

Przykładowe pytania egzaminacyjne

v. 0.2.2

1. Orbita dla układu dynamicznego

- (a) istnieje jeśli reguła ewolucji jest odwracalna
- (b) dla dodatniego czasu opisuje trajektorię stanu
- (c) jest zawsze krzywą zamkniętą
- (d) definiowana jest tylko dla układów dyskretnych w czasie

2. Reguła ewolucji dla układu dynamicznego określonego na gładkiej przestrzeni stanu i czasu ciągłego $\dot{x} = f(x)$

- (a) opisywana jest przez strumień pola wektorowego f
- (b) może być funkcją nieciągłą
- (c) określona jest tylko w otoczeniu punktu równowagi
- (d) opisuje trajektorię stanu x

3. Stan układu

- (a) jest zbiorem parametrów układu
- (b) może być nieskończenie wymiarowy
- (c) jest elementem ciągłej lub dyskretnej przestrzeni stanu
- (d) dla układów liniowych zawsze jest skończenie wymiarowy

4. Równanie wyjścia

- (a) charakteryzuje dynamikę układu
- (b) opisuje zależność wyjścia od wejścia
- (c) jest równaniem algebraicznym
- (d) jest równaniem różniczkowym

5. Układ liniowy osobliwy (singularny), którego stan $x \in \mathbb{R}^n$ oraz wejście $u \in \mathbb{R}^m$, można przedstawić za pomocą następującego równania stanu:

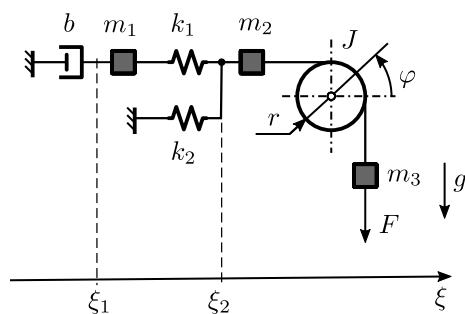
.....

.....

6. Automat komórkowy jest systemem dynamicznym, opisanym w czasie, w którym przestrzeń stanu jest

7. Dany jest planarny układ mechaniczny przedstawiony na rys. 1. Masy punktowe m_1 i m_2 poruszają się w kierunku poziomym, natomiast masa punktowa m_3 w kierunku pionowym. Błoczek o momencie bezwładności J i promieniu r połączony jest z masami m_2 i m_3 za pomocą nieważkiej i nierozciągliwej linki. Linka i błoczek poruszają się względem siebie bez poślizgu. Na masę m_3 działa siła wymuszająca $u = F$ oraz siła grawitacji. W układzie występują dwa liniowe elementy sprężyste i jeden liniowy tłumik. Równanie stanu tego układu ma postać następującą

$$(a) \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_1}{m_1} & -\frac{rk_1}{m_1} & -\frac{b}{m_1} & 0 \\ \frac{k_1}{rM} & -\frac{k_1+k_2}{M} & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{m_3 g}{rM} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{rM} \end{bmatrix} u, \text{ gdzie } M := m_2 + m_3 + \frac{J}{r^2}, x := [\xi_1 \quad \varphi \quad \xi_1 \quad \dot{\varphi}]^T$$



Rysunek 1: Schemat układu mechanicznego.

