

Przykładowe pytania egzaminacyjne

v. 0.2.2

1. Orbita dla układu dynamicznego

- (a) istnieje jeśli reguła ewolucji jest odwracalna
- (b) dla dodatniego czasu opisuje trajektorię stanu
- (c) jest zawsze krzywą zamkniętą
- (d) definiowana jest tylko dla układów dyskretnych w czasie

2. Reguła ewolucji dla układu dynamicznego określonego na gładkiej przestrzeni stanu i czasu ciągłego $\dot{x} = f(x)$

- (a) opisywana jest przez strumień pola wektorowego f
- (b) może być funkcją nieciągłą
- (c) określona jest tylko w otoczeniu punktu równowagi
- (d) opisuje trajektorię stanu x

3. Stan układu

- (a) jest zbiorem parametrów układu
- (b) może być nieskończonym wymiarowy
- (c) jest elementem ciągłej lub dyskretniej przestrzeni stanu
- (d) dla układów liniowych zawsze jest skończonym wymiarowy

4. Równanie wyjścia

- (a) charakteryzuje dynamikę układu
- (b) opisuje zależność wyjścia od wejścia
- (c) jest równaniem algebraicznym
- (d) jest równaniem różniczkowym

5. Układ liniowy osobliwy (singularny), którego stan $x \in \mathbb{R}^n$ oraz wejście $u \in \mathbb{R}^m$, można przedstawić za pomocą następującego równania stanu:

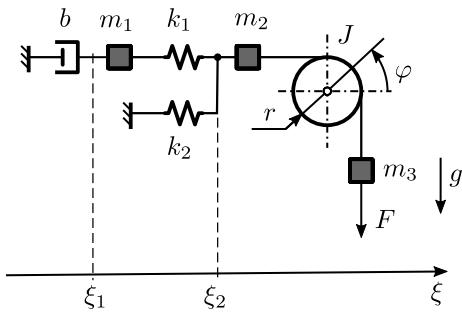
.....

.....

6. Automat komórkowy jest systemem dynamicznym, opisany w czasie, w którym przestrzeń stanu jest

7. Dany jest planarny układ mechaniczny przedstawiony na rys. 1. Masy punktowe m_1 i m_2 poruszają się w kierunku poziomym, natomiast masa punktowa m_3 w kierunku pionowym. Bloczek o momencie bezwładności J i promieniu r połączony jest z masami m_2 i m_3 za pomocą nieważkiej i nieroziągliwej linki. Linka i bloczek poruszają się względem siebie bez poślizgu. Na masę m_3 działa siła wymuszająca $u = F$ oraz siła grawitacji. W układzie występują dwa liniowe elementy sprężyste i jeden liniowy tłumik. Równanie stanu tego układu ma postać następującą

$$(a) \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_1}{m_1} & -\frac{rk_1}{m_1} & -\frac{b}{m_1} & 0 \\ \frac{k_1}{rM} & -\frac{k_1+k_2}{M} & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{m_3g}{rM} \end{bmatrix} u, \text{ gdzie } M := m_2 + m_3 + \frac{J}{r^2}, x := [\xi_1 \quad \varphi \quad \dot{\xi}_1 \quad \dot{\varphi}]^\top$$



Rysunek 1: Schemat układu mechanicznego.

