienie warunku koniecznego i wystarczającego na to, by dany graf był eulerowski?” Zanim odpowiemy na to pytanie w twierdzeniu 6.2, udowodnimy prosty lemat.

LEMAT 6.1. *Jeśli w grafie G każdy wierzchołek ma stopień równy co najmniej 2, to graf G zawiera cykl.*

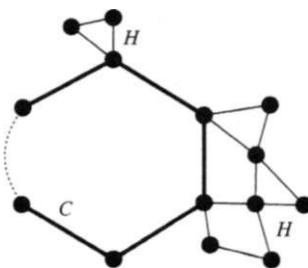
Dowód. Jeśli graf G ma pętle lub krawędzie wielokrotne, to lemat jest trywialny. Możemy zatem założyć, że graf G jest grafem prostym. Niech v będzie dowolnym wierzchołkiem grafu G . Tworzymy trasę $v \rightarrow v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots$ przez indukcję, wybierając jako v_1 dowolny wierzchołek sąsiadujący z wierzchołkiem v , a następnie, dla każdego $i > 1$ wybierając jako wierzchołek v_{i+1} dowolny wierzchołek sąsiadujący z v_i , różny od v_{i-1} ; istnienie takiego wierzchołka wynika z założenia o grafie G . Ponieważ graf G ma tylko skończenie wiele wierzchołków, więc wreszcie musimy wybrać wierzchołek wybrany już wcześniej. Jeśli v_k jest pierwszym takim wierzchołkiem, to część trasy znajdująca się między pierwszym i drugim wystąpieniem wierzchołka v_k jest szukanym cyklem. ■

TWIERDZENIE 6.2. (Euler, 1736) *Graf spójny G jest grafem eulerowskim wtedy i tylko wtedy, gdy stopień każdego wierzchołka grafu G jest liczbą parzystą.*

Dowód. \Rightarrow Przypuśćmy, że P jest cyklem Eulera w grafie G . Za każdym razem, gdy cykl P przechodzi przez wierzchołek, udział krawędzi należących do tego cyklu w stopniu danego wierzchołka zwiększa się o 2. Ponieważ każda krawędź występuje w P dokładnie jeden raz, więc stopień każdego wierzchołka musi być liczbą parzystą.

\Leftarrow Prowadzimy dowód przez indukcję względem liczby krawędzi grafu G . Założymy, że stopień każdego wierzchołka jest liczbą parzystą. Ponieważ graf G jest spójny, więc każdy wierzchołek ma stopień równy co najmniej 2, a zatem z lematu 6.1 wynika, że graf G ma cykl C . Jeśli cykl C zawiera każdą krawędź grafu G , to twierdzenie jest udowodnione. W przeciwnym razie usuwamy z grafu G krawędzie należące do C , tworząc w ten sposób nowy graf H , być może niespójny, który ma mniej krawędzi niż graf G i w którym stopień każdego wierzchołka jest nadal liczbą parzystą. Z założenia indukcyjnego wynika, że każda składowa grafu H ma cykl Eulera. Ponieważ na mocy spójności każdej składowej grafu H ma co najmniej jeden wspólny wierzchołek z C , więc szukany cykl Eulera w G otrzymujemy przechodząc krawędzie C dotąd, aż napotkamy nieizolowany wierzchołek grafu H , przechodząc następnie przez cykl Eulera w tej składowej H , która zawiera napotkany wierzchołek, potem podążając znów wzduż cyklu C aż do napotkania następnej składowej grafu H i tak dalej. To postępowanie zakończy się, gdy powrócimy do wierzchołka wyjściowego (patrz rys. 6.6). ■

Ten dowód można łatwo zmodyfikować tak, by udowodnić następujące dwa twierdzenia. Szczegóły dowodów pominiemy.



Rysunek 6.6

Wniosek 6.3. *Graf spójny jest grafem eulerowskim wtedy i tylko wtedy, gdy jego zbiór krawędzi można podzielić na rozłączne cykle.*

Wniosek 6.4. *Graf spójny jest grafem półeulerowskim wtedy i tylko wtedy, gdy ma dokładnie dwa wierzchołki nieparzystego stopnia.*

Zauważmy, że w grafie półeulerowskim każda ścieżka Eulera musi zaczynać się w jednym wierzchołku nieparzystego stopnia i kończyć w drugim takim wierz-

chołku. Zauważmy również, że z lematu o uściskach dłoni wynika, iż żaden graf nie może mieć dokładnie jednego wierzchołka nieparzystego stopnia.

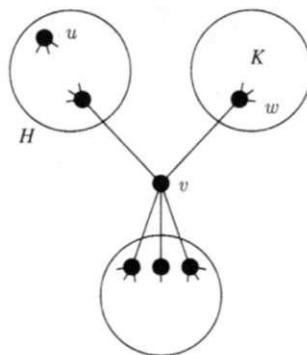
Zakończymy nasze rozważania dotyczące grafów eulerowskich podaniem algorytmu służącego do konstrukcji cyklu Eulera w danym grafie eulerowskim. Ten algorytm jest znany pod nazwą **algorytmu Fleury'ego**.

TWIERDZENIE 6.5. *Niech G będzie grafem eulerowskim. Wtedy następująca konstrukcja jest wykonalna i daje w wyniku cykl Eulera w grafie G .*

Zacznij cykl w dowolnym wierzchołku u i przechodź krawędzie w dowolnej kolejności, dbając jedynie o zachowanie następujących zasad:

- (1) *usuwaj z grafu przechodzone krawędzie i wierzchołki izolowane powstające w wyniku usuwania tych krawędzi;*
- (2) *w każdym momencie przechodź przez most tylko wtedy, gdy nie masz innej możliwości.*

Dowód. Pokażemy najpierw, że ta konstrukcja może być wykonana w każdym momencie. Przypuśćmy, że dotarliśmy właśnie do wierzchołka v . Jeśli $v \neq u$, to podgraf H , który pozostał po usunięciu przebytych krawędzi, jest spójny i zawiera tylko dwa wierzchołki nieparzystych stopni, u i v . Aby pokazać, że następny krok konstrukcji może być wykonany, musimy dowieść, że usunięcie następnej krawędzi nie rozspojni grafu H lub równoważnie, że wierzchołek v jest incydentny z co najwyżej jednym mostem. Ale gdyby tak nie było, to istniałby most vw taki, że składowa K grafu $H - vw$ zawierająca wierzchołek w nie zawierałaby wierzchołka u (patrz rys. 6.7). Ponieważ stopień wierzchołka w jest liczbą nieparzystą w składowej K , stopień pewnego innego wierzchołka w tej składowej też musi być liczbą nieparzystą, co prowadzi do sprzeczności. Jeśli natomiast $v = u$, to dowód jest w zasadzie taki sam, chyba że nie ma już więcej krawędzi incydentnych z wierzchołkiem u .



Rysunek 6.7

Należy jeszcze pokazać, że ta konstrukcja zawsze daje w wyniku cykl Eulera. Ale jest to oczywiste, bowiem nie mogą w grafie G pozostać krawędzie nie przebyte, gdy została usunięta ostatnia krawędź incydentna z wierzchołkiem u ; gdyby tak się stało, to usunięcie pewnej wcześniejszej krawędzi incydentnej z którąś z pozostałych krawędzi rozspójniłoby graf, co jednak przeczy zasadzie (2). ■

Ćwiczenia do §6

6.1^r Które z następujących grafów są eulerowskie? Które są półeulerowskie?

- (a) Graf pełny K_5 .
- (b) Graf pełny dwudzielny $K_{2,3}$.
- (c) Graf sześciianu.
- (d) Graf ośmiościanu.
- (e) Graf Petersena.

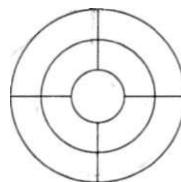
6.2^r Znajdź wszystkie grafy eulerowskie i półeulerowskie w tabeli na rysunku 2.9.

6.3 (a) Dla jakich wartości n graf K_n jest eulerowski?

- (b) Które grafy pełne dwudzielne są eulerowskie?
- (c) Które grafy platońskie są eulerowskie?
- (d) Dla jakich wartości n koło W_n jest grafem eulerowskim?
- (e) Dla jakich wartości k grafem eulerowskim jest k -kostka Q_k ?

6.4^r Niech G będzie grafem spójnym mającym k wierzchołków nieparzystych stopni (gdzie $k > 0$).

- (a) Wykaż, że minimalna liczba ścieżek takich, że każda krawędź należy do dokładnie jednej ścieżki, wynosi $k/2$.
- (b) Iloma ciągłymi pociągnięciami ołówka można narysować figurę pokazaną na rysunku 6.8 tak, by nie rysować żadnej linii dwukrotnie?

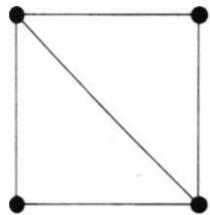


Rysunek 6.8

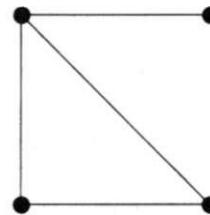
6.5^r Użyj algorytmu Fleury'ego do konstrukcji cyklu Eulera w grafie pokazanym na rysunku 6.9.

§7 Grafy hamiltonowskie

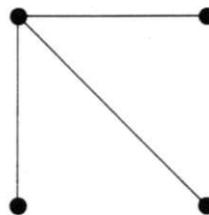
W poprzednim paragrafie zastanawialiśmy się, czy istnieje ścieżka zamknięta zawierająca wszystkie krawędzie danego grafu spójnego G . Można sformułować podobne pytanie: czy istnieje zamknięta ścieżka przechodząca dokładnie jeden raz przez każdy wierzchołek grafu G ? Zauważmy, że taka ścieżka musi być cyklem z wyjątkiem przypadku, gdy graf G jest grafem N_1 . Taki cykl nazywamy **cyklem Hamiltona**, a sam graf nazywamy **grafem hamiltonowskim**. Graf niehamiltonowski G nazywamy grafem **półhamiltonowskim**, jeśli istnieje droga przechodząca dokładnie jeden raz przez każdy wierzchołek. Na rysunkach 7.1, 7.2 i 7.3 widzimy przykłady grafów: hamiltonowskiego, półhamiltonowskiego i niehamiltonowskiego.



Rysunek 7.1

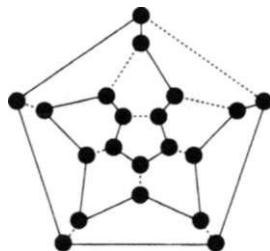


Rysunek 7.2



Rysunek 7.3

Nazwa „cykl Hamiltona” wzięła się stąd, że Sir William Hamilton badał istnienie takich cykli w grafie dwunastościanu, chociaż problemem ogólniejszym zajmował się wcześniej ks. T. P. Kirkman. Cykl taki jest pokazany na rysunku 7.4, na którym liniami ciągłymi zaznaczone są krawędzie należące do cyklu.



Rysunek 7.4

– W twierdzeniu 6.2 i wniosku 6.3 otrzymaliśmy warunki konieczne i wystarczające na to, by graf spójny był eulerowski, i możemy mieć nadzieję na uzyskanie podobnych charakteryzacji dla grafów hamiltonowskich. Okazuje się, że znalezie-

nie takiej charakteryzacji jest jednym z najważniejszych nieroziwiążanych problemów teorii grafów! Tak naprawdę, niewiele wiadomo o grafach hamiltonowskich w ogólności. Większość znanych twierdzeń ma postać: „jeśli graf G ma wystarczająco dużo krawędzi, to jest hamiltonowski”. Prawdopodobnie najsłynniejsze takie twierdzenie zawdzięczamy G. A. Diracowi i znane jest ono pod nazwą **twierdzenie Diraca**. Wyprowadzimy je z następującego twierdzenia ogólniejszego, pochodzącego od O. Orego.

TWIERDZENIE 7.1 (Ore, 1960). *Jeśli graf prosty G ma n wierzchołków (gdzie $n \geq 3$) oraz*

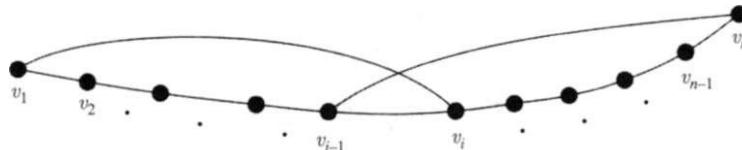
$$\deg(v) + \deg(w) \geq n$$

dla każdej pary wierzchołków niesąsiednich v i w , to graf G jest hamiltonowski.

Dowód. Założymy, że twierdzenie jest fałszywe i doprowadzimy do sprzeczności. Niech więc G będzie grafem *niehamiltonowskim* mającym n wierzchołków, spełniającym założenie dotyczące stopni wierzchołków. Dodając, jeśli trzeba, nowe krawędzie, możemy doprowadzić do tego, że graf G jest „prawie hamiltonowski”, w tym sensie, że dodanie jakiejkolwiek nowej krawędzi spowoduje powstanie cyklu Hamiltona. (Zauważmy, że dodawanie nowych krawędzi nie narusza warunku nałożonego na stopnie wierzchołków.) Wynika stąd, że w grafie G istnieje droga $v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_n \rightarrow v_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow v_{i+1} \rightarrow v_i \rightarrow v_1$ której wierzchołki v_1 i v_n nie są sąsiednie, skąd wynika, że $\deg(v_1) + \deg(v_2) \geq n$. Musi zatem istnieć wierzchołek v_i sąsiadujący z wierzchołkiem v_1 taki, że wierzchołek v_{i-1} sąsiaduje z v_n (patrz rys. 7.5). Ale to daje oczekiwana sprzeczność, gdyż droga

$$v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_{i-1} \rightarrow v_n \rightarrow v_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow v_{i+1} \rightarrow v_i \rightarrow v_1$$

jest cyklem Hamiltona. ■



Rysunek 7.5

WNIOSEK 7.2 (Dirac, 1952). *Jeśli w grafie prostym G , który ma n wierzchołków (gdzie $n \geq 3$), $\deg(v) \geq n/2$ dla każdego wierzchołka v , to graf G jest hamiltonowski.*

Dowód. Wniosek ten wynika natychmiast z twierdzenia 7.1, gdyż $\deg(v) + \deg(w) \geq n$ dla każdej pary wierzchołków v i w , niezależnie od tego, czy są one sąsiednie, czy nie. ■

Ćwiczenia do §7

7.1^r Które z następujących grafów są hamiltonowskie? Które są półhamiltonowskie?

- (a) Graf pełny K_5 . *h*
- (b) Graf pełny dwudzielny $K_{2,3}$. *p h*
- (c) Graf ośmiościanu. *hamilt.*
- (d) Koło W_6 . *hamilt.*
- (e) 4-kostka Q_4 . *hamil*

7.2^r Znajdź wszystkie grafy hamiltonowskie i półhamiltonowskie w tabeli na rysunku 2.9.

7.3 (a) Dla jakich wartości n graf K_n jest grafem hamiltonowskim?

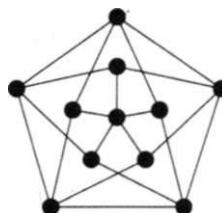
- (b) Które grafy pełne dwudzielne są hamiltonowskie?

- (c) Które grafy platońskie są hamiltonowskie?

- (d) Dla jakich wartości n koło W_n jest grafem hamiltonowskim?

- (e) Dla jakich wartości k grafem hamiltonowskim jest k -kostka Q_k ?

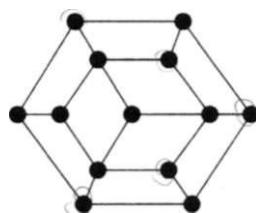
7.4 Wykaż, że graf Grötzscha pokazany na rysunku 7.6 jest grafem hamiltonowskim.



Rysunek 7.6

7.5 (a) Udowodnij, że jeśli graf dwudzielny G ma nieparzystą liczbę wierzchołków, to nie jest grafem hamiltonowskim.

- (b) Wyprowadź stąd wniosek, że graf pokazany na rysunku 7.7 nie jest grafem hamiltonowskim.



Rysunek 7.7

- (c) Udowodnij, że jeśli n jest liczbą nieparzystą, to konik szachowy nie może odwiedzić wszystkich pól szachownicy o wymiarach $n \times n$ i powrócić do punktu wyjścia, poruszając się zgodnie z regułami gry w szachy.

7.6^r Podaj przykład grafu pokazujący, że założenie „ $\deg(v) \geq n/2$ ” w twierdzeniu Diraca nie może być zastąpione założeniem „ $\deg(v) \geq (n-1)/2$ ”.

- 7.7** (a) Niech graf G ma n wierzchołków i $[(n-1)(n-2)/2] + 2$ krawędzi. Skorzystaj z twierdzenia 7.1, by dowieść, że graf G jest grafem hamiltonowskim.
 (b) Znajdź graf niehamiltonowski, który ma n wierzchołków i $[(n-1)(n-2)/2] + 1$ krawędzi.

7.8* Udowodnij, że graf Petersena nie jest grafem hamiltonowskim.

7.9* Niech G będzie grafem hamiltonowskim i niech S będzie dowolnym podzbiorem zbioru wierzchołków grafu G , mającym k elementów. Udowodnij, że graf $G - S$ ma co najwyżej k składowych.

- 7.10*** (a) Znajdź takie cztery cykle Hamiltona w grafie K_9 , by żadne dwa z nich nie miały wspólnej krawędzi.
 (b) Jaka jest maksymalna liczba takich cykli Hamiltona w grafie K_{2k+1} , że żadne dwa z nich nie mają wspólnych krawędzi?

§8 Kilka algorytmów

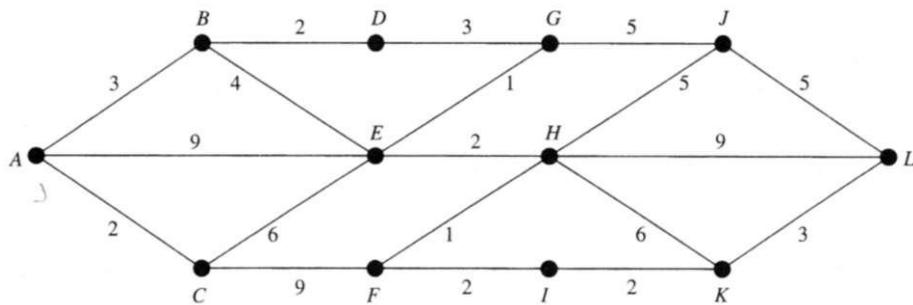
Najważniejsze osiągnięcia teorii grafów były rezultatem prób rozwiązyania konkretnych zadań praktycznych. Wspomnimy tu trzy przykłady: rozwiązanie Eulera problemu mostów królewieckich (§6), prace Cayleya dotyczące zliczania częsteczek chemicznych (§11) i prace Kirchhoffa nad obwodami elektrycznymi (§11). Dzisiejsze zainteresowanie tą teorią jest w znacznym stopniu spowodowane tym, że jest ona nie tylko elegancką teorią matematyczną, ale ma liczne zastosowania w wielu innych dziedzinach (patrz *Przedmowa*). Nie możemy przedstawić wielu z tych zastosowań ze względu na małą objętość tej książki. Czytelnik może zajrzeć do książek Berge'a [6], Bondy'ego i Murty'ego [7], Deo [13], Tuckera [20] oraz Wilsona i Beinekego [21], by znaleźć wiele przykładów praktycznych zadań, często z algorytmami lub schematami algorytmów prowadzących do rozwiązania tych zadań.

W tym paragrafie opiszemy krótko trzy problemy mające związek z treścią tego rozdziału — będą to *zagadnienie najkrótszej drogi*, *zadanie chińskiego listonosza* oraz *problem komiwojażera*. Pierwsze z tych zadań można rozwiązać za pomocą efektywnego **algorytmu** — tzn. za pomocą skończonej procedury, która krok po kroku tworzy rozwiązanie. Drugie zadanie też można rozwiązać za po-

mocą pewnego algorytmu, ale tu omówimy tylko jeden szczególny przypadek. Nie jest natomiast znany żaden efektywny algorytm do rozwiązywania trzeciego zadania; musimy zatem wybierać między algorytmami, które działają bardzo długo, a algorytmami heurystycznymi, które działają szybko, ale dają tylko przybliżone rozwiązania.

Zagadnienie najkrótszej drogi

Przypuśćmy, że mamy daną „mapę” wyglądającą tak jak na rysunku 8.1, na której litery od A do L oznaczają miasta połączone drogami. Jaka jest długość najkrótszej drogi z miasta A do miasta L , jeśli długości dróg są takie, jak zaznaczono na mapie?



Rysunek 8.1

Zauważmy, że liczby na rysunku nie muszą oznaczać długości dróg, ale mogą wskazywać czas podróży lub koszt przejazdu. Zatem, jeśli znamy algorytm dający rozwiązanie zadania w jego oryginalnym sformułowaniu, to za pomocą tego algorytmu możemy również znaleźć drogę najszybszą lub najtańszą.

Zauważmy, że łatwo znaleźć ograniczenie górne rozwiązania, biorąc dowolną drogę prowadzącą z A do L i obliczając jej długość. Na przykład droga $A \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow G \rightarrow J \rightarrow L$ ma całkowitą długość równą 18, a więc długość najkrótszej drogi nie może przekroczyć 18.

W tego typu zadaniach naszą „mapę” możemy traktować jako graf spójny, w którym każdej krawędzi przypisano pewną liczbę nieujemną. Taki graf nazywamy **grafem z wagami**, a liczbę przypisaną krawędzi e nazywamy **wagą** tej krawędzi i oznaczamy symbolem $w(e)$. Zadanie polega na znalezieniu drogi z A do L mającej najmniejszą całkowitą wagę. Zauważmy, że jeśli mamy dany graf z wagami, w którym waga każdej krawędzi wynosi 1, to zadanie sprowadza się do znalezienia liczby krawędzi w najkrótszej drodze z A do L .

Istnieje wiele metod rozwiązywania tego zadania. Jedna z nich polega na zrobieniu modelu mapy z powiązanych ze sobą kawałków sznurka, których długości są proporcjonalne do długości dróg. Aby znaleźć najkrótszą drogę, wystarczy chwycić węzleki odpowiadające miastom A i L i naciągnąć sznurki!

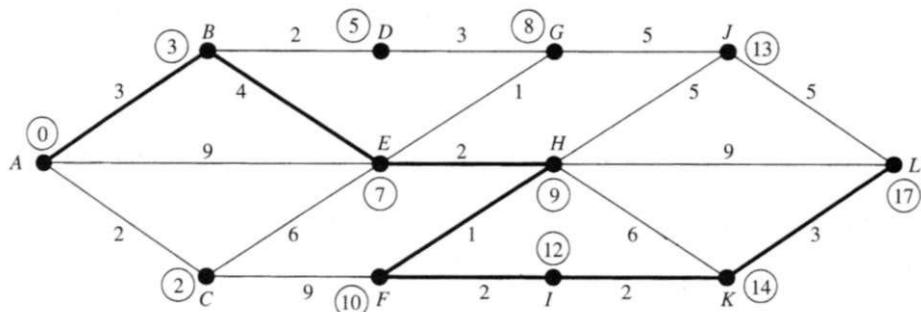
Istnieje również bardziej matematyczny sposób podejścia do tego problemu. Pomysł polega na tym, by przesuwać się wzdłuż grafu z lewa na prawo, przypisując każdemu wierzchołkowi V liczbę $l(V)$ wskazującą najkrótszą odległość od wierzchołka A do wierzchołka V . To znaczy, że jeśli dojdziemy do wierzchołka takiego jak K na rysunku 8.1, to przyjmujemy jako $l(K)$ albo $l(H) + 6$, albo $l(I) + 2$ w zależności od tego, która z tych dwóch liczb jest mniejsza.

Aby wykonać ten algorytm, przypiszemy najpierw wierzchołkowi A liczbę 0 oraz wierzchołkom B , E i C tymczasowo przypiszemy liczby $l(A) + 3$, $l(A) + 9$ oraz $l(A) + 2$, to znaczy liczby 3, 9 i 2. Weźmiemy teraz *najmniejszą* z tych liczb i przyjmujemy $l(C) = 2$. Wierzchołkowi C przypisaliśmy na stałe liczbę 2.

Patrzmy teraz na wierzchołki sąsiadujące z C . Przypisujemy tymczasowo wierzchołkowi F liczbę $l(C) + 9 = 11$ oraz możemy obniżyć liczbę przypisaną tymczasowo wierzchołkowi E do poziomu $l(C) + 6 = 8$. Najmniejszą liczbą przyporządkowaną tymczasowo jest teraz 3 (i jest ona przypisana wierzchołkowi B), więc przyjmujemy $l(B) = 3$ i uznajemy, że ta wartość została przypisana wierzchołkowi B na stałe.

Teraz patrzmy na wierzchołki sąsiadujące z B . Wierzchołkowi D przypisujemy tymczasowo liczbę $l(B) + 2 = 5$ i obniżamy liczbę tymczasowo przypisaną wierzchołkowi E do wartości $l(B) + 4 = 7$. Najmniejszą liczbą przypisaną tymczasowo jest teraz 5 (wierzchołkowi D), a więc przyjmujemy $l(D) = 5$ i tę liczbę przypisujemy D na stałe.

Kontynuując to postępowanie, otrzymamy liczby przypisane na stałe wierzchołkom: $l(E) = 7$, $l(G) = 8$, $l(H) = 9$, $l(F) = 10$, $l(I) = 12$, $l(J) = 13$, $l(K) = 14$, $l(L) = 17$. Wynika stąd, że najkrótsza droga z A do L ma długość 17. Jest ona pokazana na rysunku 8.2, na którym w kółeczkach są pokazane liczby przypisane wierzchołkom na stałe.



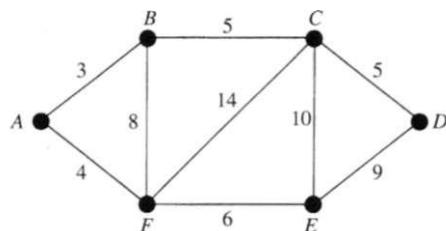
Rysunek 8.2

W paragrafie 22 pokażemy, w jaki sposób można ten algorytm zmodyfikować, by otrzymywać drogę *najdłuższą* w digrafie i pokażemy zastosowanie tego algorytmu do analizy dróg krytycznych.

Zadanie chińskiego listonosza

Zadanie to, postawione przez chińskiego matematyka Mei-Ku Kwana, polega na tym, by listonosz, który musi doręczyć pocztę, przeszedł jak najkrótszą łączną drogę i powrócił do punktu wyjścia. Oczywiście musi on przejść przez każdą ulicę na swojej drodze, ale powinien starać się nie przechodzić zbyt wielu ulic po kilka razy.

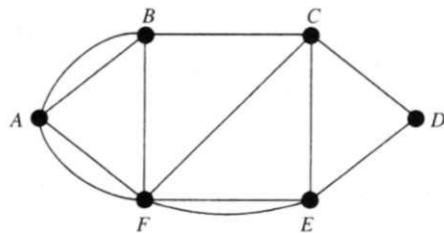
Można sformułować ten problem w języku grafów z wagami. Graf odpowiada sieci ulic, a waga każdej krawędzi jest długością odpowiedniej ulicy. Tak sformułowane zadanie polega na znalezieniu takiej trasy zamkniętej, której całkowita waga jest minimalna i w której każda krawędź występuje co najmniej jeden raz. Jeśli graf jest grafem eulerowskim, to każdy cykl Eulera jest żądaną trasą zamkniętą. Taki cykl Eulera można znaleźć za pomocą algorytmu Fleury'ego (zob. paragraf 6). Jeśli graf nie jest eulerowski, to zadanie jest znacznie bardziej skomplikowane, chociaż znany jest efektywny algorytm dający jego rozwiązanie. Aby zobaczyć pomysły, na których się on opiera, popatrzmy na szczególny przypadek, w którym dokładnie dwa wierzchołki mają stopnie nieparzyste (por. rys. 8.3).



Rysunek 8.3

Ponieważ wierzchołki B i E są jedynymi wierzchołkami stopni nieparzystych, możemy znaleźć ścieżkę półeulerowską z B do E , przechodzącą przez każdą krawędź dokładnie jeden raz. Aby powrócić możliwie krótką drogą do punktu wyjścia, znajdujemy najkrótszą drogę z E do B za pomocą algorytmu opisanego przed chwilą. Rozwiązanie zadania chińskiego listonosza otrzymamy, biorąc tą najkrótszą drogę $E \rightarrow F \rightarrow A \rightarrow B$ i znalezioną ścieżkę półeulerowską, co ostatecznie daje drogę długości $13 + 64 = 77$. Zauważmy, że jeśli połączymy ze sobą tą najkrótszą drogę ze znalezioną ścieżką półeulerowską, to otrzymamy graf eulerowski (patrz rys. 8.4).

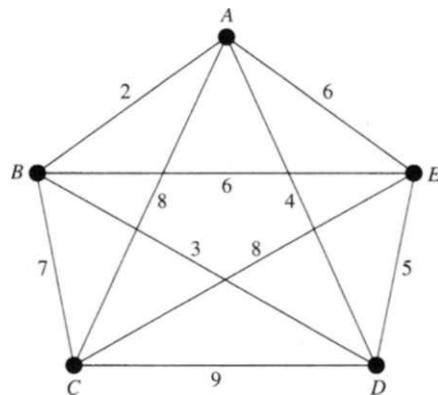
Pełniejszą dyskusję zadania chińskiego listonosza może Czytelnik znaleźć w książce Bondy'ego i Murty'ego [7].



Rysunek 8.4

Problem komiwojażera

Problem ten polega na tym, aby komiwojażer, który chce odwiedzić kilka miast i powrócić do punktu wyjścia, znalazł drogę o najmniejszej łącznej długości. Na przykład, jeśli mamy pięć miast A, B, C, D i E i jeśli odległości między nimi są takie jak na rysunku 8.5, to łatwo sprawdzić, że najkrótszą możliwą drogą jest $A \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow C \rightarrow A$ i jej łączna długość wynosi 26.



Rysunek 8.5

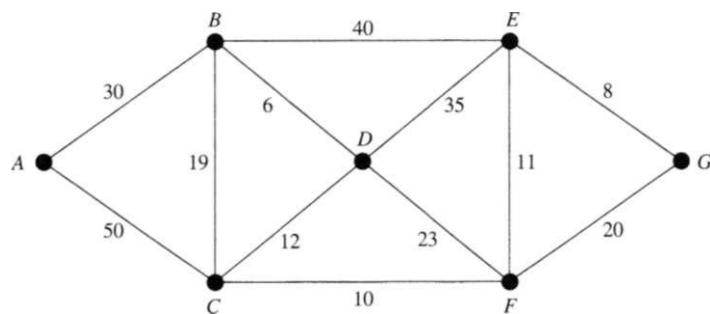
Ten problem można również sformułować w języku grafów z wagami. Tak sformułowany problem polega na znalezieniu cyklu Hamiltona o najmniejszej całkowitej wadze w danym grafie z wagami. Zauważmy, że tak jak w zagadnieniu najkrótszej drogi, wagi krawędzi mogą oznaczać czas podróży między miastami lub koszt przejazdu. Zatem, jeśli znajdziemy efektywny algorytm rozwiązujący problem komiwojażera w jego oryginalnym sformułowaniu, to będziemy mogli zastosować ten sam algorytm do znalezienia drogi najszybszej lub najtańszej.

Jeden z możliwych algorytmów polega na obliczeniu całkowitej długości wszystkich możliwych cykli Hamiltona, ale jest to zbyt skomplikowane dla liczby miast niewiele większej od pięciu. Na przykład, jeśli mamy danych 20 miast, to

liczba możliwych cykli wynosi $(19!)/2$, czyli około $6 \cdot 10^{16}$. Znaleziono wiele innych algorytmów, ale wszystkie one działają zbyt długo. Z drugiej strony, istnieje wiele algorytmów heurystycznych, które szybko odpowiadają, jaka jest w przybliżeniu długość najkrótszej drogi. Jedna z takich procedur jest opisana w paragrafie 11.

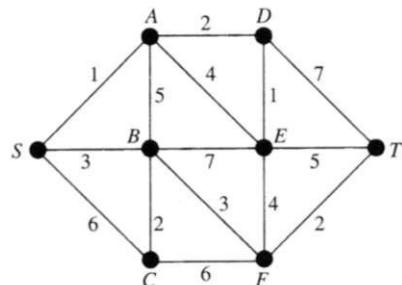
Ćwiczenia do §8

- 8.1^r** Użyj algorytmu znajdowania najkrótszej drogi w celu znalezienia najkrótszej drogi z A do G w grafie z wagami pokazanym na rysunku 8.6.



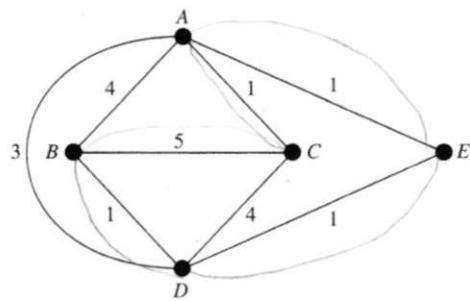
Rysunek 8.6

- 8.2** Zastosuj algorytm znajdowania najkrótszej drogi, by znaleźć najkrótszą drogę z L do A w grafie pokazanym na rysunku 8.1 i sprawdź, że twoje rozwiązanie zgadza się z rozwiązaniem pokazanym na rysunku 8.2.
- 8.3** Pokaż, w jaki sposób można wykorzystać algorytm znajdowania najkrótszej drogi do znalezienia *najdłuższej* drogi z A do L w grafie z rysunku 8.1.
- 8.4*** Znajdź najkrótsze drogi z wierzchołka S do każdego innego wierzchołka w grafie z wagami pokazanym na rysunku 8.7



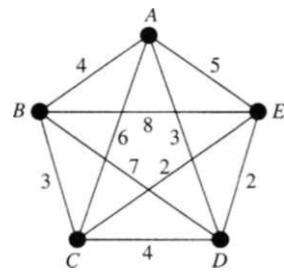
Rysunek 8.7

8.5^r Rozwiąż zadanie chińskiego listonosza dla grafu z wagami pokazanego na rysunku 8.8.



Rysunek 8.8

8.6^r Znajdź rozwiążanie problemu komiwojażera dla grafu z wagami pokazanego na rysunku 8.9.



Rysunek 8.9

8.7 Znajdź cykl Hamiltona o *największej* wadze w grafie z rysunku 8.5.

4 Rozdział Drzewa

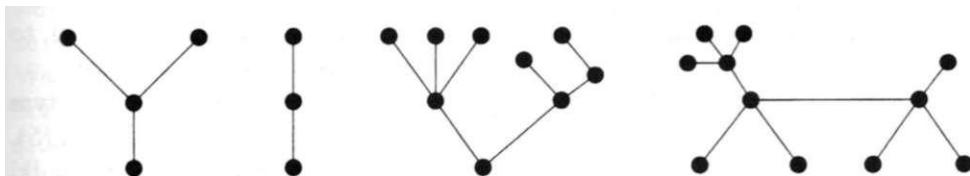
*Głupiec nie to samo widzi drzewo,
które mądry widzi człowiek.*

WILLIAM BLAKE

Każdy wie, co to jest drzewo genealogiczne. W tym rozdziale będziemy się zajmować drzewami w ogólności, zwracając szczególną uwagę na drzewa spinające w grafach spójnych i na słynne twierdzenie Cayleya dotyczące zliczania drzew oznakowanych. Na zakończenie rozdziału podamy kilka innych zastosowań drzew.

§9

Lasem nazywamy graf nie zawierający cykli, a **drzewem** las spójny. Na przykład na rysunku 9.1 widzimy las składający się z czterech składowych, każda z nich jest drzewem¹. Zauważmy, że drzewa i lasy są grafami prostymi.



Rysunek 9.1

W pewnym sensie drzewo jest najprostszym nietrywialnym typem grafu. Jak się przekonamy, ma ono wiele „przyjemnych” właściwości, na przykład każde dwa wierzchołki są połączone dokładnie jedną drogą. Jeśli chcemy dowieść jakiegoś ogólnego twierdzenia o grafach, to często wygodnie jest dowieść go najpierw dla drzew. Co więcej, wielu hipotez, których nie udowodniono jeszcze dla dowolnych grafów, dowiedziono dla drzew.

Następujące twierdzenie wymienia kilka prostych właściwości drzew.

TWIERDZENIE 9.1. *Niech T będzie grafem mającym n wierzchołków. Wtedy następujące warunki są równoważne:*

¹Ostatnie z drzew pokazanych na rysunku 9.1 jest szczególnie dobrze znane, gdyż szczeka.

- (1) T jest drzewem;
- (2) T nie zawiera cykli i ma $n - 1$ krawędzi;
- (3) T jest grafem spójnym i ma $n - 1$ krawędzi;
- (4) T jest grafem spójnym i każda krawędź jest mostem;
- (5) każde dwa wierzchołki T są połączone dokładnie jedną drogą;
- (6) T nie zawiera cykli, ale po dodaniu dowolnej nowej krawędzi otrzymany graf ma dokładnie jeden cykl.

Dowód. Jeśli $n = 1$, to twierdzenie jest trywialne; założymy więc, że $n \geq 2$.

(1) \Rightarrow (2). Ponieważ T nie zawiera cykli, więc usunięcie którejkolwiek krawędzi musi spowodować rozpad T na dwa grafy, z których każdy jest drzewem. Z założenia indukcyjnego wynika, że liczba krawędzi w każdym z tych drzew jest o jeden mniejsza od liczby wierzchołków. Stąd wynika, że liczba wszystkich krawędzi grafu T wynosi $n - 1$.

(2) \Rightarrow (3). Jeśli graf T jest niespójny, to każda składowa T jest grafem spójnym bez cykli, a więc z poprzedniej części twierdzenia wynika, że w każdej składowej liczba wierzchołków jest o jeden większa od liczby krawędzi. Zatem całkowita liczba wierzchołków T jest większa od liczby krawędzi o co najmniej dwa, co przeczy założeniu, że graf T ma $n - 1$ krawędzi.

(3) \Rightarrow (4). Usunięcie którejkolwiek krawędzi powoduje powstanie grafu mającego n wierzchołków i $n - 2$ krawędzi; z twierdzenia 5.2 wynika, że taki graf musi być niespójny.

(4) \Rightarrow (5). Ponieważ graf T jest spójny, każda para wierzchołków jest połączona co najmniej jedną drogą. Jeśli daną parę wierzchołków łączą dwie drogi, to zataczają one pewien cykl, co przeczy temu, że każda krawędź jest mostem.

(5) \Rightarrow (6). Gdyby graf T zawierał cykl, to każde dwa wierzchołki w tym cyklu byłyby połączone co najmniej dwiema drogami, co przeczy stwierdzeniu (5). Jeśli dodamy krawędź e do grafu T , to zostanie stworzony cykl, gdyż wierzchołki incydentne z e były już połączone w grafie T . To, że zostanie utworzony tylko jeden cykl, wynika z ćwiczenia 5.11.

(6) \Rightarrow (1). Przypuśćmy, że graf T jest niespójny. Jeśli dodamy do T krawędź łączącą wierzchołek należący do jednej składowej z wierzchołkiem należącym do innej składowej, to nie utworzymy cyklu. ■

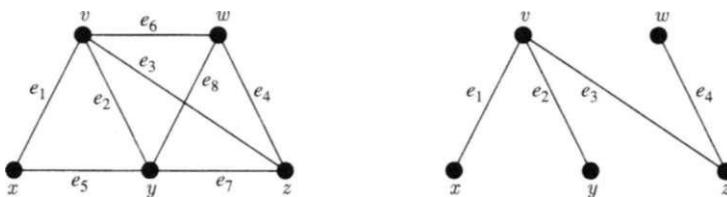
WNIOSEK 9.2. *Jeśli graf G jest lasem, który ma n wierzchołków i k składowych, to G ma $n - k$ krawędzi.*

Dowód. Wystarczy zastosować twierdzenie 9.1(3) do każdej składowej grafu G . ■

Zauważmy, że z lematu o uściskach dłoni wynika, że suma stopni wszystkich n wierzchołków drzewa jest równa podwojonej liczbie krawędzi (czyli równa

$2n - 2$). Zatem, jeśli $n > 2$, to drzewo mające n wierzchołków ma co najmniej dwa wierzchołki końcowe.

Jeśli wybierzemy jakiś cykl w grafie spójnym G i usuniemy którykolwiek krawędź tego cyklu, to otrzymany graf będzie nadal spójny. Możemy powtarzać tę procedurę z dowolnym z pozostałych cykli dotąd, aż w grafie nie będzie już cykli. Powstanie w ten sposób drzewo, które spina wszystkie wierzchołki grafu G . Takie drzewo nazywamy **drzewem spinającym** grafu G (lub **rozpinającym** graf G). Przykład grafu i jednego z jego drzew spinających widzimy na rysunku 9.2.



Rysunek 9.2

Ogólnie, jeśli G jest dowolnym grafem, który ma n wierzchołków, m krawędzi i k składowych, to możemy zastosować tę procedurę do każdej składowej G . Otrzymany w ten sposób graf nazywamy **lasem spinającym**, a łączną liczbę krawędzi usuniętych w czasie tego procesu nazywamy **rzędem cykliczności** (lub **liczbą cyklotomyczną**) grafu G i oznaczamy symbolem $\gamma(G)$. Zauważmy, że $\gamma(G) = m - n + k$; z twierdzenia 5.2 wynika, że jest to liczba nieujemna. Warto również zdefiniować **rząd rozcięcia** (lub **rząd spójności**) grafu G , jako liczbę krawędzi w lesie spinającym; oznaczamy go symbolem $\xi(G)$. Zauważmy, że $\xi(G) = n - k$. Niektóre własności rzędu rozcięcia poznamy w ćwiczeniu 9.12.

Zanim przejdziemy dalej, udowodnimy kilka prostych faktów dotyczących lałów spinających. W następnym twierdzeniu **dopełnieniem** lasu spinającego T grafu (niekoniecznie prostego) G nazywamy graf otrzymany z grafu G przez usunięcie krawędzi należących do T .

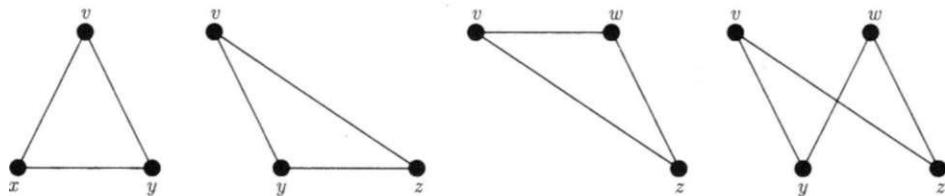
TWIERDZENIE 9.3. Jeśli T jest lasem spinającym grafu T , to

- (1) każde rozcięcie grafu G ma wspólną krawędź z T ;
- (2) każdy cykl w grafie G ma wspólną krawędź z dopełnieniem T .

Dowód. (1) Niech C^* będzie rozcięciem grafu G , którego usunięcie powoduje rozpad pewnej składowej grafu na dwa podgrafy H i K . Ponieważ T jest lasem spinającym, więc T musi zawierać krawędź łączącą pewien wierzchołek należący do H z wierzchołkiem należącym do K ; jest to szukana krawędź.

(2) Niech C będzie cyklem w grafie G , nie mającym wspólnych krawędzi z dopełnieniem T . Wtedy cykl C musi być zawarty w lesie T , co jest niemożliwe. ■

Blisko związanego z pojęciem lasu spinającego T grafu G jest pojęcie fundamentalnego zbioru cykli związanego z lasem T . Ten zbiór tworzymy w następujący sposób: z twierdzenia 9.1(6) wynika, że jeśli do lasu T dołączymy dowolną krawędź grafu G , nie należącą do T , to otrzymamy dokładnie jeden cykl. Zbiór wszystkich cykli utworzonych w ten sposób, tzn. przez dołączenie do T oddzielnie każdej krawędzi grafu G , nie należącej do T , nazywamy **fundamentalnym zbiorem cykli związanym z T** . Czasami nie jest istotne, który las spinający został użyty, i mówimy po prostu o **fundamentalnym zbiorze cykli grafu G** . Zauważmy, że liczba cykli w każdym fundamentalnym zbiorze cykli musi być równa rzędowi cykliczności G . Na rysunku 9.3 widzimy fundamentalny zbiór cykli grafu pokazanego na rysunku 9.2 związanego z danym tam drzewem spinającym.



Rysunek 9.3

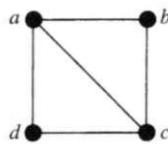
Nasze uwagi poczynione na końcu paragrafu 5 sugerują, że powinniśmy również móc zdefiniować fundamentalny zbiór rozcięć grafu G związańy z lasem spinającym T . Rzeczywiście tak jest. Z twierdzenia 9.1(4) wynika, że usunięcie dowolnej krawędzi z lasu T dzieli zbiór wierzchołków T na dwa rozłączne zbiory V_1 i V_2 . Zbiór wszystkich krawędzi grafu G łączących wierzchołki zbioru V_1 z wierzchołkami zbioru V_2 jest rozcięciem w grafie G , a zbiór wszystkich rozcięć otrzymanych w ten sposób, tzn. w wyniku usuwania z T oddzielnie każdej krawędzi, nazywamy **fundamentalnym zbiorem rozcięć związanym z T** . Zauważmy, że liczba rozcięć w dowolnym fundamentalnym zbiorze rozcięć musi być równa rzędowi rozcięcia grafu G . Fundamentalnym zbiorem rozcięć grafu z rysunku 9.2 związanym z danym tam lasem spinającym jest zbiór składający się z czterech rozcięć: $\{e_1, e_5\}$, $\{e_2, e_5, e_7, e_8\}$, $\{e_3, e_6, e_7, e_8\}$ oraz $\{e_4, e_6, e_8\}$.

Ćwiczenia do §9

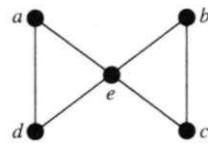
- 9.1^r Znajdź wszystkie drzewa w tabeli na rysunku 2.9.
- 9.2^r Wykaż na rysunku, że istnieje sześć (z dokładnością do izomorfizmu) drzew mających 6 wierzchołków i jedenaście drzew mających 7 wierzchołków.
- 9.3
 - (a) Udowodnij, że każde drzewo jest grafem dwudzielnym.
 - (b) Jakie drzewa są grafami pełnymi dwudzielnymi?

9.4^r Narysuj wszystkie drzewa spinające grafu pokazanego na rysunku 9.4.

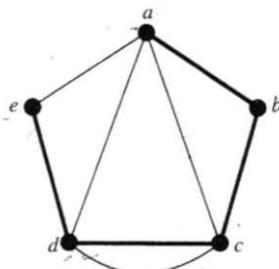
9.5 Narysuj wszystkie drzewa spinające grafu pokazanego na rysunku 9.5.



Rysunek 9.4



Rysunek 9.5



Rysunek 9.6

9.6^r Wyznacz fundamentalne zbiory cykli i rozcięć grafu przedstawionego na rysunku 9.6 związane ze wskazanym drzewem spinającym.

9.7 Wyznacz rzędy cykliczności i rzędy rozcięcia następujących grafów:

- (a) K_5 ,
- (b) $K_{3,3}$,
- (c) W_5 ,
- (d) N_5 ,
- (e) graf Petersena.

9.8^r Niech G będzie grafem spójnym. Co można powiedzieć o:

- (a) krawędzi grafu G należącej do każdego drzewa spinającego?
- (b) krawędzi grafu G nie należącej do żadnego drzewa spinającego?

9.9 Wierzchołek v grafu spójnego G o tej własności, że największa z odległości od wierzchołka v do innych wierzchołków grafu G jest najmniejsza, nazywamy **centrum** grafu G . Udowodnij, usuwając kolejno wierzchołki końcowe, że każde drzewo ma albo jedno centrum, albo dwa sąsiednie centra. Podaj przykład obu takich typów drzew mających 7 wierzchołków.

9.10* (a) Niech C^* będzie podzbiorem zbioru krawędzi grafu G . Wykaż, że jeśli C^* ma wspólną krawędź z każdym lasem spinającym grafu G , to C^* zawiera pewne rozcięcie.

(b) Udowodnij podobne twierdzenie dla cykli.

9.11 Niech T_1 i T_2 będą drzewami spinającymi grafu spójnego G .

- (a) Udowodnij, że jeśli e jest krawędzią drzewa T_1 , to istnieje krawędź f drzewa T_2 taka, że graf $(T_1 - \{e\}) \cup \{f\}$ (otrzymany z drzewa T_1 przez zastąpienie krawędzi e krawędzią f) jest również drzewem spinającym.
 (b) Udowodnij, że drzewo T_1 można „przekształcić” w drzewo T_2 , zastępując kolejno krawędzie T_1 krawędziami T_2 , w taki sposób, by każde pośrednie drzewo było drzewem spinającym.

9.12* Wykaż, że jeśli H i K są podgrafami grafu G i grafy $H \cup K$ oraz $H \cap K$ są zdefiniowane w naturalny sposób, to rzad rozcięcia ξ ma następujące własności:

- (a) $0 \leq \xi(H) \leq |E(H)|$ ($|E(H)|$ jest liczbą krawędzi grafu H);
 (b) jeśli H jest podgrafem K , to $\xi(H) \leq \xi(K)$;
 (c) $\xi(H \cup K) + \xi(H \cap K) \leq \xi(H) + \xi(K)$.

9.13* Niech V będzie przestrzenią wektorową spójnego grafu prostego G i niech T będzie drzewem spinającym grafu G .

- (a) Wykaż, że fundamentalny zbiór cykli związany z drzewem T tworzy bazę podprzestrzeni cykli W .
 (b) Udowodnij podobne twierdzenia dla podprzestrzeni rozcięć W^* .
 (c) Wyprowadź wniosek, że wymiarami podprzestrzeni W i W^* są odpowiednio $\gamma(G)$ i $\xi(G)$.

§10 Zliczanie drzew

Tematyka zliczania grafów jest związana z pytaniem o liczbę nieizomorficznych grafów mających daną własność. Ta tematyka została zapoczątkowana w latach pięćdziesiątych XIX wieku przez Arthura Cayleya, który później wykorzystał ją do wyznaczenia liczby alkanów C_nH_{2n+2} mających daną liczbę atomów węgla. Zdał on sobie sprawę z tego, że to zadanie polega na zliczeniu drzew, w których stopień każdego wierzchołka wynosi 4 lub 1; przekonamy się o tym w paragrafie 11.

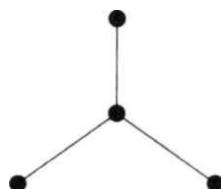
Rozwiązało wiele typowych problemów zliczania grafów. Na przykład można wyznaczyć liczbę grafów, grafów spójnych, drzew czy grafów eulerowskich mających daną liczbę wierzchołków i krawędzi; nie rozwiązano jednak dotychczas podobnych problemów dotyczących grafów planarnych czy grafów hamiltonowskich. Większości znanych takich twierdzeń można dowieść, korzystając z podstawowego twierdzenia Pólya o zliczaniu; poświęcona jest temu książka Harary'ego i Palmera

[30]. Niestety, w prawie wszystkich przypadkach nie jest możliwe wyrażenie wyniku za pomocą prostych wzorów. W Dodatku znajduje się tabela zawierająca niektóre znane wyniki.

Ten paragraf jest poświęcony przede wszystkim dwóm dowodom znanego twierdzenia, przypisywanego najczęściej Cayleyowi, które podaje liczbę drzew oznakowanych mających daną liczbę wierzchołków. Aby zobaczyć, o co chodzi w tym twierdzeniu, przyjrzyj się rysunkowi 10.1, na którym pokazano trzy sposoby oznakowania drzewa mającego cztery wierzchołki. Ponieważ drugie drzewo oznakowane jest po prostu odwróceniem pierwszego, te dwa drzewa oznakowane są takie same. Z drugiej strony, żadne z tych drzew nie jest izomorficzne z trzecim drzewem oznakowanym, o czym można się przekonać porównując stopnie wierzchołków oznaczonych liczbą 3. Zatem odwrócenie znakowania nie dało nowego sposobu znakowania, a więc liczba sposobów znakowania tego drzewa wynosi $(4!)/2 = 12$. Podobnie, liczba sposobów znakowania drzewa pokazanego na rysunku 10.2 wynosi 4, gdyż środkowy wierzchołek może być oznaczony na cztery różne sposoby i każdy z tych sposobów wyznacza całe znakowanie. Stąd wynika, że łączna liczba nieizomorficznych drzew oznakowanych mających cztery wierzchołki wynosi $12 + 4 = 16$.



Rysunek 10.1



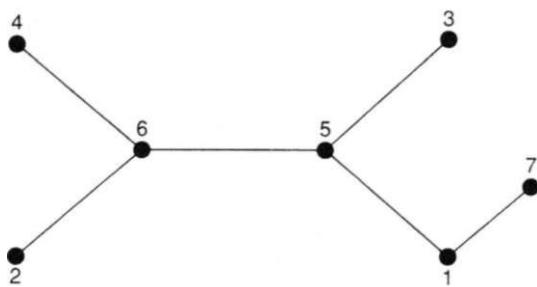
Rysunek 10.2

Udowodnimy teraz **twierdzenie Cayleya**, które uogólnia otrzymany wynik na drzewa oznakowane mające n wierzchołków.

TWIERDZENIE 10.1 (Cayley, 1889). *Istnieje n^{n-2} różnych drzew oznakowanych mających n wierzchołków.*

Uwaga. Następujące dowody pochodzą od Prüfera i Clarka; inne dowody można znaleźć w pracy Moona [31].

Dowód pierwszy. Wskażemy wzajemnie jednoznaczne przyporządkowanie między zbiorem drzew oznakowanych mających n wierzchołków i zbiorem ciągów skończonych postaci $(a_1, a_2, \dots, a_{n-2})$, których każdy wyraz a_i jest liczbą całkowitą spełniającą nierówności $1 \leq a_i \leq n$. Stąd natychmiast wynika teza twierdzenia, gdyż istnieje dokładnie n^{n-2} takich ciągów. Założymy, że $n \geq 3$, gdyż dla $n = 1$ i $n = 2$ twierdzenie jest trywialne.



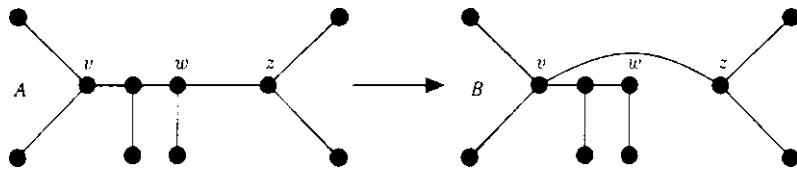
Rysunek 10.3

Aby wskazać żądane przyporządkowanie, przyjmijmy najpierw, że T jest drzewem oznakowanym mającym n wierzchołków i pokażmy, jak określić odpowiadający mu ciąg. Niech b_1 będzie najmniejszą liczbą przypisaną wierzchołkowi końcowemu i niech a_1 będzie nazwą wierzchołka, z którym wierzchołek b_1 sąsiaduje. Usuwamy teraz wierzchołek b_1 i krawędź incydentną z nim, otrzymując drzewo mające $n - 1$ wierzchołków. Niech następnie b_2 będzie najmniejszą liczbą będącą nazwą wierzchołka końcowego tego nowego drzewa i niech a_2 będzie nazwą wierzchołka sąsiadującego z wierzchołkiem b_2 . Usuwamy, tak jak poprzednio, wierzchołek b_2 i krawędź incydentną z nim. Postępujemy w ten sposób dotąd, aż pozostaną tylko dwa wierzchołki i ostatecznie otrzymamy串 $(a_1, a_2, \dots, a_{n-2})$. Na przykład, jeśli T jest drzewem oznakowanym pokazanym na rysunku 10.3, to $b_1 = 2, a_1 = 6, b_2 = 3, a_2 = 5, b_3 = 4, a_3 = 6, b_4 = 6, a_4 = 5, b_5 = 5, a_5 = 1$. Otrzymamy串 $(6, 5, 6, 5, 1)$.

Aby otrzymać przyporządkowanie odwrotne, weźmy串 $(a_1, a_2, \dots, a_{n-2})$. Niech b_1 będzie najmniejszą liczbą, która *nie* występuje w tym串 i połączmy ze sobą wierzchołki a_1 i b_1 . Usuwamy wtedy liczbę a_1 z naszego串, pomijamy liczbę b_1 w dalszych rozważaniach i kontynuujemy to postępowanie. W ten sposób budujemy drzewo krok po kroku, dodając po jednej krawędzi. Jeśli na przykład weźmiemy串 $(6, 5, 6, 5, 1)$, to otrzymamy kolejno $b_1 = 2, b_2 = 3, b_3 = 4, b_4 = 6, b_5 = 5$ i odpowiednimi krawędziami będą $62, 53, 64, 56, 15$. Wreszcie łączymy ze sobą dwa ostatnie wierzchołki nie wykreślone dotychczas – w tym przykładzie 1 i 7. Można łatwo sprawdzić, że jeśli weźmiemy dowolne drzewo oznakowane, wyznaczymy odpowiadający mu串, a następnie wyznaczymy drzewo oznakowane odpowiadające temu串owi, to otrzymamy początkowe drzewo. A więc ustaliliśmy żądane przyporządkowanie, co kończy dowód. ■

Dowód drugi. Niech $T(n, k)$ będzie liczbą drzew oznakowanych mających n wierzchołków i takich, że dany wierzchołek v ma stopień k . Wyprowadzimy wzór na $T(n, k)$ i otrzymamy wynik, obliczając sumę od $k = 1$ do $k = n - 1$.

Niech A będzie dowolnym drzewem oznakowanym, w którym $\deg(v) = k - 1$. Usuwając z drzewa A dowolną krawędź wz , nie incydentną z wierzchołkiem v , rozbijamy drzewo A na dwa poddrzewa: jedno z nich zawiera wierzchołek v i jeden z wierzchołków w i z (na przykład niech będzie to w), drugie zawiera wierzchołek z . Jeśli połączymy teraz ze sobą wierzchołki v i z , otrzymamy drzewo oznakowane B , w którym $\deg(v) = k$ (por. rysunek 10.4). Parę drzew (A, B) nazywamy **powiązaniem**, jeśli drzewo B powstaje w powyższy sposób z drzewa A . Naszym celem jest zliczenie wszystkich możliwych powiązań (A, B) .



Rysunek 10.4

Ponieważ drzewo A można wybrać na $T(n, k - 1)$ sposobów, a drzewo B jest wyznaczone jednoznacznie przez krawędź wz , którą możemy wybrać na $(n - 1) - (k - 1) = n - k$ sposobów, więc łączna liczba powiązań (A, B) wynosi $(n - k)T(n, k - 1)$.