$$\begin{aligned}
 \text{(b)} \quad \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_1}{m_1} & \frac{k_1}{m_1} & -\frac{b}{m_1} & 0 \\ \frac{k_1}{rM} & -\frac{k_1+k_2}{M} & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{m_3 g}{M} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{M} \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix} u, \text{ gdzie } M := m_2 + m_3 + \frac{J}{r^2}, x := [\xi_1 \quad \xi_2 \quad \dot{\xi}_1 \quad \dot{\xi}_2]^\top \\
 \text{(c)} \quad \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_1}{m_1} & \frac{k_1}{m_1} & 0 & -\frac{b}{m_1} & 0 & 0 \\ \frac{k_1}{m_2} & -\frac{k_1+k_2}{m_2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{k_2}{m_3 J} & -\frac{k_1+k_2}{m_3 J} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{g}{J} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m_2} \\ \frac{1}{m_3 J} \end{bmatrix} u, \text{ gdzie } x := [\xi_1 \quad \xi_2 \quad \varphi \quad \dot{\xi}_1 \quad \dot{\xi}_2 \quad \dot{\varphi}]^\top \\
 \text{(d)} \quad \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_1}{m_1} & 0 & -\frac{b}{m_1} & 0 \\ 0 & -\frac{k_1+k_2}{m_3 J} & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{g}{J} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m_3 J} \end{bmatrix} u, \text{ gdzie } x := [\xi_1 \quad \xi_2 \quad \dot{\xi}_1 \quad \dot{\xi}_2]^\top
 \end{aligned}$$

8. Dana jest układ liniowy o transmitancji

$$G(s) = \frac{s^3 + 1}{2s^3 + s^2}.$$

Podać (bez wyprowadzania) równanie układu w postaci normalnej sterowalnej.

9. Dane są następujące układy liniowe

$$\begin{aligned}
 \Sigma_1 : \dot{x} &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, y = [1 \quad 0] x, \\
 \Sigma_2 : \dot{z} &= \begin{bmatrix} 7-2\alpha & 4\alpha-6 \\ 4-\alpha & 2\alpha-3 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} u, y = [-1 \quad 2] z.
 \end{aligned}$$

Układy są równoważne w sensie wejście-wyjście dla

- (a) $\alpha = 1$
- (b) $\alpha = 0$
- (c) $\alpha = 2$
- (d) $\alpha \in \emptyset$

10. Dane jest równanie układu w postaci modalnej

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u, y = [1 \quad 0] x.$$

Transmitancja $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$ układu może być przedstawiona następująco:

- (a) $G(s) = 0$
- (b) $G(s) = \frac{1}{s+3}$
- (c) $G(s) = \frac{1}{(s+3)^2}$
- (d) $G(s) = \frac{1}{s(s+3)}$

11. Dany jest liniowy układ autonomiczny o równaniu

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u, y = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} x.$$

Układ ten w postaci normalnej sterowalnej opisywany jest równaniem

$$\dot{z} = Az + bz, y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} z. \quad (1)$$

Podać postaci macierzy A i b układu (1):

.....

.....

.....

12. Dany jest układ dynamiczny w postaci

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} x_1^2 + x_2 - 2u \\ -x_2^3 \end{bmatrix},$$

dla którego zastosowanie następujące nieliniowe sprzężenie od stanu

$$u = \frac{1}{2}x_1^2 + 4x_1 + x_2.$$

W celu zbadania stabilności układu zamkniętego posłużono się bezpośrednią metodą Lapunowa, przyjmując $V = x^T x$. Funkcja V :

- (a) jest funkcją Lapunowa o pochodnej półujemnie określonej
- (b) jest funkcją Lapunowa o pochodnej ujemnie określonej
- (c) nie jest funkcją Lapunowa
- (d) jest dodatnio określona

13. Dany jest układ dynamiczny o równaniu

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u,$$

dla którego zastosowano sprzężenie od stanu w postaci

$$u = \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix} x.$$

W celu zbadania stabilności układu zamkniętego zaproponowano funkcję

$$V = x^T \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} x.$$

- (a) V jest funkcją Lapunowa o pochodnej półujemnie określonej
- (b) V jest funkcją Lapunowa o pochodnej ujemnie określonej
- (c) zbiór E , dla którego $\dot{V} = 0$ jest określony przez: $E = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 = 0\}$.
- (d) największy zbiór dodatnio niezmienniczy M , dla którego $\dot{V} = 0$ ma postać: $E = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 = 0, x_2 = 0\}$.

14. Podać warunek, który spełnia punkt równowagi \bar{x} układu nieliniowego $\dot{x} = f(x)$. Czy taki układ może nie posiadać punktu równowagi?