$$\begin{aligned}
 \text{(b)} \quad & \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_1}{m_1} & \frac{k_1}{m_1} & -\frac{b}{m_1} & 0 \\ -\frac{k_1+k_2}{rM} & -\frac{k_1+k_2}{M} & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{m_3 g}{M} \end{bmatrix} u, \text{ gdzie } M := m_2 + m_3 + \frac{J}{r^2}, x := [\xi_1 \quad \xi_2 \quad \dot{\xi}_1 \quad \dot{\xi}_2]^T \\
 \text{(c)} \quad & \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_1}{m_1} & \frac{k_1}{m_1} & 0 & -\frac{b}{m_1} & 0 & 0 \\ -\frac{k_1+k_2}{m_2} & -\frac{k_1+k_2}{m_2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{k_2}{m_3 J} & -\frac{k_1+k_2}{m_3 J} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{g}{J} \end{bmatrix} u, \text{ gdzie } x := [\xi_1 \quad \xi_2 \quad \varphi \quad \dot{\xi}_1 \quad \dot{\xi}_2 \quad \dot{\varphi}]^T \\
 \text{(d)} \quad & \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_1}{m_1} & 0 & -\frac{b}{m_1} & 0 \\ 0 & -\frac{k_1+k_2}{m_3 J} & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{g}{J} \end{bmatrix} u, \text{ gdzie } x := [\xi_1 \quad \xi_2 \quad \dot{\xi}_1 \quad \dot{\xi}_2]^T
 \end{aligned}$$

8. Dana jest układ liniowy o transmitancji

$$G(s) = \frac{s^3 + 1}{2s^3 + s^2}.$$

Podać (bez wyprowadzania) równanie układu w postaci normalnej sterowalnej.
.....
.....
.....

9. Dane są następujące układy liniowe

$$\begin{aligned}
 \Sigma_1 : \dot{x} &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, y = [1 \quad 0] x, \\
 \Sigma_2 : \dot{z} &= \begin{bmatrix} 7-2\alpha & 4\alpha-6 \\ 4-\alpha & 2\alpha-3 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} u, y = [-1 \quad 2] z.
 \end{aligned}$$

Układy są równoważne w sensie wejście-wyjście dla

- (a) $\alpha = 1$
- (b) $\alpha = 0$
- (c) $\alpha = 2$
- (d) $\alpha \in \emptyset$

10. Dane jest równanie układu w postaci modalnej

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u, y = [1 \quad 0] x.$$

Transmitancja $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$ układu może być przedstawiona następująco:

- (a) $G(s) = 0$
- (b) $G(s) = \frac{1}{s+3}$
- (c) $G(s) = \frac{1}{(s+3)^2}$
- (d) $G(s) = \frac{1}{s(s+3)}$

11. Dany jest liniowy układ autonomiczny o równaniu

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}u, y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}x.$$

Układ ten w postaci normalnej sterowalnej opisywany jest równaniem

$$\dot{z} = Az + bz, y = [1 \ 1]z. \quad (1)$$

Podać postaci macierzy A i b układu (1):
.....
.....
.....
.....

12. Dany jest układ dynamiczny w postaci

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} x_1^2 + x_2 - 2u \\ -x_2^3 \end{bmatrix},$$

dla którego zastosowanie następujące nieliniowe sprzężenie od stanu

$$u = \frac{1}{2}x_1^2 + 4x_1 + x_2.$$

W celu zbadania stabilności układu zamkniętego posłużono się bezpośrednią metodą Lapunowa, przyjmując $V = x^\top x$. Funkcja V :

- (a) jest funkcją Lapunowa o pochodnej półujemnie określonej
- (b) jest funkcją Lapunowa o pochodnej ujemnie określonej
- (c) nie jest funkcją Lapunowa
- (d) jest dodatnio określona

13. Dany jest układ dynamiczny o równaniu

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}u,$$

dla którego zastosowano sprzężenie od stanu w postaci

$$u = [-1 \ 0]x.$$

W celu zbadania stabilności układu zamkniętego zaproponowano funkcję

$$V = x^\top \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}x.$$

- (a) V jest funkcją Lapunowa o pochodnej półujemnie określonej
- (b) V jest funkcją Lapunowa o pochodnej ujemnie określonej
- (c) zbiór E , dla którego $\dot{V} = 0$ jest określony przez: $E = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 = 0\}$.
- (d) największy zbiór dodatnio niezmienniczy M , dla którego $\dot{V} = 0$ ma postać: $E = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 = 0, x_2 = 0\}$.

14. Podać warunek, który spełnia punkt równowagi \bar{x} układu nieliniowego $\dot{x} = f(x)$. Czy taki układ może nie posiadać punktu równowagi?.....
.....
.....