Z drugiej strony, niech B będzie drzewem oznakowanym, w którym $\deg(v) = k$ i niech drzewa T_1, \dots, T_k będą poddrzewami drzewa B powstałymi przez usunięcie wierzchołka v i wszystkich krawędzi incydentnych z v . Możemy wtedy otrzymać drzewo oznakowane A , w którym $\deg(v) = k - 1$, usuwając z drzewa B jedną z tych krawędzi (niech będzie nią, na przykład, krawędź vw_i , gdzie w_i należy do T_i) i łącząc wierzchołek w_i z dowolnym wierzchołkiem u należącym do innego poddrzewa T_j (por. rys. 10.5). Zauważmy, że powstająca w ten sposób para drzew (A, B) jest powiązaniem i że wszystkie powiązania można otrzymać w ten sposób.

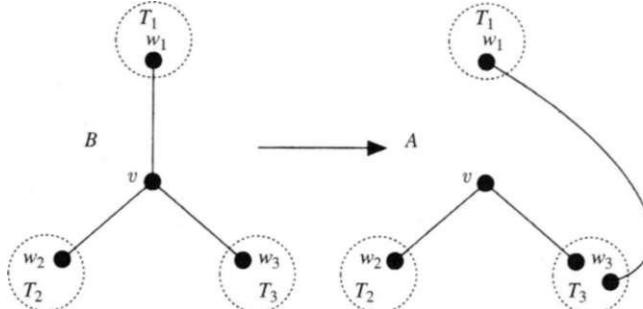
Ponieważ drzewo B można wybrać na $T(n, k)$ sposobów, a liczba sposobów połączenia wierzchołka w_i z wierzchołkami należącymi do innych drzew T_j jest równa $n - 1 - n_i$, gdzie n_i jest liczbą wierzchołków drzewa T_i , więc łączna liczba powiązań (A, B) wynosi

$$T(n, k)((n - 1 - n_1) + \dots + (n - 1 - n_k)) = (n - 1)(k - 1)T(n, k),$$

gdyż $n_1 + \dots + n_k = n - 1$.

Pokazaliśmy więc, że

$$(n - k)T(n, k - 1) = (n - 1)(k - 1)T(n, k).$$



Rysunek 10.5

Iterując ten wynik i korzystając z oczywistej równości $T(n, n - 1) = 1$, łatwo otrzymujemy

$$T(n, k) = \binom{n-2}{k-1} (n-1)^{n-k-1}.$$

Sumując ze względu na wszystkie możliwe wartości k , stwierdzamy, że liczba $T(n)$ drzew oznakowanych mających n wierzchołków wynosi

$$T(n) = \sum_{k=1}^{n-1} T(n, k) = \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-2}{k-1} (n-1)^{n-k-1} = ((n-1)+1)^{n-2} = n^{n-2}. \blacksquare$$

Wniosek 10.2. *Graf K_n ma n^{n-2} drzew spinających.*

Dowód. Każdemu drzewu oznakowanemu mającemu n wierzchołków odpowiada dokładnie jedno drzewo spinające grafu K_n . Odwrotnie, z każdego drzewa spinającego grafu K_n można utworzyć dokładnie jedno drzewo oznakowane mające n wierzchołków. \blacksquare

Na zakończenie tego paragrafu podamy ważne twierdzenie, które można wykorzystać do obliczenia liczby drzew spinających dowolnego spójnego grafu prostego. Nazywamy je **macierzowym twierdzeniem o drzewach**, a jego dowód można znaleźć w książce Harary'ego [9].

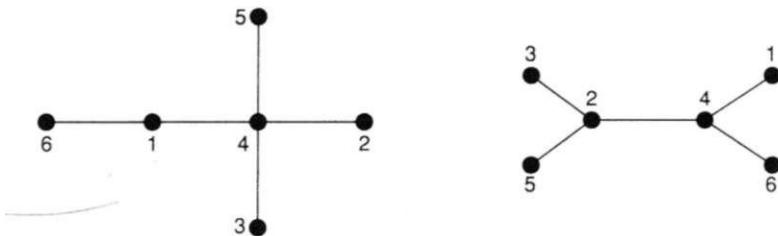
TWIERDZENIE 10.3. *Niech G będzie spójnym grafem prostym, którego zbiorem wierzchołków jest $\{v_1, \dots, v_n\}$ i niech $\mathbf{M} = (m_{ij})$ będzie macierzą wymiaru $n \times n$ taką, że $m_{ii} = \deg(v_i)$, $m_{ij} = -1$, gdy wierzchołki v_i i v_j są sąsiednie, oraz $m_{ij} = 0$ w przeciwnym razie. Wtedy liczba drzew spinających grafu G jest równa dopełnieniu algebraicznemu dowolnego wyrazu macierzy \mathbf{M} .*

Ćwiczenia do §10

10.1^r Sprawdź bezpośrednio, że istnieje dokładnie 125 drzew oznakowanych mających 5 wierzchołków.

10.2^r Tak jak w pierwszym dowodzie twierdzenia Cayleya wyznacz:

- (a) drzewa oznakowane odpowiadające ciągom $(1, 2, 3, 4)$ i $(3, 3, 3, 3)$;
- (b) ciągi odpowiadające drzewom oznakowanym pokazanym na rysunku 10.6.



Rysunek 10.6

- 10.3** (a) Wyznacz liczbę drzew mających n wierzchołków, w których dany wierzchołek jest wierzchołkiem końcowym.
 (b) Wyprowadź stąd wniosek, że dla dużych n prawdopodobieństwo tego, iż dany wierzchołek drzewa mającego n wierzchołków jest wierzchołkiem końcowym, jest w przybliżeniu równe e^{-1} .

10.4^r Ile drzew spinających ma graf $K_{2,s}$?

10.5 Niech $\tau(G)$ będzie liczbą drzew spinających grafu spójnego G .

- (a) Udowodnij, że jeśli e jest dowolną krawędzią, to $\tau(G) = T(G - e) + \tau(G \setminus e)$.
- (b) Wykorzystaj tę równość do wyznaczenia $\tau(K_{2,3})$.

10.6* Wykorzystaj macierzowe twierdzenie o drzewach do dowodu twierdzenia Cayleya.

10.7* Niech $T(n)$ będzie liczbą drzew oznakowanych mających n wierzchołków.

- (a) Zliczając sposoby połączenia ze sobą drzewa oznakowanego mającego k wierzchołków z drzewem oznakowanym mającym $n - k$ wierzchołków, udowodnij, że

$$2(n-1)T(n) = \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} k(n-k)T(k)T(n-k).$$

- (b) Wyprowadź stąd równość

$$\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} k^{k-1} (n-k)^{n-k-1} = 2(n-1)n^{n-2}.$$

§11 Dalsze zastosowania

W paragrafie 8 zajmowaliśmy się trzema problemami, które pojawiają się w badaniach operacyjnych — zagadnieniem najkrótszej drogi, zadaniem chińskiego listonosza i problemem komiwojażera. W tym paragrafie zajmiemy się czterema kolejnymi zastosowaniami teorii grafów, wziętymi z badań operacyjnych, chemii organicznej, teorii obwodów elektrycznych i informatyki, w których wykorzystuje się drzewa.

Problem najkrótszych połączeń

Przypuśćmy, że chcemy wybudować sieć kolejową, która połączy n miast w taki sposób, by pasażerowie mogli podróżować z każdego miasta do dowolnego innego. Jeśli ze względów oszczędnościowych całkowita długość linii ma być jak najmniejsza, to graf, którego wierzchołkami są te miasta, a krawędziami łączące je linie kolejowe, musi być drzewem. Zadanie polega na znalezieniu efektywnego algorytmu decydującego, które z n^{n-2} możliwych drzew łączących te miasta ma najmniejszą łączną długość torów, przy założeniu, że znamy odległości między wszystkimi parami miast.

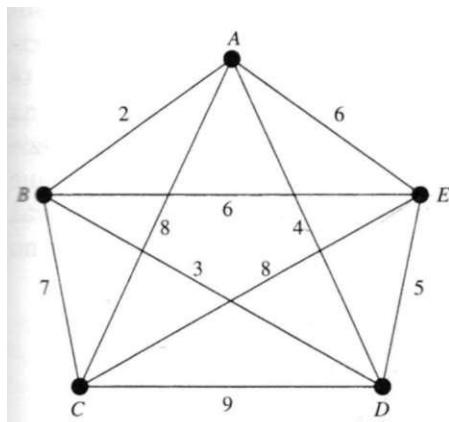
Jak poprzednio, możemy sformułować ten problem w języku grafów z wagami. Wagę krawędzi e oznaczamy symbolem $w(e)$. Nasze zadanie polega na znalezieniu drzewa spinającego T , którego całkowita waga $W(T)$ byłaby jak najmniejsza. W przeciwieństwie do problemów rozpatrywanych wcześniej, istnieje prosty algorytm dający rozwiązanie tego zadania. Ten algorytm, nazywany **algorytmem zachłannym**, polega na wybieraniu krawędzi o najmniejszej wadze w taki sposób, by nie utworzyć cyklu. Na przykład, jeśli mamy danych pięć miast, położonych tak, jak pokazuje to rysunek 11.1, to zaczynamy od wybrania krawędzi AB (o wadze 2) i BD (o wadze 3). Nie możemy następnie wybrać krawędzi AD (o wadze 4), gdyż stworzylibyśmy cykl ABD , więc wybieramy krawędź DE (o wadze 5). Teraz nie możemy wybrać ani krawędzi AE , ani krawędzi BE (obie wagi 6), gdyż każda utworzyłaby cykl, wybieramy zatem krawędź BC (o wadze 7). W ten sposób zakończyliśmy budowę drzewa (patrz rys. 11.2).

Możemy ogólnie zapisać ten algorytm w postaci następującego twierdzenia.

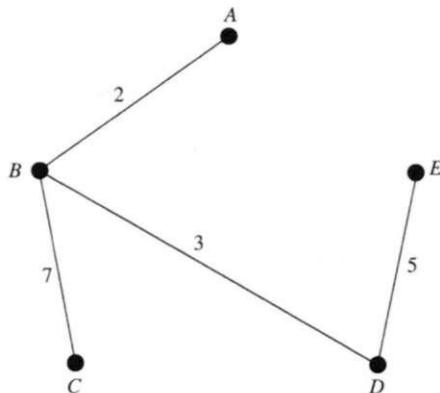
TWIERDZENIE 11.1. *Niech G będzie grafem spójnym mającym n wierzchołków. Wtedy następująca konstrukcja daje rozwiązanie problemu najkrótszych połączeń:*

(1) *niech e_1 będzie krawędzią o najmniejszej wadze;*

(2) *definiujemy krawędzie e_2, e_3, \dots, e_{n-1} , wybierając za każdym razem nową krawędź o najmniejszej możliwej wadze, która nie tworzy cyklu z dotychczas wybranymi krawędziami e_i . Podgraf T grafu G , którego krawędziami są krawędzie e_1, \dots, e_{n-1} , jest szukanym drzewem spinającym.*



Rysunek 11.1



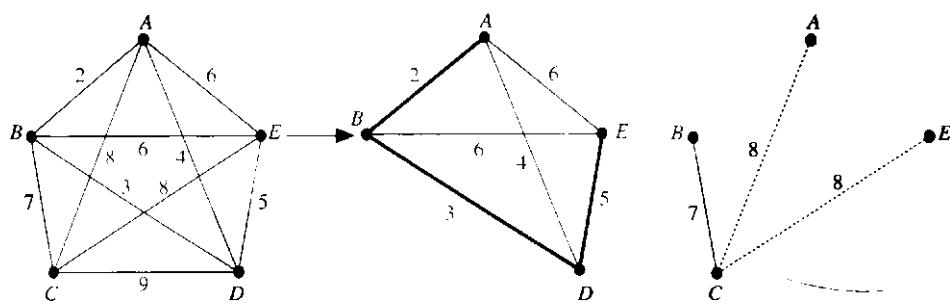
Rysunek 11.2

Dowód. To, że T jest drzewem spinającym grafu G , wynika natychmiast z twierdzenia 9.1(2). Wystarczy tylko pokazać, że ma ono minimalną wagę całkowitą. W tym celu założymy, że S jest drzewem spinającym grafu G takim, że $W(S) < W(T)$. Jeśli e_k jest pierwszą krawędzią w ciągu wybranych krawędzi, która nie należy do S , to podgraf grafu G utworzony z drzewa S przez dodanie do niego krawędzi e_k , zawiera dokładnie jeden cykl C przechodzący przez tę krawędź. Ponieważ cykl C zawiera krawędź e należącą do S i nie należącą do T , więc podgraf S' otrzymany z drzewa S przez zastąpienie krawędzi e krawędzią e_k jest drzewem spinającym. Ale z konstrukcji ciągu krawędzi wynika, że $w(e_k) \leq w(e)$, a więc $W(S') \leq W(S)$. Drzewo S' ma jedną więcej wspólną krawędź z drzewem T . Wynika stąd, że powtarzając to postępowanie możemy przekształcić drzewo S w drzewo T , wymieniając po jednej krawędzi, nie powiększając łącznej wagi drzewa w żadnym kroku. Zatem $W(T) \leq W(S)$, co przeczy przyjętemu założeniu. ■

Zastosujemy teraz algorytm zachłanny do wyznaczenia ograniczenia dolnego rozwiązania problemu komiwojażera. Jest to użyteczne, gdyż algorytm zachłanny jest algorytmem efektywnym, natomiast nie jest znany żaden efektywny algorytm do rozwiązywania problemu komiwojażera.

Jeśli weźmiemy dowolny cykl Hamiltona w grafie pełnym z wagami, a następnie usuniemy pewien wierzchołek v , to otrzymamy drogę półhamiltonowską; każda taka droga musi być drzewem spinającym. A więc każde rozwiązanie problemu komiwojażera musi składać się z drzewa spinającego tej postaci oraz z dwóch krawędzi incydentnych z wierzchołkiem v . Wynika stąd, że jeśli znajdziemy wagę drzewa spinającego o najmniejszej wadze (za pomocą algorytmu zachłanego) i dodamy dwie najmniejsze wagi krawędzi incydentnych z v , to otrzymamy ograniczenie dolne rozwiązania problemu komiwojażera.

Na przykład, jeśli weźmiemy graf z wagami pokazany na rysunku 11.1 i usuniemy wierzchołek C , to powstał w ten sposób graf z wagami ma cztery wierzchołki A , B , D i E . Drzewo spinające o minimalnej łącznej wadze łączące te cztery wierzchołki składa się z krawędzi AB , BD i DE i ma łączną wagę równą 10. Dwie krawędziami o najmniejszej wadze, incydentnymi z C , są krawędzie CB i CA (lub CE), suma ich wag wynosi 15 (patrz rys. 11.3). Zatem szukane ograniczenie dolne dla rozwiązania problemu komiwojażera wynosi 25. Ponieważ najlepsze rozwiązanie ma wagę 26, więc widzimy, że to podejście do problemu komiwojażera może dać zaskakująco dobre wyniki.



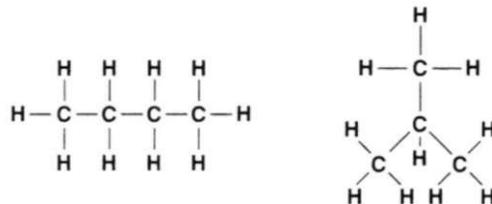
Rysunek 11.3

Zliczanie cząsteczek chemicznych

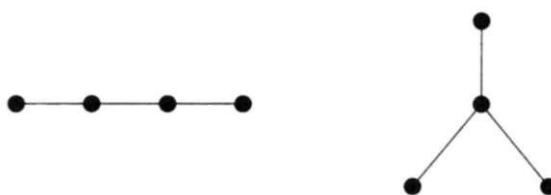
Jednym z najwcześniejzych przykładów użycia drzew było zliczanie cząsteczek chemicznych. Jeśli mamy do czynienia z cząsteczką składającą się tylko z atomów węgla i wodoru, to możemy przedstawić ją w postaci grafu, w którym każdemu atomowi węgla odpowiada wierzchołek stopnia 4, a każdemu atomowi wodoru wierzchołek stopnia 1.

Grafy *n*-butanu i 2-metylopropanu są pokazane na rysunku 11.4. Pomimo że mają one ten sam wzór chemiczny C_4H_{10} , są one różnymi cząsteczkami, gdyż • atomy są w nich różnie ulozone. Te dwie cząsteczki są przykładami szerokiej klasy cząsteczek, zwanych *alkanami* lub *parafinami* i mających ogólny wzór chemiczny C_nH_{2n+2} . Nasuwa się naturalne pytanie o liczbę różnych cząsteczek mających ten wzór chemiczny.

Aby odpowiedzieć na to pytanie, zauważmy najpierw, że graf związany z każdą cząsteczką o wzorze C_nH_{2n+2} jest drzewem na podstawie twierdzenia 9.1(3), gdyż jest spójny i ma $n + (2n + 2) = 3n + 2$ wierzchołków i $[4n + (2n + 2)]/2 = 3n + 1$ krawędzi. Zauważmy również, że cząsteczkę wyznacza jednoznacznie położenie atomów węgla, gdyż atomy wodoru mogą być dołączone w taki sposób, by stopień każdego wierzchołka odpowiadającego atomowi węgla był równy 4. Możemy zatem pominąć atomy wodoru, tak jak na rysunku 11.5, a więc zadanie sprowa-



Rysunek 11.4



Rysunek 11.5

dza się do znalezienia liczby drzew mających n wierzchołków, w których każdy wierzchołek ma stopień co najwyżej 4.

To zadanie zostało rozwiązane przez Cayleya w 1875 roku metodą zliczania sposobów budowania drzewa od jego centrum (centrów) (por. ćwiczenia 9.9). Szczegóły tego rozumowania są zbyt skomplikowane, by je tu przytoczyć, ale Czytelnik może je znaleźć w książce Biggsa, Lloyda i Wilsona [11]. Znaczną część wyników Cayleya wzmacnili w swoich pracach G. Pólya i inni. W wyniku tych prac zliczono wiele typów cząsteczek chemicznych za pomocą metod teorii grafów.

Obwody elektryczne

Przypuśćmy, że chcemy znaleźć wartość natężenia prądu elektrycznego w każdej gałęzi obwodu pokazanego na rysunku 11.6.

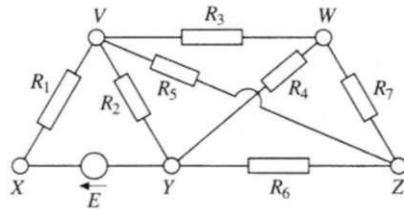
Aby to zrobić, oznaczmy w całkowicie dowolny sposób kierunek prądu w każdej gałęzi, tak jak na rysunku 11.7 i zastosujmy *prawa Kirchhoffa*:

- (1) suma algebraiczna natężeń w każdym węźle wynosi 0;
- (2) całkowite napięcie w każdym oczku jest sumą iloczynów natężeń i_k i opórów R_k w tym oczku.

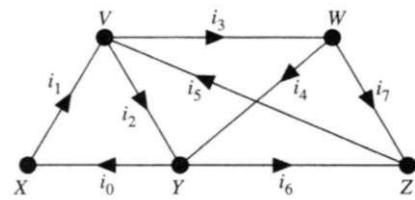
Stosując drugie prawo Kirchhoffa do oczek $VYXV$, $VWYV$ i $VWYXV$, otrzymujemy równania

$$i_1 R_1 + i_2 R_2 = E, \quad i_3 R_3 + i_4 R_4 - i_2 R_2 = 0, \quad i_1 R_1 + i_3 R_3 + i_4 R_4 = E.$$

Ostatnie z tych trzech równań jest po prostu sumą pierwszych dwóch i nie daje



Rysunek 11.6



Rysunek 11.7

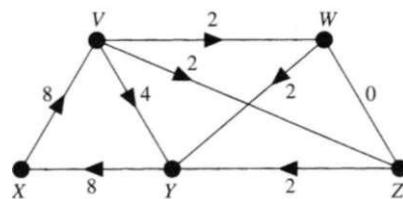
nam żadnej dodatkowej informacji. Podobnie, jeśli weźmiemy równania Kirchhoffa dla oczek $VWYV$ i $WZYW$, to możemy z nich wyprowadzić równanie dla oczka $VWZYV$. Zaoszczędzilibyśmy mnóstwo pracy, gdybyśmy umieli znaleźć zbiór oczek, które dawałyby nam dokładnie te informacje, których potrzebujemy, bez redundancji, i można tego dokonać, wykorzystując fundamentalne zbiory cykli. W powyższym przykładzie, biorąc fundamentalny zbiór cykli pokazany na rysunku 9.3, otrzymujemy następujące równania:

- dla oczka $VYXV$, $i_1R_1 + i_2R_2 = E$,
- dla oczka $VYZV$, $i_2R_2 + i_5R_5 + i_6R_6 = 0$,
- dla oczka $VWZV$, $i_3R_3 + i_5R_5 + i_7R_7 = 0$,
- dla oczka $VYWZV$, $i_2R_2 - i_4R_4 + i_5R_5 + i_7R_7 = 0$.

Z pierwszego prawa Kirchhoffa otrzymujemy następujące równania:

- dla węzła X , $i_0 - i_1 = 0$,
- dla węzła V , $i_1 - i_2 - i_3 + i_5 = 0$,
- dla węzła W , $i_3 - i_4 - i_7 = 0$,
- dla węzła Z , $i_5 - i_6 - i_7 = 0$.

Mogliśmy teraz rozwiązać ten układ ośmiu równań z ośmioma niewiadomymi i_0, i_1, \dots, i_7 . Na przykład, jeśli $E = 12$ i każda gałąź ma opór jednostkowy (tzn. $R_i = 1$ dla wszystkich i), to otrzymamy rozwiązanie pokazane na rysunku 11.8.

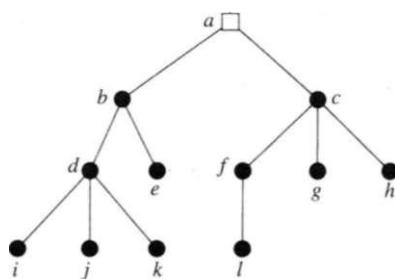


Rysunek 11.8

Drzewa poszukiwań

W wielu zastosowaniach drzewa, których używamy, mają strukturę hierarchiczną, z jednym wierzchołkiem (nazywanym **korzeniem**) umieszczonym na górze i in-

nymi wierzchołkami rozgałęzającymi się ku dołowi, tak jak na rysunku 11.9. Na przykład w taki sposób są zorganizowane komputerowe systemy klasyfikacji plików i bibliotek, przy czym informacje są przechowywane w wierzchołkach.



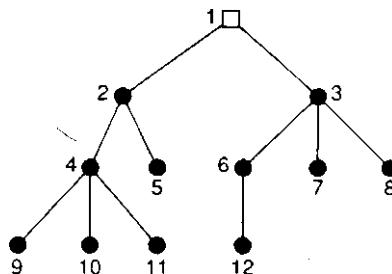
Rysunek 11.9

Jeśli potrzebujemy jakieś konkretnej informacji, musimy umieć przeszukać drzewo w systematyczny sposób. Często polega to na sprawdzeniu każdej części drzewa, zanim zostanie znaleziony potrzebny wierzchołek. Chcemy znaleźć metodę poszukiwania, która pozwoli odwiedzić wszystkie części drzewa i jednocześnie nie będzie wymagała odwiedzania poszczególnych wierzchołków zbyt często.

Dwie takie procedury są dobrze znane, są to — **metoda przeszukiwania w głąb** i **metoda przeszukiwania wszerz**. Dzięki obydwu metodom odwiedzamy wszystkie wierzchołki drzewa, ale w różnej kolejności. Nie ma żadnych wskazań, której metody należy użyć do rozwiązania konkretnego problemu — każda ma swoje zalety. Na przykład metoda przeszukiwania wszerz jest wykorzystana w algorytmie znajdowania najkrótszej drogi (por. paragraf 8), a metoda przeszukiwania w głąb jest wykorzystywana do znajdowania przepływów w sieciach (por. paragraf 29).

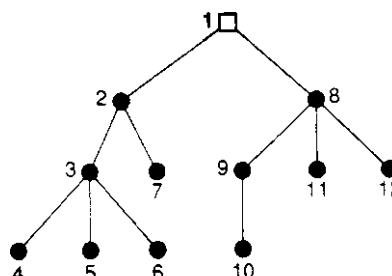
W czasie przeszukiwania wszerz zanim zagłębimy się bardziej w drzewo, zagładamy do tak wielu wierzchołków, jak jest to możliwe. To znaczy, że odwiedzamy wszystkie wierzchołki sąsiadujące z aktualnym wierzchołkiem, zanim przejdziemy do następnego wierzchołka. Na przykład weźmy drzewo pokazane na rysunku 11.9. Aby przeszukać je wszerz, rozpoczynamy przeszukiwanie w wierzchołku *a* i odwiedzamy wierzchołki *b* i *c*, sąsiadujące z *a*. Następnie odwiedzamy wierzchołki *d* i *e*, sąsiadujące z *b* i wierzchołki *f*, *g* i *h*, sąsiadujące z *c*. Wreszcie na końcu odwiedzamy wierzchołki *i*, *j* i *k*, sąsiadujące z *d* oraz sąsiadujący z *f* wierzchołek *l*. Otrzymujemy w ten sposób drzewo oznakowane pokazane na rysunku 11.10, w którym liczby stojące przy wierzchołkach odpowiadają kolejności, w jakiej te wierzchołki odwiedzaliśmy.

W czasie przeszukiwania w głąb zagłębiamy się tak daleko, jak tylko jest to możliwe, zanim zajrzymy do innych wierzchołków sąsiednich. Na przykład, weźmy znów drzewo pokazane na rysunku 11.9. Aby przeszukać je w głąb, wyjdziemy



Rysunek 11.10

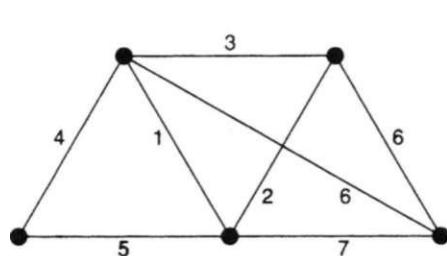
z wierzchołka a i przesuniemy się w dół do wierzchołków b , d i i . Ponieważ nie możemy posunąć się dalej, powracamy do d i wtedy przesuwamy się w dół do j . Znowu musimy powrócić, by pójść do k . Następnie powracamy przez wierzchołek d do wierzchołka b , z którego możemy pójść w dół do e . Powrót do wierzchołka c pozwoli nam pójść do c , f i l , potem do g i h , by wreszcie powrócić do a . W ten sposób otrzymujemy drzewo oznakowane przedstawione na rysunku 11.11 i znów liczby stojące przy wierzchołkach odpowiadają kolejności, w jakiej te wierzchołki odwiedzaliśmy.



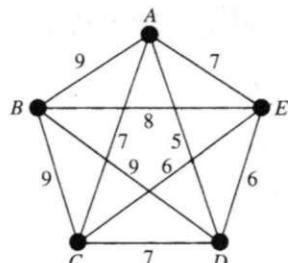
Rysunek 11.11

Ćwiczenia do §11

- 11.1' Wykorzystaj algorytm zachłanny do znalezienia drzewa spinającego o najmniejszej wadze dla grafu pokazanego na rysunku 11.12.
- 11.2 Wyznacz drzewo spinające o najmniejszej wadze dla grafu z rysunku 11.13.
- 11.3 Wykaż, że jeśli każda krawędź grafu spójnego G z wagami ma tę samą wagę, to algorytm zachłanny daje metodę konstruowania drzewa spinającego grafu G .
- 11.4
 - (a) W jaki sposób można zastosować algorytm zachłanny, by móc znajdować drzewa spinające o największej wadze?
 - (b) Wyznacz drzewo spinające o największej wadze dla każdego z grafów z wagami, pokazanych na rysunkach 11.1 i 11.12.

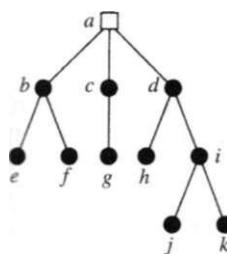


Rysunek 11.12

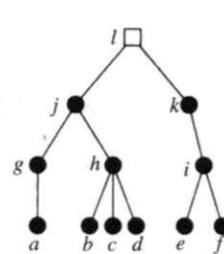


Rysunek 11.13

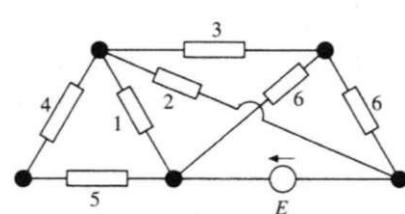
- 11.5^r** Jeśli zastosujesz algorytm zachłanny do podanego w tekście przykładu problemu komiwojażera, to jakie ograniczenie dolne otrzymasz, jeśli zamiast wierzchołka C będziesz usuwać wierzchołki A , B , D czy E ?
- 11.6^r** Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej n , graf związany z alkoholem $C_nH_{2n+1}OH$ jest drzewem (wierzchołek odpowiadający atomowi tlenu ma stopień 2).
- 11.7** Narysuj cząsteczki chemiczne mające wzory C_5H_{12} i C_6H_{14} .
- 11.8^r** Wykonaj procedury przeszukiwania wszerz i w głąb drzewa pokazanego na rysunku 11.14.
- 11.9** Wykonaj procedury przeszukiwania wszerz i w głąb drzewa pokazanego na rysunku 11.15.
- 11.10^r** Sprawdź otrzymane wartości natężen prądu w obwodzie z rysunku 11.8, stosując prawa Kirchhoffa do fundamentalnego zbioru cykli związanego z drzewem spinającym, którego krawędziami są VX , VW , WZ i YZ .



Rysunek 11.14



Rysunek 11.15



Rysunek 11.16

- 11.11*** Ułóż i rozwiąż układ równań Kirchhoffa dla obwodu pokazanego na rysunku 11.16, na którym liczby oznaczają wartości oporów.

5 Rozdział Planarność

Płaszczenie się prowadzi do nikąd.

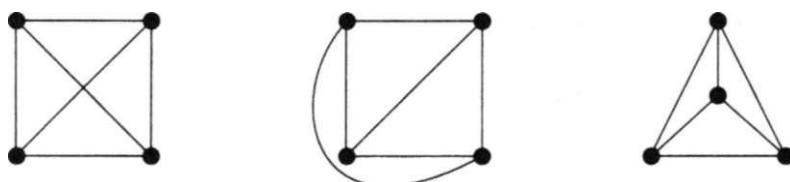
Popularne przysłowie.

Wyruszamy teraz na badanie topologicznej teorii grafów, która łączy grafy z takimi pojęciami topologicznymi, jak planarność, genus itp. W szczególności będziemy zastanawiać się, kiedy można narysować graf na płaszczyźnie i na innych powierzchniach. W paragrafie 12 zajmiemy się grafami planarnymi, udowodnimy, że pewne grafy nie są planarne, i podamy charakteryzację Kuratowskiego grafów planarnych. W paragrafie 13 udowodnimy wzór Eulera wiążący razem liczbę wierzchołków, krawędzi i ścian grafu narysowanego na płaszczyźnie, a w paragrafie 14 uogólnimy ten wzór na grafy narysowane na innych powierzchniach. W paragrafie 15 zajmiemy się dualnością, a w paragrafie 16, kończącym ten rozdział, omówimy niektóre pojęcia związane z grafami nieskończonymi.

§12 Grafy planarne

Grafem planarnym nazywamy graf, który można narysować na płaszczyźnie bez przecięć — to znaczy tak, by żadne dwie krawędzie nie przecinały się na rysunku poza wierzchołkiem, z którym obie są incydentne. Każdy taki rysunek nazywamy **rysunkiem płaskim**. Często nazywamy dla wygody rysunek płaski grafu planarnego krótko **grafem płaskim**. Na przykład na rysunku 12.1 widzimy graf planarny K_4 narysowany na trzy sposoby, ale tylko rysunki drugi i trzeci są grafami płaskimi.

Rysunek z prawej strony sugeruje pytanie: czy każdy graf planarny można narysować na płaszczyźnie w taki sposób, by każda krawędź była odcinkiem li-



Rysunek 12.1

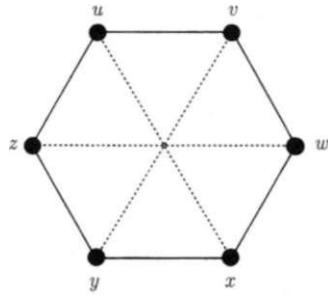
nii prostej? Oczywiście pętli i krawędzi wielokrotnych nie można narysować za pomocą odcinków, ale K. Wagner w 1936 roku i I. Fary w 1948 roku udowodnili, niezależnie od siebie, że *każdy planarny graf prosty może być narysowany za pomocą odcinków*; szczegółowy dowód można znaleźć w książce Chartranda i Leśniaka [8].

Nie wszystkie grafy są planarne, co pokazuje następujące twierdzenie:

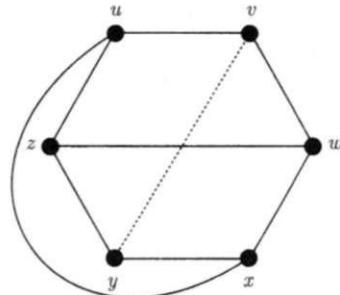
TWIERDZENIE 12.1. *Grafy K_3^* i K_5 są nieplanarne.*

Uwaga. Podamy dwa dowody tego twierdzenia. Pierwszy, prezentowany teraz, jest dowodem konstruktywnym. Drugi dowód, który poznamy w paragrafie 13, jest wnioskiem z twierdzenia Eulera.

Dowód. Przypuśćmy najpierw, że graf K_3^* jest planarny. Ponieważ K_3^* ma cykl $u - * v - > w - > y - > z - > u$ długości 6, więc każdy rysunek płaski musi zawierać ten cykl, narysowany w postaci sześciokąta, tak jak na rysunku 12.2.



Rysunek 12.2

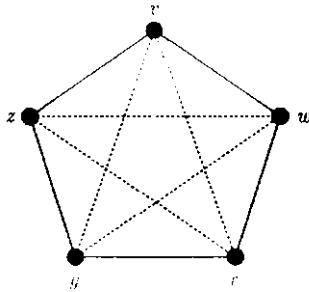


Rysunek 12.3

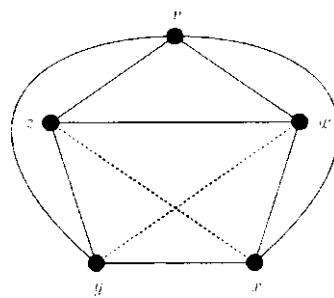
Krawędź wz musi leżeć w całości wewnętrz lub w całości na zewnątrz tego sześciokąta. Zajmiemy się przypadkiem, w którym krawędź wz leży wewnętrz sześciokąta — drugi przypadek jest podobny. Ponieważ krawędź ux nie może przeciąć krawędzi wz , musi leżeć na zewnątrz sześciokąta; prowadzi to do sytuacji pokazanej na rysunku 12.3. Wtedy jednak jest niemożliwe narysowanie krawędzi vy , gdyż przecięłaby ona albo krawędź ux , albo krawędź wz . To daje nam oczekiwana sprzeczność.

Przypuśćmy teraz, że graf K_5 jest planarny. Ponieważ K_5 ma cykl $v - \bullet w - \bullet i - * i / - t z - > !$ długości 5, każdy rysunek płaski tego grafu musi zawierać ten cykl, narysowany w postaci pięciokąta, tak jak na rysunku 12.4.

Krawędź wz musi leżeć w całości wewnętrz tego pięciokąta lub w całości na zewnątrz niego. Zajmiemy się tylko pierwszym przypadkiem, gdy krawędź wz leży



Rysunek 12.4

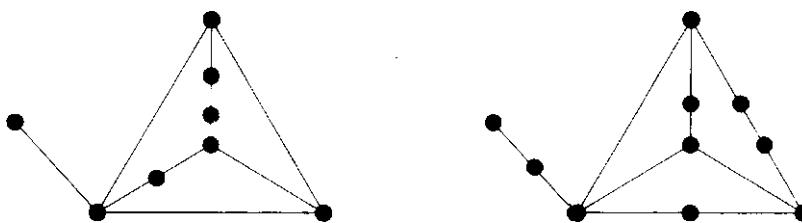


Rysunek 12.5

wewnętrz pięciokąta — drugi przypadek rozpatruje się podobnie. Ponieważ krawędzie vx i vy nie przecinają krawędzi wz , muszą obie leżeć w całości na zewnątrz pięciokąta; otrzymujemy w ten sposób sytuację pokazaną na rysunku 12.5. Ale krawędź xz nie może przeciąć krawędzi vy , więc musi leżeć wewnętrz pięciokąta: podobnie krawędź wy musi leżeć wewnętrz pięciokąta i wtedy krawędzie wy i xz muszą się przeciąć. To daje żądaną sprzeczność. ■

Zauważmy, że każdy podgraf grafu planarnego jest grafem planarnym oraz że każdy graf zawierający podgraf nieplanarny, sam musi być nieplanarny. Wynika stąd, że każdy graf zawierający graf $K_{3,3}$ lub K_5 jako podgraf, jest grafem nieplanarnym. Co więcej, jak się wkrótce przekonamy, te dwa grafy są „podstawowymi cegiełkami” grafów nieplanarnych w tym sensie, że każdy graf nieplanarny musi „zawierać” co najmniej jeden z nich.

Aby sprecyzować te stwierdzenia, nazwiemy dwa grafy grafami **homeomorficznymi**, jeśli oba grafy można otrzymać z tego samego grafu przez wstawienie nowych wierzchołków stopnia 2 wewnątrz ich krawędzi. Na przykład każde dwa cykle są homeomorficzne podobnie jak grafy pokazane na rysunku 12.6.



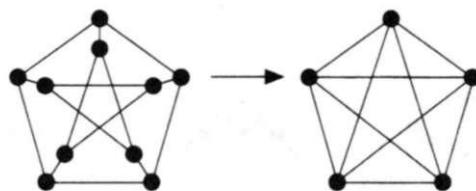
Rysunek 12.6

Zauważmy, że wprowadzenie pojęcia homeomorfizmu ma charakter wyłącznie techniczny, gdyż wstawienie lub usunięcie wierzchołków stopnia 2 nie ma wpływu na planarność grafu. Pozwala ono jednak wyśliwić następujące ważne twierdzenie,

znanie jako **twierdzenie Kuratowskiego**, które podaje warunek konieczny i wystarczający na to, by dany graf był planarny.

TWIERDZENIE 12.2 (Kuratowski, 1930). *Dany graf jest planarny wtedy i tylko wtedy, gdy nie zawiera podgrafa homeomorficznego z grafem K_5 lub z grafem $K_{3,3}$.*

Dowód twierdzenia Kuratowskiego jest długi i skomplikowany, więc go pominiemy; można ten dowód znaleźć w książkach Bondy'ego i Murty'ego [7] lub Harary'ego [9]. Skorzystamy jednak z twierdzenia Kuratowskiego, by otrzymać inne kryterium planarności. W tym celu nazwiemy graf H grafem **ściągalnym do grafu K_5** lub do grafu $K_{3,3}$, jeśli możemy otrzymać graf K_5 lub graf $K_{3,3}$, ciągając kolejno krawędzie grafu H . Na przykład graf Petersena jest ściągalny do grafu K_5 ; możemy się o tym przekonać, ciągając pięć „szprych” łączących wewnętrzny cykl długości pięć z zewnętrznym (por. rys. 12.7).



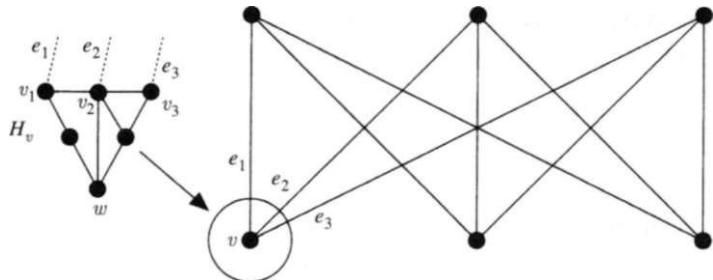
Rysunek 12.7

TWIERDZENIE 12.3. *Dany graf jest planarny wtedy i tylko wtedy, gdy nie zawiera podgrafa ściągalnego do grafu K_5 lub do grafu $K_{3,3}$.*

Szkic dowodu. \Leftarrow Założymy najpierw, że graf G jest nieplanarny. Wtedy z twierdzenia Kuratowskiego wynika, że graf G zawiera podgraf H homeomorficzny z grafem K_5 lub z grafem $K_{3,3}$. Ciągając kolejno krawędzie grafu H , incydentne z wierzchołkami stopnia 2, przekonujemy się, że graf H jest ściągalny do K_5 lub do $K_{3,3}$.

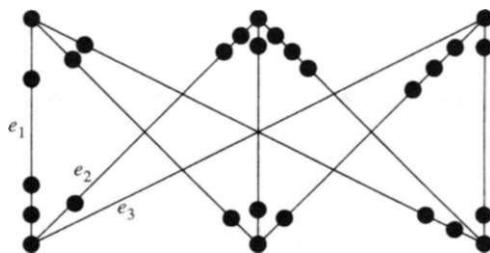
\Rightarrow Przypuśćmy teraz, że graf G zawiera podgraf H ściągalny do $K_{3,3}$ i niech wierzchołek v grafu $K_{3,3}$ powstaje w wyniku ściągnięcia podgrafa H_v grafu H (por. rys. 12.8).

Wierzchołek v jest incydentny w grafie $K_{3,3}$ z trzema krawędziami e_1, e_2 i e_3 . Te krawędzie, gdy potraktujemy je jako krawędzie grafu H , będą incydentne z trzema (niekoniecznie różnymi) wierzchołkami v_1, v_2 i v_3 podgrafa H_v . Jeśli wierzchołki v_1, v_2 i v_3 są różne, to możemy znaleźć wierzchołek w podgrafa H_v i trzy drogi prowadzące z w do tych trzech wierzchołków, przecinające się tylko w w . (Podobną konstrukcję można przeprowadzić, jeśli te wierzchołki nie są różne, z tym tylko, że te drogi zdegenerują się do pojedynczych wierzchołków.) Wynika stąd, że możemy zastąpić podgraf H_v wierzchołkiem w wraz z trzema drogami



Rysunek 12.8

wychodzącymi z niego. Jeśli przeprowadzimy tę konstrukcję dla każdego wierzchołka grafu $K_{3,3}$, a otrzymane drogi połączymy ze sobą krawędziami grafu $K_{3,3}$, to otrzymamy podgraf homeomorficzny z grafem $K_{3,3}$. Z twierdzenia Kuratowskiego wynika więc, że graf G jest nieplanarny (por. rys. 12.9).

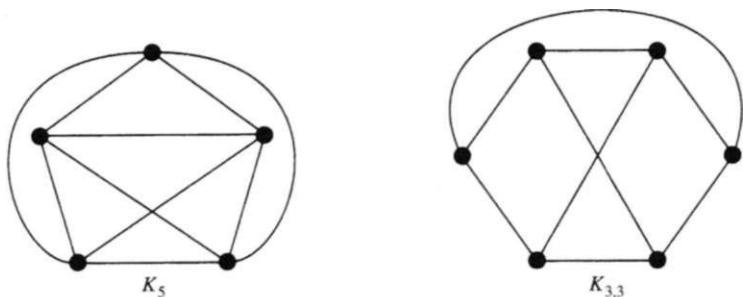


Rysunek 12.9

Podobne rozumowanie można przeprowadzić, gdy graf G zawiera podgraf ściągalny do K_5 . Szczegóły tego dowodu są jednak bardziej skomplikowane, gdyż otrzymany podgraf może być homeomorficzny albo z K_5 , albo z $K_{3,3}$; ten dowód można znaleźć w książce Chartranda i Lesniaka [8]. ■

Na zakończenie tego paragrafu zdefiniujemy tzw. „liczbę przecięć” grafu. Jeśli próbujemy narysować grafy K_5 lub $K_{3,3}$ na płaszczyźnie, to co najmniej jedna para krawędzi musi się przeciąć, gdyż grafy te są nieplanarne. Nie jest konieczne jednak więcej niż jedno przecięcie (por. rys. 12.10), powiemy więc, że grafy K_5 i $K_{3,3}$ mają liczbę przecięć równą 1.

Ogólnie, **liczbą przecięć** $\text{cr}(G)$ grafu G nazywamy najmniejszą liczbę przecięć, które muszą wystąpić, gdy rysujemy graf G na płaszczyźnie. Zatem liczba przecięć jest miarą tego, jak bardzo „nieplanarny” jest graf G . Na przykład liczbą przecięć dowolnego grafu planarnego jest zero oraz $\text{cr}(K_5) = \text{cr}(K_{3,3}) = 1$.



Rysunek 12.10

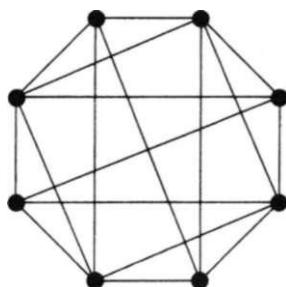
Zwróćmy uwagę na to, że przez „przecięcie” rozumiemy zawsze przecięcie dokładnie dwóch krawędzi; nie jest dozwolone, by w jednym punkcie przecinały się trzy krawędzie (lub więcej).

Ćwiczenia do §12

12.1^r Wykaż na rysunku, że następujące grafy są planarne:

- (a) koło W_5 ,
- (b) graf ośmiościanu.

12.2 Pokaż, w jaki sposób można bez przecięć narysować na płaszczyźnie graf pokazany na rysunku 12.11.



Rysunek 12.11

12.3^r Trzej sąsiedzi, nastawieni do siebie nieprzyjaźnie, korzystają z tych samych studni z wodą, olejem i syropem¹. Nie chcąc spotykać się po drodze, chcą zbudować trzy nie przecinające się drogi prowadzące z ich domów do tych studni. Czy jest to możliwe?

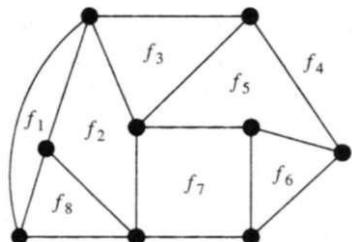
¹O tym, jak wyciągać syrop ze studni, można przeczytać w książce Lewisa Carolla pt: „Przygody Alicji w Krainie Czarów” (przyp. tłum.).

- 12.4^r** Które grafy pełne i grafy pełne dwudzielne są planarne?
- 12.5** (a) Dla jakich wartości k grafem planarnym jest k -kostka Q_k ?
 (b) Dla jakich wartości r, s i t graf pełny trójdzielny $K_{r,s,t}$ jest planarny?
- 12.6** Udowodnij, że graf Petersena jest nieplanarny,
 (a) korzystając z twierdzenia 12.2,
 (b) korzystając z twierdzenia 12.3.
- (Wskazówka do punktu (a): usuń dwie „poziome” krawędzie.)
- 12.7^r** Podaj przykład
 (a) grafu nieplanarnego, który nie jest homeomorficzny ani z grafem K_5 , ani z grafem $K_{3,3}$;
 (b) grafu nieplanarnego, który nie jest ściągalny ani do grafu K_5 , ani do grafu $K_{3,3}$.
 Dlaczego istnienie tych grafów nie przeczy twierdzeniom 12.2 i 12.3?
- 12.8** Udowodnij, że jeśli dwa grafy homeomorficzne G_i mają odpowiednio n_i wierzchołków i m_i krawędzi ($i = 1, 2$), to $m_1 - n_1 = m_2 - n_2$.
- 12.9** Graf G nazywamy grafem **zewnętrznie planarnym**, jeśli można go tak narysować na płaszczyźnie, by wszystkie wierzchołki leżały na jego obrzeżu zewnętrznym.
 (a) Udowodnij, że grafy K_4 i $K_{2,3}$ nie są zewnętrznie planarne.
 (b) Wyprowadź stąd wniosek, że jeśli graf G jest grafem zewnętrznie planarnym, to graf G nie zawiera ani podgrafa homeomorficznego z K_4 lub $K_{2,3}$, ani ściągalnego do któregoś z tych grafów. (Prawdziwe jest również twierdzenie odwrotne, dające kryterium zewnętrznej planarności podobne do kryterium Kuratowskiego.)
- 12.10^r** Wykaż, że graf Petersena i graf $K_{4,3}$ mają liczby przecięć równe 2.
- 12.11*** Udowodnij, że jeśli liczby r i s są parzyste, to
- $$\text{cr}(K_{r,s}) \leq rs(r-2)(s-2)/16$$
- i wykaż podobną nierówność, gdy któraś z liczb r i s jest nieparzysta (lub obie).
 (Wskazówka: umieść r wierzchołków na osi OX tak, by połowa z nich leżała po każdej stronie początku układu, umieść s wierzchołków w podobny sposób na osi OY i policz przecięcia krawędzi.)
- 12.12*** Niech G będzie grafem planarnym, o zbiorze wierzchołków $\{v_1, \dots, v_n\}$ i niech p_1, \dots, p_n będą dowolnymi różnymi punktami płaszczyzny. Podaj heurystyczne uzasadnienie tego, że graf G może być narysowany na płaszczyźnie w taki sposób, by wierzchołki v_i znalazły się w punktach p_i dla każdego i .

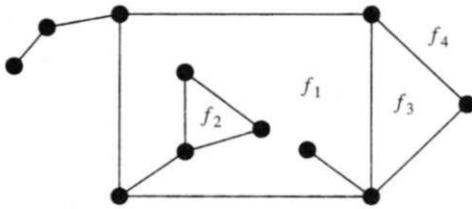
12.13* Udowodnij, że umieszczając wierzchołki grafu prostego w przestrzeni trójwymiarowej w punktach $(1, 1^2, 1^3), (2, 2^2, 2^3), (3, 3^2, 3^3), \dots$, można go narysować bez przecięć, w taki sposób, by każda krawędź była odcinkiem.

§13 Twierdzenie Eulera

Jeśli G jest grafem planarnym, to każdy rysunek płaski grafu G dzieli zbiór punktów płaszczyzny, które nie leżą na G , na obszary zwane **ścianami**. Na przykład grafy płaskie pokazane na rysunkach 13.1 i 13.2 mają odpowiednio osiem i cztery ściany. Zauważmy, że w każdym przypadku ściana f_4 jest nieograniczona; nazywamy ją **ścianą nieskończoną**.

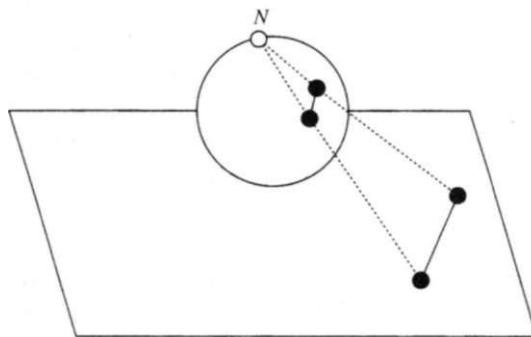


Rysunek 13.1

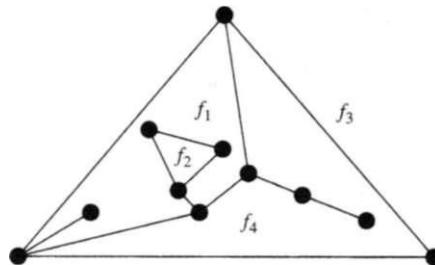


Rysunek 13.2

Ściana nieskończona niczym się nie wyróżnia — tak naprawdę każdą ścianę można wybrać jako ścianę nieskończoną. Aby się o tym przekonać, przenosimy graf na sferę za pomocą rzutu stereograficznego (patrz rys. 13.3). Obracamy teraz sferę tak, by środek rzutowania (biegun północny) znalazł się wewnątrz tej ściany, którą wybraliśmy jako ścianę nieskończoną, a następnie rzutujemy graf na płaszczyznę styczną do sfery w biegunie południowym. Wybrana ściana jest teraz ścianą nieskończoną.



Rysunek 13.3



Rysunek 13.4

Na rysunku 13.4 widzimy ten sam graf, który był pokazany na rysunku 13.2, ale teraz ścianą nieskończoną jest ściana f_3 .

Sformułujmy teraz i udowodnimy **twierdzenie Eulera**, które mówi, że niezależnie od tego, jak narysujemy graf na płaszczyźnie, liczba pozostanie taka sama i można ją wyznaczyć za pomocą prostego wzoru. Inny dowód tego twierdzenia będzie naszkicowany w ćwiczeniu 13.11.

TWIERDZENIE 13.1 (Euler, 1750). *Niech G będzie rysunkiem płaskim spójnego grafu płaskiego i niech n , m i f oznaczają odpowiednio liczbę wierzchołków, krawędzi i ścian grafu G . Wtedy*

$$n - m + f = 2.$$

Uwaga. Rysunek 13.2 ilustruje to twierdzenie, gdyż $n = 11$, $m = 13$, $f = 4$ oraz $n - m + f = 11 - 13 + 4 = 2$.

Dowód. Prowadzimy dowód przez indukcję względem liczby krawędzi grafu G . Jeśli $m = 0$, to $n = 1$ (gdyż graf G jest spójny) oraz $f = 1$ (jest tylko ściana nieskończona). W tym przypadku twierdzenie jest więc prawdziwe.

Przypuśćmy teraz, że twierdzenie jest prawdziwe dla wszystkich grafów mających co najwyżej $m - 1$ krawędzi i niech G będzie grafem mającym m krawędzi. Jeśli graf G jest drzewem, to $m = n - 1$ i $f = 1$, a więc rzeczywiście $n - m + f = 2$. Jeśli graf G nie jest drzewem, to niech e będzie dowolną krawędzią jakiegoś cyklu w G . Wtedy graf $G - e$ jest spójnym grafem planarnym, mającym n wierzchołków, $m - 1$ krawędzi i $f - 1$ ścian, a więc z założenia indukcyjnego wynika, że zachodzi równość $n - (m - 1) + (f - 1) = 2$. Stąd wynika, że $n - m + f = 2$, czego należało dowieść. ■

To twierdzenie często nazywamy twierdzeniem Eulera o wielościanach, gdyż wiąże ono ze sobą liczby wierzchołków, krawędzi i ścian wielościanu wypukłego. Na przykład w sześciianie mamy $n = 8$, $m = 12$, $f = 6$ i $n - m + f = 8 - 12 + 6 = 2$ (por. rys. 13.5).



Rysunek 13.5

Aby dostrzec ten związek w ogólnym przypadku, zrzutujmy wielościan na sferę, wewnętrz której on leży, a następnie za pomocą rzutu stereograficznego (jak na rysunku 13.3) zrzutujmy go na płaszczyznę. Otrzymany graf jest grafem 3-spójnym, w którym każda ściana jest ograniczona wielokątem — taki graf nazywamy grafem wielościanu (patrz rys. 13.1). Dla wygody sformułujemy twierdzenie 13.1 jeszcze raz dla takich grafów.

Wniosek 13.2. *Niech G będzie grafem wielościanu. Wtedy, przy zachowaniu poprzednich oznaczeń, mamy równość*

$$n - m + f = 2.$$

Twierdzenie Eulera można również sformułować dla grafów niespójnych:

Wniosek 13.3. *Niech G będzie grafem płaskim mającym n wierzchołków, m krawędzi, f ścian i k składowych. Wtedy*

$$n - m + f - k + 1.$$

Dowód. Ten wzór wynika z twierdzenia Eulera zastosowanego do każdej składowej oddzielnie; należy tylko pamiętać o tym, by nie policzyć ściany nieskończonej więcej niż jeden raz. ■

Wszystkie twierdzenia sformułowane w tym paragrafie dotyczyły dowolnych grafów płaskich. Teraz ograniczymy naszą uwagę do grafów prostych.

Wniosek 13.4. (1) *Jeśli G jest spójnym planarnym grafem prostym mającym n wierzchołków (gdzie $n \geq 3$) i m krawędzi, to $m \leq 3n - 6$.*

(2) *Jeśli ponadto graf G nie ma trójkątów, to $m \leq 2n - 4$.*

Dowód. (1) Możemy założyć, że mamy dany rysunek płaski grafu G . Ponieważ każda ściana jest ograniczona co najmniej trzema krawędziami, więc zliczając krawędzie wokół każdej ściany otrzymujemy nierówność $3f \leq 2m$. Pojawienie się czynnika 2 wynika stąd, że każda krawędź ogranicza dwie ściany. Tezę twierdzenia otrzymujemy, wykorzystując tę nierówność i twierdzenie Eulera.

(2) Tę nierówność otrzymujemy w podobny sposób, z tym tylko, że zamiast nierówności $3f \leq 2m$ mamy teraz nierówność $4f \leq 2m$. ■

Korzystając z powyższego wniosku, możemy podać inny dowód twierdzenia 12.1.

Wniosek 13.5. *Grały K_5 i $K_{3,3}$ są nieplanarne.*

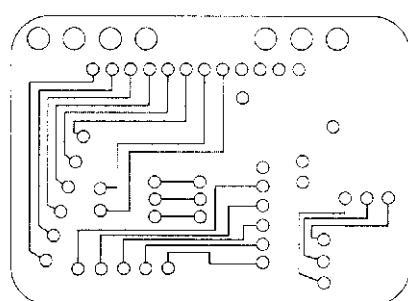
Dowód. Gdyby graf K_5 był planarny, to na podstawie wniosku 13.4(1) mielibyśmy nierówność $10 \leq 9$, co jest nieprawdą. Gdyby graf $K_{3,3}$ był planarny, to z wniosku 13.4(2) wynikałaby nierówność $9 < 8$, co również jest nieprawdą. ■

Za pomocą podobnego rozumowania udowodnimy następujące twierdzenie, z którego skorzystamy przy badaniu kolorowania grafów.

