

**Uniwersytet Warszawski**  
**Wydział Fizyki**

**Piotr Morawiecki**

Nr albumu: 347911

# **Problem odwrotny do ewolucji sieci rzecznych**

**Praca licencjacka  
na kierunku FIZYKA**

Praca wykonana pod kierunkiem  
**dra hab. Piotra Szymczaka**  
Instytut Fizyki Teoretycznej

Warszawa, czerwiec 2016

## **Oświadczenie kierującego pracą**

Potwierdzam, że niniejsza praca została przygotowana pod moim kierunkiem i kwalifikuje się do przedstawienia jej w postępowaniu o nadanie tytułu zawodowego.

Data

Podpis kierującego pracą

## **Oświadczenie autora (autorów) pracy**

Świadom odpowiedzialności prawnej oświadczam, że niniejsza praca dyplomowa została napisana przeze mnie samodzielnie i nie zawiera treści uzyskanych w sposób niezgodny z obowiązującymi przepisami.

Oświadczam również, że przedstawiona praca nie była wcześniej przedmiotem procedur związanych z uzyskaniem tytułu zawodowego w wyższej uczelni.

Oświadczam ponadto, że niniejsza wersja pracy jest identyczna z załączoną wersją elektroniczną.

Data

Podpis autora (autorów) pracy

## **Streszczenie**

Zjawisko erozji wstępnej prowadzi do wzrostu długości strumieni i stąd do powolnego rozwoju rozgałęzionych sieci rzecznych. Szybkość zachodzenia erozji może zostać ilościowo opisana poprzez powiązanie jej z wysokością zwierciadła wód podziemnych, którą można znaleźć rozwiązując równanie Poissona. W niniejszej pracy opisane zostały wyniki numerycznej symulacji ewolucji sieci rzecznej dla różnych praw wzrostu i reguł bifurkacji, wyznaczających odpowiednio szybkość wzrostu rzeki i moment rozdzielania się strumieni. Został także postawiony i przeanalizowany problem odwrotny: czy można odtworzyć prawo wzrostu rzeki na podstawie geometrycznej struktury sieci rzecznej? Seria zaproponowanych testów pozwoliła na prawidłowe oszacowanie prawa wzrostu na danych syntetycznych.

## **Słowa kluczowe**

sieć rzeczna, hydrodynamika, dynamika ośrodków porowatych, wzrost Laplace'a, metody numeryczne, symulacje numeryczne

## **Dziedzina pracy (kody wg programu Socrates-Erasmus)**

13.2 Fizyka

## **Tytuł pracy w języku angielskim**

Inverse problem to river networks evolution

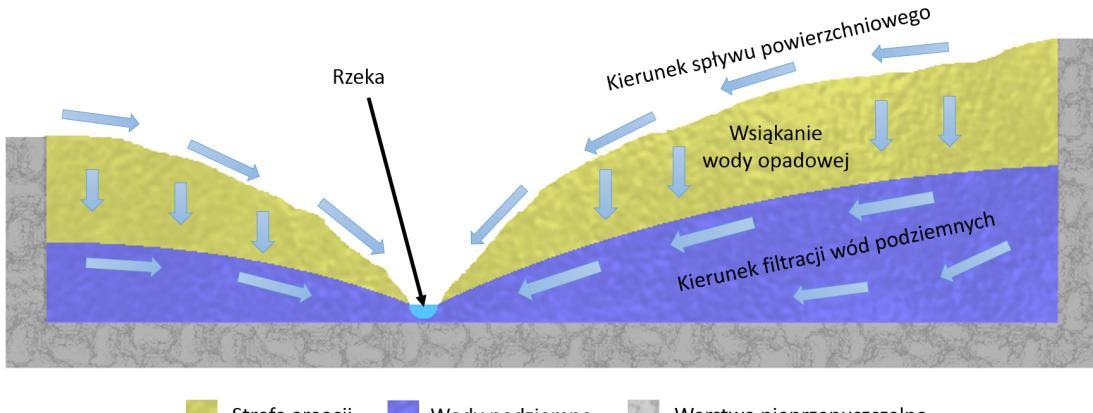
# Spis treści

<b>Wprowadzenie</b>	3
<b>1. Model teoretyczny</b>	5
1.1. Założenia modelu	5
1.2. Model geometrii wód podziemnych	5
1.3. Model ewolucji sieci rzecznej	7
1.3.1. Strumień wód podziemnych wokół źródła	7
1.3.2. Prawo wzrostu i reguły bifurkacji	9
<b>2. Metody numeryczne wyznaczania ewolucji sieci rzecznej</b>	11
2.1. Wyznaczanie wysokości zwierciadła wód podziemnych	11
2.2. Wybrane metody jawne	12
2.3. Wybrane metody niejawne	13
<b>3. Wpływ prawa wzrostu na strukturę sieci rzecznej</b>	15
3.1. Rzeki w polu Laplace'owskim	15
3.2. Rzeki w polu Poissonowskim	16
<b>4. Problem odwrotny</b>	22
4.1. Przedstawienie problemu	22
4.2. Wyniki ewolucji wstecznej na danych testowych	25
<b>5. Podsumowanie i wnioski</b>	28
<b>Bibliografia</b>	30
<b>A. Wyniki cofania sieci rzecznych</b>	32

# Wprowadzenie

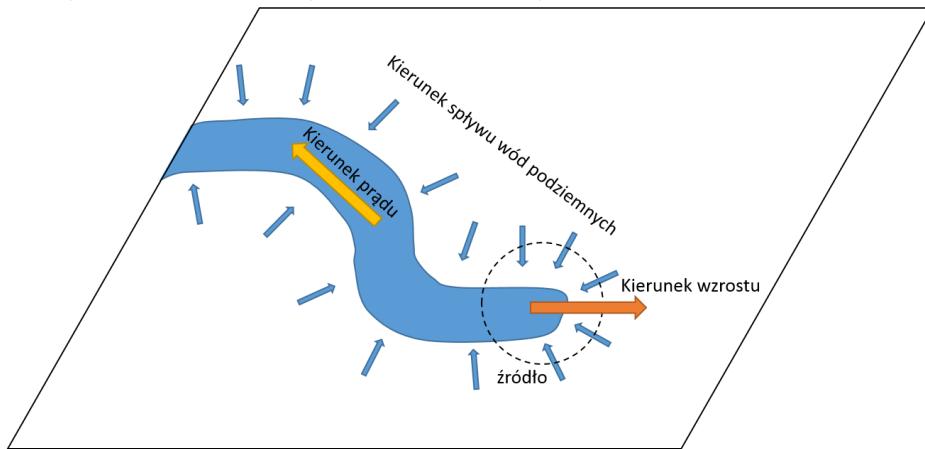
Rzeki są zasilane wodą pochodzącą ze spływu powierzchniowego jak i wodami podziemnymi. Wody podziemne zasilane najczęściej wodą opadową tworzą pod ziemią w warstwie wodonośnej rezerwuar o wklęsłej powierzchni, umożliwiając tym samym regularne, powolne odprowadzanie wody opadowej do strumienia rzeki (rysunek 1). Woda podziemna spływając w kierunku rzeki wywołuje erozję materiału tworzącego podłożę (np. żwiru, piasku) poszerzając tym samym dolinę rzeczną oraz wydłużając ją w okolicy źródła. Przenoszenie materiału z okolicy źródła powoduje wydłużanie się rzeki i tym samym pozorne przesuwanie się źródła rzeki w góre doliny (rysunek 2). Opisywany tu proces nazywa się erozją wsteczną i to on odpowiada za wzrost długości rzek, ich rozdzielenie się (tzw. bifurkację) oraz wynikającą z tych zjawisk ewolucję całej sieci rzecznej.

Rysunek 1: Przekrój przez dolinę ilustrujący kształt wód podziemnych.



W celu ilościowego opisania procesu wzrostu rzeki należy zatem opisać ilościowo samo zjawisko zachodzenia erozji wokół źródła. Rzeki mogą być zasilane zarówno wodami powierzchniowymi jak i podziemnymi. W dalszej części pracy uwaga zostanie skupiona na tych rzekach, których głównym źródłem zasilania są wody podziemne, głównie ze względu na dużo prostszy opis matematyczny ich ewolucji. Przykładem takich rzek są rzeki na podłożu o dużej przepuszczalności (piasku lub porowatych skałach, np. piaskowcu), co już w 1985 roku zostało pokazane na podstawie analizy struktur rzecznych z Wyżyny Kolorado, które nie mogły powstać w wyniku działania spływu powierzchniowego [1]. Jak pokazano doświadczalnie w pracy [2], spływ powierzchniowy na podłożu piaskowym wnosi wkład do erozji jedynie dla odpowiednio dużego nachylenia terenu. Kilka lat wcześniej w [3] przedstawiono również model ilościowo opisujący szybkość wzrostu rzeki pod wpływem erozji wstecznnej, oparty na powiązaniu jej ze strumieniem wody podziemnej docierającej do wierzchołka rzeki - im więcej wody napływa do strumienia tym szybciej zachodzi erozja i w konsekwencji, źródło szybciej przesu-

Rysunek 2: Ilustracja kierunku spływu rzek podziemnych (niebieskie strzałki), prądu rzeki (żółta strzałka) oraz jej wzrostu (czerwona strzałka).



wa się w górę doliny. Ewolucja naturalnych sieci rzecznych następuje w skali setek tysięcy lat, jednak możliwe jest odtworzenie tego procesu w mniejszej skali w warunkach laboratoryjnych uzyskując struktury podobne do rzeczywistych [4].

Miedzy innymi w pracy [5] przedstawiono model ilościowo opisujący cały proces ewolucji sieci rzecznej. Choć jego stosowalność jest ograniczona restrykcyjnymi założeniami, to struktury uzyskane na podstawie niniejszego modelu mają podobne cechy do rzeczywistych sieci rzecznych. Głównymi elementami modelu są równanie opisujące kształt wód podziemnych na analizowanym obszarze oraz opis strumienia wód podziemnych w pobliżu źródła. Opis ten pozwala na wyznaczenie szybkości i kierunku cofania się źródła rzeki (w oparciu o tzw. prawo wzrostu) oraz warunków podziału strumienia na dwie odnogi (tzw. reguły bifurkacji). Zdefiniowanie prawa wzrostu i reguł bifurkacji pozwala opisać wzrost całej sieci rzecznej.

Przedmiotem niniejszej pracy jest analiza problemu odwrotnego, tzn. możliwości odtworzenia prawa wzrostu rzeki na podstawie geometrycznej struktury już wyewoluowanej sieci rzecznej. W pracy sformułowany zostanie model, który potencjalnie mógłby określić postać prawa wzrostu i reguł bifurkacji dla rzeczywistych rzek na bazie ich struktury, a jednocześnie sprawdzić w jakim stopniu stosowany opis zjawiska ewolucji sieci rzecznej poprawnie odzwierciedla rzeczywistość. W tym celu konieczne było przeanalizowanie różnych metod ewolucji wprzód, a następnie na ich bazie opracowanie procedury odwrotnej i przetestowanie ich na wybranych przykładach sieci rzecznych.

W pierwszym rozdziale został przedstawiony model ewolucji sieci rzecznej. Drugi rozdział zawiera opracowanie wybranych metod numerycznych wykorzystywanych do modelowania ewolucji sieci rzecznej. W kolejnym rozdziale przeprowadzono analizę zależność struktury wyewoluowanej z wykorzystaniem niniejszego modelu od prawa wzrostu. Analiza problemu odwrotnego z przykładowymi wynikami eksperymentów numerycznych została przedstawiona w rozdziale czwartym. Uzyskane wyniki zostały podsumowane na końcu pracy.

# Rozdział 1

## Model teoretyczny

### 1.1. Założenia modelu

Prezentowany poniżej model zawiera wiele uproszczeń. Rozważana jest jedynie zmiana kształtu rzeki w wyniku erozji wstępnej zachodzącej w pobliżu źródła, zatem nie rozważa się zmian kształtu rzeki w środkowym i dolnym biegu, np. tworzenia meandrów. Głównym założeniem przy opisie geometrii wód podziemnych jest to, że woda opadowa od razu wsiąka w ziemię, a zatem zaniedbywany jest spływ powierzchniowy. Dla uproszczenia uzyskiwanych równań zakłada się jednorodność materiału tworzącego warstwę wodonośną. Ponadto zakłada się, że rzeki mają na całej długości pomijalnie mały spadek terenu i dużo krótszą szerokość niż odległość do sąsiednich rzek, dzięki czemu można je traktować jak obiekty liniowe. Są to dość rygorystyczne założenia nie pozwalające opisać procesu powstawania m.in. rzek wyżynnych i górskich, jednak model ten stanowi krok ku lepszemu zrozumieniu praw rządzących ewolucją sieci rzecznych. Model ten można testować na wybranych rzekach w przybliżeniu spełniających ww. warunki. Przykładem takiej sieci rzecznej mogą być dopływy rzeki Apalachicola w pobliżu Bristol na Florydzie [6].

### 1.2. Model geometrii wód podziemnych

Piasek, żwir i skały tworzące warstwę wodonośną można traktować jak ośrodek porowaty. Zależność prędkości przepływu w takim ośrodku porowatym opisuje prawo Darcy'ego [7]:

$$\mathbf{v} = -\kappa \nabla p \quad (1.1)$$

Gdzie:

- $\mathbf{v}$  – prędkość filtracji,
- $\kappa$  – współczynnik filtracji,
- $p$  – ciśnienie cieczy.

Zgodnie z przybliżeniem Dupuita przepływ wód podziemnych ma charakter horyzontalny. Jako, że wody podziemne poruszają się z niewielką prędkością ciśnienie cieczy odpowiada ciśnieniu hydrostatycznemu:

$$p = \rho g h \quad (1.2)$$

Gdzie:

$\rho$  – gęstość cieczy,

$g$  – przyspieszenie grawitacyjne,

$h$  – wysokość zwierciadła wód podziemnych.

Po uwzględnieniu równania (1.2) równanie (1.1) przyjmuje zatem postać:

$$\mathbf{v} = -\kappa \rho g \nabla h = -\kappa' \nabla h \quad (1.3)$$

Wprowadzono oznaczenie  $\kappa' = \kappa \rho g$ . Równanie to określa prędkość  $v$  filtracji całego słupa wody od poziomu 0 do zdefiniowanej wcześniej wysokości zwierciadła wód podziemnych  $h$ . Stąd strumień wód podziemnych można wyrazić jako:

$$\mathbf{q} = h \mathbf{v} = -h \kappa' \nabla h = -\frac{\kappa'}{2} \nabla h^2 \quad (1.4)$$

Dla przepływu niesciśliwego (prędkości wód podziemnych są niewielkie, więc założenie to jest uzasadnione) równanie ciągłości można zapisać w postaci  $\nabla \cdot \mathbf{q} = P$ , gdzie  $P$  w tym zagadnieniu jest średnią objętością opadu na jednostkę czasu i powierzchni. Wówczas wstawiając  $\mathbf{q}$  z równania (1.4) otrzymujemy:

$$\frac{\kappa'}{2} \nabla \cdot \nabla h^2 = \frac{\kappa'}{2} \Delta h^2 = -P \quad (1.5)$$

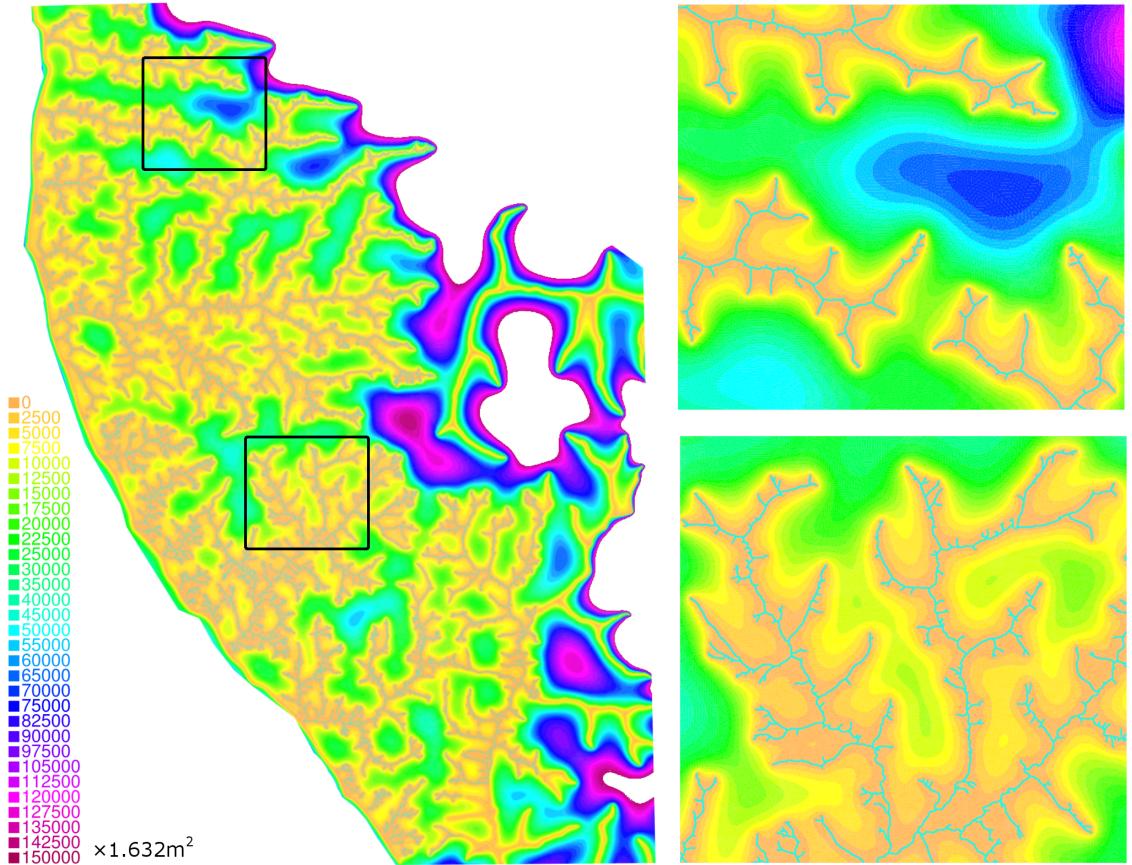
Dla uproszczenia powyższego równania można wprowadzić potencjał  $\phi = \frac{\kappa'}{2P} h^2$ . Wówczas można zapisać równanie (1.5) w postaci równania Laplace'a:

$$\Delta \phi = -1 \quad (1.6)$$

Zakładając, że rzeka na całej swojej długości znajduje się na podobnym poziomie tuż nad warstwą nieprzepuszczalną, można wprowadzić na niej warunek brzegowy  $h = 0$ , a zatem potencjał  $\phi = 0$ . Znajdując  $\phi$  z uwzględnieniem warunków brzegowych można łatwo znaleźć pole skalarne opisujące wysokość wód podziemnych.

