Zadanie 1. (0–3)

Oblicz wartość wyrażenia

$$\log_8 3^{3\log_3 2 - \log_{27} 8 - \log_9 4}$$

Zapisz obliczenia.

Zadanie 2. (0–4)

Liczby a, b, c są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego o różnicy równej 7. Jedna z tych liczb jest wielokrotnością liczby 7.

Wykaż, że iloczyn $\boldsymbol{a \cdot b \cdot c}$ jest podzielny przez $\mathbf{294}$.

Zadanie 3. (0–2)

Niech a, b będą liczbami całkowitymi, dla których zachodzi równość $2a^2 + a = 3b^2 + b$.

Wykaż, że jeśli $\mathbf{5}$ jest dzielnikiem liczby $\boldsymbol{a - b}$, to $\mathbf{25}$ **również jest dzielnikiem** liczby $\boldsymbol{a - b}$.

Zadanie 4. (0–2)

Rozpatrzmy liczby naturalne większe od 1000, w których zapisie występuje tylko cyfra 1:

$$a = \underbrace{11\ldots111}_{n}$$

Wykaż, że jeśli liczba $\boldsymbol{a}$ zapisana za pomocą $\boldsymbol{n}$ jedynek jest liczbą pierwszą, to liczba $\boldsymbol{n}$ również jest liczbą pierwszą.

Zadanie 5. (0–4)

Suma liczb całkowitych x i y jest podzielna przez 3.

Wykaż, że suma sześcianów liczb $\boldsymbol{x}$ i $\boldsymbol{y}$ jest podzielna przez $\mathbf{9}$.

Zadanie 6. (0–3) PP

W rozwinięciu wyrażenia $(a+b)^n$ dla pewnego $n \in N$ suma współczynników przy wyrazach $a^{n-2}b^2$ oraz $a^{n-1}b$ jest równa 66.

Oblicz $\boldsymbol{n}$. Zapisz obliczenia.

Zadanie 7. (0–3)

Niech a, b, c będą takimi liczbami całkowitymi, że $a\sqrt{2} + b\sqrt{3} + c\sqrt{6} = 0$.

Wykaż, że $\boldsymbol{a = b = c = 0}$.

Zadanie 8. (0–3) PP

Wykaż, że liczba $\boldsymbol{a} = \left(\sqrt{\mathbf{5}} + \mathbf{2}\right)^{\mathbf{2022}} + \left(\sqrt{\mathbf{5}} - \mathbf{2}\right)^{\mathbf{2022}}$ jest wymierna.

Zadanie 9. (0–3)

Rozwiąż nierówność $\boldsymbol{2x^2 + x|2x - 1| \leq 3}$.

Zapisz obliczenia.

Zadanie 10. (0–5)

Rozwiąż nierówność

$$\boldsymbol{x+4+\frac{8}{x-4}\geq\frac{-2x-8}{x^2-16}}$$

Zapisz obliczenia.

Zadanie 11. (0–4)

Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie

$$\boldsymbol{2x^2-(2m+7)x+m^2-3m+21=0}$$

ma **dwa różne rozwiązania** rzeczywiste x_1 oraz x_2**, spełniające warunek** $x_1=2x_2$.

Zapisz obliczenia.

Zadanie 12. (0–2)

Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej n prawdziwe są nierówności

$$\boldsymbol{2\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}\right)<\frac{1}{\sqrt{n+1}}\quad \text{i} \quad \frac{1}{\sqrt{n+1}}<2\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)}$$

Zadanie 13. (0–3)

Rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} x^2-2x+y^2=24 \\ x^2-10x+y^2-8y+40=0 \end{cases}$$

Zapisz obliczenia.

Zadanie 14. (0–3) PP

Dane są funkcje k oraz p. Funkcja k jest określona wzorem $k(x)=5-x^2$ dla każdej liczby rzeczywistej x. Funkcja p jest określona wzorem $p(x)=\sqrt{1-x}$ dla każdej liczby rzeczywistej x nie większej od 1. Funkcje f oraz g są określone następująco:

$$f=k\circ p \quad \text{oraz} \quad g=p\circ k.$$

Wyznacz wzory i dziedziny funkcji $\boldsymbol{f}$ oraz $\boldsymbol{g}$.

