Wybrane przykłady zadań z teorii sterowania (AiR stopień I)

Dariusz Pazderski
Instytut Automatyki i Robotyki, Politechnika Poznańska

4 lutego 2024

Zad. 1

Dla danych transmitancji układów liniowych SISO $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$ określić postać kanoniczną sterowalną równania stanu i wyjścia. Rozpatrzeć następujące przypadki

a)

$$G(s) = \frac{1}{2s^3}, \tag{1}$$

b)

$$G(s) = \frac{s^2+5s+1}{2s^2+s+2}. \tag{2}$$

Rozwiązanie

a) Stwierdzamy, że stopień licznika jest niższy niż stopień mianownika, więc w równaniu wyjścia $D = 0$. Następnie sprowadzamy transmitancję do postaci standardowej, mnożąc licznik i mianownik przez odwrotność współczynnika przy najwyższej potędze zmiennej s mianownika:

$$G(s) = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\frac{1}{2s^3} = \frac{\frac{1}{2}}{s^3}. \tag{3}$$

Następnie definiujemy licznik i mianownik transmitancji w postaci odpowiednio: $L(s) = b_{n-1}s^{n-1} + \ldots + b_1 s + b_0$ oraz $M(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0$. W przypadku (3) mamy: $n = 3$, $a_2 = a_1 = a_0 = 0$ oraz $b_2 = b_1 = 0$, $b_0 = \frac{1}{2}$. Odwołując się do postaci kanonicznej sterowalnej wyznaczamy:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ostatecznie równanie stanu przedstawiamy w postaci następującej

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u,\ y = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} x,$$

gdzie $x \in \mathbb{R}^3$.

b) Dla podanej transmitancji stopień licznika jest równy stopniowi mianownika. W takim przypadku wykonujemy dzielenie wielomianów otrzymując

$$G(s) = \frac{1}{2} + \frac{\frac{9}{2}s}{2s^2+s+2}. \tag{4}$$

Określimy transmitancję właściwą przez

$$G^*(s) = \frac{\frac{9}{2}s}{2s^2+s+2}$$

i sprowadzimy ją do postaci standardowej (jednostkowy współczynnik przy najwyższej potędze mianownika):

$$G^*(s) = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} \frac{\frac{9}{2}s}{2s^2+s+2} = \frac{\frac{9}{4}s}{s^2+\frac{1}{2}s+1}.$$

Następnie postępując podobnie jak w punkcie b) określamy następujące macierze

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \, b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \, C = \begin{bmatrix} 0 & \frac{9}{4} \end{bmatrix}.$$

Uwzględniając wyraz stały w (4) otrzymujemy: $D = \frac{1}{2}$. Poszukiwana forma kanoniczna sterowalna układu o transmitancji (3) ma postać następującą:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \, y = \begin{bmatrix} 0 & \frac{9}{4} \end{bmatrix} x + \frac{1}{2}u,$$

przy czym $x \in \mathbb{R}^2$.

Zad. 2

Model pewnego układu nieliniowego opisuje następujące równanie różniczkowe

$$(2+\sin(z))\frac{d^4 z}{dt^4} + 2\frac{dz}{dt} + \cos(z)\, z + \operatorname{tg}(u) = 0, \tag{5}$$

gdzie $z \in \mathbb{R}$ oraz $u \in \mathbb{R}$. Zapisać równanie stanu tego układu wykorzystując zmienne fazowe.

Rozwiązanie

Rozważany układ opisywany jest przez równanie różniczkowe czwartego rzędu – dlatego stan układu wyrażamy przez

$$x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{bmatrix}^\top \in \mathbb{R}^4.$$

Następnie definiujemy

$$x_1 := z, \, x_2 := \dot{x}_1, \, x_3 := \dot{x}_2, \, x_4 := \dot{x}_3. \tag{6}$$

Należy zauważyć, że kolejne zmienne są pochodnymi po czasie poprzednich – jest to przypadek zmiennych fazowych. Uwzględniając definicję (6) w równaniu (5) otrzymujemy

$$(2+\sin(x_1))\,\dot{x}_4 + 2x_2 + \cos(x_1)\, x_1 + \operatorname{tg}(u) = 0.$$

Dalej obliczamy

$$\dot{x}_4 = -\frac{1}{2+\sin(x_1)}\left(2x_2 + \cos(x_1)\, x_1 + \operatorname{tg}(u)\right). \tag{7}$$

Równanie stanu układu przedstawimy w ogólnej postaci $\dot{x} = f(x,u)$. W rozważanym przypadku odwołując się do (6) i otrzymujemy

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ -\frac{1}{2+\sin(x_1)}\left(2x_2 + \cos(x_1)\, x_1 + \operatorname{tg}(u)\right) \end{bmatrix}.$$

Zad. 3

Dany jest następujący układ liniowy SISO

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u, \, y = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} x. \tag{8}$$

Znaleźć postać normalną sterowalną i na tej podstawie wyznaczyć transmitancję operatorową $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$. Zadanie rozwiązać dwiema metodami (wykorzystać treści przedstawione na wykładzie 2).