TWIERDZENIE 13.6. *Każdy planarny graf prosty zawiera wierzchołek stopnia co najwyżej 5.*

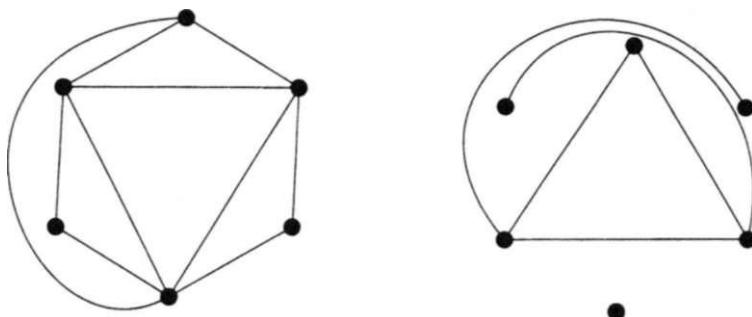
Dowód. Bez straty ogólności możemy założyć, że nasz graf jest spójny i ma co najmniej trzy wierzchołki. Gdyby każdy wierzchołek miał stopień co najmniej 6, to — przy zachowaniu dotychczasowych oznaczeń — mielibyśmy nierówność $6n \leq 2m$, a więc $3n \leq m$. Ale z wniosku 13.4(1) wynika natychmiast, że $3n \leq 3n - 6$, co jest niemożliwe. ■

Zakończymy ten paragraf paroma uwagami na temat „grubości” grafu. Części niektórych układów elektronicznych są czasami drukowane na jednej stronie nieprzewodzącej płytki — nazywamy je „obwodami drukowanymi”. Ponieważ przewody nie są izolowane, więc nie mogą się przecinać i odpowiadający im graf musi być planarny (patrz rys. 13.6).



Rysunek 13.6

Jeśli mamy do czynienia z większym układem, musimy wiedzieć, ile trzeba obwodów drukowanych, by złożyć całość. Definiujemy zatem **grubość** $t(G)$ grafu G jako najmniejszą liczbę grafów planarnych, z których można złożyć graf G . Tak samo jak liczba przecięć, grubość grafu jest miarą tego, jak bardzo „nieplanarny” jest dany graf; na przykład, grubość grafu planarnego wynosi 1, a grubości grafów K_5 i $K_{3,3}$ wynoszą 2. Rysunek 13.7 pokazuje, że grubość grafu K_6 wynosi 2.



Rysunek 13.7

Jak się przekonamy, z twierdzenia Eulera można otrzymać dolne ograniczenie na grubość grafu. Zaskakujące jest to, że to trywialne ograniczenie dolne często okazuje się być dokładną wartością grubości, o czym możemy przekonać się za pomocą bezpośredniej konstrukcji. We wzorach wyrażających to ograniczenie dolne, użyjemy symboli $\lfloor x \rfloor$ i $\lceil x \rceil$ oznaczających odpowiednio największą liczbę całkowitą nie większą od x i najmniejszą liczbę całkowitą nie mniejszą od x ; na przykład $\lfloor 3 \rfloor = \lceil 3 \rceil = 3$; $\lfloor \pi \rfloor = 3$; $\lceil \pi \rceil = 4$.

TWIERDZENIE 13.7. *Niech G będzie grafem prostym mającym n wierzchołków (gdzie $n \geq 3$) i m krawędzi. Wtedy grubość $t(G)$ grafu G spełnia nierówności*

$$t(G) \geq \lceil m/(3n - 6) \rceil \text{ oraz } t(G) \geq \lfloor (m + 3n - 7)/(3n - 6) \rfloor.$$

Dowód. Pierwsza nierówność natychmiast wynika z wniosku 13.4(1); użycie nawiasów \lceil oraz \rceil wynika stąd, że grubość grafu jest liczbą całkowitą. Druga nierówność wynika z pierwszej i łatwiej do udowodnienia równości $\lceil a/b \rceil = \lfloor (a + b - 1)/b \rfloor$, w której a i b są dowolnymi liczbami całkowitymi dodatnimi. ■

Ćwiczenia do §13

13.1^r Sprawdź wzór Eulera na przykładzie grafów

- (a) koła W_8 ,
- (b) grafu ośmiościanu,

- (c) grafu pokazanego na rysunku 13.1,
 (d) grafu pełnego dwudzielnego $K_{2,7}$.
- 13.2** Przerysuj graf z rysunku 13.2 tak, by
 (a) ściana f_1 była nieskończona.
 (b) ściana f_2 była nieskończona.
- 13.3^r** (a) Wykorzystaj twierdzenie Eulera do udowodnienia, że jeśli G jest spójnym grafem planarnym o obwodzie 5, to — przy zachowaniu dotychczasowych oznaczeń — $m \leq 5(n - 2)/3$. Wyprowadź stąd wniosek, że graf Petersena jest grafem nieplanarnym.
 (b) Uogólnij nierówność z punktu (a) na przypadek spójnych grafów planarnych o obwodzie r .
- 13.4** Niech G będzie wielościanem (lub grafem wielościanu), którego każda ściana jest pięciokątem lub sześciokątem.
 (a) Korzystając z twierdzenia Eulera, udowodnij, że graf G musi mieć co najmniej 12 ścian pięciokątnych.
 (b) Udowodnij, że jeśli w każdym wierzchołku takiego grafu schodzą się dokładnie trzy ściany, to ma on dokładnie 12 ścian pięciokątnych.
- 13.5** Niech G będzie planarnym grafem prostym mającym mniej niż 12 ścian i takim, że każdy wierzchołek ma stopień co najmniej 3.
 (a) Korzystając z twierdzenia Eulera, udowodnij, że graf G ma ścianę ograniczoną co najwyżej czterema krawędziami.
 (b) Podaj przykład grafu pokazującego, że twierdzenie z punktu (a) nie jest prawdziwe dla grafu G , który ma 12 ścian.
- 13.6** (a) Niech G będzie spójnym, planarnym, sześciennym grafem prostym i niech φ_k będzie liczbą ścian k -kątnych. Zliczając wierzchołki i krawędzie grafu G , udowodnij, że
- $$3\varphi_3 + 2\varphi_4 + \varphi_5 - \varphi_7 - 2\varphi_8 - \dots = 12.$$
- (b) Wyprowadź stąd wniosek, że graf G ma co najmniej jedną ścianę ograniczoną co najwyżej pięcioma krawędziami.
- 13.7** Niech G będzie grafem prostym mającym co najmniej 11 wierzchołków i niech \bar{G} będzie jego dopełnieniem.
 (a) Udowodnij, że oba grafy G i \bar{G} nie mogą być jednocześnie planarne.
 (Co więcej, podobne twierdzenie można udowodnić dla grafów mających co najmniej 9 wierzchołków.)
 (b) Znajdź graf mający 8 wierzchołków i taki, że oba grafy G i \bar{G} są planarne.
- 13.8^r** Wyznacz grubość
 (a) grafu Petersena;
 (b) 4-kostki Q_4 .

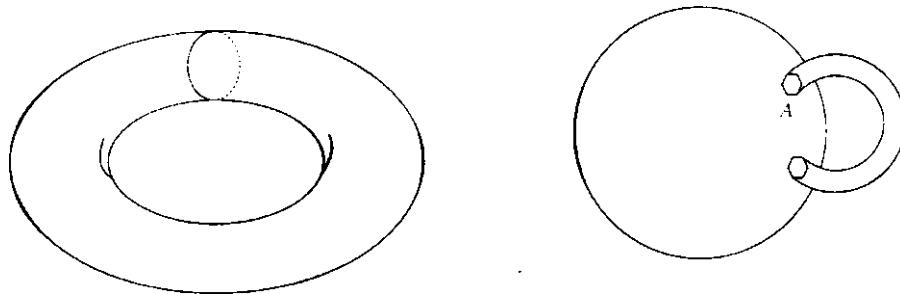
- 13.9** (a) Wykaż, że grubość grafu K_n spełnia nierówność $t(K_n) \geq \lfloor (n+7)/6 \rfloor$.
 (b) Skorzystaj z ćwiczenia 13.7, by dowieść, że dla $n = 8$ zachodzi równość, ale dla $n = 9$ i $n = 10$ nierówność jest ostra.
 (Naprawdę zachodzi równość dla wszystkich n z wyjątkiem 9 i 10.)

- 13.10** (a) Skorzystaj z wniosku 13.4(2), by dowieść, że $t(K_{r,s}) \geq \lceil rs/(2r+2s-4) \rceil$ i sprawdź, że dla grafu $K_{3,3}$ zachodzi równość.
 (b) Udowodnij, że jeśli liczba r jest parzysta, to $t(K_{r,s}) \leq r/2$, i korzystając z (a), udowodnij, że wówczas $t(K_{r,s}) = r/2$ dla $s > (r-2)^2/2$.

- 13.11*** Niech G będzie grafem wielościanu i niech W będzie podprzestrzenią cykli grafu G .
 (a) Wykaż, że wielokąty ograniczające ściany skończone grafu G tworzą bazę W .
 (b) Wyprowadź stąd wniosek 13.2.

§14 Grafy na innych powierzchniach

W poprzednich dwóch paragrafach zajmowaliśmy się grafami narysowanymi na płaszczyźnie lub (co jest równoważne) na sferze. Teraz zajmiemy się rysowaniem grafów na innych powierzchniach, na przykład na torusie. Łatwo sprawdzić, że grafy K_5 i $K_{3,3}$ można narysować bez przecięć na powierzchni torusa (por. rys. 14.1) i powstaje naturalne pytanie o to, czy istnieje wzór analogiczny do wzoru Eulera lub twierdzenie analogiczne do twierdzenia Kuratowskiego dla grafów rysowanych na takich powierzchniach.



Rysunek 14.1

Można sobie wyobrażać torus jako sferę z jedną „räczką”. Ogólnie, powierzchnia **genusa** g (rodzaju g) jest topologicznie homeomorficzna ze sferą z g räczkami. Jeśli te pojęcia nie są Ci znane, to po prostu możesz myśleć o grafach narysowa-

nych na powierzchni precelka mającego g otworów. Zatem genus sfery wynosi 0, a genus torusa wynosi 1.

Graf, który można narysować bez przecięć na powierzchni genusu g , ale którego nie można narysować na powierzchni genusu $g - 1$, nazywamy **grafem genusu g** . Zatem grafy K_5 i $K_{3,3}$ są grafami genusu 1 (nazywamy je również **grafami toroidalnymi**)..

Następujące twierdzenie podaje ograniczenie górne genusu grafu.

TWIERDZENIE 14.1. *Genus grafu jest nie większy od liczby przecięć grafu.*

Dowód. Narysujmy graf na sferze w taki sposób, by liczba przecięć krawędzi była jak najmniejsza, a więc równa liczbie przecięć c tego grafu. W każdym przecięciu konstruujemy „most” (tak jak na rysunku 1.1) i jedną krawędź prowadzimy pod mostem, a drugą po moście. Ponieważ każdy most można potraktować jak rączkę, więc graf został narysowany na sferze z c rączkami. Zatem genus grafu nie przekracza c . ■

Obecnie nie znamy twierdzenia w pełni analogicznego do twierdzenia Kuratowskiego dla powierzchni genusu g , chociaż N. Robertson i P. Seymour udowodnili, że dla każdej wartości g istnieje skończona liczba podgrafów „zabronionych” genusu g , w tym sensie, w jakim zabronionymi podgrafami genusu 0 są K_5 i $K_{3,3}$.

Mamy więcej szczęścia ze wzorem Eulera, gdyż istnieje naturalne jego uogólnienie na grafy genusu g . W tym uogólnieniu **ściany grafu** definiujemy w oczywisty sposób.

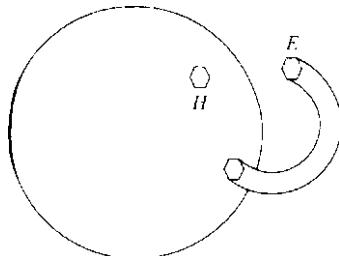
TWIERDZENIE 14.2. *Niech graf G będzie grafem spójnym genusu g , mającym n wierzchołków, m krawędzi i f ścian. Wtedy $n - m + f = 2 - 2g$.*

Szkic dowodu. Zaznaczamy tylko najważniejsze kroki w dowodzie, pomijając szczegóły.

Bez straty ogólności możemy założyć, że graf G jest narysowany na sferze z g rączkami. Możemy również założyć, że krzywe A , wzdłuż których rączki łączą się ze sferą, są cyklami grafu G : w razie potrzeby ściągamy te cykle, które zawierają krzywe A we wnętrzu.

Następnie odłączamy od sfery jeden koniec każdej rączki, w ten sposób każda rączka ma wolny koniec E , a sfera ma w tym miejscu dziurę H . Możemy założyć, że cykl odpowiadający zakończeniu rączki występuje zarówno na końcu E rączki, jak i wokół dziury H na sferze, gdyż nie zmienia to wartości wyrażenia $n - m + f$: liczby dodatkowych wierzchołków i krawędzi znoszą się wzajemnie w tym wyrażeniu (patrz rys. 14.2).

Kończymy dowód „wciskając” każdą z tych rączek w sferę. Otrzymujemy w ten sposób sferę mającą $2g$ dziur. To wciskanie rączek nie zmienia wartości



Rysunek 14.2

$n - m + f$. Ale na sferze wartością tego wyrażenia jest 2, więc na sferze mającej $2g$ dziur będziemy mieli $n - m + f = 2 - 2g$, co kończy dowód. ■

Wniosek 14.3. *Genus $g(G)$ grafu prostego G , mającego n wierzchołków (gdzie $n \geq 4$) i m krawędzi, spełnia nierówność*

$$g(G) \geq \lceil (m - 3n)/6 + 1 \rceil.$$

Dowód. Ponieważ każdą ścianę ograniczającą co najmniej trzy krawędzie, więc (tak jak w dowodzie wniosku 13.4(1)) mamy nierówność $3f \leq 2m$. Teza wniosku wynika teraz z podstawienia równości z twierdzenia 14.2 do tej nierówności i zauważenia, że genus grafu jest liczbą całkowitą. ■

Podobnie jak w przypadku grubości grafu, niewiele wiadomo o genusie dowolnego grafu. Zazwyczaj korzysta się z wniosku 14.3, by otrzymać ograniczenie dolne na genus grafu, a następnie próbuje się narysować bezpośrednio odpowiedni rysunek.

Przypadek o szczególnym znaczeniu historycznym jest przypadek grafu pełnego. Z wniosku 14.3 wynika, że genus grafu K_n spełnia nierówność

$$g(K_n) \geq \lceil (n(n-1)/2 - 3n)/6 + 1 \rceil,$$

czyli po prostych przekształceniach algebraicznych

$$g(K_n) \geq \lceil (n-3)(n-4)/12 \rceil.$$

Percy Heawood wyraził w roku 1890 przypuszczenie, że otrzymana nierówność jest w istocie równością i to przypuszczenie zostało po długiej i ciężkiej walce udowodnione w 1968 roku przez Ringela i Youngsa.

TWIERDZENIE 14.4 (Ringel i Youngs, 1968).

$$g(K_n) = \lceil (n-3)(n-4)/12 \rceil.$$

Uwaga. Nie będziemy tu dowodzić tego twierdzenia: dyskusję i dowód można znaleźć w książce Ringela [35].

Inne twierdzenia dotyczące rysowania grafów na takich powierzchniach, a także na powierzchniach „nieorientowalnych” (takich jak płaszczyzna rzutowa lub wstęga Möbiusa) można znaleźć w książkach Beinekego i Wilsona [27] lub Grossa i Tuckera [29].

Ćwiczenia do §14

14.1^r Powierzchnię torusa można traktować jako prostokąt, w którym przeciwnie boki zostały utożsamione (patrz rys. 14.3). Korzystając z tej reprezentacji, znajdź rysunki grafów K_5 i $K_{3,3}$ na torusie.



Rysunek 14.3

14.2 Korzystając z reprezentacji z ćwiczenia 14.1, wykaż, że graf Petersena ma genus 1.

14.3^r (a) Wyznacz $g(K_7)$ i $g(K_{11})$.
 (b) Podaj przykład grafu pełnego mającego genus 2.

14.4 (a) Skorzystaj z twierdzenia 14.4, by dowieść, że nie istnieje liczba naturalna n taka, że $g(K_n) = 7$.
 (b) Jaka następna liczba naturalna nie może być genusem żadnego grafu pełnego?

14.5^r (a) Podaj przykład takiego grafu płaskiego, który jest grafem regularnym stopnia 4 i którego każda ściana jest trójkątem.
 (b) Wykaż, że nie istnieje graf genusu $g \geq 1$ mający te same własności.

14.6 (a) Znайдź ograniczenie dolne, analogiczne do podanego we wniosku 14.3, dla grafu nie zawierającego trójkątów.
 (b) Wyprowadź stąd wniosek, że $g(K_{r,s}) \geq \lceil (r-2)(s-2)/4 \rceil$.
 (Ringel udowodnił, że ta nierówność jest w istocie równością.)

14.7* (a) Niech G będzie grafem nieplanarnym, który może być narysowany na wstędze Möbiusa. Udowodnij przy zachowaniu dotychczasowych oznaczeń, że $n - m + f = 1$.
 (b) Wykaż, że grafy K_5 i $K_{3,3}$ mogą być narysowane na wstędze Möbiusa.

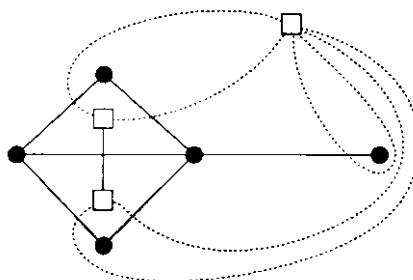
§15 Grafy dualne

W twierdzeniach 12.2 i 12.3 pokazaliśmy warunki konieczne i wystarczające na to, by dany graf był planarny — mianowicie by nie zawierał podgrafa homeomorficznego ani ściągalnego do K_5 lub $K_{3,3}$. Zajmiemy się teraz warunkami innego typu, wykorzystującymi pojęcie dualności.

Jeśli mamy dany rysunek płaski grafu planarnego G , to konstruujemy inny graf G^* , który nazywamy grafem (geometrycznie) **dualnym** do grafu G . Konstrukcję tę prowadzimy w dwóch krokach:

(1) wewnętrz każdej ściany f grafu G wybieramy punkt v^* — te punkty będą wierzchołkami grafu G^* :

(2) dla każdej krawędzi e grafu G prowadzimy linię e^* przecinającą e (ale nie przecinającą żadnej innej krawędzi grafu G) i łączącą wierzchołki v^* ścian f oddzielonych od siebie krawędzią e — te linie będą krawędziami grafu G^* .



Rysunek 15.1

Ta konstrukcja została zilustrowana na rysunku 15.1. Wierzchołki v^* grafu G^* są przedstawione za pomocą małych kwadracików, krawędzie e grafu G są zaznaczone liniami ciągłyimi, a krawędzie e^* grafu G^* są zaznaczone liniami przerwanymi. Zauważmy, że z każdego wierzchołka końcowego lub mostu grafu G powstaje pętla w grafie G^* oraz jeśli dwie ściany grafu G mają więcej niż jedną krawędź wspólną, to graf G^* ma krawędzie wielokrotne.

Geometryczna idea dualności jest bardzo stara. Na przykład w tzw. „piętnastej księdze Euklidesa”, napisanej między latami 500 i 600 n.e. wspomniane jest, że bryłą dualną do sześcianu jest ośmiościan foremny oraz że bryłą dualną do dwunastościanu foremnego jest dwudziestościan foremny (por. ćwiczenie 15.2). Zauważmy, że dowolne dwa grafy powstające w ten sposób z grafu G muszą być izomorficzne; dlatego graf G^* nazwaliśmy „grafem dualnym do grafu G ”, a nie „pewnym grafem dualnym do G ”. Z drugiej strony, jeśli graf G jest izomorficzny z grafem H , to graf G^* nie musi być izomorficzny z grafem H^* ; przykład takich grafów jest podany w ćwiczeniu 15.5.

Jeśli graf G jest grafem płaskim i spójnym, to graf G^* jest też grafem płaskim i spójnym i istnieją proste zależności między liczbami wierzchołków, krawędzi i ścian grafów G i G^* .

LEMAT 15.1. *Niech G będzie spójnym grafem płaskim mającym n wierzchołków, m krawędzi i f ścian i niech graf G^* geometrycznie dualny do niego ma n^* wierzchołków, m^* krawędzi i f^* ścian. Wtedy $n^* = f$, $m^* = m$ i $f^* = n$.*

Dowód. Pierwsze dwie równości wynikają natychmiast z definicji grafu G^* . Trzecia równość wynika z podstawienia pierwszych dwóch do wzoru Eulera zastosowanego do obu grafów G i G^* . ■

Ponieważ graf dualny G^* do grafu płaskiego G jest też grafem płaskim, więc możemy powtórzyć powyższą konstrukcję, by otrzymać graf dualny G^{**} do grafu G^* . Jeśli graf G jest spójny, to grafy G i G^{**} łączy szczególnie prosty związek, o czym się teraz przekonamy.

TWIERDZENIE 15.2. *Jeśli graf G jest spójnym grafem płaskim, to graf G^{**} jest izomorficzny z grafem G .*

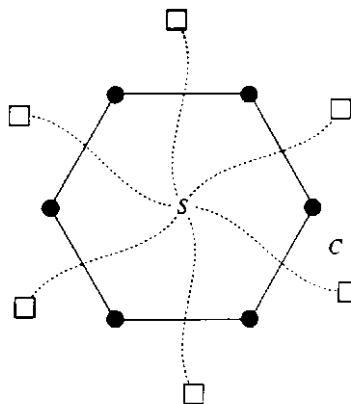
Dowód. Teza twierdzenia wynika natychmiast z tego, że konstrukcję, za pomocą której tworzyliśmy graf G^* z grafu G , można odwrócić, by otrzymać graf G z powrotem z grafu G^* ; na przykład, na rysunku 15.1 graf G jest grafem dualnym do grafu G^* . Musimy tylko sprawdzić, że ściana grafu G^* nie może zawierać więcej niż jednego wierzchołka grafu G (z pewnością zawiera co najmniej jeden), a to wynika natychmiast z równości $n^{**} = f^* = n$, gdzie n^{**} jest liczbą wierzchołków grafu G^{**} . ■

Jeśli graf G jest grafem planarnym, to graf dualny do niego można zdefiniować, biorąc dowolny rysunek płaski tego grafu i tworząc graf geometrycznie dualny do niego; nie zawsze jednak jest to jednoznaczne. Ponieważ grafy dualne zostały zdefiniowane tylko dla grafów planarnych, więc łatwo możemy stwierdzić, iż graf jest planarny wtedy i tylko wtedy, gdy ma graf dualny. Z drugiej strony z powyższego nie wynika, czy dany graf jest planarny. Byłoby oczywiście pożądane, gdybyśmy umieli określić pojęcie dualności uogólniające pojęcie dualności geometrycznej i pozwalające na stwierdzenie, czy dany graf jest planarny. Jedna z takich definicji dualności wykorzystuje związek między cyklami i rozcięciami grafu planarnego G , występujący w dualności geometrycznej. Opiszemy ten związek i wykorzystamy go do otrzymywania poszukiwanej definicji. Inną definicję podajemy w ćwiczeniu 15.11.

TWIERDZENIE 15.3. *Niech G będzie grafem planarnym i niech G^* będzie grafem geometrycznie dualnym do grafu G . Wówczas zbiór krawędzi grafu G tworzy*

cykl w G wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiadający mu zbiór krawędzi grafu G^ jest rozcięciem w G^* .*

Dowód. Możemy założyć, że graf G jest spójnym grafem planarnym. Jeśli C jest cyklem w grafie G , to C ogranicza jedną lub więcej ścian skończonych grafu G , a więc zawiera w swym wnętrzu niepusty zbiór S wierzchołków grafu G^* . Stąd natychmiast wynika, że te krawędzie grafu G^* , które przecinają krawędzie należące do C , tworzą takie rozcięcie w grafie G^* , którego usunięcie rozbija graf G^* na dwa podgrafy, jeden składający się z wierzchołków zbioru S i drugi, zawierający pozostałe wierzchołki (por. rys. 15.2). Dowód implikacji odwrotnej jest podobny, więc go pominimy. ■



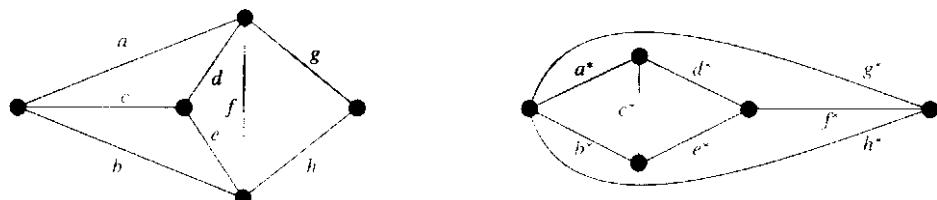
Rysunek 15.2

WNIOSEK 15.4. *Dany zbiór krawędzi grafu G jest rozcięciem w grafie G wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiadający mu zbiór krawędzi grafu G^* tworzy cykl w G^* .*

Dowód. Wniosek ten otrzymujemy, najpierw stosując twierdzenie 15.3 do grafu G^* , a następnie korzystając z twierdzenia 15.2. ■

Opierając się na twierdzeniu 15.3, możemy podać definicję abstrakcyjnej dualności. Zauważmy, że ta definicja nie odwołuje się do żadnych szczególnych właściwości grafów planarnych, a dotyczy tylko związków między dwoma grafami.

Mówimy, że graf G^* jest grafem **abstrakcyjnie dualnym** do grafu G , jeśli istnieje taka wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość między krawędziami grafu G i krawędziami grafu G^* , dla której dowolny zbiór krawędzi grafu G tworzy cykl w G wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiadający mu zbiór krawędzi grafu G^* tworzy rozcięcie w grafie G^* . Na przykład na rysunku 15.3 widzimy pewien graf oraz graf abstrakcyjnie dualny do niego, przy czym odpowiadające sobie krawędzie są zaznaczone taką samą literą.



Rysunek 15.3

Z twierdzenia 15.3 wynika, że pojęcie abstrakcyjnej dualności uogólnia pojęcie dualności geometrycznej, tzn. jeśli graf G^* jest grafem geometrycznie dualnym do grafu płaskiego G , to jest też grafem abstrakcyjnie dualnym do G . Chcielibyśmy dla grafów abstrakcyjnie dualnych uzyskać twierdzenia analogiczne do tych, jakich dowodzi się dla grafów dualnych geometrycznie. Pokażemy tu jedno z takich twierdzeń — analogiczne do twierdzenia 15.2.

TWIERDZENIE 15.5. *Jeśli graf G^* jest grafem abstrakcyjnie dualnym do grafu G , to graf G jest grafem abstrakcyjnie dualnym do grafu G^* .*

Uwaga. Zauważmy, że nie wymagamy, by graf G był spójny.

Dowód. Niech C będzie rozcięciem w grafie G i niech C^* będzie odpowiadającym zbiorem krawędzi grafu G^* . Pokażemy, że C^* jest cyklem w grafie G^* . Z pierwszej części ćwiczenia 5.12 wynika, że C ma parzystą liczbę krawędzi wspólnych z dowolnym cyklem w grafie G , więc C^* ma parzystą liczbę krawędzi wspólnych z dowolnym rozcięciem grafu G^* . Z drugiej części ćwiczenia 5.12 wynika, że albo C^* jest cyklem w grafie G^* , albo jest sumą co najmniej dwóch cykli o rozłącznych zbiorach krawędzi. Ale ta druga możliwość jest wykluczona, gdyż możemy podobnie wykazać, że cykle w grafie G^* odpowiadają sumom rozcięć w grafie G , mających rozłączne zbiory krawędzi. Skąd wynikałoby, że C byłby sumą co najmniej dwóch rozcięć, a nie jednym rozcięciem. ■

Pomimo że abstrakcyjna dualność grafów wydaje się zdefiniowana w trochę dziwny sposób, to okazuje się, że ma wszystkie własności, których możemy od niej wymagać. Widzieliśmy w twierdzeniu 15.3, że graf planarny ma graf abstrakcyjnie dualny (na przykład graf geometrycznie dualny). Pokażemy teraz, że prawdziwe jest też twierdzenie odwrotne mówiące, że dowolny graf mający graf abstrakcyjnie dualny musi być grafem planarnym. To znaczy, że definicja abstrakcyjnej dualności nie tylko uogólnia definicję geometrycznej dualności, ale również charakteryzuje grafy planarne. Okazuje się, że ta definicja abstrakcyjnej dualności jest naturalną konsekwencją badań nad dualnością w teorii matroidów (por. paragraf 32).

TWIERDZENIE 15.6. *Dany graf jest grafem planarnym wtedy i tylko wtedy, gdy ma graf abstrakcyjnie dualny.*

Uwaga. Istnieje wiele dowodów tego twierdzenia. Naszkicujemy tu dowód korzystający z twierdzenia Kuratowskiego.

Szkic dowodu. Jak już wspomnieliśmy wcześniej, wystarczy dowieść, że jeśli istnieje graf G^* abstrakcyjnie dualny do grafu G , to graf G jest grafem planarnym. Dowód składa się z czterech kroków.

(1) Zauważamy najpierw, że jeśli usuniemy z grafu G krawędź e , to graf abstrakcyjnie dualny do otrzymanego grafu można otrzymać z grafu G^* , ściągając krawędź e^* odpowiadającą krawędzi e . Powtarzając to postępowanie, dochodzimy do wniosku, że jeśli graf G ma graf abstrakcyjnie dualny, to każdy jego podgraf też ma graf abstrakcyjnie dualny.

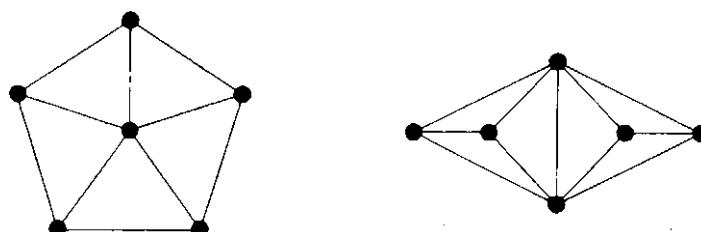
(2) Zauważamy następnie, że jeśli graf G ma graf abstrakcyjnie dualny i graf G' jest grafem homeomorficznym z grafem G , to graf G' też ma graf abstrakcyjnie dualny. Wynika to stąd, że dołaczanie lub usunięcie z grafu G wierzchołka stopnia 2 powoduje dołaczanie lub usunięcie „krawędzi wielokrotnej” z grafu G^* .

(3) Trzeci krok polega na pokazaniu, że żaden z grafów K_5 i $K_{3,3}$ nie ma grafu abstrakcyjnie dualnego. Jeśli graf G^* jest grafem abstrakcyjnie dualnym do grafu $K_{3,3}$, to ponieważ graf $K_{3,3}$ zawiera wyłącznie cykle długości 4 lub 6 i nie ma rozcięć składających się z dwóch krawędzi, więc graf G^* nie ma krawędzi wielokrotnych i każdy wierzchołek G^* ma stopień co najmniej 4. Zatem graf G^* musi mieć co najmniej 5 wierzchołków, a więc co najmniej $(5 \cdot 4)/2 = 10$ krawędzi, co prowadzi do sprzeczności. Pomiemy podobne rozumowanie dla grafu K_5 .

(4) Przypuśćmy teraz, że G jest grafem nieplanarnym mającym graf abstrakcyjnie dualny G^* . Wtedy z twierdzenia Kuratowskiego wynika, że graf G ma podgraf H homeomorficzny z grafem K_5 lub z grafem $K_{3,3}$. Z punktów (1) i (2) wynika, że graf H , a więc i graf K_5 lub $K_{3,3}$, musi mieć graf abstrakcyjnie dualny, co przeczy punktowi (3). ■

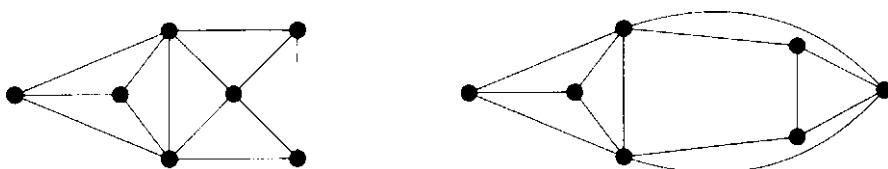
Ćwiczenia do §15

15.1⁷ Znajdź grafy dualne do grafów pokazanych na rysunku 15.4 i sprawdź na tych przykładach tezę lematu 15.1.



Rysunek 15.4

- 15.2 Wykaż, że graf dualny do grafu sześciianu jest grafem ośmiościanu oraz że graf dualny do grafu dwunastościanu jest grafem dwudziestościanu.
- 15.3 Wykaż, że graf dualny do koła jest kołem.
- 15.4^r Skorzystaj z dualności, by dowieść, że nie istnieje graf płaski mający pięć ścian takich, że każda dwie z nich mają wspólną krawędź.
- 15.5^r Wykaż, że grafy pokazane na rysunku 15.5 są izomorficzne, ale grafy geometrycznie dualne do nich nie są izomorficzne.



Rysunek 15.5

- 15.6 (a) Podaj przykład pokazujący, że jeśli G jest niespójnym grafem płaskim, to graf G^{**} nie musi być izomorficzny z G .
 (b) Udowodnij, że sytuacja opisana w punkcie (a) jest sytuacją ogólną.
- 15.7^r Zrób ćwiczenie dualne do ćwiczenia 13.4.
- 15.8^r Udowodnij, że jeśli graf G jest 3-spójnym grafem płaskim, to graf geometrycznie dualny do niego jest grafem prostym.
- 15.9^r Niech G będzie spójnym grafem płaskim. Korzystając z twierdzenia 5.1 i wniosku 6.3, udowodnij, że graf G jest grafem dwudzielonym wtedy i tylko wtedy, gdy jego graf dualny jest grafem eulerowskim.
- 15.10 (a) Podaj przykład pokazujący, że jeśli graf G jest spójnym grafem płaskim, to dowolne drzewo spinające grafu G odpowiada dopełnieniu drzewa spinającego grafu G^* .
 (b) Udowodnij, że każdy graf G ma własność opisaną w punkcie (a).
- 15.11* Graf G^* nazywamy **grafem dualnym Whitneya** do grafu G , jeśli istnieje taka wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość między elementami zbiorów $E(G)$ i $E(G^*)$, że dla każdego podgrafa H grafu G , mającego ten sam zbiór wierzchołków, odpowiedni podgraf H^* grafu G^* ma następującą własność:

$$\gamma(H) + \xi(\bar{H}^*) = \xi(G^*),$$

gdzie graf H^* otrzymujemy z grafu G^* , usuwając krawędzie grafu H^* , a γ i ξ są funkcjami zdefiniowanymi w paragrafie 9.

- (a) Wykaż, że ta definicja uogólnia definicję dualności geometrycznej.
 - (b) Udowodnij, że jeśli graf G^* jest grafem dualnym Whitneya do grafu G , to graf G jest grafem dualnym Whitneya do grafu G^* .
- (W 1932 roku H. Whitney dowódł, że graf G jest grafem planarnym wtedy i tylko wtedy, gdy ma graf dualny Whitneya.)

§16 Grafy nieskończone

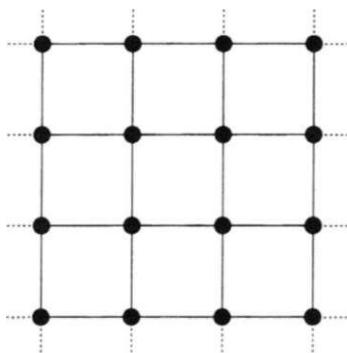
W tym paragrafie pokażemy, w jaki sposób definicje niektórych pojęć z poprzednich paragrafów można rozszerzyć na grafy nieskończone. **Graf nieskończony** G składa się z nieskończonego zbioru $V(G)$, którego elementy nazywamy **wierzchołkami** i nieskończonej rodziny $E(G)$ par nieuporządkowanych elementów zbioru $V(G)$, nazywanych **krawędziami**. Jeśli oba zbiory $V(G)$ i $E(G)$ są przeliczalne, to graf G nazwiemy **grafem przeliczalnym**. Nie będziemy zajmować się przypadkiem, w którym zbiór $V(G)$ jest nieskończony, a zbiór $E(G)$ skończony, gdyż graf G jest wtedy po prostu grafem skończonym z dodanym nieskończonym zbiorem wierzchołków izolowanych, jak również przypadkiem, w którym zbiór $E(G)$ jest nieskończony, a zbiór $V(G)$ skończony, gdyż taki graf jest tak naprawdę grafem skończonym mającym nieskończanie wiele pętli i krawędzi wielokrotnych.

Wiele naszych wcześniejszych definicji („sąsiedni”, „incydentny”, „izomorficzny”, „spójny”, „planarny” itp.) można rozszerzyć na grafy nieskończone. **Stopniem** wierzchołka v w grafie nieskończonym jest moc zbioru krawędzi incydentnych z v i może ona być zarówno skończona, jak i nieskończona. Graf nieskończony, którego każdy wierzchołek ma stopień skończony, nazywamy grafem **lokalnie skończonym**; dwoma ważnymi przykładami grafów lokalnie skończonych są: nieskończona krata kwadratowa i nieskończona krata trójkątna, pokazane na rysunkach 16.1 i 16.2. W podobny sposób definiujemy **lokalnie przeliczalny** graf nieskończony jako graf, w którym każdy wierzchołek ma stopień przeliczalny.

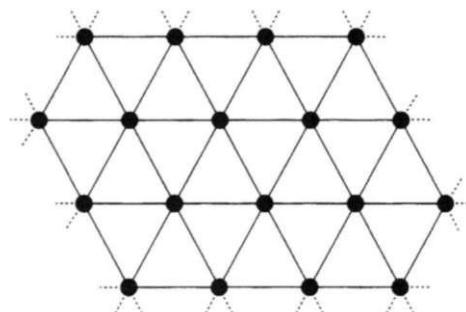
Udowodnimy teraz następujące proste twierdzenie, mające jednak zasadnicze znaczenie.

TWIERDZENIE 16.1. *Każdy spójny, lokalnie przeliczalny graf nieskończony jest przeliczalny.*

Dowód. Niech v będzie dowolnym wierzchołkiem takiego grafu nieskończonego i niech A_1 będzie zbiorem wierzchołków sąsiadujących z v . A_2 zbiorem wierzchołków sąsiadujących z wierzchołkami należącymi do A_1 i tak dalej. Z założenia zbiór A_1 jest przeliczalny; stąd wynika, że zbiory A_2, A_3, \dots są przeliczalne, gdyż suma przeliczalnego zbioru złożonego ze zbiorów przeliczalnych jest zbiorem przeliczalnym. Zatem suma ciągu zbiorów $\{v\}, A_1, A_2, \dots$ jest zbiorem przeliczalnym



Rysunek 16.1



Rysunek 16.2

i zawiera każdy wierzchołek tego grafu, gdyż jest on grafem spójnym. To kończy dowód twierdzenia. ■

WNIOSEK 16.2. *Każdy spójny, lokalnie skończony graf nieskończony jest grafem przeliczalnym.*

Możemy rozszerzyć pojęcie trasy na przypadek grafów nieskończonych. Wasadzie istnieją trzy różne rodzaje tras w grafie nieskończonym G :

- (1) *trasa skończona* jest zdefiniowana dokładnie tak samo, jak w paragrafie 5;
- (2) *trasa jednostronne nieskończona* o początku w wierzchołku v_0 jest to ciąg nieskończony krawędzi postaci v_0v_1, v_1v_2, \dots ;
- (3) *trasa dwustronne nieskończona* jest to nieskończony ciąg krawędzi postaci

$$\dots, v_{-2}v_{-1}, v_{-1}v_0, v_0v_1, v_1v_2, \dots$$

Ścieżki i drogi jednostronne i dwustronne nieskończone definiujemy w analogiczny sposób, podobnie jak długość drogi i odległość między wierzchołkami. Następujące twierdzenie, znane jako **lemat Königa**, mówi, że na drogi nieskończone łatwo się natknąć.

TWIERDZENIE 16.3 (König, 1927). *Niech G będzie spójnym, lokalnie skończonym grafem nieskończonym. Wtedy dla każdego wierzchołka v w grafie G istnieje droga jednostronne nieskończona o początku v .*

Dowód. Dla każdego wierzchołka z , różnego od v , istnieje nietrywialna droga prowadząca z v do z . Wynika stąd, że istnieje nieskończanie wiele dróg w grafie G , mających początek w wierzchołku v . Ponieważ stopień wierzchołka v jest skończony, więc nieskończanie wiele tych dróg musi zaczynać się tą samą krawędzią. Jeśli vv_1 jest taką krawędzią, to możemy powtórzyć to rozumowanie dla wierzchołka v_1 i otrzymać w ten sposób nowy wierzchołek v_2 i odpowiednią krawędź

v_1v_2 . Kontynuując to postępowanie, otrzymamy drogę jednostronnie nieskończoną $v \rightarrow v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots$.

Znaczenie lematu Königa polega na tym, że pozwala on wyprowadzać twierdzenia dotyczące grafów nieskończonych z odpowiednich twierdzeń dla grafów skończonych. Następujące twierdzenie może być typowym przykładem.

TWIERDZENIE 16.4. *Jeśli graf G jest przeliczalny i każdy skończony podgraf grafu G jest planarny, to G jest grafem planarnym.*

Dowód. Ponieważ graf G jest przeliczalny, więc jego wierzchołki można ustawić w ciąg v_1, v_2, v_3, \dots . Możemy utworzyć ściśle rosnący ciąg $G_1 \subset G_2 \subset G_3 \subset \dots$ podgrafów grafu G , przyjmując, że wierzchołkami grafu G_k są wierzchołki v_1, \dots, v_k , a krawędziami są wszystkie krawędzie grafu G , łączące te wierzchołki. Ponieważ graf G_i można narysować na płaszczyźnie tylko na skończenie wiele topologicznie różnych sposobów (niech $m(i)$ będzie liczbą tych sposobów), więc możemy utworzyć inny graf nieskończony H , którego wierzchołki w_{ij} (dla $i \geq 1$ oraz $1 \leq j \leq m(i)$) odpowiadają rysunkom płaskim grafów G_i i którego krawędzie łączą wierzchołki w_{ij} i w_{kl} wtedy, gdy $k = i + 1$ oraz rysunek płaski odpowiadający wierzchołkowi w_{ij} rozszerza się do rysunku płaskiego odpowiadającego wierzchołkowi w_{kl} . Ponieważ graf H jest oczywiście spójny i lokalnie skończony, więc z lematu Königa wynika, że ma on drogę jednostronnie nieskończoną. Ponieważ graf G jest przeliczalny, więc ta nieskończona droga daje żądany rysunek płaski grafu G .

Zakładając następne aksjomaty teorii mnogości, takie jak wersja aksjomatu wyboru dla zbiorów nieprzeliczalnych, można udowodnić podobne twierdzenia dotyczące grafów nieskończonych, niekoniecznie przeliczalnych.

Tę dygresję dotyczącą grafów nieskończonych zakończymy krótkim omówieniem nieskończonych grafów eulerowskich. Wydaje się naturalne nazwanie spójnego grafu nieskończonego G grafem eulerowskim, jeśli istnieje dwustronne nieskończona ścieżka zawierająca każdą krawędź grafu G ; taką nieskończoną ścieżkę nazwiemy (dwustronną) ścieżką eulerowską. Zauważmy, że ta definicja wymaga, by graf G był przeliczalny. Następujące twierdzenia podają kolejne warunki konieczne na to, by graf nieskończony był grafem eulerowskim.

TWIERDZENIE 16.5. *Niech graf G będzie spójnym, przeliczalnym grafem eulerowskim. Wtedy*

(1) *graf G nie ma wierzchołka nieparzystego stopnia;*

(2) *dla każdego skończonego podgrafa H_0 grafu G , graf nieskończony H otrzymany z grafu G przez usunięcie krawędzi grafu H_0 ma co najwyżej dwie nieskończone składowe;*

(3) jeśli, ponadto, każdy wierzchołek grafu H_0 ma stopień parzysty, to graf H ma dokładnie jedną składową nieskończoną.

Dowód. (1). Niech P będzie ścieżką eulerowską. Wtedy, powtarzając dowód twierdzenia 6.2, stwierdzamy, że każdy wierzchołek grafu G ma albo stopień parzysty, albo stopień nieskończony.

(2) Podzielimy ścieżkę P na trzy podścieżki P_- , P_0 i P_+ w taki sposób, by P_0 była skończoną ścieżką zawierającą każdą krawędź grafu H_0 i być może również inne krawędzie, a P_- i P_+ były ścieżkami jednostronne nieskończonymi. Wtedy graf nieskończony K utworzony z krawędzi należących do P_- i P_+ oraz z wierzchołków incydentnych z tymi krawędziami ma co najwyżej dwie składowe nieskończone. Ponieważ graf H powstaje z grafu K przez dodanie skończenie wielu krawędzi, więc graf H też ma tylko co najwyżej dwie składowe nieskończone.

(3) Niech początkiem i końcem ścieżki P_0 będą odpowiednio wierzchołki v i w . Chcemy pokazać, że wierzchołki v i w są połączone drogą w grafie H . Jeśli $v = w$, to jest to oczywiste. W przeciwnym razie wynika to z wniosku 6.4 zastosowanego do grafu otrzymanego z P_0 przez usunięcie krawędzi należących do H_0 ; z założenia w tym grafie każdy wierzchołek (z wyjątkiem v i w) ma stopień parzysty. ■

Warunki podane w powyższym twierdzeniu są nie tylko konieczne, ale również wystarczające. Wyrazimy to formalnie w postaci następującego twierdzenia, którego dowód można znaleźć w książce Orego [10].

TWIERDZENIE 16.6. *Jeśli G jest spójnym grafem przeliczalnym, to graf G jest eulerowski wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są warunki (1), (2) i (3) podane w twierdzeniu 16.5.*

Ćwiczenia do §16

16.1^r Podaj przykłady następujących grafów:

- (a) grafu nieskończonego mającego nieskończenie wiele wierzchołków końcowych;
- (b) grafu nieskończonego mającego nieprzeliczalnie wiele wierzchołków i krawędzi;
- (c) nieskończonego, spójnego grafu kubicznego;
- (d) nieskończonego grafu dwudzielnego;
- (e) nieskończonego grafu nieplanarnego;
- (f) nieskończonego drzewa.

16.2^r Podaj przykład grafu, pokazujący, że teza lematu Königa jest fałszywa, jeśli pominiemy założenie lokalnej skończości grafu.

16.3 Wykaż, że jeśli dla obu zbiorów $V(G)$ i $E(G)$ istnieją wzajemnie jednoznaczne odpowiedności z podzbiorami zbioru liczb rzeczywistych, to graf nieskończony G może być narysowany w trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej.

16.4* (a) Znajdź nieskończoną ścieżkę Eulera w nieskończonej kracie kwadratowej S .
(b) Sprawdź, że krata S spełnia warunki podane w twierdzeniu 16.5.

16.5* Powtórz ćwiczenie 16.4 dla nieskończonej kraty trójkątnej.

16.6* Wykaż, że nieskończona krata kwadratowa ma drogi jednostronne i dwustronne nieskończone, przechodzące dokładnie jeden raz przez każdy wierzchołek.

6 Rozdział Kolorowanie grafów

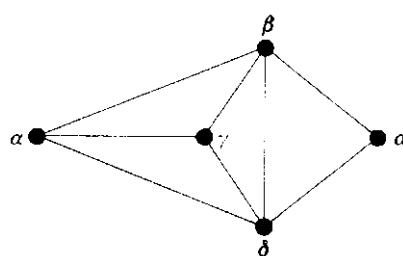
*Nie śmieli krwawej pieczęci przybić na swej zbrodni —
Woleli pokryć ją jaśniejszą farbą.*

WILLIAM SZEKSPIR (Burza)

W tym rozdziale zajmiemy się kolorowaniem grafów i map, zwracając szczególną uwagę na twierdzenie o czterech barwach i zagadnienia z nim związane. W paragrafach 17 i 18 kolorujemy wierzchołki grafu w taki sposób, by każda krawędź łączyła wierzchołki różnych kolorów. W paragrafie 19 opisujemy związek między tymi kolorowaniami wierzchołków i kolorowaniem map, a w paragrafie 20 pokazujemy, jak te kolorowania wiążą się z kolorowaniem krawędzi grafu. Ta część wykładu ma charakter jakościowy i odpowiada na pytanie, czy pewne grafy mogą być pokolorowane za pomocą danej liczby kolorów. W paragrafie 21, w którym zajmujemy się wielomianami chromatycznymi, zastanawiamy się, na ile sposobów można graf pokolorować.

§17 Kolorowanie wierzchołków

Jeśli G jest grafem bez pętli, to mówimy, że G jest grafem k -kolorowalnym, jeśli każdemu wierzchołkowi możemy przypisać jeden z k kolorów w taki sposób, by sąsiednie wierzchołki miały różne kolory. Jeśli graf G jest k -kolorowalny, ale nie jest $(k - 1)$ -kolorowalny, to mówimy, że jest on k -chromatyczny lub że jego liczba chromatyczna jest równa k ; piszemy wtedy $\chi(G) = k$. Na przykład na rysunku 17.1 widzimy graf G , dla którego $\chi(G) = 4$; kolory są oznaczone literami greckimi.



Rysunek 17.1

Jest on zatem k -kolorowalny dla $k \geq 4$. Będziemy zakładać, że wszystkie grafy, którymi się zajmujemy, są grafami prostymi, gdyż krawędzie wielokrotne nie mają znaczenia w naszych rozważaniach. Będziemy też zakładać, że te grafy są spójne.

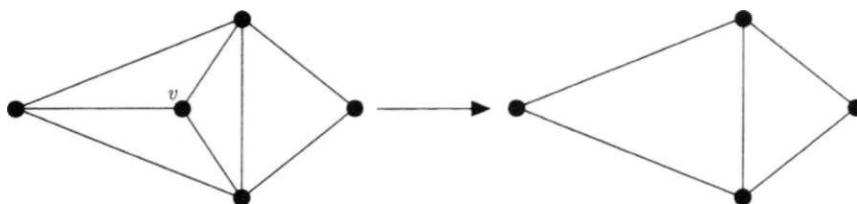
Jest rzeczą oczywistą, że $\chi(K_n) = n$ oraz że istnieją grafy mające dowolnie duże liczby chromatyczne. Z drugiej strony, $\chi(G) = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy graf G jest grafem pustym, oraz $\chi(G) = 2$ wtedy i tylko wtedy, gdy G jest niepustym grafem dwudzielnym. Zauważmy, że każde drzewo jest 2-kolorowalne, podobnie jak każdy cykl mający parzystą liczbę wierzchołków.

Nie wiadomo, jakie grafy są 3-chromatyczne, choć łatwo podać przykłady takich grafów. Wśród nich znajdują się grafy cykliczne i koła o nieparzystej liczbie wierzchołków, a także graf Petersena. Koła mające parzystą liczbę wierzchołków są 4-chromatyczne.

Niewiele umiemy powiedzieć o liczbie chromatycznej dowolnego grafu. Jeśli graf ma n wierzchołków, to jego liczba chromatyczna nie może przekraczać n i jeśli ten graf zawiera K_r jako podgraf, to jego liczba chromatyczna nie może być mniejsza od r , ale te spostrzeżenia nie są bardzo głębokie. Jeśli jednak znamy stopień każdego wierzchołka, to możemy powiedzieć więcej.

TWIERDZENIE 17.1. *Jeśli G jest grafem prostym, w którym największym stopniem wierzchołka jest Δ , to graf G jest $(\Delta + 1)$ -kolorowalny.*

Dowód. Dowód prowadzimy przez indukcję względem liczby wierzchołków grafu G . Niech G będzie grafem prostym mającym n wierzchołków. Jeśli usuniemy z niego dowolny wierzchołek v wraz z krawędziami incydentnymi z nim, to otrzymany graf będzie również grafem prostym, który będzie miał $n - 1$ wierzchołków oraz największy stopień wierzchołka będzie nie większy niż Δ (patrz rys. 17.2). Z założenia indukcyjnego wynika, że ten graf jest $(\Delta + 1)$ -kolorowalny. Wtedy $(\Delta + 1)$ -kolorowanie grafu G otrzymujemy nadając wierzchołkowi v kolor inny niż kolory (co najwyżej Δ) wierzchołków sąsiadujących z v . ■



Rysunek 17.2

Bardziej wnikliwe rozumowanie prowadzi do nieco silniejszego następującego twierdzenia, znanego pod nazwą **twierdzenia Brooksa**. Dowód tego twierdzenia poznamy w następnym paragrafie.

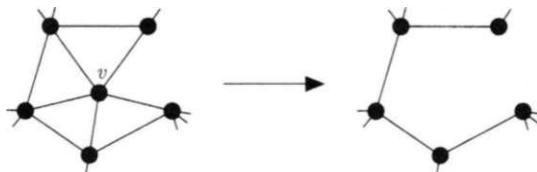
TWIERDZENIE 17.2 (Brooks, 1941). *Jeśli G jest spójnym grafem prostym, nie będącym grafem pełnym, i jeśli największy stopień wierzchołka grafu G wynosi Δ (gdzie $\Delta \geq 3$), to graf G jest Δ -kolorowalny.*

Oba te twierdzenia mają zastosowanie wtedy, gdy wszystkie stopnie wierzchołków są w przybliżeniu takie same. Na przykład z twierdzenia 17.1 wynika, że każdy graf kubiczny jest 4-kolorowalny, a z twierdzenia 17.2 wynika, że każdy spójny graf kubiczny różny od K_4 jest 3-kolorowalny. Z drugiej strony, jeśli graf ma kilka wierzchołków wysokiego stopnia, to z tych twierdzeń dowiadujemy się niewiele. Najlepiej widać to na przykładzie grafu $K_{1,s}$; z twierdzenia Brooksa wynika, że jest on s -kolorowalny, choć naprawdę jest 2-kolorowalny dla każdego s . Nie znamy żadnego efektywnego sposobu ominienia tej trudności, chociaż istnieją metody, które trochę pomagają.

Ta dość nieprzyjemna sytuacja nie zdarza się, gdy ograniczymy nasze zainteresowanie do grafów planarnych. Tak naprawdę, możemy łatwo udowodnić dość silne twierdzenie mówiące, że każdy planarny graf prosty jest 6-kolorowalny.

TWIERDZENIE 17.3. *Każdy planarny graf prosty jest 6-kolorowalny.*

Dowód. Ten dowód jest podobny do dowodu twierdzenia 17.1. Dowodzimy twierdzenia przez indukcję ze względu na liczbę wierzchołków. Jest ono trywialne dla planarnych grafów prostych mających co najwyżej sześć wierzchołków. Przyjmijmy zatem, że G jest planarnym grafem prostym mającym n wierzchołków i że wszystkie planarne grafy proste mające $n - 1$ wierzchołków są 6-kolorowalne. Z twierdzenia 13.6 wynika, że graf G ma wierzchołek v stopnia co najwyżej 5. Jeśli usuniemy wierzchołek v wraz z wszystkimi krawędziami z nim incydentnymi, to otrzymany graf będzie miał $n - 1$ wierzchołków, a więc będzie 6-kolorowalny (por. rys. 17.3). Wtedy 6-kolorowanie grafu G otrzymujemy, kolorując wierzchołek v kolorem różnym od kolorów (co najwyżej pięciu) wierzchołków sąsiadujących z v . ■



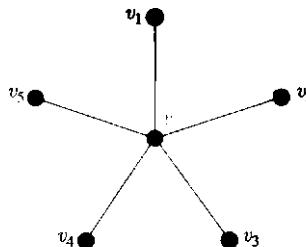
Rysunek 17.3

Podobnie jak to było z twierdzeniem 17.1, możemy ten rezultat wzmacnić dzięki bardziej wnikliwemu rozumowaniu. Otrzymamy twierdzenie nazywane **twierdzeniem o pięciu barwach**.

TWIERDZENIE 17.4. *Każdy planarny graf prosty jest 5-kolorowalny.*

Dowód. Ten dowód jest podobny do dowodu twierdzenia 17.3, chociaż jego szczegóły są bardziej skomplikowane. Dowodzimy twierdzenia przez indukcję względem liczby wierzchołków. Twierdzenie jest oczywiste dla planarnych grafów prostych mających mniej niż sześć wierzchołków. Przypuśćmy zatem, że graf G jest planarnym grafem prostym mającym n wierzchołków oraz że wszystkie planarne grafy proste mające $n - 1$ wierzchołków są 5-kolorowalne. Z twierdzenia 13.6 wynika, że graf G ma wierzchołek v stopnia co najwyżej 5. Tak jak poprzednio, po usunięciu wierzchołka v dostajemy graf mający $n - 1$ wierzchołków, a więc graf 5-kolorowalny. Naszym zadaniem jest pokolorowanie wierzchołka v jednym z tych pięciu kolorów, tak by otrzymać 5-kolorowanie grafu G .

Jeśli $\deg(v) < 5$, to wierzchołek v może być pokolorowany którymś kolorem spośród kolorów nie występujących wśród (co najwyżej czterech) wierzchołków sąsiadujących z v , co w tym przypadku zakończy dowód. Przypuśćmy zatem, że $\deg(v) = 5$ i że wierzchołki v_1, \dots, v_5 sąsiadujące z v są położone wokół v w kolejności zgodnej z ruchem wskazówek zegara, tak jak na rysunku 17.4. Jeśli wszystkie wierzchołki v_1, \dots, v_5 sąsiadują ze sobą, to graf G zawiera graf nieplanarny K_5 jako podgraf, co jest niemożliwe. Zatem co najmniej dwa wierzchołki v_i (na przykład, niech to będą v_1 i v_3) nie są sąsiednie.



Rysunek 17.4

Ściągamy teraz krawędzie vv_1 i vv_3 . Otrzymamy graf planarny mający mniej niż n wierzchołków, a więc graf 5-kolorowalny. Przywracamy teraz ściagnięte krawędzie, nadając obu wierzchołkom v_1 i v_3 kolor przypisany poprzednio wierzchołkowi v . Szukane 5-kolorowanie grafu G otrzymujemy wtedy, kolorując wierzchołek v kolorem nie występującym wśród (co najwyżej czterech) kolorów przypisanych wierzchołkom v_i . ■

Naturalnym pytaniem jest, czy to twierdzenie można dalej wzmacnić. To pytanie było jednym z najsłynniejszych nieroziwiązanych problemów w matematyce — zwanym „zagadnieniem czterech barw”. Ten problem został po raz pierw-

szy postawiony w innym, równoważnym sformułowaniu (por. paragraf 19) w roku 1852 i został ostatecznie rozstrzygnięty przez K. Appela i W. Hakena w 1976 roku.