15. Pewien układ liniowy $\dot{x} = Ax + Bu$ jest niesterowalny. Układ ten jest stabilizowalny jeżeli

.....
.....
.....
.....

16. Zdefiniować stan osiągalny układu $\dot{x} = f(x, u)$

.....
.....
.....
.....
.....
.....

17. Dany jest układ DT LTI w postaci

$$x_{(n)} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x_{(n-1)} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u_{(n-1)},$$

gdzie $\alpha > 0$. Układ jest

- (a) osiągalny
- (b) sterowalny do zera
- (c) niesterowalny do zera
- (d) nieosiągalny

18. Dany jest układ nieliniowy

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} x_2 - 3x_2^2 \\ x_1 + (1 + u^2)u \end{bmatrix}.$$

W otoczeniu punktu równowagi $x_0 = [0 \ 0]^\top$ określonego dla $u_0 = 0$

- (a) układ jest sterowalny w sensie Kalmana
- (b) układ jest niesterowalny
- (c) nie można określić sterowalności na podstawie warunków Kalmana

19. Wykazać, że układ CT LTI w postaci normalnej sterowalnej jest sterowalny dla dowolnych parametrów.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

20. Zbiory stanów obserwowalnych X_O i nieobserwowalnych \tilde{X}_O układu

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -3 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} x, y = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} x$$

mają postać

- (a) $X_O = \mathbb{R}^3, \tilde{X}_O = \emptyset$,
- (b) $X_O = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : x = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}, \tilde{X}_O = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : x = \alpha_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\},$ gdzie $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

- (c) $X_O = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : x = \alpha_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}, \tilde{X}_O = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : x = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$, gdzie $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$
- (d) $X_O = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : x = \alpha_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, \tilde{X}_O = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : x = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$, gdzie $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

21. Dane są równoważne układy CT LTI

$$\Sigma : \dot{x} = Ax + Bu, y = Cx,$$

$$\Sigma^* : \dot{z} = \bar{A}z + \bar{B}u, y = \bar{C}z,$$

gdzie $z := Px$, przy czym P jest nieosobliwą macierzą kwadratową o stałych współczynnikach. Wykazać, że transmitemce operatorowe wyjściowo-wejściowe obu układów są jednakowe.

.....

.....

.....

.....

.....

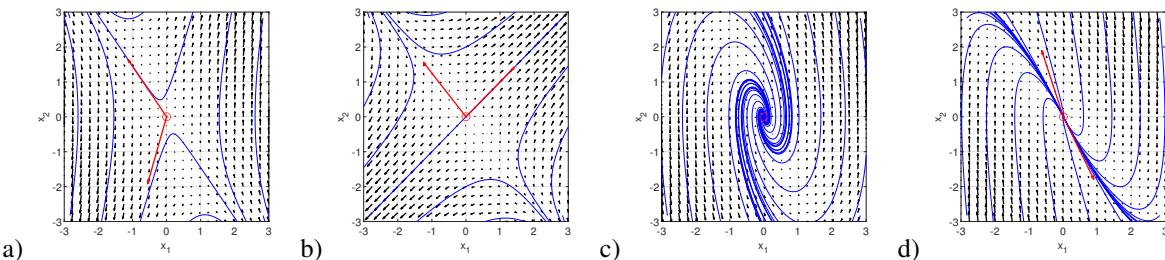
.....

.....