Rozwiązanie

Wyznaczenie wielomianu charakterystycznego

Stwierdzamy, że układ (8) jest układem $n = 2$ rzędu a poszczególne macierze wynoszą kolejno:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},\ b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Wielomian charakterystyczny macierzy A ma postać

$$\varphi(\lambda) = \det \begin{bmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 \end{bmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 1. \tag{9}$$

Biorąc pod uwagę współczynniki wielomianu (9) definiujemy macierz w postaci Frobeniusa dla układu przekształconego

$$A_F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Powołując się na postać kanoniczną sterowalną macierz wejścia wybieramy w postaci

$$b_F = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Przyjmujemy, że przekształcenie układu danego do postaci kanonicznej wynika z następujących relacji:

$$x_F = Px \Rightarrow\ A_F = PAP^{-1},\ b_F = Pb,\ C_F = CP^{-1}. \tag{10}$$

Obliczenie macierzy przekształcenia

- Metoda I

  Do obliczenia macierzy P^{-1} korzystamy z zależności (pamiętamy, że $n = 2$)

  $$P^{-1} = \begin{bmatrix} b & Ab \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_F & A_F b_F \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

  Uwaga! Zwrócić uwagę, kiedy zagadnienie nie miałoby rozwiązania.

- Metoda II

  Tym razem do obliczenia macierzy P^{-1} zastosujemy wzór iteracyjny. Zakładamy, że $P^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{p}_1 & \bar{p}_2 \end{bmatrix}$, gdzie $\bar{p}_1,\ \bar{p}_2 \in \mathbb{R}^2$. Wówczas zachodzi: $\bar{p}_2 = b$ oraz

  $$\bar{p}_1 = A\bar{p}_2 + a_1 b,$$

  przy czym a_1 jest odpowiednim współczynnikiem wielomianu $\varphi(\lambda)$. Stąd otrzymujemy

  $$\bar{p}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ \bar{p}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

  Dlatego $P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, podobnie jak w przypadku zastosowania metody I.

Obliczenie macierzy wyjścia i wyznaczenie transmitancji na podstawie sterowalnej formy kanonicznej

Wykorzystamy teraz zależności opisujące przekształcenia macierzy. Postaci A_F i b_F są już znane, więc nie ma potrzeby ich liczyć (w celu ćwiczenia sugeruję jednak sprawdzić te zależności dla obliczonej postaci macierzy P^{-1}). Nie znamy jeszcze szczegółowej postaci macierzy wyjścia C_F układu przekształconego – w analizowanym przypadku obliczmy ją następująco

$$C_F = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ostatecznie układ (8) w postaci kanonicznej sterowalnej można przedstawić następująco

$$\dot{x}_F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} x_F + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \; y = \begin{bmatrix} -2 & 3 \end{bmatrix} x_F.$$

Mianownik transmitancji znajdujemy na podstawie wielomianu $\varphi(\lambda)$, lub co równoważne, z postaci macierzy A_F. Następnie odwołując się do właściwości formy kanonicznej sterowalnej określamy wielomian licznika transmitancji uwzględniając macierz wyjścia. Stąd dostajemy

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{3s-2}{s^2-3s+1}.$$

Zad. 4

Zbadać czy podane macierze są diagonalizowalne i wyznaczyć wektory własne:

$a)$ $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$b)$ $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Rozwiązanie

$a)$ Wyznaczamy wielomian charakterystyczny danej macierzy kwadratowej:

$$\det(I\lambda - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda+1 & 0 & 1 \\ -3 & \lambda-2 & -3 \\ 3 & 0 & \lambda-1 \end{bmatrix} = (\lambda+2)(\lambda-2)^2.$$

Na tej podstawie znajdujemy dwie *wartości własne* $\lambda_1 = -2$ oraz $\lambda_2 = 2$, których *krotności algebraiczne* wynoszą odpowiednio $r_{a1} = 1$ oraz $r_{a2} = 2$. Dalej zbadamy ile liniowo niezależnych wektorów własnych można określić dla tych wartości własnych, tj. określimy *krotności algebraiczne* tych wartości własnych.

- Wektor własny wartości własnej λ_1 spełnia równanie:

$$(I\lambda_1 - A)\, v^1 = 0. \tag{11}$$

Podstawiając $\lambda_1 = -2$ do (11) otrzymujemy

$$I\lambda_1 - A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 1 \\ -3 & -4 & -3 \\ 3 & 0 & -3 \end{bmatrix}. \tag{12}$$

Liczba niezależnych wektorów własnych zależy od rzędu macierzy (12) i wynosi $n - \operatorname{rank}(I\lambda_1 - A)$, gdzie n jest liczbą wierszy (lub kolumn) macierzy kwadratowej A. W rozważanym przypadku $\operatorname{rank}(I\lambda_1 - A) = 2$ (tj. można znaleźć niezerowy podwyznacznik drugiego stopnia macierzy $I\lambda_1 - A$, przykładowo $\det \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} \neq 0$). Zatem istnieje $3-2=1$ liniowo niezależny wektor własny. Z tego wynika, że krotność geometrycza r_{g1} jest równa krotności algebraicznej $r_{a1} = 1$ (jest to zgodne z podstawową właściwością krotności algenraicznej, która spełnia relację: $r_{gi} \leq r_{ai}$). Przykładowy wektor własny można zdefiniować następująco:

$$v^1 = \alpha \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix}^\top,$$

gdzie $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

- Podobnie poszukujemy wektorów własnych dla λ_2. Obliczamy

$$I\lambda_2 - A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Rząd macierzy $I\lambda_2 - A$ jest równy $\operatorname{rank}(I\lambda_2 - A) = 2$, a zatem podobnie jak w poprzednim przypadku możemy określić tylko jeden liniowo niezależny wektor własny v^2. Oznacza to, że $r_{g2} = 1$ oraz $r_{g2} < r_{a2} = 2$. Współrzędne wektora własnego spełniają zależność

$$v^2 = \alpha \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^\top$$

dla $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

- Biorąc pod uwagę krotności geometryczne mamy

$$r_{g1} + r_{g2} = 2 < n,$$

co oznacza, że nie jest spełniony warunek diagonalizacji.

b) Procedurę powtarzamy dla drugiej postaci macierzy A. Wielomian charakterystyczny wynosi

$$\det(I\lambda - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda+1 & 0 & 1 \\ -3 & \lambda-2 & -1 \\ 3 & 0 & \lambda-1 \end{bmatrix} = (\lambda+2)(\lambda-2)^2,$$

mamy zatem $\lambda_1 = -2$, $r_{a1} = 1$ oraz $\lambda_2 = 2$, $r_{a2} = 2$.