.....

.....

15. Pewien układ liniowy $\dot{x} = Ax + Bu$ jest niesterowalny. Układ ten jest stabilizowalny jeżeli

.....

.....

16. Zdefiniować stan osiągalny układu $\dot{x} = f(x, u)$

.....

.....

.....

.....

17. Dany jest układ DT LTI w postaci

$$x_{(n)} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x_{(n-1)} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u_{(n-1)},$$

gdzie $\alpha > 0$. Układ jest

- (a) osiągalny
- (b) sterowalny do zera
- (c) niesterowalny do zera
- (d) nieosiągalny

18. Dany jest układ nieliniowy

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} x_2 - 3x_2^2 \\ x_1 + (1 + u^2)u \end{bmatrix}.$$

W otoczeniu punktu równowagi $x_0 = [0 \ 0]^\top$ określonego dla $u_0 = 0$

- (a) układ jest sterowalny w sensie Kalmana
- (b) układ jest niesterowalny
- (c) nie można określić sterowalności na podstawie warunków Kalmana

19. Wykazać, że układ CT LTI w postaci normalnej sterowalnej jest sterowalny dla dowolnych parametrów.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

20. Zbiory stanów obserwowalnych X_O i nieobserwowalnych \tilde{X}_O układu

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -3 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} x, y = [3 \ 2 \ 4] x$$

mają postać

- (a) $X_O = \mathbb{R}^3, \tilde{X}_O = \emptyset$,
- (b) $X_O = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : x = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}, \tilde{X}_O = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : x = \alpha_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$, gdzie $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

(c) $X_O = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : x = \alpha_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}, \tilde{X}_O = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : x = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}, \text{ gdzie } \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

(d) $X_O = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : x = \alpha_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, \tilde{X}_O = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : x = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}, \text{ gdzie } \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

21. Dane są równoważne układy CT LTI

$$\Sigma : \dot{x} = Ax + Bu, y = Cx,$$

$$\Sigma^* : \dot{z} = \bar{A}z + \bar{B}u, y = \bar{C}z,$$

gdzie $z := Px$, przy czym P jest nieosobliwą macierzą kwadratową o stałych współczynnikach. Wykazać, że transmi-
tancje operatorowe wyjściowo-wejściowe obu układów są jednakowe.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

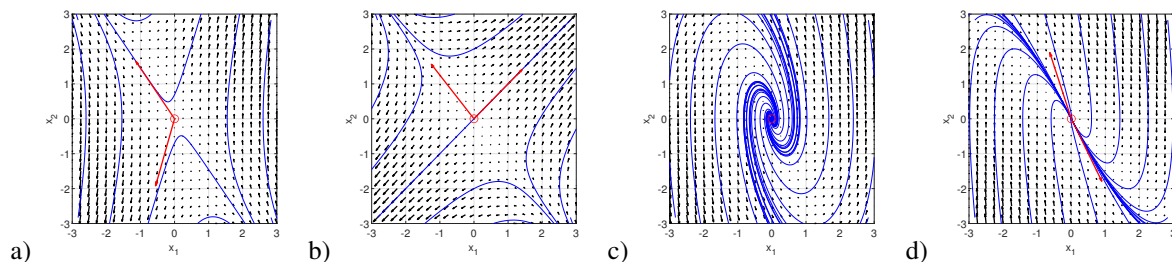
.....

.....

22. Dla układu autonomicznego

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} x$$

określono rodzinę trajektorii. Wybrać właściwą:



23. Pewien układ liniowy przedstawiono w postaci normalnej

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & -5 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ -2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}.$$

Podana podstać normalna nosi nazwę

Wymienić, które stany x_i są obserwowalne:

24. Dany jest układ autonomiczny o równaniu

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \beta & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} x, \quad (2)$$

gdzie $x \in \mathbb{R}^2$ oznacza stan, natomiast $\beta \in \mathbb{R}$ jest parametrem. Wiedząc, że rozwiązaniem równania (2) dla dowolnego warunku początkowego $x_0 = x(0) \in \mathbb{R}^2$ jest

$$x(t) = \begin{bmatrix} 3e^{-3t} - e^{-2t} & e^{-3t} - e^{-2t} \\ 2e^{-2t} - 2e^{-3t} & 2e^{-2t} - e^{-3t} \end{bmatrix} x_0, \quad (3)$$

wyznaczyć wartość parametru β . Wskazówka: nie obliczać rozwiązania układu (2) lecz skorzystać ze znanych modów rozwiązania (3).