Zadanie 15. (0–4)

Narysuj wykres funkcji $\boldsymbol{f(x)=\frac{|x^2-9|}{3-x}}$.

Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie $f(x)=m$ nie ma **rozwiązania.** Zapisz obliczenia.

Zadanie 16. (0–5)

Dany jest rosnący ciąg arytmetyczny (a_n) określony dla każdej liczby naturalnej $n\geq 1$. Ciąg $(a_1\cdot a_2,\ a_2\cdot a_3,\ a_3\cdot a_1)$ jest geometryczny i ma wyrazy różne od zera.

Oblicz iloraz tego ciągu geometrycznego. Zapisz obliczenia.

Zadanie 17. (0–2)

Na płaszczyźnie, w kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y), dane są dwie proste l_1 oraz l_2. Kąt między tymi prostymi ma miarę $45°$. Współczynnik kierunkowy w równaniu prostej l_1 jest równy $\frac{2}{3}$.

Oblicz współczynnik kierunkowy w **równaniu** prostej $\boldsymbol{l_2}$. Zapisz obliczenia.

Zadanie 18. (0–5)

Rozwiąż równanie

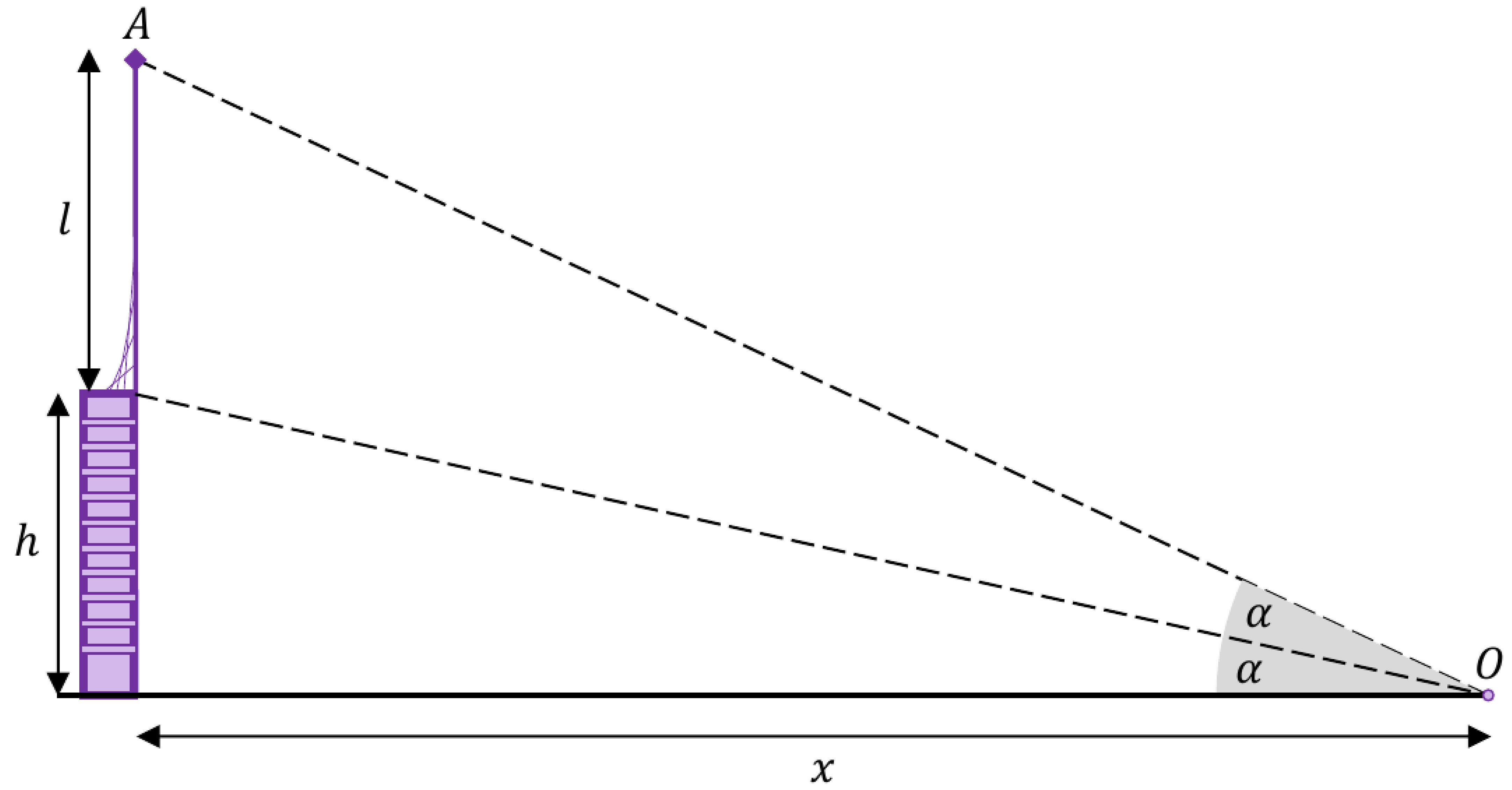
$$\cos^2 x - \frac{2\sqrt{3}}{3}\sin x \cos x - \sin^2 x = 0$$