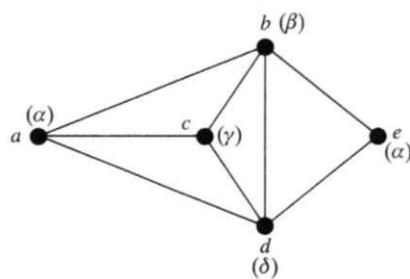
TWIERDZENIE 17.5 (Appel i Haken, 1976). *Każdy planarny graf prosty jest 4-kolorowalny.*

Przeprowadzenie dowodu tego twierdzenia zajęło autorom kilka lat i znaczną ilość czasu komputerowego. Dowód ostatecznie polegał na skomplikowanym rozwinieciu pomysłów zawartych w dowodzie twierdzenia o pięciu barwach. Więcej informacji o tym dowodzie można znaleźć w książkach Saaty'ego i Kainena [36] oraz Beinekego i Wilsona [27].

Zakończymy ten paragraf prostym zastosowaniem kolorowania wierzchołków. Przypuśćmy, że chemik chce przechować pięć substancji chemicznych a, b, c, d i e w różnych częściach magazynu. Niektóre z tych substancji reagują gwałtownie w przypadku zetknięcia, a więc powinny być przechowywane w odległych miejscach. W poniżej tabeli gwiazdka wskazuje te pary substancji, które muszą być rozdzielone. W ilu oddzielnych częściach magazynu możemy przechować te substancje?

	a	b	c	d	e
a	—	*	*	*	—
b	*	—	*	*	*
c	*	*	*	—	*
d	*	*	*	—	*
e	—	*	—	*	—

Aby odpowiedzieć na to pytanie, narysujemy graf, którego wierzchołki odpowiadają tym pięciu substancjom, przy czym dwa wierzchołki są sąsiednie wtedy, gdy odpowiadające im substancje muszą być przechowywane w oddaleniu (por. rys. 17.5). Jeśli pokolorujemy teraz wierzchołki w taki sposób, jak pokazuję to na rysunku greckie litery, to kolory będą odpowiadały poszukiwanym częścio-

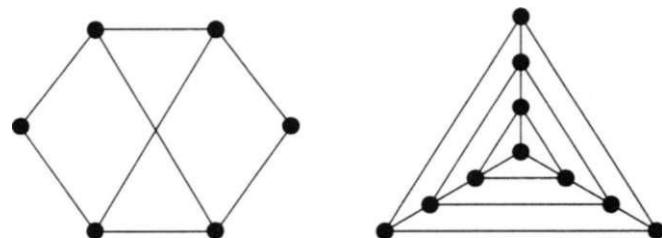


Rysunek 17.5

magazynu. W tym przypadku liczba chromatyczna jest równa 4, a więc potrzebujemy czterech części. Na przykład, substancje a i e mogą być przechowywane w części α , a substancje b , c i d odpowiednio w częściach β , γ i δ .

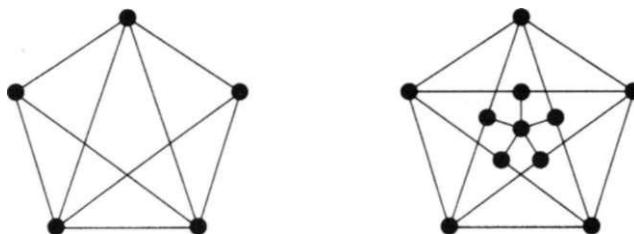
Ćwiczenia do §17

17.1^r Wyznacz liczby chromatyczne grafów pokazanych na rysunku 17.6.



Rysunek 17.6

17.2 Wyznacz liczby chromatyczne grafów pokazanych na rysunku 17.7.



Rysunek 17.7

17.3^r Znajdź wszystkie grafy 2-chromatyczne, 3-chromatyczne i 4-chromatyczne w tablicy na rysunku 2.9.

17.4 Jaka jest liczba chromatyczna

- (a) każdego z grafów platońskich?
- (b) grafu pełnego trójdzielnego $K_{r,s,t}$?
- (c) k -kostki Q_k ?

17.5^r Porównaj ograniczenia górne liczby chromatycznej podane w twierdzeniu Brooksa z rzeczywistą wartością tej liczby dla

- (a) grafu Petersena,
- (b) k -kostki Q_k .

- 17.6 Należy ułożyć plan zajęć. Ponieważ niektórzy studenci chcą uczęszczać na kilka wykładów, terminy pewnych wykładów nie mogą się pokrywać. Gwiazdki w poniższej tabeli wskazują, które pary wykładów nie mogą nakładać się na siebie. Ile terminów należy zarezerwować w planie zajęć dla tych siedmiu wykładów?

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>	<i>g</i>
<i>a</i>	—	*	*	*	—	—	*
<i>b</i>	*	—	*	*	*	—	*
<i>c</i>	*	*	—	*	—	*	—
<i>d</i>	*	*	*	—	—	*	—
<i>e</i>	—	*	—	—	—	—	—
<i>f</i>	—	—	*	*	—	—	*
<i>g</i>	*	*	—	—	—	*	—

- 17.7 Niech G będzie grafem prostym mającym n wierzchołków i będącym grafem regularnym stopnia d . Rozważając liczbę wierzchołków, którym można przypisać ten sam kolor, udowodnij, że $\chi(G) \geq n/(n-d)$.
- 17.8 Niech G będzie planarnym grafem prostym nie zawierającym trójkątów.
- Korzystając ze wzoru Eulera udowodnij, że graf G zawiera wierzchołek stopnia co najwyżej 3.
 - Udowodnij przez indukcję, że graf G jest 4-kolorowalny.
(Co więcej, można dowieść, że graf G jest 3-kolorowalny.)
- 17.9* Uogólnij rezultaty ostatniego ćwiczenia na przypadek, w którym
- graf G ma obwód r ,
 - graf G ma grubość t .
- 17.10* Spróbuj dowieść twierdzenia o czterech barwach, naśladowując dowód twierdzenia o pięciu barwach. W którym miejscu rozumowanie załamuje się?
- 17.11* Graf G nazywamy grafem *k-krytycznym*, jeśli $\chi(G) = k$ i jeśli po usunięciu dowolnego wierzchołka otrzymujemy graf mający mniejszą liczbę chromatyczną.
- Wyznacz wszystkie grafy 2-krytyczne i 3-krytyczne.
 - Podaj przykład grafu 4-krytycznego.
 - Udowodnij, że jeśli graf G jest *k*-krytyczny, to
 - każdy wierzchołek grafu G ma stopień równy co najmniej $k-1$,
 - graf G nie ma wierzchołków rozcinających.
- 17.12* Niech G będzie grafem przeliczalnym, którego każdy podgraf skończony jest *k*-kolorowalny.

- (a) Użyj lematu Königa do wykazania, że graf G jest k -kolorowalny.
- (b) Wyprowadź stąd wniosek, że każdy przeliczalny graf planarny jest 4-kolorowalny.

§18 Twierdzenie Brooksa

Aby nie naruszać ciągłości wykładu, pominiemy w ostatnim paragrafie dowód twierdzenia Brooksa (twierdzenie 17.2). Teraz podamy ten dowód.

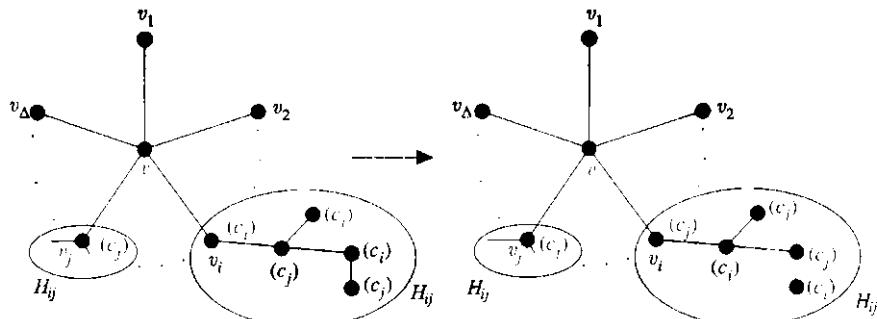
TWIERDZENIE 17.2. *Jeśli G jest spójnym grafem prostym, nie będącym grafem pełnym, i jeśli największy stopień wierzchołka grafu G wynosi Δ (gdzie $\Delta \geq 3$), to graf G jest Δ -kolorowalny.*

Dowód. Prowadzimy dowód przez indukcję ze względu na liczbę wierzchołków grafu G . Przypuśćmy, że graf G ma n wierzchołków. Jeśli któryś wierzchołek grafu G ma stopień mniejszy niż Δ , to możemy dokończyć dowód, naśladowując dowód twierdzenia 17.1. Możemy zatem założyć, że graf G jest grafem regularnym stopnia Δ .

Jeśli usuniemy pewien wierzchołek v wraz z krawędziami z nim incydentnymi, to powstały w ten sposób graf ma $n - 1$ wierzchołków i największy stopień wierzchołka nadal nie przekracza Δ . Z założenia indukcyjnego wynika, że ten graf jest Δ -kolorowalny. Naszym celem jest pokolorowanie wierzchołka v jednym z tych Δ kolorów. Możemy założyć, że wierzchołki v_1, \dots, v_Δ , sąsiadujące z wierzchołkiem v , są ułożone wokół wierzchołka v w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara oraz że są pokolorowane różnymi kolorami c_1, \dots, c_Δ , gdyż w przeciwnym razie pozostały jeden wolny kolor, który mógłby zostać użyty do pokolorowania v .

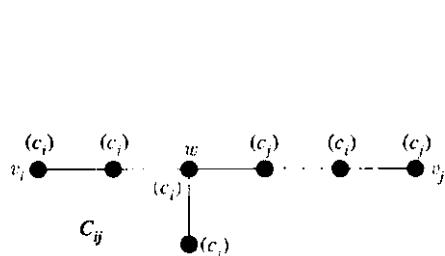
Definiujemy teraz graf H_{ij} (gdzie $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq \Delta$) jako podgraf grafu G , którego wierzchołkami są wierzchołki grafu G pokolorowane kolorem c_i lub c_j i którego krawędziami są krawędzie grafu G łączące wierzchołek koloru c_i z wierzchołkiem koloru c_j . Jeśli wierzchołki v_i i v_j leżą w różnych składowych grafu H_{ij} , to możemy zamienić kolory wszystkich wierzchołków składowej H_{ij} zawierającej wierzchołek v_i (por. rys. 18.1). Po tej zamianie kolorów oba wierzchołki v_i i v_j będą tego samego koloru c_j , co pozwoli pokolorować wierzchołek v kolorem c_i . Możemy więc założyć, że dla danych i oraz j wierzchołki v_i i v_j są połączone drogą zasadniczą całkowicie w H_{ij} . Tę składową grafu H_{ij} , która zawiera wierzchołki v_i i v_j oznaczamy przez C_{ij} .

Jeśli wierzchołek v_i sąsiaduje z więcej niż jednym wierzchołkiem koloru c_j , to istnieje kolor (różny od c_i), który nie był użyty do kolorowania sąsiadów wierzchołka v_i . W tym przypadku wierzchołek v_i można pokolorować tym kolorem, zwalniając kolor c_i dla wierzchołka v . Jeśli ten przypadek nie ma miejsca, to w podobny sposób możemy pokazać, że każdy wierzchołek składowej C_{ij} (różny

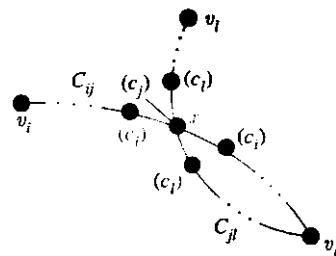


Rysunek 18.1

od v_i i v_j musi mieć stopień 2. Mianowicie, jeśli w jest pierwszym wierzchołkiem na drodze z v_x do v_j stopnia większego niż 2, to można pomalować wierzchołek w kolorem innym niż c , i C_j , powodując, że wierzchołki v_i i v_j nie będą już połączone drogą leżącą całkowicie w C_u (por. rys. 18.2). Możemy więc założyć, że dla dowolnych i oraz j składowa C_u składa się tylko z drogi prowadzącej od wierzchołka v_i do wierzchołka v_j .



Rysunek 18.2



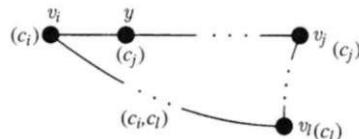
Rysunek 18.3

Możemy również założyć, że dwie drogi postaci dj i C_{ji} (gdzie $i \neq j$) mają tylko jeden wierzchołek wspólny, mianowicie v_j . Gdyby bowiem x był innym wierzchołkiem wspólnym, to moglibyśmy go przemalować na kolor różny od c , C_j i C_i (por. rys. 18.3), co spowodowałoby, że wierzchołki v_i i v_j nie byłyby już połączone drogą.

Aby zakończyć dowód, wybierzmy dwa wierzchołki niesąsiednie $v_i \setminus v_j$ i niech y będzie wierzchołkiem koloru C_j sąsiadującym z wierzchołkiem v_i . Niech $Z \cap j$ i rozważmy wierzchołek v_i . Droga C_u łącząca wierzchołki v_i i v_i ma tę własność, że wszystkie wierzchołki na tej drodze są pokolorowane kolorami C_i i c ; oraz wszystkie (oprócz v_i i v_j) mają w składowej C_u stopień 2. Zatem zamiana kolorów c , i $c \setminus$

¹Takie istnieją, gdy graf G nie jest grafem pełnym. Ostatni fragment dowodu w oryginale napisany lakonicznie został tutaj rozwinięty przez tłumacza (przyp. tłum.).

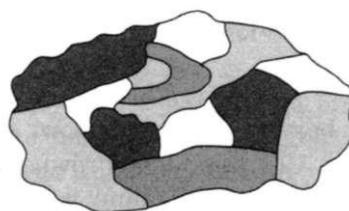
w tej składowej nie zaburza kolorowania pozostałej części grafu. Po tym przekolorowaniu, rozumując tak jak poprzednio, możemy założyć, że wierzchołki v_j i v_l są połączone drogą (która oznaczamy przez C'_{jl}) taką, że wszystkie wierzchołki leżące na tej drodze są koloru c_i lub c_l . Podobnie możemy założyć, że wtedy również wierzchołki v_i i v_l są połączone drogą (która oznaczamy przez C'_{ij}) taką, że wszystkie wierzchołki na tej drodze są koloru c_j lub c_l . Możemy również założyć, że drogi C'_{jl} i C'_{ij} nie mają wspólnych wierzchołków oprócz wierzchołka v_j . Droga C'_{jl} , rozważana od wierzchołka v_j przebiega aż do wierzchołka y wzdłuż drogi C_{ij} (por. rys. 18.4). Wierzchołek y jest przy tym sąsiadem koloru c_j wierzchołka v_i , który ma teraz kolor c_l , leży więc na drodze C'_{ij} . Drogi C'_{jl} i C'_{ij} mają więc wspólny wierzchołek y , co daje sprzeczność. Ta sprzeczność kończy dowód. ■



Rysunek 18.4

§19 Kolorowanie map

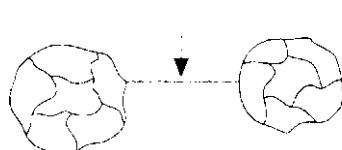
Historycznie zagadnienie czterech barw pojawiło się w związku z kolorowaniem map. Założymy, że dana jest mapa przedstawiająca wiele państw. Możemy zapytać, iloma kolorami można pokolorować te państwa, tak by żadne dwa państwa mające wspólną granicę nie były pokolorowane tym samym kolorem. Prawdopodobnie najbardziej znane sformułowanie twierdzenia o czterech barwach mówi, że każdą mapę można pokolorować czterema kolorami. Na przykład na rysunku 19.1 widzimy mapę pokolorowaną czterema kolorami.



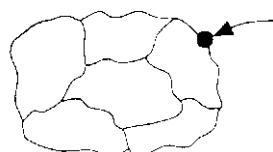
Rysunek 19.1

Aby uściślić to sformułowanie, musimy wyjaśnić, co nazywamy „mapą”. Ponieważ kolory po obu stronach krawędzi muszą być różne, więc musimy wykluczyć

z rozważań mapy zawierające mosty (por. rys. 19.2). Założymy również, że nie ma wierzchołków stopnia 2, gdyż w łatwy sposób można je wyeliminować (por. rys. 19.3). Aby wykluczyć takie i podobne im przypadki, definiujemy mapę jako graf planarny 3-spójny: zatem mapa nie zawiera rozcięć mających 1 lub 2 krawędzie, a więc w szczególności nie ma wierzchołków stopnia 1 lub 2. Jak zobaczymy, wykluczenie z rozważań mostów odpowiada wykluczeniu pętli w paragrafie 17.

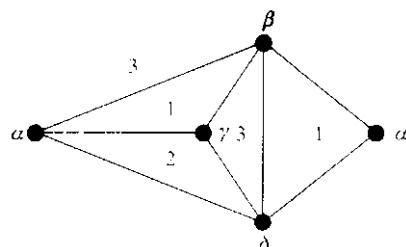


Rysunek 19.2



Rysunek 19.3

Teraz powiemy, że mapa jest k -kolorowalna(f), jeśli jej ściany można pokolorować k kolorami w taki sposób, by żadne dwie ściany ograniczone wspólną krawędzią nie były pokolorowane tym samym kolorem. Aby uniknąć dwuznacznosci, powiemy, że mapa jest k -kolorowalna(v), jeśli jest k -kolorowalna w zwykłym sensie (tzn. zgodnie z określeniem z paragrafu 17). Na przykład mapa pokazana na rysunku 19.4 jest 3-kolorowalna(f) i 4-kolorowalna(v).



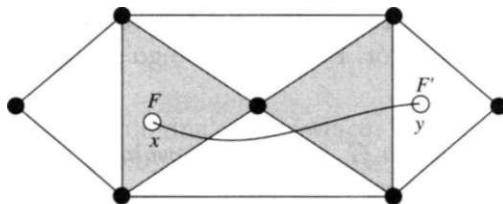
Rysunek 19.4

Twierdzenie o czterech barwach dla map mówi zatem, że każda mapa jest 4-kolorowalna(f). We wniosku 19.3 dowodzimy równoważności obu postaci twierdzenia o czterech barwach. Tymczasem zbadamy warunki, w których mapę można pokolorować dwoma kolorami. Te warunki można sformułować w szczególnie prosty sposób.

TWIERDZENIE 19.1. *Mapa G jest 2-kolorowalna(f) wtedy i tylko wtedy, gdy graf G jest grafem eulerowskim.*

Pierwszy dowód. \Rightarrow Dla każdego wierzchołka v grafu G liczba ścian otaczających ten wierzchołek musi być parzysta, gdyż mogą one być pokolorowane dwoma kolorami. Wynika stąd, że każdy wierzchołek ma stopień parzysty, a zatem z twierdzenia 6.2 wynika, że graf G jest grafem eulerowskim.

\Leftarrow Jeśli graf G jest grafem eulerowskim, to jego ściany kolorujemy dwoma kolorami w następujący sposób. Wybieramy dowolną ścianę F i kolorujemy ją na czerwono. Rysujemy krzywe z pewnego punktu x na ścianie F do pewnych punktów na wszystkich pozostałych ścianach, nie przechodzące przez żaden wierzchołek grafu G . Jeśli taka krzywa przecina parzystą liczbę krawędzi, to ścianę, do której dochodzi, kolorujemy na czerwono; w przeciwnym razie na niebiesko (por. rys. 19.5). Ten sposób kolorowania jest dobrze określony, o czym można się przekonać wybierając „cykl” złożony z dwóch takich krzywych i dowodząc, że przecina on parzystą liczbę krawędzi grafu G — korzystając z tego, że każdy wierzchołek jest incydentny z parzystą liczbą krawędzi. ■



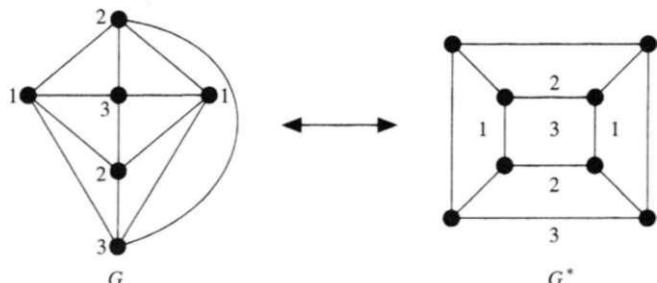
Rysunek 19.5

Prostszy dowód twierdzenia 19.1 wykorzystuje sformułowanie problemu za pomocą kolorowania wierzchołków grafu dualnego. Najpierw uzasadnimy tę metodę, a następnie zilustrujemy ją, podając nowy dowód twierdzenia 19.1 i dowodząc równoważności obu postaci twierdzenia o czterech barwach.

TWIERDZENIE 19.2. *Niech G będzie grafem planarnym bez pętli i niech G^* będzie grafem geometrycznie dualnym do grafu G . Wówczas graf G jest k -kolorowalny(v) wtedy i tylko wtedy, gdy graf G^* jest k -kolorowalny(f).*

Dowód. \Rightarrow Możemy założyć, że G jest grafem prostym i spójnym, a więc G^* jest mapą. Jeśli mamy dane k -kolorowanie(v) grafu G , to możemy k -kolorować ściany G^* tak, by każda ściana miała ten sam kolor co jedynego wierzchołek, który zawiera w swym wnętrzu (por. rys. 19.6). Żadne dwie sąsiednie ściany grafu G^* nie mają tego samego koloru, gdyż wierzchołki grafu G , które one zawierają, są sąsiednie w grafie G , a więc są inaczej pokolorowane. Zatem graf G^* jest k -kolorowalny(f).

\Leftarrow Przypuśćmy, że mamy teraz dane pewne k -kolorowanie(f) grafu G^* . Możemy wtedy k -kolorować wierzchołki grafu G w taki sposób, by każdy wierzchołek



Rysunek 19.6

miał ten sam kolor co ściana zawierająca go. Żadne dwa sąsiednie wierzchołki grafu G nie mają tego samego koloru z tych samych powodów co wyżej. Zatem graf G jest k -kolorowalny(v). ■

Wynika stąd, że dla dowolnego twierdzenia dotyczącego kolorowania wierzchołków grafu planarnego możemy utworzyć twierdzenie dualne mówiące o kolorowaniu ścian mapy i na odwrót. Przykładem tego postępowania może być twierdzenie 19.1.

TWIERDZENIE 19.1. *Mapa G jest 2-kolorowalna(f) wtedy i tylko wtedy, gdy graf G jest grafem eulerowskim.*

Drugi dowód. Z ćwiczenia 15.9 wynika, że graf dualny do planarnego grafu eulerowskiego jest dwudzielnym grafem planarnym i na odwrót. Wystarczy zatem zauważyć, że spójny graf planarny bez pętli jest 2-kolorowalny(v) wtedy i tylko wtedy, gdy jest dwudzielny. ■

W podobny sposób możemy dowieść równoważności obu postaci twierdzenia o czterech barwach.

WNIOSEK 19.3. *Twierdzenie o czterech barwach dla map jest równoważne z twierdzeniem o czterech barwach dla grafów planarnych.*

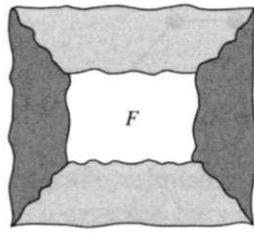
Dowód. \Rightarrow Możemy założyć, że graf G jest spójnym, planarnym grafem prostym. Wtedy graf G^* , geometrycznie dualny do grafu G , jest mapą i 4-kolorowalność(v) grafu G wynika natychmiast z twierdzenia 19.2 i z tego, że ta mapa jest 4-kolorowalna(f).

\Leftarrow Na odwrót, niech G będzie mapą i G^* grafem geometrycznie dualnym do G . Wtedy graf G^* jest planarnym grafem prostym, a więc jest 4-kolorowalny(v). Stąd wynika natychmiast, że graf G jest 4-kolorowalny(f). ■

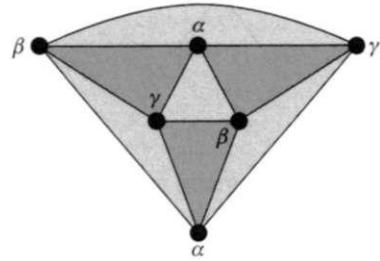
Zasada dualności może być wykorzystana w dowodzie następującego twierdzenia.

TWIERDZENIE 19.4. *Niech G będzie mapą kubiczną. Wówczas mapa G jest 3-kolorowalna(f) wtedy i tylko wtedy, gdy każda jej ściana jest ograniczona parzystą liczbą krawędzi.*

Dowód. \Rightarrow Dla danej ściany F mapy G , oba kolory ścian G otaczających F muszą występować na przemian. Zatem liczba tych ścian musi być parzysta, a więc każda ściana jest ograniczona parzystą liczbą krawędzi (por. rys. 19.7).



Rysunek 19.7



Rysunek 19.8

\Leftarrow Udowodnimy twierdzenie dualne, mówiące, że jeśli graf G jest planarnym spójnym grafem prostym, w którym każda ściana jest trójkątem i każdy wierzchołek ma stopień parzysty (tzn. że graf G jest eulerowski), to G jest 3-kolorowalny(v). Te trzy kolory oznaczmy greckimi literami α , β i γ .

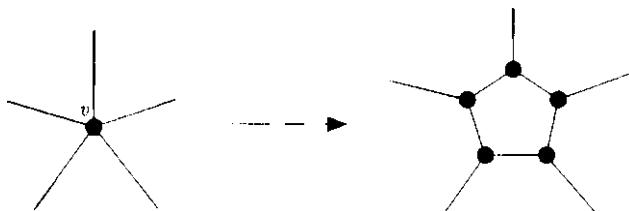
Ponieważ graf G jest eulerowski, więc z twierdzenia 19.1 wynika, że jego ściany można pokolorować dwoma kolorami, czerwonym i niebieskim. Poszukiwane 3-kolorowanie wierzchołków grafu G możemy wtedy otrzymać, kolorując wierzchołki każdej ściany czerwonej w taki sposób, by kolory α , β i γ występowały w kolejności zgodnej z ruchem wskazówek zegara, a wierzchołki każdej ściany niebieskiej w taki sposób, by te kolory występowały w kolejności przeciwej do ruchu wskazówek zegara (por. rys. 19.8). To kolorowanie wierzchołków można rozszerzyć na cały graf, co kończy dowód twierdzenia. ■

W powyższym twierdzeniu zakładaliśmy, że mapa jest kubiczna. Nie jest to istotnym ograniczeniem, o czym przekonuje nas następne twierdzenie.

TWIERDZENIE 19.5. *Aby dowieść twierdzenia o czterech barwach, wystarczy dowieść, że każda mapa kubiczna jest 4-kolorowalna(f).*

Dowód. Wniosek 19.3 pokazuje, że wystarczy dowieść, iż z 4-kolorowalności(f) dowolnej mapy kubicznej wynika 4-kolorowalność(f) dowolnej mapy. Niech G będzie dowolną mapą. Jeśli G ma wierzchołki stopnia 2, to możemy je usunąć, nie zaburzając przy tym kolorowania. Wystarczy zatem pozbyć się wyłącznie wierzchołków mających stopień 4 lub wyższy. Ale jeśli v jest takim wierzchołkiem, to możemy nakleić na niego „łatkę”, tak jak na rysunku 19.9. Powtarzając to dla

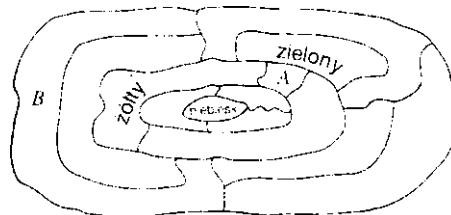
wszystkich takich wierzchołków, otrzymamy mapę kubiczną, która z założenia jest 4-kolorowalna(f). Ządane 4-kolorowanie ścian G otrzymamy ściągając każdą Łatkę do wierzchołka i przywracając wierzchołki stopnia 2.



Rysunek 19.9

Ćwiczenia do §19

- 19.1 Weźmy pod uwagę mapę pokazaną na rysunku 19.10, na której państwa mają być pokolorowane kolorami czerwonym, niebieskim, zielonym i żółtym.
 (a) Wykaż, że państwo A musi być pokolorowane na czerwono.
 (2) Jakim kolorem należy pokolorować państwo B?



Rysunek 19.10

- 19.2^r Wyznacz minimalną liczbę kolorów potrzebnych do pokolorowania ścian każdego z grafów platońskich, tak aby sąsiednie ściany miały różne kolory.
- 19.3^r Podaj przykład grafu planarnego, który jest jednocześnie 2-kolorowalny(f) i 2-kolorowalny(v).
- 19.4 Płaszczyznę podzielono na skończoną liczbę obszarów, rysując w dowolny sposób nieskończone linie proste. Wykaż, że te obszary mogą być 2-kolorowane.
- 19.5^r Udowodnij twierdzenie o sześciu barwach dla map, dualizując dowód twierdzenia 17.3.
- 19.6* Udowodnij twierdzenie o pięciu barwach dla map, dualizując dowód twierdzenia 17.4.

19.7* Niech G będzie płaskim grafem prostym mającym mniej niż 12 ścian i przypuśćmy, że każdy wierzchołek grafu G ma stopień co najmniej 3.

- (a) Skorzystaj z ćwiczenia 13.5, by dowieść, że graf G jest 4-kolorowalny(v).
- (b) Udowodnij twierdzenie dualne do udowodnionego w punkcie (a).

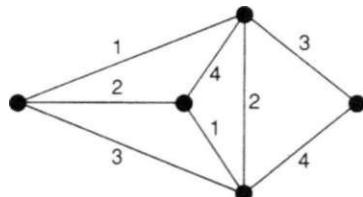
19.8* (a) Udowodnij, że jeśli graf toroidalny jest narysowany na powierzchni torusa, to jego ściany można pokolorować siedmioma kolorami.

- (b) Znajdź przykład grafu toroidalnego, którego ściany nie można pokolorować sześcioma kolorami.

§20 Kolorowanie krawędzi

W tym paragrafie zajmiemy się kolorowaniem krawędzi grafu. Jak się przekonamy, twierdzenie o czterech barwach dla grafów planarnych jest równoważne pewnemu twierdzeniu dotyczącemu kolorowania krawędzi map kubicznych.

Mówimy, że graf G jest **k -kolorowalny(e)** (lub k -kolorowalny krawędziowo), jeśli jego krawędzie można pokolorować k kolorami w taki sposób, by żadne dwie sąsiednie krawędzie nie miały tego samego koloru. Jeśli graf G jest k -kolorowalny(e), ale nie jest $(k-1)$ -kolorowalny(e), to mówimy, że jego **indeks chromatyczny** wynosi k i piszemy $\chi'(G) = k$. Na przykład na rysunku 20.1 widzimy graf G , dla którego $\chi'(G) = 4$.



Rysunek 20.1

Zauważmy, że jeśli Δ jest największym stopniem wierzchołka G , to $\chi'(G) \geq \Delta$. Następujące twierdzenie, zwane **twierdzeniem Vizinga**, podaje bardzo dobre oszacowanie indeksu chromatycznego grafu prostego G . Dowód tego twierdzenia można znaleźć w książkach Bondy'ego i Murty'ego [7] lub Fioriniego i Wilsona [28].

TWIERDZENIE 20.1 (Vizing, 1964). *Jeśli G jest grafem prostym, w którym największy stopień wierzchołka wynosi Δ , to $\Delta \leq \chi'(G) \leq \Delta + 1$.*

Nie wiadomo, które grafy mają indeks chromatyczny Δ i które mają indeks chromatyczny równy $\Delta + 1$. Jednakże dla poszczególnych typów grafów można

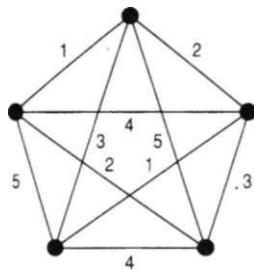
łatwo udowodnić odpowiednie twierdzenia. Na przykład, $\chi'(C_n) = 2$ lub $\chi'(C_n) = 3$ w zależności od tego, czy liczba n jest parzysta, czy nieparzysta oraz $\chi'(W_n) = n - 1$ dla $n \geq 4$.

Udowodnimy teraz podobne twierdzenie dla grafów pełnych.

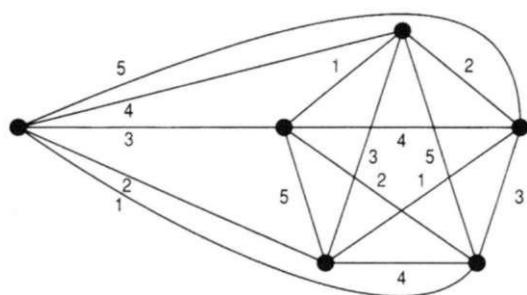
TWIERDZENIE 20.2. $\chi'(K_n) = n$ dla n nieparzystych ($n \neq 1$) i $\chi'(K_n) = n - 1$ dla n parzystych.

Dowód. Twierdzenie jest trywialne dla $n = 2$. Założymy zatem, że $n \geq 3$.

Jeśli liczba n jest nieparzysta, to możemy n -kolorować krawędzie grafu K_n , tak umieszczając wierzchołki K_n , by tworzyły n -kąt foremny, kolorując krawędzie na obwodzie tego wielokąta różnymi kolorami, a następnie kolorując każdą z pozostałych krawędzi tym kolorem, na jaki pokolorowany jest bok wielokąta równoległy do tej krawędzi (por. rys. 20.2). To, że graf K_n nie jest $(n-1)$ -kolorowalny(e), wynika stąd, że największa możliwa liczba krawędzi tego samego koloru wynosi $(n-1)/2$, a więc graf K_n ma co najwyżej $(n-1) \cdot \chi'(K_n)/2$ krawędzi.



Rysunek 20.2



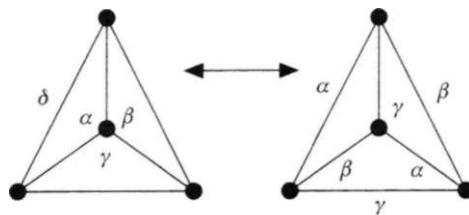
Rysunek 20.3

Jeśli liczba n jest parzysta, to najpierw tworzymy graf K_n , łącząc wierzchołki grafu pełnego K_{n-1} z jednym nowym wierzchołkiem. Jeśli pokolorujemy teraz krawędzie grafu K_{n-1} w taki sposób jak wyżej, to wśród kolorów krawędzi wychodzących z jednego wierzchołka będzie brakować jednego koloru i dla różnych wierzchołków te brakujące kolory są różne. Kolorowanie krawędzi grafu K_n otrzymujemy, kolorując pozostałe krawędzie tymi brakującymi kolorami (por. rys. 20.3). ■

Wykażemy teraz związek między twierdzeniem o czterech barwach i kolorowaniem krawędzi grafu. Ten związek powoduje w znacznym stopniu zainteresowanie kolorowaniem krawędzi.

TWIERDZENIE 20.3. *Twierdzenie o czterech barwach jest równoważne stwierdzeniu, że $\chi'(G) = 3$ dla każdej mapy kubicznej G .*

Dowód. \Rightarrow Założymy, że mamy dane 4-kolorowanie ścian grafu G , przy czym kolory są oznaczone symbolami $\alpha = (1, 0)$, $\beta = (0, 1)$, $\gamma = (1, 1)$ i $\delta = (0, 0)$. Możemy wtedy skonstruować 3-kolorowanie krawędzi grafu G , kolorując każdą krawędź e kolorem otrzymanym przez dodanie (modulo 2) kolorów ścian rozdzielonych krawędzią e . Na przykład, jeśli krawędź e rozdziela dwie ściany pokolorowane kolorami α i γ , to będzie pokolorowana kolorem β , gdyż $(1, 0) + (1, 1) = (0, 1)$. Zauważmy, że kolor δ nie może wystąpić w tym kolorowaniu krawędzi, gdyż kolory dwóch ścian rozdzielonych dowolną krawędzią muszą być różne. Co więcej, żadne dwie sąsiednie krawędzie nie będą pokolorowane tak samo. W ten sposób otrzymaliśmy żądane kolorowanie (por. rys. 20.4).



Rysunek 20.4

\Leftarrow Przypuśćmy teraz, że mamy dane 3-kolorowanie krawędzi grafu G . Wtedy w każdym wierzchołku schodzą się krawędzie wszystkich kolorów. Podgraf wyznaczony przez krawędzie pokolorowane kolorami α i β jest grafem regularnym stopnia 2, a więc z oczywistego uogólnienia twierdzenia 19.1 na grafy niespójne wynika, że możemy pokolorować ściany tego podgrafa dwoma kolorami, 0 i 1. W podobny sposób możemy pokolorować kolorami 0 i 1 ściany podgrafa wyznaczonego przez krawędzie o kolorach α i γ . Zatem każdej ścianie grafu G możemy przyporządkować dwie współrzędne (x, y) , gdzie każda z liczb x i y jest równa 0 lub 1. Ponieważ współrzędne przyporządkowane dwóm sąsiednim ścianom grafu G muszą różnić się na co najmniej jednym miejscu, więc te współrzędne $(1, 0), (0, 1), (1, 1), (0, 0)$ tworzą poszukiwane 4-kolorowanie ścian grafu G . ■

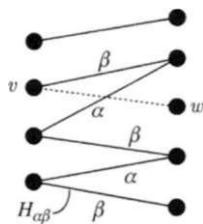
Zakończymy ten paragraf twierdzeniem Dénesa Königa o indeksie chromatycznym grafu dwudzielnego.

TWIERDZENIE 20.4. (König, 1916). *Jeśli w grafie dwudzielnym największy stopień wierzchołka wynosi Δ , to $\chi'(G) = \Delta$.*

Uwaga. Metoda dowodu jest podobna do metody użytej w paragrafie 18 — rozważamy dwukolorowy podgraf H_{ij} i zamieniamy kolory.

Dowód. Stosujemy metodę indukcji ze względu na liczbę krawędzi grafu G i dowodzimy, że jeśli wszystkie, z wyjątkiem jednej, krawędzie zostały pokolorowane za pomocą co najwyżej Δ kolorów, to istnieje Δ -kolorowanie wszystkich krawędzi grafu G .

Założymy więc, że każda krawędź grafu G została pokolorowana, z wyjątkiem krawędzi vw . Wtedy wśród kolorów krawędzi wychodzących z wierzchołka v brakuje co najmniej jednego koloru, a także brakuje co najmniej jednego koloru wśród kolorów krawędzi wychodzących z w . Jeśli pewnego koloru brakuje zarówno w wierzchołku v , jak i w wierzchołku w , to tym kolorem kolorujemy krawędź vw . W przeciwnym razie niech α będzie kolorem brakującym w v , β kolorem brakującym w w i niech $H_{\alpha\beta}$ będzie spójnym podgrafem grafu G składającym się z tych wierzchołków, do których można dojść z v drogą przechodzącą wyłącznie przez krawędzie kolorów α i β (por. rys. 20.5).



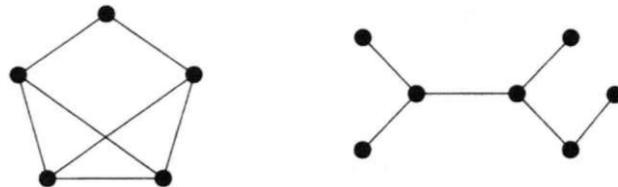
Rysunek 20.5

Ponieważ graf G jest grafem dwudzielonym, więc podgraf $H_{\alpha\beta}$ nie może zawierać wierzchołka w , a zatem możemy zmienić kolory α i β w tym podgrafie, nie naruszając przy tym kolorów w wierzchołku w i pozostałej części grafu. Teraz możemy pokolorować krawędź vw kolorem β , kończąc tym samym kolorowanie krawędzi grafu G . ■

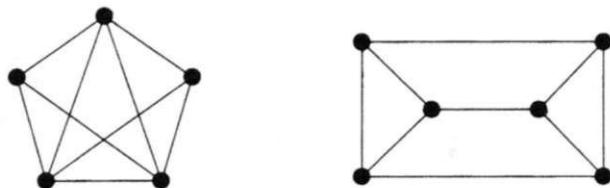
Wniosek 20.5. $\chi'(K_{r,s}) = \max(r, s)$.

Ćwiczenia do §20

- 20.1^r Wyznacz indeksy chromatyczne grafów pokazanych na rysunku 20.6.
- 20.2 Wyznacz indeksy chromatyczne grafów pokazanych na rysunku 20.7.
- 20.3^r Znajdź w tabeli na rysunku 2.9 wszystkie grafy o indeksie chromatycznym 2, 3 lub 4.
- 20.4^r Porównaj ograniczenia dolne i górne indeksu chromatycznego podane w twierdzeniu Vizinga z rzeczywistą wartością dla



Rysunek 20.6



Rysunek 20.7

- (a) grafu cyklicznego C_7 ,
- (b) grafu pełnego K_8 ,
- (c) pełnego grafu dwudzielnego $K_{4,6}$.

20.5 Jaki jest indeks chromatyczny każdego z grafów platońskich?

20.6^r Podaj inny dowód wniosku 20.5, wskazując konkretne kolorowanie krawędzi grafu $K_{r,s}$.

20.7^r Udowodnij, że jeśli G jest kubicznym grafem hamiltonowskim, to $\chi'(G) = 3$.

20.8 (a) Rozważając możliwe 3-kolorowania zewnętrzne cyklu długości 5, udowodnij, że graf Petersena ma indeks chromatyczny równy 4.
 (b) Korzystając z punktu (a) i ćwiczenia 20.7, wykaż, że graf Petersena nie jest grafem hamiltonowskim.

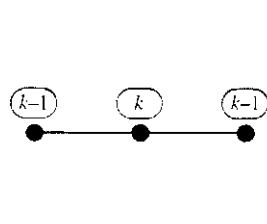
20.9* Niech G będzie grafem prostym mającym nieparzystą liczbę wierzchołków. Udowodnij, że jeśli graf G jest grafem regularnym stopnia Δ , to $\chi'(G) = \Delta + 1$.

20.10* (a) Niech G będzie grafem prostym, nie będącym grafem pustym. Udowodnij, że $\chi'(G) = \chi(L(G))$, gdzie $L(G)$ jest grafem krawędziowym grafu G .
 (b) Korzystając z punktu (a) i twierdzenia Brooksa, udowodnij twierdzenie Vizinga w przypadku $\Delta = 3$.

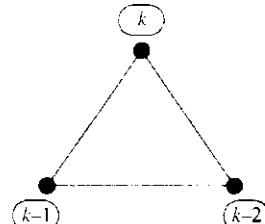
§21 Wielomiany chromatyczne

Ten rozdział zakończymy powrotem do kolorowania wierzchołków. W tym paragrafie z każdym grafem zwiążemy pewną funkcję, która mówi nam, między innymi, czy dany graf jest 4-kolorowalny. Badając tę funkcję, możemy spodziewać się, że uzyskamy pozytyczne informacje dotyczące twierdzenia o czterech barwach. Bez straty ogólności możemy ograniczyć naszą uwagę do grafów prostych.

Niech G będzie grafem prostym i niech $P_G(k)$ będzie liczbą sposobów takiego pokolorowania wierzchołków grafu G k kolorami, aby żadne dwa sąsiednie wierzchołki nie miały tego samego koloru. Funkcję P_G nazywiemy (tymczasowo) **funkcją chromatyczną** grafu G . Na przykład, jeśli G jest drzewem pokazanym na rysunku 21.1, to $P_G(k) = k(k-1)^2$, gdyż środkowy wierzchołek można pokolorować na k sposobów, a każdy wierzchołek końcowy można pokolorować na dowolny z $k-1$ sposobów. To rozumowanie można uogólnić tak, by pokazać, że jeśli G jest dowolnym drzewem mającym n wierzchołków, to $P_G(k) = k(k-1)^{n-1}$. Podobnie, jeśli G jest grafem pełnym K_3 , pokazanym na rysunku 21.2, to $P_G(k) = k(k-1)(k-2)$. Ten wynik można uogólnić, pokazując, że $P_G(k) = k(k-1)(k-2)\dots(k-n+1)$, gdy G jest grafem K_n .



Rysunek 21.1



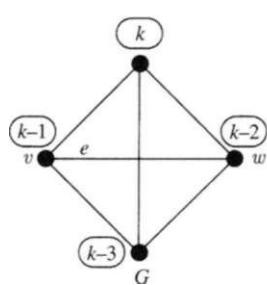
Rysunek 21.2

Jest rzeczą oczywistą, że jeśli $k < \chi(G)$, to $P_G(k) = 0$ oraz jeśli $k \geq \chi(G)$, to $P_G(k) > 0$. Zauważmy, że twierdzenie o czterech barwach jest równoważne stwierdzeniu: *jeśli G jest planarnym grafem prostym, to $P_G(4) > 0$* .

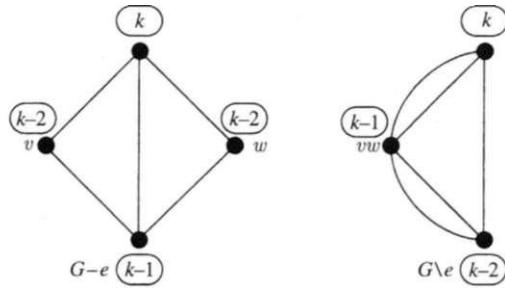
Jeśli mamy dany dowolny graf prosty, to zazwyczaj trudno wyznaczyć jego funkcję chromatyczną wyłącznie korzystając z samego opisu tego grafu. Następujące twierdzenie i płynący z niego wniosek dają nam systematyczną metodę wyznaczania funkcji chromatycznej grafu prostego za pomocą funkcji chromatycznych grafów pustych.

TWIERDZENIE 21.1. *Niech G będzie grafem prostym i niech $G - e$ i $G \setminus e$ będą grafami otrzymanymi z G przez usunięcie i ściagnięcie krawędzi e . Wówczas*

$$P_G(k) = P_{G-e}(k) - P_{G \setminus e}(k).$$



Rysunek 21.3



Rysunek 21.4

Niech na przykład G będzie grafem pokazanym na rysunku 21.3. Odpowiednie grafy $G - e$ i $G \setminus e$ są pokazane na rysunku 21.4, a twierdzenie 21.1 mówi, że

$$k(k-1)(k-2)(k-3) = [k(k-1)(k-2)^2] - [k(k-1)(k-2)].$$

Dowód. Niech $e = vw$. Liczba k -kolorowań grafu $G - e$, w których wierzchołki v i w mają różne kolory, nie zmieni się, jeśli dorysujemy krawędź e łączącą v i w , a więc jest równa $P_G(k)$. Podobnie, liczba k -kolorowań grafu $G - e$, w których wierzchołki v i w mają ten sam kolor, nie zmieni się, jeśli te wierzchołki ze sobą zidentyfikujemy, a więc jest równa $P_{G \setminus e}(k)$. Zatem liczba $P_{G - e}$ wszystkich k -kolorowań grafu $G - e$ wynosi $P_G(k) + P_{G \setminus e}(k)$, co kończy dowód. ■

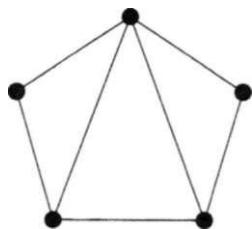
Wniosek 21.2. *Funkcja chromatyczna grafu prostego jest wielomianem.*

Dowód. Powtarzamy powyższą procedurę, wybierając krawędzie w grafach $G - e$ i $G \setminus e$ oraz usuwając i ściągając je. Następnie powtarzamy tę procedurę dla tych nowych czterech grafów i tak dalej. Ten proces kończy się, gdy nie pozostaną już żadne krawędzie — inaczej mówiąc, gdy wszystkie otrzymane tak grafy są puste. Ponieważ funkcja chromatyczna grafu pustego jest wielomianem (jest równa k^r , gdzie r jest liczbą wierzchołków), więc wielokrotne zastosowanie twierdzenia 21.1 pokazuje, że funkcja chromatyczna grafu G musi być sumą wielomianów, a więc sama jest wielomianem. ■

Konkretny przykład ilustrujący tę procedurę znajdziemy dalej w tym paragrafie. W praktyce nie musimy redukować każdego grafu do grafu pustego. Wystarczy zredukować każdy graf do grafów, których funkcje chromatyczne znamy, na przykład do drzew.

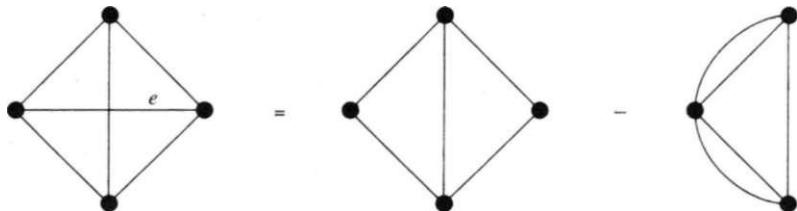
Ze względu na wniosek 21.2 możemy nazwać teraz funkcję $P_G(k)$ **wielomianem chromatycznym** grafu G . Z powyższego dowodu wynika, że jeśli graf G ma n wierzchołków, to wielomian $P_G(k)$ ma stopień n , gdyż w żadnym momencie nie dodajemy nowych wierzchołków. Ponieważ konstrukcja daje w wyniku tylko jeden graf pusty o n wierzchołkach, więc współczynnik przy k^n wynosi 1.

Możemy również zauważyć (por. ćwiczenie 21.6), że kolejne współczynniki mają przeciwnie znaki oraz że współczynnik przy k^{n-1} wynosi $-m$, gdzie m jest liczbą krawędzi grafu G . Zauważmy również, że grafu nie można pokolorować, gdy nie mamy żadnego koloru, więc wyraz wolny dowolnego wielomianu chromatycznego wynosi 0.



Rysunek 21.5

Podamy teraz przykład ilustrujący powyższe pojęcia. Skorzystamy z twierdzenia 21.1, by wyznaczyć wielomian chromatyczny grafu G pokazanego na rysunku 21.5 oraz przekonamy się, że ma on postać $k^5 - 7k^4 + ak^3 - bk^2 + ck$, gdzie a , b i c są stałymi dodatnimi, tak jak to wynika z poprzedniego akapitu. Wygodnie jest w każdym kroku narysować sam graf, zamiast wypisywać jego wielomian chromatyczny. Na przykład, zamiast pisać $P_G(k) = P_{G-e}(k) - P_{G \setminus e}(k)$, gdzie G , $G - e$ i $G \setminus e$ są grafami pokazanymi na rysunkach 21.3 i 21.4, piszemy „równanie” takie jak na rysunku 21.6.



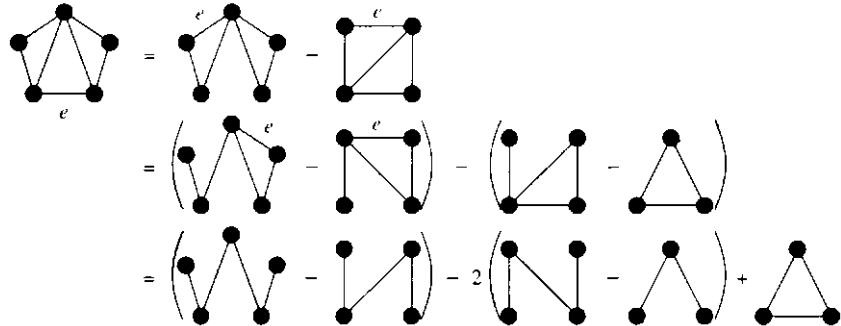
Rysunek 21.6

Stosując tę umowę i nie zwracając uwagi na powstające krawędzie wielokrotne, otrzymujemy rysunek 21.7.

Zatem

$$\begin{aligned} P_G(k) &= k(k-1)^4 - 3k(k-1)^3 + 2k(k-1)^2 + k(k-1)(k-2) = \\ &= k^5 - 7k^4 + 18k^3 - 20k^2 + 8k. \end{aligned}$$

Zauważmy, że otrzymany wynik ma żądaną postać $k^5 - 7k^4 + ak^3 - bk^2 + ck$, gdzie a , b i c są stałymi dodatnimi.



Rysunek 21.7

Na zakończenie tego rozdziału przypomnimy pokazany w ćwiczeniu 17.6 związek między kolorowaniem wierzchołków a planowaniem rozkładu zajęć. Przypuśćmy, że chcemy zaplanować, w jakich godzinach mają się odbywać pewne wykłady. Niektóre pary wykładów nie mogą odbywać się w tym samym czasie, gdyż studenci mogą chcieć uczestniczyć w obu. Aby zaplanować rozkład zajęć, konstruujemy graf, którego wierzchołki odpowiadają wykładom, a krawędzie łączą te pary wykładów, które nie mogą odbywać się w tym samym czasie. Jeśli przypiszemy kolor każdemu możliwemu terminowi zajęć, to kolorowanie wierzchołków będzie odpowiadało przydzieleniu wykładom konkretnych terminów. Liczba chromatyczna grafu informuje nas, ilu różnych terminów zajęć potrzebujemy, a wielomian chromatyczny pokazuje, na ile sposobów można ułożyć plan zajęć.

Ćwiczenia do §21

21.1^r Wyznacz wielomiany chromatyczne

- (a) grafu pełnego K_6 ,
- (b) pełnego grafu dwudzielnego $K_{1,5}$.

Na ile sposobów można pokolorować te grafy siedmioma kolorami?

21.2 (a) Wyznacz wielomiany chromatyczne wszystkich sześciu spójnych grafów prostych mających cztery wierzchołki.

- (b) Sprawdź, że każdy z tych wielomianów ma postać

$$k^4 - mk^3 + ak^2 - bk,$$

gdzie m jest liczbą krawędzi, a a i b są stałymi dodatnimi.

21.3^r Wyznacz wielomiany chromatyczne

- (a) pełnego grafu dwudzielnego $K_{2,5}$,
- (b) grafu cyklicznego C_5 .

- 21.4*** (a) Udowodnij, że wielomianem chromatycznym grafu $K_{2,s}$ jest wielomian $k(k-1)^s + k(k-1)(k-2)^s$.
 (b) Udowodnij, że wielomianem chromatycznym grafu C_n jest wielomian $(k-1)^n + (-1)^n(k-1)$.
- 21.5** Udowodnij, że jeśli G jest niespójnym grafem prostym, to jego wielomian chromatyczny $P_G(k)$ jest iloczynem wielomianów chromatycznych składowych G . Jaki jest stopień niezerowego jednomianu najniższego stopnia w tym wielomianie?
- 21.6*** Niech G będzie grafem prostym mającym n wierzchołków i m krawędzi. Korzystając z twierdzenia 21.1 i metody indukcji, udowodnij, że
 (a) współczynnik przy k^{n-1} wynosi $-m$;
 (b) kolejne współczynniki wielomianu $P_G(k)$ mają przeciwnie znaki.
- 21.7^r** (a) Skorzystaj z ćwiczeń 21.5 i 21.6, by dowieść, że jeśli $P_G(k) = k(k-1)^n$, to graf G jest drzewem mającym n wierzchołków.
 (b) Znajdź trzy grafy, których wielomianem chromatycznym jest wielomian $k^5 - 4k^4 + 6k^3 - 4k^2 + k$.

7 Rozdział Digrafy

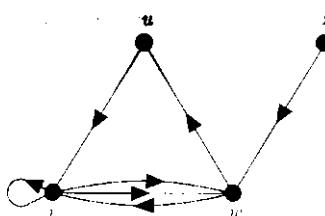
Nieprostą drogą do prostych rozwiązań.

WILLIAM SZEKSPIR (Hamlet)

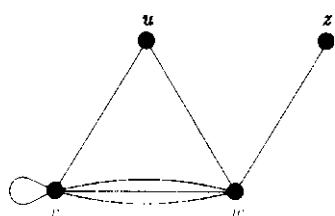
Ten i następny rozdział traktują o digrafach i ich zastosowaniach. W paragrafie 22 podajemy podstawowe definicje i zastanawiamy się, czy możemy tak „skierować” krawędzie grafu, by otrzymany digraf był silnie spójny. Następnie zajmiemy się krótko analizą dróg krytycznych, by w paragrafie 23 omówić ścieżki i cykle Eulera i Hamiltona, zwracając szczególną uwagę na turnieje. Zakończymy ten rozdział badaniem klasyfikacji stanów w łańcuchach Markowa.

§22 Definicje

Graf skierowany lub **digraf** (ang. **directed graph**) D składa się z niepustego zbioru skończonego $V(D)$ elementów nazywanych **wierzchołkami** i skończonej rodziny $A(D)$ par uporządkowanych elementów zbioru $V(D)$, nazywanych **łukami**. Zbiór $V(D)$ nazywamy **zbiorem wierzchołków**, a rodzinę $A(D)$ rodziną **łuków** digrafu D . Łuk (v, w) zwykle zapisujemy jako vw . Zatem w digrafie D pokazanym na rysunku 22.1 zbiorem $V(D)$ jest zbiór $\{u, v, w, z\}$, a rodzina $A(D)$ składa się z łuków uv , vv , vw (dwukrotnie), wv , wu i zw , przy czym kolejność wierzchołków w danym łuku jest wskazana za pomocą strzałki. Jeśli D jest digrafelem, to graf otrzymany z D przez „usunięcie strzałek” (tzn. przez zastąpienie każdego łuku postaci vw odpowiadającą mu krawędzią vw) nazywamy **szkieletem** digrafu D (por. rys. 22.2).

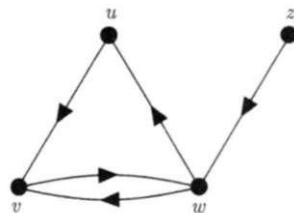


Rysunek 22.1

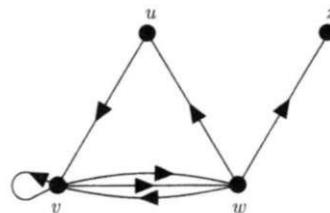


Rysunek 22.2

Digraf D jest **digrafem prostym**, jeśli wszystkie łuki D są różne i jeśli w D nie ma „pętli” (czyli łuków postaci vv). Zauważmy, że szkielet digrafa prostego nie musi być grafem prostym (por. rys. 22.3).



Rysunek 22.3



Rysunek 22.4

Definicje wielu pojęć dotyczących digrafów będą miały podobną postać do definicji podanych w paragrafie 2 i dotyczących grafów. Na przykład dwa digrafy są **izomorficzne**, jeśli istnieje izomorfizm ich szkieletów zachowujący kolejność wierzchołków w każdym łuku. Zauważmy, że digrafe pokazane na rysunkach 22.1 i 22.4 nie są izomorficzne.