22. Dla układu autonomicznego

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} x$$

określono rodzinę trajektorii. Wybrać właściwą:



23. Pewien układ liniowy przedstawiono w postaci normalnej

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & -5 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ -2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}.$$

Podana podstata normalna nosi nazwę

Wymienić, które stany x_i są obserwowlane:

24. Dany jest układ autonomiczny o równaniu

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \beta & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} x, \quad (2)$$

gdzie $x \in \mathbb{R}^2$ oznacza stan, natomiast $\beta \in \mathbb{R}$ jest parametrem. Wiedząc, że rozwiązaniem równania (2) dla dowolnego warunku początkowego $x_0 = x(0) \in \mathbb{R}^2$ jest

$$x(t) = \begin{bmatrix} 3e^{-3t} - e^{-2t} & e^{-3t} - e^{-2t} \\ 2e^{-2t} - 2e^{-3t} & 2e^{-2t} - e^{-3t} \end{bmatrix} x_0, \quad (3)$$

wyznaczyć wartość parametru β . Wskazówka: nie obliczać rozwiązania układu (2) lecz skorzystać ze znanych modów rozwiązania (3).

- (a) β jest dowolny
- (b) $\beta = 0$
- (c) $\beta = 2$
- (d) $\beta = -4$

25. Dla układu o równaniu

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, y = [1 \ 0] x$$

zaprojektowano filtr Kalmana w czasie dyskretnym. Równanie etapu predykcji można określić następująco:

- (a) $\hat{x}_{(k|k-1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0,01 \\ -0,01\omega^2 & 1 \end{bmatrix} \hat{x}_{(k-1|k-1)} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0,01 \end{bmatrix} u_{(k)}$
- (b) $\hat{x}_{(k|k-1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0,99 \\ -0,99\omega^2 & 1 \end{bmatrix} \hat{x}_{(k-1|k-1)} + \begin{bmatrix} 0,01 \\ 0,01 \end{bmatrix} u_{(k)}$
- (c) $\hat{x}_{(k|k-1)} = \begin{bmatrix} 0,99 & 0,1 \\ -0,01\omega^2 & 0,99 \end{bmatrix} \hat{x}_{(k-1|k-1)} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0,99 \end{bmatrix} u_{(k)}$
- (d) $\hat{x}_{(k|k-1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0,99 \\ -0,01\omega^2 & 1 \end{bmatrix} \hat{x}_{(k-1|k-1)} + \begin{bmatrix} 0,99 \\ 0,01 \end{bmatrix} u_{(k)}$

26. Dla układu

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, y = [1 \ 0] x,$$

zaprojektowano obserwator Luenbergera o wartościach wzmacnień: $l_1 = 10$, $l_2 = -4$. Algorytm estymacji stanu jest

- (a) niestabilny
- (b) na granicy stabilności
- (c) asymptotycznie stabilny

27. Dla pewnego procesu liniowego o jednym wyjściu zastosowano filtr Kalmana. Przyjęto macierz kowariancji Q o stałych współczynnikach. Podczas procesu strojenia zwiększo wariancję szumu pomiarowego. Stwierdzono, że wartości wzmacnień filtra Kalmana co do wartości bezwzględnych:

- (a) wzrosły
- (b) zmalały
- (c) pozostały stałe

28. Krótko scharakteryzować zasadę separacji dla układów liniowych.

.....
.....
.....

29. Dla układu liniowego o transmitancji

$$G(s) = \frac{4}{s^2 + s - 3}$$

określono postać normalną sterowalną (regulatorową) a następnie zaprojektowano regulator w postaci

$$u := [-k \ -2] x,$$

gdzie $x \in \mathbb{R}^2$ jest stanem, natomiast $k \in \mathbb{R}$ jest współczynnikiem wzmacnienia. Wyznaczyć wartość wzmacnienia k zakładając, że układ zamknięty jest asymptotycznie stabilny i nie wykazuje odpowiedzi oscylacyjnej

- (a) $k \geq 3$
(b) $k \in (3, \frac{21}{4}]$
(c) $k \in [-\frac{21}{4}, 3)$
(d) $k \in (-1, 3)$
30. Dany jest układ liniowy

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}x + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}u, y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}x,$$
dla którego zastosowano algorytm odspręgania w postaci

$$u = Fx + Gv,$$
gdzie $v \in \mathbb{R}^2$ jest nowym wejściem. Macierze F i G mają postać:
(a) $F = \begin{bmatrix} -1 & -2 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$
(b) $F = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$
(c) $F = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$
(d) $F = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$
31. Dla układu SISO