- Dla wartości własnej λ_1 krotność algebraiczna wynosi 1, zatem krotność geometryczna musi również być równa $r_{g1} = 1$ (istnieje jeden wektor własny). Obliczamy

$$I\lambda_1 - A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -3 & -4 & -1 \\ 3 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

Wektor własny spełnia zależność

$$v^1 = \alpha \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^\top.$$

- Dla wartości własnej λ_2 mamy

$$I\lambda_2 - A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dalej obliczamy $\operatorname{rank}(I\lambda_2 - A) = 1$, co oznacza, że istnieją $3 - 1 = 2$ liniowo niezależne wektory własne, a więc $r_{g2} = 2$. Przykładowo możemy zdefiniować następujące wektory własne

$$v^{2,1} = \alpha \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^\top, v^{2,2} = \alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}^\top.$$

- Ponieważ zachodzi

$$r_{g1} + r_{g2} = 3 = n,$$

to macierz A można zdiagonalizować.

Zad. 5

Wyznaczyć odpowiedź układu autonomicznego

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} x. \tag{13}$$

Macierz tranzycji obliczyć trzema metodami wykorzystującymi: odwrotne przekształcenie Laplace'a, diagonalizację i wzór Sylvestera.

Rozwiązanie

$a)$ Wiadomo, że macierz fundamentalną (tranzycji) można obliczyć według następującej zależności

$$\Phi(t) = \exp(At) = \mathcal{L}^{-1}\left\{(Is-A)^{-1}\right\}. \tag{14}$$

W rozważanym przypadku mamy

$$(Is-A)^{-1} = \begin{bmatrix} s+2 & -4 \\ 0 & s-3 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{(s+2)(s-3)}\begin{bmatrix} s-3 & 4 \\ 0 & s+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+2} & \frac{4}{(s+2)(s-3)} \\ 0 & \frac{1}{s-3} \end{bmatrix}. \tag{15}$$

Następnie obliczamy odwrotne przekształcenia Laplace'a elementów macierzy (15). Kolejno otrzymujemy:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} = \lim_{s\to-2}(s+2)\frac{1}{s+2}e^{st} = e^{-2t}, \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\} = \lim_{s\to3}(s-3)\frac{1}{s-3}e^{st} = e^{3t},$$
$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{(s+2)(s-3)}\right\} = \lim_{s\to3}\frac{4(s-3)}{(s+2)(s-3)}e^{st} + \lim_{s\to-2}\frac{4(s+2)}{(s+2)(s-3)}e^{st} = \frac{4}{5}e^{3t} - \frac{4}{5}e^{-2t}. \tag{16}$$

Następnie uwzględniając postać (15) i obliczenia (16) oraz odwołując się do zależności (14) otrzymujemy

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} e^{-2t} & \frac{4}{5}e^{3t} - \frac{4}{5}e^{-2t} \\ 0 & e^{3t} \end{bmatrix}.$$

$b)$ W metodzie diagonalizacji macierzy tranzycji poszukujemy według następującego wzoru

$$\Phi(t) = \exp(At) = P^{-1}\exp(\Lambda t)P, \tag{17}$$

przy czym Λ jest macierzą diagonalną spełniającą zależność $\Lambda = PAP^{-1}$, natomiast P jest nieosobliwą macierzą przekształcenia. Należy zauważyć, że macierz P można zawsze wyznaczyć, jeśli $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ma n różnych wartości własnych $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

W rozpatrywanej metodzie w pierwszej kolejności diagonalizujemy macierz A. W tym celu obliczamy wielomian charakterystyczny

$$\varphi(\lambda) = \det(I\lambda - A) = (\lambda+2)(\lambda-3)$$

Stąd stwierdzamy, że macierz A ma dwie wartości własne, które oznaczamy przez: $\lambda_1 = -2$ i $\lambda_2 = 3$. Dalej obliczamy wektory własne wg zależności $(I\lambda_i - A)v^{i,1} = 0$ dla $i = 1{,}2$ i przyjmujemy:

$$v^{1,1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ oraz } v^{2,1} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Następnie określamy macierz

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} v^{1,1} & v^{2,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

oraz obliczamy

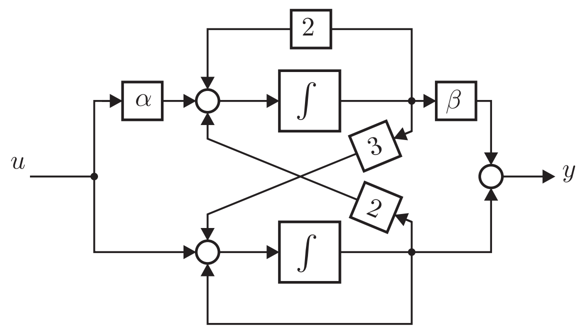
$$P = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Można sprawdzić, że $PAP^{-1} = \Lambda = \operatorname{diag}\{-\lambda_1, \lambda_2\} = \operatorname{diag}\{-2{,}3\} \in \mathbb{R}^{2\times2}$. Do obliczenia macierzy tranzycji na podstawie (17) musimy wyznaczyć $\exp(\Lambda t)$, co w rozważanym przypadku daje

$$\exp(\Lambda t) = \exp\left(\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} t\right) = \begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{bmatrix}.$$