Słuszność powyższego wyprowadzenia została potwierdzona poprzez obserwację modelu sieci rzecznej w warunkach laboratoryjnych [8]. Znaleziony numerycznie (wykorzystana metoda została przedstawiona w podrozdziale 2.1) kształt potencjału  $\phi$  dla fragmentu dopływu rzeki Apalachicola w okolicy Bristol na Florydzie został przedstawiony na rysunku 1.1.

Rysunek 1.1: Wartość potencjału  $\phi$  dla dopływu rzeki Apalachicola. Po lewej stronie powiększono dwa zaznaczone fragmenty na sieci przedstawionej po prawej. Błękitne linie oznaczają strumień.



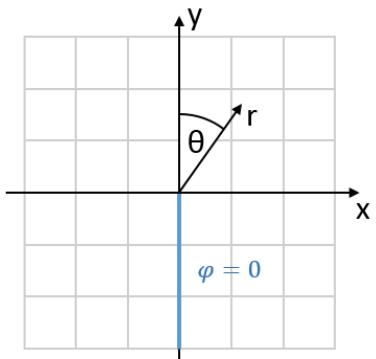
### 1.3. Model ewolucji sieci rzecznej

#### 1.3.1. Strumień wód podziemnych wokół źródła

Opis procesu cofania się źródła w góre doliny rzecznej można skonstruować w oparciu o kształt wód podziemnych wokół źródła. Warto zauważyć, że rozwiązywany problem jest dwuwymiarowy, zatem wygodne może okazać się wykorzystanie liczb zespolonych. Podejście takie zostało zastosowane w pracy [15], w której pole wokół źródła opisano w postaci potencjału zespolonego  $w(z) = \phi + i\psi$  (zatem wprowadzony w poprzednim podrozdziale potencjał wyraża się jako  $\phi = \operatorname{Re}(w)$ ). Układ współrzędnych wybrano tak, że półos urojona  $\operatorname{Im}(z) < 0$  pokrywa się z końcowym odcinkiem strumienia zakończonym źródłem (rysunek 1.2). W okolicy końca strumienia potencjał ten ma postać szeregu:

$$w(z) = -i \left[ a_1 (iz)^{1/2} + a_2 iz + a_3 (iz)^{3/2} \right] + O(z^2) \quad (1.7)$$

Rysunek 1.2: Wybór układu współrzędnych.



Jest to ogólna postać potencjału harmonicznego<sup>1</sup> spełniającego dla końcowego odcinka strumienia ( $x = 0$  i  $y < 0$ ) warunek brzegowy  $h(z) = 0$ . Wybierając rzeczywistą część potencjału  $w$  i przekształcając ją do układu współrzędnych biegunkowych otrzymujemy postać:

$$\phi(r, \theta) = a_1 r^{1/2} \cos \frac{\theta}{2} + a_2 r \sin \theta + a_3 r^{3/2} \cos \frac{3\theta}{2} + O(r^2) \quad (1.8)$$

Współczynniki  $a_1$ ,  $a_2$  i  $a_3$  można wyrazić w postaci całkowej (całkowanie odbywa się po okręgu o środku w źródle i małym promieniu  $R$ ):

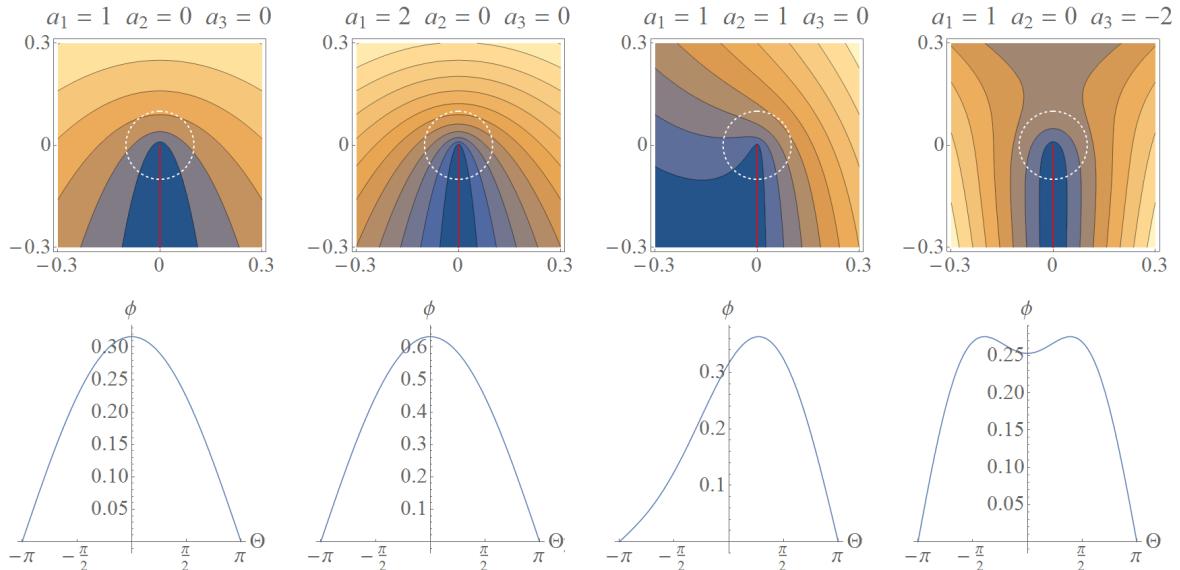
$$a_1 = \frac{1}{\pi R^{1/2}} \int_{-\pi}^{\pi} \phi(R, \theta) \cos \frac{\theta}{2} d\theta \quad (1.9)$$

$$a_2 = \frac{1}{\pi R} \int_{-\pi}^{\pi} \phi(R, \theta) \sin \theta d\theta \quad (1.10)$$

$$a_3 = \frac{1}{\pi R^{3/2}} \int_{-\pi}^{\pi} \phi(R, \theta) \cos \frac{3\theta}{2} d\theta \quad (1.11)$$

Przykładowe kształty wód podziemnych w otoczeniu źródła dla wybranych wartości współczynników  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$  zostały przedstawione na rysunku 1.3. Zaprezentowano na niej również profil potencjału w odległości  $R = 0.1$  od źródła, przy czym jednostka jest umowna.

Rysunek 1.3: Kształty potencjału  $\phi$  w otoczeniu źródła z zaznaczonym strumieniem (górnne ilustracje) wraz z profilem kątowym potencjału  $\phi$  w odległości  $R = 0.1$  od źródła (dolne ilustracje) dla wybranych wartości wyrazów  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$  rozwinięcia zespolonego.



<sup>1</sup>Tzn. spełniającego równanie Laplace'a. Choć potencjał powinien spełniać równanie Poissona to można wydzielić niewielki obszar wokół źródła, taki, że wkład pochodzący od lokalnej wody opadowej jest dużo mniejszy od strumienia wód podziemnych na brzegu. Stąd na takim obszarze można pominąć człon  $P$  w równaniu (1.5) otrzymując równanie Laplace'a.

### 1.3.2. Prawo wzrostu i reguły bifurkacji

Szybkość wzrostu rzeki zależy od strumienia wód podziemnych napływającego do źródła. Całkowity strumień przechodzący przez okrąg o promieniu  $R$  wokół źródła wynosi:

$$\begin{aligned} - \oint_{\circ_R} q_r dl &= \int_{-\pi}^{\pi} \nabla_r \left( \frac{\kappa}{2} h^2 \right) R d\theta \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \nabla_r \left( a_1 R^{1/2} \cos \frac{\theta}{2} + a_2 R \sin \theta + a_3 R^{3/2} \cos \frac{3\theta}{2} + O(R^2) \right) R d\theta \quad (1.12) \\ &= 2a_1 R^{1/2} - 2a_3 R^{3/2} + O(R^{5/2}) \end{aligned}$$

W powyższym wyprowadzeniu  $\circ_R$  oznacza okrąg o środku w źródle rzeki i promieniu  $R$ , a  $\nabla_r$  składową radialną gradientu. W ostatecznym wyrażeniu widać, że dla małych promieni  $R$  wyrazem dominującym jest wyraz proporcjonalny do  $a_1$ , zatem to ten wyraz określa strumień wody napływającej do wierzchołka, a w konsekwencji szybkość zachodzenia procesu erozji i szybkość wzrostu rzeki.

Przyjmuje się, że tempo erozji jest proporcjonalne do strumienia wody podniesionego do pewnej potęgi  $\eta$  [9][10][11]. Zatem:

$$v \propto a_1^\eta \quad (1.13)$$

Warto zauważyć, że w powyższym prawie wzrostu stała proporcjonalności wpływa jedynie na skalę czasu wzrostu rzek, jednak nie wpływa na kształt całej sieci rzecznej. W pracy [12] pokazywano na bazie obserwacji doświadczalnych, że prędkość wzrostu rzeki jest proporcjonalna do strumienia, powyżej pewnej jego wartości progowej. Poniżej tego progu strumień jest zbyt słaby, żeby powodować dalszą erozję.

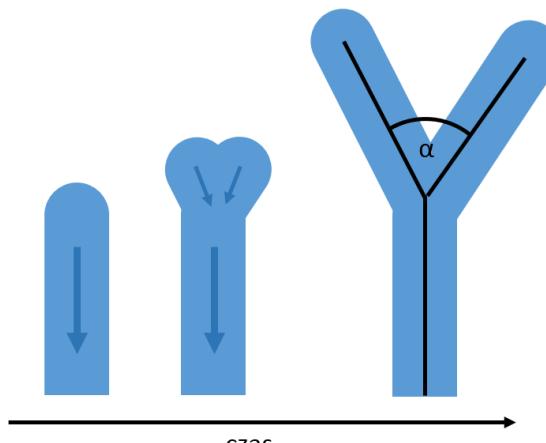
Wyraz  $a_2$  jest pierwszym wyrazem wprowadzającym asymetrię napływu wody do wierzchołka. Erozja powoduje jednak wzrost rzeki w takim kierunku, żeby napływ wody był symetryczny, zatem w dowolnej chwili czasu  $a_2 \approx 0$  [13]. Powyższe dwie reguły w pełni określają szybkość i kierunek wzrostu rzeki.

Ostatnim elementem modelu jest określenie momentu zachodzenia bifurkacji, czyli podziału strumienia na dwa w trakcie jego wzrostu (rysunek 1.4). Dokładna analiza procesu zachodzenia bifurkacji oraz formowania się nowych strumieni została dokonana w pracy [14]. Pokazano w niej na drodze eksperymentu duży wpływ materiału podłożu oraz nachylenia terenu na moment podziału wierzchołka. W pracy [15] zaproponowano, że bifurkacja może zachodzić w momencie kiedy woda napływająca do wierzchołka ma nie jedno, a dwa lokalne maksima (w dwóch kierunkach rzeka erodeje najszybciej). Odpowiada to warunkowi:

$$\frac{a_3}{a_1} < -\frac{1}{9r_c} \quad (1.14)$$

Gdzie  $r_c$  jest pewnym promieniem krzywizny określającym zasięg zachodzenia erozji wokół źródła. W pracy [15] zostało również wykazane, że kąt bifurkacji powinien wynosić  $\frac{2}{5}\pi = 72^\circ$ ,

Rysunek 1.4: Proces bifurkacji, czyli podziału strumienia na dwie odnogi. Zaznaczono kierunek spływu wody i kąt bifurkacji.



co potwierdziły wyniki analizy graficznej rzeczywistej sieci rzecznej. Innym potencjalnym warunkiem bifurkacji może być odpowiednio wysoka prędkość wzrostu rzeki, prowadząca do niestabilności wzrostu strumienia i tendencji do bifurkacji. Odpowiada to warunkowi:

$$a_1 > a_c \quad (1.15)$$

Dla pewnego stałego parametru  $a_c$ . Przedstawiony powyżej opis geometrii wód podziemnych i reguł rządzących wzrostem i bifurkacją w pełni opisują ilościowo proces ewolucji rzeczej i mogą posłużyć do jego numerycznego modelowania.

## Rozdział 2

# Metody numeryczne wyznaczania ewolucji sieci rzecznej

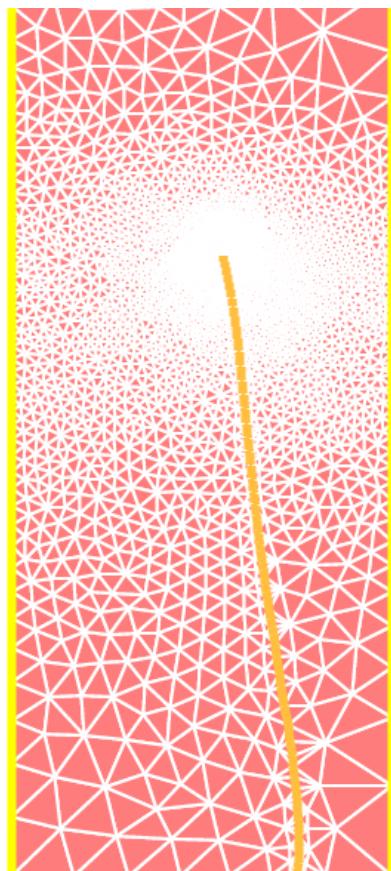
### 2.1. Wyznaczanie wysokości zwierciadła wód podziemnych

Proces ewolucji sieci rzecznej z wyjątkiem pojedynczych, prostych przypadków [16], może zostać rozwiązany wyłącznie numerycznie. Idea numerycznego wyznaczenia ewolucji sieci rzecznej polega na iteracyjnym znajdowaniu geometrii wód podziemnych, a na ich podstawie wyznaczaniu kierunku i szybkości wzrostu rzeki w kolejnych krokach czasowych i bifurkacji strumieni w przypadku spełnienia ustalonego warunku.

W celu rozwiązania równania Laplace'a lub Poissona wykorzystano metodę elementów skończonych *sparsesolver* zaimplementowaną w środowisku FreeFEM++, przeznaczonym do rozwiązywania równań różniczkowych częstokowanych w oparciu o Metodę Elementów Skończonych. Siatka elementów skończonych jest konstruowana tak, żeby cała sieć rzeczna była pokryta krawędziami elementów. Ponadto dla zwiększenia dokładności rozwiązania równania Poissona iteracyjnie dokonywana jest adaptacja siatki zależna od znalezionej w każdym kroku rozwiązania. Jest ona najbardziej zagęszczana dla obszarów o wysokich zmianach wartości potencjału (np. w pobliżu strumieni i źródeł).

Następnie dla każdego strumienia dodatkowo zagęszczano siatkę w otoczeniu źródła, po czym za pomocą tak uzykanej siatki rozwiązywano równanie Poissona. Następnie całkowano pole w otoczeniu źródła w celu znalezienia wyrazów  $a_1$ ,  $a_2$  i  $a_3$  w rozwinięciu zespolonym pola  $\phi$ . Z wartości  $a_1$  można za pomocą prawa wzrostu (1.13) wyznaczyć szybkość wzrostu długości strumienia. W następnych paragrafach zostaną przedstawione wybrane metody numeryczne umożliwiające wyznaczenie jego kierunku.

Rysunek 2.1: Przykładowa siatka elementów skończonych dla pojedynczego strumienia.



## 2.2. Wybrane metody jawne

Metody jawne (eksplikite) pozwalają na wyznaczenie kierunku wzrostu rzeki jedynie na podstawie stanu rzeki w poprzednich krokach czasowych. Przykładem takiego algorytmu może być algorytm roboczo nazwany *Royal*, ze względu na pracę opublikowaną przez *Royal Society Publishing*, w której została zaproponowany [15].

Na podstawie ujętej części potencjału zespolonego znaleziono promień krzywizny linii prądu wód podziemnych (linii największego spadku potencjału  $\phi$ ) w okolicy źródła. W metodzie założono, że rzeka wzrośnie o odległość  $ds = v\Delta t$ , w takim kierunku, żeby jej koniec pokrył się ze znalezionym przybliżeniem linii prądu. Rzeka wzrośnie pod kątem  $\alpha$  względem kierunku wzrostu rzeki w poprzednim kroku czasowym (rys. 2.2) spełniającym równość:

$$\tan \alpha = 2 \frac{a_2}{a_1} \sqrt{ds} \quad (2.1)$$

Dokładniejsze rozwiązanie, nazywane dalej *streamline*, zostało zaproponowane przez Hansjoerga Seybolda, ETH Zurich [prywatna komunikacja]. Polega ono na znalezieniu takiego punktu na linii prądu, że jej długość od wierzchołka do danego punktu wynosi  $ds$ . Analityczne wyznaczenie długości strumienia pozwala na zapisanie wektora przyrostu rzeki  $dr = [x, y]$  (gdzie  $y$  jest współrzędną wzduż kierunku wzrostu w poprzednim kroku czasowym) w jawnej postaci:

$$x(y) = 2 \sqrt{\frac{y^3}{\beta^2} + \frac{y^4}{\beta^3}} \quad (2.2)$$

$$y(ds) = \frac{\beta^2}{9} \left[ \left( \frac{27ds}{2\beta^2} + 1 \right)^{2/3} - 1 \right] \quad (2.3)$$

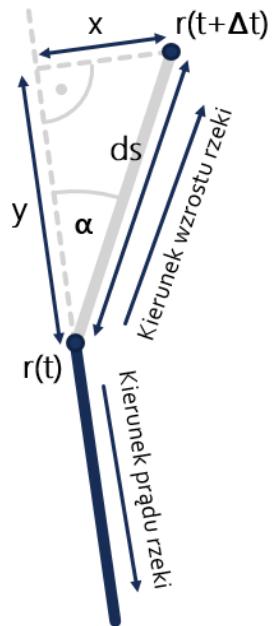
Gdzie  $\beta = a_1/a_2$ . Cały czas wzrost jest przybliżony, gdyż wykorzystana metoda numeryczna nie pozwala na zapisanie przyrostu długości rzeki w postaci linii krzywej, zastępując ją jednym odcinkiem bądź kilkoma odcinkami prostymi. Innym źródłem błędu występującym w metodach jawnych jest potraktowanie parametrów  $a_1$ ,  $a_2$  i  $a_3$  jako wielkości stałych, choć w trakcie wzrostu ulegają one zmianie.