Dwa wierzchołki v i w digrafa D są **sąsiednie**, jeśli w rodzinie $A(D)$ istnieje łuk postaci vw lub wv . Oba wierzchołki v i w są **incydentne** z takim łukiem. Jeśli zbiorem wierzchołków digrafa D jest zbiór $\{v_1, \dots, v_n\}$, to **macierzą sąsiedztwa** digrafa D nazywamy macierz $\mathbf{A} = (a_{i,j})$ wymiaru $n \times n$, gdzie $a_{i,j}$ jest liczbą łuków prowadzących z wierzchołka v_i do wierzchołka v_j .

Również definicje podane w paragrafie 5 w naturalny sposób uogólniają się na przypadek digrafów. Trasą w digrafie D nazywamy skończony ciąg łuków postaci $v_0v_1, v_1v_2, \dots, v_{m-1}v_m$. Czasami zapisujemy ten ciąg w postaci $v_0 \rightarrow v_1 \rightarrow \dots \rightarrow v_m$ i mówimy o **trasie z wierzchołka v_0 do wierzchołka v_m** . W podobny sposób możemy zdefiniować skierowane ścieżki, drogi i cykle, nazywając je po prostu ścieżkami, drogami i cyklami, gdy nie prowadzi to do nieporozumień. Zauważmy też, że chociaż ścieżka nie może zawierać danego łuku vw więcej niż jeden raz, to może zawierać oba łuki vw i wv ; na przykład w digrafie pokazanym na rysunku 22.1 ciąg $z \rightarrow w \rightarrow v \rightarrow w \rightarrow u$ jest ścieżką.

Możemy również zdefiniować spójność. Dwie najbardziej przydatne definicje digrafa spójnego różnią się tym, że w jednej bierzemy pod uwagę kierunek łuków, a w drugiej nie. Te definicje są naturalnymi uogólnieniami definicji spójności podanych w paragrafach 2 i 5 na przypadek digrafów.

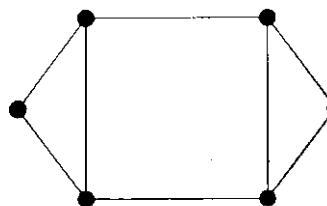
Digraf D nazwiemy **spójnym**, jeśli nie można przedstawić go w postaci sumy dwóch digrafów, zdefiniowanej w oczywisty sposób. Równoważnie można powiedzieć, że szkielet digrafa D jest grafem spójnym. Digraf D nazwiemy **silnie spójnym**, jeśli dla dowolnych dwóch wierzchołków v i w istnieje droga z v do w . Każdy digraf silnie spójny jest spójny, ale nie wszystkie digrafe spójne są silnie spójne;

na przykład digraf spójny pokazany na rysunku 22.1 nie jest silnie spójny, gdyż nie istnieje droga z wierzchołka v do wierzchołka z .

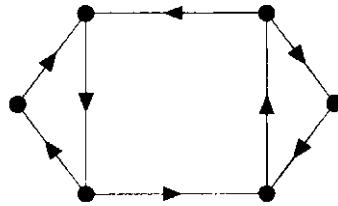
Rozróżnienie między digrafami spójnymi i silnie spójnymi stanie się wyraźniejsze, jeśli rozważymy plan ulic w mieście, w którym wszystkie ulice są jednokierunkowe. Jeśli plan miasta jest spójny, to znaczy, że możemy przejechać z dowolnego miejsca do każdego innego, nie zwracając w czasie jazdy uwagi na kierunek ruchu. Jeśli plan miasta jest silnie spójny, to możemy przejechać z dowolnego miejsca do dowolnego innego, jadąc cały czas zgodnie z kierunkiem ruchu, czyli nie jadąc „pod prąd” na ulicach jednokierunkowych.

Ponieważ każdy sposób organizacji ruchu musi zapewniać silną spójność, więc naturalnym staje się pytanie o to, czy w danym mieście można tak zorganizować ruch jednokierunkowy, by z każdego miejsca można było dojechać do każdego innego. Jeśli, na przykład, miasto składa się z dwóch części połączonych tylko jednym mostem, to nie można w taki sposób zorganizować ruchu jednokierunkowego w tym mieście, gdyż niezależnie od tego, jaki będzie kierunek ruchu na moście, jedna część miasta będzie odcięta od drugiej. Z drugiej strony, jeśli w mieście nie ma mostów, to taki sposób zorganizowania ruchu jednokierunkowego jest możliwy. To spostrzeżenie jest sformułowane w sposób ścisły w twierdzeniu 22.1.

Dla wygody nazwiemy graf G orientowalnym, jeśli każdą jego krawędź możemy skierować w taki sposób, by otrzymany digraf stał się digrafem silnie spójnym. Na przykład, jeśli graf G jest grafem pokazanym na rysunku 22.5, to G jest grafem orientowalnym, gdyż jego krawędzie mogą być skierowane tak, by otrzymać digraf silnie spójny pokazany na rysunku 22.6.



Rysunek 22.5

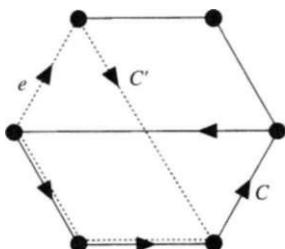


Rysunek 22.6

Zauważmy, że każdy graf eulerowski jest orientowalny, gdyż podążając wzdłuż dowolnego cyklu Eulera możemy orientować krawędzie zgodnie z kierunkiem, w jakim je przechodzimy. Podamy teraz warunek konieczny i wystarczający (pochodzący od H. E. Robbinsa) na to, by dany graf był orientowalny.

TWIERDZENIE 22.1. *Niech G będzie grafem spójnym. Wówczas graf G jest orientowalny wtedy i tylko wtedy, gdy każda krawędź grafu G jest zawarta w co najmniej jednym cyklu.*

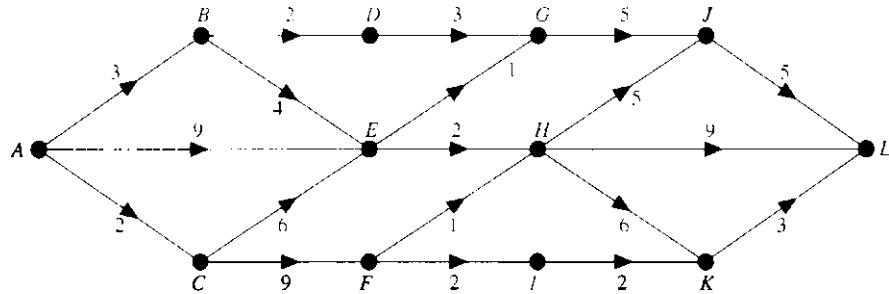
Dowód. Konieczność tego warunku jest oczywista. Aby dowieść, że jest on wystarczający, wybieramy dowolny cykl C i orientujemy jego krawędzie cyklicznie. Jeśli każda krawędź grafu G jest zawarta w cyklu C , to dowód jest zakończony. W przeciwnym razie wybieramy krawędź e nie należącą do C , ale sąsiadującą z jakąś krawędzią należącą do C . Z założenia, krawędź e jest zawarta w pewnym cyklu C' , którego krawędzie również możemy zorientować cyklicznie, z wyjątkiem krawędzi, które już mają nadany kierunek — to znaczy tych krawędzi cyklu C' , które należą również do C . Nietrudno zauważyć, że otrzymany digraf jest silnie spójny; ta sytuacja jest przedstawiona na rysunku 22.7, na którym cykl C' jest zaznaczony przerywaną linią. Postępujemy dalej w ten sam sposób, za każdym razem orientując co najmniej jedną nową krawędź, dotąd aż wszystkie krawędzie nie zostaną zorientowane. Ponieważ digraf po każdym kroku jest silnie spójny, więc twierdzenie zostało udowodnione. ■



Rysunek 22.7

Zakończymy ten paragraf omówieniem problemu „dróg krytycznych”, dotyczącego szeregowania ciągu zadań. Przypuśćmy, że mamy do wykonania pewną pracę, taką jak wybudowanie domu i ta praca może być podzielona na pewną liczbę zadań, takich jak wyłanie fundamentów, położenie dachu, poprowadzenie instalacji elektrycznej itp. Pewne z tych zadań mogą być wykonywane jednocześnie, pewne zaś muszą być zakończone przed rozpoczęciem innych. Czy możemy znaleźć efektywną metodę określania, kiedy które zadania muszą być wykonane, aby całą pracę można było zakończyć w jak najkrótszym czasie?

Aby rozwiązać ten problem, konstruujemy pewien „digraf z wagami”, nazywany **siecią zdarzeń**, w którym waga każdego łuku oznacza czas wykonania danego zadania. Przykład takiej sieci jest pokazany na rysunku 22.8. Wierzchołek A oznacza rozpoczęcie robót, a wierzchołek L zakończenie. Ponieważ cała praca nie zostanie zakończona, zanim nie zostanie przebyta każda droga prowadząca z A do L , więc zadanie sprawdza się do znalezienia najdłuższej drogi z A do L . Można ją znaleźć za pomocą metody znanej pod nazwą PERT (ang. Programme Evaluation and Review Technique) i podobnej do metody, której użyliśmy w paragrafie 8 do rozwiązania zagadnienia najkrótszej drogi. Różnica polega na tym, że w czasie, gdy przesuwamy się w digrafie z lewa na prawo, wiążemy z każdym



Rysunek 22.8

wierzchołkiem V liczbę $l(V)$ wskazującą długość *najdłuższej drogi* z A do V . A więc w grafie pokazanym na rysunku 22.8 przyporządkujemy:

wierzchołkowi A liczbę 0;

wierzchołkowi B liczbę $l(A) + 3$, tzn. 3;

wierzchołkowi C liczbę $l(A) + 2$, tzn. 2;

wierzchołkowi D liczbę $l(B) + 2$, tzn. 5;

wierzchołkowi E liczbę $\max\{l(A) + 9, l(B) + 4, l(C) + 6\}$, tzn. 9;

wierzchołkowi F liczbę $l(C) + 9$, tzn. 11;

wierzchołkowi G liczbę $\max\{l(D) + 3, l(E) + 1\}$, tzn. 10;

wierzchołkowi H liczbę $\max\{l(E) + 2, l(F) + 1\}$, tzn. 12;

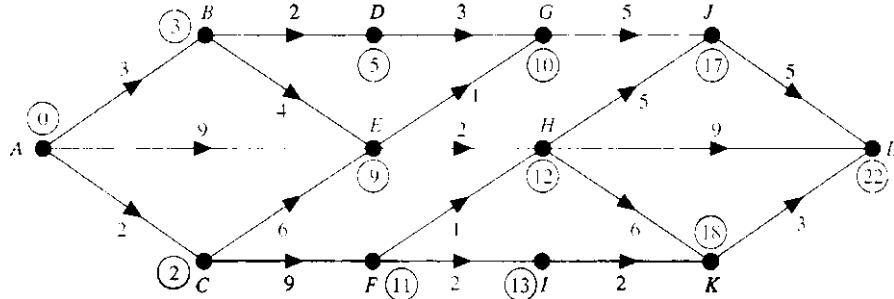
wierzchołkowi I liczbę $l(F) + 2$, tzn. 13;

wierzchołkowi J liczbę $\max\{l(G) + 5, l(H) + 5\}$, tzn. 17;

wierzchołkowi K liczbę $\max\{l(H) + 6, l(I) + 2\}$, tzn. 18;

wierzchołkowi L liczbę $\max\{l(H) - 9, l(J) + 5, l(K) + 3\}$, tzn. 22.

Tak samo jak przy znajdowaniu najkrótszej drogi, znalezione liczby zapisujemy obok wierzchołków, którym są przypisane. Zauważmy też, że w przeciwnieństwie do problemu rozważanego w paragrafie 8, nie musimy poruszać się „w przód i w tył”, gdyż wszystkie łuki są skierowane z lewa na prawo. Tak więc, najdłuższa



Rysunek 22.9

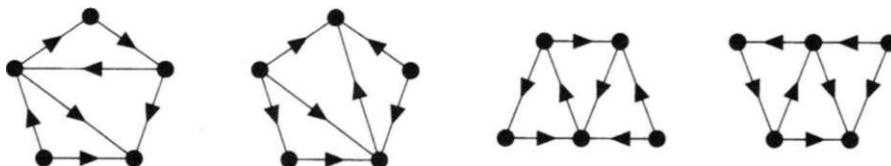
droga ma długość 22 i jest pokazana na rysunku 22.9. Cała praca nie może zatem być zakończona przed momentem 22.

Najdłuższą drogę nazywamy często **drogą krytyczną**, gdyż każde opóźnienie na tej drodze spowoduje opóźnienie całej pracy. W czasie tworzenia planu pracy musimy zatem zwrócić szczególną uwagę na drogi krytyczne.

Możemy również wyznaczyć najpóźniejszą chwilę, przed którą dane zadanie musi być zakończone, by nie opóźnić całej pracy. Podążając od L w lewo, zauważamy, że musimy dotrzeć do K nie później niż w chwili $22 - 3 = 19$, do J nie później niż w chwili $22 - 5 = 17$, do H nie później niż w chwili $\min\{17 - 5, 22 - 9, 19 - 6\} = 12$ i tak dalej.

Ćwiczenia do §22

22.1^r Dwa digrafy pokazane na rysunku 22.10 są izomorficzne. Które?



Rysunek 22.10

22.2^r Niech D będzie digrafem prostym mającym n wierzchołków i m łuków.

- (a) Udowodnij, że jeśli digraf D jest spójny, to $n - 1 \leq m \leq n(n - 1)$.
- (b) Wyznacz odpowiednie ograniczenia liczby m dla digrafa D silnie spójnego.

22.3^r Wyznacz macierze sąsiedztwa digrafów pokazanych na rysunkach 22.1 i 22.6.

22.4 Digrafem **przeciwnym** do digrafa D nazywamy digraf \tilde{D} otrzymany przez odwrócenie kierunku każdego łuku digrafa D .

- (a) Podaj przykład digrafa izomorficznego z digrafiem odwrotnym do siebie samego.
- (b) Jaki jest związek między macierzami sąsiedztwa digrafów D i \tilde{D} ?

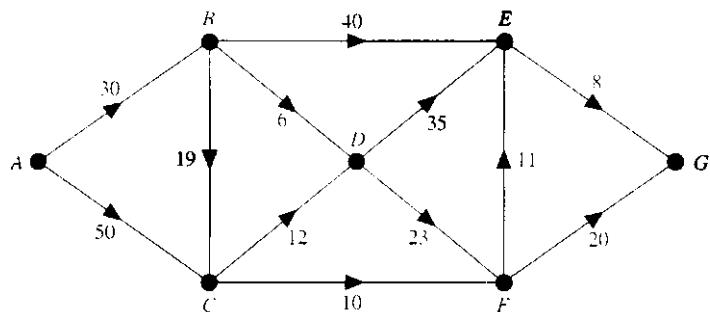
22.5 (a) Nie korzystając z twierdzenia 22.1, udowodnij, że każdy graf hamiltonowski jest orientowalny.

- (b) Znajdując orientację łuków każdego z grafów K_n (dla $n \geq 3$) i $K_{r,s}$ (dla $r, s \geq 2$), wykaż, że grafy te są orientowalne.

- (c) Znайдź orientację grafu Petersena i grafu dwunastościanu.

22.6^r W powyższym problemie szeregowania zadań wyznacz najpóźniejsze momenty, w których możemy dotrzeć do wierzchołków G , E i B .

22.7 Wyznacz najdłuższą drogę z A do G w sieci pokazanej na rysunku 22.11.

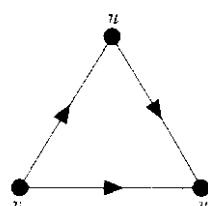


Rysunek 22.11

§23 Digrafy eulerowskie i turnieje

W tym paragrafie uzyskamy pewne wyniki analogiczne do tych w paragrafach 6 i 7. W szczególności będziemy badać cykle Hamiltona w digrafach pewnego typu, zwanych turniejami.

Digraf spójny D nazywamy **eulerowskim**, jeśli istnieje ścieżka zamknięta zawierająca każdy łuk digrafu D . Taką ścieżkę nazywamy **ścieżką eulerowską**. Na przykład digraf pokazany na rysunku 23.1 nie jest eulerowski, pomimo że jego szkielet jest grafem eulerowskim.



Rysunek 23.1

Naszym pierwszym zadaniem będzie podanie warunku koniecznego i wystarczającego, analogicznego do warunku z twierdzenia 6.2, na to, by digraf spójny był eulerowski. Zauważmy, że warunkiem koniecznym jest, by ten digraf był silnie spójny.

Będziemy potrzebowali kilku definicji. **Stopniem wyjściowym** wierzchołka v digrafu D nazywamy liczbę łuków postaci vw i oznaczamy ją symbolem $\text{outdeg}(v)$. Podobnie, **stopniem wejściowym** wierzchołka v nazywamy liczbę łuków digrafu D postaci wv ; oznaczamy ją symbolem $\text{indeg}(v)$. Zauważmy, że suma stopni wyjściowych wszystkich wierzchołków digrafu D jest równa sumie ich stopni wejściowych, gdyż wkład każdego łuku digrafu D do obu sum wynosi 1. Tę obserwację nazywamy też **lematem o uściskach dłoni**.

Wierzchołek mający stopień wejściowy równy 0 będziemy dalej nazywać **źródłem** digrafu D , a wierzchołek mający stopień wyjściowy równy 0 — **ujściem** D . Zatem w grafie pokazanym na rysunku 23.1 wierzchołek v jest źródłem, a wierzchołek w jest ujściem. Zauważmy, że żaden digraf eulerowski, mający co najmniej jeden łuk, nie ma źródeł i ujścia. Teraz możemy sformułować podstawowe twierdzenie o digrafach eulerowskich.

TWIERDZENIE 23.1. *Digraf spójny jest digrafem eulerowskim wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego wierzchołka v digrafu D zachodzi równość $\text{outdeg}(v) = \text{indeg}(v)$.*

Dowód. Ten dowód jest analogiczny do dowodu twierdzenia 6.2, więc pozostawimy go jako ćwiczenie. ■

Pozostawimy również Czytelnikowi zdefiniowanie digrafów półeulerowskich i udowodnienie twierdzeń analogicznych do wniosków 6.3 i 6.4.

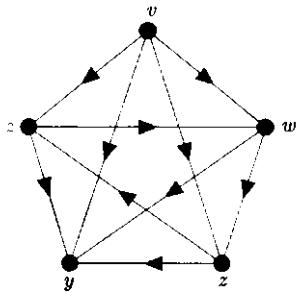
Badanie odpowiednich digrafów hamiltonowskich jest, jak można się tego spodziewać, mniej skuteczne, niż w przypadku grafów eulerowskich. Digraf D nazywamy digrafem **hamiltonowskim**, jeśli istnieje cykl zawierający każdy wierzchołek D . Digraf nie będący digrafem hamiltonowskim, w którym istnieje jednak droga przechodząca przez każdy wierzchołek, nazywamy digrafem **półhamiltonowskim**. Nie wiemy wiele o digrafach hamiltonowskich, a twierdzenia o grafach hamiltonowskich nie uogólniąją się łatwo (o ile w ogóle) na przypadek digrafów.

Nasuwa się naturalne pytanie, czy istnieje uogólnienie twierdzenia Diraca (wniosek 7.2) na przypadek digrafów. Jedno takie uogólnienie pochodzi od Ghouila-Houriego; dowód jest znacznie bardziej skomplikowany od dowodu twierdzenia Diraca i można go znaleźć w książce Bondy'ego i Murty'ego [7].

TWIERDZENIE 23.2. *Niech D będzie digrafem silnie spójnym mającym n wierzchołków. Jeśli $\text{outdeg}(v) \geq n/2$ i $\text{indeg}(v) \geq n/2$ dla każdego wierzchołka v , to digraf D jest hamiltonowski.*

Wydaje się, że dowodzenie kolejnych twierdzeń tej postaci będzie trudne, więc zajmiemy się raczej pytaniem, jakie typy digrafów są hamiltonowskie. Digrafami szczególnie ważnymi pod tym względem są turnieje, a odpowiednie twierdzenie dla nich ma bardzo prostą postać.

Turniejem nazywamy digraf, w którym każde dwa wierzchołki są połączone dokładnie jednym łukiem (por. rys. 23.2). Takich digrafów można używać do przedstawiania wyników turnieju tenisowego lub innej gry, w której nie ma remisów. Na przykład, na rysunku 23.2 drużyna z pokonała drużynę w i przegrała z drużyną v itp.



Rysunek 23.2

Ponieważ turnieje mogą mieć źródła i ujścia, więc na ogół nie są dugrafami hamiltonowskimi. Jednak następujące twierdzenie, pochodzące od L. Rédei i P. Caimona, pokazuje, że każdy turniej jest „prawie hamiltonowski”.

TWIERDZENIE 23.3. (1) *Każdy turniej nie będący dugrafiem hamiltonowskim jest półhamiltonowski; (2) każdy turniej silnie spójny jest hamiltonowski.*

Dowód. (1) To twierdzenie jest oczywiste, jeśli turniej ma mniej niż cztery wierzchołki. Dowodzimy twierdzenia przez indukcję ze względu na liczbę wierzchołków. Zakładamy, że każdy turniej nie będący dugrafiem hamiltonowskim, mający n wierzchołków, jest półhamiltonowski.

Niech T będzie turniejem nie będącym dugrafiem hamiltonowskim, który ma $n+1$ wierzchołków, i niech T' będzie turniejem o n wierzchołkach otrzymanym z T przez usunięcie wierzchołka v i łuków incydentnych z tym wierzchołkiem. Z założenia dugraf T' ma drogę półhamiltonowską $v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_n$. Mamy teraz trzy przypadki do rozważenia:

I Jeśli vv_1 jest łukiem w dugrafie T , to szukaną drogą jest

$$v \rightarrow v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_n.$$

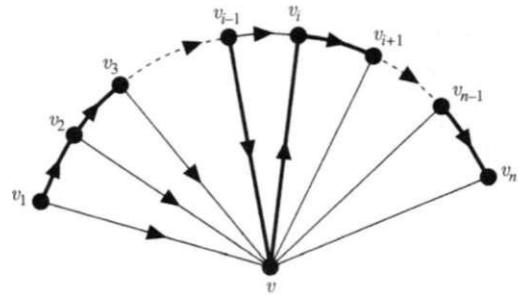
II Jeśli vv_1 nie jest łukiem w dugrafie T , co znaczy, że v_1v jest łukiem, i jeśli istnieje liczba i taka, że vv_i jest łukiem w T , to wybierając najmniejszą taką liczbę i otrzymujemy szukaną drogę postaci (por. rys. 23.3)

$$v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_{i-1} \rightarrow v \rightarrow v_i \rightarrow \dots \rightarrow v_n.$$

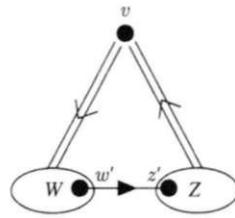
III Jeśli nie istnieje w dugrafie T łuk postaci vv_i , to szukaną drogą jest

$$v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_n \rightarrow v.$$

(2) Dowodzimy twierdzenia silniejszego, które mówi, że turniej silnie spójny T mający n wierzchołków zawiera cykle długości $3, 4, \dots, n$. Aby pokazać, że T zawiera cykl długości 3, weźmy dowolny wierzchołek v dugrafu T i niech W będzie zbiorem wszystkich wierzchołków w takich, że vw jest łukiem w T , a Z zbiorem



Rysunek 23.3

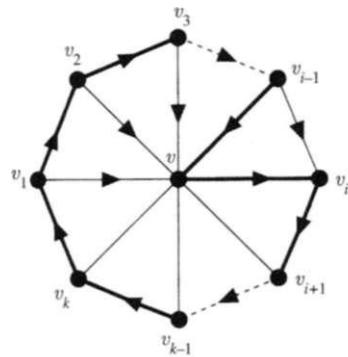


Rysunek 23.4

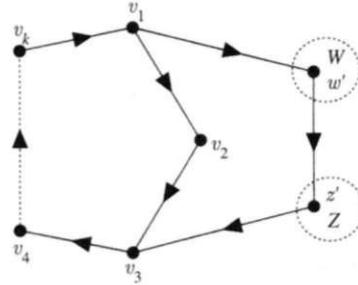
wszystkich wierzchołków z takich, że zv jest łukiem w T . Ponieważ digraf T jest silnie spójny, więc oba zbiory W i Z muszą być niepuste oraz musi istnieć w T łuk postaci $w'z'$, gdzie w' należy do W i z' należy do Z (por. rys. 23.4). Szukanym cyklem długości 3 jest wtedy $v \rightarrow w' \rightarrow z' \rightarrow v$.

Wystarczy więc pokazać, że jeśli istnieje cykl długości k , gdzie $k \leq n$, to istnieje cykl długości $k + 1$. Niech $v_1 \rightarrow \dots \rightarrow v_k \rightarrow v_1$ będzie cyklem długości k . Przypuśćmy najpierw, że istnieje wierzchołek v nie należący do tego cyklu i taki, że istnieją w T łuki postaci vv_i i v_jv . Musi wtedy istnieć wierzchołek v_i taki, że zarówno $v_{i-1}v$, jak i vv_i są łukami w T . Szukanym cyklem jest wtedy (por. rys. 23.5) cykl

$$v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_{i-1} \rightarrow v \rightarrow v_i \rightarrow \dots \rightarrow v_k \rightarrow v_1.$$



Rysunek 23.5



Rysunek 23.6

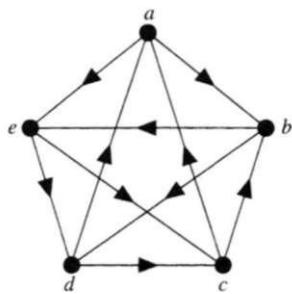
Jeśli nie istnieje wierzchołek o tej własności, to zbiór wierzchołków, które nie należą do wybranego cyklu długości k , można podzielić na dwa zbiory W i Z , gdzie W jest zbiorem wierzchołków w takich, że v_iw jest łukiem dla dowolnego i , a Z jest zbiorem wierzchołków z takich, że zv_i jest łukiem dla dowolnego i . Ponieważ digraf T jest silnie spójny, oba zbiory W i Z muszą być niepuste oraz

musi istnieć w digrafie T łuk postaci $w'z'$, gdzie w' należy do W i z' należy do Z . Szukanym cyklem jest wtedy (por. rys. 23.6) cykl

$$v_1 \rightarrow w' \rightarrow z' \rightarrow v_3 \rightarrow \dots \rightarrow v_k \rightarrow v_1. \quad \blacksquare$$

Ćwiczenia do §23

23.1^r Sprawdź, że lemat o uściskach dłoni jest prawdziwy w turniejach pokazanych na rysunkach 23.2 i 23.7.



Rysunek 23.7

23.2^r Znajdź w turnieju pokazanym na rysunku 23.7

- (a) cykle długości 3, 4 i 5,
- (b) ścieżkę eulerowską,
- (c) cykl Hamiltona.

23.3^r Udowodnij, że w turnieju nie może istnieć więcej niż jedno źródło i więcej niż jedno ujście.

23.4 Niech T będzie turniejem mającym n wierzchołków. Udowodnij następujące równości, w których znak \sum oznacza sumowanie po wszystkich wierzchołkach digrafu T :

- (a) $\sum \text{outdeg}(v) = \sum \text{indeg}(v)$,
- (b) $\sum \text{outdeg}(v)^2 = \sum \text{indeg}(v)^2$.

23.5 Niech D będzie digrafem, którego wierzchołkami są pary liczb całkowitych

$$11, 12, 13, 21, 22, 23, 31, 32, 33$$

i którego łuki łączą pary ij i kl wtedy i tylko wtedy, gdy $j = k$. Wyznacz ścieżkę eulerowską w digrafie D i użyj jej do znalezienia takiego cyklicznego ustalenia dziewięciu jedynek, dziewięciu dwójk i dziewięciu trójek, w którym każda z 27 możliwych trójek liczb (111, 233 itp.) występuje dokładnie jeden raz. (Podobne problemy pojawiają się w teorii komunikacji.)

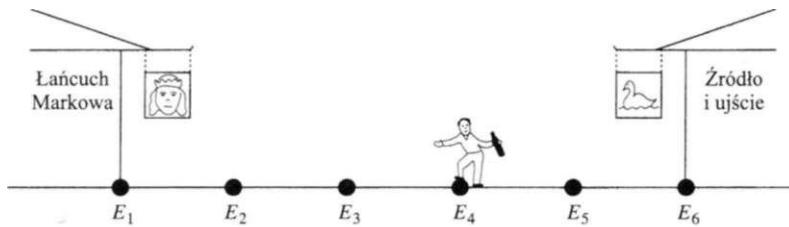
- 23.6 Turniej T nazywamy **nierozkładalnym**, jeśli nie można podzielić jego wierzchołków na dwa rozłączne zbiory V_1 i V_2 tak, by każdy łuk łączący wierzchołek należący do V_1 z wierzchołkiem należącym do V_2 był skierowany od V_1 do V_2 .
- Podaj przykład turnieju nierozkładalnego.
 - Udowodnij, że turniej jest nierozkładalny wtedy i tylko wtedy, gdy jest silnie spójny.
- 23.7 Turniej nazywamy **przechodnim**, jeśli z istnienia łuków uv i vw wynika istnienie łuku uw .
- Podaj przykład turnieju przechodniego.
 - Pokaź, że w turnieju przechodnim drużyny mogą być uporządkowane w taki sposób, że każda drużyna wygrywa ze wszystkimi drużynami znajdującymi się w dalszej kolejności.
 - Wyprowadź stąd wniosek, że turniej przechodni mający co najmniej dwa wierzchołki nie może być silnie spójny.
- 23.8* Wynikiem wierzchołka w turnieju nazywamy jego stopień wyjściowy, a ciągiem wyników turnieju jest ciąg utworzony przez wyniki wierzchołków, ustawione w kolejności niemalejącej; na przykład ciągiem wyników turnieju pokazanego na rysunku 23.2 jest ciąg $(0, 2, 2, 2, 4)$. Udowodnij, że jeśli (s_1, \dots, s_n) jest ciągiem wyników turnieju T , to
- $s_1 + \dots + s_n = n(n - 1)/2$;
 - dla każdej liczby całkowitej dodatniej $k < n$ zachodzi nierówność $s_1 + \dots + s_k \geq k(k - 1)/2$, przy czym nierówność jest ostra dla wszystkich k wtedy i tylko wtedy, gdy turniej T jest silnie spójny;
 - turniej T jest przechodni wtedy i tylko wtedy, gdy $s_k = k - 1$ dla wszystkich k .

§24 Łańcuchy Markowa

Jak już widzieliśmy, digrafy pojawiają się w wielu sytuacjach w praktyce. W tym paragrafie opiszemy proste zastosowanie digrafów do badania skończonych łańcuchów Markowa. Inne ich zastosowanie — do badania przepływów w sieciach — jest omówione w następnym rozdziale. Jeszcze inne zastosowania można znaleźć w książkach Deo [13] oraz Wilsona i Beinekego [21].

Potrzeba badania łańcuchów Markowa pojawia się w wielu dziedzinach, począwszy od genetyki i statystyki a skończywszy na informatyce i socjologii. Dla ułatwienia prezentacji rozważymy dość trywialny przykład pijaka stojącego między jego ulubionymi barami o nazwach „Łańcuch Markowa” i „Źródło i ujście” (por. rys. 24.1).

W każdej minucie zatacza się on dziesięć metrów w stronę pierwszego baru (z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$), w stronę drugiego baru (z prawdopodobieństwem $\frac{1}{3}$) lub pozostaje w miejscu (z prawdopodobieństwem $\frac{1}{6}$) — takie postępowanie nazywamy jednowymiarowym błędzeniem przypadkowym. Zakładamy, że oba



Rysunek 24.1

bary są „pochłaniające”, to znaczy, że gdy dotrze on do któregoś z nich, to pozostanie tam. Jeśli znamy odległość między barami i miejsce, w którym początkowo znajduje się pijak, możemy zapytać, do którego baru najprawdopodobniej dotrze on najpierw i ile prawdopodobnie czasu zajmie mu droga.

Przypuśćmy, że oba bary są odległe od siebie o 50 metrów i nasz drogi znajomy znajduje się w odległości 20 metrów od „Źródła i ujścia”. Jeśli oznaczymy miejsca, w których może się on zatrzymać, symbolami E_1, \dots, E_6 , przy czym E_1 i E_6 oznaczają oba bary, to jego pozycja początkowa E_4 może być opisana za pomocą wektora $\mathbf{x} = (0, 0, 0, 1, 0, 0)$, którego i -ta współrzędna oznacza prawdopodobieństwo tego, że na początku znajduje się on w miejscu E_i . Następnie, prawdopodobieństwa jego pozycji po pierwszej minucie są opisane za pomocą wektora $(0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}, 0)$, a po dwóch minutach za pomocą wektora $(0, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{13}{36}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9})$. Bezpośrednie obliczenie prawdopodobieństwa znalezienia się w konkretnym miejscu po k minutach jest dość zawiłe i znacznie wygodniej zabrać się do tego, wprowadzając pojęcie macierzy prawdopodobieństw przejścia.

Niech p_{ij} będzie prawdopodobieństwem tego, że przesunie się on z miejsca E_i do miejsca E_j w ciągu jednej minuty; na przykład $p_{23} = \frac{1}{3}$ oraz $p_{24} = 0$. Te prawdopodobieństwa nazywamy **prawdopodobieństwami przejścia**, a macierz $\mathbf{P} = (p_{ij})$ wymiaru 6×6 nazywamy **macierzą prawdopodobieństw przejścia** (por. rys. 24.2).

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

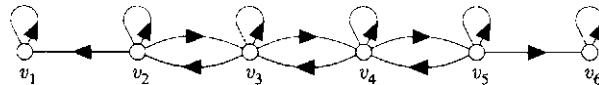
Rysunek 24.2

Zauważmy, że każdy wyraz macierzy \mathbf{P} jest liczbą nieujemną i że suma wszystkich wyrazów w każdym wierszu jest równa 1. Jeśli \mathbf{x} jest zdefiniowanym wyżej początkowym wektorem wierszowym, to prawdopodobieństwa pozycji po jednej

minutie są opisane wektorem wierszowym \mathbf{xP} , a po k minutach wektorem \mathbf{xP}^k . Inaczej mówiąc, i -ta współrzędna iloczynu \mathbf{xP}^k jest prawdopodobieństwem tego, że po k minutach znajdzie się on w miejscu E_i .

W ogólności, wektorem prawdopodobieństw nazywamy wektor wierszowy, którego wszystkie współrzędne są liczbami nieujemnymi o sumie równej 1. a macierzą prawdopodobieństw przejść nazywamy macierz kwadratową, której każdy wiersz jest wektorem prawdopodobieństw. Definiujemy teraz skończony łańcuch Markowa jako macierz prawdopodobieństw przejść \mathbf{P} wymiaru $n \times n$ wraz z n -wymiarowym wektorem wierszowym \mathbf{x} . Pozycje E_i nazywamy stanami w łańcuchu Markowa i naszym celem jest opis sposobów klasyfikacji tych stanów.

Przede wszystkim interesuje nas to, czy z danego stanu można przejść do innego stanu i jeśli tak, to jak długo będzie to trwało. Na przykład, w powyższym zadaniu, pijak może przedostać się ze stanu E_4 do stanu E_1 w ciągu trzech minut i ze stanu E_4 do stanu E_6 w ciągu dwóch minut, ale nie może przedostać się ze stanu E_1 do stanu E_4 , gdyż bar E_1 jest stanem „pochłaniającym”. A więc interesują nas nie tyle same prawdopodobieństwa p_{ij} , ale to, kiedy są one różne od zera. Aby to rozstrzygnąć, przedstawiamy całą sytuację za pomocą digrafu, którego wierzchołki odpowiadają stanom i których łuki mówią nam, czy możemy przedostać się z jednego stanu do drugiego w ciągu jednej minuty. Zatem, jeśli każdy stan E_i jest reprezentowany przez wierzchołek v_i , to odpowiedni digraf otrzymamy rysując łuk z v_i do v_j wtedy i tylko wtedy, gdy $p_{ij} \neq 0$. Możemy też zdefiniować ten digraf za pomocą macierzy sąsiedztwa, zastępując jedynką każdy niezerowy wyraz macierzy \mathbf{P} . Ten digraf będziemy nazywać **digrafem związanym z łańcuchem Markowa**. Digraf związanego z łańcuchem omówionym w powyższym zadaniu jest pokazany na rysunku 24.3.



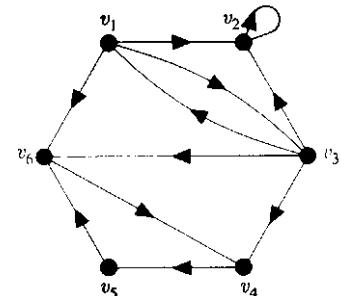
Rysunek 24.3

Na rysunku 24.4 widzimy inny przykład macierzy prawdopodobieństw przejść skończonego łańcucha Markowa; macierz sąsiedztwa związanego z nim digrafa i sam ten digraf widzimy na rysunku 24.5.

Zauważmy, że możemy przejść ze stanu E_i do stanu E_j w łańcuchu Markowa wtedy i tylko wtedy, gdy w związanym z nim digrafie istnieje droga z v_i do v_j , a najkrótszy możliwy czas takiego przejścia jest równy długości najkrótszej takiej drogi. łańcuch Markowa, w którym możemy przejść z każdego stanu do każdego innego nazywamy **łańcuchem nieprzywiedlnym**. Oczywiście dany łańcuch Markowa jest łańcuchem nieprzywiedlnym wtedy i tylko wtedy, gdy związany z nim digraf jest silnie spójny. Zauważmy, że żaden z opisanych wyżej łań-

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{12} & 0 & \frac{1}{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Rysunek 24.4



Rysunek 24.5

cuchów Markowa nie jest nieprzywiedlny; na przykład w drugim łańcuchu nie istnieje droga z wierzchołka v_2 do żadnego innego wierzchołka.

W dalszym ciągu odróżniamy stany, do których będziemy wielokrotnie powracać, niezależnie od tego, jak długo się poruszamy, od stanów, które odwiedzimy tylko kilka razy i nigdy więcej już do nich nie powrócimy. Dokładniej, jeśli prawdopodobieństwo tego, że rozpoczętając wędrówkę od stanu E_i , kiedyś w przeszłości do niego powrócimy, wynosi 1, to stan E_i nazywamy **stanem powracającym**; w przeciwnym razie stan E_i nazywamy **chwilowym**. Na przykład w zadaniu o pijaku stany E_1 i E_6 są powracające, a pozostałe stany są stanami chwilowymi. W bardziej skomplikowanych sytuacjach obliczenie odpowiednich prawdopodobieństw może wymagać znacznej pomysłowości i zazwyczaj łatwiej jest sklasyfikować stany, analizując digraf związanego z łańcuchem. Łatwo zauważać, że stan E_i jest stanem powracającym wtedy i tylko wtedy, gdy z istnienia w digrafie związanym z tym łańcuchem drogi z v_i do v_j wynika istnienie drogi z v_j do v_i . Na rysunku 24.5 istnieje droga z v_1 do v_4 , ale nie istnieje droga z v_4 do v_1 . Zatem stan E_1 jest stanem chwilowym, podobnie jak stan E_3 , natomiast stany E_2 , E_4 , E_5 i E_6 są powracające. Stan taki jak E_2 , z którego nie możemy przedostać się do żadnego innego stanu, nazywamy **stanem pochłaniającym**.

Inny sposób klasyfikowania stanów odwołuje się do pojęcia okresowości. Stan E_i w łańcuchu Markowa jest **stanem okresowym o okresie t** (gdzie $t \neq 1$), jeśli powrót do E_i jest możliwy tylko po czasie będącym wielokrotnością t ; jeśli taka liczba t nie istnieje, to stan E_i nazywamy **nieokresowym**. Zauważmy, że każdy stan E_i , dla którego $p_{ii} \neq 0$, jest nieokresowy; na przykład każdy stan pochłaniający jest nieokresowy. W zadaniu o pijaku stany E_1 i E_6 nie są jedynymi stanami nieokresowymi — tak naprawdę każdy stan jest nieokresowy. W drugim przykładzie stan pochłaniający E_2 jest jedynym stanem nieokresowym, gdyż stany E_1 i E_3 są stanami okresowymi o okresie równym 2, a stany E_4 , E_5 i E_6 są stanami okresowymi o okresie równym 3. Używając języka teorii grafów możemy powiedzieć, że stan E_i jest stanem okresowym o okresie t wtedy i tylko wtedy, gdy w digrafie związanym z danym łańcuchem długość każdej zamkniętej ścieżki przechodzącej przez wierzchołek v_i jest wielokrotnością t . Wreszcie, dany

stan nazywamy **stanem ergodycznym**, jeśli jest jednocześnie powracający i nieokresowy, a sam łańcuch Markowa nazywamy **łańcuchem ergodycznym**, jeśli każdy jego stan jest stanem ergodycznym. W wielu sytuacjach łańcuchy ergodyczne mają największe znaczenie i są najbardziej pożądane. Przykład takiego łańcucha jest podany w ćwiczeniu 24.2.

Ćwiczenia do §24

- 24.1^r** (a) Przypuśćmy, że w zadaniu o pijaku, pijak zostanie wyrzucony z baru po prawej stronie natychmiast, gdy tam się pojawi. Wyznacz macierz prawdopodobieństw przejść tego łańcucha i związany z nim digraf oraz dokonaj ponownej klasifikacji stanów.
 (b) Jak zmieniłoby się rozwiązanie zadania (a), gdyby pijaka wyrzucano z *oba* barów?
- 24.2^r** Pięciu ludzi gra w kości przy okrągłym stole. Jeśli gracz rzucający kostką wyrzuci nieparzystą liczbę oczek, to przekazuje kostkę sąsiadowi z lewej, jeśli wyrzuci dwa oczka lub cztery oczka, to przekazuje kostkę sąsiadowi z prawej, jeśli wyrzuci szóstkę, to rzuca kostką jeszcze raz.
 (a) Wyznacz macierz prawdopodobieństw przejść tego łańcucha i związany z nim digraf.
 (b) Wykaż, że każdy stan jest powracający i nieokresowy i wyprowadź stąd wniosek, że ten łańcuch jest ergodyczny.
- 24.3** (a) Udowodnij, że jeśli \mathbf{P} i \mathbf{Q} są macierzami prawdopodobieństw przejść, to ich iloczyn \mathbf{PQ} jest też taką macierzą.
 (b) Jaki jest związek między digrafami związanymi z łańcuchami \mathbf{P} i \mathbf{Q} a digrafem związanym z łańcuchem \mathbf{PQ} ?
- 24.4*** (a) Udowodnij, że każdy skończony łańcuch Markowa ma co najmniej jeden stan powracający.
 (b) Wyprowadź stąd wniosek, że jeśli skończony łańcuch Markowa jest nieprzywiedlny, to każdy stan jest stanem powracającym.
 (c) Wykaż, w jaki sposób można zdefiniować nieskończone łańcuchy Markowa i skonstruuj nieskończony łańcuch Markowa, w którym każdy stan jest chwilowy.

8 Rozdział Skojarzenia, małżeństwa i twierdzenie Mengera

— i rysowały sobie różne rzeczy...
wszystkie zaczynające się na M...

LEWIS CAROLL¹

Treści tego rozdziału mają bardziej kombinatoryczny charakter niż rozdziałów poprzednich, chociaż przekonamy się, że są blisko związane z teorią grafów. Na początek omówimy twierdzenie Halla o kojarzeniu małżeństw w kilku ujęciach, a także zastosowanie tego twierdzenia do konstruowania kwadratów łacińskich i układania planów zajęć. W paragrafie 28 omówimy twierdzenie Mengera o liczbie rozłącznych dróg łączących daną parę wierzchołków grafu lub digrafu. W paragrafie 29 podamy inne sformułowanie twierdzenia Mengera, znane pod nazwą *twierdzenia o maksymalnym przepływie i minimalnym przekroju*, które ma zasadnicze znaczenie dla problemu przepływów w sieciach.

§25 Twierdzenie Halla o kojarzeniu małżeństw

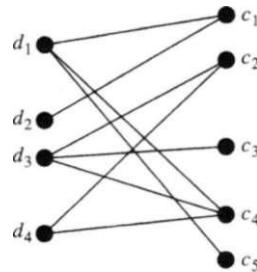
Twierdzenie o kojarzeniu małżeństw, udowodnione przez Philipa Halla w 1935 roku, daje odpowiedź na następujące pytanie, znane pod nazwą **problemu kojarzenia małżeństw**: jeśli dany jest skończony zbiór dziewcząt, z których każda zna pewną liczbę chłopców, to jakie warunki muszą być spełnione, by każda dziewczyna mogła poślubić któregoś ze znanych jej chłopców? Na przykład, jeśli mamy dane cztery dziewczyny $\{d_1, d_2, d_3, d_4\}$ i pięciu chłopców $\{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5\}$, a ich wzajemne znajomości są pokazane na rysunku 25.1, to jednym z możliwych rozwiązań jest, by dziewczyna d_1 wyszła za chłopca c_4 , d_2 poślubiła c_1 , d_3 poślubiła c_3 i wreszcie d_4 wyszła za c_2 .

To zadanie można przedstawić graficznie za pomocą grafu dwudzielnego G , w którym zbiór wierzchołków jest podzielony na dwa rozłączne zbiory V_1 i V_2 , odpowiadające dziewczętom i chłopcom, i w którym każda krawędź łączy dziewczynę z chłopcem, którego ona zna. Na rysunku 25.2 widzimy graf odpowiadający sytuacji pokazanej na rysunku 25.1.

¹Lewis Carroll, *Przygody Alicji w Krainie Czarów*, w przekładzie Roberta Stillera. W języku angielskim słowa *skojarzenie* i *małżeństwo* rozpoczynają się od litery M: *matching* oraz *marriage*; to tłumaczy wybór motta do tego rozdziału (przyp. tłum.).

dziewczyny	chłopcy, których dziewczyna zna		
d_1	c_1	c_4	c_5
d_2	c_1		
d_3	c_2	c_3	c_4
d_4	c_2		

Rysunek 25.1



Rysunek 25.2

Skojarzeniem całkowitym ze zbioru V_1 w zbiór V_2 grafu dwudzielnego $G(V_1, V_2)$ nazywamy taką wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość między wierzchołkami zbioru V_1 i wierzchołkami pewnego podzbioru zbioru V_2 , że odpowiadające sobie wierzchołki są połączone. Problem kojarzenia małżeństw może być wyrażony w języku teorii grafów w następujący sposób: jeśli $G = G(V_1, V_2)$ jest grafem dwudzielnym, to kiedy istnieje skojarzenie całkowite z V_1 do V_2 w grafie G ?

Powracając do „terminologii matrymonialnej”, zauważmy, że aby problem kojarzenia małżeństw miał rozwiązanie, dziewczęta z każdego zbioru k dziewcząt łącznie muszą znać co najmniej k chłopców dla wszystkich liczb k spełniających warunek $1 \leq k \leq m$, gdzie m jest liczbą wszystkich dziewcząt. Ten warunek będziemy nazywać **warunkiem kojarzenia małżeństw**. Jest to warunek konieczny, gdyż gdyby nie był on spełniony dla danego zbioru k dziewcząt, to już dziewczęta z tego zbioru nie mogłyby wyjść za mąż, nie mówiąc już o całym zbiorze wszystkich dziewcząt.

Zaskakujące jest to, że warunek kojarzenia małżeństw okazuje się również warunkiem wystarczającym. Mówiąc o tym twierdzenie Halla o kojarzeniu małżeństw. Ze względu na wagę tego twierdzenia podamy trzy jego dowody; pierwszy z nich pochodzi od P. Halmosa i H. E. Vaughana.

¹ **TWIERDZENIE 25.1** (Hall, 1935). Warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, by problem kojarzenia małżeństw miał rozwiązanie, jest, by dla każdego zbioru k dziewcząt, wszystkie one łącznie znały co najmniej k chłopców, gdzie $1 \leq k \leq m$.

Uwaga. Twierdzenie to, pomimo nieco frywolnego sformułowania mówiącego o kojarzeniu małżeństw, znajduje zastosowania w bardziej poważnych zagadnieniach. Na przykład podaje ono warunek konieczny i wystarczający do rozwiązania zadania o przydziiale zajęć, polegającego na przydzieleniu pracownikom zajęć zgodnie z ich kwalifikacjami. Inny przykład takiego zadania jest podany w ćwiczeniu 25.2.

Dowód. Jak zauważyliśmy wyżej, warunek ten jest konieczny. Aby dowieść, że jest on wystarczający, zastosujemy metodę indukcji względem m i założymy, że

twierdzenie jest prawdziwe, gdy liczba dziewcząt jest *mniejsza niż m* . Zauważmy, że twierdzenie jest prawdziwe, gdy $m = 1$.

Przypuśćmy teraz, że mamy m dziewcząt. Musimy rozważyć dwa przypadki.

(1) Jeśli dowolne k dziewcząt (gdzie $k < m$) zna łącznie co najmniej $k + 1$ chłopców, czyli warunek jest zawsze spełniony „z jednym chłopcem w zapasie”, to możemy wziąć którykolwiek dziewczynę i wydać ją za któregoś kolejnego chłopca spośród jej znajomych. Pierwotny warunek pozostanie prawdziwy dla pozostałych $m - 1$ dziewcząt, które można wydać za męża, co wynika z założenia indukcyjnego. W tym przypadku dowód twierdzenia jest zakończony.

(2) Jeśli istnieje teraz zbiór k dziewcząt (gdzie $k < m$), które łącznie znają *dokładnie k chłopców*, to z założenia indukcyjnego wynika, że te k dziewcząt można wydać za męża *za tych k chłopców*. Pozostanie $m - k$ dziewcząt, które trzeba wydać za męża. Ale dowolny zbiór h dziewcząt, gdzie $h \leq m - k$, spośród tych $m - k$ dziewcząt musi łącznie znać co najmniej h spośród pozostałych chłopców, gdyż w przeciwnym razie te h dziewcząt razem z poprzednimi k dziewczętami znałoby łącznie mniej niż $h + k$ chłopców, co przeczyłoby założeniu. Zatem pierwotny warunek jest spełniony dla tych $m - k$ dziewcząt. Z założenia indukcyjnego wynika, że można je wydać za męża tak, by wszyscy byli szczęśliwi i dowód twierdzenia był zakończony. ■

Możemy również sformułować twierdzenie Halla w języku skojarzeń całkowitych w grafie dwudzielnym. Przypomnijmy, że liczbę elementów zbioru S oznaczamy symbolem $|S|$.

Wniosek 25.2. *Niech $G = G(V_1, V_2)$ będzie grafem dwudzielnym i niech dla każdego podzbioru A zbioru V_1 zbiór $\varphi(A)$ będzie zbiorem tych wierzchołków należących do V_2 , które sąsiadują z co najmniej jednym wierzchołkiem ze zbioru A . Wówczas istnieje skojarzenie całkowite z V_1 do V_2 wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego podzbioru A zbioru V_1 zachodzi nierówność $|A| \leq |\varphi(A)|$.* ■

Dowód. Dowód tego wniosku polega na przetłumaczeniu powyższego dowodu na język teorii grafów. ■

Ćwiczenia do §25

25.1^r Przypuśćmy, że trzech chłopców a, b, c zna cztery dziewczęta w, x, y, z , tak jak to pokazuje rysunek 25.3.

- (a) Narysuj graf dwudzienny odpowiadający tej tabeli znajomości.
- (b) Wyznacz pięć różnych rozwiązań odpowiedniego problemu kojarzenia małżeństw.
- (c) Sprawdź prawdziwość warunku kojarzenia małżeństw w tym zadaniu.

25.2 Przedsiębiorca budowlanego, który poszukuje murarza, cieśli, hydraulika i ślusarza, otrzymuje pięć zgłoszeń: jedno od murarza, jedno od cieśli, jedno od osoby, która

chłopiec	dziewczęta, które zna chłopiec		
a	w	y	z
b	x	z	
c	x	y	

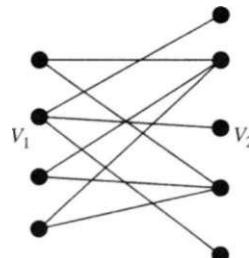
Rysunek 25.3

może pracować jako murarz i jako hydraulik oraz dwa zgłoszenia od osób, które mogą pracować jako hydraulicy i jako ślusarze.

(a) Narysuj odpowiedni graf dwudzielny.

(b) Sprawdź, że w tym przypadku spełniony jest warunek kojarzenia małżeństw. Czy wszystkie miejsca pracy mogą być obsadzone przez pracowników o odpowiednich kwalifikacjach?

25.3' Wyjaśnij, dlaczego graf pokazany na rysunku 25.4 nie ma skojarzenia całkowitego z V_1 do V_2 . Gdzie nie jest spełniony warunek kojarzenia małżeństw?



Rysunek 25.4

25.4 *Problem haremu.* Niech B będzie zbiorem chłopców i przypuśćmy, że każdy chłopiec ze zbioru B chce poślubić więcej niż jedną ze swoich ukochanych. Sformułuj warunek konieczny i wystarczający na to, by problem haremu miał rozwiązanie. (*Wskazówka:* zastęp każdego chłopca wieloma identycznymi kopiami (klonami), a następnie skorzystaj z twierdzenia Halla.)

25.5 Udowodnij, że jeśli $G = G(V_1, V_2)$ jest grafem dwudzielnym, w którym stopień każdego wierzchołka ze zbioru V_1 jest nie mniejszy niż stopień każdego wierzchołka ze zbioru V_2 , to graf G ma skojarzenia całkowite.

25.6* (a) Skorzystaj z warunku kojarzenia małżeństw, by pokazać, że jeśli każda dziewczyna zna r ($r \geq 1$) chłopców i każdy chłopiec zna r dziewcząt, to problem kojarzenia małżeństw ma rozwiązanie.
 (b) Skorzystaj z ćwiczenia (a), by dowieść, że jeśli G jest grafem dwudzielnym regularnym stopnia r , to G ma skojarzenie całkowite. Wyrowadź stąd wniosek,

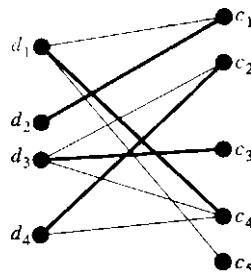
że indeks chromatyczny grafu G jest równy r . (Jest to szczególny przypadek twierdzenia 20.4.)

25.7* Przypuśćmy, że warunek kojarzenia małżeństw jest spełniony oraz że każda z m dziewcząt zna co najmniej t chłopców. Udowodnij przez indukcję względem m , że małżeństwa mogą być skojarzone na co najmniej $t!$ sposobów, jeśli $t \leq m$, a na co najmniej $t!/(t-m)!$ sposobów, jeśli $t > m$.

§26 Teoria transwersal

Ten paragraf jest poświęcony innemu dowodowi twierdzenia Halla, sformułowanemu w języku teorii transwersal. Sformułowanie go w terminologii matrymonialnej pozostawimy jako ćwiczenie.

Przypomnijmy, że w przykładzie podanym w poprzednim paragrafie (por. rys. 25.1), zbiorami chłopców, którzy są znajomymi czterech dziewcząt, były zbiory $\{c_1, c_4, c_5\}$, $\{c_1\}$, $\{c_2, c_3, c_4\}$ oraz $\{c_2, c_4\}$, a rozwiązywanie problemu kojarzenia małżeństw polegało na znalezieniu czterech różnych c , po jednym z każdego z tych zbiorów chłopców (por. rys. 26.1).



Rysunek 26.1

W ogólności, jeśli E jest niepustym zbiorem skończonym i $\mathcal{F} = (S_1, \dots, S_m)$ jest rodziną niepustych podzbiorów E (niekoniecznie różnych), to **transwersalą** rodziny \mathcal{F} nazywamy zbiór m różnych elementów zbioru E , wybranych po jednym z każdego zbioru S_i .

Niech na przykład $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ i niech

$$S_1 = S_2 = \{1, 2\}, \quad S_3 = S_4 = \{2, 3\}, \quad S_5 = \{1, 4, 5, 6\}.$$

Wtedy nie jest możliwe znalezienie pięciu różnych elementów zbioru E , po jednym z każdego zbioru S_i ; inaczej mówiąc, rodzina $\mathcal{F} = (S_1, \dots, S_5)$ nie ma transwersali. Jednakże podrozdzienna $\mathcal{F}' = (S_1, S_2, S_3, S_5)$ ma transwersalę — na przykład $\{1, 2, 3, 4\}$. Transwersalę podrodzin rodzin \mathcal{F} nazywamy **transwersalą częściową** rodzin \mathcal{F} . W tym przykładzie rodzina \mathcal{F} ma wiele częściowych trans-

wersal, na przykład $\{1, 2, 3, 6\}$, $\{2, 3, 6\}$, $\{1, 5\}$ i \emptyset . Zauważmy, że każdy podzbiór transwersalny częściowej jest transwersalą częściową.

Nasuwa się naturalne pytanie: jakie warunki powinna spełniać rodzina zbiorów, by miała transwersalę? Związek tego pytania z problemem kojarzenia małżeństw jest łatwo widoczny, gdy przyjmiemy, że zbiór E jest zbiorem chłopców, a zbiór S_i jest zbiorem tych chłopców, których zna dziewczyna d_i dla $1 \leq i \leq m$. Transwersalą jest w tym przypadku po prostu zbiór m chłopców, z których każdy jest znajomym kolejnej dziewczyny. Twierdzenie 25.1 podaje zatem warunek konieczny i wystarczający na to, by dana rodzina zbiorów miała transwersalę.

Sformułujemy twierdzenie Halla w tej postaci i podamy inny dowód, pochodzący od R. Rado. Piękno tego dowodu polega na tym, że dokonuje się go w jednym kroku, w przeciwieństwie do dowodu Halmosa i Vaughana, który wymagał rozpatrzenia dwóch przypadków. Jednak trudniej wyrazić go za pomocą intuicyjnej i przemawiającej do wyobraźni terminologii matrymonialnej!

TWIERDZENIE 26.1. *Niech E będzie niepustym zbiorem skończonym i niech $\mathcal{F} = (S_1, \dots, S_m)$ będzie rodziną niepustych podzbiorów zbioru E . Wówczas rodzina \mathcal{F} ma transwersalę wtedy i tylko wtedy, gdy suma dowolnych k podzbiorów S_i ma co najmniej k elementów (dla $1 \leq k \leq m$).*

Dowód. Konieczność tego warunku jest oczywista. Aby dowieść jego wystarczalności, pokażemy, że jeśli jeden z tych podzbiorów (na przykład S_1) ma więcej elementów niż jeden, to możemy usunąć z S_1 któryś element, nie naruszając przy tym tego warunku. Powtarzając to postępowanie, doprowadzimy w końcu do sytuacji, w której każdy podzbiór będzie miał tylko jeden element, a w tym przypadku dowód jest trywialny.

