Dwie poprawne odpowiedzi: pyt. 1, 2, 3, ...
Punktacja: 3 p. za wyczerpującą odpowiedź, **2 p.** – 1 poprawna odpowiedź, ...
brak odpowiedzi poprawnej.
Uwaga! Jedno z pytań należy wykreślić. Ocenie będzie podlegało 18 zadań.

1. **Orbita** układu dynamicznego
   - [ ] jest zawsze krzywą zamkniętą
   - [ ] istnieje tylko dla układów dyskretnych w czasie
   - [x] istnieje jeśli reguła ewolucji jest odwracalna
   - [x] dla czasu $t \geq 0$ opisuje trajektorię stanu

2. Model układu o dynamice opisywanej przez **równania różniczkowe cząstkowe**
   - [ ] z definicji jest nieliniowy
   - [ ] może być aproksymowany przez skończoną liczbę równań różniczkowych zwyczajnych
   - [ ] nie posiada wejść
   - [x] posiada stan nieskończenie wymiarowy

3. **Równanie wyjścia** dla układu dynamicznego
   - [x] przedstawia zależność wyjścia od wejścia oraz stanu
   - [ ] jest równaniem różnicowym
   - [ ] opisuje dynamikę układu
   - [x] jest równaniem algebraicznym

4. Dany jest **planarny układ mechaniczny** przedstawiony na rys. 1. Krążek o momencie bezwładności J i promieniu r obraca się bez oporów. Na krążek nawinięta jest nieważka lina, która wykazuje zachowanie sprężyste. Na jej końcu przyczepiony jest ciężarek o masie m, który przesuwa się w prowadnicy wypełnionej cieczą. Linka i krążek poruszają się względem siebie bez poślizgu. Zakładając, że model sprężystości i sił oporów są liniowe a wejściem jest moment siły τ, wybrać **jedno z podanych równań różniczkowych**, które poprawnie opisuje dynamikę układu

   - [ ] $\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{r^2k}{J} & \frac{rk}{J} & 0 & 0 \\ \frac{rk}{m} & -\frac{k}{m} & 0 & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -g \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{J} \\ 0 \end{bmatrix} u$
   - [ ] $\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{r^2k}{J} & 0 & \frac{rk}{J} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{rk}{m} & 0 & -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -g \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$
   - [ ] $\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{r^2k}{J} & 0 & \frac{rk}{J} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k}{m} & 0 & -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -g \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$
   - [ ] $\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k}{r^2m+J} & \frac{k}{r^2m+J} & 0 & 0 \\ \frac{k}{m} & -\frac{k}{m} & 0 & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -g \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{r^2m+J} \\ 0 \end{bmatrix} u$

5. Dany jest układ liniowy o transmitancji

$$G(s) = \frac{s^2+1}{2s^3+s^2+2},$$

$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$

Napisać (bez wyprowadzania) równanie stanu i równanie wyjścia układu w postaci normalnej sterowalnej.

$\frac{s^2+1}{2s^3+s^2+2}$ $\frac{1}{2} + \frac{-\frac{1}{2}s^3}{2s^3+s^2+2} = \frac{1}{2} + \frac{-\frac{1}{2}s^2}{2(s^3+\frac{1}{2}s^2+1)} = \frac{1}{2} + \frac{-\frac{1}{4}s^2}{s^3+\frac{1}{2}s^2+1} =$

$+ \frac{-s^3-\frac{1}{2}s^2-1}{-\frac{1}{2}s^3}$

$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$

$\dot{x}_1 = x_2$
$\dot{x}_2 = x_3$
$\dot{x}_3 = -x_1 - \frac{1}{2}x_3 + u$
$y = -\frac{1}{4}x_3$

$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} x$

?

6. Układ o transmitancji

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^2+\alpha s},$$

gdzie $\alpha \neq 0$ przedstawiono z użyciem zmiennych stanu w **postaci modalnej**. Spośród podanych równań wskazać prawidłowe:

   - [ ] $\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\alpha \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\alpha} \end{bmatrix} u,\ y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x$
   - [x] $\dot{x} = \begin{bmatrix} -\alpha & 0 \\ 0 & -\alpha \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha} \\ -\frac{1}{\alpha} \end{bmatrix} u,\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x$
   - [ ] $\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\alpha \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha} \\ -\frac{1}{\alpha} \end{bmatrix} u,\ y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x$
   - [ ] $\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -\alpha \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{\alpha} \end{bmatrix} u,\ y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x$