Stąd, odwołując się do (17), otrzymujemy

$$\Phi(t) = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} e^{-2t} & 4e^{3t} \\ 0 & 5e^{3t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-2t} & \frac{4}{5}e^{3t} - \frac{4}{5}e^{-2t} \\ 0 & e^{3t} \end{bmatrix}.$$



Rysunek 1: Struktura układu SISO do zad. 5.

c) Aby skorzystać ze wzoru Sylvestera obliczamy wartości własne macierzy A rozwiązując równanie wielomianu charakterystycznego $\varphi(\lambda) = \det(I\lambda - A)$. Stąd otrzymujemy dwie różne wartości własne:$\lambda_1 = -2$ i $\lambda_2 = 3$ (por. podpunkt poprzedni). W takim przypadku wzór Sylvestera przyjmuje prostą postać

$$\exp(At) = \sum_{i=1}^{n} Z_i \exp(\lambda_i t), \tag{18}$$

gdzie

$$Z_i = \prod_{j=1,\ j\neq i}^{n} \frac{A - I\lambda_j}{\lambda_i - \lambda_j}$$

przy czym w rozważanym przypadku $n = 2$. Obliczając macierze Z_1 i Z_2 otrzymujemy

$$Z_1 = \underbrace{\cancel{\frac{A - I\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_1}}}_{\text{Uwaga: } i\neq j} \cdot \frac{A - I\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{1}{-2-3}\left(\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = -\frac{1}{5}\begin{bmatrix} -5 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{4}{5} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{19}$$

oraz

$$Z_2 = \frac{A - I\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \cdot \underbrace{\cancel{\frac{A - I\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_2}}}_{\text{Uwaga: } i\neq j} = \frac{1}{3-(-2)}\left(\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}(-2)\right) = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{4}{5} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{20}$$

Podstawiając (19) i (20) do (18) przy $n = 2$ możemy zapisać

$$\exp(At) = Z_1 e^{-2t} + Z_2 e^{3t} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{4}{5} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} e^{-2t} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{4}{5} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} e^{3t} = \begin{bmatrix} e^{-2t} & -\frac{4}{5}e^{-2t} + \frac{4}{5}e^{3t} \\ 0 & e^{3t} \end{bmatrix}.$$

W ten sposób określiliśmy macierz tranzycji.

Rozwiązanie układu autonomicznego (13) wyrazimy jako

$$x(t) = \exp(At)\, x_0, \tag{21}$$

gdzie x_0 jest warunkiem początkowym. Przyjmując, że $x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^\top \in \mathbb{R}^2$, oznaczając $x_0 = \begin{bmatrix} x_{01} & x_{02} \end{bmatrix}^\top \in \mathbb{R}^2$ i podstawiając macierz tranzycji w (21) mamy

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-2t} & \frac{4}{5}e^{3t} - \frac{4}{5}e^{-2t} \\ 0 & e^{3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{01} \\ x_{02} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-2t}x_{01} + \frac{4}{5}\left(e^{3t} - e^{-2t}\right) x_{02} \\ e^{3t}x_{02} \end{bmatrix}.$$

W rozwiązaniu wyróżnimy mod stabilny e^{-2t} oraz niestabilny e^{3t} (dominujący).

Zad. 6

Dla układu liniowego SISO, którego schemat przedstawiono na rys. 1 znaleźć wartości parametrów $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, dla których układ jest niesterowalny i nieobserwowalny.

Rozwiązanie

Na podstawie liczby elementów gromadzących energię stwierdzamy, że rząd układu wynosi $n = 2$. Stan układu wybieramy na wyjściach integratorów i na podstawie analizy schematu blokowego znajdujemy następujące równanie stanu i równanie wyjścia

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \alpha \\ 1 \end{bmatrix} u, \; y = \begin{bmatrix} \beta & 1 \end{bmatrix} x.$$

Stąd poszczególne macierze mają postać:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} \alpha \\ 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} \beta & 1 \end{bmatrix}.$$

W celu zbadania sterowalności obliczamy macierz sterowalności

$$Q_R = \begin{bmatrix} b & Ab \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & 2\alpha + 2 \\ 1 & 3\alpha + 1 \end{bmatrix}.$$

Podobnie obliczamy macierz obserwowalności:

$$Q_O = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta & 1 \\ 2\beta + 3 & 2\beta + 1 \end{bmatrix}.$$

Powołując się na kryterium Kalmana opisujące warunek sterowalności i obserwowalności poszukujemy wartości α i β, dla których zachodzi

$$\mathrm{rank} Q_R < n, \mathrm{rank} Q_O < n. \tag{22}$$

Ponieważ Q_R i Q_O są macierzami kwadratowymi (przypadek układu SISO) warunek rzędu można sprawdzić na podstawie wyznacznika. Dlatego warunek (22) można przedstawić następująco

$$\det Q_R = 0, \; \det Q_O = 0.$$

W pierwszej kolejności obliczamy

$$\det Q_R = 3\alpha^2 - \alpha - 2 = 0. \tag{23}$$

Rozwiązaniem (23) jest

$$\alpha \in \left\{ -\frac{2}{3}, 1 \right\}. \tag{24}$$

Analogicznie badamy obserwowalność. Obliczając wyznacznik macierzy Q_O otrzymujemy

$$\det Q_O = 2\beta^2 - \beta - 3 = 0$$

i znajdujemy rozwiązanie równania kwadratowego w postaci

$$\beta = \left\{ -1, \frac{3}{2} \right\}. \tag{25}$$

Podsumowując, stwierdzamy że dla wartości parametrów α i β zdefiniowanych przez (24) i (25) rozważany układ dynamiczny jest niesterowalny i nieobserwowalny.