- (a) β jest dowolny
- (b) $\beta = 0$
- (c) $\beta = 2$
- (d) $\beta = -4$

25. Dla układu o równaniu

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

zaprojektowano filtr Kalmana w czasie dyskretnym. Równanie etapu predykcji można określić następująco:

- (a) $\hat{x}_{(k|k-1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0,01 \\ -0,01\omega^2 & 1 \end{bmatrix} \hat{x}_{(k-1|k-1)} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0,01 \end{bmatrix} u_{(k)}$
- (b) $\hat{x}_{(k|k-1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0,99 \\ -0,99\omega^2 & 1 \end{bmatrix} \hat{x}_{(k-1|k-1)} + \begin{bmatrix} 0,01 \\ 0,01 \end{bmatrix} u_{(k)}$
- (c) $\hat{x}_{(k|k-1)} = \begin{bmatrix} 0,99 & 0,1 \\ -0,01\omega^2 & 0,99 \end{bmatrix} \hat{x}_{(k-1|k-1)} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0,99 \end{bmatrix} u_{(k)}$
- (d) $\hat{x}_{(k|k-1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0,99 \\ -0,01\omega^2 & 1 \end{bmatrix} \hat{x}_{(k-1|k-1)} + \begin{bmatrix} 0,99 \\ 0,01 \end{bmatrix} u_{(k)}$

26. Dla układu

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x,$$

zaprojektowano obserwator Luenbergera o wartościach wzmocnień: $l_1 = 10$, $l_2 = -4$. Algorytm estymacji stanu jest

- (a) niestabilny
- (b) na granicy stabilności
- (c) asymptotycznie stabilny

27. Dla pewnego procesu liniowego o jednym wyjściu zastosowano filtr Kalmana. Przyjęto macierz kowariancji Q o stałych współczynnikach. Podczas procesu strojenia zwiększono wariancję szumu pomiarowego. Stwierdzono, że wartości wzmocnień filtru Kalmana co do wartości bezwzględnych:

- (a) wzrosły
- (b) zmalały
- (c) pozostały stałe

28. Krótko scharakteryzować zasadę separacji dla układów liniowych.

29. Dla układu liniowego o transmitancji

$$G(s) = \frac{4}{s^2 + s - 3}$$

określono postać normalną sterowalną (regulatorową) a następnie zaprojektowano regulator w postaci

$$u := \begin{bmatrix} -k & -2 \end{bmatrix} x,$$

gdzie $x \in \mathbb{R}^2$ jest stanem, natomiast $k \in \mathbb{R}$ jest współczynnikiem wzmocnienia. Wyznaczyć wartość wzmocnienia k zakładając, że układ zamknięty jest asymptotycznie stabilny i nie wykazuje odpowiedzi oscylacyjnej

- (a) $k \geq 3$
- (b) $k \in (3, \frac{21}{4}]$
- (c) $k \in [-\frac{21}{4}, 3)$
- (d) $k \in (-1, 3)$

30. Dany jest układ liniowy

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u, y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} x,$$

dla którego zastosowano algorytm odprężania w postaci

$$u = Fx + Gv,$$

gdzie $v \in \mathbb{R}^2$ jest nowym wejściem. Macierze F i G mają postać:

- (a) $F = \begin{bmatrix} -1 & -2 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$
- (b) $F = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$
- (c) $F = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$
- (d) $F = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