7. Dany jest układ autonomiczny o równaniu

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} x.$$

W celu zbadania jego stabilności zaproponowano funkcję

$$V = x^\top \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} x.$$

$\dot{V} = 2x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2$

$\dot{V} = -x_1x_2 - x_2^2$

[x] V jest funkcją Lapunowa o pochodnej półujemnie określonej

[ ] V jest funkcją Lapunowa o pochodnej ujemnie określonej

[ ] zbiór E, dla którego $\dot{V} = 0$ jest określony przez: $E = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 = 0\}$

[x] największy zbiór dodatnio niezmienniczy M, dla którego $\dot{V} = 0$ ma postać: $E = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 = 0, x_2 = 0\}$

8. Dany jest pewien układ nieliniowy

$$\Sigma : \dot{x} = f(x) + G(x)u,$$

zdefiniowany w czasie ciągłym, przy czym $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$. Wybrać prawidłowe stwierdzenia dotyczące jego punktów równowagi:

[x] stan $x = \bar{x}$ jest punktem równowagi układu Σ dla dowolnego $u = \text{const}$, jeśli $f(\bar{x}) = 0$

[x] jeśli układ Σ nie posiada dryfu, to dowolny $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ jest punktem równowagi przy zerowym sygnale wejściowym, tj. $u = 0$

[ ] układ Σ zawsze posiada co najmniej jeden punkt równowagi dla $u = 0$

[ ] układ Σ może posiadać więcej niż jeden punkt równowagi przy $u = 0$

9. Dany jest układ DT LTI w postaci

$$x_{(n)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & 0 \end{bmatrix} x_{(n-1)} + \begin{bmatrix} 0 \\ \beta \end{bmatrix} u_{(n-1)},$$

$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & 0 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 0 \\ \beta \end{bmatrix}$

gdzie $\alpha \neq 0$ i $\beta \neq 0$ są stałymi parametrami. Układ jest

[x] sterowalny do zera

[x] niesterowalny do zera ile

[ ] osiągalny

[x] nieosiągalny

10. Dany jest układ nieliniowy

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} x_2 - 3x_2^3 \\ x_1 + x_2^2 + (1 + u^2)u \end{bmatrix}, y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x.$$

W otoczeniu punktu równowagi $x_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^\top$ określonego dla $u_0 = 0$

[x] układ jest obserwowalny w sensie Kalmana

[ ] układ jest nieobserwowalny

[ ] nie można określić obserwowalności na podstawie warunków Kalmana

11. Wykazać, że układ CT LTI w postaci normalnej obserwowalnej o jednym wyjściu jest obserwowalny dla dowolnych parametrów.

$A = \begin{bmatrix} 0 & -a_0 \\ 1 & -a_1 \end{bmatrix}$ $O_b = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix}$

$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$ $CA = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -a_0 \\ 1 & -a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -a_1 \end{bmatrix}$

$O_b = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -a_1 \end{bmatrix}$ $\det(O_b) = \frac{1}{-1} \neq 0$

12. Dla układu autonomicznego $\dot{x} = Ax$ uzyskano **rodzinę trajektorii stanu** przedstawioną na rys. 2. Macierz stanu tego układu ma postać:

[ ] $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ [x] $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$ [ ] $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$ [ ] $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$

→ 13. Pewien układ liniowy przedstawiono w postaci **normalnej Kalmana**

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}.$$

Realizacja minimalna tego układu ma **transmitancję toru wyjście-wejście** $G(s) = Y(s)/U(s)$ w postaci:

[ ] $G(s) = \frac{s+1}{s^2+5s+2}$ [ ] $G(s) = \frac{2s^2+s+1}{s^3+5s+2}$ [ ] $G(s) = \frac{2s^2+s+1}{s^4+4s^3+2s^2+5s+2}$

[x] $G(s) = \frac{2s^2+s+1}{s^3+3s^2+5s+2}$

14. Dla układu

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x,$$

zaprojektowano **obserwator Luenbergera** o wartościach wzmocnień: $l_1 = -10$, $l_2 = 1$. Algorytm estymacji stanu jest:

[x] niestabilny [ ] na granicy stabilności [ ] asymptotycznie stabilny

15. Dla pewnego procesu liniowego drugiego rzędu o jednym wyjściu zastosowano **filtr Kalmana**. Do syntezy filtru przyjęto macierz kowariancji procesu $Q \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ o stałych współczynnikach, natomiast współczynnik $R \in \mathbb{R}_+$ określano na podstawie właściwości statystycznych szumu pomiarowego. Podczas procesu estymacji stanu **wariancja szumu pomiarowego zmieniła się skokowo** i na tej podstawie zaktualizowano wartość współczynnika R. Na podstawie zarejestrowanych przebiegów wzmocnień filtru przedstawionych na rys. 3 można stwierdzić, że po czasie 50 s wartość współczynnika R została

