Układy Sterowania Optymalnego

Politechnika Poznańska
Instytut Automatyki i Robotyki

ĆWICZENIE 7 ÷ 8

Regulator optymalny LQR

Celem ćwiczenia jest prezentacja regulatora liniowo-kwadratowego, jego budowy oraz przykładowych zastosowań. W tym ćwiczeniu przedstawiony zostanie schemat regulacji w skończonym i nieskończonym horyzoncie czasowym. W ramach realizacji ćwiczenia studenci posłużą się językiem Python do zaimplementowania regulatora liniowo-kwadratowego, a następnie wykorzystają go w układzie sterowania.

W ramach przygotowania do ćwiczenia należy:

→ Przypomnieć wiadomości z zakresu:

- opisu liniowych układów dynamicznych w przestrzeni zmiennych stanu;
- podstawowych pojęć z zakresu układów regulacji automatycznej (pojęcia uchybu, wartości zadanej, sprzężenia od stanu, itp.).

1 Regulator LQR

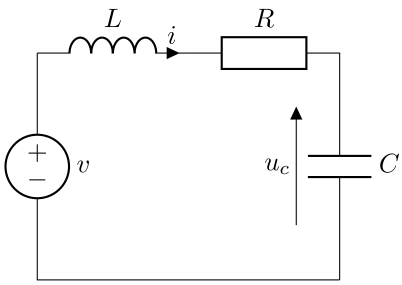
Regulator LQR (ang. *Linear Quadratic Regulator*) jest podstawowym algorytmem należącym do grupy algorytmów sterowania optymalnego. Algorytm wykorzystuje sprzężenie od stanu, dla którego wartości wzmocnień wyznaczone są tak, by zapewnić minimalizację kwadratowego wskaźnika jakości sterowania. Regulator LQR wykorzystuje pojęcie horyzontu czasowego, tj. chwili czasu, w której oczekuje się uzyskania minimalizacji zadanego wskaźnika regulacji. W przypadku sterownika z nieskończonym horyzontem czasowym przyjmuje się, że zadany wskaźnik osiągnie wartość minimalną dla chwili czasu $t \to \infty$. Z kolei regulator LQR ze skończonym horyzontem czasu zakłada ograniczony czas pracy układu, a poszukiwane nastawy zagwarantować mają najlepszą jakość regulacji jedynie w tym przedziale czasu.

Regulator LQR w czasie ciągłym może być zastosowany do liniowego układu dynamicznego opisanego równaniem różniczkowym w postaci

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u}, \tag{1}$$

gdzie $\boldsymbol{x}$ jest wektorem stanu, $\boldsymbol{u}$ wektorem sygnałów sterujących, natomiast A oraz B stanowią odpowiednio macierz stanu oraz macierz wejścia. Regulator LQR pozwala na stabilizację układu dynamicznego w punkcie równowagi, tj. $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$.

W ramach niniejszego ćwiczenia omówiony zostanie regulator LQR ze skończonym i nieskończonym horyzontem czasowym dla układ elektrycznego przedstawionego na Rys. 1. Przyjęto następujące wartości parametrów $R = 0.5\Omega$, $C = 0.5\mathrm{F}$ oraz $L = 0.2\mathrm{H}$. Przyjmując wektor zmiennych stanu w postaci $x = \begin{bmatrix} q_c & \dot{q}_c \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} q_c & i \end{bmatrix}^T$ (gdzie $q_c = Cu_c$ stanowi ładunek zgromadzony na kondensatorze) oraz sygnał sterujący $u = v$, uzyskuje się reprezentację w przestrzeni



Rysunek 1: Układ elektryczny RLC.

zmiennych stanu

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} u = A\boldsymbol{x} + Bu. \tag{2}$$