Zad. 7

Dany jest pewien układ mechaniczny, który opisano następującym liniowym równaniem stanu

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} u,$$

gdzie $x \in \mathbb{R}^2$ oznacza pozycję i prędkość, natomiast $u \in \mathbb{R}$ jest wejściem. Wartość początkowa stanu jest równa $x(0) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix}^\top$. Zaproponować sygnał wejściowy, który pozwoli uzyskać stan $x(T) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^\top$ dla $T = 5$s.

Rozwiązanie

Załóżmy, że przebieg piewszej zmiennej stanu jest opisany wielomianem trzeciego stopnia

$$x_1(t) = c_3 t^3 + c_2 t^2 + c_1 t + c_0, \tag{26}$$

gdzie c_3,c_2,c_1 i $c_{0,}$ są stałymi współczynnikami. Druga współrzędna stanu opisuje prędkość i spełnia zależność różniczkową: $x_2 = \dot{x}_1$. Różniczkując (26) po czasie otrzymujemy

$$x_2(t) = 3c_3 t^2 + 2c_2 t + c_1. \tag{27}$$

W chwili $t = 0$ oraz $t = T$ zachodzi:

$$x_1(0) = c_0,\ x_1(T) = c_3 T^3 + c_2 T^2 + c_1 T + c_0 \tag{28}$$

oraz

$$x_2(0) = c_1,\ x_2(T) = 3c_3 T^2 + 2c_2 T + c_1. \tag{29}$$

Następnie rozwiązujemy układ równań (28)-(29) względem czterech współczynników. Mamy zatem

$$\begin{aligned} x_1(T) &= c_3 T^3 + c_2 T^2 + x_2(0) T + x_1(0), \\ x_2(T) &= 3c_3 T^2 + 2c_2 T + x_2(0). \end{aligned}$$

W celu obliczenia współczynników c_3 i c_2 możemy podane zależności przedstawić w następującej postaci macierzowo-wektorowej

$$\begin{bmatrix} T^3 & T^2 \\ 3T^2 & 2T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_3 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(T) - x_1(0) - x_2(0) T \\ x_2(T) - x_2(0) \end{bmatrix}.$$

Otrzymujemy więc

$$\begin{bmatrix} c_3 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{T^3} & \frac{1}{T^2} \\ \frac{3}{T^2} & -\frac{1}{T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(T) - x_1(0) - x_2(0) T \\ x_2(T) - x_2(0) \end{bmatrix}.$$

Podsumowując, wszystkie współczynniku wielomianu (26) zostały znalezione. W następnym kroku należy odwołac się do równania dynamiki opisującej pochodną $\dot{x}_2$. Dla podanego obiektu znajdujemy:

$$u = 3\dot{x}_2 + 12x_1 + \frac{3}{2}x_2, \tag{30}$$

przy czym $\dot{x}_2$ można wyznaczyć na podstawie (27) jako

$$\dot{x}_2(t) = 6c_3 t + 2c_2. \tag{31}$$

Stąd po uwzględnieniu (26), (27) i (31) w (30) otrzymujemy

$$\begin{aligned} u(t) &= 3(6c_3 t + 2c_2) + 12\left(c_3 t^3 + c_2 t^2 + c_1 t + c_0\right) + \frac{3}{2}\left(3c_3 t^2 + 2c_2 t + c_1\right) = \\ &= 12c_3 t^3 + \left(\frac{9}{2}c_3 + 12c_2\right) t^2 + (18c_3 + 3c_2 + 12c_1) t + 6c_2 + \frac{3}{2}c_1 + 12c_0. \end{aligned}$$

Podstawiając wartości liczbowe podane w treści zadania mamy

$$c_0 = x_1(0) = 2,\ c_1 = x_2(0) = -1$$

oraz

$$\begin{bmatrix} c_3 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{5^3} & \frac{1}{5^2} \\ \frac{3}{5^2} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(T) - x_1(0) - x_2(0) T \\ x_2(T) - x_2(0) \end{bmatrix} = \frac{1}{5^3} \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 15 & -25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - 2 - (-1)\cdot 5 \\ 1 - (-1) \end{bmatrix} = \frac{1}{5^3} \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 15 & -25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{125} \\ \frac{10}{125} \end{bmatrix}.$$

Zad. 8

Dla układu o równaniu

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} u,\ y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x \tag{32}$$

zaprojektować stabilizujące sprzężenie

a) od stanu

b) od wyjścia

tak, aby bieguny układu zamkniętego wynosiły $s_{z1} < 0$ oraz $s_{z2} < 0$ (zakładamy, ze bieguny są rzeczywiste). Zbadać możliwość realizacji zadania w obu przypadkach.

Rozwiązanie

Wymiar stanu układu (32) wynosi $n = 2$. Poszczególne macierze układu liniowego mają postać

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) Sprawdzamy sterowalność układu (32). Obliczając macierz sterowalności mamy

$$Q_R = \begin{bmatrix} b & Ab \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ponieważ $\det Q_R \neq 0$ to $\mathrm{rank} Q_R = 2 = n$. Na podstawie kryterium Kalmana stwierdzamy, że **układ jest sterowalny, co zapewnia możliwość realizacji postawionego zadania**.
Przyjmujemy, że

$$u = Kx, \tag{33}$$

gdzie $K = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix}$ jest macierzą wzmocnień ze współczynnikami $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$. Po uwzględnieniu (33) w (32) otrzymujemy równanie układu zamkniętego

$$\dot{x} = Hx, \tag{34}$$

gdzie $H = A + bK$. W rozważanym przypadku mamy

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2k_1 & 1 + 2k_2 \\ 1 + k_1 & -2 + k_2 \end{bmatrix}.$$