31. Dla układu SISO

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

zaprojektowano sterownik z modelem referencyjnym w celu śledzenia zadanej trajektorii wyjścia $r(t)$. Algorytm sterowania określono w postaci

$$u = u_r - \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{k^T \in \mathbb{R}^{1 \times 2}} (x - x_r).$$

Algorytm zapewnia asymptotyczne śledzenie trajektorii dla:

- (a) $x_r = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}r & \dot{r} \end{bmatrix}^T, u_r = \frac{1}{2}\ddot{r} + 2\dot{r} + 2r$
- (b) $x_r = \begin{bmatrix} r & \dot{r} \end{bmatrix}^T, u_r = \ddot{r} + 2\dot{r} + 2r$
- (c) $x_r = \begin{bmatrix} r & \frac{1}{2}\dot{r} \end{bmatrix}^T, u_r = \frac{1}{2}\ddot{r} + 2\dot{r} + 2r$
- (d) $x_r = \begin{bmatrix} r & \frac{1}{2}\dot{r} \end{bmatrix}^T, u_r = \frac{1}{2}\ddot{r}$

32. Dla układu o równaniu

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\alpha x + u, \\ y &= \beta x, \end{aligned}$$

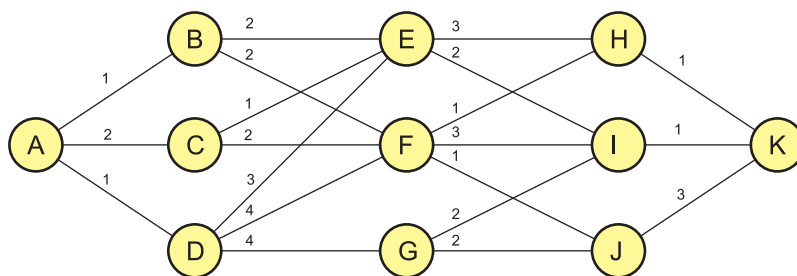
gdzie $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, u \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, zaprojektowano sterownik w postaci

$$u = -\frac{4}{\beta} \int e d\tau + (\alpha - 4)x,$$

przy czym $e = y - r$; r jest zadaną trajektorią wyjścia, który zapewnia asymptotyczną stabilność układu zamkniętego.

- (a) układ zamknięty wykazuje odpowiedź oscylacyjną
- (b) układ zamknięty nie posiada modów oscylacyjnych
- (c) układ regulacji zapewnia asymptotyczną stabilność dla trajektorii zadanej $r(t) = r_0 + r_1 t$
- (d) układ regulacji zapewnia asymptotyczną stabilność dla trajektorii zadanej $r(t) = r_0 = \text{const}$

33. Metoda LQR zastosowana do syntezy sprzężenia od stanu dla układu CT LTI



Rysunek 2: Schemat grafu do zad. 34.

- (a) nie wymaga sterowalności układu
- (b) nie zapewnia stabilności dla układu sterowalnego
- (c) wykorzystuje sprzężenie w postaci $u = Kx$, gdzie K jest rozwiązaniem równania Ricattiego
- (d) może być użyta, gdy macierz Q związana kosztem nałożonym na trajektorię stanu $x(t)$ jest półdodatnio określona

34. Dana jest dyskretna reprezentacja przestrzeni stanu przedstawiona na rys. 2. Koszty sterowania określono na krawędziach grafu. Korzystając z metody programowania dynamicznego znaleźć i zaznaczyć na rysunku optymalną trajektorię dyskretną przy przejściu ze stanu A do K. Wypełnić wartości kosztów przejścia w każdym stanie:

$V_A = \dots\dots\dots$

$V_B = \dots\dots\dots, V_C = \dots\dots\dots, V_D = \dots\dots\dots$

$V_E = \dots\dots\dots, V_F = \dots\dots\dots, V_G = \dots\dots\dots$

$V_H = \dots\dots\dots, V_I = \dots\dots\dots, V_J = \dots\dots\dots$

$V_K = \dots\dots\dots$