2 Nieskończony horyzont czasowy

Dla nieskończonego horyzontu czasowego przyjmuje się wskaźnik jakości opisany wzorem

$$J = \int_0^{\infty} \left(\boldsymbol{x}^T Q \boldsymbol{x} + \boldsymbol{u}^T R \boldsymbol{u}\right) dt, \tag{3}$$

gdzie R oraz Q stanowią stałe macierze wag, których wartości własne powinny być dodatnie (tzn. macierze te powinny być dodatnio określone). Tak zdefiniowany wskaźnik regulacji ma prostą interpretację, mianowicie osiąga on najmniejszą wartość wtedy, gdy dla wszystkich chwil czasu wartości zarówno wektora stanu $\boldsymbol{x}$, jak i sygnałów wejściowych $\boldsymbol{u}$, pozostają możliwie niewielkie. Macierze Q oraz R to macierze wag dobierane przez projektanta systemu. Ich dobór ma kluczowy wpływ na charakter odpowiedzi układu pracującego w algorytmie LQR. Zwiększanie wartości macierzy Q prowadzi do szybszej zbieżności wektora stanu $\boldsymbol{x}$ w układzie, kosztem zwiększonych wartości sygnałów sterujących $\boldsymbol{u}$. W ogólności wybór większych wartości dla macierzy Q powoduje minimalizację wskaźnika J przy mniejszej normie stanu $\boldsymbol{x}$ w porównaniu do normy sterowania $\boldsymbol{u}$. Wzrost macierzy R skutkuje natomiast działaniem przeciwnym – spada prędkość kompensacji zbieżności wektora $\boldsymbol{x}$, ale sygnał sterujący $\boldsymbol{u}$ pozostaje na niższym poziomie przez cały czas pracy układu.

Proponuje się sygnał sterujący w postaci sprzężenia od stanu

$$\boldsymbol{u} = -K\boldsymbol{x}, \tag{4}$$

gdzie K jest pewną stałą macierzą wzmocnień. Zadaniem algorytmu LQR jest odnalezienie takich wzmocnień regulatora, które gwarantują minimalizację wskaźnika jakości regulacji (3). W tym celu konieczne jest wyznaczenie Hamiltonianu systemu. Wyczerpujący opis wyprowadzenia algorytmu LQR dostępny jest w literaturze[1].

Wykazać można, że dla układu liniowego (1) z sygnałem sterującym (4), wskaźnik jakości (3) przyjmuje wartość minimalną dla wzmocnień regulatora zgodnych z formułą

$$K = R^{-1} B^T P, \tag{5}$$

gdzie P jest pewną stałą, dodatnio określoną macierzą stanowiącą rozwiązanie tzw. algebraicznego równania Riccati'ego (ARE, ang. *Algebraic Riccati Equation*). Równanie algebraiczne Riccati'ego to rodzaj nieliniowego równania, które pojawia się w kontekście problemów sterowania optymalnego w nieskończonym horyzoncie czasowym. Równanie dane jest wzorem

$$PA - PBR^{-1}B^T P + A^T P + Q = 0, \tag{6}$$

gdzie macierze A, B stanowią odpowiednio macierze stanu i wejścia układu nominalnego (1) oraz R, Q to macierze wag przyjętego wskaźnika jakości (3).

[1] Z. Hu, L. Guo, S. Wei, and Q. Liao, "Design of lqr and pid controllers for the self balancing unicycle robot," in 2014 IEEE International Conference on Information and Automation (ICIA). IEEE, 2014, pp. 972–977.

2.1 Wyznaczyć macierz P, jako rozwiązanie algebraicznego równania Riccati'ego dla dynamiki układu (2). Przyjąć jednostkową macierz $Q = I_2$ oraz $R = 1$. Do znalezienia rozwiązania równania Riccati'ego wykorzystać funkcję `scipy.linalg.solve_continuous_are`. Wyznaczyć i wypisać wartości wzmocnień K zgodnie z równaniem (5).