Obliczając wielomian charakterystyczny macierzy układu zamkniętego otrzymujemy

$$\varphi(\lambda) = \det(I\lambda - H) = \det \begin{bmatrix} \lambda - 2k_1 & -(1 + 2k_2) \\ -(1 + k_1) & \lambda - (-2 + k_2) \end{bmatrix} = \lambda^2 + (-2k_1 - k_2 + 2)\lambda - 5k_1 - 2k_2 - 1.$$

Z treści zadania wynika, że układ zamknięty ma posiadać dwa bieguny (wartości własne): s_{z1} i s_{z2}. Zatem wielomian charakterystyczny zadany przyjmuje postać

$$\varphi_d(\lambda) = (\lambda - s_{z1})(\lambda - s_{z2}) = \lambda^2 + (-s_{z1} - s_{z2})\lambda + s_{z1}s_{z2}. \tag{35}$$

Porównując współczynniki wielomianów φ i φ_d dostajemy następujące zależności

$$\begin{aligned} -2k_1 - k_2 + 2 &= -s_{z1} - s_{z2}, \\ -5k_1 - 2k_2 - 1 &= s_{z1}s_{z2}. \end{aligned}$$

Alternatywnie możemy zapisać

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{z1} + s_{z2} + 2 \\ -s_{z1}s_{z2} - 1 \end{bmatrix}$$

na podstawie czego otrzymujemy

$$\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} s_{z1} + s_{z2} + 2 \\ -s_{z1}s_{z2} - 1 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{z1} + s_{z2} + 2 \\ -s_{z1}s_{z2} - 1 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 2(s_{z1} + s_{z2}) + 2s_{z1}s_{z2} + 5 \\ -5(s_{z1} + s_{z2}) - 2s_{z1}s_{z2} - 12 \end{bmatrix}.$$

Stąd wyznaczamy współczynniki wzmocnień

$$\begin{aligned} k_1 &= -2(s_{z1} + s_{z2}) - 2s_{z1}s_{z2} - 5, \\ k_2 &= 5(s_{z1} + s_{z2}) + 2s_{z1}s_{z2} + 12. \end{aligned}$$

W doborze wzmocnień nie występują ograniczenia na wartości biegunów s_{z1} i s_{z2} – można dowolnie kształtować dynamikę układu zamkniętego (konsekwencja sterowalności).

b) W drugim przypadku wejście procesu opisuje następująca zależność

$$u = ky,$$

gdzie $k \in \mathbb{R}$ jest współczynnikiem wzmocnienia. Po podstawieniu równania wyjścia układ zamknięty przyjmuje postać (34) przy czym $H = A + bkC$. W analizowanym przypadku otrzymujemy

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} k \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2k & 1+2k \\ 1+k & -2+k \end{bmatrix}.$$

Wielomian charakterystyczny macierzy H wynosi

$$\varphi(\lambda) = \det(I\lambda - H) = \det \begin{bmatrix} \lambda - 2k & -(1+2k) \\ -(1+k) & \lambda - (-2+k) \end{bmatrix} = \lambda^2 + (2-3k)\lambda - 7k - 1.$$

Wielomian zadany opisany jest równaniem (35). Po porównaiu współczynników wielomianów φ i φ_d otrzymujemy

$$-3k + 2 = -s_{z1} - s_{z2}, \tag{36}$$
$$-7k - 1 = s_{z1} s_{z2}. \tag{37}$$

Z uwagi na to, że w układzie równań (36)-(37) występuje tylko jeden niezależny parametr k rozwiązanie możliwe jest tylko w szczególnym przypadku (tj. w ogólnym przypadku równania są sprzeczne). Sprawdzimy teraz, czy możliwe jest wybranie wzmocnienia k, które zapewni stabilność układu zamkniętego. Pamiętając, że s_{z1} i s_{z2} są ujemne (lub odwołując się do kryterium Hurwitza) definiujemy warunki stabilności asymptotycznej

$$-3k + 2 > 0, \tag{38}$$
$$-7k - 1 > 0. \tag{39}$$

oraz przekształcamy je następująco

$$k < \frac{3}{2} \text{ i } k < -\frac{1}{7}.$$

Stwierdzamy, że układ zamknięty jest stabilny dla $k < -\frac{1}{7}$. Jednocześnie nie jest możliwe uzyskanie dowolnych wartości biegunów s_{z1} i s_{z2}. Przykładowo, zakładając wartość s_{z1} na podstawie (36)-(37) można obliczyć wartość wzmocnienia i bieguna s_{z2}. Zagadnienie to nie wchodzi już w treść tego zadania (zainteresowanym proponuję wykonać stosowne obliczenia).

Zad. 9

Dla układu o transmitancji $G(s) = \frac{10}{2s+1}$ zaprojektować układ sterowania z kompensatorem całkującym zapewniający asymptotyczne śledzenie sygnału liniowo narastającego $y_r(t) = c_1 t + c_0$. Założyć, że bieguny dominujące układu zamkniętego wynikają z wielomianu charakterystycznego układu liniowego II-rzędu o parametrach: $\zeta = 0{,}8$ oraz $\omega_n = 2$. Oszacować czas trwania stanów przejściowych (regulacji) dla przedziału 5%.

Rozwiązanie

Proces sterowania jest układem I-rzędu o równaniu:

$$\dot{x} = -\frac{1}{2}x + u, \; y = 5x, \tag{40}$$

przy czym $x \in \mathbb{R}$, $u \in \mathbb{R}$ oraz $y \in \mathbb{R}$. Zauważmy, że stan procesu opisywany jest jedną zmienną skalarną, stąd $n = 1$. Proces ten jest sterowalny (co wynika z opisu za pomocą transmitancji), a więc można swobodnie stosować sprzężenie od stanu. Formalnie parametry układu (40) można wyrazić za pomocą: $A = -\frac{1}{2}$, $b = 1$ oraz $C = 5$.