w przedziale $[-\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\pi}]$.

Zapisz obliczenia.

Zadanie 19. (0–3)

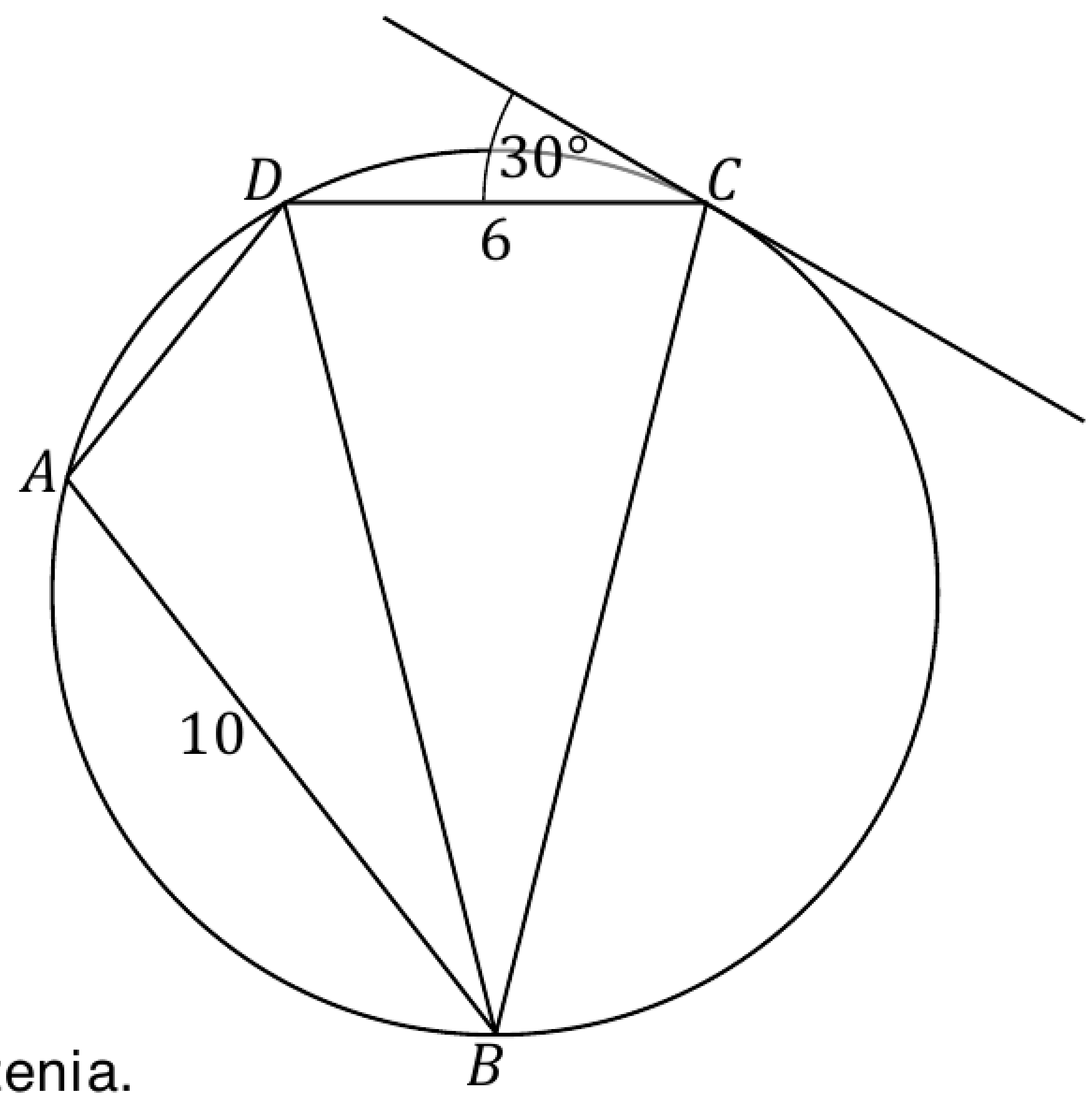
Na szczycie wieży o wysokości h umieszczono pionowo antenę radiową stacji nadawczej o długości l $(l > h)$. Punkt O leży na płaszczyźnie poziomej przechodzącej przez podnóże wieży, a punkt A znajduje się na końcu anteny. Koniec anteny A widać z punktu O pod dwukrotnie większym kątem niż wieżę (zobacz rysunek).