- *Jakie algorytmy są wykorzystywane w funkcji `solve_continuous_are`?*

2.2 Przygotować funkcję `model(x,t)` implementującą model dynamiki układu otwartego zgodnie z równaniem (2). Funkcja powinna przyjmować na wejściu stan układu $\boldsymbol{x}$ oraz aktualną chwilę czasu t. Przeprowadzić symulację odpowiedzi obiektu na wymuszenie skokowe w czasie $t \in (0, 5)$ s wykorzystując funkcję `odeint`.

- *Jaki jest charakter odpowiedzi skokowej obiektu?*

2.3 Zmodyfikować funkcję `model(x,t)` tak, by sygnał sterujący miał postać sprzężenia od stanu, tj. $u = -K\boldsymbol{x}$. Przeprowadzić symulację układu dla niezerowych warunków początkowych $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 1$ oraz zerowego wymuszenia. Zbadać wpływ macierzy Q oraz R na przebieg odpowiedzi układu.

- *Czy wszystkie zmienne stanu zbiegają do wartości zadanych?*
- *Czy macierze Q oraz R pozwalają dowolnie kształtować przebieg uchybu regulacji? Czy istnieje jakaś zależność między doborem macierzy Q oraz R?*

2.4 Wyznaczyć wartość wskaźnika jakości (3). Uwaga: w tym celu należy rozszerzyć stan $\boldsymbol{x}$ funkcji `model(x,t)` o wyrażenie podcałkowe wskaźnika J. Wówczas zostanie ono scałkowane przez `odeint`, a jego wartość zwrócona po zakończeniu symulacji. Przeanalizować wartości wskaźnika dla innych zestawów wzmocnień LQR.

- *Czy dla wzmocnień LQR wartość wskaźnika jakości jest najmniejsza?*
- *W jakim horyzoncie czasu wyznaczono wartość wskaźnika jakości?*

3 Skończony horyzont czasowy

Regulator LQR ze skończonym horyzontem czasu zakłada ograniczony czas pracy układu, a poszukiwane nastawy zagwarantować mają najlepszą jakość regulacji jedynie w tym przedziale. Jeżeli jako t_1 określono skończony horyzont czasowy, wówczas minimalizowany wskaźnik jakości przyjmuje postać

$$J = \boldsymbol{x}^T(t_1)S\boldsymbol{x}(t_1) + \int_0^{t_1} \left(\boldsymbol{x}(t)^T Q\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{u}(t)^T R\boldsymbol{u}(t)\right) dt, \tag{7}$$

gdzie S, R oraz Q stanowią stałe macierze wag których wartości własne powinny być dodatnie (tzn. macierze te powinny być dodatnio określone), natomiast $t \in [0, t_1]$ stanowi czas pracy układu. Dodatkowy składnik wskaźnika związany jest z wymaganą możliwie niską wartością zmiennych stanu w końcowej chwili t_1. Podobnie jak macierze R, Q, macierz S jest dobierana przez projektanta systemu. Zwiększanie jej wartości prowadzi do zmniejszania zmiennych stanu po zakończeniu czasu symulacji, może jednak skutkować większymi wartościami zmiennych stanu lub sygnałów sterujących we wcześniejszych chwilach czasu. Istotne jest, iż stan uzyskany w chwili t_1 w ogólności nie jest równoznaczny stanowi ustalonemu.

Proponuje się dla układu liniowego opisanego równaniem różniczkowym (1), sygnał sterujący w postaci

$$\boldsymbol{u} = -K(t)\boldsymbol{x}, \tag{8}$$

gdzie $K(t)$ jest pewnym zmiennym w czasie wektorem wzmocnień. Wówczas wykazać można, że wskaźnik jakości (7) przyjmuje wartość minimalną dla wzmocnień regulatora przyjętych zgodnie z formułą

$$K(t) = R^{-1}B^T P(t), \tag{9}$$

gdzie $P(t)$ jest pewną zmienną w czasie, dodatnio określoną macierzą stanowiącą rozwiązanie różniczkowego równania Riccati'ego. Dla LQR danego skończonym horyzontem czasowym równanie różniczkowe Riccati'ego przyjmuje postać