Błędy w obu powyższych metodach powodują, że rzeka zaczyna oscylować wokół oczekiwanej linii wzrostu, przy czym w przypadku drugiej metody oscylacje te zanikają wraz ze zmniejszaniem długości kroku czasowego. Rysunek 2.3 ilustruje ten błąd na przykładzie wzrostu pojedynczej rzeki w podłużnej dolinie (jej geometria została opisana w podrozdziale 3.1). Dla małego kroku czasowego (w testach  $\Delta t = 0.001$ ) oscylacje są niezauważalne, a znalezione rozwiązanie jest zgodne z rozwiązaniem analitycznym wyznaczonym w [16].

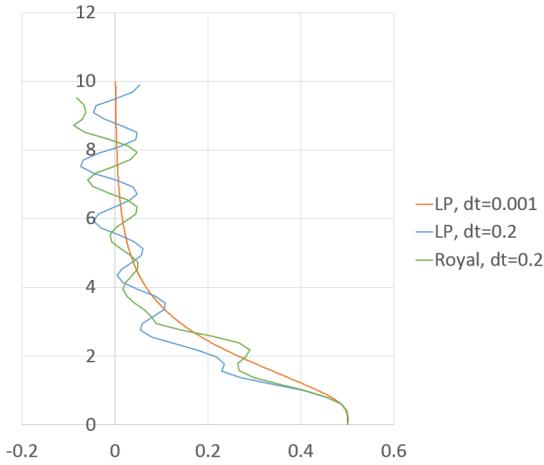
Innym przykładem metody jawnej jest metoda wzrostu wzduż gradientu potencjału w okolicy źródła strumienia. Kierunek ten można znaleźć szukając w zadanym niewielkim otoczeniu źródła (okręgu o środku w źródle i promieniu  $d$ ) kierunku wzrostu  $\alpha$  o największej wartości potencjału  $\phi$ :

$$\alpha = \operatorname{argmax}_{\alpha \in [-\pi, \pi]} \phi \left( \mathbf{r} + d \begin{bmatrix} \sin \alpha \\ \cos \alpha \end{bmatrix}, \right) \quad (2.4)$$

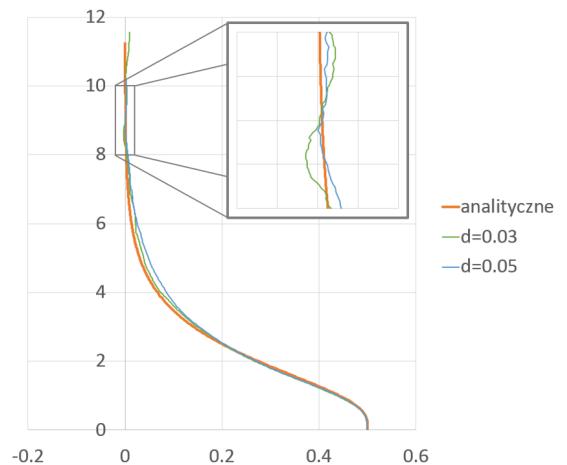
Rysunek 2.2: Ilustracja oznać używanych w rozdziale 2.



Założenie o istnieniu jednego lokalnego maksimum pozwala skutecznie znaleźć rozwiązanie metodą *dziel i zwyciężaj*. Metoda ta prowadzi jednak do chaotycznych lokalnych oscylacji strumienia (rysunek 2.4), spowodowanych dyskretyzacją otoczenia źródła. Oscylacje te wpływają również na globalny wzrost sieci rzecznej.



Rysunek 2.3: Porównanie wyników algorytmu wzrostu metodą *Royal* i wzrostu wzdłuż linii prądu (LP).



Rysunek 2.4: Porównanie wyników algorytmu wzrostu wzdłuż gradientu do rozwiązania analitycznego.

### 2.3. Wybrane metody niejawne

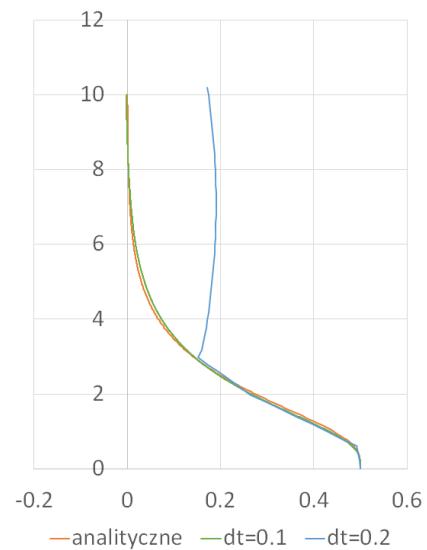
Metody niejawne (implicite) przy znajdowaniu wzrostu rzeki poza jej stanem w krokach poprzednich zależą również od stanu końcowego (po dokonaniu wzrostu). Prowadzi to do konieczności iteracyjnego szukania wektora wzrostu. Można w ten sposób uzyskać dokładniejsze i znacznie stabilniejsze wyniki, choć kosztem czasu wykonywania obliczeń.

Do najprostszych metod niejawnych można zaliczyć metodę minimalizującą wartość  $a_2$  (napływ wody wówczas będzie symetryczny). Polega na znalezieniu takiego kierunku wektora wzrostu rzeki  $d\mathbf{r}$ , dla którego współczynnik  $a_2$  da nowopowstałego źródła będzie najmniejszy.

$$d\mathbf{r} = \underset{d\mathbf{r} \in O(\mathbf{0}, ds)}{\operatorname{argmin}} a_2(\mathbf{r} + d\mathbf{r}) \quad (2.5)$$

Jak jednak pokazują wyniki testów, czasem znajdowane jest suboptimalne rozwiązanie prowadzące do nagłych, niepożądanych odchyleń strumienia.

Rysunek 2.5: Porównanie wyników algorytmu minimalizującego wartość  $a_2$  do rozwiązania analitycznego.



Algorytmy poza wzrostem strumieni w czasie pozwala je także "cofnąć", tzn. znaleźć ich kształt w chwili wcześniejszej. Przedstawione powyżej metody nie są jednak odwracalne. Cecha odwracalności oznacza, że złożenie operacji wzrostu o czas  $\Delta t$  oraz cofnięcia w czasie o  $\Delta t$  powoduje powrót do pozycji wyjściowej. Brak tej własności skutkowałaby pojawiением się dodatkowego błędu numerycznego przy dalszych eksperymentach z zakresu analizy ewolucji wstecznej (odtworzenia kształtu sieci rzeczej w przeszłości). Warto zatem wprowadzić również algorytm odwracalny.

Można go skonstruować wprowadzając średnią prędkość wzrostu strumienia  $v_{\text{sr}}$  zależną symetrycznie od położenia początkowego i końcowego, np.:

$$\mathbf{v}_{\text{sr}}(t, t + \Delta t) = \frac{1}{2}\mathbf{v}(t) + \frac{1}{2}\mathbf{v}(t + \Delta t) \quad (2.6)$$

Gdzie  $v(t)$  oznacza prędkość wzrostu rzeki w chwili  $t$ . W celu wyznaczenia jej kierunku można wykorzystać dowolną z powyżej przedstawionych metod (dalej wykorzystywany w tym celu będzie algorytm *streamline*). Przy wzroście z prędkością  $v_{\text{sr}}$  wierzchołek znajdzie się w punkcie:

$$\mathbf{r}(t + \Delta t) = \mathbf{r}(t) + \mathbf{v}_{\text{sr}}(t, t + \Delta t) \Delta t \quad (2.7)$$

Gdzie  $r(t)$  oznacza położenie źródła rzeki w chwili  $t$ . Wartość  $\mathbf{v}_{\text{sr}}(t, t + \Delta t)$  można wyznaczyć iteracyjnie. Na początku można przyjąć  $\mathbf{v}_{\text{sr}}(t, t + \Delta t) = v(t)$ . W każdym kolejnym kroku strumień rośnie zgodnie z równaniem 2.7, po czym znajdowana jest wartość  $\mathbf{v}(t + \Delta t)$  oraz aktualizowana jest wartość  $\mathbf{v}_{\text{sr}}(t, t + \Delta t)$  zgodnie z równaniem 2.6. W ten sposób algorytm zbiega do wektora  $\mathbf{v}_{\text{sr}}(t, t + \Delta t)$  spełniającego jednocześnie równania 2.7 i 2.6.

Algorytm jest ten odwracalny, gdyż można znaleźć lokalizację źródła w kroku poprzednim na podstawie lokalizacji bieżącej:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{v}_{\text{sr}}(t, t + \Delta t) \Delta t \quad (2.8)$$

Do wyznaczenia prędkości  $\mathbf{v}(\mathbf{r})$  należy jednak znać kształt całego strumienia. W modelu założono, że w trakcie ewolucji rzeka może się wydłużać, jednak nie może zmienić kształtu swojej już wyewoluowanej części. Przykładowo pomija się skutki erozji pochodzące z asymetrycznego podmywania jej brzegów. Innymi słowy kształt rzeki jest równoważny trajektorii źródeł w trakcie jej wzrostu. Można zatem założyć, że źródło rzeki po cofnięciu musi się znaleźć na już istniejącym strumieniu (redukując tym samym problem dwuwymiarowy do problemu jednowymiarowego). Równanie wektorowe (2.8) opisujące procedurę odwrotną można zatem zastąpić prostszą zależnością skalarną:

$$s(t) = s(t + \Delta t) - |\mathbf{v}_{\text{sr}}(t, t + \Delta t)| \Delta t \quad (2.9)$$

Gdzie  $s(t)$  jest długością rzeki w czasie  $t$ . Warto zauważyć, że do wyznaczania modułu prędkości wystarczy wykorzystać prawo wzrostu bez konieczności wyznaczania jego kierunku na podstawie metod przedstawionych w poprzednich paragrafach.

Algorytm ten pozwala uzyskać dokładniejsze oszacowanie prędkości rzeki niż w przypadku pozostałych algorytmów, gdyż dobrze oszacowuje on zmianę położenia w obrębie jednego kroku czasowego z dokładnością do wyrazu kwadratowego (pozostałe metody mają dokładność liniową).

## Rozdział 3

# Wpływ prawa wzrostu na strukturę sieci rzecznej

### 3.1. Rzeki w polu Laplace'owskim

Rzeki nie zawsze są zasilane z lokalnej wody opadowej. Na niektórych obszarach głównym źródłem zasilania rzek jest woda pochodząca z odległych terenów. Przykładem mogą być rzeki na Nowej Zelandii zasilane wodą powstającą w wyniku topnienia górskich lodowców, wsiąkającą następnie w wodę gruntową i transportowaną na znaczne dystanse [17]. Podobnie zasilane mogły być obecnie już wyschnięte sieci rzeczne na Marsie [18]. Wzrost takich rzek można odtworzyć rozpatrując długą prostokątną dolinę (np. o proporcjach boków 1 : 25) o następujących warunkach brzegowych: na dolnej krawędzi mamy zbiornik, do którego spływa woda z rzek ( $\phi = 0$ ), na bocznych (dłuższych) krawędziach mamy warstwę nieprzepuszczalną ( $\frac{d\phi}{dn} = 0$ , gdzie  $\mathbf{n}$  - wektor normalny do brzegu), a na górnej krawędzi stały napływ wody ( $\frac{d\phi}{dn} = -\text{const.}$ ) lub stały potencjał ( $\phi = \text{const.}$ ), tak jak zostało to przedstawione na rysunku 3.1. W dalszej części pracy geometria ta będzie nazywana geometrią prostokątną. Bifurkacja w takiej geometrii może zachodzić wyłącznie pod wpływem reguły (1.15), gdyż warunek powstania dwóch maksimów napływu wody do wierzchołka w trakcie wzrostu nie zostaje spełniony. Dla stałego strumienia wody na górnej krawędzi ( $\nabla\phi = 1$  definiuje jednostkę długości w układzie) w geometrii o wymiarach  $2 \times 50$  przeprowadzono serię symulacji dla różnych wartości  $\eta$  występującego w prawie wzrostu (1.13) od  $\eta = 0$  do  $\eta = 2$ . Początek rzeki wybrano w punkcie  $x = 1.2$ , a za regułę bifurkacji przyjęto warunek  $\frac{a_1}{l} > 0.8$ . Wyniki przedstawiono na rysunku 3.5.

Wyraźnie widoczne są różnice w strukturze rzek dla poszczególnych współczynników  $\eta$ . Im wyższa jego wartość tym szybciej różnice w długości odnóż rzecznych zaczynają się powiększać i tym szybciej dominację przejmuje jeden z wierzchołków. Niemal cały strumień wód podziemnych wpływa do dominującej rzeki powodując zahamowanie procesu wzrostu wolniejszych strumieni. Analiza kształtu takich rzek potencjalnie może dostarczyć precyzyjnej informacji o rzeczywistej postaci prawa wzrostu. Przykładowym makroskopowym wskaźnikiem może być rozkład długości strumieni pomiędzy punktami bifurkacji bądź między punktem bifurkacji a miejscem, w którym dany strumień zastygnął. Podział ten wynika z faktu, że długości te mogą cechować się dwoma różnymi rozkładami. Średnie i odchylenie standardowe dla wyników eksperymentu zostały przedstawione na rysunku 3.2. Można na nim zaobserwować systematyczny spadek długości strumieni na całym zakresie wartości  $\eta$ , a ewentualne odchylenia wynikają z niewielkiej próbki statystycznej. Przykładowe rozkłady długości odcinków strumieni pomiędzy wierzchołkami zostały przedstawione na rysunku 3.3.

## 3.2. Rzeki w polu Poissonowskim

Przejdziemy teraz do przypadku rzek zasilanych głównie z lokalnych opadów. W celu modelowania wzrostu takich rzek można posłużyć się doliną kwadratową o następujących warunkach brzegowych: na dolnej krawędzi mamy zbiornik, do którego spływa woda z rzek ( $\phi = 0$ ), a na pozostałych krawędziach mamy warstwę nieprzepuszczalną ( $\frac{d\phi}{dn} = 0$ ), tak jak zostało to przedstawione na rysunku 3.1. Przy takiej geometrii rozwinięcie się wysoce rozgałęzionej sieci rzecznej jest możliwe tylko przy bifurkacji zachodzącej przy spełnieniu warunku (1.14). Dla powyższej geometrii o wymiarach  $1 \times 1$  przeprowadzono serię symulacji wzrostu sieci rzecznej dla różnych wartości  $\eta$  od  $\eta = 0$  do  $\eta = 4.6$ . Za początek rzeki wybrano punkt  $x = 0.4$ , a jako regułę bifurkacji  $\frac{a_3}{a_1} < -\frac{1}{9}$ . Symulacja wzrostu każdej z rzek trwała aż do ustania procesu erozji wstępnej na każdym strumieniu. Przy odpowiednio małej prędkości wody podziemnej nie jest w stanie przesuwać materiału podłożu, zatem dalsza erozja i wzrost strumienia zostają zahamowane. W przypadku niniejszych symulacji za próg ten przyjęto wartość  $a_1 = 0.01$ . Wybrane wyniki symulacji przedstawiono na rysunku 3.6.

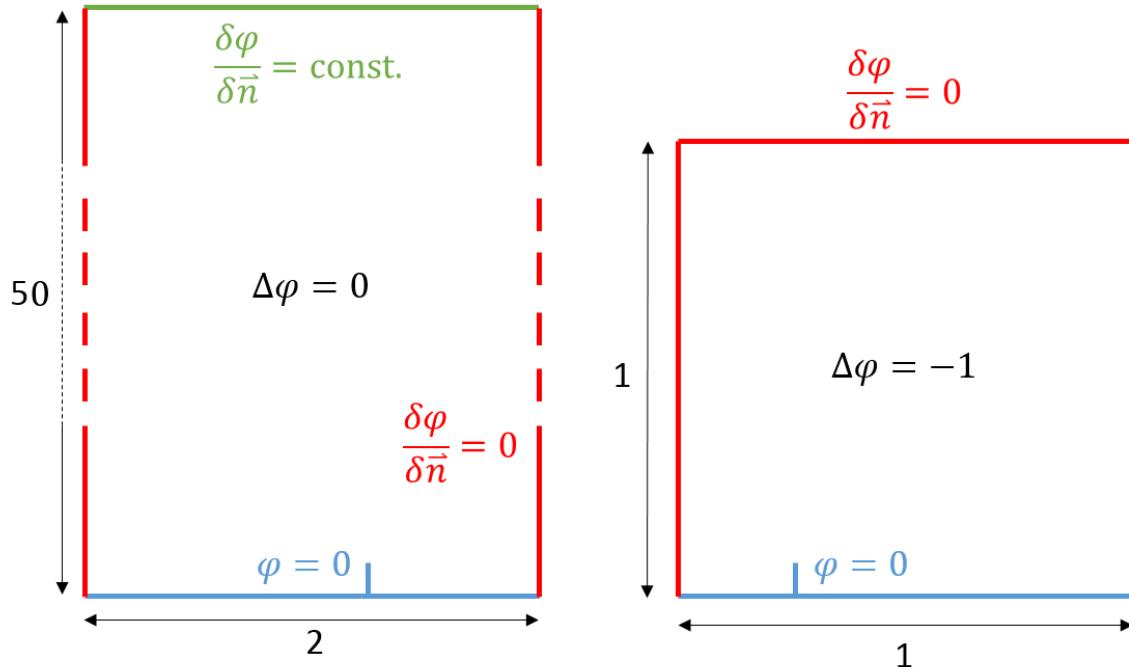
W tym przypadku uzyskano zupełnie inne zachowanie sieci rzecznych niż w poprzednim paragrafie. W poprzedniej geometrii można było zaobserwować pewną charakterystyczną skalę odległości (np. średnią długość strumienia między punktami bifurkacji). Tutaj jednak skala długości jest narzucona jedynie przez długość boku obszaru, która to skala również przestała mieć znaczenie przy jego podziale na coraz mniejsze strumienie wypełniające przestrzeń. W ten sposób sieci rzeczne tworzą w przybliżeniu bezskalową, fraktalną strukturę, która wygląda podobnie niezależnie od wartości  $\eta$ . Charakterystyczny dla bezskalowych struktur potęgowy rozkład można zaobserwować w rozkładzie długości strumieni pomiędzy punktami bifurkacji, jak również ich dystrybuantach (rysunek 3.4). Funkcja potęgowa nie opisuje poprawnie najkrótszych strumieni, gdyż te w wyniku wprowadzonego progu na parametr  $a_1$  przestają rosnąć nie podlegając dalszej bifurkacji.