Oblicz odległość x podnóża wieży od punktu O. Zapisz obliczenia.

Zadanie 20. (0–6)

W pewien okrąg wpisano czworokąt $ABCD$ taki, że $|AB| = 10$, $|CD| = 6$ oraz $|BC| = |BD|$. Styczna do tego okręgu w punkcie C tworzy z bokiem CD kąt α o mierze $30°$ (zobacz rysunek).



Oblicz pole czworokąta $ABCD$. Zapisz obliczenia.

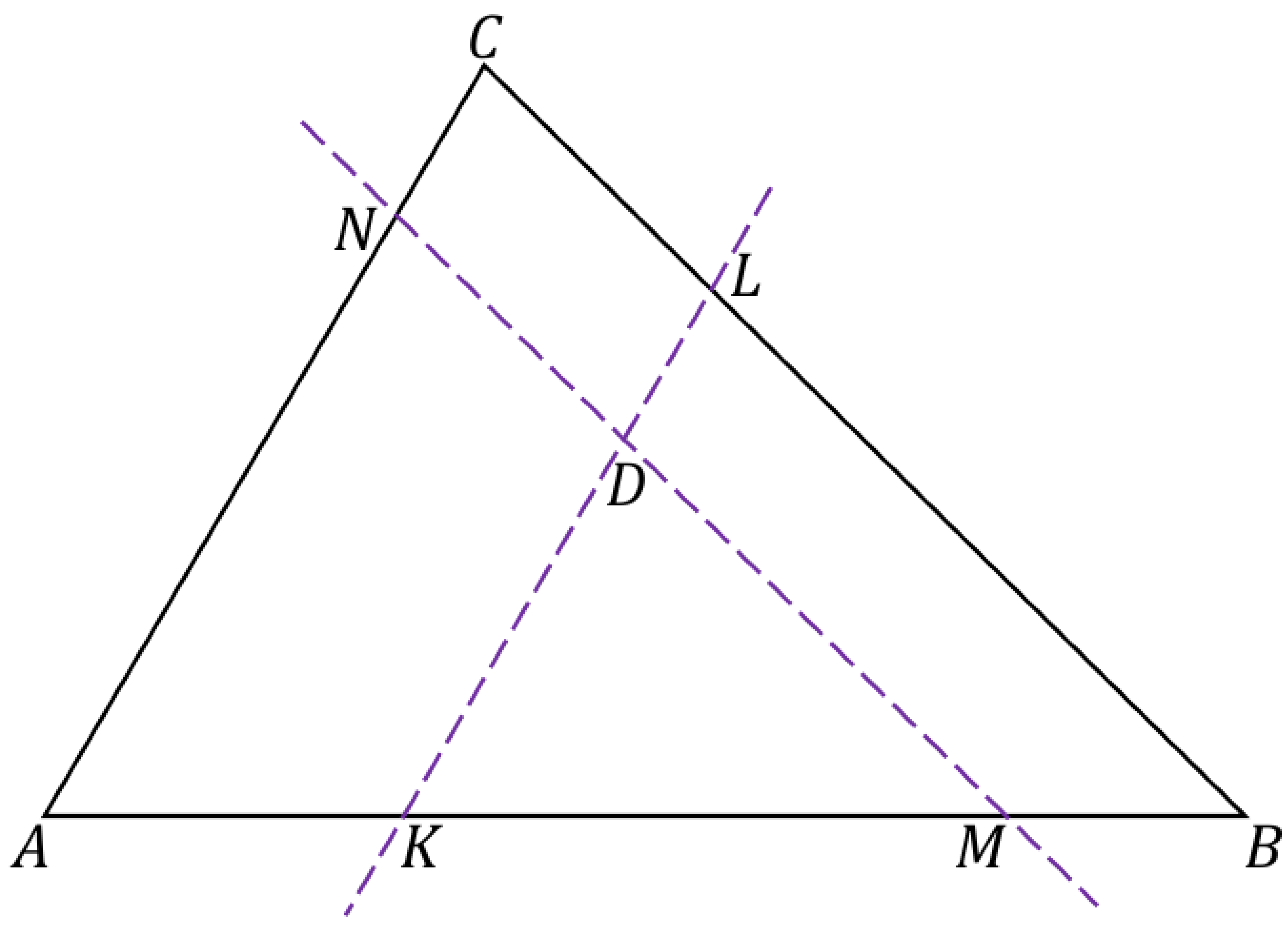
Zadanie 21. (0–4)

W trapezie $ABCD$ przekątna BD jest dwusieczną kąta CBA i przecina przekątną AC w punkcie K, takim, że $|CK|:|KA| = 1 : 3$. Pole tego trapezu jest równe $100(\sqrt{6} - \sqrt{2})$, $\sin \sphericalangle BAD = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, $|AD| = 10$ oraz kąt BAD jest ostry.

Oblicz długości pozostałych boków trapezu $ABCD$. Zapisz obliczenia.

Zadanie 22. (0–6)