Wystarczy zatem wykazać poprawność tej „procedury redukcji”. Założymy więc, że zbiór S_1 ma elementy x i y i że usunięcie każdego z nich narusza prawdziwość warunku. Istnieją wtedy podzbiory A i B zbioru $\{2, 3, \dots, m\}$ takie, że $|P| \leq |A|$ oraz $|Q| \leq |B|$, gdzie

$$P = \bigcup_{j \in A} S_j \cup (S_1 \setminus \{x\}) \quad \text{oraz} \quad Q = \bigcup_{j \in B} S_j \cup (S_1 \setminus \{y\}).$$

Wtedy

$$|P \cup Q| = \left| \bigcup_{j \in A \cup B} S_j \cup S_1 \right| \quad \text{oraz} \quad |P \cap Q| \geq \left| \bigcap_{j \in A \cap B} S_j \right|.$$

Stąd już wynika sprzeczność, gdyż

$$\begin{aligned} |A| + |B| &\geq |P| + |Q| \\ &= |P \cup Q| + |P \cap Q| \\ &\geq \left| \bigcup_{j \in A \cup B} S_j \cup S_1 \right| + \left| \bigcap_{j \in A \cap B} S_j \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\geq (|A \cup B| + 1) + |A \cap B| \quad (\text{z warunku Halla}) \\ &= |A| + |B| + 1. \end{aligned}$$
■

Zanim przejdziemy do zastosowań twierdzenia Halla, sformułujemy dwa wnioski, które będą potrzebne w paragrafie 33. W terminologii matrymonialnej, pierwszy z tych wniosków podaje nam warunek na to, by co najmniej t dziewcząt mogło poślubić swoich znajomych.

Wniosek 26.2. *Jeśli E i \mathcal{F} są takie jak poprzednio, to rodzina \mathcal{F} ma transwersalę częściową mającą t elementów wtedy i tylko wtedy, gdy suma dowolnych k podzbiorów S_i ma co najmniej $k + t - m$ elementów.*

Szkic dowodu. Wniosek wynika z twierdzenia 26.1 zastosowanego do rodziny $\mathcal{F}' = (S_1 \cup D, \dots, S_m \cup D)$, gdzie D jest dowolnym zbiorem rozłącznym ze zbiorem E i mającym $m-t$ elementów. Zauważmy, że rodzina \mathcal{F} ma transwersalę częściową mającą t elementów wtedy i tylko wtedy, gdy rodzina \mathcal{F}' ma transwersalę. ■

Wniosek 26.3. *Jeśli E i \mathcal{F} są takie jak poprzednio i jeśli X jest dowolnym podzbiorem E , to X zawiera transwersalę częściową rodziny \mathcal{F} mającą t elementów wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego podzbioru A zbioru $\{1, \dots, m\}$*

$$\left| \left(\bigcup_{j \in A} S_j \right) \cap X \right| \geq |A| + t - m.$$

Szkic dowodu. Wniosek wynika z zastosowania poprzedniego wniosku do rodziny $\mathcal{F}_X = (S_1 \cap X, \dots, S_m \cap X)$.

Ćwiczenia do §26

26.1' Sprawdź, które z poniższych rodzin podzbiorów zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ mają transwersale, wyznacz wszystkie transwersale tych rodzin, które je mają i wyznacz wszystkie transwersale częściowe tych rodzin, które nie mają transwersal:

- (a) $(\{1\}, \{2, 3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4, 5\})$;
- (b) $(\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{4, 5\}, \{4, 5\})$;
- (c) $(\{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2\}, \{3\})$;
- (d) $(\{1, 3, 4\}, \{1, 4, 5\}, \{2, 3, 5\}, \{2, 4, 5\})$.

26.2 Powtórz ćwiczenie 26.1 dla zbioru $\{G, R, A, P, H, S\}$:

- (a) $(\{R\}, \{R, G\}, \{A, P\}, \{A, H\}, \{R, A\})$;
- (b) $(\{R\}, \{R, G\}, \{A, G\}, \{A, R\})$;
- (c) $(\{G, R\}, \{R, P, H\}, \{G, S\}, \{R, H\})$;
- (d) $(\{R, P\}, \{R, P\}, \{R, G\}, \{R\})$.

26.3* Niech E będzie zbiorem liter w słowie *MATROIDS*. Wykaż, że rodzina

$$(STAR, ROAD, MOAT, RIOT, RIDS, DAMS, MIST)$$

podzbiorów zbioru E ma dokładnie osiem transwersal.

26.4* Niech E będzie zbiorem $\{1, 2, \dots, 50\}$. Ile różnych transwersal ma rodzina

$$(\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \dots, \{50, 1\})?$$

26.5 Sprawdź prawdziwość wniosków 26.2 i 26.3 na przykładzie zbioru $E = \{a, b, c, d, e\}$, rodziny $\mathcal{F} = (\{a, c, e\}, \{b, d\}, \{b, d\}, \{b, d\})$ i zbioru $X = \{a, b, c\}$.

26.6* Niech $E = \{\diamondsuit, \heartsuit, \clubsuit, \spadesuit, \star\}$ i $\mathcal{F} = (\{\diamondsuit, \heartsuit, \clubsuit\}, \{\spadesuit, \clubsuit\}, \{\clubsuit\}, \{\spadesuit\}, \{\diamondsuit, \heartsuit, \star\})$.

- (a) Wyznacz wszystkie podrodziny rodziny \mathcal{F} , dla których warunek kojarzenia małżeństw nie jest spełniony.
- (b) Sprawdź prawdziwość wniosku 26.2.

26.7 Sformułuj

- (a) wnioski 26.2 i 26.3 w terminologii matrymonialnej;
- (b) dowód Halmosa i Vaughana twierdzenia Halla w języku teorii transwersal.

26.8* Niech E i \mathcal{F} mają dotychczasowe znaczenie, niech T_1 i T_2 będą dwiema transwersalami rodziny \mathcal{F} i niech x będzie elementem T_1 . Wykaż, że istnieje element y transwersali T_2 taki, że zbiór $(T_1 \setminus \{x\}) \cup \{y\}$ (zbiór otrzymany z T_1 przez zastąpienie elementu x elementem y) jest również transwersala rodziną \mathcal{F} . Porównaj to ćwiczenie z ćwiczeniem 9.11.

(Uzyskany wynik będzie wykorzystany w rozdziale 9.)

26.9* Rzędem $r(A)$ podzbioru A zbioru E nazywamy liczbę elementów w największej transwersali częściowej rodziny \mathcal{F} , zawartej w A . Wykaż, że

- (a) $0 \leq r(A) \leq |A|$;
- (b) jeśli $A \subseteq B \subseteq E$, to $r(A) \leq r(B)$;
- (c) jeśli $A, B \subseteq E$, to $r(A \cup B) + r(A \cap B) \leq r(A) + r(B)$.

Porównaj te wyniki z ćwiczeniem 9.12.

(Ten wynik będzie również wykorzystany w rozdziale 9).

26.10* Niech \mathcal{F} będzie rodziną składającą się z m niepustych podzbiorów zbioru E i niech A będzie podziobrem zbioru E . Stosując twierdzenie Halla do rodziny składającej się z \mathcal{F} oraz z $|E| - m$ kopii zbioru $E \setminus A$, udowodnij, że istnieje transwersala rodziny \mathcal{F} zawierająca zbiór A wtedy i tylko wtedy, gdy

- (a) rodzina \mathcal{F} ma transwersale;
- (b) zbiór A jest transwersala częściową rodziną \mathcal{F} .

(Prostszy dowód, wykorzystujący matroidy, jest podany w paragrafie 33.)

26.11* Niech E będzie zbiorem przeliczalnym i niech $\mathcal{F} = (S_1, S_2, \dots)$ będzie przeliczalną rodziną niepustych podzbiorów skończonych zbioru E .

- (a) Definiując transwersalę w naturalny sposób, udowodnij, korzystając z lematu Königa (twierdzenie 16.3), że rodziną \mathcal{F} ma transwersalę wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnej liczby naturalnej k suma dowolnych k podzbiorów S_i ma co najmniej k elementów.
- (b) Korzystając z przykładu $E = \{1, 2, 3, \dots\}$, $S_1 = E$, $S_2 = \{1\}$, $S_3 = \{2\}$, $S_4 = \{3\}$, ..., wykaż, że wynik uzyskany w ćwiczeniu (a) nie zachodzi, gdy nie wszystkie zbiory S_i są skończone.

§27 Zastosowania twierdzenia Halla

W tym paragrafie zastosujemy twierdzenie Halla do rozwiązywania zadań związanych z konstruowaniem kwadratów łacińskich, dotyczących macierzy zero-jedynkowych i dotyczących istnienia wspólnych transwersał dwóch rodzin podzbiorów danego zbioru. To ostatnie zastosowanie ma związek z układaniem planów zajęć.

Kwadraty łacińskie

Prostokątem łacińskim wymiaru $m \times n$ nazywamy macierz $\mathbf{M} = (m_{ij})$ wymiaru $m \times n$, której wyrazy są liczbami całkowitymi spełniającymi następujące warunki:

- (a) $1 \leq m_{ij} \leq n$;
- (b) żadne dwa wyrazy stojące w tym samym wierszu lub w tej samej kolumnie nie są równe.

Zauważmy, że z warunków (a) i (b) wynika, iż $m \leq n$. Jeśli $m = n$, to prostokąt łaciński nazywamy **kwadratem łacińskim**. Na przykład na rysunkach 27.1 i 27.2 widzimy prostokąt łaciński wymiaru 3×5 i kwadrat łaciński wymiaru 5×5 .

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 5 & 3 \\ 3 & 5 & 2 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 5 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Rysunek 27.1

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 5 & 3 \\ 3 & 5 & 2 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 5 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Rysunek 27.2

Jeśli mamy dany prostokąt łaciński wymiaru $m \times n$, w którym $m < n$, to kiedy możemy dołączyć do niego $n - m$ nowych wierszy w taki sposób, by powstał kwadrat łaciński? Zaskakujące jest to, że odpowiedź brzmi „zawsze”!

TWIERDZENIE 27.1. *Niech \mathbf{M} będzie prostokątem łacińskim wymiaru $m \times n$, w którym $m < n$. Wtedy prostokąt \mathbf{M} można rozszerzyć do kwadratu łacińskiego dopisując $n - m$ nowych wierszy.*

Dowód. Pokażemy, że prostokąt \mathbf{M} można rozszerzyć do prostokąta łacińskiego wymiaru $(m + 1) \times n$. Powtarzając to postępowanie otrzymamy w końcu kwadrat łaciński.

Niech $E = \{1, 2, \dots, n\}$ i niech $\mathcal{F} = (S_1, \dots, S_n)$, gdzie S_i jest zbiorem tych liczb należących do E , które *nie* występują w i -tej kolumnie prostokąta \mathbf{M} . Jeśli udowodnimy, że rodzina \mathcal{F} ma transwersalę, to dowód będzie zakończony, gdyż elementy tej transwersali tworzą szukany dodatkowy wiersz. Z twierdzenia Halla wynika, że wystarczy sprawdzić, czy suma dowolnych k zbiorów S_i ma co najmniej k elementów. Ale to jest oczywiste, gdyż taka suma zawiera $(n - m)k$ elementów, wliczając powtórzenia, a gdyby zawierała mniej niż k różnych elementów, to co najmniej jeden z nich musiałby powtórzyć się więcej niż $n - m$ razy. Ponieważ każdy element występuje dokładnie $n - m$ razy, więc mamy oczekiwana sprzeczność. ■

Macierze zero-jedynkowe

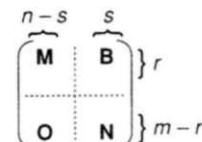
Inny sposób badania transwersal rodziny $\mathcal{F} = (S_1, \dots, S_m)$ niepustych podzbiorów zbioru $E = \{e_1, \dots, e_n\}$ polega na badaniu **macierzy incydencji** tej rodziny, to znaczy macierzy $\mathbf{A} = (a_{ij})$ wymiaru $m \times n$, w której $a_{ij} = 1$, gdy $e_j \in S_i$ i $a_{ij} = 0$ w przeciwnym razie. Taką macierz, w której każdy wyraz jest zerem lub jedynką, nazywamy **macierzą zero-jedynkową**. Jeśli **rzędem wyrazowym** macierzy \mathbf{A} nazwiemy największą liczbę jedynek, z których żadne dwie nie leżą w tym samym wierszu lub w tej samej kolumnie, to okaże się, że rodzina \mathcal{F} ma transwersalę wtedy i tylko wtedy, gdy rzad wyrazowy macierzy \mathbf{A} jest równy m . Ponadto, rzad wyrazowy macierzy \mathbf{A} jest równy liczbie elementów transwersali częściowej mającej największą możliwą liczbę elementów. Jako drugie zastosowanie twierdzenia Halla udowodnimy słynne twierdzenie dotyczące macierzy zero-jedynkowych, znane jako **twierdzenie Königa–Egerváry’ego**.

L **TWIERDZENIE 27.2** (König–Egerváry, 1931). *Rząd wyrazowy macierzy zero-jedynkowej \mathbf{A} jest równy najmniejszej liczbie μ wierszy i kolumn, które w sumie zawierają wszystkie jedynki macierzy \mathbf{A} .*

Uwaga. Dla zobrazowania powyższego twierdzenia, rozważmy macierz pokazaną na rysunku 27.3, będącą macierzą incydencji rodziny $\mathcal{F} = (S_1, S_2, S_3, S_4, S_5)$ podzbiorów zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, gdzie $S_1 = S_2 = \{1, 2\}$, $S_3 = S_4 = \{2, 3\}$, $S_5 = \{1, 4, 5, 6\}$. Oczywiście rzad wyrazowy i liczba μ są równe 4.

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
S_1	(1)	1	0	0	0	0
S_2	1	(1)	0	0	0	0
S_3	0	1	1	0	0	0
S_4	0	1	(1)	0	0	0
S_5	1	0	0	(1)	1	1

Rysunek 27.3



Rysunek 27.4

Dowód. Jest rzeczą oczywistą, że rzząd wyrazowy nie może przekroczyć liczby μ . Aby dowieść równości, możemy założyć, że wszystkie jedynki macierzy \mathbf{A} są zawarte w r wierszach i s kolumnach, gdzie $r + s = \mu$ oraz wiersze i kolumny są uporządkowane w taki sposób, że macierz \mathbf{A} zawiera w lewym dolnym rogu podmacierz wymiaru $(m - r) \times (n - s)$ złożoną z samych zer (por. rys. 27.4).

Dla $i \leq r$ niech S_i będzie zbiorem tych liczb całkowitych $j \leq n - s$, dla których $a_{ij} = 1$. Łatwo sprawdzić, że suma dowolnych k zbiorów S_i ma co najmniej k elementów, a więc rodzina $\mathcal{F} = (S_1, \dots, S_r)$ ma transwersalę. Wynika stąd, że podmacierz \mathbf{M} macierzy \mathbf{A} zawiera zbiór r jedynek, z których żadne dwie nie leżą w tym samym wierszu lub w tej samej kolumnie. Podobnie, macierz \mathbf{N} zawiera zbiór s jedynek o tej samej własności. Zatem macierz \mathbf{A} zawiera zbiór $r + s$ jedynek, z których żadne dwie nie leżą w tym samym wierszu lub w tej samej kolumnie. To dowodzi, że liczba μ nie może być większa od rzędu wyrazowego, czego należało dowieść. ■

Dowiedliśmy powyżej twierdzenia Königa–Egerváry’ego, korzystając z twierdzenia Halla. Jeszcze łatwiej można dowieść twierdzenia Halla, korzystając z twierdzenia Königa–Egerváry’ego (por. ćwiczenie 27.5). Wynika stąd, że te dwa twierdzenia są, w pewnym sensie, równoważne. Dalej w tym rozdziale udowodnimy twierdzenie Mengera i twierdzenie o maksymalnym przepływie i minimalnym przekroju; oba te twierdzenia są również równoważne twierdzeniu Halla.

Wspólne transwersale

Zakończymy ten paragraf krótkim omówieniem wspólnych transwersal. Jeśli E jest niepustym zbiorem skończonym, a $\mathcal{F} = (S_1, \dots, S_m)$ i $\mathcal{G} = (T_1, \dots, T_n)$ dwiema rodzinami niepustych podzbiorów zbioru E , to często chcemy wiedzieć, czy istnieje **wspólna transwersala** rodzin \mathcal{F} i \mathcal{G} — to znaczy zbiór m różnych elementów zbioru E , będący transwersalą dla obu rodzin \mathcal{F} i \mathcal{G} . W zagadnieniach układania planu zajęć, zbiór E może na przykład być zbiorem terminów, w których mogą się odbywać wykłady, zbiory S_i mogą być zbiorami terminów, w których danych m profesorów może wygłosić wykład, a zbiory T_i zbiorami terminów, w których dostępnych jest m danych sal wykładowych. Znalezienie

wspólnej transwersali rodzin \mathcal{F} i \mathcal{G} pozwala nam przypisać każdemu profesorowi dostępną salę wykadową w odpowiednim dla niego terminie.

Twierdzenie 27.3 podaje warunek konieczny i wystarczający na to, by dwie rodziny zbiorów miały wspólną transwersalę. Zauważmy, że sprowadza się ono do twierdzenia Halla, jeśli $T_j = E$ dla wszystkich $1 \leq j \leq m$.

TWIERDZENIE 27.3. *Niech E będzie niepustym zbiorem skończonym i niech $\mathcal{F} = (S_1, \dots, S_m)$ i $\mathcal{G} = (T_1, \dots, T_m)$ będą dwiema rodzinami niepustych podzbiorów zbioru E . Wówczas rodziny \mathcal{F} i \mathcal{G} mają wspólną transwersalę wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych podzbiorów A i B zbioru $\{1, 2, \dots, m\}$ zachodzi nierówność*

$$\left| \left(\bigcup_{i \in A} S_i \right) \cap \left(\bigcup_{j \in B} T_j \right) \right| \geq |A| + |B| - m.$$

Szkic dowodu. Rozważmy rodzinę $\mathcal{X} = \{X_i\}$ podzbiorów zbioru $E \cup \{1, \dots, m\}$ (przy założeniu, że zbiory E i $\{1, \dots, m\}$ są rozłączne), gdzie indeksy przebiegają zbiór $E \cup \{1, \dots, m\}$, taką że $X_i = S_i$ dla $i \in \{1, \dots, m\}$ oraz $X_i = \{i\} \cup \{j : j \in T_j\}$ dla $j \in E$. Nietrudno sprawdzić, że rodziny \mathcal{F} i \mathcal{G} mają wspólną transwersalę wtedy i tylko wtedy, gdy rodzina \mathcal{X} ma transwersalę. Tezę twierdzenia otrzymujemy stosując twierdzenia Halla do rodziny \mathcal{X} . ■

Nie wiemy, kiedy trzy rodziny podzbiorów danego zbioru skończonego mają wspólną transwersalę i problem znalezienia takich warunków wydaje się być bardzo trudny. W wielu próbach rozwiązania tego problemu korzystano z teorii matroidów. Istotnie, jak zobaczymy w następnym rozdziale, wiele wyników teorii transwersal, takich jak ćwiczenie 26.10 czy twierdzenie 27.3, przyjmuje znacznie prostszą postać, gdy patrzymy na nie z tego punktu widzenia. Inne wyniki dotyczące teorii transwersal można znaleźć w książce Bryanta i Perfecta [25].

Ćwiczenia do §27

27.1^r Podaj przykład prostokąta łacińskiego wymiaru 5×8 i kwadratu łacińskiego wymiaru 6×6 .

27.2^r Znajdź dwa sposoby rozszerzenia następującego prostokąta łacińskiego do kwadratu łacińskiego wymiaru 5×5 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

27.3 (a) Skorzystaj z ćwiczenia 25.7, by dowieść, że jeśli $m < n$, to prostokąt łaciński wymiaru $m \times n$ można rozszerzyć do prostokąta łacińskiego wymiaru $(m+1) \times n$ na co najmniej $(n-m)!$ sposobów.

(b) Wyprowadź stąd wniosek, że istnieje co najmniej $n!(n-1)!\dots 1!$ kwadratów łacińskich wymiaru $n \times n$.

27.4^r Sprawdź poprawność twierdzenia Königa–Egerváry’ego na przykładzie macierzy:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{oraz} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

27.5* Pokaż, w jaki sposób rozpatrując macierz zero-jedynkową jako macierz incydencji rodziny zbiorów, można wyprowadzić twierdzenie Halla z twierdzenia Königa–Egerváry’ego.

27.6^r Niech $E = \{a, b, c, d, e\}$, $\mathcal{F} = (\{a, c, e\}, \{a, b\}, \{c, d\})$ i $\mathcal{G} = (\{d\}, \{a, e\}, \{a, b, d\})$.

- (a) Wyznacz wspólną transwersalę rodzin \mathcal{F} i \mathcal{G} .
- (b) Sprawdź warunek podany w twierdzeniu 27.3.

27.7 Powtórz ćwiczenie 27.6 dla rodzin

$$\mathcal{F} = (\{a, b, d\}, \{c, e\}, \{a, e\}) \quad \text{i} \quad \mathcal{G} = (\{c, d\}, \{b\}, \{b, c, e\}).$$

27.8* Niech G będzie grupą skońzoną i H podgrupą grupy G . Skorzystaj z twierdzenia 27.3, by dowieść, że jeśli

$$G = x_1H \cup x_2H \cup \dots \cup x_mH = Hy_1 \cup Hy_2 \cup \dots \cup Hy_m$$

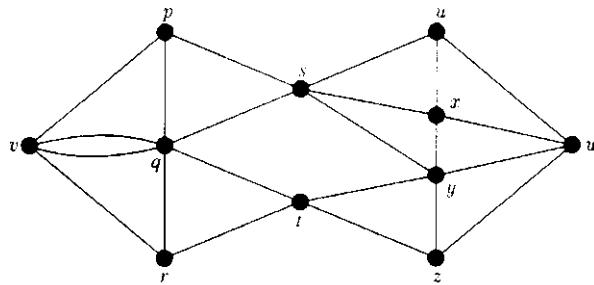
są rozkładami grupy G na sumę lewostronnych i prawostronnych warstw względem podgrupy H , to istnieją elementy z_1, \dots, z_m w G takie, że

$$G = z_1H \cup z_2H \cup \dots \cup z_mH = Hz_1 \cup Hz_2 \cup \dots \cup Hz_m$$

§28 Twierdzenie Mengera

Omówimy teraz twierdzenie ściśle związane z twierdzeniem Halla, które ma ważne zastosowania w praktyce. To twierdzenie, pochodzące od K. Mengera, dotyczy liczby dróg łączących dane dwa wierzchołki v i w grafu G . Może nas interesować maksymalna liczba dróg prowadzących z v do w , z których żadne dwie nie mają wspólnej krawędzi — takie drogi nazywamy **drogami krawędziowo rozłącznymi**. Może również nas interesować maksymalna liczba dróg prowadzących z v do w , z których żadne dwie nie mają wspólnego wierzchołka — nazywamy je **drogami wierzchołkowo rozłącznymi**. Na przykład w grafie pokazanym na rysunku 28.1 istnieją cztery drogi krawędziowo rozłączne i dwie wierzchołkowo rozłączne.

Potrzebujemy kilku następnych definicji, by zająć się tymi problemami. Przymijmy, że G jest grafem spójnym i że v i w są różnymi wierzchołkami grafu G . **Zbiorem vw -rozspajającym** grafu G nazywiemy taki zbiór krawędzi E , że



Rysunek 28.1

każda droga prowadząca z wierzchołka v do wierzchołka w przechodzi przez jakąś krawędź należącą do E . Zauważmy, że zbiór vw -rozspajający jest zbiorem rozspajającym grafu G . Podobnie, zbiorem vw -rozdzielającym grafu G nazywiemy taki zbiór S wierzchołków, różnych od v i w , że każda droga prowadząca z wierzchołka v do wierzchołka w przechodzi przez jakiś wierzchołek należący do S . Na rysunku 28.1 zbiory $E_1 = \{ps, qs, ty, tz\}$ i $E_2 = \{uw, xw, yw, zw\}$ są zbiorami vw -rozspajającymi, a zbiory $V_1 = \{s, t\}$ i $V_2 = \{p, q, y, z\}$ są zbiorami vw -rozdzielającymi.

Aby zliczyć drogi krawędziowo rozłączne z wierzchołka v do wierzchołka w , zauważmy najpierw, że jeśli E jest zbiorem vw -rozspajającym mającym k krawędzi, to liczba dróg krawędziowo rozłącznych nie może przekroczyć k , gdyż w przeciwnym razie pewna krawędź należąca do E byłaby zawarta w więcej niż jednej drodze. Jeśli zbiór E jest zbiorem vw -rozspajającym o najmniejszej możliwej liczbie elementów, to liczba dróg krawędziowo rozłącznych jest po prostu równa k i w każdej takiej drodze występuje dokładnie jedna krawędź ze zbioru E . Ten wynik jest znany jako krawędziowa wersja **twierdzenia Mengera**; został po raz pierwszy udowodniony w 1955 roku przez Forda i Fulkersona.

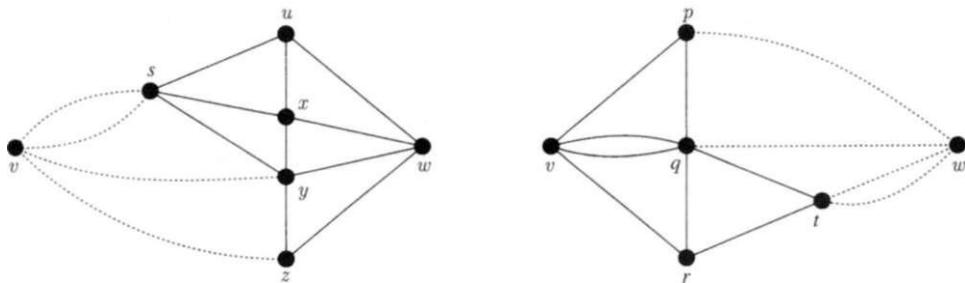
TWIERDZENIE 28.1. *Maksymalna liczba dróg krawędziowo rozłącznych łączących dwa różne wierzchołki v i w grafu spójnego jest równa minimalnej liczbie krawędzi w zbiorze vw -rozspajającym.*

Uwaga. Dowód, który podamy, jest niekonstruktywny, to znaczy nie dostarcza nam systematycznej metody otrzymywania k dróg krawędziowo rozłącznych, ani nawet nie pozwala znaleźć wartości k . Algorytm, którego można użyć do rozwiązania tych problemów, będzie podany w następnym paragrafie.

Dowód. Jak już zauważyliśmy, maksymalna liczba dróg krawędziowo rozłącznych łączących wierzchołki v i w nie może przekroczyć minimalnej liczby krawędzi w zbiorze vw -rozspajającym. Użyjemy indukcji ze względu na liczbę krawędzi grafu G , by dowieść, że te dwie liczby są równe. Przypuśćmy, że graf G ma m

krawędzi i że twierdzenie jest prawdziwe dla wszystkich grafów mających mniej niż m krawędzi. Musimy rozważyć dwa przypadki.

(1) Przypuśćmy najpierw, że istnieje zbiór vw -rozspajający E , który ma minimalną liczbę k elementów, nie wszystkie jego krawędzie są incydentne z v i nie wszystkie są incydentne z w . Na przykład w grafie pokazanym na rysunku 28.1 zbiór E_1 opisany wyżej jest takim zbiorem vw -rozspajającym. Usunięcie z grafu G krawędzi należących do E prowadzi do powstania dwóch rozłącznych podgrafów V i W , zawierających odpowiednio wierzchołki v i w . Definiujemy teraz dwa nowe grafy G_1 i G_2 w następujący sposób: graf G_1 powstaje z grafu G przez ściągnięcie każdej krawędzi grafu V (to znaczy przez ściągnięcie całego podgrafa V do wierzchołka v), a graf G_2 powstaje z G w podobny sposób przez ściągnięcie każdej krawędzi podgrafa W ; grafy G_1 i G_2 powstałe z grafu z rysunku 28.1 są pokazane na rysunku 28.2, na którym krawędzie należące do zbioru E_1 są zaznaczone liniami przerywanymi. Ponieważ grafy G_1 i G_2 mają mniej krawędzi niż graf G , a zbiór E jest zbiorem vw -rozspajającym minimalnej wielkości zarówno w G_1 , jak i w G_2 , więc z założenia indukcyjnego wynika, że istnieje k dróg krawędziowo rozłącznych z v do w w każdym z tych dwóch grafów. Żądane k dróg krawędziowo rozłącznych w grafie G otrzymujemy łącząc te drogi ze sobą w oczywisty sposób.



Rysunek 28.2

(2) Przypuśćmy teraz, że każdy zbiór vw -rozspajający mający minimalną liczbę k elementów składa się tylko z krawędzi, które są wszystkie incydentne z v lub wszystkie incydentne z w ; na przykład opisany wyżej zbiór E_2 jest takim zbiorem vw -rozspajającym w grafie z rysunku 28.1. Bez utraty ogólności możemy przyjąć, że każda krawędź grafu G jest zawarta w pewnym zbiorze vw -rozspajającym mającym k elementów, gdyż w przeciwnym razie usunięcie tej krawędzi nie zmieniłoby wartości k i moglibyśmy skorzystać z założenia indukcyjnego, by otrzymać k dróg krawędziowo rozłącznych. Jeśli P jest dowolną drogą z wierzchołka v do wierzchołka w , to P musi składać się albo z jednej krawędzi, albo z dwóch krawędzi, a więc może zawierać co najwyżej jedną krawędź należącą do dowolnego zbioru vw -rozspajającego mającego k elementów. Usuwając z grafu G krawędzie należące do P otrzymujemy graf mający na mocy założenia induk-

cyjnego co najmniej $k - 1$ dróg krawędziowo rozłącznych. Te drogi, razem z drogą P , dają żądanego k dróg w grafie G . ■

Zajmiemy się teraz drugim problemem wspomnianym na początku tego paragrafu — problemem znalezienia liczby dróg wierzchołkowo rozłącznych z wierzchołka v do wierzchołka w . Jest to dokładnie ten problem, który rozwiązał sam Menger, chociaż jego nazwisko wiąże się zazwyczaj z obydwoema twierdzeniami 28.1 i 28.2. Dowód twierdzenia 28.1 przenosi się z niewielkimi zmianami, głównie dotyczącymi zamiany takich pojęć, jak „krawędziowo rozłączne” i „incydentne” na „wierzchołkowo rozłączne” i „sąsiednie”. Możemy teraz sformułować wierzchołkową postać twierdzenia Mengera — jego dowód pominiemy.

TWIERDZENIE 28.2 (Menger, 1927). *Maksymalna liczba dróg wierzchołkowo rozłącznych łączących dwa różne wierzchołki niesąsiednie v i w w grafie jest równa minimalnej liczbie wierzchołków w zbiorze vw -rozdzielającym.*

Z twierdzeń 28.1 i 28.2 wynikają natychmiast następujące warunki konieczne i wystarczające na to, by graf był k -spójny i k -spójny krawędziowo.

WNIOSK 28.3. *Graf G jest k -spójny krawędziowo wtedy i tylko wtedy, gdy dowolne dwa różne wierzchołki G są połączone co najmniej k drogami krawędziowo rozłącznymi.*

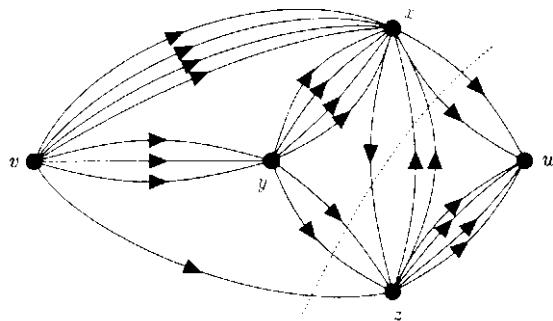
WNIOSK 28.4. *Graf G mający co najmniej $k + 1$ wierzchołków jest k -spójny wtedy i tylko wtedy, gdy dowolne dwa różne wierzchołki G są połączone co najmniej k drogami wierzchołkowo rozłącznymi.*

Powyższe rozważania można tak zmodyfikować, aby otrzymać liczbę dróg łukowo rozłącznych z wierzchołka v do wierzchołka w w digrafie; w tym przypadku możemy wziąć jako źródło v , a jako ujście w . Otrzymamy twierdzenie podobne do twierdzenia 28.1, a jego dowód jest prawie dosłownym powtórzeniem powyższego dowodu. Zauważmy, że w digrafie zbiór vw -rozspajający jest to zbiór A łuków taki, że każda droga z v do w zawiera łuk należący do A .

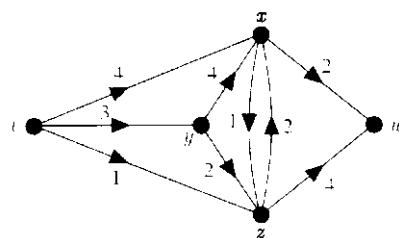
TWIERDZENIE 28.5. *Maksymalna liczba dróg łukowo rozłącznych z wierzchołka v do wierzchołka w w digrafie jest równa minimalnej liczbie łuków w zbiorze vw -rozspajającym.*

Na przykład w digrafie pokazanym na rysunku 28.3 istnieje 6 dróg łukowo rozłącznych z v do w . Odpowiedni zbiór vw -rozspajający składa się z łuków vz , xz , yz (dwukrotnie) i xw (dwukrotnie).

Takie rysunki stają się nieczytelne, gdy liczba łuków łączących pary wierzchołków zwiększa się. Aby sobie z tym poradzić, rysujemy tylko jeden łuk i piszemy obok niego rzeczywistą liczbę łuków (por. rys. 28.4). Ta pozornie nieistotna



Rysunek 28.3



Rysunek 28.4

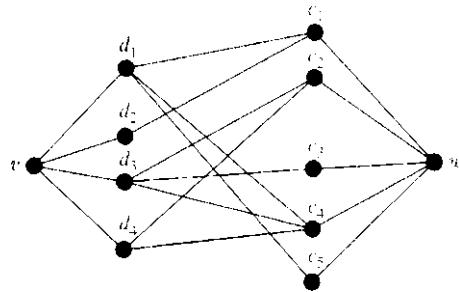
uwaga nabiera znaczenia przy badaniu przepływów w sieciach, którymi zajmiemy się w następnym paragrafie.

Na zakończenie tego paragrafu wyprowadzimy twierdzenie Halla z twierdzeniem Mengera. Udowodnimy tę wersję twierdzenia Halla, która była sformułowana w postaci wniosku 25.2.

TWIERDZENIE 28.6. *Twierdzenie Halla wynika z twierdzenia Mengera.*

Dowód. Niech $G = G(V_1, V_2)$ będzie grafem dwudzielnym. Musimy dowieść, że jeśli $|A| \leq |\varphi(A)|$ dla każdego podzbioru A zbioru V_1 , to istnieje skojarzenie całkowite z V_1 do V_2 . W tym celu zastosujemy wierzchołkową postać twierdzenia Mengera (twierdzenie 28.2) do grafu otrzymanego z grafu G przez dodanie wierzchołka v sąsiadującego ze wszystkimi wierzchołkami należącymi do V_1 i wierzchołka w sąsiadującego ze wszystkimi wierzchołkami z V_2 (por. rys. 28.5).

Ponieważ skojarzenie całkowite z V_1 do V_2 istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy liczba dróg wierzchołkowo rozłącznych z v do w jest równa liczbie elementów V_1 (niech np. $|V_1| = k$), więc wystarczy dowieść, że każdy zbiór vw -rozdzielający ma co najmniej k wierzchołków. Niech więc S będzie zbiorem vw -rozdzielającym, będącym sumą podzbioru A zbioru V_1 i podzbioru B zbioru V_2 . Ponieważ zbiór $A \cup B$ jest vw -rozdzielający, więc żadna krawędź nie może łączyć wierzchołka



Rysunek 28.5

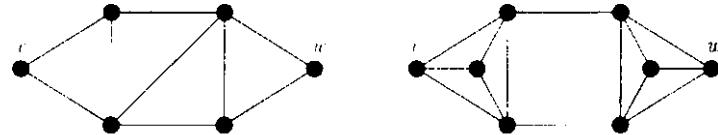
należącego do $V_1 \setminus A$ z wierzchołkiem należącym do $V_2 \setminus B$, a zatem $\varphi(V_1 \setminus A) \subseteq B$.
Stąd wynika, że

$$|V_1 \setminus A| \leq |\varphi(V_1 \setminus A)| \leq |B|,$$

a więc $|S| = |A| + |B| \geq |V_1| = k$, czego należało dowieść. ■

Ćwiczenia do §28

28.1' Sprawdź poprawność twierdzeń 28.1 i 28.2 na przykładach grafów pokazanych na rysunku 28.6.



Rysunek 28.6

28.2' Sprawdź poprawność twierdzeń 28.1 i 28.2 na przykładzie grafu Petersena w dwóch przypadkach:

- (a) gdy wierzchołki v i w są sąsiadnie,
- (b) gdy wierzchołki v i w nie są sąsiadnie.

28.3 Przeprowadź szczegółowy dowód twierdzenia 28.2.

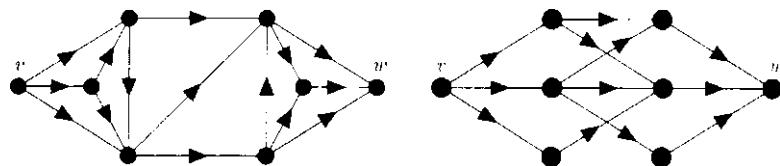
28.4' Sprawdź poprawność wniosku 28.3 na przykładzie poniższych grafów:

- (a) W_5 ,
- (b) $K_{3,4}$,
- (c) Q_3 .

28.5 Sprawdź poprawność wniosku 28.4 na przykładzie poniższych grafów:

- (a) $K_{3,5}$,
- (b) $K_{3,3,3}$,
- (c) grafu ośmiościanu.

28.6 Sprawdź poprawność twierdzenia 28.5 na przykładzie digrafów pokazanych na rysunku 28.7.

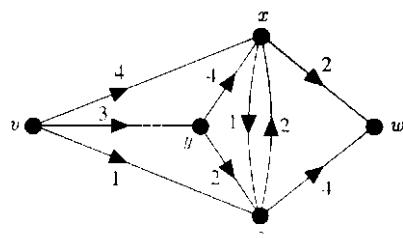


Rysunek 28.7

§29 Przepływy w sieciach

Nasze współczesne społeczeństwo jest coraz bardziej zależne od sieci — transportowych, telefonicznych itp. — i matematyczna analiza takich sieci nabiera zasadniczego znaczenia. W tym paragrafie pokażemy, że analiza sieci w zasadzie polega na badaniu digrafów.

Producent komputerów chce wysłać pewną liczbę komputerów na dany rynek. Pudełka z komputerami mogą być wysłane różnymi drogami, tak jak to pokazano na rysunku 29.1, na którym v oznacza producenta, a w oznacza rynek. Liczby stojące przy każdym łuku wskazują maksymalny ładunek, jaki może być przesyłany danym kanałem. Producent chce wiedzieć, jaką maksymalną liczbę pudełek może przesyłać tą siecią tak, aby nie przekroczyć dopuszczalnej przepustowości żadnego kanału.



Rysunek 29.1

Rysunek 29.1 może również opisywać inne sytuacje. Na przykład, jeśli każdy łuk przedstawia ulicę jednokierunkową, a liczba stojąca przy tym łuku oznacza maksymalne dopuszczalne natężenie ruchu drogowego na tej ulicy, liczone w liczbie pojazdów na godzinę, to możemy zapytać o to, jaka największa liczba pojazdów może przejechać z v do w w ciągu jednej godziny. A także, jeśli rysunek opisuje sieć elektryczną, to możemy zapytać o największe natężenie prądu, który

może bezpiecznie płynąć tą siecią, jeśli znane są natężenia prądu, przy których poszczególne przewody mogą się przepalić.

Traktując te przykłady jako motywację, definiujemy sieć N jako digraf z wagami — to znaczy digraf, w którym każdemu łukowi a jest przypisana nieujemna liczba rzeczywista $\psi(a)$, nazywana jego **przepustowością**. Stopniem wyjściowym $\text{outdeg}(x)$ wierzchołka x nazywamy sumę przepustowości łuków postaci xz ; stopień wejściowy $\text{indeg}(x)$ definiujemy podobnie. Na przykład w sieci pokazanej na rysunku 29.1 mamy równości $\text{outdeg}(v) = 8$ i $\text{indeg}(x) = 10$. Zauważmy, że lemat o uściskach dloni ma teraz postać: *suma stopni wyjściowych wierzchołków sieci jest równa sumie stopni wejściowych*.

Zakładamy, że digraf ma dokładnie jedno źródło v i jedno ujście w . Przypadek ogólny wielu źródeł i ujść, odpowiadający więcej niż jednemu producentowi i rynkowi, sprowadza się łatwo do tego szczególnego przypadku (por. ćwiczenie 29.5).

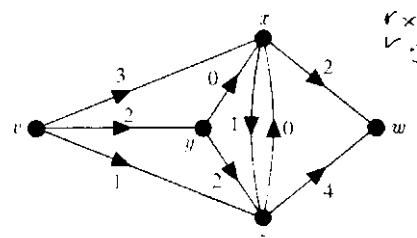
Przepływem w sieci nazywamy funkcję φ , która przypisuje każdemu łukowi a nieujemną liczbę rzeczywistą $\varphi(a)$, nazywaną **przepływem wzduż łuku a** , w taki sposób, by

(1) dla każdego łuku a zachodziła nierówność $\varphi(a) \leq \psi(a)$;

(2) stopień wejściowy i stopień wyjściowy każdego wierzchołka różnego od v i w były równe.

Zatem przepływ wzduż każdego łuku nie może przekroczyć przepustowości tego łuku oraz „całkowity przepływ” dochodzący do każdego wierzchołka różnego od v i w jest równy „całkowitemu przepływowi” wychodzącemu z tego wierzchołka. Na rysunku 29.2 widzimy jeden możliwy przepływ w sieci pokazanej na rysunku 29.1. Innym przepływem może być **przepływ zerowy**, w którym przepływ wzduż każdego łuku jest równy zero; każdy inny przepływ nazywamy **przepływem niezerowym**. Łuk a , dla którego zachodzi równość $\varphi(a) = \psi(a)$ nazywamy łukiem **nasyconym**. Na rysunku 29.2 łuki vz , xz , yz , xw i zw są nasycone, pozostałe łuki są **nienasycone**.

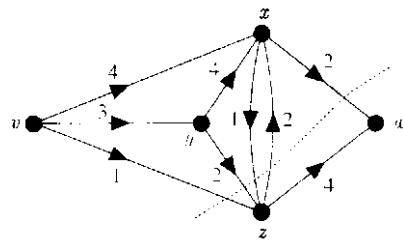
Z lematu o uściskach dloni wynika, że suma przepływów wzduż łuków wychodzących z v jest równa sumie przepływów wzduż łuków wchodzących do w ; tę sumę nazywamy **wartością przepływu**. Poprzednie przykłady pokazują, że jesteśmy głównie zainteresowani przepływami mającymi jak największą wartość,



Rysunek 29.2

czyli przepływami maksymalnymi. Można łatwo sprawdzić, że przepływ pokazany na rysunku 29.2 jest przepływem maksymalnym w sieci z rysunku 29.1 i jego wartością jest liczba 6. Pomimo, że sieć może mieć wiele przepływów maksymalnych, ich wartości muszą być równe.

Badanie przepływów maksymalnych w sieci ściśle wiąże się z pojęciem **przekroju**, czyli zbiorem A łuków takim, że każda droga z v do w musi przeходить przez pewien łuk należący do A . Zatem przekrój w sieci jest zbiorem vw -rozspajającym w odpowiednim digrafie D . **Przepustowośćą przekroju** nazywamy sumę przepustowości łuków należących do tego przekroju. Interesują nas przede wszystkim przekroje o jak najmniejszej przepustowości, tak zwane **przekroje minimalne**. Na rysunku 29.3 przekrój minimalny składa się z łuków vz , xz , yz i xw , a łuk zx nie wchodzi w skład tego przekroju; przepustowośćą tego przekroju jest $1 + 1 + 2 + 2 = 6$.



Rysunek 29.3

Zauważmy, że wartość dowolnego przepływu nie może przekroczyć przepustowości żadnego przekroju, a więc wartość dowolnego przepływu *maksymalnego* nie może przekroczyć przepustowości dowolnego przekroju *minimalnego*. Okazuje się, że te dwie liczby zawsze są równe. Ten słynny wynik, znany jako **twierdzenie o maksymalnym przepływie i minimalnym przekroju**, został po raz pierwszy udowodniony przez Forda i Fulkersona w 1955 roku. Przedstawimy dwa dowody tego twierdzenia. Pierwszy dowód pokazuje, że twierdzenie o maksymalnym przepływie i minimalnym przekroju jest równoważne twierdzeniu Mengera; drugi dowód jest bezpośredni.

TWIERDZENIE 29.1 (twierdzenie o maksymalnym przepływie i minimalnym przekroju). *W każdej sieci wartość dowolnego przepływu maksymalnego jest równa przepustowości dowolnego przekroju minimalnego.*

Uwaga. Stosowanie tego twierdzenia często polega po prostu na znalezieniu takiego przepływu i takiego przekroju, że wartość przepływu jest równa przepustowości przekroju. Z powyższego twierdzenia wynika, że ten przepływ musi być przepływem maksymalnym, a ten przekrój przekrojem minimalnym. Jeśli wszyst-

kie przepustowości są liczbami całkowitymi, to wartość przepływu jest też liczbą całkowitą; ta obserwacja okazuje się przydatna w niektórych zastosowaniach przepływów w sieciach.

Pierwszy dowód. Przypuśćmy najpierw, że przepustowość każdego łuku jest liczbą całkowitą. Wtedy sieć można traktować jak digraf D , w którym przepustowości oznaczają liczby łuków łączących różne wierzchołki (tak jak na rysunkach 28.3 i 28.4). Wartością przepływu maksymalnego jest liczba wszystkich dróg łukowo rozłącznych z v do w w digrafie D , a przepustowość przekroju minimalnego jest równa minimalnej liczbie łuków należących do zbioru vw -rozspajającego w D . Teza twierdzenia wynika teraz z twierdzenia 28.5.

Uogólnienie tego wyniku na sieci, w których przepustowości są liczbami wymiernymi sprowadza się do pomnożenia tych przepustowości przez odpowiednią liczbę całkowitą d , tak, by stały się liczbami całkowitymi. Sprowadzamy wtedy twierdzenie do przypadku rozpatrzonego wyżej i tezę otrzymujemy dzieląc z powrotem przepustowości przez d .

Wreszcie, jeśli niektóre przepustowości są liczbami niewymiernymi, to możemy przybliżyć je tak bardzo jak chcemy liczbami wymiernymi i następnie możemy zastosować udowodnione już twierdzenie. Dobierając starannie te liczby wymierne, możemy uzyskać to, że wartość dowolnego przepływu maksymalnego i przepustowość dowolnego przekroju minimalnego zmieniają się o wielkość tak małą, jak tylko zechcemy. Warto też zauważyć, że w zastosowaniach praktycznych przepustowości niewymierne występują rzadko, gdyż są zazwyczaj podawane w postaci ułamków dziesiętnych. ■

Drugi dowód. Ponieważ wartość dowolnego przepływu maksymalnego nie może przekroczyć przepustowości dowolnego przekroju minimalnego, więc wystarczy dowieść istnienia przekroju, którego przepustowość jest równa wartości danego przepływu maksymalnego.

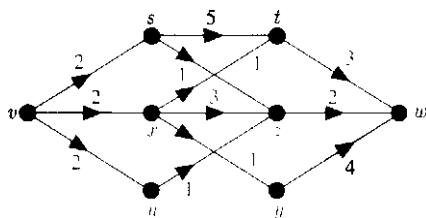
Niech φ będzie przepływem maksymalnym. Definiujemy dwa zbiory V i W wierzchołków sieci w następujący sposób. Jeśli G jest szkieletem digrafa D sieci, to wierzchołek z należy do V wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje w grafie G droga $v = v_0 \rightarrow v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_{m-1} \rightarrow v_m = z$ taka, że każda krawędź $v_i v_{i+1}$ odpowiada albo łukowi nienasyconemu $v_i v_{i+1}$, albo łukowi $v_{i+1} v_i$ z niezerowym przepływem. Zbiór W składa się z pozostałych wierzchołków, które nie należą do V . Na przykład w sieci pokazanej na rysunku 29.2 zbiór V składa się z wierzchołków v , x i y , a zbiór W z wierzchołków z i w .

Oczywiście wierzchołek v należy do V . Pokażemy, że wierzchołek w należy do zbioru W . Gdyby tak nie było, to wierzchołek w należałby do zbioru V , a więc istniałaby w grafie G droga $v \rightarrow v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_{m-1} \rightarrow w$ mająca powyżej określone własności. Wybieramy teraz liczbę dodatnią ε nie większą od liczby potrzebnej do nasycenia każdego nienasyconego łuku $v_i v_{i+1}$ i nie większej od przepływu wzduż dowolnego łuku $v_{i+1} v_i$ takiego, który ma niezerowy prze-

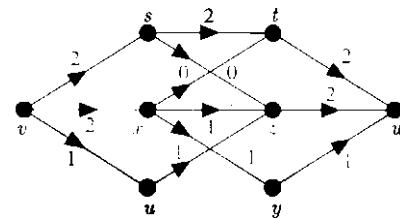
pływ. Teraz można łatwo zauważyc, że jeśli zwiększymy o ε przepływ wzdłuż łuków pierwszego z tych dwóch typów i zmniejszymy o ε przepływ wzdłuż łuków drugiego z tych typów, to wartość przepływu wzrośnie o ε , co przeczyłoby założeniu, że φ jest przepływem maksymalnym. A więc wierzchołek w należy do zbioru W .

Aby zakończyć dowód, weźmiemy zbiór E wszystkich łuków postaci xz , gdzie x należy do zbioru V , a z należy do zbioru W . Oczywiście zbiór E jest przekrojem. Ponadto każdy łuk xz należący do E jest nasycony, a każdy łuk zx ma niezerowy przepływ, gdyż w przeciwnym razie wierzchołek z również należałby do zbioru V . Stąd wynika, że przepustowość E musi być równa wartości φ , a więc E jest szukanym przekrojem minimalnym. ■

Twierdzenie o maksymalnym przepływie i minimalnym przekroju stanowi dogodny test maksymalności danego przepływu w przypadku, gdy sieć jest dość prosta. W praktyce sieci, z którymi mamy do czynienia, są rozległe i skomplikowane i zazwyczaj trudno jest znaleźć bezpośrednio przepływ maksymalny. Większość metod poszukiwania przepływów maksymalnych polega na tworzeniu dróg powiększających przepływ z wierzchołka v do wierzchołka w . Te drogi składają się wyłącznie z luków nienasyconych xz i z luków zx mających niezerowy przepływ. Przyjrzyjmy się na przykład sieci pokazanej na rysunku 29.4.



Rysunek 29.4



Rysunek 29.5

Na początku bierzemy przepływ zerowy. Następnie konstruujemy drogi powiększające przepływ: $v \rightarrow s \rightarrow t \rightarrow w$, wzdłuż której możemy zwiększyć przepływ o 2, $v \rightarrow x \rightarrow z \rightarrow w$, wzdłuż której możemy zwiększyć przepływ o 2 i wreszcie $v \rightarrow u \rightarrow z \rightarrow x \rightarrow y \rightarrow w$, wzdłuż której możemy zwiększyć przepływ o 1. Otrzymamy przepływ o wartości 5 pokazany na rysunku 29.5.

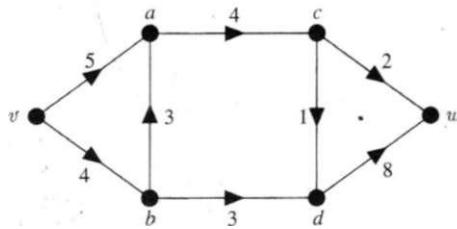
Ponieważ sieć ma przekrój o przepustowości 5, więc znaleziony wyżej przepływ jest maksymalny, a ten przekrój jest przekrejem minimalnym.

W tym paragrafie mogliśmy zaledwie powierzchownie potraktować ten ważny i urozmaicony temat. Jeśli Czytelnik zechce pogłębić swoją wiedzę na ten temat, to może sięgnąć do książki Lawlera [17].

Ćwiczenia do §29

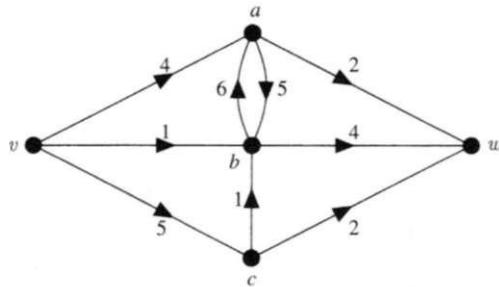
29.1^r Rozważmy sieć pokazaną na rysunku 29.6.

- (a) Wyznacz wszystkie przekroje w tej sieci i znajdź przekrój minimalny.
- (b) Znajdź przepływ maksymalny i sprawdź, że twierdzenie o maksymalnym przepływie i minimalnym przekroju jest prawdziwe.



Rysunek 29.6

29.2 Powtórz ćwiczenie 29.1 dla sieci pokazanej na rysunku 29.7.

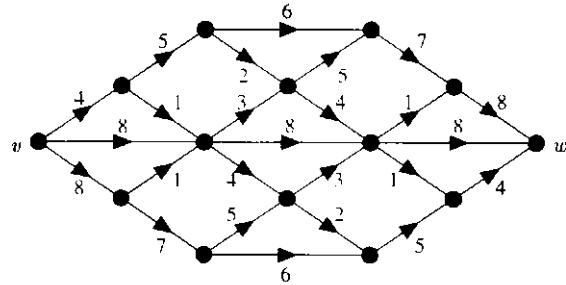


Rysunek 29.7

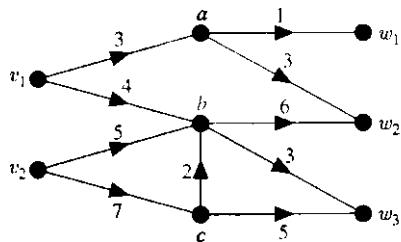
29.3^r Sprawdź, że twierdzenie o maksymalnym przepływie i minimalnym przekroju jest prawdziwe na przykładzie sieci pokazanej na rysunku 22.8.

29.4 Znajdź przepływ o wartości 20 w sieci pokazanej na rysunku 29.8. Czy jest to przepływ maksymalny?

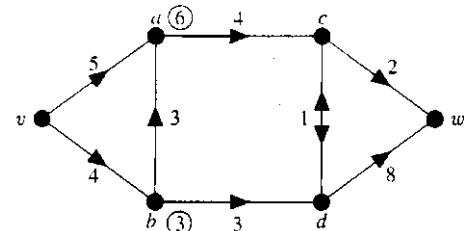
- 29.5^r** (a) Pokaż, w jaki sposób analiza przepływów w sieci mającej wiele źródeł i ujścia może być sprowadzona do podstawowego przypadku, dzięki dodaniu jednego nowego źródła i jednego nowego ujścia.
 (b) Zilustruj swoją odpowiedź na pytanie (a) przykładem sieci pokazanej na rysunku 29.9.



Rysunek 29.8



Rysunek 29.9



Rysunek 29.10

- 29.6** (a) W jaki sposób można sprowadzić do przypadku podstawowego zadanie o przepływie w sieci, w której pewne łuki są zastąpione krawędziami dopuszczającymi przepływ w obydwu kierunkach i pewne wierzchołki mają podaną „przepustowość” wskazującą maksymalny przepływ przez te wierzchołki?
 (b) Zilustruj swoją odpowiedź na pytanie (a) przykładem sieci pokazanej na rysunku 29.10.

- 29.7*** Pokaż, w jaki sposób można skorzystać z twierdzenia o maksymalnym przepływie i minimalnym przekroju, by dowieść
 (a) twierdzenia Halla;
 (b) twierdzenia 27.3 o wspólnych transwersalach.

9 Rozdział Matroidy

*Największe z ziemskich dobrodziejstw,
niezależność.*

EDWARD GIBBON

W tym rozdziale zajmiemy się nieoczekiwanyem podobieństwem między pewnymi wynikami teorii grafów i ich odpowiednikami w teorii transwersal, pokazanym w ćwiczeniach 9.11 i 26.8 lub 9.12 i 26.9. W tym celu wprowadzimy pojęcie matroidu, badane po raz pierwszy w 1935 roku w pionierskiej pracy Hasslera Whitneya. Jak zobaczymy, matroid jest zbiorem z określona na nim „strukturą niezależności”, a to pojęcie niezależności uogólnia pojęcie niezależności w teorii grafów, zdefiniowane w ćwiczeniu 5.13, i pojęcie liniowej niezależności wektorów w algebrze liniowej. Ćwiczenie 26.8 pokazuje związek z teorią transwersal.

W paragrafie 32 definiujemy pojęcie dualności dla matroidów w taki sposób, by wyjaśnić podobieństwo między własnościami cykli i rozcięć w grafach. Nieintuicyjna definicja grafu abstrakcyjnie dualnego z paragrafu 15 staje się naturalną konsekwencją dualności matroidów. W ostatnim paragrafie pokazujemy, w jaki sposób można używać matroidów do otrzymywania „łatwy” dowodów w teorii transwersal i na koniec pokazujemy dwa dowody głębokich twierdzeń teorii grafów, w których wykorzystujemy matroidy. Wszędzie, gdzie tylko będzie to możliwe w tym rozdziale, będziemy formułować twierdzenia bez dowodów. Pominione tu dowody może Czytelnik znaleźć w książkach Oxleya [34] i Welsha [37].

§30 Wprowadzenie do matroidów

W paragrafie 9 zdefiniowaliśmy drzewo spinające w grafie spójnym G jako spójny podgraf grafu G , nie zawierający cykli i zawierający każdy wierzchołek G . Zauważmy, że drzewo spinające nie może zawierać innego drzewa spinającego jako podgrafa właściwego. Widzieliśmy również w ćwiczeniu 9.11, że jeśli B_1 i B_2 są drzewami spinającymi grafu G i e jest krawędzią drzewa B_1 , to możemy znaleźć taką krawędź f drzewa B_2 , że $(B_1 \setminus \{e\}) \cup \{f\}$ (tzn. graf powstałý z B_1 przez zastąpienie krawędzi e krawędzią f) jest również drzewem spinającym grafu G .