Inaczej w tej geometrii wygląda również czułość kształtu rzeki na zmianę prawa wzrostu. W opisywanym wzroście obszar jest dzielony między strumienie, dzięki czemu ich współodziaływania są dużo mniejsze niż w geometrii prostokątnej i prawo wzrostu nie ma tak silnego znaczenia w rozwoju sieci. Podobieństwo sieci niezależenie od wartości  $\eta$  może znacznie utrudnić odtworzenie prawa wzrostu na podstawie kształtu sieci. Powyższą obserwację można ilościowo potwierdzić m.in. analizując rozkład długości strumieni analogiczny jak w przypadku poprzedniego eksperymentu. Z powodu występowania wysoce niesymetrycznych rozkładów na wykresach zaznaczono medianę z kwantylami rzędu 0.32 i 0.68 (rysunek 3.2). Otrzymany rozkład jest w przybliżeniu niezależny od wartości parametru  $\eta$ . Jedynie dla  $\eta < 1.2$  obserwowany jest istotny statystycznie wzrost długości strumieni.

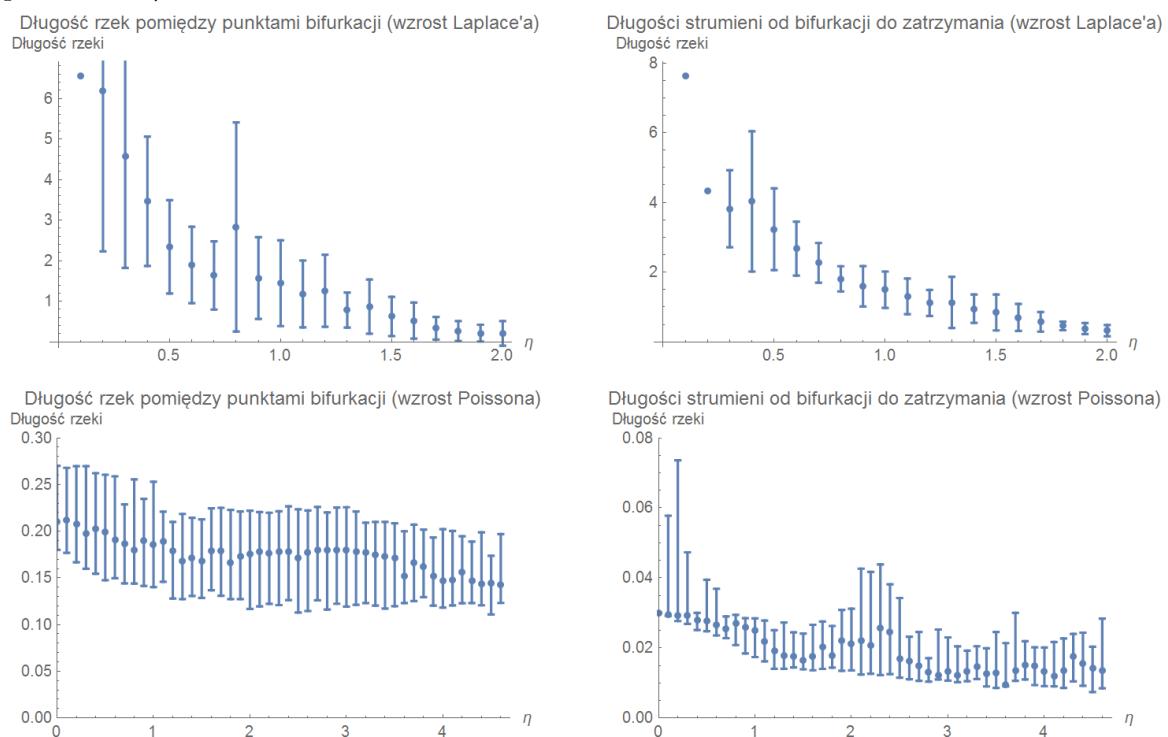
Warto zaznaczyć jednak, że choć końcowe kształty sieci są do siebie podobne to zupełnie inaczej one wyglądają we wczesnej fazie ewolucji - im większa jest wartość  $\eta$  tym szybciej rośnie "główny" spiralny strumień w stosunku do jego odnóg (rysunek 3.7).

Podobne kształty sieci rzecznych przy lokalnym i odległym źródle zasilania wód podziemnych zostały zaobserwowane w naturze [18], a w pracy [19] został przedstawiony statystyczny opis wzrostu sieci zasilanych lokalnymi opadami. Analogiczne doświadczenia do powyższych dla zmiennej progowej wartości  $\frac{a_3}{a_1}$ , przy której zachodzi bifurkacja zostały przeprowadzone w [15]. Pokazano istotny jej wpływ na kształt sieci rzecznej, gdyż niższa jej wartość przyspiesza rozgałęzianie się strumieni. Dla parametru  $r_c \ll 1$  z reguły bifurkacji (1.14) sieć rzeczna rozgałęzia się blisko dolnej ścianki. Ze względu na duży dystans od pozostałych krawędzi powstają podobne struktury do uzyskiwanych w wzroście Laplace'a. Nie wykazują one w tej fazie wzrostu cechy bezskalowości.

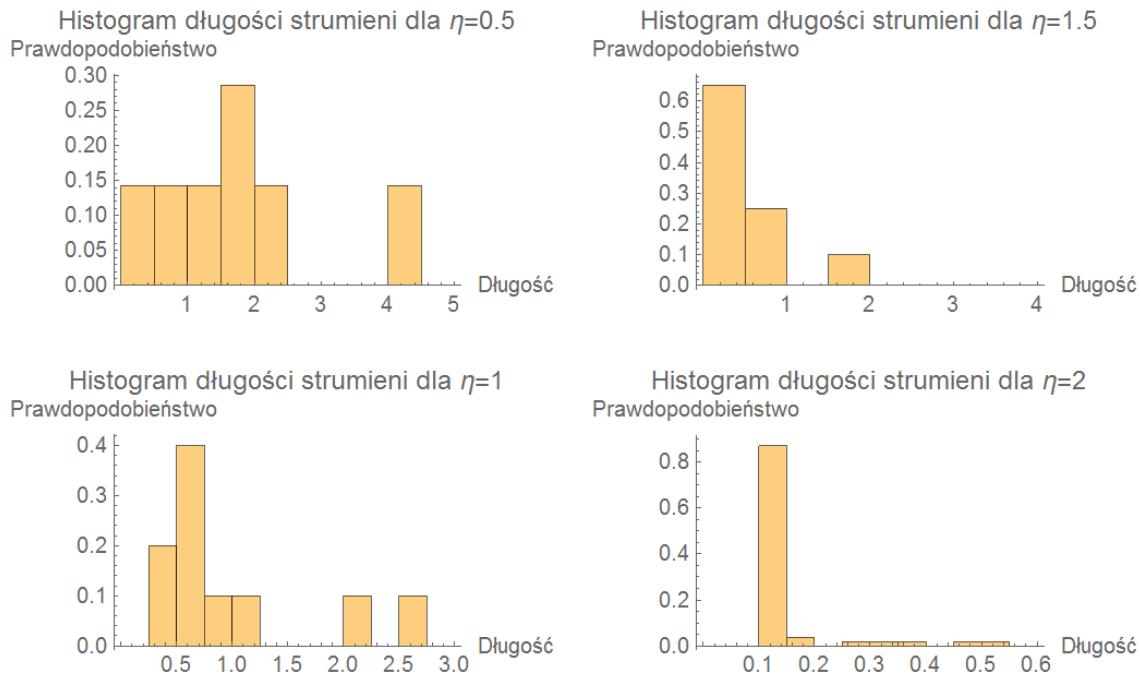
Rysunek 3.1: Ilustracja geometrii prostokątnej i kwadratowej z oznaczonymi kolorami warunkami brzegowymi.



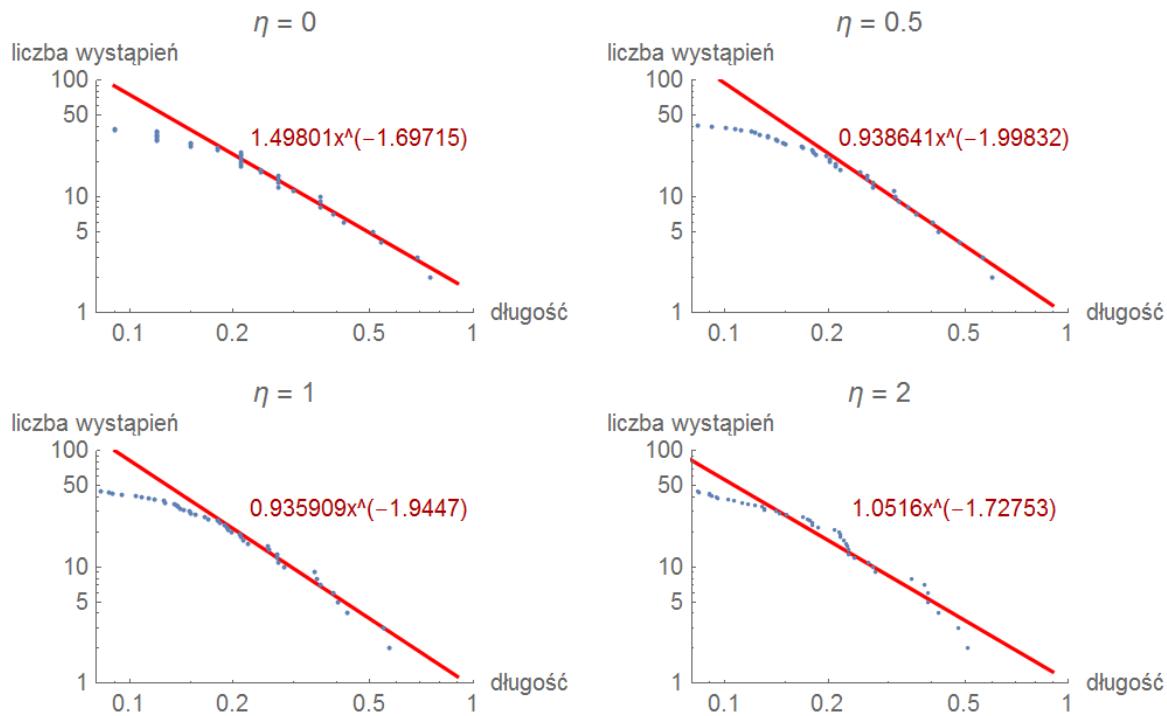
Rysunek 3.2: Długość strumieni pomiędzy punktami bifurkacji i pomiędzy punktem bifurkacji a końcem strumienia dla sieci przy wzroście Poissona i Laplace'a w zależności od wartości parametru  $\eta$ .



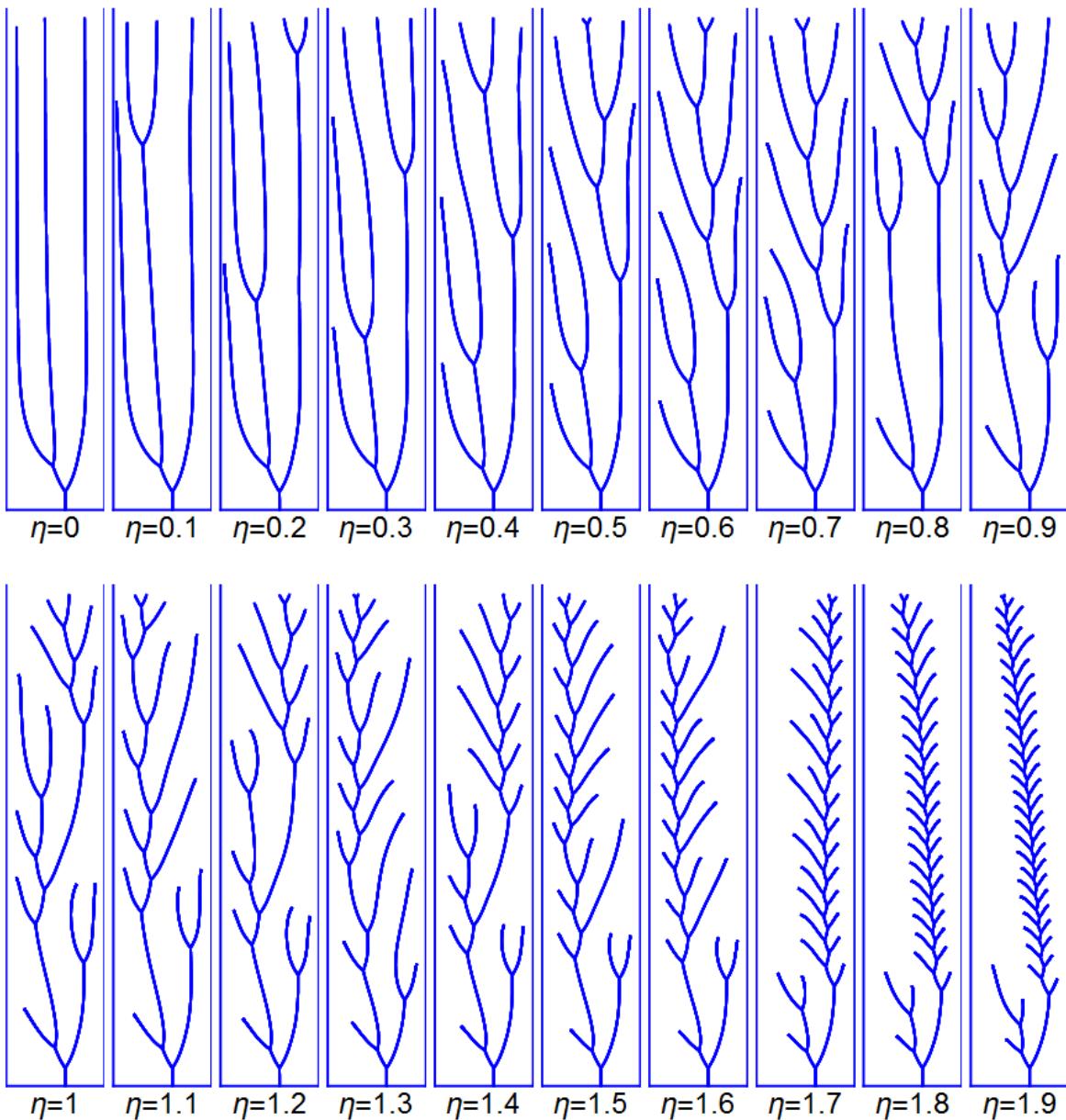
Rysunek 3.3: Histogramy długości strumieni pomiędzy punktami bifurkacji dla wzrostu Laplace'a przy czterech wybranych wartościach parametru  $\eta$ .



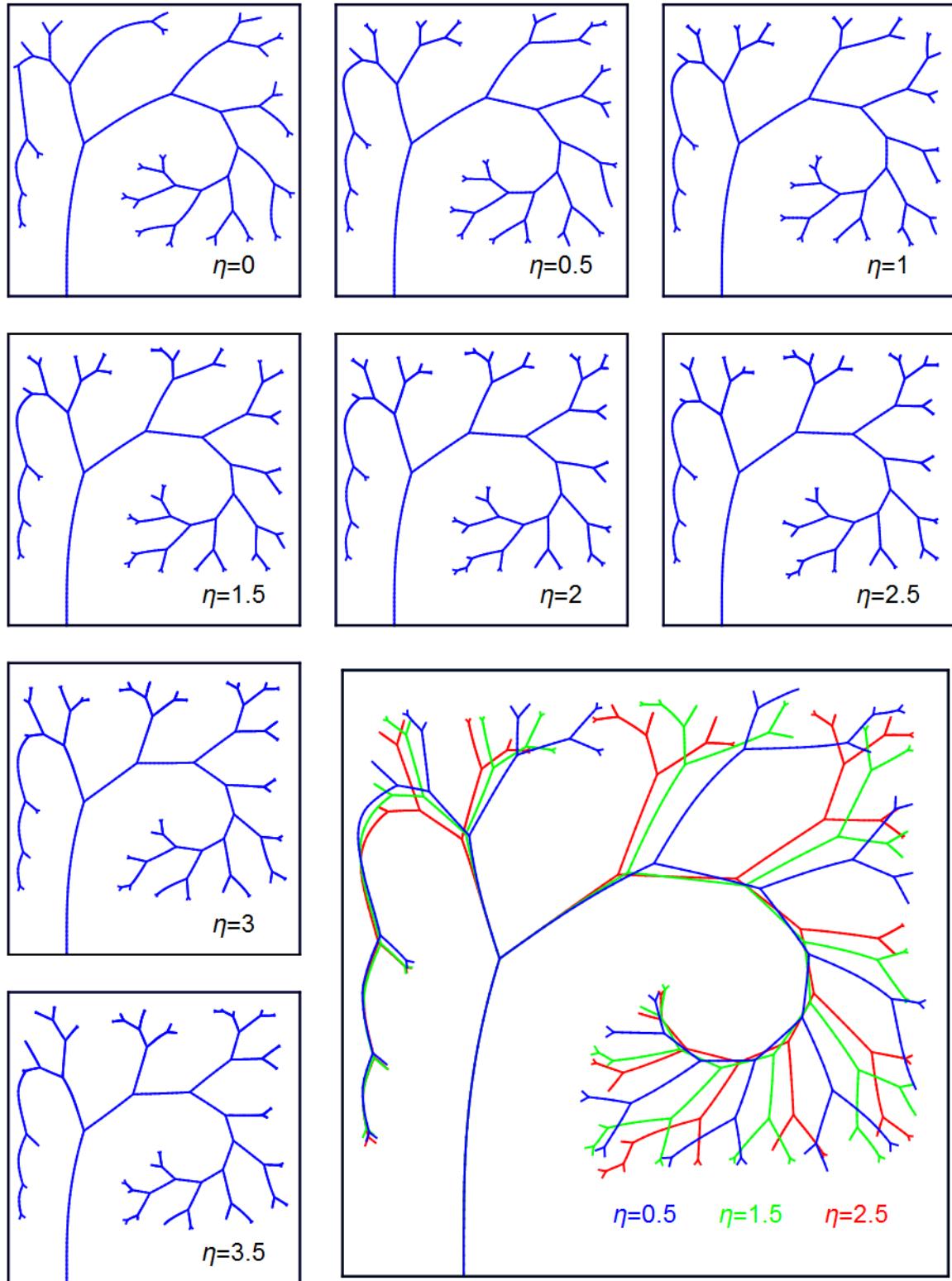
Rysunek 3.4: Wykresy dystrybuanty długości strumieni pomiędzy punktami bifurkacji dla wzrostu Poissona przy czterech wybranych wartościach parametru  $\eta$ . Na osi pionowej zaznaczono liczbę strumieni o długości większej od zadanej. Do drugiej połowy punktów na wykresie dopasowaną metodą najmniejszych kwadratów funkcję potęgową.