Zadana trajektoria jest liniowo narastająca, zatem stopień wielomianu opisującego sygnał y_r wynosi $p = 1$. Stąd, zgodnie z algorytmem projektowania sterownika (por. wykład) definiujemy następujący stan rozszerzony

$$z := \begin{bmatrix} e \\ \dot{e} \\ \dot{x} \end{bmatrix},$$

przy czym $e := y - y_r$ jest błędem śledzenia sygnału zadanego. Układ rozszerzony o wymiarze $\bar{n} = n + p + 1 = 3$ przyjmuje postać

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} \dot{e} \\ \ddot{e} \\ \ddot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & C \\ 0 & 0 & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ \dot{e} \\ \ddot{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b \end{bmatrix} v,$$

gdzie $v := \ddot{u}$. Stosując bardziej zwarty opis otrzymujemy

$$\dot{z} = \bar{A}z + \bar{b}v, \tag{41}$$

przy czym dla danych parametrów procesu sterowania (40) mamy

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & C \\ 0 & 0 & A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \bar{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Układ (41) stabilizujemy za pomocą następującego sprzężenia od stanu

$$v = Kz = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix} z, \tag{42}$$

gdzie k_1, k_2 oraz k_3 są współczynnikami wzmocnień.

Po podstawieniu (42) do (41) otrzymujemy następujące równanie układu zamkniętego

$$\dot{z} = Hz,$$

gdzie

$$H = \bar{A} + \bar{b}K = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \\ k_1 & k_2 & k_3 - \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Następnie obliczając wielomian charakterystyczny macierzy H z parametrami k_1, k_2 oraz k_3 mamy

$$\varphi(\lambda) = \det(I\lambda - H) = \det \begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -5 \\ -k_1 & -k_2 & \lambda - \left(k_3 - \frac{1}{2}\right) \end{bmatrix} = \lambda^3 + \left(-k_3 + \frac{1}{2}\right)\lambda^2 - 5k_2\lambda - 5k_1. \tag{43}$$

Rozpatrywany wielomian jest wielomianem trzeciego stopnia. Z treści zadania wynika, że do zaprojektowania wzmocnień należy zastosować teorię biegunów dominujących. Zadany wielomian charakterystyczny wyrazimy następująco

$$\varphi_d(\lambda) = \left(\lambda^2 + 2\zeta\omega_n\lambda + \omega_n^2\right)(\lambda - s_3),$$

przy czym wiadomo, że $\zeta = 0{,}8$, $\omega_n = 2$, natomiast s_3 ma być biegunem niedominującym. Z rozwiązania układu drugiego rzędu wiadomo, że część rzeczywista biegunów dominujących wynosi: $s_{1,2} = -\zeta\omega_n = -1{,}6$. Biegun niedominujący przyjmujemy jako $s_3 = -10 \cdot 1{,}6 = -16$. Stąd:

$$\varphi_d(\lambda) = \left(\lambda^2 + 3{,}2\lambda + 4\right)(\lambda + 16) = \lambda^3 + 19{,}2\lambda^2 + 55{,}2\lambda + 64. \tag{44}$$

W wyniku porównania (43) i (44) otrzymujemy:

$$k_1 = -12{,}8,\ k_2 = -11{,}04,\ k_3 = -18{,}7.$$

Sygnał sprzężenia (42) wyrażamy następująco $v = -\begin{bmatrix} 12{,}8 & 11{,}04 & 18{,}7 \end{bmatrix} z = -12{,}8e - 11{,}04\dot{e} - 18{,}7\ddot{x}$. Przywołując definicję v całkujemy ten sygnał dwukrotnie i otrzymujemy rzeczywiste wejście procesu:

$$u = k_1 \iint e dt + k_2 \int e dt + k_3 x = -12{,}8 \iint e dt - 11{,}04 \int e dt - 18{,}7x.$$

Czas trwania stanów przejściowych oszacujemy na podstawie biegunów dominujących. W tym celu przypomnimy przybliżoną zależność

$$t_r \leq \frac{4{,}4}{\omega_n}$$

określoną dla przedziału $\delta = 0{,}05$ i $\zeta = 0{,}8$. W rozważanym przypadku mamy

$$t_r \leq \frac{4{,}4}{2} = 2{,}2.$$

Stwierdzamy, że czas trwania stanów przejściowych jest krótszy niż 2,2 s. W oszacowaniu nie uwzględniliśmy wpływu bieguna niedominującego, ale błąd ten można potraktować jako nieistotny.

Zad. 10

Dla układu o równaniu

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} u, \; y = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} x, \tag{45}$$

zaprojektować układ sterowania ze sprzężeniem wyprzedzającym zapewniający asymptotyczne śledzenie sygnału $y_r(t)$ (dla którego istnieje co najmniej druga pochodna po czasie). Założyć, że dobór wzmocnień wynika z wielomianu charakterystycznego układu liniowego II-rzędu o parametrach: $\zeta = 1$ oraz $\omega_n = 3$. Następnie założyć, że stan nie jest mierzalny i zaproponować obserwator dla danego procesu zakładając, że jego dynamika ma w niewielkim stopniu wpływać na dynamikę nominalną zaprojektowanego wcześniej układu zamkniętego.