Podobne twierdzenia zachodzą również w algebrze liniowej i w teorii transwersal. Jeśli V jest przestrzenią liniową oraz B_1 i B_2 są bazami przestrzeni V i jeśli e jest elementem bazy B_1 , to możemy znaleźć element f bazy B_2 taki,

że zbiór $(B_1 \setminus \{e\}) \cup \{f\}$ jest również bazą przestrzeni V . Podobne twierdzenie w teorii transwersal jest podane w ćwiczeniu 26.8.

Te przykłady uzasadniają naszą pierwszą definicję matroidu.

Matroid M składa się z niepustego zbioru skończonego E i niepustej rodziny \mathcal{B} podzbiorów zbioru E , nazywanych **bazami**, spełniającej następujące warunki:

- $\mathcal{B}(1)$ żadna baza nie zawiera innej bazy jako podzbiór właściwego;
- $\mathcal{B}(2)$ jeśli B_1 i B_2 są bazami i e jest dowolnym elementem bazy B_1 , to istnieje element f w bazie B_2 taki, że zbiór $(B_1 \setminus \{e\}) \cup \{f\}$ jest również bazą.

Korzystając wielokrotnie z warunku $\mathcal{B}(2)$, możemy łatwo pokazać, że każde dwie bazy matroidu M mają tyle samo elementów (por. ćwiczenie 30.5). Tę liczbę elementów bazy nazywamy **rzędem** matroidu M .

Jak już widzieliśmy wyżej, z każdym grafem G można związać pewien matroid, przyjmując za E zbiór krawędzi grafu G i biorąc jako bazy zbiory krawędzi lasów spinających grafu G . Ze względów, które staną się zrozumiałe później, ten matroid nazwiemy **matroidem cyklicznym** grafu G i oznaczmy symbolem $M(G)$. Podobnie, jeśli E jest skończonym zbiorem wektorów przestrzeni liniowej V , to definiujemy matroid na zbiorze E , biorąc jako bazy wszystkie liniowo niezależne podzbiory zbioru E rozpinające tę samą podprzestrzeń liniową co cały zbiór E . Matroid otrzymany w ten sposób nazywamy **matroidem wektorowym**. Takimi matroidami zajmiemy się później.

Podzbiór zbioru E nazywamy **podzbiorem niezależnym**, jeśli jest zawarty w pewnej bazie matroidu M . W przypadku matroidów wektorowych podzbiór zbioru E jest niezależny wtedy, gdy jego elementy są liniowo niezależnymi wektorami odpowiedniej przestrzeni liniowej. W matroidzie cyklicznym $M(G)$ grafu G zbiarami niezależnymi są te zbiory krawędzi grafu G , które nie zawierają cykli — inaczej mówiąc są to zbiory krawędzi lasów zawartych w grafie G .

Ponieważ bazy matroidu M są maksymalnymi zbiarami niezależnymi (to znaczy takimi zbiarami niezależnymi, które nie są zawarte w większych zbiorach niezależnych), więc matroid jest wyznaczony jednoznacznie przez rodzinę jego podzbiorów niezależnych. Pojawia się naturalne pytanie o to, czy istnieje prosta definicja matroidu korzystająca wyłącznie ze zbiorów niezależnych. Jedną taką definicję podajemy niżej. Dowód równoważności tej definicji i definicji podanej wyżej można znaleźć w książce Welsha [37].

Matroid M składa się z niepustego zbioru skończonego E i niepustej rodziny \mathcal{I} podzbiorów zbioru E (nazywanych **zbiarami niezależnymi**), spełniającej następujące warunki:

- $\mathcal{I}(1)$ każdy podzbiór zbioru niezależnego jest zbiorem niezależnym;
- $\mathcal{I}(2)$ jeśli I i J są zbiarami niezależnymi oraz $|J| > |I|$, to istnieje element e zbioru J , nie należący do zbiuru I i taki, że zbiór $I \cup \{e\}$ jest niezależny.

Przyjmując tę definicję matroidu, definiujemy **bazę** jako maksymalny zbiór niezależny. Korzystając wielokrotnie z warunku $\mathcal{I}(2)$, dowodzimy wtedy, że każdy zbiór niezależny można rozszerzyć do bazy.

Jeśli $M = (E, \mathcal{I})$ jest matroidem zdefiniowanym za pomocą zbiorów niezależnych, to podzbiór zbioru E nazywamy zbiorem **zależnym**, jeśli nie jest niezależny, a minimalny zbiór zależny nazywamy **cyklem**. Jeśli $M(G)$ jest matroidem cyklicznym grafu G , to cyklami matroidu $M(G)$ są dokładnie cykle grafu G . Ponieważ podzbiór zbioru E jest niezależny wtedy i tylko wtedy, gdy nie zawiera cykli, matroid można zdefiniować za pomocą jego cykli. Jedna z takich definicji, uogólniająca na matroidy wynik ćwiczenia 5.11, jest podana w ćwiczeniu 30.7.

Zanim przejdziemy do przykładów matroidów, podamy jeszcze jedną definicję matroidu. Ta definicja, korzystająca z funkcji rzędu r , jest w zasadzie tą samą definicją, którą podał Whitney.

Jeśli $M = (E, \mathcal{I})$ jest matroidem zdefiniowanym za pomocą zbiorów niezależnych i jeśli A jest podziobrem zbioru E , to **rzędem** zbioru A , oznaczanym symbolem $r(A)$, nazywamy liczbę elementów największego zbioru niezależnego zawartego w A . Zauważmy, że zdefiniowany wyżej rząd matroidu M jest równy $r(E)$.

Ponieważ podzbiór A zbioru E jest niezależny wtedy i tylko wtedy, gdy $r(A) = |A|$, więc możemy zdefiniować matroid tylko za pomocą funkcji rzędu.

TWIERDZENIE 30.1. *Matroid składa się z niepustego zbioru skończonego E i funkcji o wartościach całkowitych, określonej na zbiorze wszystkich podzbiorów zbioru E , spełniającej następujące warunki:*

- r(1) $0 \leq r(A) \leq |A|$ dla każdego podzbioru A zbioru E ;
- r(2) jeśli $A \subseteq B \subseteq E$, to $r(A) \leq r(B)$;
- r(3) dla dowolnych $A, B \subseteq E$ zachodzi nierówność $r(A \cup B) + r(A \cap B) \leq r(A) + r(B)$.

Uwaga. To twierdzenie uogólnia na przypadek matroidów rezultaty uzyskane w ćwiczeniach 9.12 i 26.9.

Dowód. Zakładamy najpierw, że M jest matroidem zdefiniowanym za pomocą zbiorów niezależnych. Chcemy dowieść warunków r(1)–r(3). Oczywiście warunki r(1) i r(2) są trywialne. Aby dowieść r(3), bierzemy bazę X zbioru $A \cap B$ (tzn. maksymalny podzbiór niezależny tego zbioru). Ponieważ X jest podziobrem niezależnym zbioru A , więc można rozszerzyć go do bazy Y zbioru A , a następnie (w podobny sposób) do bazy Z zbioru $A \cup B$. Ponieważ zbiór $X \cup (Z \setminus Y)$ jest oczywiście niezależnym podziobrem zbioru B , więc

$$\begin{aligned} r(B) &\geq r(X \cup (Z \setminus Y)) \\ &= |X| + |Z| - |Y| \\ &= r(A \cap B) + r(A \cup B) - r(A), \end{aligned}$$

czego należało dowieść.

Na odwrót, niech $M = (E, r)$ będzie matroidem zdefiniowanym za pomocą funkcji rzędu i przyjmijmy, że podzbiór A zbioru E jest niezależny wtedy i tylko

wtedy, gdy $r(A) = |A|$. Można wtedy łatwo dowieść warunku $\mathcal{I}(1)$. Aby dowieść $\mathcal{I}(2)$, bierzemy dwa zbiory niezależne I i J takie, że $|J| > |I| = k$ i zakładamy, że $r(I \cup \{e\}) = k$ dla każdego elementu e należącego do J i nie należącego do I . Jeśli e i f są dwoma takimi elementami, to

$$r(I \cup \{e\} \cup \{f\}) \leq r(I \cup \{e\}) + r(I \cup \{f\}) - r(I) = k.$$

Wynika stąd, że $r(I \cup \{e\} \cup \{f\}) = k$. Powtarzamy to postępowanie, dodając za każdym razem jeden nowy element zbioru J . Ponieważ przez cały czas rzad jest równy k , więc ostatecznie otrzymujemy $r(I \cup J) = k$, a więc na mocy $r(2)$ mamy $r(J) \leq k$, co jest sprzeczne z założeniem o J . Zatem istnieje element f zbioru J , nie należący do I i taki, że $r(I \cup \{f\}) = k + 1$. ■

Zakończymy ten paragraf dwiema następnymi definicjami. **Pętlą** w matroidzie M nazywamy element e zbioru E taki, że $r(\{e\}) = 0$, a parą elementów równoległych matroidu M nazywamy parę $\{e, f\}$ elementów zbioru E , nie będących pętlami i takich, że $r(\{e, f\}) = 1$. Zauważmy, że jeśli M jest matroidelem cyklicznym grafu G , to pętle i elementy równoległe matroidu M odpowiadają pętlom i krawędziom wielokrotnym grafu G .

Ćwiczenia do §30

30.1 Niech $E = \{a, b, c, d, e\}$. Wyznacz matroidy na zbiorze E , w których

- (a) jedyną bazą jest zbiór E ;
- (b) jedyną bazą jest zbiór pusty \emptyset ;
- (c) bazami są te podzbiory zbioru E , które mają dokładnie trzy elementy.

Dla każdego z tych matroidów wyznacz zbiory niezależne, cykle (o ile istnieją) i funkcję rzędu.

(Na to pytanie udzielimy odpowiedzi w następnym paragrafie.)

30.2 Niech G_1 i G_2 będą grafami pokazanymi na rysunku 30.1. Wyznacz bazy, cykle i zbiory niezależne w matroidach cyklicznych $M(G_1)$ i $M(G_2)$.



Rysunek 30.1

30.3 Niech M będzie matroidelem na zbiorze $E = \{a, b, c, d\}$, którego bazami są zbiory $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{a, d\}$, $\{b, c\}$, $\{b, d\}$ i $\{c, d\}$. Wyznacz cykle matroidu M i wyrowadź wniosek, że nie istnieje graf G , którego matroidelem cyklicznym byłby matroid M .

30.4 Niech $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ i niech $\mathcal{F} = (S_1, S_2, S_3, S_4, S_5)$, gdzie

$$S_1 = S_2 = \{1, 2\}, \quad S_3 = S_4 = \{2, 3\}, \quad S_5 = \{1, 4, 5, 6\}.$$

- (a) Wyznacz transwersale częściowe rodziny \mathcal{F} i sprawdź, że tworzą one zbiory niezależne pewnego matroidu na zbiorze E .
- (b) Wyznacz bazy i cykle tego matroidu.

30.5 Skorzystaj z warunków $\mathcal{B}(1)$ i $\mathcal{B}(2)$, by dowieść, że

- (a) każde dwie bazy matroidu na zbiorze E mają tyle samo elementów;
- (b) jeśli $A \subseteq E$, to dowolne dwa maksymalne niezależne podzbiory zbioru A mają tyle samo elementów.

30.6 Pokaż, w jaki sposób definicję fundamentalnego zbioru cykli w grafie można uogólnić na matroidy.

30.7* Wykaż, że matroid M można zdefiniować w następujący sposób:

matroid składa się z niepustego zbioru skończonego E i rodziny \mathcal{C} niepustych podzbiorów zbioru E (nazywanych cyklami) spełniającej następujące warunki:
 $\mathcal{C}(1)$ żaden cykl nie zawiera innego cyklu jako podzbioru właściwego;
 $\mathcal{C}(2)$ jeśli C_1 i C_2 są dwoma różnymi cyklami zawierającymi ten sam element e , to istnieje cykl zawarty w $C_1 \cup C_2$ nie zawierający e .

30.8* (a) Skorzystaj z ćwiczenia 5.11, by dowieść, że rozcięcia w grafie spełniają warunki $\mathcal{C}(1)$ i $\mathcal{C}(2)$ z ćwiczenia 30.7.

- (b) Wyznacz bazy odpowiednich matroidów dla grafów pokazanych na rysunku 30.1.

30.9* Sformułuj i udowodnij twierdzenie analogiczne do twierdzenia 11.1 (o algorytmie zachłannym) dla matroidów.

§31 Przykłady matroidów

W tym paragrafie zbadamy szereg ważnych typów matroidów.

Matroidy trywialne

Mając dany niepusty zbiór skończony E , możemy zdefiniować na nim matroid, którego jedynym zbiorem niezależnym jest zbiór pusty \emptyset . Ten matroid nazywamy **matroidem trywialnym** na zbiorze E ; ma on rząd równy 0.

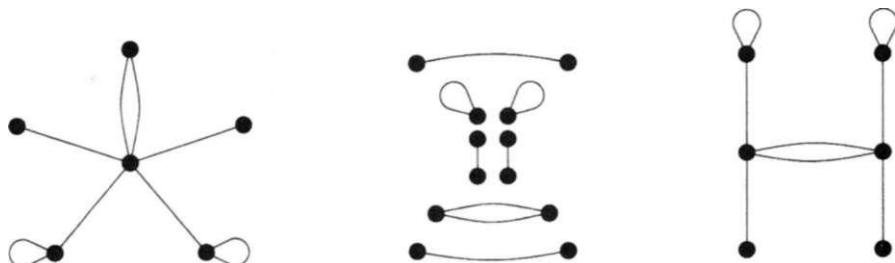
Matroidy dyskretne

Z drugiej strony mamy **matroid dyskretny** na zbiorze E , w którym każdy podzbiór zbioru E jest zbiorem niezależnym. Zauważmy, że matroid dyskretny na zbiorze E ma tylko jedną bazę, mianowicie sam zbiór E , a rzędem dowolnego podzbioru A jest liczba elementów $|A|$.

Matroidy jednorodne

Poprzednie przykłady są szczególnymi przypadkami tak zwanych **matroidów k -jednorodnych** na zbiorze E , w których bazami są te podzbiory zbioru E , które mają dokładnie k elementów; matroid trywialny na zbiorze E jest 0 -jednorodny, a matroid dyskretny jest $|E|$ -jednorodny. Zauważmy, że zbiorami niezależnymi są te podzbiory zbioru E , które mają nie więcej niż k elementów, a rzędem dowolnego podzbioru A zbioru E jest mniejsza z liczb $|A|$ i k .

Zanim zajmiemy się dokładniej przykładami opisanyimi w poprzednim paragrafie, nazwiemy dwa matroidy M_1 i M_2 **izomorficznymi**, jeśli istnieje wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość między zbiorami E_1 i E_2 , na których są one określone, zachowująca pojęcie niezależności. To znaczy, że zbiór elementów zbioru E_1 jest niezależny w matroidzie M_1 wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór odpowiadających im elementów zbioru E_2 jest zbiorem niezależnym w matroidzie M_2 . Na przykład matroidy cykliczne trzech grafów pokazanych na rysunku 31.1 są izomorficzne. Zauważmy też, że chociaż izomorfizm matroidów zachowuje cykle, rozcięcia i liczbę krawędzi grafu, to nie musi zachowywać spójności, liczby wierzchołków ani stopni wierzchołków.



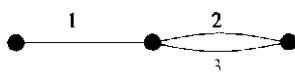
Rysunek 31.1

Korzystając z pojęcia izomorfizmu, możemy zdefiniować matroidy grafowe, reprezentowalne i transwersalne.

Matroidy grafowe

Jak już widzieliśmy w poprzednim paragrafie, możemy zdefiniować matroid $M(G)$ na zbiorze krawędzi grafu G , przyjmując, że cyklami matroidu są cykle grafu G .

Matroid $M(G)$ nazywamy matroidem cyklicznym grafu G , a jego funkcją rzędu jest funkcja rzędu rozcięcia ξ (por. ćwiczenie 9.12). Nasuwa się naturalne pytanie, czy dany matroid M jest matroidem cyklicznym pewnego grafu? Inaczej mówiąc, czy istnieje graf G taki, że matroid M jest izomorficzny z matroidem $M(G)$? Takie matroidy nazywamy matroidami grafowymi i w następnym paragrafie poznamy ich charakteryzację. Na przykład, matroid M na zbiorze $\{1, 2, 3\}$, którego bazami są zbiory $\{1, 2\}$ i $\{1, 3\}$, jest matroidem grafowym izomorficznym z matroidem cyklicznym grafu pokazanego na rysunku 31.2. Prostym przykładem matroidu niegrafowego jest 2-jednorodny matroid na zbiorze czteroelementowym (por. ćwiczenie 30.3).



Rysunek 31.2

Sprzężone matroidy grafowe

Dla danego grafu G matroid $M(G)$ nie jest jedynym matroidem, który możemy zdefiniować na zbiorze krawędzi grafu G . Ze względu na podobieństwo własności cykli i rozcięć grafu możemy skonstruować matroid, przyjmując, że jego cyklami są rozcięcia grafu G . Widzieliśmy w ćwiczeniu 30.8, że w ten sposób rzeczywiście dostajemy matroid, który będziemy nazywać matroidem rozcięć grafu G i oznaczać symbolem $M^*(G)$. Zauważmy, że dowolny zbiór krawędzi grafu G jest zbiorem niezależnym wtedy i tylko wtedy, gdy nie zawiera żadnego rozcięcia grafu G . Matroid M nazywamy sprzężonym matroidem grafowym, jeśli istnieje graf G taki, że matroid M jest izomorficzny z matroidem $M^*(G)$. Uzasadnienie nazwy „sprzężony matroid grafowy” będzie podane w następnym paragrafie.

Matroidy planarne

Matroid będący jednocześnie matroidem grafowym i sprzężonym matroidem grafowym nazywamy matroidem planarnym. W następnym paragrafie pokażemy związki między matroidami planarnymi i grafami planarnymi.

Matroidy reprezentowalne

Ponieważ definicja matroidu jest w znacznym stopniu motywowana liniową niezależnością wektorów w przestrzeni liniowej, więc interesujące jest badanie tych matroidów, które powstają jako matroidy wektorowe z pewnego zbioru wektorów w przestrzeni liniowej. Mówimy, że dany matroid M na zbiorze E jest reprezentowalny nad ciałem F , jeśli istnieje przestrzeń liniowa V nad F i przekształcenie

φ z E do V takie, że podzbiór A zbioru E jest niezależny w matroidzie M wtedy i tylko wtedy, gdy przekształcenie φ jest różnowartościowe na zbiorze A i zbiór $\varphi(A)$ jest liniowo niezależny w przestrzeni V . Inaczej mówiąc, jeśli pominiemy pętle i elementy równoległe, to matroid M będzie izomorficzny z matroidem wektorowym określonym w pewnej przestrzeni liniowej nad ciałem F . Mówimy krócej, że matroid M jest **reprezentowalny**, jeśli istnieje ciało F takie, że matroid M jest reprezentowalny nad F .

Okazuje się, że pewne matroidy są reprezentowalne nad każdym ciałem (tzw. **matroidy regularne**), niektóre nie są reprezentowalne nad żadnym ciałem, a inne są reprezentowalne nad pewną ograniczoną klasą ciał. Szczególne znaczenie mają **matroidy binarne**, reprezentowalne nad ciałem reszt modulo 2. Na przykład, jeśli G jest dowolnym grafem, to jego matroid cykliczny $M(G)$ jest matroidem binarnym. Aby się o tym przekonać, zwiążmy z każdą krawędzią grafu G odpowiadający jej wiersz macierzy incydencji tego grafu, traktowany jako wektor o współrzędnych 0 lub 1. Zauważmy, że jeśli jakiś zbiór krawędzi grafu G tworzy cykl, to suma (modulo 2) odpowiadających im wektorów jest wektorem zerowym.

Matroidem binarnym, nie będącym ani matroidem grafowym, ani sprzężonym matroidem grafowym, jest matroid Fano, opisany na końcu tego paragrafu.

Matroidy transwersalne

Nasz następny przykład pokazuje związek między matroidami i teorią transwersal. Przypomnijmy z ćwiczeń 26.8, 26.9 i 30.4, że jeśli E jest niepustym zbiorem skończonym i jeśli $\mathcal{F} = (S_1, \dots, S_m)$ jest rodziną niepustych podzbiorów zbioru E , to częściowe transwersale rodziny \mathcal{F} mogą być wybrane jako zbiory niezależne matroidu na zbiorze E , oznaczanego symbolem $M(\mathcal{F})$ lub $M(S_1, \dots, S_m)$. Dowolny matroid otrzymany w ten sposób (przy odpowiednim doborze zbioru E i rodziny \mathcal{F}) nazywamy **matroidem transwersalnym**. Na przykład opisany wyżej matroid grafowy M jest matroidem transwersalnym na zbiorze $\{1, 2, 3\}$, gdyż jego zbiory niezależne są transwersalam częściowymi rodziny $\mathcal{F} = (S_1, S_2)$, gdzie $S_1 = \{1\}$ i $S_2 = \{2, 3\}$. Zauważmy, że rzędem podzbioru A zbioru E jest liczba elementów w największej transwersali częściowej zawartej w A . Przykład matroidu nietranswersalnego jest podany w ćwiczeniu 31.5.

Można dowieść, że każdy matroid transwersalny jest reprezentowalny nad pewnym ciałem, ale jest binarny wtedy i tylko wtedy, gdy jest grafowy. Inne fakty dotyczące matroidów transwersalnych są omówione w paragrafie 33.

Ograniczenia i ściągnięcia

W teorii grafów badamy często własności grafów, przyglądając się jego podgrafom lub też rozważając graf otrzymany przez ściągnięcie niektórych krawędzi. Zdefiniujemy teraz analogiczne pojęcia dla matroidów.

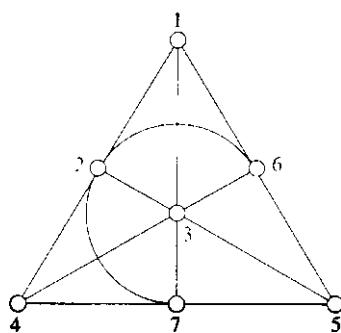
Jeśli M jest matroidem na zbiorze E i A jest podzbiorem zbioru E , to **ograniczeniem** matroidu M do zbioru A , oznaczanym symbolem $M \times A$, nazywamy matroid, którego cyklami są dokładnie te cykle matroidu M , które są zawarte w A . Podobnie, **ściągnięciem** matroidu M do zbioru A , oznaczanym symbolem $M|A$, nazywamy matroid, którego cyklami są elementy minimalne zbioru $\{C_i \cap A\}$, gdzie C_i jest cyklem w M . (Prostszą definicję podajemy w ćwiczeniu 32.7.) Można sprawdzić, że są to rzeczywiście matroidy i że odpowiadają one usuwaniu i ściąganiu krawędzi grafu. Matroid otrzymany z matroidu M przez ograniczenia i/lub ściągnięcia nazywamy **minorem** matroidu M .

Matroidy dwudzielne i eulerowskie

Następnie zdefiniujemy matroidy dwudzielne i eulerowskie. Ponieważ zwykłe definicje grafów dwudzielnego i eulerowskich podane w paragrafach 3 i 6 nie nadają się do uogólnienia na matroidy, więc musimy znaleźć inną charakteryzację takich grafów. W przypadku grafów dwudzielnego skorzystamy z ćwiczenia 5.3 i zdefiniujemy **matroid dwudzielny** jako matroid, w którym każdy cykl ma parzystą liczbę elementów. W przypadku grafów eulerowskich skorzystamy z wniosku 6.3 i powiemy, że matroid na zbiorze E jest **matroidem eulerowskim**, jeśli zbiór E może być przedstawiony w postaci sumy rozłącznych cykli. W następnym paragrafie zobaczymy, że pojęcia matroidu eulerowskiego i matroidu dwudzielnego są w pewnym sensie dualne, czego mogliśmy się spodziewać po ćwiczeniu 15.9.

Matroid Fano

Matroidem Fano nazywamy matroid F określony na zbiorze $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, którego bazami są wszystkie trzyelementowe podzbiory zbioru E z wyjątkiem podzbiorów $\{1, 2, 4\}, \{2, 3, 5\}, \{3, 4, 6\}, \{4, 5, 7\}, \{5, 6, 1\}, \{6, 7, 2\}$ i $\{7, 1, 3\}$. Ten matroid można przedstawić geometrycznie tak jak na rysunku 31.3; bazami



Rysunek 31.3

są dokładnie te zbiory trzyelementowe, które nie leżą na jednej linii. Można pokazać, że matroid F jest matroidem binarnym i eulerowskim, ale nie jest matroidem grafowym, sprzężonym matroidem grafowym, transwersalnym, ani regularnym.

Ćwiczenia do §31

- 31.1^r** Niech $E = \{a, b\}$. Wykaż, że istnieją dokładnie cztery (z dokładnością do izomorfizmu) matroidy na zbiorze E i wyznacz ich bazy, zbiory niezależne i cykle.
- 31.2** Niech $E = \{a, b, c\}$. Wykaż, że istnieje dokładnie osiem (z dokładnością do izomorfizmu) matroidów na zbiorze E i wyznacz ich bazy, zbiory niezależne i cykle.
- 31.3*** Niech E będzie zbiorem n -elementowym. Wykaż, że z dokładnością do izomorfizmu
- (a) istnieje co najwyżej 2^{2^n} matroidów na zbiorze E ;
 - (b) istnieje co najwyżej 2^{n^2} matroidów transwersalnych na zbiorze E .
- 31.4^r** Niech G_1 i G_2 będą grafami pokazanymi na rysunku 30.1.
- (a) Czy matroidy $M(G_1)$ i $M(G_2)$ są matroidami transwersalnymi?
 - (b) Czy matroidy $M^*(G_1)$ i $M^*(G_2)$ są matroidami transwersalnymi?
- 31.5** Wykaż, że matroid $M(K_4)$ nie jest matroidem transwersalnym.
- 31.6^r** Wykaż, że każdy matroid jednorodny jest matroidem transwersalnym.
- 31.7** Wykaż, że matroidy grafowe $M(K_5)$ i $M(K_{3,3})$ nie są sprzężonymi matroidami grafowymi.
- 31.8^r** Opisz wszystkie cykle matroidu Fano.
- 31.9** Niech M będzie matroidem na zbiorze E i niech $A \subseteq B \subseteq E$. Udowodnij, że
- (a) $(M \times B) \times A = M \times A$,
 - (b) $(M \cdot B) \cdot A = M \cdot A$.
- 31.10*** Udowodnij, że jeśli matroid M jest matroidem któregokolwiek z poniższych typów, to jego dowolny minor jest też matroidem tego typu:
- (a) matroid grafowy,
 - (b) sprzężony matroid grafowy,
 - (c) matroid binarny,
 - (d) matroid regularny.

§32 Matroidy i grafy

Zajmiemy się teraz pojęciem dualności matroidów. Naszym celem jest pokazanie, że pewne wcześniejsze wyniki wydają się bardziej naturalne, jeśli spojrzy się na nie

z tego punktu widzenia. Zobaczmy na przykład, że dość sztuczna definicja grafu abstrakcyjnie dualnego do grafu planarnego, podana w paragrafie 15, okazuje się bezpośrednią konsekwencją odpowiedniej definicji matroidu dualnego. Co więcej, pojęcia teorii matroidów nie tylko uogólniają odpowiednie pojęcia teorii grafów, ale czasami również upraszczają je.

Przypomnijmy, że na zbiorze krawędzi grafu G możemy określić matroid $M^*(G)$, biorąc jako cykle tego matroidu rozcięcia grafu G . Ze względu na twierdzenie 15.3 rozsądnie jest zdefiniować matroid dualny w taki sposób, by ten matroid był matroidem dualnym do matroidu cyklicznego $M(G)$.

Można tego dokonać w następujący sposób: jeśli M jest matroidem na zbiorze E , zdefiniowanym za pomocą funkcji rzędu, to **matroidem dualnym** M^* do matroidu M nazwiemy matroid na zbiorze E , którego funkcja rzędu r^* jest zdefiniowana wzorem

$$r^*(A) = |A| + r(E \setminus A) - r(E) \quad \text{dla } A \subseteq E.$$

Sprawdzamy najpierw, że r^* jest funkcją rzędu pewnego matroidu na zbiorze E .

TWIERDZENIE 32.1. $M^* = (E, r^*)$ jest matroidem na zbiorze E .

Dowód. Sprawdzamy warunki $r(1)$ i $r(3)$ z paragrafu 30 dla funkcji r^* ; sprawdzenie warunku $r(2)$ jest tak samo oczywiste (por. ćwiczenie 32.3).

Aby dowieść $r(1)$, zauważamy, że $r(E \setminus A) \leq r(E)$, skąd wynika, że $r^*(A) \leq |A|$. Podobnie z warunku $r(3)$ dla funkcji r mamy

$$r(E) + r(\emptyset) \leq r(A) + r(E \setminus A),$$

a więc

$$r(E) - r(E \setminus A) \leq r(A) \leq |A|.$$

Stąd natychmiast wynika, że $r^*(A) \geq 0$.

Aby dowieść $r(3)$, bierzemy dowolne $A, B \subseteq E$ i mamy

$$\begin{aligned} r^*(A \cup B) + r^*(A \cap B) &= |A \cup B| + |A \cap B| + r(E \setminus (A \cup B)) \\ &\quad + r(E \setminus (A \cap B)) - 2r(E) \\ &= |A| + |B| + r((E \setminus A) \cap (E \setminus B)) \\ &\quad + r((E \setminus A) \cup (E \setminus B)) - 2r(E) \\ &\leq |A| + |B| + r(E \setminus A) + r(E \setminus B) - 2r(E) \\ &\quad \text{(z warunku } r(3) \text{ dla funkcji } r) \\ &= r^*(A) + r^*(B), \end{aligned}$$

czego należało dowieść.

Pomimo że ta definicja może wydawać się zbyt sztuczna, to za chwilę okaże się, że bazy matroidu M^* można opisać w bardzo prosty sposób za pomocą baz matroidu M .

TWIERDZENIE 32.2. *Bazami matroidu M^* są dopełnienia baz matroidu M .*

Uwaga. Tego twierdzenia używa się często jako definicji matroidu M^* .

Dowód. Pokażemy, że jeśli B^* jest bazą matroidu M^* , to $E \setminus B^*$ jest bazą matroidu M ; implikacji w drugą stronę dowodzi się za pomocą rozumowania odwrotnego. Ponieważ B^* jest zbiorem niezależnym matroidu M^* , więc $|B^*| = r^*(B^*)$, a zatem $r(E \setminus B^*) = r(E)$. Pozostaje tylko dowieść, że zbiór $E \setminus B^*$ jest zbiorem niezależnym matroidu M . Ale to wynika natychmiast z równości $r^*(B^*) = r^*(E)$, po zastosowaniu podanego wyżej określenia funkcji r^* . ■

Z powyższej definicji wynika, że inaczej niż w przypadku pojęcia dualności dla grafów planarnych, dla każdego matroidu istnieje matroid do niego dualny i ten matroid dualny jest wyznaczony jednoznacznie. Z twierdzenia 32.2 wynika również, że matroid M^{**} dualny do matroidu dualnego jest równy matroidowi M . Jak się przekonamy, ta trywialna obserwacja jest naturalnym uogólnieniem nietrywialnych twierdzeń 15.2 i 15.5 na przypadek matroidów.

Pokażemy teraz, że matroid rozcięć $M^*(G)$ grafu G jest matroidem dualnym do matroidu cyklicznego $M(G)$.

TWIERDZENIE 32.3. *Jeśli G jest grafem, to $M^*(G) = (M(G))^*$.*

Dowód. Ponieważ cyklami matroidu $M^*(G)$ są rozcięcia grafu G , więc musimy sprawdzić, że C^* jest cyklem matroidu $(M(G))^*$ wtedy i tylko wtedy, gdy C^* jest rozcięciem w grafie G .

Przypuśćmy najpierw, że C^* jest rozcięciem w grafie G . Jeśli C^* jest zbiorem niezależnym matroidu $(M(G))^*$, to C^* można rozszerzyć do bazy B^* matroidu $(M(G))^*$, a więc zbiór $C^* \cap (E \setminus B^*)$ jest pusty. To przeczy twierdzeniu 9.3(1), gdyż zbiór $E \setminus B^*$ jest lasem spinającym grafu G . Zatem zbiór C^* jest zbiorem zależnym matroidu $(M(G))^*$, a więc zawiera cykl z $(M(G))^*$.

Jeśli, na odwrót, D^* jest cyklem matroidu $(M(G))^*$, to D^* nie jest zawarty w żadnej bazie $(M(G))^*$. Stąd wynika, że D^* przecina każdą bazę $M(G)$ — to znaczy każdy las spinający grafu G . Z ćwiczenia 9.10(a) wynika, że zbiór D^* zawiera pewne rozcięcie. To kończy dowód twierdzenia. ■

Zanim przejdziemy dalej, wprowadzimy kilka nowych pojęć. Mówimy, że elementy matroidu M tworzą cykl sprzężony matroidu M , jeśli tworzą one cykl

w matroidzie M^* . Zauważmy, że z twierdzenia 32.3 wynika, iż cykłami sprzężonymi matroidu cyklicznego grafu G są rozcięcia grafu G . Podobnie, bazą sprzężoną matroidu M nazywamy bazę matroidu M^* i w analogiczny sposób definiujemy **rząd sprzężony**, sprzężony zbiór niezależny itp. Mówimy również, że matroid M jest sprzężonym matroidem grafowym wtedy i tylko wtedy, gdy jego matroid dualny M^* jest matroidem grafowym. Z twierdzenia 32.3 wynika, że ta definicja jest zgodna z definicją podaną w poprzednim paragrafie. Powodem, dla którego wprowadzamy te „pojęcia sprzężone” jest to, że możemy teraz skupić naszą uwagę tylko na matroidzie M i nie musimy rozpatrywać matroidu M^* . Dla przykładu udowodnimy dla matroidów twierdzenie analogiczne do twierdzenia 9.3.

TWIERDZENIE 32.4. *Każdy cykl sprzężony matroidu przecina każdą bazę.*

Dowód. Niech C^* będzie cyklem sprzężonym matroidu M i przypuśćmy, że istnieje baza B matroidu M taka, że zbiór $C^* \cap B$ jest pusty. Wtedy zbiór C^* jest zawarty w zbiorze $E \setminus B$, a więc C^* jest cyklem matroidu M^* , który z kolei jest zawarty w bazie M^* . Ta sprzeczność dowodzi twierdzenia. ■

WNIOSK 32.5. *Każdy cykl matroidu przecina każdą bazę sprzężoną.*

Dowód. Wystarczy zastosować twierdzenie 32.4 do matroidu M^* . ■

Z punktu widzenia teorii matroidów obie tezy twierdzenia 9.3 są dualnymi postaciami tego samego twierdzenia. Zatem zamiast dowodzić obu twierdzeń dla grafów, jak to zrobiliśmy w paragrafie 9, wystarczy dowieść jednego twierdzenia dla matroidów, a następnie skorzystać z zasady dualności. Nie tylko oszczędzimy sobie w ten sposób czasu i wysiłku, ale zyskamy również głębsze spojrzenie na wiele problemów, z którymi zetknęliśmy się wcześniej w tej książce. Jednym tego przykładem jest podobieństwo między własnościami cykli i rozcięć. Innym przykładem jest głębsze zrozumienie pojęcia dualności dla grafów planarnych.

Następnym przykładem uproszczenia rozumowania dzięki matroidom jest ćwiczenie 5.11. Dowód bezpośredni wymaga naprawdę dwóch dowodów — jednego dla cykli i innego dla rozcięć. Jeśli jednak udowodnimy w teorii matroidów twierdzenie odpowiadające twierdzeniu dla cykli, sformułowane w ćwiczeniu 30.7, to będziemy mogli po prostu zastosować je do matroidu $M^*(G)$, by otrzymać odpowiednie twierdzenia dla rozcięć. Na odwrót, możemy zastosować zasadę dualności, by wyprowadzić twierdzenie dla cykli z twierdzenia dla rozcięć.

Zwróciśmy teraz uwagę na grafy planarne i pokażemy, w jakim sensie definicje dualności geometrycznej i abstrakcyjnej dla grafów są szczególnymi przypadkami dualności w teorii matroidów. Pojęcie grafu dualnego Whitneya, określone w ćwiczeniu 15.11, jest również szczególnym przypadkiem pojęcia dualności, gdyż

równanie występujące w tym ćwiczeniu jest po prostu zapisanym inaczej wzorem definiującym funkcję r^* na początku tego paragrafu.

Na początek zajmiemy się pojęciem dualności abstrakcyjnej.

TWIERDZENIE 32.6. *Jeśli G^* jest grafem abstrakcyjnie dualnym do grafu G , to matroid $M(G^*)$ jest izomorficzny z matroidem $(M(G))^*$.*

Dowód. Ponieważ graf G^* jest grafem abstrakcyjnie dualnym do grafu G , więc istnieje taka wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość między krawędziami grafu G i krawędziami grafu G^* , że cykle w G odpowiadają rozcięciom w G^* i na odwrót. Stąd natychmiast wynika, że cykle matroidu $M(G)$ odpowiadają cyklom sprzężonym matroidu $M(G^*)$. Z twierdzenia 32.3 wynika więc, że matroid $M(G^*)$ jest izomorficzny z matroidem $M^*(G)$. ■

WNIOSEK 32.7. *Jeśli graf G^* jest grafem geometrycznie dualnym do spójnego grafu planarnego G , to matroid $M(G^*)$ jest izomorficzny z matroidem $(M(G))^*$.*

Dowód. Ten wniosek wynika natychmiast z twierdzeń 32.6 i 15.3. ■

Jak zauważyliśmy wcześniej, graf planarny G może mieć wiele różnych grafów dualnych, podczas gdy matroid ma tylko jeden dualny. Jest tak dlatego, że jeśli mamy dwa (być może nieizomorficzne) grafy dualne do grafu G , to ich matroidy cykliczne są izomorficznymi matroidami.

Na zakończenie tego paragrafu odpowiemy na pytanie: jakie są warunki konieczne i wystarczające na to, by dany matroid M był matroidem grafowym? Nietrudno znaleźć warunki konieczne. Na przykład, z naszego omówienia matroidów reprezentowalnych w paragrafie 31 wynika, że taki matroid musi być matroidem binarnym. Następnie, z ćwiczenia 31.10 i omówienia matroidu Fano F wynika, że matroid M nie może zawierać jako minoru żadnego z matroidów $M^*(K_5)$, $M^*(K_{3,3})$, F ani F^* . W. T. Tutte pokazał, że te warunki konieczne są również wystarczające. Dowód jest jednak zbyt trudny, by go tu przedstawić (por. książkę Welsha [37]).

TWIERDZENIE 32.8 (Tutte 1958). *Matroid M jest matroidem grafowym wtedy i tylko wtedy, gdy jest matroidem binarnym i nie zawiera żadnego minoru izomorficznego z $M^*(K_5)$, $M^*(K_{3,3})$, F i F^* .*

Jeśli zastosujemy twierdzenie 32.8 do matroidu M^* oraz zauważymy, że matroid dualny do matroidu binarnego jest matroidem binarnym, to otrzymamy warunki konieczne i wystarczające na to, by dany matroid był sprzężonym matroidem grafowym.

Wniosek 32.9. *Matroid M jest sprzężonym matroidem grafowym wtedy i tylko wtedy, gdy jest matrodom binarnym i nie zawiera żadnego minoru izomorficznego z $M(K_5)$, $M(K_{3,3})$, F i F^* .*

Tutte dowódł również, że *matroid binarny jest regularny wtedy i tylko wtedy, gdy nie zawiera żadnego minoru izomorficznego z F i F^* .* Łącząc to twierdzenie z twierdzeniem 32.8 i wnioskiem 32.9, otrzymujemy natychmiast następujące twierdzenie teorii matroidów analogiczne do twierdzenia Kuratowskiego (twierdzenia 12.2).

TWIERDZENIE 32.10. *Dany matroid jest matrodom planarnym wtedy i tylko wtedy, gdy jest regularny i nie zawiera minorów izomorficznych z $M(K_5)$, $M(K_{3,3})$ ani z matroidami do nich dualnymi.*

Ćwiczenia do §32

- 32.1^r (a) Wykaż, że matroid dualny do matroidu dyskretnego jest matroidem trywialnym.
 (b) Jaki matroid jest matrodom dualnym do matroidu k -jednorodnego na zbiorze n -elementowym?
- 32.2 Wyznacz matroidy dualne do ośmiu matroidów na zbiorze $E = \{a, b, c\}$, otrzymanych w ćwiczeniu 31.2.
- 32.3 Sprawdź własność $r(2)$ z paragrafu 30 dla funkcji r^* .
- 32.4^r Sprawdź tezę twierdzenia 32.3 dla grafu K_3 .
- 32.5^r Wyznacz cykle sprzężone i bazy sprzężone
 (a) matroidu 3-jednorodnego na zbiorze dziewięcioelementowym;
 (b) matroidu cyklicznego grafów pokazanych na rysunku 30.1;
 (c) matroidu cyklicznego grafu pokazanego na rysunku 31.2;
 (d) matroidu Fano.
- 32.6 Podaj przykład pokazujący, że matroid dualny do matroidu transwersalnego nie musi być matroidem transwersalnym.
- 32.7 Pokaż, że ściągnięcie $M.A$ matroidu M jest matroidem, którego cyklami sprzężonymi są dokładnie cykle sprzężone M zawarte w zbiorze A .
- 32.8^{*} Pokaż, że jeśli C jest dowolnym cyklem, a C^* cyklem sprzężonym matroidu, to $|C \cap C^*| \neq 1$.
 (Jest to uogólnienie na matroidy z ćwiczenia 5.12.)

32.9* Niech M będzie matroidem binarnym na zbiorze E .

- (a) Udowodnij, że jeśli matroid M jest matroidem eulerowskim, to M^* jest matroidem dwudzielnym.
- (b) Udowodnij twierdzenie odwrotne przez indukcję względem $|E|$.
- (c) Biorąc jako przykład matroid 5-jednorodny na zbiorze jedenastoelementowym, pokaż, że założenia o binarności matroidu nie można pominąć.

(To ćwiczenie jest uogólnieniem ćwiczenia 15.9.)

§33 Matroidy i transwersale

W poprzednim paragrafie pokazaliśmy, że istnieje ścisły związek między matroidami i grafami. Teraz opiszemy związki między matroidami a transwersalami. Naszym pierwszym celem będzie uproszczenie dowodów pewnych dowiedzionych wcześniej twierdzeń w teorii transwersal, możliwe dzięki spojrzeniu na sytuację z punktu widzenia teorii matroidów.

Przypomnijmy, że jeśli E jest niepustym zbiorem skończonym i $\mathcal{F} = (S_1, \dots, S_m)$ jest rodziną niepustych podzbiorów zbioru E , to częściowe transwersale rodziny \mathcal{F} można potraktować jako zbiory niezależne pewnego matroidu $M(S_1, \dots, S_m)$ na zbiorze E . W tym matroidzie rzędem podzbioru A zbioru E jest liczba elementów największej transwersali częściowej rodziny \mathcal{F} zawartej w A .

Naszym pierwszym przykładem zastosowania matroidów w teorii transwersal będzie dowód twierdzenia sformułowanego w ćwiczeniu 26.10, mówiącego o tym, że rodzina \mathcal{F} podzbiorów zbioru E ma transwersałę zawierającą dany podzbiór A wtedy i tylko wtedy, gdy

- (1) rodzina \mathcal{F} ma transwersałę;
- (2) zbiór A jest transwersałą częściową rodziny \mathcal{F} .

Jest jasne, że te warunki są konieczne. Aby dowieść, że są również wystarczające, zauważamy, że ponieważ A jest transwersałą częściową rodziny \mathcal{F} , to A jest zbiorem niezależnym matroidu transwersalnego M wyznaczonego przez rodzinę \mathcal{F} , a więc może być rozszerzony do bazy tego matroidu. Ponieważ rodzina \mathcal{F} ma transwersałę, więc każda baza M musi być transwersałą rodziny \mathcal{F} , skąd natychmiast wynika twierdzenie. Czytelnik, który wcześniej zrobił ćwiczenie 26.10, doceni, o ile prostsze jest to rozumowanie.

Zanim pokażemy, w jaki sposób można użyć matroidów do uproszczenia dowodu twierdzenia 27.3 o istnieniu wspólnej transwersali dwóch rodzin podzbiorów zbioru E , udowodnimy „matroidową” wersję twierdzenia Halla. Przypomnijmy, że jeśli \mathcal{F} jest rodziną podzbiorów zbioru E , to twierdzenie Halla podaje warunek konieczny i wystarczający na to, by rodzina \mathcal{F} miała transwersałę. Jeśli na zbiór E nałożymy dodatkowo strukturę matroidu, to nasuwa się naturalne pytanie, czy istnieje odpowiedni warunek na to, by istniała transwersala niezależna. To znaczy transwersala rodziny \mathcal{F} będąca jednocześnie zbiorem niezależnym tego

matroidu. Następujące twierdzenie, znane jako **twierdzenie Rado**, daje odpowiedź na to pytanie.

TWIERDZENIE 33.1 (Rado, 1942). *Niech M będzie matroidem na zbiorze E i niech $\mathcal{F} = (S_1, \dots, S_m)$ będzie rodziną niepustych podzbiorów zbioru E . Wówczas rodzina \mathcal{F} ma transwersalę niezależną wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego k takiego, że $1 \leq k \leq m$, suma dowolnych k podzbiorów S_i zawiera zbiór niezależny mający co najmniej k elementów.*

Uwaga. Jeśli M jest matroidem dyskretnym na zbiorze E , to powyższe twierdzenie sprowadza się do twierdzenia Halla (twierdzenie 26.1).

Dowód. Powtarzamy dowód twierdzenia 26.1. Jak poprzednio, konieczność tego warunku jest oczywista. Aby dowieść, że ten warunek jest również wystarczający, pokażemy, że jeśli jeden ze zbiorów S_i (na przykład S_1) ma więcej elementów niż jeden, to możemy jeden z tych elementów usunąć, nie naruszając prawdziwości warunku. Powtarzając to postępowanie, doprowadzimy w końcu do sytuacji, w której każdy zbiór S_i ma tylko jeden element, a w tym przypadku dowód jest trywialny.

Wystarczy zatem pokazać, że ta „procedura redukcji” jest poprawna. Założymy więc, że do zbioru S_1 należą dwa elementy x i y takie, że usunięcie których z nich ze zbioru S_1 naruszy prawdziwość warunku. Istnieją wtedy podzbiory A i B zbioru $\{2, 3, \dots, m\}$ takie, że $r(P) \leq |A|$ i $r(Q) \leq |B|$, gdzie

$$P = \bigcup_{j \in A} S_j \cup (S_1 \setminus \{x\}) \quad \text{oraz} \quad Q = \bigcup_{j \in B} S_j \cup (S_1 \setminus \{y\}).$$

Wtedy

$$r(P \cup Q) = r\left(\bigcup_{j \in A \cup B} S_j \cup S_1\right) \quad \text{oraz} \quad r(P \cap Q) \geq r\left(\bigcup_{j \in A \cap B} S_j\right).$$

To prowadzi do oczekiwanej sprzeczności, gdyż

$$\begin{aligned} |A| + |B| &\geq r(P) + r(Q) \\ &\geq r(P \cup Q) + r(P \cap Q) \\ &\geq \left|\bigcup_{j \in A \cup B} S_j \cup S_1\right| + \left|\bigcup_{j \in A \cap B} S_j\right| \\ &\geq (|A \cup B| + 1) + |A \cap B| \quad \text{z warunku Halla} \\ &= |A| + |B| + 1. \end{aligned}$$

Naśladując dowód wniosku 26.2, natychmiast otrzymujemy następujący wniosek.

Wniosek 33.2. *Przy zachowaniu powyższych oznaczeń, rodzina \mathcal{F} ma częściową transwersalę niezależną mającą t elementów wtedy i tylko wtedy, gdy suma dowolnych k podzbiorów S_j zawiera zbiór niezależny mający co najmniej $k + t - m$ elementów.*

Możemy teraz podać wykorzystujący matroidy dowód twierdzenia 27.3 o istnieniu wspólnej transwersali dwóch rodzin podzbiorów danego zbioru.

TWIERDZENIE 27.3. *Niech E będzie niepustym zbiorem skończonym i niech $\mathcal{F} = (S_1, \dots, S_m)$ i $\mathcal{G} = (T_1, \dots, T_m)$ będą dwiema rodzinami niepustych podzbiorów zbioru E . Wówczas rodziny \mathcal{F} i \mathcal{G} mają wspólną transwersalę wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych podzbiorów A i B zbioru $\{1, 2, \dots, m\}$ zachodzi nierówność*

$$\left| \left(\bigcup_{i \in A} S_i \right) \cap \left(\bigcup_{j \in B} T_j \right) \right| \geq |A| + |B| - m.$$

Dowód. Niech M będzie matroidem, którego zbiorami niezależnymi są dokładnie częściowe traswersale rodziny \mathcal{F} . Wówczas rodziny \mathcal{F} i \mathcal{G} mają wspólną transwersalę wtedy i tylko wtedy, gdy rodzina \mathcal{G} ma transwersalę niezależną. Z twierdzenia 33.1 wynika, że jest tak wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego k takiego, że $1 \leq k \leq m$, suma dowolnych k zbiorów T_i zawiera zbiór niezależny mający co najmniej k elementów, to znaczy wtedy i tylko wtedy, gdy suma dowolnych k zbiorów T_i zawiera transwersalę częściową rodziny \mathcal{F} , mającą k elementów. Teza twierdzenia wynika teraz z wniosku 26.3. ■

Na zakończenie podamy kilka faktów dotyczących sum matroidów. Jeśli M_1, M_2, \dots, M_k są matroidami na tym samym zbiorze E , to możemy zdefiniować nowy matroid $M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_k$, nazywany sumą tych matroidów, przyjmując, że zbiorami niezależnymi są wszystkie możliwe sumy zbioru niezależnego z M_1 ze zbiorem niezależnym z M_2, \dots , ze zbiorem niezależnym z M_k . Wartości funkcji rzędu tego matroidu możemy otrzymać z następującego twierdzenia, którego dowód znajduje się w książce Welsha [37].

TWIERDZENIE 33.3. *Jeśli M_1, \dots, M_k są matroidami na zbiorze E i jeśli funkcje r_1, \dots, r_k są funkcjami rzędu w tych matroidach, to wartości funkcji rzędu r w matroidzie $M_1 \cup \dots \cup M_k$ są dane wzorem*

$$r(X) = \min\{r_1(A) + \dots + r_k(A) + |X \setminus A|\},$$

gdzie minimum jestbrane ze względu na wszystkie podzbiory A zbioru X .

To twierdzenia ma następujące przydatne wnioski.

Wniosek 33.4. Niech M będzie matroidem. Wówczas matroid M zawiera k rozłącznych baz wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego podzbioru A zbioru E

$$k r(A) + |E \setminus A| \geq k r(E).$$

Dowód. Matroid M zawiera k rozłącznych baz wtedy i tylko wtedy, gdy suma k kopii matroidu M ma rzad równy co najmniej $k r(E)$. Teza wniosku wynika teraz natychmiast z twierdzenia 33.3. ■

Wniosek 33.5. Niech M będzie matroidem. Wówczas zbiór E można przedstawić w postaci sumy k zbiorów niezależnych wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego podzbioru A zbioru E zachodzi nierówność $k r(A) \geq |A|$.

Dowód. W tym przypadku suma k kopii matroidu M ma rzad $|E|$. Z twierdzenia 33.3. wynika natychmiast, że $k r(A) + |E \setminus A| \geq |E|$, czego należało dowieść. ■

Jeśli zastosujemy te ostatnie wnioski do matroidu cyklicznego $M(G)$ grafu G , to bez trudu otrzymamy następujące warunki konieczne i wystarczające na to, by graf G zawierał k krawędziowo rozłącznych lasów spinających i na to, by graf G rozpadł się na k rozłącznych lasów. Ponieważ nie jest łatwo dowieść tych twierdzeń metodami bardziej bezpośrednimi, więc raz jeszcze pokazaliśmy siłę matroidów w rozwiązywaniu problemów w teorii grafów.

TWIERDZENIE 33.6. Graf G zawiera k krawędziowo rozłącznych lasów spinających wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego podgrafa H grafu G zachodzi nierówność

$$k(\xi(G) - \xi(H)) \leq m(G) - m(H),$$

gdzie $m(H)$ i $m(G)$ oznaczają odpowiednio liczby krawędzi grafów H i G .

TWIERDZENIE 33.7. Graf G rozпадa się na k rozłącznych lasów wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego podgrafa H grafu G zachodzi nierówność $k\xi(H) \geq m(H)$.

Ćwiczenia do §33

- 33.1^r** Wykaż prawdziwość twierdzenia Rado w przypadku, gdy M jest matroidem Fano i $\mathcal{F} = (\{1\}, \{1, 2\}, \{2, 4, 5\})$.
- 33.2** Sprawdź wniosek 33.4 dla 3-jednorodnego matroidu M na zbiorze ośmioelementowym.
- 33.3** Sprawdź wniosek 33.5 dla 4-jednorodnego matroidu M na zbiorze dziewięcioelementowym.

- 33.4*** Modyfikując dowód Halmosa-Vaughana twierdzenia Halla, podaj inny dowód twierdzenia 33.1.
- 33.5'** Udowodnij, że matroid M jest matroidem transwersalnym wtedy i tylko wtedy, gdy można go przedstawić w postaci sumy matroidów rzędu 1.
- 33.6** Sformułuj twierdzenia dualne do twierdzeń 33.6 i 33.7, otrzymując w ten sposób dwa nowe twierdzenia teorii grafów.

Dodatek

W poniższej tabeli mamy podane liczby grafów różnych typów, mających n wierzchołków dla $n = 1, \dots, 8$. Liczby większe od miliona zostały zaokrąglone do jednej cyfry znaczącej.

Typy grafów	$n =$	1	2	3	4	5	6	7	8
Grafy proste		1	2	4	11	34	156	1044	12 346
Spójne grafy proste		1	1	2	6	21	112	853	11 117
Grafy proste eulerowskie		1	0	1	1	4	8	37	184
Grafy proste hamiltonowskie		1	0	1	3	8	48	383	6020
Drzewa		1	1	1	2	3	6	11	23
Drzewa oznakowane		1	1	3	16	125	1296	16 807	262 144
Digrafy proste		1	3	16	218	9608	$\sim 2 \cdot 10^6$	$\sim 9 \cdot 10^8$	$\sim 2 \cdot 10^{12}$
Spójne digrafy proste		1	2	13	199	9364	$\sim 2 \cdot 10^6$	$\sim 9 \cdot 10^8$	$\sim 2 \cdot 10^{12}$
Silnie spójne digrafy proste		1	1	5	83	5048	$\sim 1 \cdot 10^6$	$\sim 7 \cdot 10^8$	$\sim 2 \cdot 10^{12}$
Turnieje		1	1	2	4	12	56	456	6880



Bibliografia

*Pisanie wielu książek nie ma końca,
a wiele nauki utrudza ciało.*

KOHELET (Koh. 12,12) (Biblia Tysiąclecia)

Chociaż dotarliśmy prawie do końca tej książki, to w żadnym stopniu nie wyczerpalismy tematu. Mamy nadzieję, że Czytelnik zechce kontynuować studia nad teorią grafów i dlatego sugerujemy możliwe kierunki dalszych badań.

Innymi książkami na poziomie elementarnym są:

- [1] G. Chartrand, *Introductory Graph Theory*, Dover, 1985.
- [2] J. Clark i D. A. Holton, *A First Look at Graph Theory*, World Scientific Publishing, 1991.
- [3] F. Harary, R. Z. Norman i D. Cartwright, *Structural Models*, Wiley, 1965.
- [4] O. Ore; *Graphs and their Uses*, wyd. 2, New Mathematical Library 10, Mathematical Association of America, 1990. (Jest polskie tłumaczenie pierwszego wydania: O. Ore, *Wstęp do teorii grafów*, PWN Warszawa, 1966.)
- [5] R. J. Wilson i J. J. Watkins, *Graphs: An Introductory Approach*, Wiley, 1990.

Wśród standardowych podręczników teorii grafów znajdują się:

- [6] C. Berge, *Graphs*, North-Holland, 1985.
- [7] J. A. Bondy i U. S. R. Murty, *Graph Theory with Applications*, American Elsevier, 1979.
- [8] G. Chartrand i L. Lesniak, *Graphs & Digraphs*, wyd. 2, Wadsworth & Brooks/Cole, 1986.
- [9] F. Harary, *Graph Theory*, Addison-Wesley, 1969.
- [10] O. Ore, *Theory of Graphs*, American Mathematical Society Colloquium Publications XXXVIII, 1962.

Ujęcie historyczne tematu, zawierające tłumaczenia wielu oryginalnych prac, znajduje się w:

- [11] N. L. Biggs, E. K. Lloyd i R. J. Wilson, *Graph Theory 1736–1936*, wyd. 2, Oxford, 1986.

Zastosowania teorii grafów i wykorzystanie algorytmów są omówione w:

- [12] G. Chartrand i O. R. Oellermann, *Applied and Algorithmic Graph Theory*, McGraw-Hill, 1993.
- [13] N. Deo, *Teoria grafów i jej zastosowania w technice i informatyce*, PWN, Warszawa 1980.
- [14] A. K. Dolan i J. Aldous, *Networks and Algorithms: An Introductory Approach*, Wiley-Interscience, 1993.
- [15] S. Even, *Graph Algorithms*, Computer Science Press, 1979.
- [16] A. Gibbons, *Algorithmic Graph Theory*, Cambridge, 1985.
- [17] E. L. Lawler, *Combinatorial Optimization, Networks and Matroids*, Holt, Rinehart and Winston, 1976.
- [18] F. S. Roberts, *Discrete Mathematical Models, with Applications to Social, Biological and Environmental Problems*, Prentice-Hall, 1976.
- [19] M. N. Swamy i K. Thulasiraman, *Graphs, Networks and Algorithms*, Wiley, 1981.
- [20] A. Tucker, *Applied Combinatorics*, wyd. 2, Wiley, 1984.
- [21] R. J. Wilson i L. W. Beineke (red.), *Applications of Graph Theory*, Academic Press, 1979.