[x] zwiększona [ ] zmniejszona

16. Dany jest pewien układ CT LTI: $\dot{x} = Ax + Bu$, $y = Cx + Du$. Wskazać prawdziwe stwierdzenia dotyczące jego **stabilności**:

[ ] jeżeli układ jest stabilny w sensie BIBS, to jest stabilny w sensie Lapunowa

[x] jeżeli układ jest stabilny w sensie BIBO to jest on stabilny w sensie BIBS

[ ] jeżeli układ autonomiczny $\dot{x} = Ax$ jest stabilny w sensie Lapunowa, to jest on stabilny w sensie BIBO

[x] jeżeli układ autonomiczny $\dot{x} = Ax$ jest asymptotycznie stabilny, to jest on stabilny w sensie BIBO

17. Dany jest układ liniowy

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x,$$

dla którego zastosowano algorytm odsprzęgania: $u = Fx + Gv$, gdzie $v \in \mathbb{R}$ jest nowym wejściem. **Dynamika wyjścia** otrzymana w wyniku odsprzęgania ma postać:

[ ] $\ddot{y} = v$ [x] $\dot{y} = v$

18. Dla układu SISO

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix} x$$

zaprojektowano **sterownik z modelem referencyjnym** w celu śledzenia zadanej trajektorii wyjścia $r(t)$. Algorytm sterowania określono w postaci

$$u = u_r - \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{k^\top \in \mathbb{R}^{1\times 2}} (x - x_r).$$

Algorytm zapewnia asymptotyczne śledzenie trajektorii dla:

[x] $x_r = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}r & \frac{1}{4}\dot{r} \end{bmatrix}^\top$, $u_r = \frac{1}{4}\ddot{r} + \dot{r} + r$ [ ] $x_r = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}r & \dot{r} \end{bmatrix}^\top$, $u_r = \frac{1}{2}\ddot{r} + 2\dot{r} + 2r$ [ ] $x_r = \begin{bmatrix} r & \dot{r} \end{bmatrix}^\top$, $u_r = \ddot{r} + \dot{r} + r$

[ ] $x_r = \begin{bmatrix} r & \frac{1}{2}\dot{r} \end{bmatrix}^\top$, $u_r = \frac{1}{2}\ddot{r}$

19. Dana jest dyskretna reprezentacja przestrzeni stanu przedstawiona na rys. 4. Koszty sterowania określono na krawędziach grafu. Korzystając z metody programowania dynamicznego znaleźć i **zaznaczyć na rysunku** optymalną trajektorię dyskretną przy przejściu ze stanu A do K. **Wypełnić wartości kosztów** w każdym stanie:

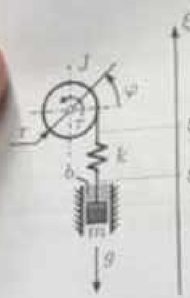
$V_A =$ 5

$V_B =$ 4, $V_C =$ 4, $V_D =$ 6

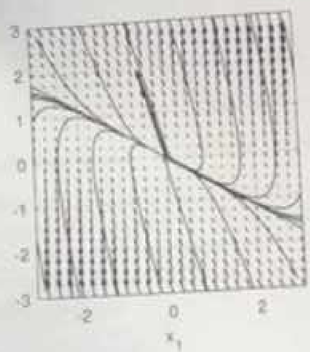
$V_E =$ 3, $V_F =$ 3, $V_G =$ 3

$V_H =$ 2, $V_I =$ 1, $V_J =$ 3

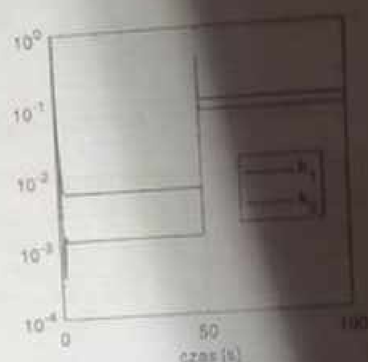
$V_K =$ 0



Rysunek 1: Schemat układu mechanicznego. Parametry elementu sprężystego i tłumika wynoszą odpowiednio k i b.



Rysunek 2: Rodzina trajektorii liniowego układu swobodnego II rzędu.



Rysunek 3: Przebiegi wzmocnień filtru Kalmana.