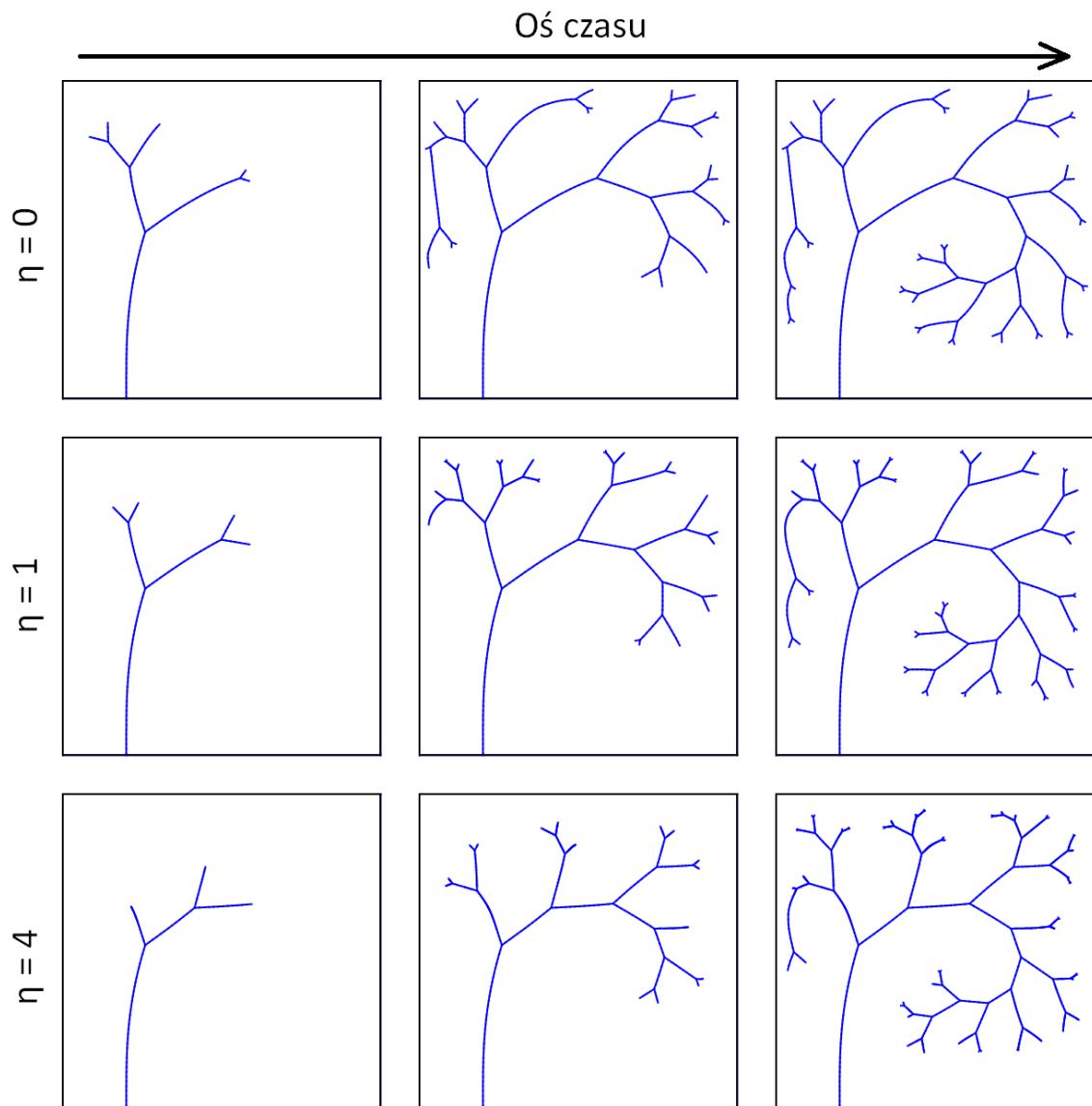
Rysunek 3.5: Wyniki symulacji wzrostu rzek w polu Laplace'owskim dla wybranych wartości parametru  $\eta$  w prawie wzrostu, warunku bifurkacji  $a_1 > 0.8$  i stałym strumieniu na górnym brzegu  $\frac{\delta\phi}{\delta y} = 1$ .



Rysunek 3.6: Wyniki symulacji wzrostu rzek w polu Poissonowskim dla wybranych wartości parametru  $\eta$  w prawie wzrost, warunku bifurkacji  $\frac{a_1}{a_3} > 0.23$ .



Rysunek 3.7: Zależność kształtu sieci przy wzroście Poissona dla wybranych trzech momentów w czasie i trzech wybranych wartości parametru  $\eta$ .



## Rozdział 4

# Problem odwrotny

### 4.1. Przedstawienie problemu

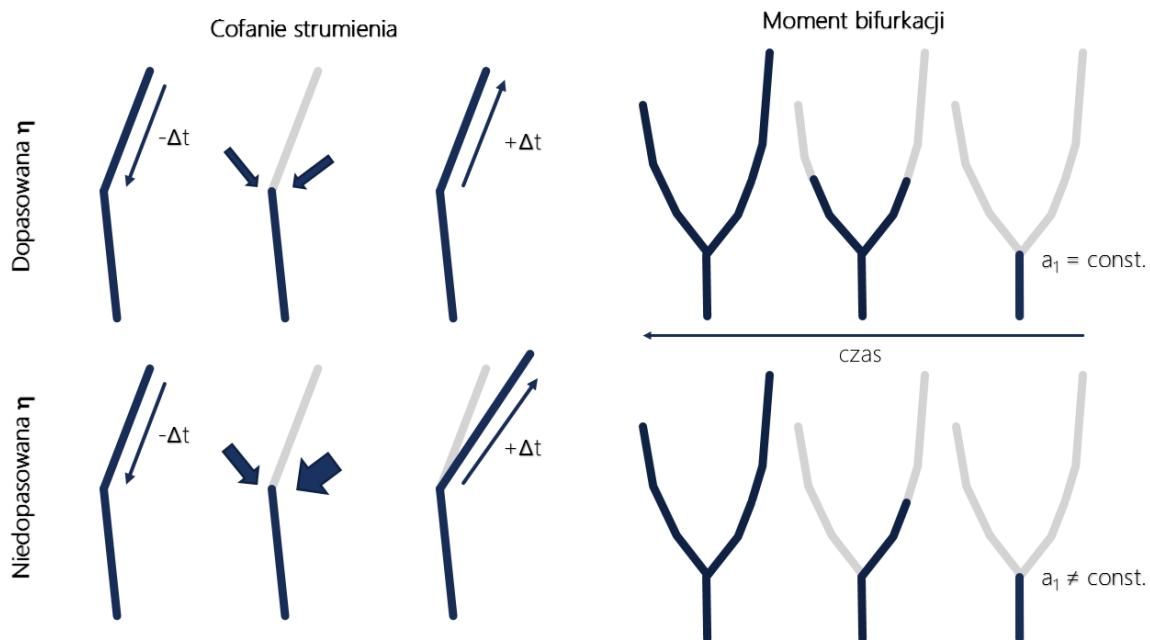
W poprzednich paragrafach przedstawiono opis wzrostu sieci rzecznej w czasie. Przy zadanych warunkach początkowych oraz prawie wzrostu i regułach bifurkacji można jednoznacznie określić kształt rzeki w przeszłości (z dokładnością do błędów metody numerycznej). Proces ewolucji jest procesem odwracalnym - również na podstawie obecnego kształtu rzeki można odtworzyć jej postać w dowolnej chwili w przeszłości (dobrym przykładem jest odwracalna metoda numeryczna przedstawiona w podrozdziale 2.3 wykorzystywana w omawianych dalej doświadczeniach numerycznych). Proces ten w dalszej części będzie nazywany „cofaniem” sieci rzecznej, a będzie polegać na znajdowaniu w kolejnych krokach czasowych położenia źródeł strumieni w przeszłości. Wykonanie takiej procedury wymaga znajomości jedynie prawa wzrostu. Kierunek cofania się źródła jest określony przez kierunek rzeki (we wprowadzonym modelu kształt strumieni jest równoważny trajektorii źródła w trakcie wzrostu), a miejsca bifurkacji są narzucone przez sam kształt sieci rzecznej.

Błędnie dobrane prawo wzrostu może spowodować, że po cofnięciu źródeł wzduż linii rzeki o czas  $\Delta t$ , napływ wody podziemnej może być asymetryczny (tzn. wartość  $a_2$  wyraźnie odbiegająca od zera), co jest niezgodne z przewidywaniami modelu wzrostu. Ponadto po ponownym wzroście rzeki o taki sam czas  $\Delta t$ , źródła mogą osiągnąć położenie niezgodne z rzeczywistym (rys. 4.1). Przyczyną tej nieodwracalności algorytmu jest fakt, że narzucając przy cofaniu kierunek pokrywający się z biegiem rzeki rozwiązywane jest równanie skalarne (2.9), zaś przy wzroście równanie wektorowe (2.7). Obserwację tą można przedstawić również następująco: równanie wektorowe (2.8) i skalarne (2.9) przy ustalonym parametrze  $\eta$  mają to samo rozwiązanie tylko wówczas, gdy rzeka narzucająca wiąz na równanie skalarne wyewoluowała zgodnie z prawem wzrostu opisany tą samą wartością parametru  $\eta$ .

Ponadto błędnie przyjęte prawo wzrostu może doprowadzić do sytuacji, w której strumienie znajdą się w punkcie bifurkacji w dwóch różnych chwilach czasu, a lokalizacja punktów bifurkacji nie będzie opisana żadną charakterystyczną wartością wielkości występujących w domniemanych regułach bifurkacji -  $a_1$  i  $\frac{a_3}{a_1}$ .

Opierając się na powyższych spostrzeżeniach zaproponowano szereg doświadczeń dotyczących numerycznej operacji cofania sieci rzecznej, mających na celu zbadanie słuszności przyjętego prawa wzrostu oraz zbadania kryteriów zachodzenia bifurkacji.

Rysunek 4.1: Porównanie wyników cofania sieci rzecznej dla dopasowanego i niedopasowanego  $\eta$ . Grube strzałki symbolizują rozkład strumienia w otoczeniu źródła (symetryczny w przypadku dopasowanego  $\eta$  i potencjalnie asymetryczne w przypadku niedopasowanego  $\eta$ ).

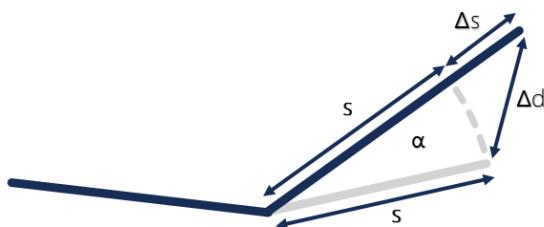


Wszystkie źródła są iteracyjnie cofane o pewien czas  $\Delta t$  (który może zmieniać się w kolejnych krokach czasowych). Po każdym cofnięciu zapisywana jest stosunek parametrów  $a_2/a_1^2$  oraz znajdowany jest prognozowany wzrost źródeł o czas równy  $\Delta t$  przy założonym prawie wzroście (rys. 4.1). Następnie porównywany jest segment, o który rzeka została cofnięta (dalej nazywany rzeczywistym wzrostem) z segmentem utworzonym przez prognozowanie wzrostu (dalej nazywany prognozowanym wzrostem). Porównanie zostanie wykonane przy użyciu następujących wielkości (rys. 4.2):

1. Odchylenie kątowe  $\alpha$  - kąt pomiędzy rzeczywistym a prognozowanym wzrostem rzeki
2. Odchylenie geometryczne  $\Delta d$  - odległość źródeł rzeki po wzroście rzeczywistym a prognozowanym

Ponadto, w momencie cofnięcia pierwszego strumienia do punktu bifurkacji jest zapisywana długość drugiego strumienia (długość ta jest nazywana dalej *niedopasowaniem w punkcie bifurkacji*). W momencie cofnięcia drugiego strumienia do punktu bifurkacji znajdowane

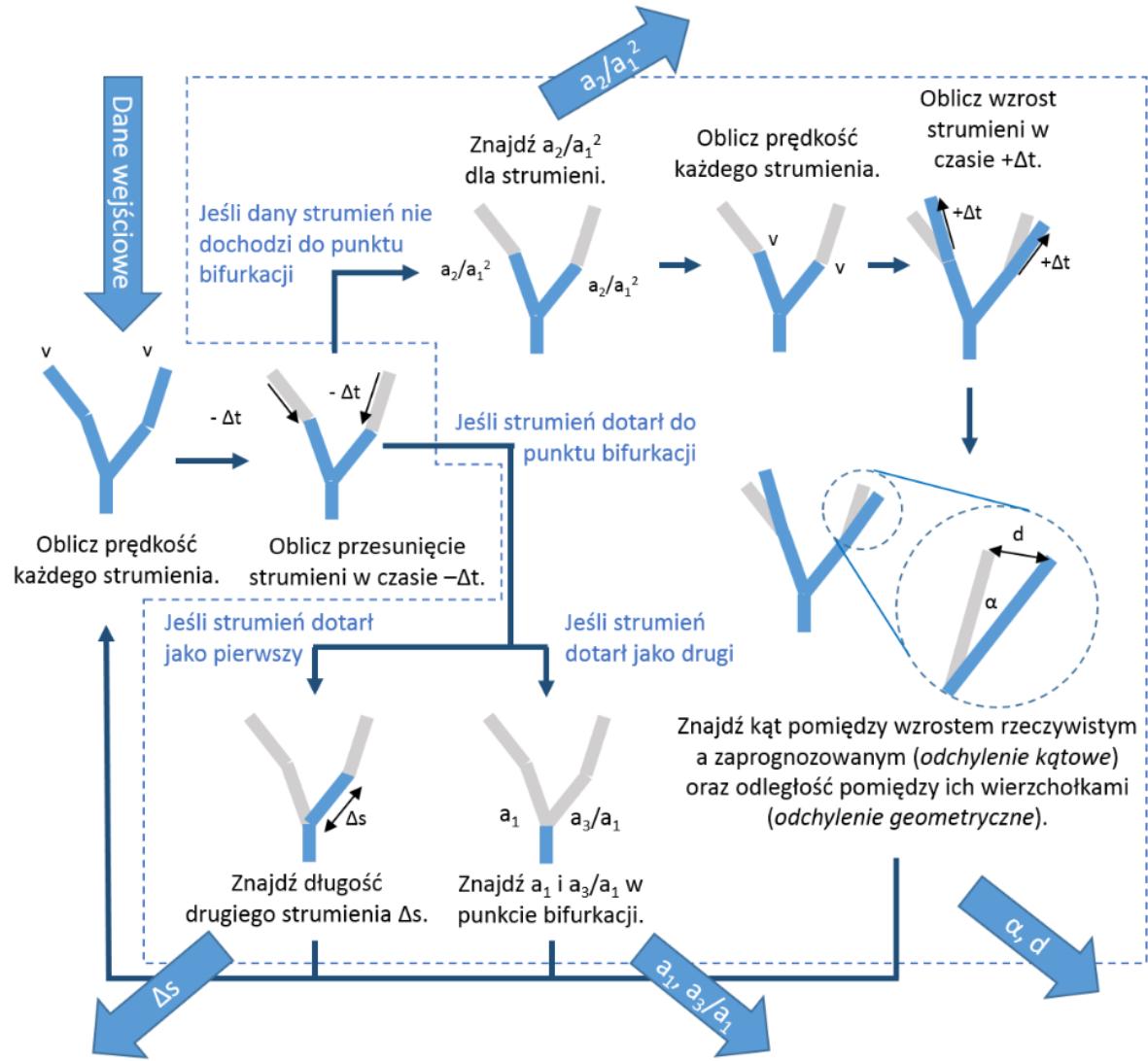
Rysunek 4.2: Ilustracja zapisywanych wyników porównania rzeczywistego i prognozowanego wzrostu rzeki. Zapisywane są:  $\alpha$  i  $\Delta d$ .



i zapisywane są wielkości występujące w regułach bifurkacji -  $a_1$  i  $\frac{a_3}{a_1}$ . Uproszczony schemat algorytmu został przedstawiony na rys. 4.3. Z uzyskanych w każdym z eksperymentów wielkości jest wyciągana mediana oraz kwantyle rzędu 0.32 i 0.68 (wybrano ją ze względu na częste występowanie pojedynczych prognoz odbiegających jednostronnie zakłócającymi analizę wyników). Porównanie tych wielkości dla różnych wartości  $\eta$  może pozwolić oszacować jej rzeczywistą wartość.

W dalszej części rozdziału zostaną przedstawione wyniki powyższych eksperymentów dla wybranych sieci rzecznych dla wybranego zakresu wartości  $\eta$  z prawa wzrostu. Wyniki zostaną przeanalizowane pod kątem możliwości odtworzenia prawa wzrostu i reguł bifurkacji. Można to zagadnienie traktować jak problem odwrotny do procesu ewolucji - zamiast odtworzenia struktury rzeki z parametrów jej wzrostu, to one będą odtwarzane na bazie już wyewoluowanej rzeki.