Punkt D leży wewnątrz trójkąta ABC. Prosta przechodząca przez punkt D i równoległa do boku AC przecina bok AB w punkcie K, a bok BC w punkcie L. Prosta przechodząca przez punkt D i równoległa do boku BC przecina bok AB w punkcie M, a bok AC w punkcie N (zobacz rysunek). Stosunek obwodu trójkąta KMD do obwodu trójkąta KBL jest równy $5 : 7$, a stosunek obwodu trójkąta KMD do obwodu trójkąta AMN jest równy $5 : 8$. Pole czworokąta $DLCN$ jest równe 15.



Oblicz pole trójkąta ABC. Zapisz obliczenia.

Zadanie 23. (0–3) PP

Funkcja f jest określona wzorem

$$f(x)=\frac{\sqrt{2x}}{5+x^2}-3^{-x-1}$$

dla każdej nieujemnej liczby rzeczywistej x.

Wykaż, że funkcja f ma co najmniej jedno miejsce zerowe dodatnie mniejsze od $\mathbf{3}$.

Zadanie 24. (0–3) PP

Funkcja f jest określona wzorem $f(x)=\sqrt{1+4x}$ dla $x\in\left[-\frac{1}{4},+\infty\right)$.

Napisz równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie $\boldsymbol{x_0=2}$. Zapisz obliczenia.