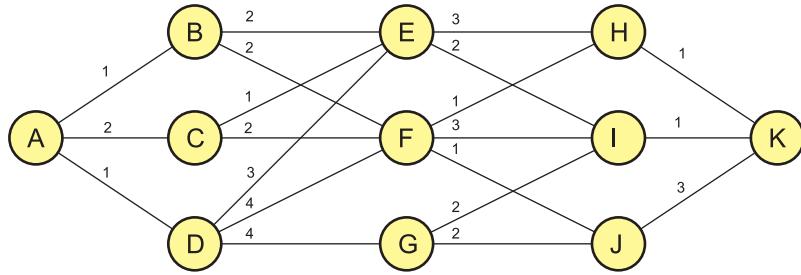
$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}u, y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}x$$
zaprojektowano sterownik z modelem referencyjnym w celu śledzenia zadanej trajektorii wyjścia $r(t)$. Algorytm sterowania określono w postaci

$$u = u_r - \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{k^\top \in \mathbb{R}^{1 \times 2}} (x - x_r).$$
Algorytm zapewnia asymptotyczne śledzenie trajektorii dla:
(a) $x_r = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}r & \dot{r} \end{bmatrix}^\top, u_r = \frac{1}{2}\ddot{r} + 2\dot{r} + 2r$
(b) $x_r = \begin{bmatrix} r & \dot{r} \end{bmatrix}^\top, u_r = \ddot{r} + 2\dot{r} + 2r$
(c) $x_r = \begin{bmatrix} r & \frac{1}{2}\dot{r} \end{bmatrix}^\top, u_r = \frac{1}{2}\ddot{r} + 2\dot{r} + 2r$
(d) $x_r = \begin{bmatrix} r & \frac{1}{2}\dot{r} \end{bmatrix}^\top, u_r = \frac{1}{2}\ddot{r}$
32. Dla układu o równaniu

$$\dot{x} = -\alpha x + u,$$

$$y = \beta x,$$
gdzie $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$, $u \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, zaprojektowano sterownik w postaci

$$u = -\frac{4}{\beta} \int e d\tau + (\alpha - 4)x,$$
przy czym $e = y - r$; r jest zadaną trajektorią wyjścia, który zapewnia asymptotyczną stabilność układu zamkniętego.
(a) układ zamknięty wykazuje odpowiedź oscylacyjną
(b) układ zamknięty nie posiada modów oscylacyjnych
(c) układ regulacji zapewnia asymptotyczną stabilność dla trajektorii zadanej $r(t) = r_0 + r_1 t$
(d) układ regulacji zapewnia asymptotyczną stabilność dla trajektorii zadanej $r(t) = r_0 = \text{const}$
33. Metoda LQR zastosowana do syntezy sprzężenia od stanu dla układu CT LTI



Rysunek 2: Schemat grafu do zad. 34.

- (a) nie wymaga sterowalności układu
 (b) nie zapewnia stabilności dla układu sterowanego
 (c) wykorzystuje sprzężenie w postaci $u = Kx$, gdzie K jest rozwiązaniem równania Ricattiego
 (d) może być użyta, gdy macierz Q związana kosztem nałożonym na trajektorię stanu $x(t)$ jest półdodatnio określona
34. Dana jest dyskretna reprezentacja przestrzeni stanu przedstawiona na rys. 2. Koszty sterowania określono na krawędziach grafu. Korzystając z metody programowania dynamicznego znaleźć i zaznaczyć na rysunku optymalną trajektorię dyskretną przy przejściu ze stanu A do K. Wypełnić wartości kosztów przejścia w każdym stanie:
- $V_A = \dots$
- $V_B = \dots, V_C = \dots, V_D = \dots$
- $V_E = \dots, V_F = \dots, V_G = \dots$
- $V_H = \dots, V_I = \dots, V_J = \dots$
- $V_K = \dots$