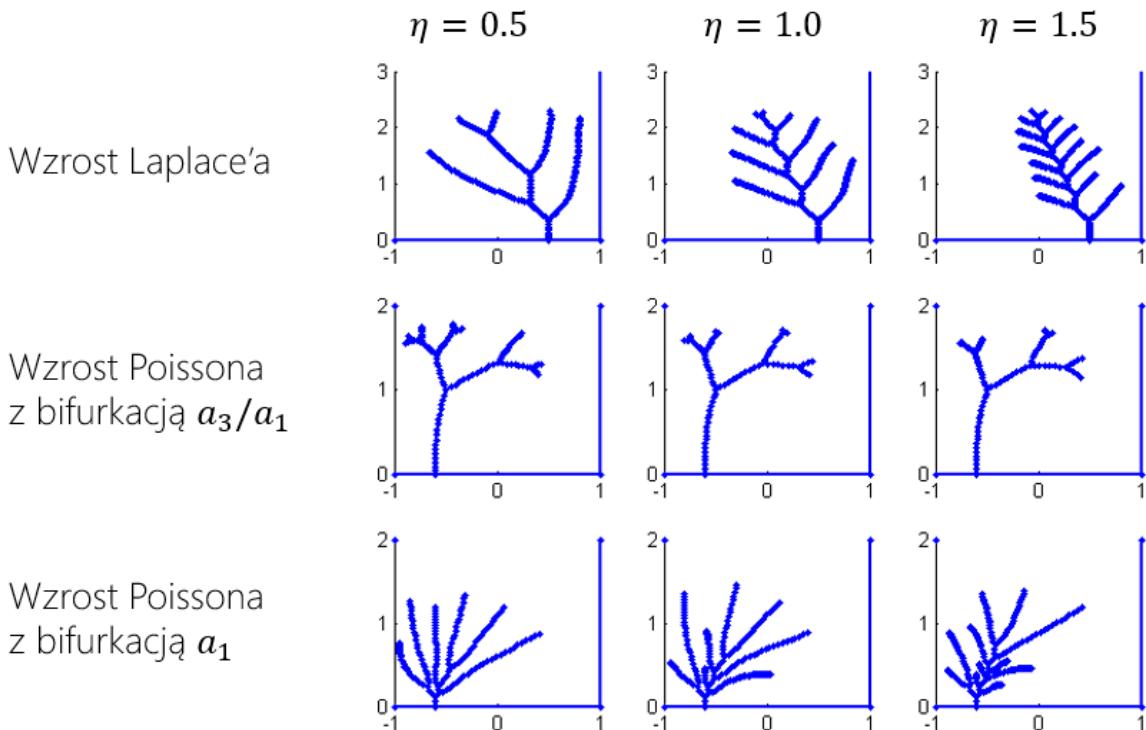
Rysunek 4.3: Uproszczony schemat algorytmu ewolucji wstecznej wraz z wykonywanymi w jego trakcie wskaźnikami. Algorytm ten jest wykonywany dla każdej próbowanej wartości  $\eta$ . Operacje otoczone przerywaną linią są wykonywane osobno dla każdego ze strumieni.



## 4.2. Wyniki ewolucji wstecznej na danych testowych

Powyższe eksperymenty przeprowadzono na 9 wygenerowanych sieciach wejściowych. Trzy z nich zostały przeprowadzone dla wzrostu Laplace'a w geometrii przedstawionej w podrozdziale 3.1 dla  $\eta$  o wartościach 0.5, 1 i 1.5 dla bifurkacji przy  $a_1 = 0.8$ . Pozostałe sześć sieci dotyczyło wzrostu w polu Poissonowskim w geometrii przedstawionej w 3.2 dla tego samego zestawu trzech wartości parametru  $\eta$  i następujących dwóch reguł bifurkacji:  $a_1 = 0.8$  i  $a_3/a_1 = 0.23$ . Ilustracja 4.4 przedstawia wygenerowane sieci rzeczne.

Rysunek 4.4: Wygenerowane sieci rzeczne do doświadczeń.



Wyniki wszystkich eksperymentów zostały zamieszczone w załączniku A. W tabeli 4.1 przedstawiono oszacowane wartości parametru  $\eta$  i reguł bifurkacji dla każdego eksperymentu. Wyniki każdego eksperymentu zostały przeanalizowane poniżej:

**Odchylenie kątowe.** Wartość  $\alpha$  w większości eksperymentów osiąga wartości bliskie 0 dla rzeczywistej wartości  $\eta$ . Wyjątek stanowi wzrost Poissona z regułą bifurkacji zależną od  $a_3/a_1$  dla  $\eta = 1.0$  i  $\eta = 1.5$ , gdzie wystąpił wyraźny błąd systematyczny (rysunki A.5/D i A.6/D). Inny problem wystąpił przy wzroście Laplace'a w geometrii prostokątnej dla  $\eta = 0.5$  i  $\eta = 1.0$ , dla której odchylenie kątowe jest bliskie 0 na całym mierzonym zakresie (rysunki A.1/D i A.2/D). W tym przypadku jednak analiza rozkładu wartości bezwzględnych i analiza szerokości rozkładu wartości wskaźnika pozwoliła oszacować parametr  $\eta$  z wysoką dokładnością. Są one lepszym wskaźnikiem, gdyż znalezienie globalnego minimum jest prawie zawsze jednoznacznie, podczas gdy funkcja odchylenia kątowego od wartości  $\eta$  może wielokrotnie przechodzić przez oczekiwana wartość 0, a ponadto nie prezentuje ona rzeczywistego rozrzutu wartości. W przypadku tego testu zdarzało się, że wskaźnik osiągał dwa osobne wy-

raźne minima, jednak niższe minimum (zwykle o jeden rząd wielkości) zawsze odpowiadało w przybliżeniu poprawnej wartości  $\eta$  (np. rysunek A.4/E).

**Odchylenie geometryczne.** Wartość  $\Delta d$  dla wzrostu z bifurkacją zależną od wartości  $a_1$  (szczególnie przy wzroście Laplace'a) osiąga wyraźne minimum dla wartości  $\eta$  bliskiej rzeczywistej (np. rysunek A.1/A), jednak w przypadku wzrostu Poissona z regułą  $a_3/a_1$  test ten jest nieskuteczny (np. rysunek A.5/A). Ponadto, w przypadku wzrostu Laplace'a im większa jest wartość  $\eta$  tym test staje się mniej dokładny. Dla wysokich wartości  $\eta$  cofanej sieci wartość  $\eta$ , w której wskaźnik osiąga minimum jest wyższa od rzeczywistej (np. rysunek A.3/A). Wskaźnik ten nieco rzadziej niż w przypadku odchylenia kątowego osiągał więcej niż jedno minimum, jednak zawsze najniższe z nich odpowiadało poprawnej wartości  $\eta$  (np. rysunek A.7/C).

**Wartość  $a_2/a_1^2$ .** Zarówno mediana jak i szerokość rozkładu  $\frac{a_2}{a_1^2}$  w obu geometriach osiąga minimum dla wartości  $\eta$  bliskiej rzeczywistej (np. rysunki A.4/H i A.4/I), przy czym dokładność szybko maleje ze wzrostem  $\eta$ , co odzwierciedla się zarówno w szerokości dna doliny na wykresie jak i w błędzie pomiędzy oszacowaną a rzeczywistą wartością  $\eta$ . Test ten jednak dostarcza dokładniejszych wyników dla fraktalnych struktur generowanych przy wzroście Poissona z regułą bifurkacji  $a_3/a_1$ .

**Niedopasowanie w punkcie bifurkacji.** Niedopasowanie momentu dojścia wierzchołków do punktu bifurkacji występuje jedynie dla niskich wartości  $\eta$  (np. rysunek A.3/J). W przypadku wartości wyższych bardziej oddalony (dominujący) strumień zdąży zrównać się podczas cofania z krótszym strumieniem, po czymoba z zbliżoną prędkością docierają do punktu bifurkacji. Wiąże się to z niestabilnością wzrostu dla dużych  $\eta$ . Wówczas dowolna przewaga prędkości wzrostu jednego ze strumieni szybko narasta, oddalając go od drugiego strumienia. Mimo to, przy odpowiedniej pozycji źródeł zaraz po bifurkacji dopuszczalny byłby ich równomierny wzrost. Właśnie taki analitycznie dopuszczalny, lecz numerycznie niemożliwy wzrost, występuje podczas testów w wyniku cofania strumieni rzeki przy założeniu zbyt dużej wartości  $\eta$ . Wskaźnik niedopasowania w punkcie bifurkacji nie pozwala precyzyjnie określić miejsca, od którego jego wartość osiąga 0, zatem nie jest on dobrą metodą wyznaczania rzeczywistej wartości  $\eta$ .

**Reguły bifurkacji.** Na wykresach naniesiono wartości wielkości z reguł bifurkacji dla wszystkich punktów bifurkacji. Wartości wskaźnika zgodnego z przyjętą regułą bifurkacji dla każdego punktu bifurkacji przyjmują dla poprawnej wartości  $\eta$  w przybliżeniu taką samą wartość (np. rysunek A.5/L), podczas gdy dla alternatywnej reguły taka sytuacja nigdy nie następowała (np. rysunek A.5/K). W przypadku wzrostu Laplace'a wartość ta jest zgodna z ustaloną wartością progową (np. rysunek A.3/K). Dla wzrostu Poissona rozrzut wartości wskaźnika jest zbyt duży, żeby oszacować wartość progu (np. rysunek A.6/L). Wskaźnik ten pozwala zatem w przypadku wygenerowanych rzeki nie tylko odnaleźć poprawną regułę bifurkacji, ale także oszacować prawo wzrostu, poprzez znalezienie wartości  $\eta$ , dla której wartości wskaźnika danej reguły bifurkacji są najzgodniejsze. Wartość ta jest w wynikach nieznacznie przeszacowana ze względu na dyskretny czas sprawdzania czy reguły bifurkacji zostały spełnione w algorytmie generującym dane wejściowe (np. rysunek A.3/L).

Tabela 4.1: Rzeczywiste (wiersze 2-6) oraz oszacowane (wiersze dalsze) parametry w eksperymentach na danych syntetycznych. Kolorem zielonym zaznaczono oszacowane wartości  $\eta$  nie dalsze niż 0.1 od rzeczywistej, a na czerwono te obarczone dużym błędem większym niż 0.2.

Numer eksperymentu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
Równanie	Laplace			Poisson						
Reguła bifurkacji	$a_1 > 0.8$			$\frac{a_3}{a_1} < -1/9$		$a_1 > 0.23$				
Wartość $\eta$	0.5	1	1.5	0.5	1	1.5	0.5	1	1.5	
Odch. geometryczne	0.5	1.1	1.7	0.4	-	1.3	0.5	1.0	1.5	
Szer. odch. geometryczne	0.5	1.1	1.6	0.5	0.6	0.6	0.5	1.1	1.4	
Odch. kątowe	-	-	1.4	0.5	1.2	1.2	0.5	1.0	1.5	
Odch. kątowe	0.5	1.1	1.7	0.5	1.2	1.2	0.5	1.0	1.5	
Szer. odch. kątowego	0.5	1.1	1.7	0.5	0.4	1.2	0.5	1.0	1.5	
Wartość $a_2/a_1^2$	-	-	1.4	0.4	0.8	1.3	0.4	-	1.5	
Wartość $ a_2/a_1^2 $	0.4	1.0	1.8	0.5	0.8	1.3	0.3	1.1	1.7	
Szer. rozkładu $a_2/a_1^2$	0.4	1.1	1.8	0.5	1.1	1.3	0.3	1.1	1.7	
Reguła bifurkacji	$a_1$	$a_1$	$a_1$	$\frac{a_3}{a_1}$	$\frac{a_3}{a_1}$	$\frac{a_3}{a_1}$	$a_1$	$a_1$	$a_1$	
Wartość progowa	0.8	0.8	0.8	-	-	-	0.24	0.24	0.23	

Na bazie powyższych analiz i zestawienia w tabeli 4.1 można wyciągnąć kilka podstawowych wniosków dotyczących metod rozwiązywania problemu odwrotnego. Dokładność zaproponowanych metod maleje wraz ze wzrostem parametru  $\eta$  opisującego ewolucję badanej sieci rzeczynej. Najczężej jest oszacować wartość  $\eta$  przy wzroście Poissona dla reguły bifurkacji zależnej od  $a_3/a_1$ . W szczególności żaden test nie umożliwił precyzyjnego odtworzenia prawa wzrostu dla sieci rzeczynej o  $\eta = 1.5$  (we wszystkich przypadkach wartość została w oszacowaniach zanikająca). Testy oparte na porównaniu wzrostu prognozowanego z rzeczywistym (tzn. odchylenie geometryczne i kątowe) dostarczyły najtrajniejszych oszacowań, w szczególności osiągając 100% trafność w przypadku wzrostu Poissona z regułą zależną od  $a_1$ . Reguły bifurkacji udało się skutecznie zidentyfikować, a w przypadku bifurkacji zależnej od wartości  $a_1$  udało się z wysoką precyzją znaleźć jej wartość progową.

## Rozdział 5

# Podsumowanie i wnioski

W pracy skupiono się na dwóch geometriach (kwadratowej i prostokątnej) o wodach podziemnych zasilanych z dwóch różnych źródeł - wody z lokalnych opadów (wzrost Poissona) oraz wody napływającej z zewnątrz (wzrost Laplace'a). Rozpatrzone również dwie reguły bifurkacji - zależne od wartości  $a_1$  i  $\frac{a_3}{a_1}$ . Są to przypadki reprezentatywne, na których można było zbadać możliwość odtworzenia praw rządzących wzrostem sieci rzecznej.

W rozdziale 3 zaobserwowano na drodze eksperymentu numerycznego zupełnie inny wpływ parametru  $\eta$  na kształt sieci rzecznej dla każdego z powyższych typów wzrostu. Dla wzrostu Poissonowskiego z regułą  $\frac{a_3}{a_1}$  zaobserwowano bezskalowe struktury podobne do siebie niezależnie od parametru  $\eta$ . Ta prosta obserwacja już pozwoliła przewidzieć trudności przy rozwiązywaniu problemu odwrotnego - znajdowania prawa wzrostu na podstawie kształtu sieci rzecznej. Eksperiment ten także potwierdził trudności w oszacowaniu parametru  $\eta$ , szczególnie dla wyższych jego wartości.

Seria zaproponowanych w ramach niniejszej pracy doświadczeń pozwoliła z dużą dokładnością odtworzyć prawo wzrostu dla sieci wygenerowanych w procesie wzrostu Laplace'a i Poissona z regułą  $a_1$ . Nie wszystkie wskaźniki poprawnie wskazały poszukiwaną wartość, a ich skuteczność zależała od analizowanego typu wzrostu. Na podstawie uzyskanych wyników w przypadku eksperymentów z regułą bifurkacji zależną od  $a_1$ , oszacowanie wartości  $\eta$  na drodze analizy odchylenia wzrostu prognozowanego od rzeczywistego były najczęściej bardziej skuteczne od analizy wartości stosunku wyrazów  $a_2/a_1^2$  w trakcie wzrostu. Jednak w przypadku wzrostu Poissona z regułą bifurkacji zależną od  $\frac{a_3}{a_1}$  to analiza rozkładu wartości wyrazów  $a_2/a_1^2$  dostarczyła najtrajniejszych wyników, z błędem nieprzekraczającym 20%.

Kolejnym istotnym wnioskiem z prac jest fakt, że znacznie dokładniejsze oszacowania prawa wzrostu można uzyskać dla niskich rzeczywistych wartości  $\eta$ , również w przypadku wzrostu Poissona. Między innymi stanowi to poparcie dla wniosków z pracy [13], w której za pomocą testu podobnego do zaproponowanej analizy *odchylenia kątowego* oszacowano, że dla dopływu rzeki Apalachicola na Florydzie prawo wzrostu jest opisane parametrem  $\eta = 0.7$ . Sieć ta jest zasilana głównie z lokalnej wody opadowej i tworzy samopodobne mocno rozgałęzione struktury, przypominające te osiągnięte dla reguły bifurkacji  $\frac{a_3}{a_1}$ . Mimo niekorzystnych wyników dla takiego wzrostu przy  $\eta = 1$  i  $\eta = 1.5$  na danych syntetycznych, dla niższej wartości  $\eta = 0.5$  wskaźnik ten pozwolił na dokładne odtworzenie prawa wzrostu.

Ważna jest również obserwacja, że na podstawie testów przeprowadzanych w momencie dochodzenia strumieni do punktu bifurkacji niezwykle precyzyjnie można odtworzyć typ reguły bifurkacji. Wartość progowa, przy której zachodzi bifurkacja, mogła zostać oszacowana jedynie w przypadku bifurkacji zależnej od  $a_1$ . Dla rzeczywistych rzek ten test może jednak nie być skuteczny ze względu na potencjalne odstępstwa rzeczywistego wzrostu od założeń

modelu, skutkujących brakiem przecięcia się wskaźników na tym samym poziomie, wyraźnie widocznym w wynikach dla danych syntetycznych.

Kolejnym istotnym krokiem w rozwiązywaniu problemu odwrotnego powinno być wykonanie zaproponowanych doświadczeń na rzeczywistej sieci rzecznej, celem odtworzenia praw wzrostu, jak również sprawdzenia zgodności struktur występujących w naturze z założeniami wykorzystywanego w niniejszej pracy modelu.

## **Podziękowania**

Chciałbym bardzo podziękować Olivierowi Devauchelle (Institut de Physique du Globe, Paris), Hansjörgowi Seyboldowi (ETH Zurich), Robertowi Yi (MIT, USA) za użyczenie mi skryptów do modelowania wzrostu rzek, stanowiących punkt wyjścia w niniejszej pracy, oraz danych przestrzennych dotyczących kształtu sieci rzecznej na Florydzie.