Książkami wprowadzającymi do kombinatoryki i teorii transwersal są:

- [22] I. Anderson, *A First Course in Combinatorial Mathematics*, wyd. 2, Oxford, 1989.
- [23] N. Biggs, *Discrete Mathematics*, wyd. 2, Oxford, 1993.
- [24] V. Bryant, *Aspects of Combinatorics*, Cambridge, 1993.
- [25] V. Bryant i H. Perfect, *Independence Theory in Combinatorics*, Chapman and Hall, 1980.
- [26] J. H. van Lint i R. M. Wilson, *A Course in Combinatorics*, Cambridge, 1992.

Książkami specjalistycznymi omawiającymi niektóre zagadnienia poruszone w tej książce są:

- [27] L. W. Beineke i R. J. Wilson (red.), *Selected Topics in Graph Theory 1, 2, 3*, Academic Press, 1978, 1983, 1987.
- [28] S. Fiorini i R. J. Wilson, *Edge-Colourings of Graphs*, Research Notes in Mathematics 16, Pitman Publishing, 1977.
- [29] J. L. Gross i T. W. Tucker, *Topological Graph Theory*, Wiley-Interscience, 1987.
- [30] F. Harary i E. M. Palmer, *Graphical Enumeration*, Academic Press, 1973.
- [31] T. R. Jensen i B. Toft, *Graph Coloring Problems*, Wiley-Interscience, 1995.

- [32] J. W. Moon, *Counting Labelled Trees*, Canadian Mathematical Congress, 1970.
- [33] J. W. Moon, *Topics on Tournaments*, Holt, Rinehart and Winston, 1968.
- [34] J. G. Oxley, *Matroid Theory*, Oxford, 1992.
- [35] G. Ringel, *Map Color Theorem*, Springer-Verlag, 1974.
- [36] T. L. Saaty i P. C. Kainen, *The Four-Color Problem*, wyd. 2, Dover, 1986.
- [37] D. J. A. Welsh, *Matroid Theory*, Academic Press, 1976.

Wcześniej czy później odczujecie potrzebę zatrzymania do czasopism matematycznych, a nie do książek. Jest wiele czasopism poświęconych teorii grafów i zagadnieniom pokrewnym, takich jak *Journal of Graph Theory*, *Journal of Combinatorial Theory*, *European Journal of Combinatorics*, *Ars Combinatoria* oraz *Discrete Mathematics*.

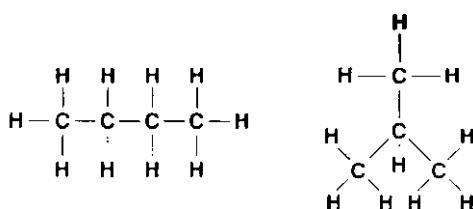
Rozwiązań wybranych ćwiczeń

Rozdział 1

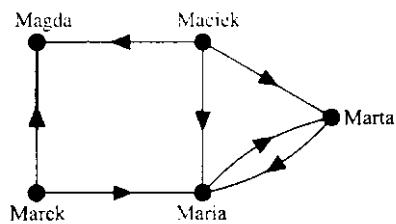
1.1

- (a) Jest 5 wierzchołków i 8 krawędzi; wierzchołki P i T mają stopień 3, wierzchołki Q i S mają stopień 4, wierzchołek R ma stopień 2.
- (b) Jest 6 wierzchołków i 5 krawędzi; wierzchołki A , B , E i F mają stopień 1, a wierzchołki C i D mają stopień 3.

- 1.3 (a) Każdy wierzchołek odpowiadający atomowi węgla ma stopień 4, a odpowiadający atomowi wodoru ma stopień 1.
(b) Te grafy wyglądają następująco:



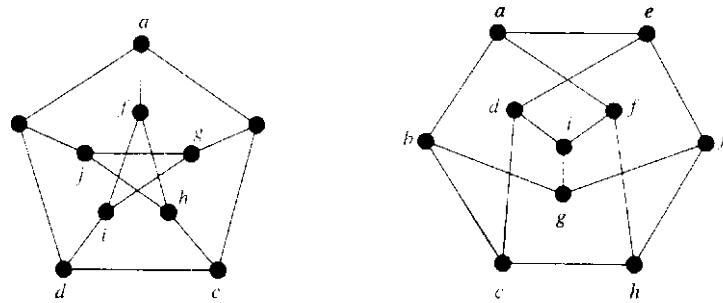
- 1.6 Odpowiedni graf skierowany wygląda tak:



Rozdział 2

- 2.1** $V(G) = \{u, v, w, x, y, z\}$, $E(G) = \{ux, uy, uz, vx, vy, vz, wx, wy, wz\}$;
 $V(G) = \{l, m, n, p, q, r\}$, $E(G) = \{lp, lq, lr, mp, mq, mr, np, nq, nr\}$.

- 2.3** (a) Można oznaczyć wierzchołki w następujący sposób:



(b) W pierwszym grafie żadne wierzchołki stopnia 2 nie są sąsiednie; w drugim grafie są one połączone parami. Ponieważ izomorfizm zachowuje sąsiedztwo wierzchołków, te grafy nie są izomorficzne.

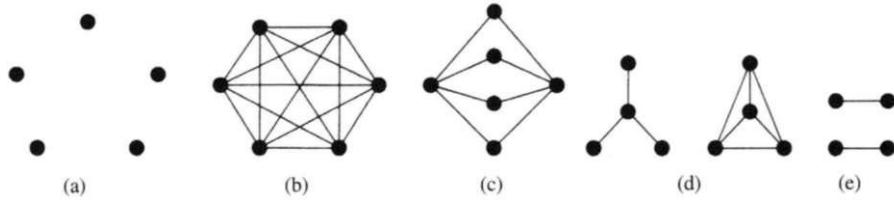
- 2.6** (a) graf 12; (b) graf 27; (c) graf 30.

- 2.7** graf 5: ciąg stopni $(1, 1, 1, 3)$; suma stopni = 6, liczba krawędzi = 3.
graf 6: ciąg stopni $(1, 1, 2, 2)$; suma stopni = 6, liczba krawędzi = 3.
graf 7: ciąg stopni $(1, 2, 2, 3)$; suma stopni = 8, liczba krawędzi = 4.
graf 8: ciąg stopni $(2, 2, 2, 2)$; suma stopni = 8, liczba krawędzi = 4.
graf 9: ciąg stopni $(2, 2, 3, 3)$; suma stopni = 10, liczba krawędzi = 5.
graf 10: ciąg stopni $(3, 3, 3, 3)$; suma stopni = 12, liczba krawędzi = 6.
W każdym przypadku suma stopni jest podwojoną liczbą krawędzi.

- 2.10** Cykle mające 5 i 6 wierzchołków.

2.12 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

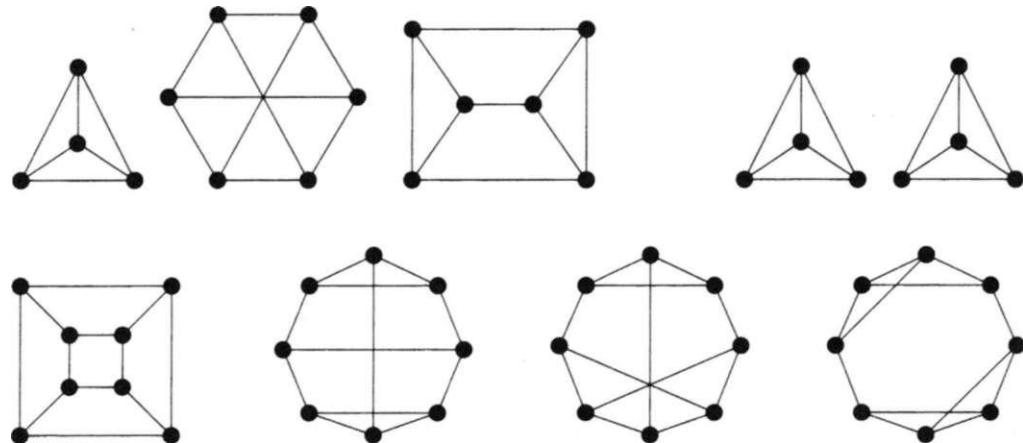
3.1



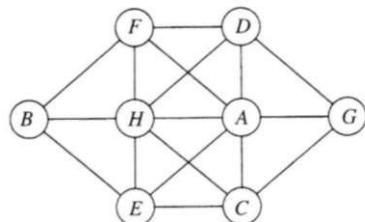
3.2 (a) 45; (b) 35; (c) 32; (d) 14; (e) 15.

3.4 Grafy regularne: 1, 2, 4, 8, 10, 18, 31;
grafy dwudzielne: 2, 3, 5, 6, 8, 11, 12, 13, 17, 23.

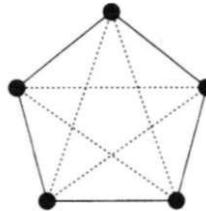
3.6 Jest osiem takich grafów:



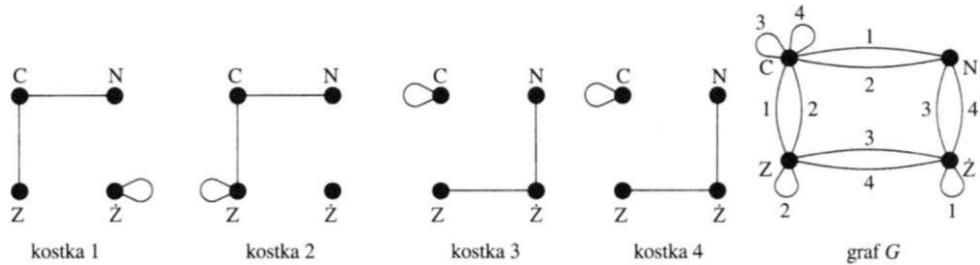
4.1 Jest wiele możliwych rozwiązań, wszystkie są modyfikacjami rozwiązania podanego w tekście. Oto jedno z nich:



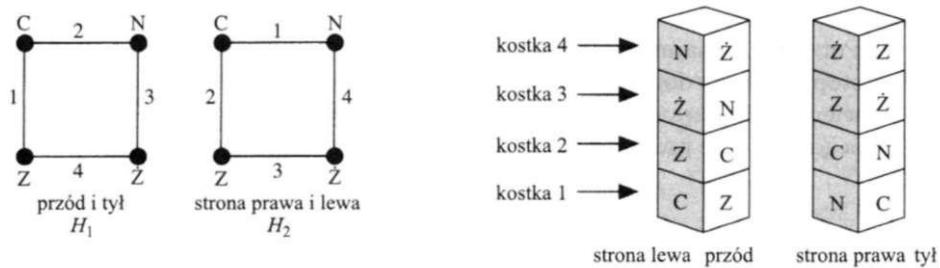
- 4.2** Poniższy wykres ilustruje jedną taką grupę; znaczenie linii ciągły i przerywanych jest takie jak w tekście.



- 4.3** Korzystając z metod opisanych w tekście, otrzymujemy następujące grafy:



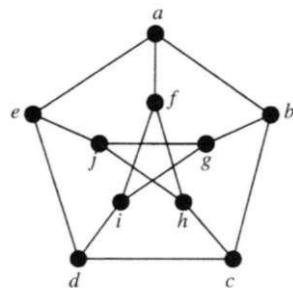
Jedna para podgrafów H_1 i H_2 oraz odpowiadające im rozwiązań wygląda następująco (istnieje wiele innych rozwiązań):



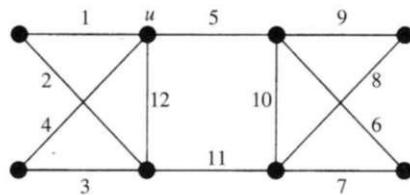
Rozdział 3

5.1

- $a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow d \rightarrow e \rightarrow j;$
- $a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow d \rightarrow e \rightarrow j \rightarrow h \rightarrow f \rightarrow i \rightarrow g;$
- $a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow d \rightarrow e \rightarrow a, a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow d \rightarrow i \rightarrow f \rightarrow a,$
 $a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow d \rightarrow e \rightarrow j \rightarrow h \rightarrow f \rightarrow a,$
 $a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow d \rightarrow e \rightarrow j \rightarrow g \rightarrow i \rightarrow f \rightarrow a;$
- $\{ab, ae, af\}, \{ab, af, de, ej\}, \{ab, af, cd, di, ej\}.$



- 5.2** (a) 3; (b) 4; (c) 8; (d) 3; (e) 4; (f) 5; (g) 5.
- 5.4** Niech G będzie grafem niespójnym i niech v i w będą dwoma wierzchołkami grafu G . Jeśli v i w leżą w różnych składowych G , to są sąsiednie w grafie \overline{G} . Jeśli v i w leżą w tej samej składowej G i z leży w innej składowej, to $v \rightarrow z \rightarrow w$ jest drogą w \overline{G} . Tak czy inaczej, dowolne dwa wierzchołki mogą być połączone drogą w grafie \overline{G} , a więc graf \overline{G} jest spójny.
- 5.5** (a) $\kappa = \lambda = 2$; (b) $\kappa = \lambda = 3$; (c) $\kappa = \lambda = 4$; (d) $\kappa = \lambda = 4$.
- 6.1** (a) eulerowski; (b) półeulerowski; (c) ani taki, ani taki; (d) eulerowski; (e) ani taki, ani taki.
- 6.2** Grafy eulerowskie: 1, 4, 8, 18, 21, 25, 31;
grafy półeulerowskie: 2, 3, 6, 7, 9, 13, 14, 16, 17, 19, 22, 23, 26, 28, 30.
- 6.4** (a) Potrzeba co najmniej $k/2$ ścieżek, by „zużyć” k wierzchołków nieparzystego stopnia. Jeśli dodamy teraz $k/2$ krawędzi do grafu G tak, by połączyć te wierzchołki parami, to otrzymamy graf eulerowski G' . Poszukiwanie $k/2$ ścieżek powstanie po usunięciu dodanych krawędzi z cyklu eulerowskiego w grafie G' .
(b) Cztery.
- 6.5** Istnieje wiele możliwych rozwiązań; na przykład można przejść krawędzie w kolejności pokazanej na następującym rysunku:

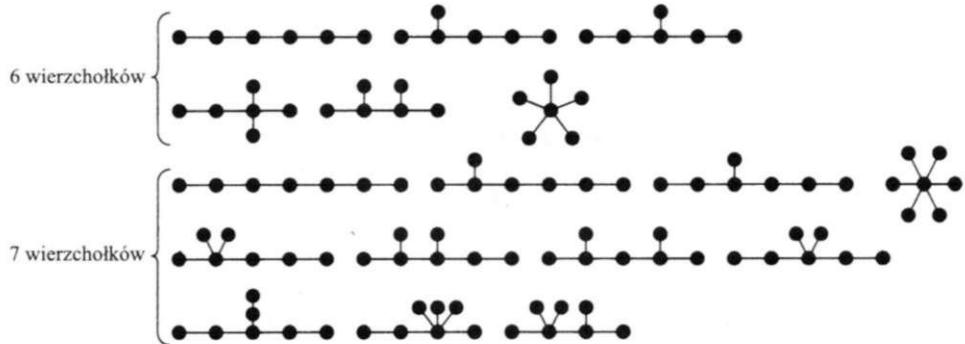


- 7.1** (a) hamiltonowski; (b) półhamiltonowski; (c) hamiltonowski; (d) hamiltonowski;
(e) hamiltonowski.
- 7.2** Grafy hamiltonowskie: 1, 4, 8, 9, 10, 18, 22, 26, 27, 28, 29, 30, 31;
grafy półhamiltonowskie: 2, 3, 6, 7, 13, 15, 16, 17, 19, 20, 21, 23, 24, 25.
- 7.6** $K_{(n/2)-1, (n/2)+1}$ dla n parzystych; $K_{(n-1)/2, (n+1)/2}$ dla n nieparzystych.
- 8.1** Liczbami kolejno przypisanymi na stałe są: $l(A) = 0, l(B) = 30, l(D) = 36, l(C) = 48, l(F) = 58, l(E) = 69, l(G) = 77$ i najkrótszą drogą długości 77 jest $A \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow F \rightarrow E \rightarrow G$.
- 8.5** Podwojenie krawędzi wzdłuż drogi $B \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow A \rightarrow C$ da rozwiązań o całkowitej wagie 24.
- 8.6** Poszukiwanym cyklem Hamiltona jest cykl $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow E \rightarrow D \rightarrow A$, którego całkowita waga wynosi 14.

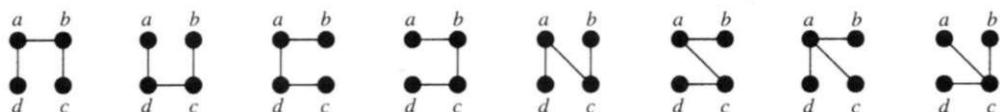
Rozdział 4

- 9.1** Drzewami są grafy o numerach 1, 2, 3, 5, 6, 11, 12, 13.

- 9.2**



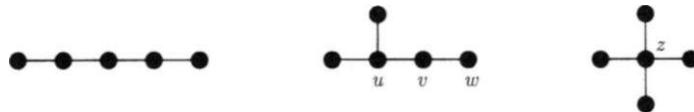
- 9.4**



- 9.6** Cykle: $abcdea, abca, abcsda, cdc$;
rozcięcia: $\{ab, ac, ad, ae\}, \{ac, ad, ae, bc\}, \{ad, ae, cd, cd\}, \{ae, de\}$.

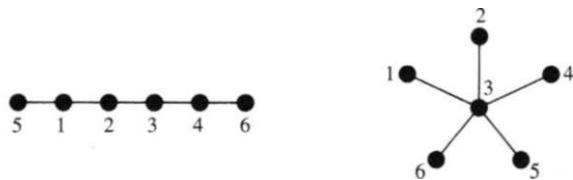
9.8 (a) To jest most; (b) to jest pętla.

10.1 Są trzy drzewa nieoznakowane mające 5 wierzchołków.



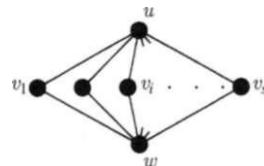
Pierwsze drzewo może być oznakowane na $(5!)/2 = 60$ sposobów; drugie drzewo może być oznakowane na $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ sposobów, odpowiadających 60 możliwym wyborom nazw dla wierzchołków u , v i w ; trzecie drzewo może być oznakowane na 5 sposobów, odpowiadających pięciu możliwym wyborom nazwy dla wierzchołka z . Liczba wszystkich sposobów jest więc równa $60 + 60 + 5 = 125$.

10.2 (a)



(b) $(4, 4, 4, 1)$ oraz $(4, 2, 2, 4)$.

10.4



Każde drzewo spinające grafu $K_{2,s}$ zawiera jedną z dwóch krawędzi uv_i lub v_iw dla każdego i oraz jedną dodatkową krawędź. Liczba drzew spinających jest więc równa $2^s \cdot s/2 = s \cdot 2^{s-1}$.

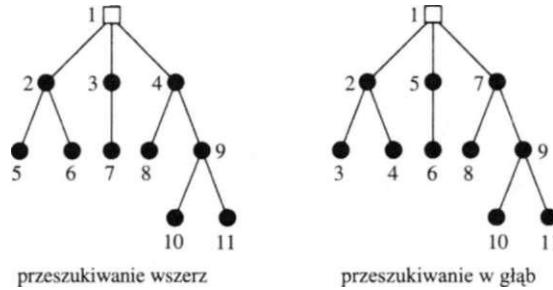
11.1 Otrzymamy jedno z następujących drzew z wagami, mających wagę 13:



11.5 Wierzchołek A : $15 + (2 + 4) = 21$; wierzchołek B : $17 + (2 + 3) = 22$; wierzchołek D : $15 + (3 + 4) = 22$; wierzchołek E : $12 + (5 + 6) = 23$.

11.6 Ten graf jest grafem spójnym mającym $n + (2n+1) + 1 + 1 = 3n+3$ wierzchołków i $[4n+(2n+1)+2+1]/2 = 3n+2$ krawędzi, a więc jest drzewem na mocy twierdzenia 9.1(3).

11.8 Otrzymamy następujące drzewa oznakowane, gdzie nazwy krawędzi odpowiadają kolejności odwiedzania wierzchołków:



11.10 Równania odpowiadające fundamentalnym cyklom mają postać:

$$\begin{aligned} VWZYXV : i_1 + i_3 - i_6 + i_7 &= 12; & VWZV : i_3 + i_5 + i_7 &= 0; \\ VWZYV : -i_2 + i_3 - i_6 + i_7 &= 0; & WZYW : -i_4 - i_6 + i_7 &= 0. \end{aligned}$$

Równania odpowiadające wierzchołkom mają postać:

$$\begin{aligned} V : i_1 + i_5 &= i_2 + i_3; & W : i_3 = i_4 + i_7; \\ X : i_0 = i_1; & Y : i_0 + i_6 = i_2 + i_4; & Z : i_5 = i_6 + i_7. \end{aligned}$$

Rozwiązaniem tego układu równań jest:

$$i_0 = i_1 = 8, \quad i_2 = 4, \quad i_3 = i_4 = 2, \quad i_5 = i_6 = -2, \quad i_7 = 0.$$

Rozdział 5

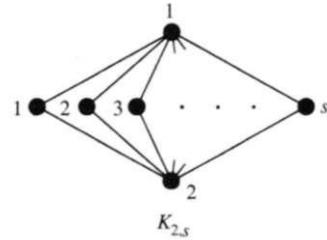
12.1



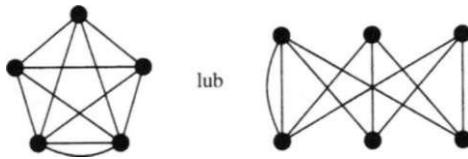
12.3 Nie, gdyż graf $K_{3,3}$ jest grafem nieplanarnym.

12.4 Graf pełny K_4 jest planarny dla $n \leq 4$.

Graf pełny dwudzielny $K_{r,s}$ (gdzie $r \leq s$) jest planarny, jeśli $r = 1$ lub $r = 2$, co widać na następujących rysunkach:

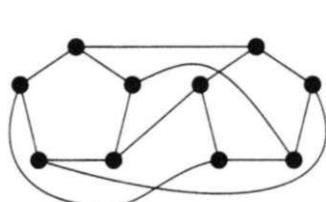
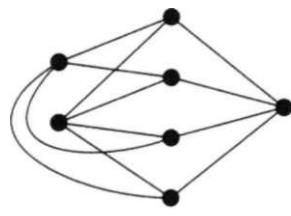


12.7 (a) i (b)



Pomimo że te grafy nie są ani homeomorficzne, ani ściągalne do K_5 czy $K_{3,3}$, to każdy z nich zawiera podgraf homeomorficzny lub ściągalny do K_5 lub $K_{3,3}$.

12.10 Na poniższych rysunkach te grafy zostały narysowane z dwoma przecięciami. Po paru próbach przekonasz się, że nie można ich narysować z jednym tylko przecięciem.



13.1 (a) $n = 8, m = 14, f = 8$ oraz $8 - 14 + 8 = 2$;

(b) $n = 6, m = 12, f = 8$ oraz $6 - 12 + 8 = 2$;

(c) $n = 9, m = 15, f = 8$ oraz $9 - 15 + 8 = 2$;

(d) $n = 9, m = 14, f = 7$ oraz $9 - 14 + 7 = 2$.

13.3 (a) Ponieważ graf G ma obwód 5, więc $5f \leq 2m$. W połączeniu ze wzorem Eulera $n - m + f = 2$ daje to żądaną nierówność. Gdyby graf Petersena był planarny, to z tej nierówności wynikałoby, że $15 \leq 40/3$, co jest nieprawdą. Zatem graf Petersena jest grafem nieplanarnym.

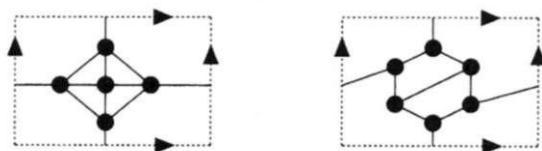
(b) Jeśli graf G ma obwód r , to $rf \leq 2m$. Korzystając ze wzoru Eulera, otrzymujemy nierówność $m \leq r(n - 2)/(r - 2)$.

- 13.8** (a) Ponieważ graf Petersena jest grafem nieplanarnym, jego grubość jest równa co najmniej 2. Ale graf Petersena może być złożony z dwóch grafów planarnych, na przykład z zewnętrznego pięciokąta wraz ze „szprychami” oraz z wewnętrznego pięciokąta. Zatem graf Petersena ma grubość 2.
 (b) Graf Q_4 jest grafem nieplanarnym, o czym można się przekonać na podstawie wniosku 13.4(2). A więc jego grubość wynosi co najmniej 2. Ale graf Q_4 można złożyć z dwóch grafów planarnych w następujący sposób:



Zatem graf Q_4 ma grubość 2.

14.1

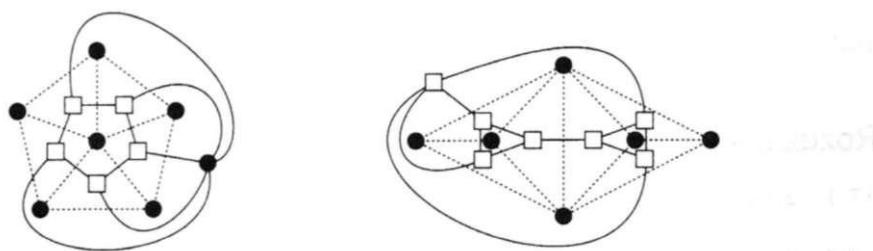


- 14.3** (a) $g(K_7) = \lceil (7-3)(7-4)/12 \rceil = 1$;
 $g(K_{11}) = \lceil (11-3)(11-4)/12 \rceil = \lceil 56/12 \rceil = 5$.
 (b) K_8 , gdyż $g(K_8) = \lceil (8-3)(8-4)/12 \rceil = \lceil 20/12 \rceil = 2$.

- 14.5** (a) Graf ośmiościanu.

(b) Dla takiego grafu $4n = 2m = 3f$. Z twierdzenia 14.2 wynika, że $m/2 - m + 2m/3 = 2 - 2g$, a więc $m = 12(1-g)$, a ta liczba jest niedodatnia. Otrzymana sprzeczność dowodzi, że taki graf nie może istnieć.

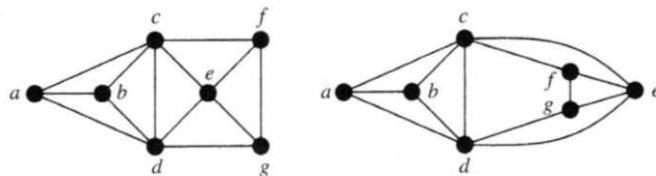
15.1



$$n^* = f = 6, \quad m^* = m = 10, \quad f^* = n = 6, \quad n^* = f = 7, \quad m^* = m = 11, \quad f^* = n = 6.$$

- 15.4** Gdyby taki graf istniał, to graf dualny do niego byłby grafem płaskim mającym pięć parami sąsiednich wierzchołków. Ponieważ graf K_5 jest nieplanarny, więc jest to niemożliwe.

15.5



Powyzsze oznakowania wierzchołków pokazują, że dane grafy są izomorficzne. W grafach dualnych stopnie wierzchołków wynoszą 3 lub 5 po lewej stronie i 3 lub 4 po prawej stronie, a więc grafy dualne nie mogą być izomorficzne.

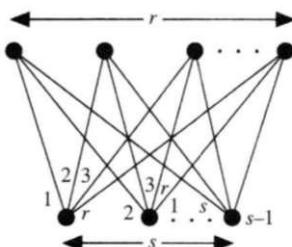
- 15.7** Jeśli G jest płaskim grafem prostym, w którym każdy wierzchołek ma stopień 5 lub 6, to graf G ma co najmniej 12 wierzchołków stopnia 5; jeśli ponadto każda ściana jest trójkątem, to graf G ma dokładnie 12 wierzchołków stopnia 5.
- 15.8** Jeśli graf G jest trójspójny, to G nie ma wierzchołków stopnia 1 i 2, a więc graf G^* nie ma pętli ani krawędzi wielokrotnych.
- 15.9** Jeśli graf G jest grafem dwudzielnym, to każdy cykl w G ma długość parzystą, a zatem każde rozcięcie w grafie G^* ma parzystą liczbę krawędzi; w szczególności każdy wierzchołek grafu G^* ma stopień parzysty, a więc graf G^* jest grafem eulerowskim. Implikacji w drugą stronę dowodzi się, odwracając to rozumowanie.
- 16.1** (a) „Nieskończona gwiazda”, otrzymana z połączenia początku układu współrzędnych z nieskończonie wieloma punktami na okręgu jednostkowym.
 (b) Graf pełny, którego wierzchołkami są punkty zbioru $\{x : 0 \leq x \leq 1\}$.
 (c) Nieskończona krata sześciokątna.
 (d) Nieskończona gwiazda lub nieskończona droga.
 (e) Graf otrzymany przez dołączenie nieskończonej drogi do któregoś wierzchołka grafu K_5 .
 (f) Nieskończona gwiazda lub nieskończona droga.
- 16.2** Rozważ nieskończoną gwiazdę z ćwiczenia 16.1(a).

Rozdział 6

17.1 2 i 4.

- 17.3** 2-chromatyczne: 2, 3, 5, 6, 8, 11, 12, 13, 17, 23;
 3-chromatyczne: 4, 7, 9, 14, 15, 16, 18, 19, 20, 21, 22, 25, 26, 27, 29;
 4-chromatyczne: 10, 24, 28, 30.

- 17.5** (a) Ograniczenie górne = 3, liczba chromatyczna = 3;
 (b) ograniczenie górne = k , liczba chromatyczna = 2.
- 17.7** Jeśli c_i jest liczbą wierzchołków pokolorowanych kolorem i dla $1 \leq i \leq \chi(G)$, to $c_i \leq n - d$. Zatem $n = c_1 + \dots + c_n \leq \chi(G)(n - d)$, a więc $\chi(G) \geq n/(n - d)$.
- 19.2** Czworościan: 4; ośmiościan: 2; sześciian: 3; dwunastościan: 3; dwudziestościan: 4.
- 19.3** Każdy graf cykliczny mający parzystą liczbę wierzchołków, na przykład C_4 .
- 19.5** Dowodzimy twierdzenia przez indukcję ze względu na liczbę państw. Twierdzenie jest trywialne dla map z co najwyżej sześcioma państwami. Niech G będzie mapą z n państwami i założymy, że wszystkie mapy z $n - 1$ państwami są 6-kolorowalne(f). Z twierdzenia Eulera wynika, że mapa G zawiera państwo F ograniczone co najwyżej pięcioma krawędziami. Jeśli ściągniemy F do punktu, to otrzymany graf ma $n - 1$ państw, a więc jest 6-kolorowalny(f). Wtedy 6-kolorowanie państw na mapie G otrzymamy, kolorując państwo F kolorem różnym od (co najwyżej pięciu) kolorów ścian otaczających F . Zatem graf G jest 6-kolorowalny(f).
- 20.1** 4 i 3.
- 20.3** Indeks chromatyczny 2: 3, 6, 8, 13;
 indeks chromatyczny 3: 4, 5, 7, 9, 10, 12, 15, 16, 17, 18, 20, 22, 23;
 indeks chromatyczny 4: 11, 14, 19, 21, 24, 25, 26, 27, 28, 29.
- 20.4** (a) Ograniczenie dolne 2, ograniczenie górne 3, prawdziwa wartość 3;
 (b) ograniczenie dolne 7, ograniczenie górne 8, prawdziwa wartość 7;
 (c) ograniczenie dolne 6, ograniczenie górne 7, prawdziwa wartość 6.
- 20.6** Założymy, że $r \geq s$ i że graf $K_{r,s}$ został narysowany w taki sposób jak na poniższym rysunku, tzn. tak, że s wierzchołków umieszczone poniżej r wierzchołków. Teraz kolorujemy kolejno krawędzie, używając kolorów $\{1, 2, \dots, r\}$, $\{2, 3, \dots, r, 1\}$, \dots , $\{s, \dots, r, 1, \dots, s - 1\}$.



- 20.7** Ponieważ graf G jest grafem regularnym stopnia 3, więc $\chi'(G) \geq 3$. Aby otrzymać 3-kolorowanie krawędzi G , kolorujemy krawędzie cyklu Hamiltona na przemian

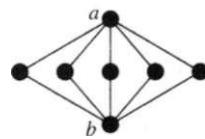
kolorem czerwonym i niebieskim, a następnie kolorujemy pozostałe krawędzie na zielono.

- 21.1** (a) $k(k-1)(k-2)(k-3)(k-4)(k-5)$;
 (b) $k(k-1)^5$.

Graf K_6 można pokolorować na $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 5040$ sposobów;
 graf $K_{1,5}$ na $7 \cdot 6^5 = 54432$ sposobów.

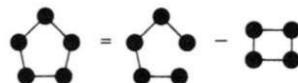
21.3

(a)



Jeśli wierzchołki a i b mają ten sam kolor, to istnieje $k(k-1)^5$ kolorowań; jeśli wierzchołki mają różne kolory, to istnieje $k(k-1)(k-2)^5$ kolorowań. Zatem $P_G(k) = k(k-1)^5 + k(k-1)(k-2)^5$.

(b) Z twierdzenia 21.1 wynika, że mamy



$$= k(k-1)^4 - k(k-1)(k^2 - 3k + 3) = k(k-1)(k^3 - 4k^2 + 6k - 4).$$

- 21.7** (a) Ponieważ $k(k-1)^{n-1} = k^n - (n-1)k^{n-1} + \dots + (-1)^{n-1}k$, więc graf G ma n wierzchołków, $n-1$ krawędzi i jedną składową. Z twierdzenia 9.1(3) wynika, że jest on drzewem o n wierzchołkach.
 (b) Ponieważ $P_G(k) = k(k-1)^4$, więc graf G musi być drzewem o pięciu wierzchołkach, a więc jednym z drzew



Rozdział 7

- 22.1** Pierwszy i ostatni digraf.

- 22.2** (a) Ponieważ szkielet digrafu D jest grafem spójnym, więc na podstawie twierdzenia 5.2 mamy $n-1 \leq m$. Ograniczenie górnne jest przyjmowane tylko przez

digrafy, w których każda para wierzchołków jest połączona dwoma przeciwnie skierowanymi łukami.

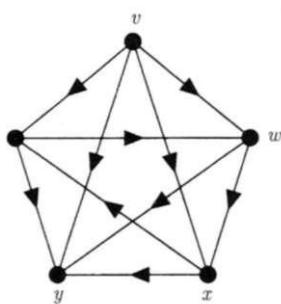
- (b) $n \leq m \leq n(n - 1)$; ograniczenie górne nie zmieniło się, a ograniczenie dolne wynika z tego, że cykl może być silnie spójny, podczas gdy żadne drzewo nie jest silnie spójne.

22.3

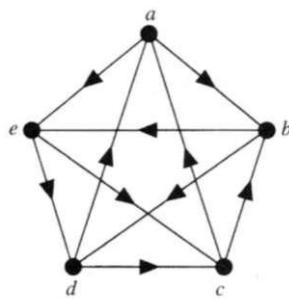
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

22.6 $G, 12$; $E, 10$; $B, 6$.

23.1



suma stopni wyjściowych = $1 + 3 + 2 + 1 =$ liczba łuków = 7;
 suma stopni wejściowych = $1 + 3 + 3 + 0 =$ liczba łuków = 7.



suma stopni wyjściowych = $4 + 2 + 2 + 0 + 2 =$ liczba łuków = 10;
 suma stopni wejściowych = $0 + 2 + 2 + 4 + 2 =$ liczba łuków = 10.

- 23.2 (a) $aeda, edcbe, aecbda$;
 (b) $aedabdcbeca$;
 (c) $aecbda$.

- 23.3** Jeśli mamy dwa źródła v i w , to turniej musi mieć oba łuki vw i wv , co jest niemożliwe; zatem żaden turniej nie może mieć więcej niż jedno źródło. Dowód dla ujścia jest podobny.

24.1

(a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



Stan E_1 jest powracający; wszystkie pozostałe stany są chwilowe.

(b)

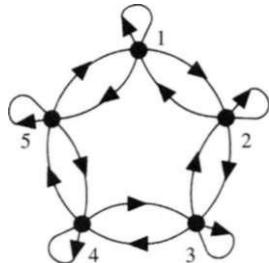
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



Wszystkie stany są powracające.

- 24.2** (a) Numerując graczy kolejno zgodnie z ruchem wskazówek zegara, otrzymujemy:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

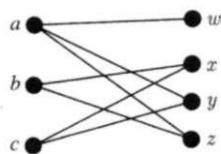


- (b) Łatwo stwierdzić, przyglądając się grafowi, że każdy stan jest powracający. Ponieważ $p_{ii} \neq 0$ dla każdego i , więc każdy stan jest nieokresowy. Zatem ten łańcuch jest ergodyczny.

Rozdział 8

25.1

(a)



(b) $aw, bx, cy; aw, bz, cx; aw, bz, cy; ay, bz, cx; az, bx, cy$.

(c)	A	\emptyset	a	b	c	ab	ac	bc	abc
	$ A $	0	1	1	1	2	2	2	3
	$ \varphi(A) $	0	3	2	2	4	4	3	4

Zatem $|A| \leq |\varphi(A)|$ dla każdego podzbioru A zbioru $\{a, b, c\}$.

- 25.3 Pierwszy, trzeci i czwarty wierzchołek zbioru V_1 są razem połączone z tylko dwoma wierzchołkami zbioru V_2 , a więc warunek kojarzenia małżeństw nie jest spełniony.

- 26.1 (a) nie ma transwersali — częściowymi transwersalami są $\emptyset, 1, 2, 3, 4, 5, 12, 13, 14, 15, 23, 24, 25, 35, 123, 124, 125, 134, 135, 234, 235, 1234$ i 1235 .
(b) jest transwersala — na przykład $\{1, 2, 4, 5\}$.
(c) nie ma transwersali — częściowymi transwersalami są $\emptyset, 1, 2, 3, 12, 13, 23$ i 123 .
(d) jest transwersala — na przykład $\{1, 4, 2, 5\}$.

- 26.3 Bezpośrednio możemy znaleźć osiem transwersal, z których każda zawiera wszystkie z wyjątkiem jednej litery słowa *MATROIDS*. Na przykład, jeśli pominiemy literę *M*, to kolejno wybierzymy litery *S, R, O, I, D, A, T*.

26.4 Istnieje tylko jedna transwersala: $\{1, 2, \dots, 50\}$.

- 26.6** (a) Oznaczmy zbiory rodzinę \mathcal{F} literami S_1, \dots, S_5 . Wtedy warunek kojarzenia małżeństw nie jest spełniony dla zbiorów $\{S_3, S_4\}$ i $\{S_2, S_3, S_4\}$.
 (b) Suma dowolnych k podzbiorów zawiera co najmniej jeden element, jeśli $k = 1$ lub $k = 2$; co najmniej 2 elementy, jeśli $k = 3$; co najmniej 4 elementy, jeśli $k = 4$; i 5 elementów, jeśli $k = 5$, a więc zawiera co najmniej $k - 1$ elementów dla każdej wartości k . Ale $t = 4$, $m = 5$, a więc rzeczywiście $k + t - m = k - 1$.

27.1

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 5 & 8 & 3 & 6 & 1 & 4 & 7 \\ 3 & 6 & 1 & 5 & 2 & 7 & 8 & 4 \\ 4 & 7 & 6 & 8 & 1 & 3 & 5 & 2 \\ 5 & 8 & 2 & 7 & 3 & 4 & 1 & 6 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 6 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

27.2

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 5 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

27.4 W obu macierzach rząd wyrazowy i wartość μ są równe 4.

- 27.6** (a) $\{a, b, d\}$.
 (b) Sprawdzamy tylko jeden przypadek:

$$|(\{c, e\} \cup \{a, b, d\}) \cap \{b, c, e\}| = |\{b, c, e\}| = 3 \text{ oraz } 3 \geq 2 + 1 - 3.$$

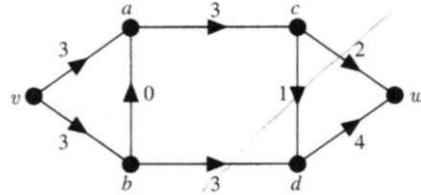
28.1 Postać krawędziowa: twierdzenie jest prawdziwe i $k = 2$ dla obu grafów;
 postać wierzchołkowa: twierdzenie jest prawdziwe i $k = 2$ dla obu grafów.

28.2 (a) i (b) Można sprawdzić bezpośrednio, że w każdym przypadku istnieją dokładnie trzy drogi rozłączne łączące daną parę wierzchołków.

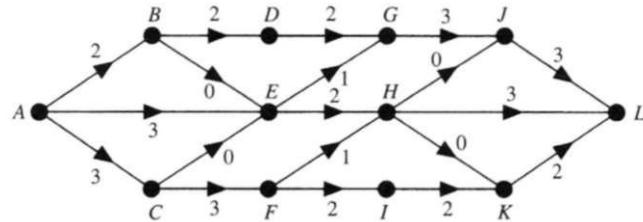
28.4 W każdym z tych grafów wartość k wynosi 3.

29.1 Przekrojami są $\{va, vb\}$, $\{va, ba, bd\}$, $\{va, ba, cd, dw\}$, $\{vb, ba, ac\}$, $\{vb, ba, cd, cw\}$, $\{ac, bd\}$, $\{ac, cd, dw\}$, $\{bd, cd, cw\}$ i $\{cw, dw\}$. Jedynym przekrojem minimalnym jest $\{bd, cd, cw\}$ o przepustowości 6.

(b) Odpowiednim przepływem maksymalnym o wartości 6 jest przepływ następujący:

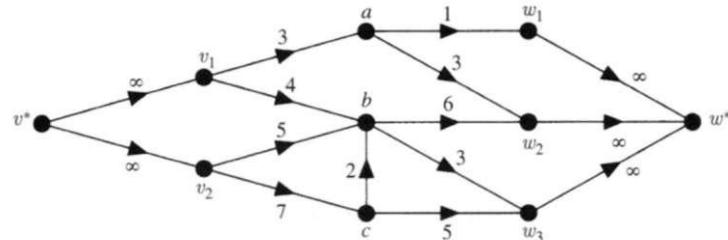


- 29.3** Przekrojem o przepustowości 8 jest $\{BD, EG, EH, FH, FI\}$. Przepływ o wartości 8 wygląda następująco:



- 29.5** (a) Dodaj nowy wierzchołek źródłowy v^* i połącz go ze wszystkimi źródłami v_i łukami v^*v_i o przepustowości nieskończonej oraz dodaj nowe ujście w^* połączone ze wszystkimi dotychczasowymi ujściami w_i łukami w_iw^* o przepustowości nieskończonej.

(b)



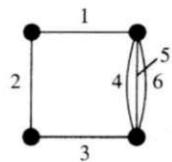
Rozdział 9

- 30.1** (a) Każdy podzbiór zbioru E jest niezależny, nie istnieją cykle oraz $r(A) = |A|$ dla każdego podzbioru A zbioru E ; jest to *matroid dyskretny*.
- (b) Jedynym zbiorem niezależnym jest zbiór pusty. Cyklami są $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{d\}$, $\{e\}$, a funkcja rzędu jest funkcją tożsamościowo równą 0; jest to *matroid trywialny*.
- (c) Zbiorami niezależnymi są podzbiory zbioru E mające 0, 1, 2 lub 3 elementy, cyklami są podzbiory czteroelementowe oraz dla dowolnego podzbioru A zbioru E mamy $r(A) = \min\{|A|, 3\}$; jest to *matroid 3-jednorodny*.

- 30.2** $M(G_1)$ ma bazy abd , acd i bcd ; cykl abc ; zbiory niezależne \emptyset , a , b , c , d , ab , ac , ad , bc , bd , cd , abd , acd i bcd .

$M(G_2)$ ma bazy pqs , pqt , prt , pst , qrs , qrt , qst i prs ; cykle pqr , rst i $pqst$; zbiory niezależne \emptyset , p , q , r , s , t , pq , pr , ps , pt , qr , qs , qt , rs , rt , st , pqs , pqt , prt , pst , qrs , qrt , qst oraz prs .

- 30.4** (a) Transwersalami częściowymi są \emptyset , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 12 , 13 , 14 , 15 , 16 , 23 , 24 , 25 , 26 , 34 , 35 , 36 , 123 , 124 , 125 , 126 , 134 , 135 , 136 , 234 , 235 i 236 . Te transwersale częściowe są zbiorami niezależnymi matroidu $M(G)$, gdzie G jest następującym grafem:



- (b) Bazami są 123 , 124 , 125 , 126 , 134 , 135 , 136 , 234 , 235 i 236 ; cyklami są 1234 , 1235 , 1236 , 45 , 46 i 56 .

- 30.8** (a) Wynika to natychmiast z ćwiczenia 5.11 i definicji rozcięcia.

- (b) graf G_1 : a , b i c ;
graf G_2 : pr , ps , pt , qr , qs , qt , rs i rt .

- 31.1** Z dokładnością do izomorfizmu czterema matroidami na zbiorze $\{a, b\}$ są:

bazy	zbiory niezależne	cykle
\emptyset	\emptyset	a, b
a	\emptyset, a	b
a, b	\emptyset, a, b	ab
ab	\emptyset, a, b, ab	—

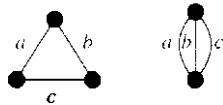
- 31.4** (b) Tak; przy zachowaniu oznaczeń z ćwiczenia 30.2 mamy $M(G_1) = M(ab, bc, d)$, $M(G_2) = M(pq, qrs, st)$.
(b) Tak; $M^*(G_1) = M(abc)$, $M^*(G_2) = M(pqr, rst)$.

- 31.6** Jeśli M jest matroidem k -jednorodnym na zbiorze E , to $M = M(\mathcal{F})$, gdzie \mathcal{F} składa się z k kopii zbioru E .

- 31.8** Cyklami matroidu Fano są linie, takie jak $\{1, 2, 4\}$, i uzupełnienia linii, takie jak $\{1, 2, 3, 6\}$.

- 32.1** (a) Jedyną bazą matroidu dyskretnego na zbiorze E jest sam zbiór E , a więc jedną bazą matroidu dualnego do matroidu dyskretnego jest \emptyset ; matroid dualny jest zatem matroidem trywialnym na zbiorze E .

(b) Matroid $(n - k)$ -jednorodny na tym samym zbiorze n -elementowym.



32.4 Bazami $M(K_3)$ są ab , ac i bc , a więc bazami $(M(K_3))^*$ są a , b i c . Zatem matroid $M(K_3^*)$ jest izomorficzny z $(M(K_3))^*$.

- 32.5**
- (a) Cyklami sprzężonymi są podzbiory siedmioelementowe; bazami sprzężonymi są podzbiory sześcioelementowe.
 - (b) Cyklami sprzężonymi matroidu $M(G_1)$ są ab , ac , bc i d , a bazami sprzężonymi są a , b i c .
Cyklami sprzężonymi matroidu $M(G_2)$ są pq , prs , prt , qrs , qrt i st , a bazami sprzężonymi są pr , ps , pt , qr , qs , qt , rs i rt .
 - (c) Cyklami sprzężonymi są 1 i 23 , a bazami sprzężonymi są 2 i 3 .
 - (d) Cyklami sprzężonymi są 1236 , 1257 , 1467 , 1345 , 2347 , 2456 i 3567 , a bazami sprzężonymi są wszystkie podzbiory czteroelementowe zawierające linię, takie jak 1247 .

33.1 Wystarczy zauważyc, że zbiory $\{1, 2\}$ i $\{1, 2, 4, 5\}$ mają odpowiednio rzędy 2 i 3. Transwersalą niezależną jest $\{1, 2, 5\}$.

33.5 Jeśli $M = M(S_1, \dots, S_m)$ jest matroidelem transwersalnym na zbiorze E , to $M = M_1 \cup \dots \cup M_m$, gdzie M_k jest matroidelem na zbiorze E , którego bazami są podzbiory jednoelementowe zbioru S_k . Na odwrót, jeśli M_1, \dots, M_m są matroidami rzędu 1, to ich suma $M = M_1 \cup \dots \cup M_m$ jest matroidelem transwersalnym na zbiorach S_1, \dots, S_m , gdzie S_k jest sumą zbiorów niezależnych matroidu M_k .

Skorowidz

*Jeszcze tylko trochę
Muszę napisać.
Potem zakończę
I powiem światu dobranoc.*

ROBERT HERRICK

- Algorytm** 56
 - Fleury'ego 50
 - zachłanny 74
- alkany 76
- alkohol 81
- Appel, K. 114
- automorfizm 34
- Baza matroidu** 177
 - sprzężona 188
 - blądzenie przypadkowe 146
- Camion, P. 143
- Caroll, L. 87, 151
- Cayley, A. 56, 68, 69, 77
- centrum grafu 67
- ciąg stopni 24
 - wyników turnieju 146
- Clarke, L. E. 69
- cykl 14, 42, 136
 - Eulera 47
 - Hamiltona 53
 - matroidu 178, 180
 - sprzężony 187
- czworościan 32
- Digraf** 13
 - eulerowski 141
 - hamiltonowski 142
 - półhamiltonowski 142
 - prosty 136
 - przeciwny 140
 - silnie spójny 136
 - spójny 136
 - z wagami 138
 - związany z łańcuchem Markowa 148
- digrafy izomorficzne 136
- Dirac, G. A.** 54
- długość trasy 41
- dopełnienie grafu 33
 - lasu spinającego 65
- droga 14, 42, 136
 - dwustronnie nieskończona 106
 - jednostronnie nieskończona 106
 - krytyczna 140
 - powiększająca przepływ 173
 - skończona 106
 - zamknięta 42
- drogi krawędziowo rozłączne 163
 - wierzchołkowo rozłączne 163
- drzewa poszukiwań 78
- drzewo 14, 63
 - oznakowane 69
 - rozpinające 65
 - spinające 65
- dwudziestościan 32
- dwunastościan 32
- Elementy równoległe matroidu** 179
- Euklides 99
- Euler, L. 24, 47, 48, 90
- Fary, I.** 83
- Ford, L. R. 164
- Fulkerson, D. R. 164
- fundamentalny zbiór cykli 66
 - rozcięć 66
- funkcja chromatyczna 130
- Genus (rodzaj) powierzchni** 95
 - grafu 96
- Ghouila-Houri, A. 142
- graf 11, 20
 - cykliczny 30

- graf dualny abstrakcyjnie 101
 - - geometrycznie 99
 - - Whitneya 104
- dwudzielny 32
- eulerowski 14, 47
 - - nieskończony 106
 - Grötzscha 55
 - hamiltonowski 14, 53
 - k -chromatyczny 110
 - k -kolorowalny 110
 - k -kolorowalny(e) 125
 - k -kolorowalny krawędziowo 125
 - k -krytyczny 116
 - k -spójny 45
 - - krawędziowo 44
 - krawędziowy 34
 - kubiczny 31
 - liniowy 30
 - lokalnie przeliczalny 105
 - - skończony 105
 - - nieplanarny 83
 - - nieskończony 105
 - - nispójny 14, 22
 - - ogólny 20
 - - orientowalny 137
 - - Petersena 31
 - - płaski 82
 - - półeulerowski 47
 - - półhamiltonowski 53
 - - pełny 30
 - - dwudzielny 32
 - - trójdzielny 34
 - - planarny 15, 82
 - - platoński 32
 - - prosty 13, 19
 - - przeliczalny 105
 - - pusty 29
 - - r -regularny 31
 - - regularny 31
 - - stopnia r 31
 - - samodopełniający 34
 - - skierowany 13, 135
 - - spójny 14, 22, 42
 - - ściągalny 85
 - - toroidalny 96
 - - wielościanu 91
 - - z wagami 57
 - - zewnętrznie planarny 88
 - grafy homeomorficzne 84
 - izomorficzne 21
 - grubość grafu 93
 - grupa automorfizmów 34
 - Haken, W. 114
 - Hall, P. 151
 - Halmos, P. 152
 - Hamilton, W. 53
 - Heawood, P. J. 97
 - Indeks chromatyczny 125
 - Instant Insanity 37
 - Kirchhoff, G. R. 56, 77
 - Kirkman, T. P. 53
 - kojarzenie małżeństw 16
 - koło 31
 - korzeń 78
 - kostka, k -kostka 33
 - König, D. 106
 - krawędź 11, 19, 20, 105
 - krawędzie sąsiednie 24
 - wielokrotne 13
 - Kuratowski, K. 85
 - kwadrat łaciński 159
 - Labirynt 17
 - las 63
 - spinający 65
 - lemat Königa 106
 - o uściskach dloni 25, 141
 - liczba chromatyczna 110
 - cyklomatyczna 65
 - przecięć grafu 86
 - Łańcuch ergodyczny 150
 - Markowa 148
 - nieprzywiedlny 148
 - łuk 135
 - nasycony 170
 - nienasycony 170
 - Macierz incydencji 27
 - - rodzinny 160
 - prawdopodobieństw przejścia 147, 148
 - sąsiedztwa 26
 - - digrafu 136
 - - zero-jedynkowa 160
 - mapa 120
 - - k -kolorowalna(f) 120
 - - k -kolorowalna(v) 120

- marszruta 41
- matroid 177, 180
 - binarny 183
 - cykliczny 177, 182
 - dualny 186
 - dwudzielny 184
 - dyskretny 181
 - eulerowski 184
 - Fano 184
 - grafowy 182
 - k -jednorodny 181
 - planarny 182
 - regularny 183
 - reprezentowalny 183
 - reprezentowalny nad ciałem 182
 - rozcięć 182
 - transwersalny 183
 - trywialny 180
 - wektorowy 177
- matroidy izomorficzne 181
- Mei-Ku Kwan 59
- minor matroidu 184
- most 44

- Nieskończona krata kwadratowa 105
 - – trójkątna 105
- nieskończony łańcuch Markowa 150

- Obwody drukowane** 92
 - elektryczne 77
- obwód grafu 45
- odległość w grafie 46
- ograniczenie matroidu 184
- ośmiościan 32

- PERT** 138
- Petersen 31
- pętla 13, 20
 - w matroidzie 179
- płaszczyzna rzutowa 98
- podgraf 25
- podprzestrzeń cykli grafu 52
 - rozcięć grafu 52
- podzbior zależny 178
- Polya, G. 77
- powiązanie 71
- prawa Kirchhoffa 77
- prawdopodobieństwo przejścia 147
- precelek z g otworami 96

- problem haremu 154
- kojarzenia małżeństw 16, 151
- komiwojażera 60
- mostów królewieckich 48
- najkrótszych połączeń 74
- prostokąt łaciński 159
- Prüfer, H. 69
- przechodzenie losowe 52
- przekrój minimalny 171
 - w sieci 171
- przepływ maksymalny 171
 - niezerowy 170
 - w sieci 170
 - wzduż łuku 170
 - zerowy 170
- przepustowość łuku 170
- przekroju 171
- przestrzeń wektorowa grafu 29
- przeszukiwanie w głąb 79
 - wszerz 79

- Rado, R.** 156
- Rédei, L.** 143
- Robbins, H. E.** 137
- Robertson, N.** 96
- rodzina 20
 - krawędzi 20
 - łuków 135
 - rozcięcie 43, 44
- rzad cykliczności 65
 - matroidu 177, 178
 - podzbioru 158
 - rozcięcia 65
 - spójności 65
 - sprzężony 188
 - wyrazowy 160
 - zbioru 178
- rzut stereograficzny 89

- Seymour, P.** 96
- siec 170
 - zdarzeń 138
- sfera z rączkami 95
- składowa 22
- skończone łańcuchy Markowa 146
- skojarzenie całkowite 152
- spójność (wierzchołkowa) 45
 - krawędziowa 44
- sprzężony matroid grafowy 182, 188

sprzężony zbiór niezależny 188
stan chwilowy 149
– ergodyczny 150
– nieokresowy 149
– okresowy 149
– pochłaniający 149
– powracający 149
stany w łańcuchu Markowa 148
stopień wejściowy 141
– – w sieci 170
– wierzchołka 11, 24, 105
– wyjściowy 141
– – w sieci 170
suma grafów 22
– matroidów 193
szeregowanie zadań 138
sześciian 32
szkielet digrafu 135

Ściana grafu 89, 96
– nieskończona 89
ściągnięcie krawędzi 26
– matroidu 184
ścieżka 42, 136
– eulerowska 141
– – dwustronna 106
– dwustronne nieskończona 106
– jednostronne nieskończona 106
– skończona 106
– zamknięta 42

Torus 95
transwersala 155
– częściowa 155
– niezależna 191
trasa 14, 41, 136
– dwustronne nieskończona 106
– jednostronne nieskończona 106
– nieskończona 106
– skończona 106
trójkąt 42
turniej 142
– nierozkładalny 146
– przechodni 146
Tutte, W. T. 189
twierdzenie Brooksa 111, 117
– Cayleya 69
– Diraca 54
– ekstremalne Turána 46

twierdzenie Eulera o wielościanach 90
– Halla o kojarzeniu małżeństw 152
– Königa 127
– Königa–Egerváryego 160
– Kuratowskiego 85
– macierzowe o drzewach 72
– Mengera 164
– o czterech barwach 16, 113
– o maksymalnym przepływie i minimalnym przekroju 171
– o pięciu barwach 112
– Orego 54
– Rado 192
– Ringela–Youngsa 97
– Tuttego 189
– Vizinga 125

Ujście 142
usunięcie krawędzi 25

Vaughan, H. E. 152

Waga krawędzi 57
Wagner, K. 83
wartość przepływu 170
warunek kojarzenia małżeństw 152
wektor prawdopodobieństw 148
węzeł 19
Whitney, H. 105, 176
wielomian chromatyczny 131
wielościan foremny (platoński) 32
wierzchołek 11, 19, 20, 105, 135
– incydentny z krawędzią 24
– – z łukiem 136
– izolowany 24
– końcowy grafu 24
– – trasy 41
– początkowy trasy 41
– rozcinający 45
wierzchołki sąsiednie 24, 136
wspólna transwersala 161
wstęp Möbiusa 98
wynik wierzchołka w turnieju 146

Youngs, J. W. T. 97

Zadanie chińskiego listonosza 59
zagadnienie czterech barw 113
– najkrótszej drogi 57
zbiór krawędzi 19

zbiór niezależny 177
– – krawędzi 47
– rozdzielający 44, 164
– rozspajający 43, 44, 163
– *vw*-rozdzielający 164

zbiór *vw*-rozspajający 163
– wierzchołków 19, 20, 135
zliczanie cząsteczek chemicznych 76

Źródło 142

Oto kres mojej drogi.

WILLIAM SZEKSPIR (MAKBET)