Zadanie 25. (0–4)

Funkcja f jest określona wzorem $f(x)=x^4-2x^3+x^2-1$ dla każdej liczby rzeczywistej $x\in[-1,3]$.

Wyznacz zbiór wartości funkcji f.

Zadanie 26. (0–3)

Trójkąt ABC, w którym $|AC|=|BC|$, jest wpisany w okrąg o promieniu R. Środek tego okręgu leży wewnątrz trójkąta ABC. Niech x oznacza odległość środka okręgu od podstawy AB.

Wykaż, że pole trójkąta ABC jako funkcja zmiennej $\boldsymbol{x}$ **jest określon**e wzorem $\boldsymbol{P(x)=(R+x)\sqrt{R^2-x^2}}$. **Określ dziedzinę** tej funkcji.

Zadanie 27. (0–6)

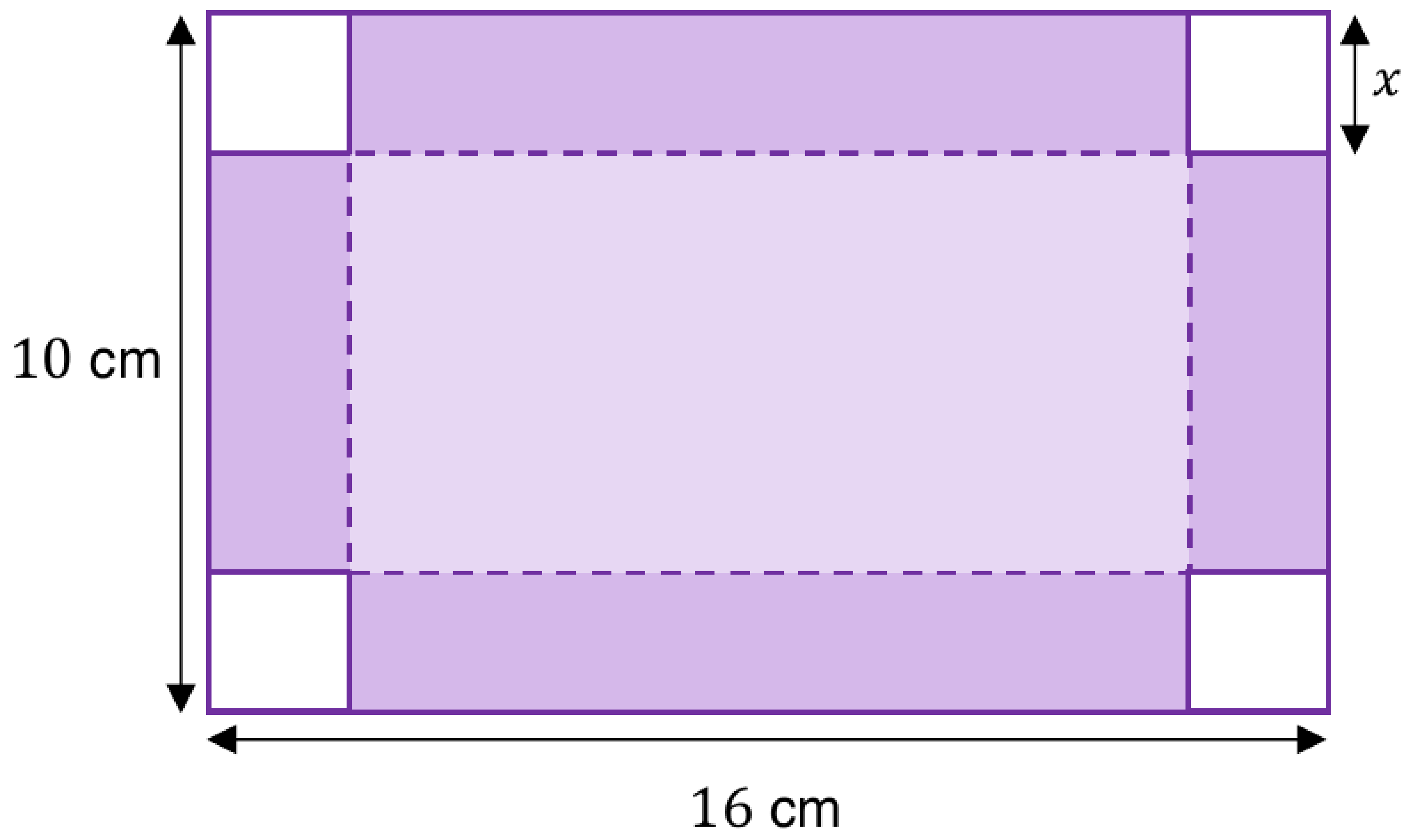
Dany jest okrąg o promieniu R. Rozważamy wszystkie trójkąty spełniające warunki:

- są wpisane w ten okrąg
- mają obwody równe $3R$
- mają jeden z boków dwukrotnie dłuższy od drugiego.

Znajdź trójkąt o możliwie największym polu przy zadanych warunkach. Oblicz jego pole. Zapisz obliczenia.

Zadanie 28. (0–6)

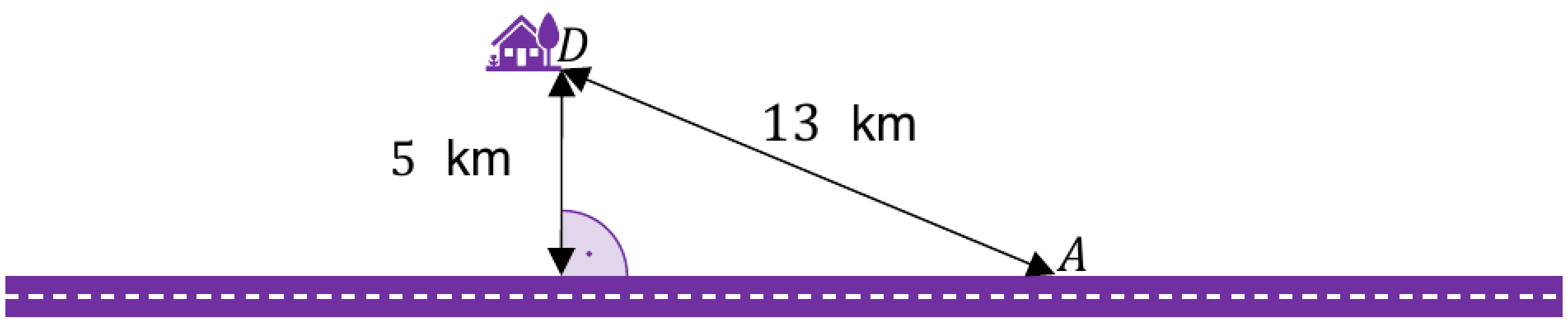
Grażyna planuje zrobienie pudełka (bez wieczka) w kształcie prostopadłościanu. W tym celu zamierza wykorzystać prostokątny kawałek tektury o wymiarach 10 cm × 16 cm, odcinając z każdego rogu kwadrat o boku x cm (zobacz rysunek).



Oblicz wartość x, dla której objętość otrzymanego pudełka będzie największa. Oblicz tę największą objętość pudełka. Zapisz obliczenia.

Zadanie 29. (0–6) PP

Dom D stoi w odległości 5 km od prostoliniowego odcinka drogi. W chwili początkowej Janusz znajduje się na tej drodze w punkcie A oddalonym od domu D o 13 km (zobacz rysunek). Janusz może iść drogą z maksymalną prędkością 5 km/h, zaś poza nią może poruszać się z maksymalną prędkością 3 km/h.



Oblicz **najkrótszy** czas potrzebny Janusz**owi na dojście** do domu $\boldsymbol{D}$.
Zapisz obliczenia.