# Bibliografia

- [1] J.E. Laity and M.C. Malin. *Sapping processes and the development of theater-headed valley networks on the Colorado Plateau*. Geological Society of America Bulletin 96.2 (1985): 203-217.
- [2] A.E. Lobkovsky, B. Jensen, A. Kudrolli and D.H. Rothman. *Threshold phenomena in erosion driven by subsurface flow*. Journal of Geophysical Research: Earth Surface 109.F4 (2004).
- [3] T. Dunne *Formation and controls of channel networks*. Progress in Physical Geography 4.2 (1980): 211-239.
- [4] N. Schorghofer, B. Jensen, A. Kudrolli and D.H. Rothman. *Spontaneous channelization in permeable ground: Theory, experiment, and observation*. Journal of Fluid Mechanics 503 (2004): 357-374.
- [5] O. Devauchelle, A.P. Petroff, H.F. Seybold and D.H. Rothman. *Ramification of stream networks*. Proceedings of the National Academy of Sciences 109.51 (2012): 20832-20836.
- [6] S.A. Schumm, K.F. Boyd, C.G. Wolff and W.J. Spitz. *A ground-water sapping landscape in the Florida Panhandle*. Geomorphology 12.4 (1995): 281-297.
- [7] J. Bear. *Dynamics of Fluids in Porous Materials*, American Elsevier, 1972.
- [8] M. Berhanu, A. Petroff, O. Devauchelle, A. Kudrolli and D.H. Rothman. *Shape and dynamics of seepage erosion in a horizontal granular bed*. Physical Review E 86.4 (2012): 041304.
- [9] A.D. Howard and G. Kerby. *Channel changes in badlands*. Geological Society of America Bulletin 94.6 (1983): 739-752.
- [10] J.D. Stock and D.R. Montgomery. *Geologic constraints on bedrock river incision using the stream power law*. Journal of Geophysical Research. B 104 (1999): 4983-4993.
- [11] K.X. Whipple and G.E. Tucker. *Dynamics of the stream?power river incision model: Implications for height limits of mountain ranges, landscape response timescales, and research needs*. Journal of Geophysical Research: Solid Earth 104.B8 (1999): 17661-17674.
- [12] A. Petroff, O. Devauchelle, A. Kudrolli and D.H. Rothman. *Four remarks on the growth of channel networks*. Comptes Rendus Geoscience 344.1 (2012): 33-40.
- [13] Y. Cohen, O. Devauchelle, H.F. Seybold, R.S. Yi, P. Szymczak and D.H. Rothman. *Path selection in the growth of rivers*. Proceedings of the National Academy of Sciences 112.46 (2015): 14132-14137.

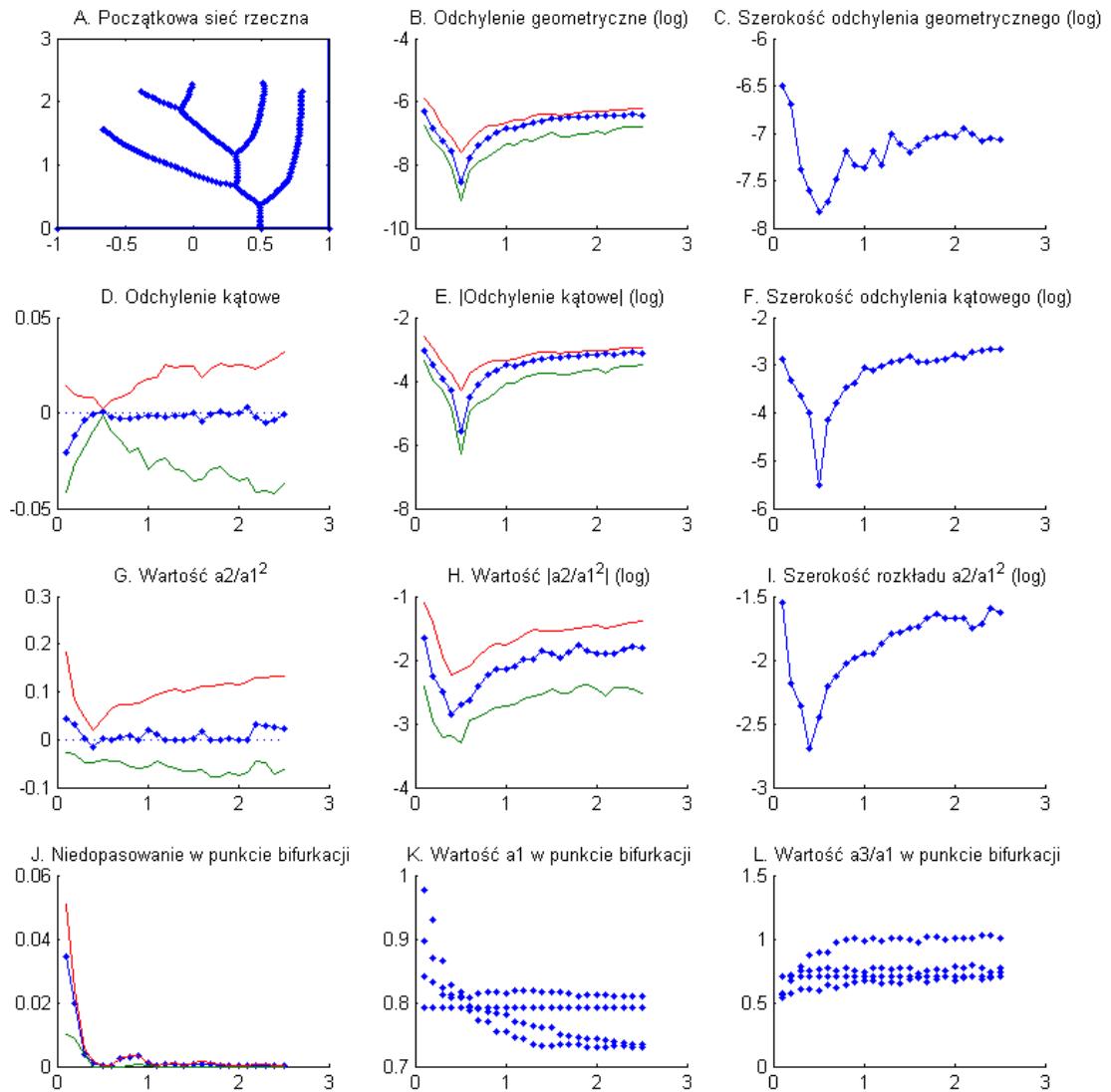
- [14] A. Pornprommin, Y. Takei, A.M. Wubneh and N. Izumi. *Channel inception in cohesionless sediment by seepage erosion*. Journal of Hydro-environment Research 3.4 (2010): 232-238.
- [15] A.P. Petroff, O. Devauchelle, H. Seybold and D.H. Rothman, *Bifurcation dynamics of natural drainage networks*. Phil. Trans. R. Soc. A 371.2004 (2013): 20120365.
- [16] T. Gubiec and P. Szymczak *Fingered growth in channel geometry: A Loewner-equation approach*. Physical Review E 77.4 (2008): 041602.
- [17] S.A. Schumm and L. Phillips. *Composite channels of the canterbury plain, New Zealand: a martian analog?* Geology, 14(4):326–329, 1986.
- [18] W. A. Marra, S.J. McLelland, D.R. Parsons, B.J. Murphy, E. Hauber, and M.G. Kleinhans. *Groundwater seepage landscapes from distant and local sources in experiments and on Mars*. Earth Surface Dynamics 3.3 (2015): 389-408.
- [19] D. Abrams, A. Lobkovsky, A. Petroff, K. Straub, B. McElroy, D. Mohrig, A. Kudrolli and D. Rothman. *Growth laws for channel networks incised by groundwater flow*. Nature Geoscience 2.3 (2009): 193-196.
- [20] L. Carleson and N. Makarov. *Laplacian path models*. Journal d'Analyse Mathematique 87.1 (2002): 103-150.
- [21] A.P. Petroff, O. Devauchelle, D.M. Abrams, A.E. Lobkovsky, A. Kudrolli and D.H. Rothman. *Geometry of valley growth*. Journal of Fluid Mechanics 673 (2011): 245-254.

## Dodatek A

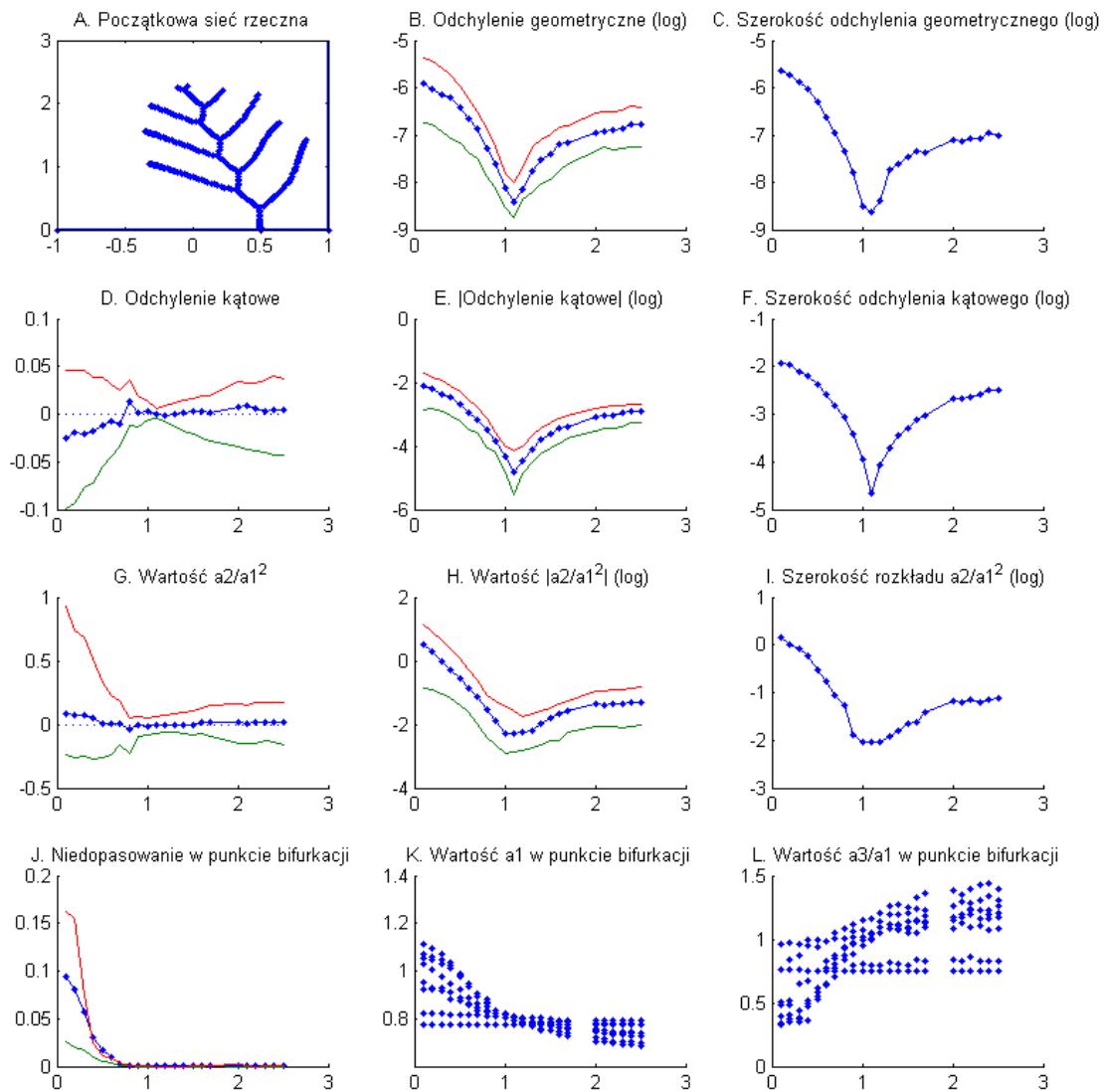
# Wyniki cofania sieci rzecznych

Poniżej zostały przedstawione wyniki dla eksperymentów omówionych w podrozdziale 4.2. Każdy wykres przedstawia wyniki dla innej sieci początkowej. W pierwszym rzędzie znajdują się wyniki dla odchylenia geometrycznego, w drugim dla odchylenia kątowego, w trzecim dla wartości  $a_2/a_1^2$ , a ostatni rząd zawiera wskaźniki związane z punktem bifurkacji. Każdy wykres przedstawia zależność wartości danego wskaźnika w zależności od wartości parametru  $\eta$  występującego w prawie wzrostu. Nazwa wskaźnika znajdująca się w module oznacza rozkład wartości bezwzględnych danego wskaźnika, a jako jego szerokość rozumie się różnicę pomiędzy kwantylem rzędu 0.32 i 0.68 dla rozkładu danego wskaźnika. Niebieską linią zaznaczona jest mediana rozkładu, a linią zieloną i czerwoną odpowiednio kwantyl rzędu 0.32 i 0.68. Przyczyną przyjęcia mediany i kwantyli zamiast średniej i odchylenia standardowego jest często występująca asymetria rozkładu i odporność na skrajne wartości. Na osi pionowej wykresów B, C, E, F, H i I wprowadzono skalę logarytmiczną, dla ułatwienia odczytu minimalnej wartości danego wskaźnika.

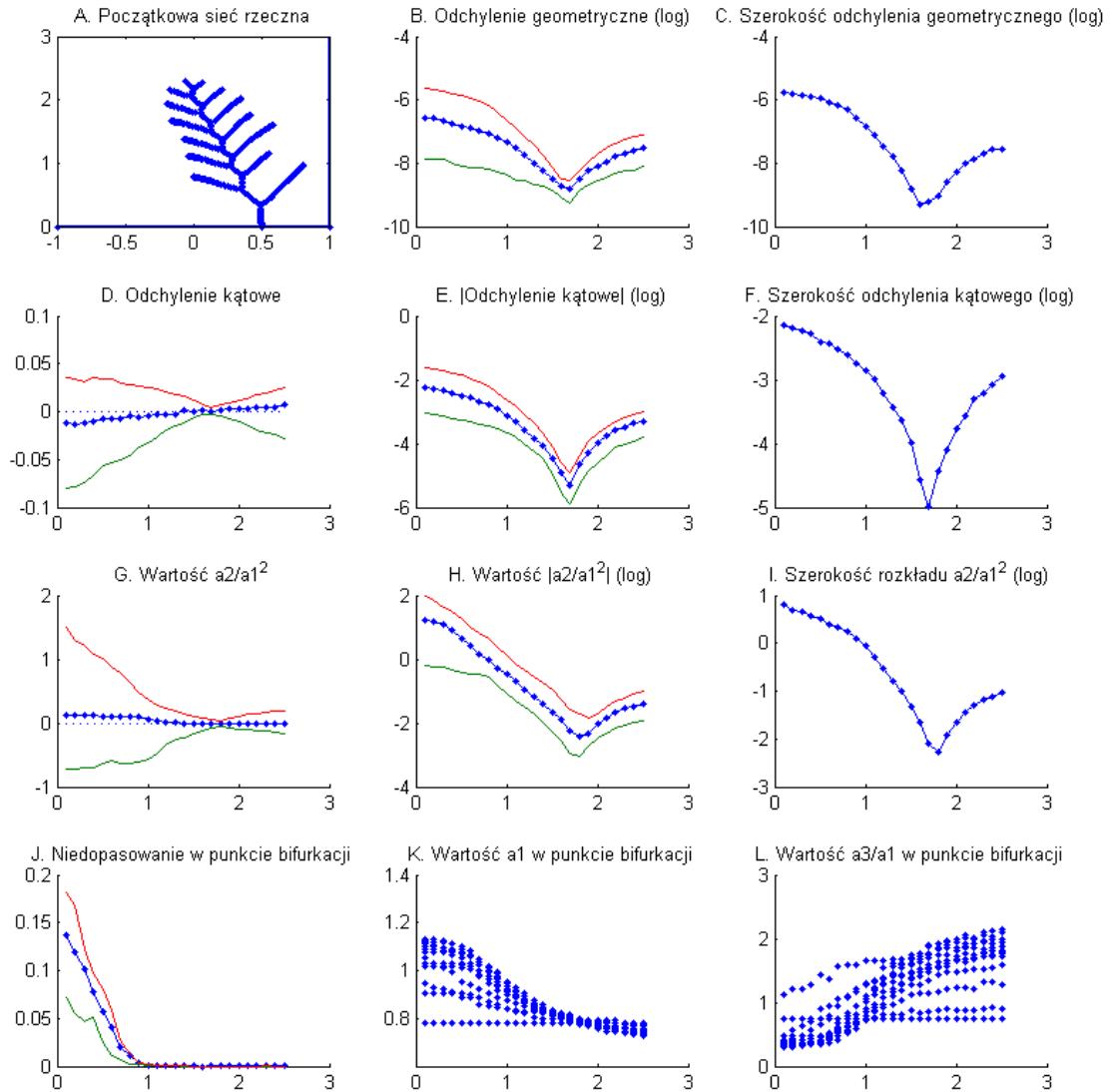
Rysunek A.1: Wyniki dla wzrostu Laplace'a z  $\eta = 0.5$  i regułą bifurkacji  $a_1 = 0.8$ .



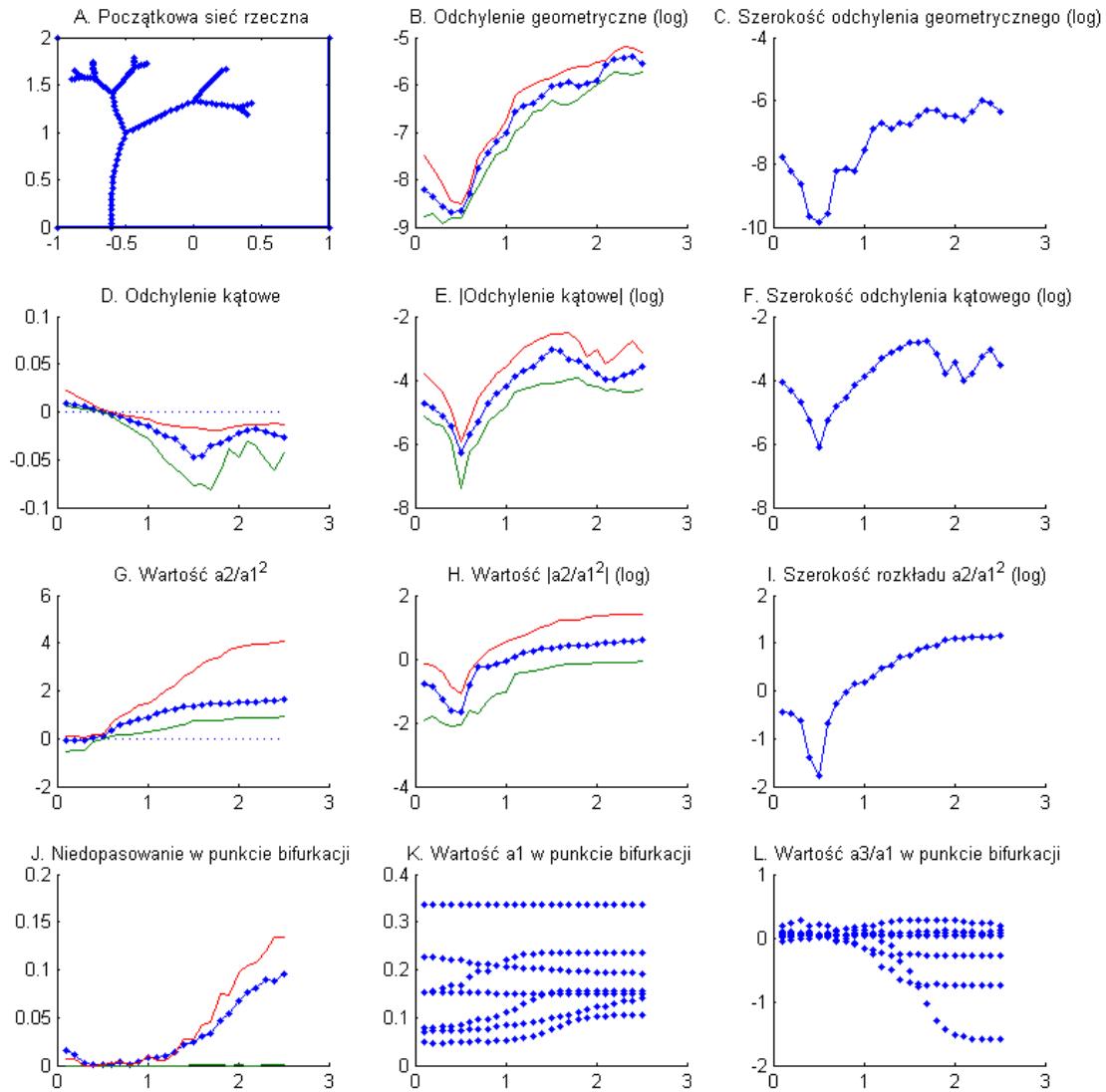
Rysunek A.2: Wyniki dla wzrostu Laplace'a z  $\eta = 1$  i regułą bifurkacji  $a_1 = 0.8$ .