$$P(t)A - P(t)BR^{-1}B^TP(t) + A^TP(t) + Q = -\dot{P}(t). \tag{10}$$

W celu rozwiązania równania (10) konieczne jest zdefiniowanie warunku krańcowego dla macierzy $P(t)$. Na podstawie warunku transwersalności i kryterium Pontriagina wykazać można[2], że warunek końcowy

$$P(t_1) = S \tag{11}$$

zapewnia optymalizację przyjętego kryterium jakości. Należy podkreślić, że w tym przypadku znana jest jedynie wartość końcowa rozwiązania równania różniczkowego, a nie warunek początkowy. Zatem równanie (10) wyznacza wartości macierzy $P(t)$ od końcowej chwili symulacji do początkowej $t = t_1, \ldots, 0$.

3.1 Przygotować funkcję `riccati(p,t)` implementująca różniczkowe równanie Riccati'ego (10). Uwaga: Zwrócić uwagę na konieczność konwersji macierzy $P(t)$ do postaci wektorowej dla uzyskania zgodności z funkcją `odeint`. Wykorzystać na przykład `np.reshape`, `squeeze` oraz `np.tolist`.

3.2 Wykorzystując funkcję `odeint` wyznaczyć przebieg wartości macierzy $P(t)$ w czasie. Uwaga: jako warunek początkowy funkcji `odeint`, zgodnie z (11), przyjąć macierz jednostkową $S = I_2$ oraz podać odwrócony niechronologiczny wektor czasu $t = t_1, \ldots, 0$. Przyjąć $t_1 = 5$s. Wykreślić przebieg elementów macierzy $P(t)$ w czasie.

- *Czy spełniona jest zbieżność wartości macierzy $P(t)$ do S?*

3.3 Zmodyfikować funkcję `model(x,t)` z zadania **2.3** tak, by wprowadzać do niej wyznaczone wcześniej wartości macierzy $P(t)$, dla danego t. Uwaga: w tym celu można wykorzystać `scipy.interpolate.interp1d` z opcją `fill_value='extrapolate'` by zapewnić poprawną interpolację na krawędziach przedziału. Przeprowadzić symulację układu dla niezerowych warunków początkowych $x(0) = 1$ i $\dot{x}(0) = 1$. Zbadać wpływ macierzy S, Q oraz R na przebieg odpowiedzi układu.

- *Czy macierze S, Q oraz R pozwalają dowolnie kształtować przebieg uchybu regulacji? Czy istnieje jakaś zależność między doborem tych macierzy?*

3.4 Porównać działanie LQR ze skończonym i nieskończonym horyzontem czasowym dla $R = 1$, $Q = I_2$ oraz dwóch różnych zestawów wartości $S \in \{I_2, 100I_2\}$ oraz różnych czasów symulacji $t_1 \in \{1, 2, 5\}$s.

- *Dla jakich zestawów nastaw zadanie stabilizacji było zrealizowane poprawnie? Dlaczego?*

4 Stabilizacja w punkcie

W zastosowaniach praktycznych stabilizacja układu w punkcie $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ jest często niesatysfakcjonująca, natomiast pożądane jest przeprowadzenie układu do pewnej niezerowej konfiguracji $\boldsymbol{x}_d$, w którym powinien on zostać ustabilizowany[3]. Dla takiego przypadku rozważać można problem stabilizacji błędów regulacji w punkcie $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{x}_d - \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$. Dla ogólnej postaci systemu liniowego (1) oraz zadania stabilizacji w punkcie ($\dot{\boldsymbol{x}}_d = \boldsymbol{0}$) można opisać dynamikę błędu jako

$$\dot{\boldsymbol{e}} = \dot{\boldsymbol{x}}_d - \dot{\boldsymbol{x}} = -A\boldsymbol{x} - B\boldsymbol{u}. \tag{12}$$

[2]S. M. Aseev and A. V. Kryazhimskiy, "The pontryagin maximum principle and transversality conditions for a class of optimal control problems with infinite time horizons," SIAM Journal on Control and Optimization, vol. 43, no. 3, pp. 1094–1119, 2004.