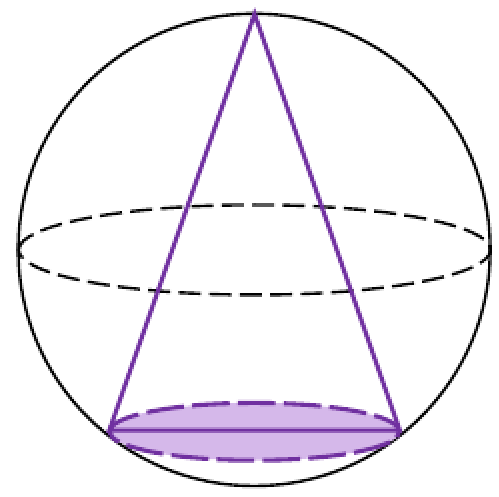
Zadanie 30. (0–4)

Ciężarówka ma do pokonania trasę długości S km, poruszając się po autostradzie ze stałą prędkością v km/h. Minimalna prędkość dla ciężarówek na autostradzie wynosi 40 km/h, maksymalna – 80 km/h. Wiemy, że litr paliwa kosztuje 8 złotych, a kierowca otrzymuje 42 złote za godzinę swej pracy. Zużycie paliwa w ciągu jednej godziny jazdy autostradą w zależności od prędkości v wyrażone w litrach można opisać funkcją $f(v) = 7 + \frac{v^2}{400}$.

Oblicz, p**rzy jakiej prędkości koszt przejazdu będzie najmniejszy**. Zapisz obliczenia.

Wskazówka: przyjmij, że koszt przejazdu jest sumą kosztu paliwa oraz wynagrodzenia kierowcy.

Zadanie 31. (0–6) PP



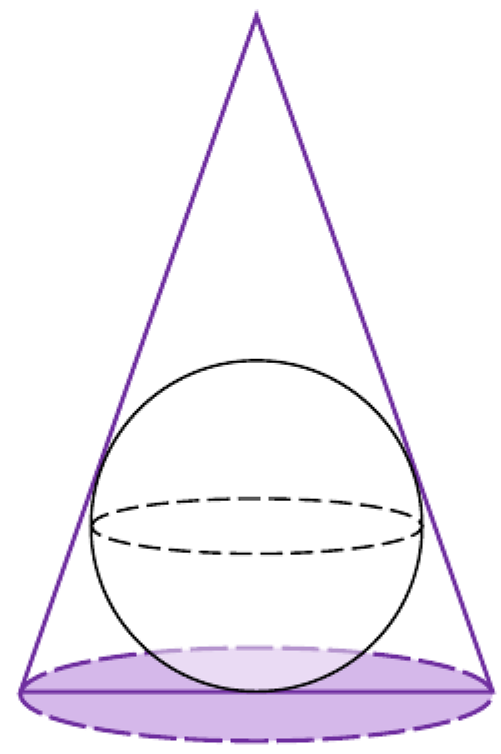
Dana jest kula o promieniu 1. Rozpatrujemy wszystkie stożki zawierające środek kuli i wpisane w tę kulę, to znaczy takie, w których:

- wierzchołek leży na powierzchni kuli
- okrąg, będący krawędzią podstawy stożka, leży na powierzchni kuli

(zobacz rysunek).

Oblicz promień podstawy **tego stożka, który ma największą objętość. Oblicz objętość** tego **stożka.** Zapisz obliczenia.

Zadanie 32. PP



Dana jest kula o promieniu 1. Rozpatrujemy wszystkie stożki opisane na tej kuli, to znaczy takie, których:

- podstawa ma dokładnie jeden punkt wspólny z kulą
- każda tworząca ma dokładnie jeden punkt wspólny z kulą

(zobacz rysunek).

Zadanie 32.1. (0–2)

Wykaż, że objętość V stożka o wysokości h wyraża się wzorem

$$\boldsymbol{V(h) = \frac{h^2\pi}{3(h-2)}}$$

Zadanie 32.2. (0–5)

Oblicz wysokość tego **stożka, który ma najmniejszą objętość**. **Oblicz objętość tego stożka.** Zapisz obliczenia.

Wskazówka: skorzystaj z *informacji, że objętość stożka o wysokości h wyraża się wzorem*

$$V(h) = \frac{h^2\pi}{3(h-2)}$$