Rozwiązanie

Parametry układu (45) opisują następujące macierze

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \; b = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}, \; C = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

Można sprawdzić, że proces jest sterowalny (tj. możemy zaprojektować dowolną dynamikę układu zamkniętego) oraz obserwowalny (tj. pozwala zaprojektować proces obserwacji o dowolnej dynamice).

Zdefiniujemy teraz proces odniesienia (referencyjny):

$$\dot{x}_r = Ax_r + bu_r, \; y = Cx_r. \tag{46}$$

Poszukujemy równania procesu odwrotnego do (46), tj. chcemy obliczyć x_r oraz u_r na podstawie znajomości trajektorii zadanej $y_r(t)$ oraz jej pochodnych po czasie. Na podstawie równania wyjścia w (46) dostajemy

$$x_{r1} = 2y_r. \tag{47}$$

Rozpisując równanie stanu (46) mamy

$$\begin{aligned} \dot{x}_{r1} &= 2x_{r2}, \\ \dot{x}_{r2} &= x_{r1} + 2x_{r2} + 4u_r. \end{aligned}$$

Stąd obliczamy

$$x_{r2} = \frac{1}{2}\dot{x}_{r1} \tag{48}$$

oraz

$$u_r = \frac{1}{4}\left(-x_{r1} - 2x_{r2} + \dot{x}_{r2}\right). \tag{49}$$

Odwołując się do (47) wiemy, że $\dot{x}_{r1} = 2\dot{y}_r$. Dlatego na podstawie (48) wnioskujemy, że

$$x_{r2} = \dot{y}_r$$

oraz $\dot{x}_{r2} = \ddot{y}$. W efekcie zależność (49) możemy przedstawić jako

$$u_r = \frac{1}{4}\left(-2y_r - 2\dot{y}_r + \ddot{y}_r\right). \tag{50}$$

Podsumowując, równanie modelu odwrotnego opiszemy za pomocą

$$x_r = \begin{bmatrix} 2y_r \\ \dot{y}_r \end{bmatrix}$$

oraz zależności (50).

Następnie zdefiniujemy błąd odtwarzania stanu przez

$$\tilde{x} := x - x_r.$$

Jego dynamikę możemy opisać następującym równaniem (por. wykład)

$$\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + b\tilde{u}, \tag{51}$$

gdzie $\tilde{u} = u - u_r$. Sprzężenie od stanu dla układu (51) definiujemy w postaci

$$\tilde{u} = K\tilde{x} = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} \tilde{x},$$

przy czym k_1 i k_2 są współczynnikami wzmocnień. Po podstawieniu sprzężenia od stanu otrzymujemy układ zamknięty o równaniu:

$$\dot{\tilde{x}} = H\tilde{x}, \tag{52}$$

gdzie $H = A + bK$. Dalej obliczamy

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 + 4k_1 & 2 + 4k_2 \end{bmatrix}$$

oraz

$$\varphi(\lambda) = \det(I\lambda - H) = \det \begin{bmatrix} \lambda & -2 \\ -(1 + 4k_1) & \lambda - (2 + 4k_2) \end{bmatrix} = \lambda^2 + (-2 - 4k_2)\lambda - 2 - 8k_1. \tag{53}$$

Na podstawie treści zadania wiemy, że wielomian charakterystyczny wynikający ze spełnienia założeń projektowych wynosi

$$\varphi_d(\lambda) = \lambda^2 + 2\zeta\omega_n\lambda + \omega_n^2 = \lambda^2 + 6\lambda + 9 = (\lambda + 3)^2. \tag{54}$$

Układ zamknięty posiada zatem jeden biegun podwójny $s_{1,2} = -3$. Porównując współczynniki wielomianów (53) oraz (54) otrzymujemy

$$k_1 = -1{,}375,\ k_2 = -2.$$

Sygnał wejściowy do obiektu zapiszemy jako

$$u = K\tilde{x} + u_r = -\begin{bmatrix} 1{,}375 & 2 \end{bmatrix} \tilde{x} + u_r.$$

W celu zaprojektowania obserwatora zakładamy, że dynamika procesu estymacji stanu ma być znacznie szybsza niż dynamika układu zamkniętego (52). Oznacza to, że dynamika, którą wprowadza obserwator wynika z biegunów niedominujących wobec biegunów dynamiki (52). W rozważanym przypadku biegun $s_{1,2} = -3$ można postrzegać jako biegun dominujący. Przy projektowaniu obserwatora przeprowadzimy lokowanie bieguna dla $s^o_{1,2} = -3 \cdot 10 = -30$. Będzie to zatem biegun niedominujący.

Obserwator Luenbergera projektujemy analizując macierz układu zamkniętego

$$H_o = A - LC,$$

przy czym w rozważanym przypadku $L = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 \end{bmatrix}^\top \in \mathbb{R}^2$ określa współczynniki wzmocnienia obserwatora. Obliczamy kolejno

$$H_o = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}l_1 & 2 \\ 1 - \frac{1}{2}l_2 & 2 \end{bmatrix}$$

oraz

$$\varphi_o(\lambda) = \det(I\lambda - H_o) = \det \begin{bmatrix} \lambda + \frac{1}{2}l_1 & -2 \\ -\left(1 - \frac{1}{2}l_2\right) & \lambda - 2 \end{bmatrix} = \lambda^2 + \left(\frac{1}{2}l_1 - 2\right)\lambda - l_1 + l_2 - 2. \tag{55}$$

Wielomian zadany wynika z wybranego bieguna niedominującego $s^o_{1,2}$ i ma postać

$$\varphi_{o,d}(\lambda) = (\lambda + 30)^2 = \lambda^2 + 60\lambda + 900. \tag{56}$$

Po porównaniu współczynników wielomianów (55) i (56) dostajemy

$$l_1 = 124,\ l_2 = 1026.$$