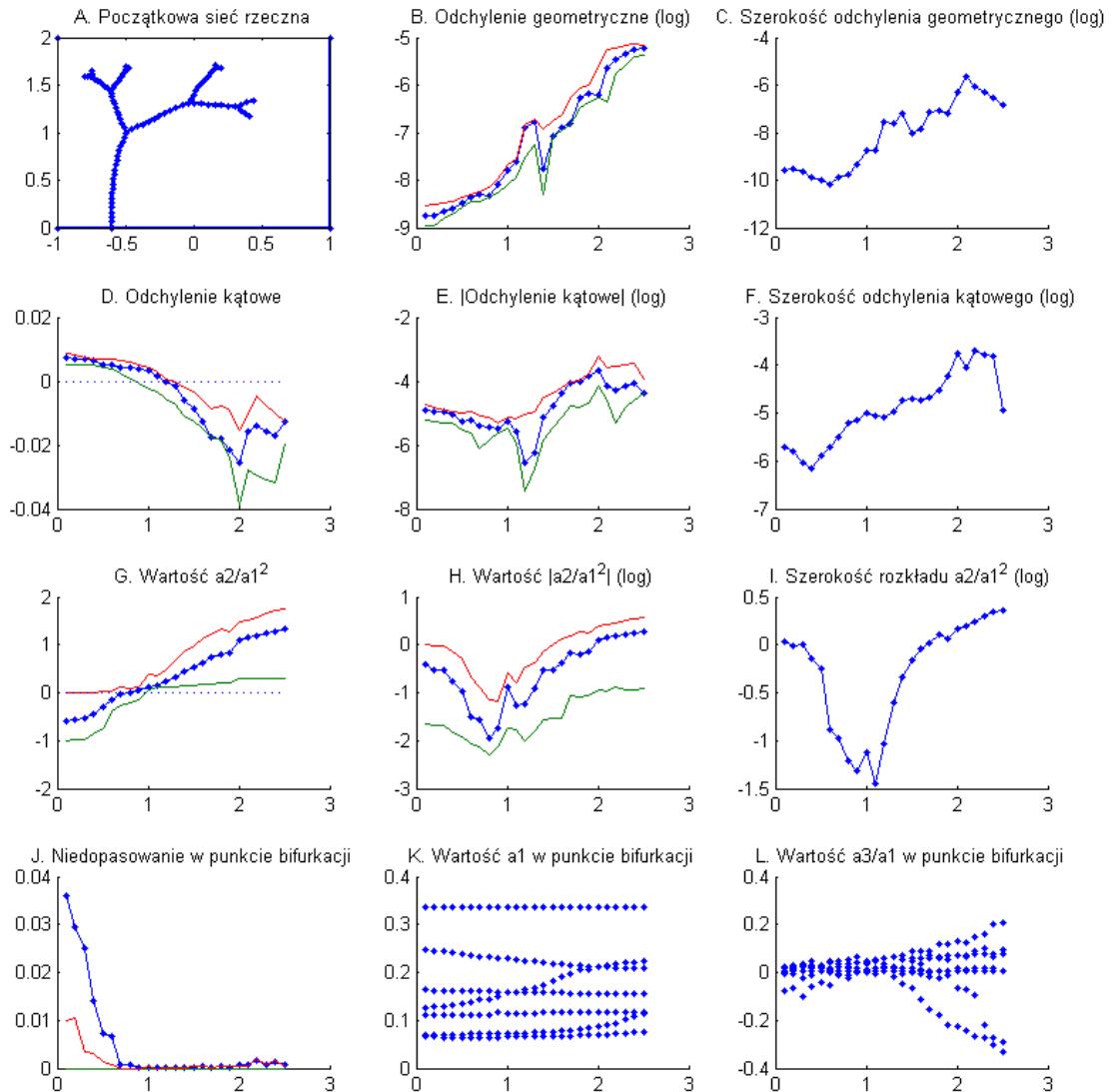
Rysunek A.3: Wyniki dla wzrostu Laplace'a z  $\eta = 1.5$  i regułą bifurkacji  $a_1 = 0.8$ .



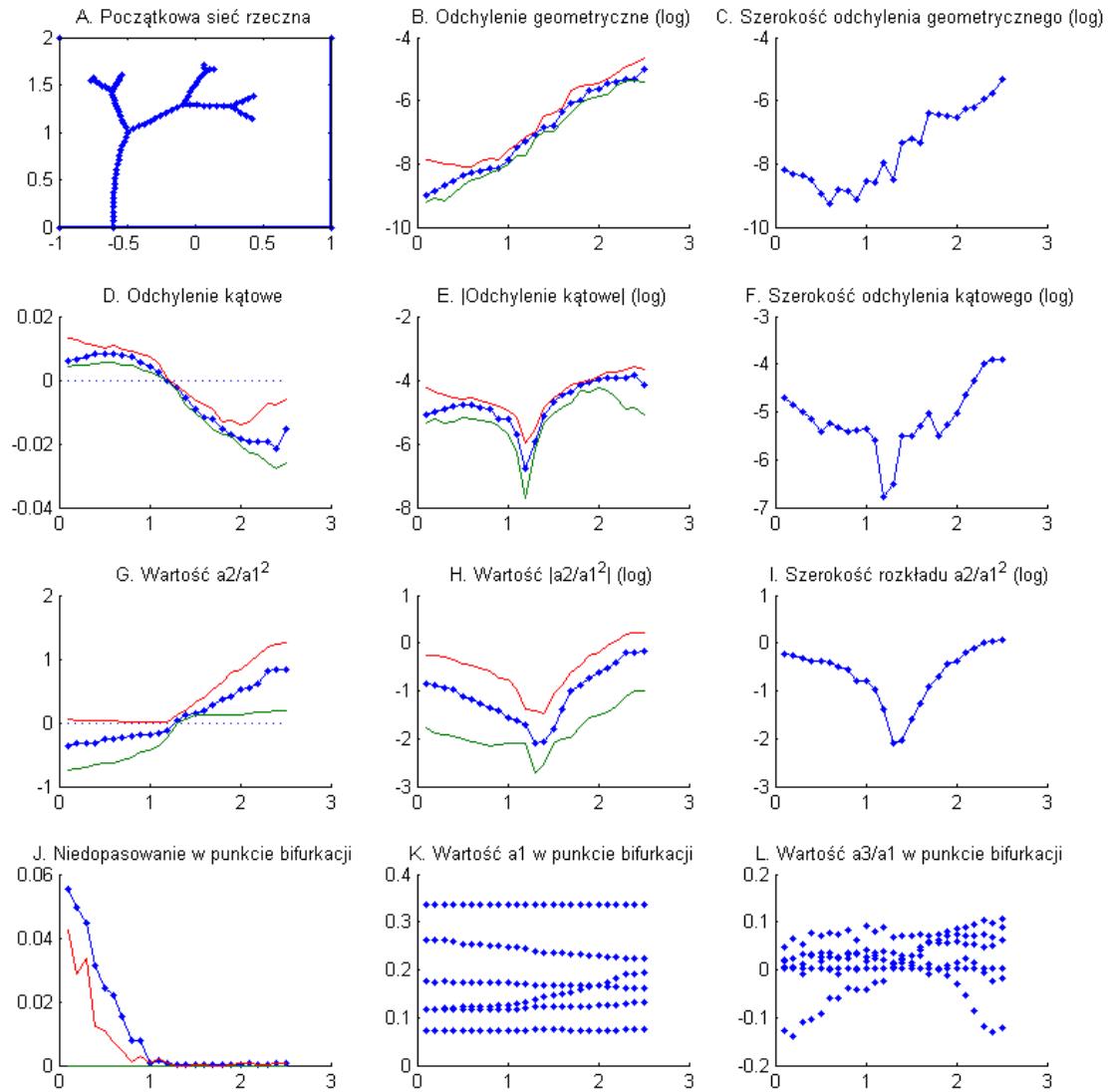
Rysunek A.4: Wyniki dla wzrostu Poissona z  $\eta = 0.5$  i regułą bifurkacji  $\frac{a_3}{a_1} = \frac{1}{9}$ .



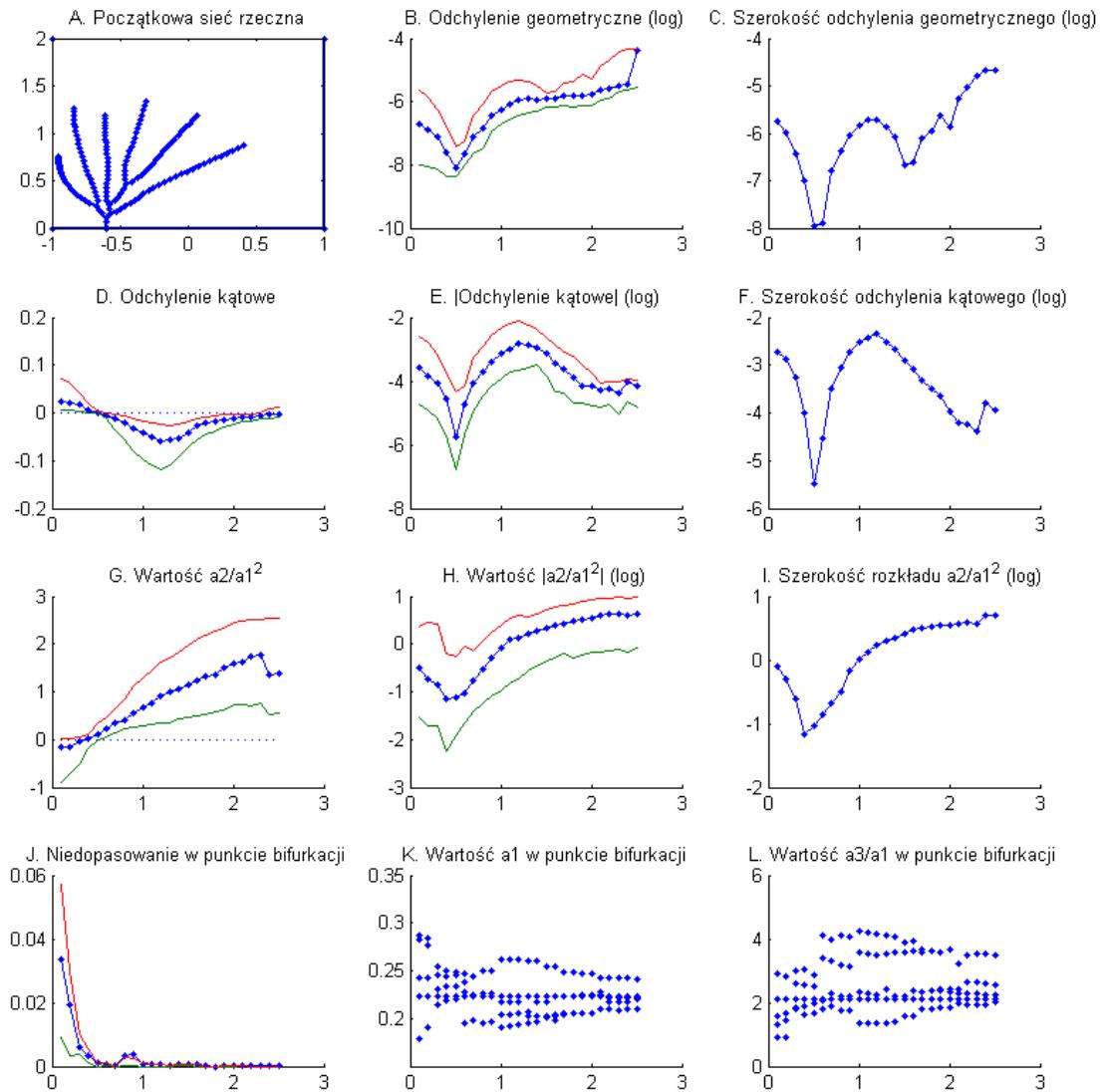
Rysunek A.5: Wyniki dla wzrostu Poissona z  $\eta = 1$  i regułą bifurkacji  $\frac{a_3}{a_1} = \frac{1}{9}$ .



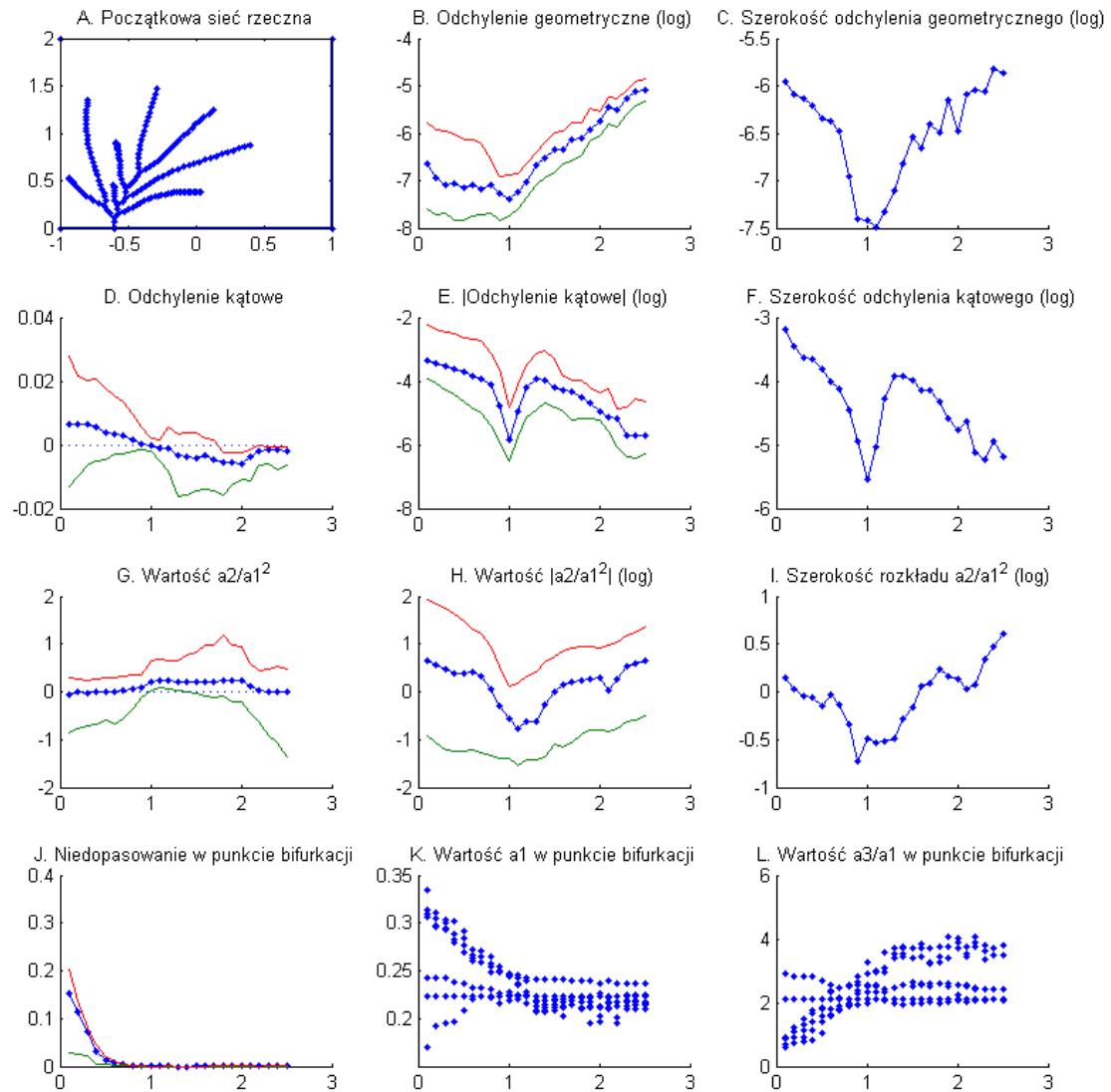
Rysunek A.6: Wyniki dla wzrostu Poissona z  $\eta = 1.5$  i regułą bifurkacji  $\frac{a_3}{a_1} = \frac{1}{9}$ .



Rysunek A.7: Wyniki dla wzrostu Poissona z  $\eta = 0.5$  i regułą bifurkacji  $a_1 = 0.23$ .



Rysunek A.8: Wyniki dla wzrostu Poissona z  $\eta = 1$  i regułą bifurkacji  $a_1 = 0.23$ .



Rysunek A.9: Wyniki dla wzrostu Poissona z  $\eta = 1.5$  i regułą bifurkacji  $a_1 = 0.23$ .