[3]J. Hespanha, "Lecture notes on LQR/LQG controller design", 2005, pp. 37.

Aby uzyskać poprawną postać równań dynamiki systemu, konieczne jest usunięcie zmiennej $\boldsymbol{x}$ z równań opisujących błąd. Dodając do powyższego składnik $(A\boldsymbol{x}_d - A\boldsymbol{x}_d)$ uzyskuje się poprawną dynamikę układu

$$\dot{\boldsymbol{e}} = A\left(\boldsymbol{x}_d - \boldsymbol{x}\right) - B\boldsymbol{u} - A\boldsymbol{x}_d = A\boldsymbol{e} - B\boldsymbol{u} - A\boldsymbol{x}_d. \tag{13}$$

Postać ta różni się od postaci liniowej (1) występowaniem składnika stałego $A\boldsymbol{x}_d$. Sterowanie LQR powinno zatem kompensować ten składnik, wprowadzając odpowiednią modyfikację do sygnału sterującego w postaci $\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{u}_e + \boldsymbol{u}_c$ gdzie $\boldsymbol{u}_c$ dobrane jest tak, by

$$-B\boldsymbol{u}_c - A\boldsymbol{x}_d = 0, \tag{14}$$

natomiast $\boldsymbol{u}_e$ jest dobrane zgodnie z metodą LQR. Dynamika błędu przyjmuje wtedy postać

$$\dot{\boldsymbol{e}} = A\boldsymbol{e} + B\boldsymbol{u}_e. \tag{15}$$

Układ ten ma postać klasycznego układu liniowego zgodną z (1). Stabilizacja układu (15) prowadzi do realizacji zdefiniowanego zadania, gdyż $\boldsymbol{e} \to \boldsymbol{0}$ prowadzi do $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_d$, dla $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{x}_d - \boldsymbol{x}$. Traktując wektor uchybów $\boldsymbol{e}$ jako wektor stanu układu, możliwe jest zastosowanie regulatora LQR do minimalizacji funkcji celu i stabilizacji układu zamkniętego poprzez sygnał sterujący zgodny z (4).

Przyjmując sygnał sterujący $\boldsymbol{u}_e = -K\boldsymbol{e}$ oraz wyznaczając wartości wzmocnień K takie, by zapewniały (dla nieskończonego horyzontu czasu) minimalizację wskaźnika regulacji

$$J = \int_0^\infty \left(\boldsymbol{e}^T Q\boldsymbol{e} + \boldsymbol{u}_e^T R\boldsymbol{u}_e\right) dt \tag{16}$$

uzyskuje się sterowanie optymalne z wykorzystaniem metody LQR stabilizujące stan układu w pożądanym punkcie $\boldsymbol{x}_d$. Zauważyć można, że dla układu zamkniętego algebraiczne równanie Riccati'ego przyjmuje taką samą postać jak dla układu otwartego – macierze stanu oraz wejścia układu zamkniętego pozostają takie same jak w układzie zamkniętym. Zgodnie z zasadą superpozycji regulacja zamkniętego układu liniowego sprowadza się do stabilizacji układu otwartego w punkcie $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$ oraz wprowadzeniem dodatkowego sygnału sterującego przeprowadzającego układ do pożądanego stanu zadanego.

Niech rozważane będzie zadanie stabilizacji stanu układu danego rysunkiem (1) w wybranym punkcie

$$\boldsymbol{x}_d = \begin{bmatrix} x_{1d} & x_{2d} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} q_d & 0 \end{bmatrix}^T. \tag{17}$$

Należy zwrócić uwagę na fakt, że dla zmiennych stanu przyjętych zgodnie z równaniem (2) zachodzi zależność $x_2 = \dot{x}_1$ – stabilizacja układu w stałym punkcie wymaga, by $x_{2d} = 0$. Poszukuje się opisu dynamiki błędu w postaci równania stanu. Dla takiej definicji układu zaprojektowany zostanie regulator LQR gwarantujący minimalizację błędów śledzenia $\boldsymbol{e}$, a zatem zbieżność wektora stanu układu wyjściowego $\boldsymbol{x}$ do zdefiniowanego wektora wartości pożądanych $\boldsymbol{x}_d$.

Dynamika błędu ma postać (13), gdzie $A\boldsymbol{x}_d = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{LC}q_d \end{bmatrix}^T$, poprawna jest zatem relacja

$$\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{e}} \\ \ddot{\boldsymbol{e}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{e} \\ \dot{\boldsymbol{e}} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} u - \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{LC}q_d \end{bmatrix}. \tag{18}$$

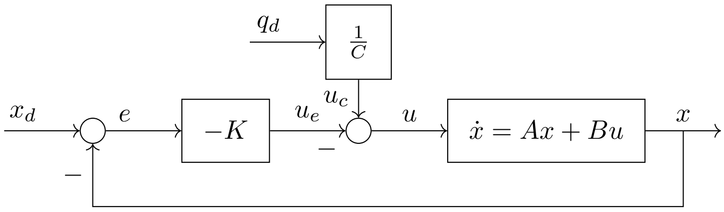
Ponieważ jedyny niezerowy element tego wyrażenia wpływa jedynie na zmienną sterowaną (tj. pierwszy element jest zerowy), możliwe jest jego odsprzęgnięcie poprzez zastosowanie sterowania

$$u = -u_e + u_c = -u_e + \frac{1}{C}q_d, \tag{19}$$

gdzie u_e stanowi nowy sygnał sterujący spełniający minimalizację wskaźnika (16). Implementacja układu zamkniętego przedstawiona jest na Rys. 2.

Na marginesie, warto zwrócić uwagę, ze dla rozważanego układu zaproponowane sterowanie przyjmuje postać

$$u_e = -K\boldsymbol{e} = -k_1 e - k_2 \dot{e} \tag{20}$$



Rysunek 2: Schemat sterowania LQR w pętli zamkniętej dla obiektu z Rys. (1).

co jest równoznaczne z tradycyjnym sterownikiem PD. Zależność ta wynika z przyjętej reprezentacji obiektu w postaci kanonicznej sterowalnej (dla której $x_2 = \dot{x}_1$, a zatem $e_2 = \dot{e}_1$.). Zależność ta obrazuje bliski związek między różnymi technikami sterowania, w szczególności sterowaniem poprzez sprzężenie od stanu, sterowaniem LQR oraz sterowaniem PID.

4.1 Zmodyfikować funkcję `model(x,t)` tak, by sygnał sterujący wyznaczany był zgodnie ze schematem przedstawionym na Rys. 2. Wyznaczyć wzmocnienia regulatora zgodnie z algorytmem LQR, tj. (5). Przeprowadzić symulację układu zamkniętego dla wartości zadanej $q_d \in \{1, 2, 5\}$. Zbadać wpływ macierzy Q oraz R na przebieg odpowiedzi układu.

- *Czy układ z regulatorem LQR z nieskończonym horyzontem czasu można wykorzystać do realizacji zadania innego niż stabilizacja w $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$?*

4.2 Analogicznie do przedstawionych wyprowadzeń, wyznaczyć sterownik LQR pracujący w skończonym horyzoncie czasowym i gwarantujący zbieżność stanu do niezerowej wartości zadanej. Zmodyfikować funkcję `model(x,t)` z zadania **3.3**, by realizowała zadanie stabilizacji w wybranym niezerowym punkcie q_d. Przeprowadzić symulację działania układu zamkniętego dla $q_d \in \{1, 2, 5\}$.

- *Czy układ z regulatorem LQR ze skończonym horyzontem czasu można wykorzystać do realizacji zadania innego niż stabilizacja w $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$?*

□