

# Całkowanie macierzy [Hbc] metodą Gaussa

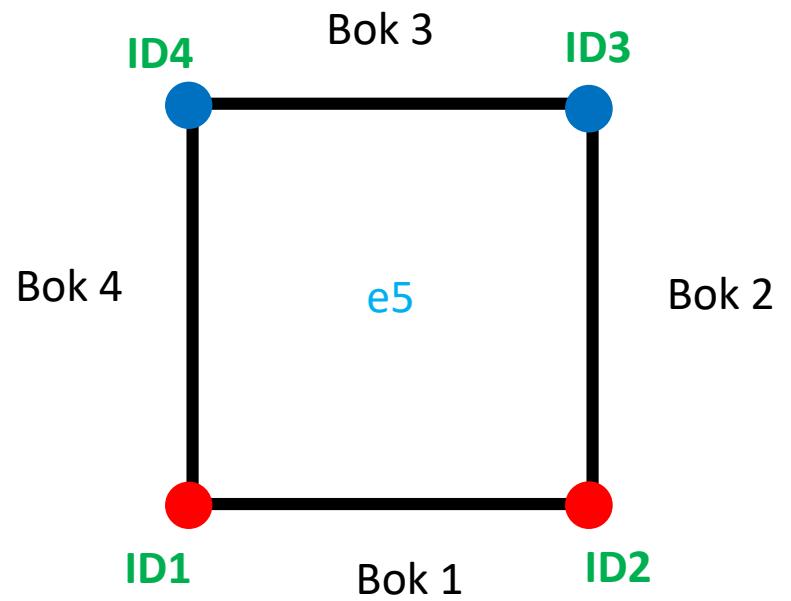
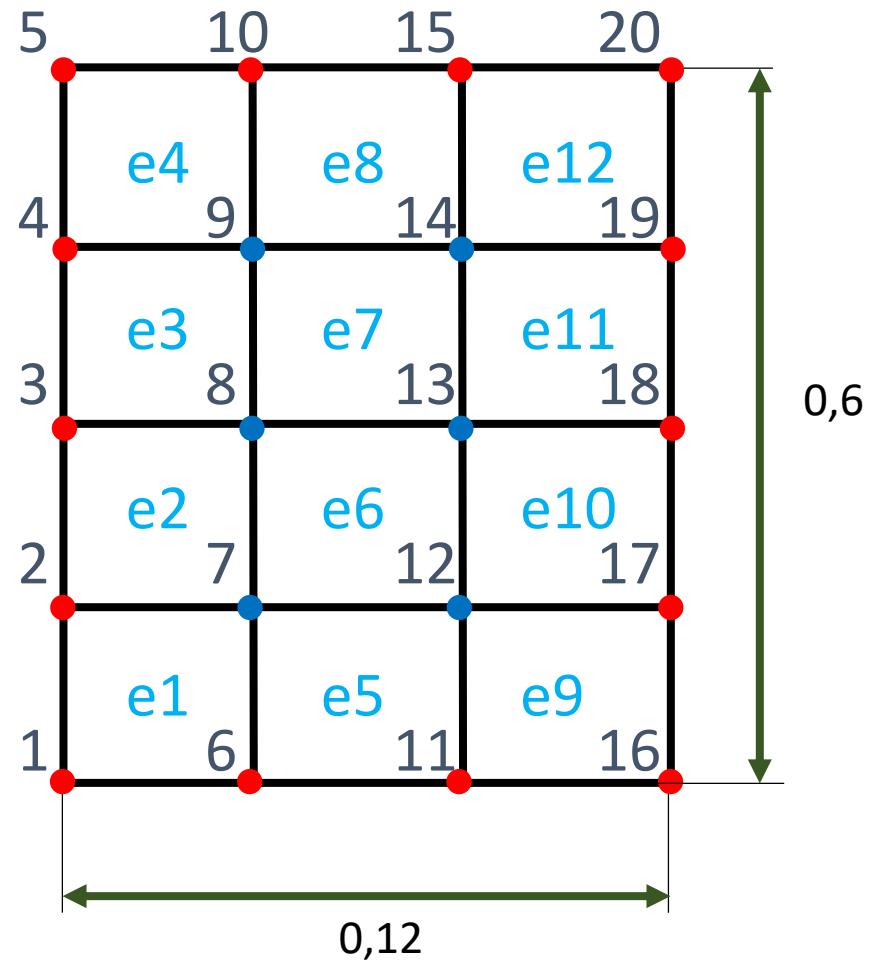
dr inż. Kustra Piotr

WIMiP, KISiM, AGH

B5, pokój 710

● - węzeł ma kontakt z otoczeniem – warunek brzegowy

● - węzeł nie ma kontaktu z otoczeniem



## Obliczanie fragmentu macierzy H – macierz Hbc

$$[H] = \int_V k(t) \left( \left\{ \frac{\partial \{N\}}{\partial x} \right\} \left\{ \frac{\partial \{N\}}{\partial x} \right\}^T + \left\{ \frac{\partial \{N\}}{\partial y} \right\} \left\{ \frac{\partial \{N\}}{\partial y} \right\}^T \right) dV$$

$$+ \int_S \alpha \{N\} \{N\}^T dS$$

$$q = \boxed{\alpha t} - \boxed{\alpha t_{amb}}$$

$$q = \alpha(t - t_{amb})$$

Które punkty całkowania  
należy wybrać?

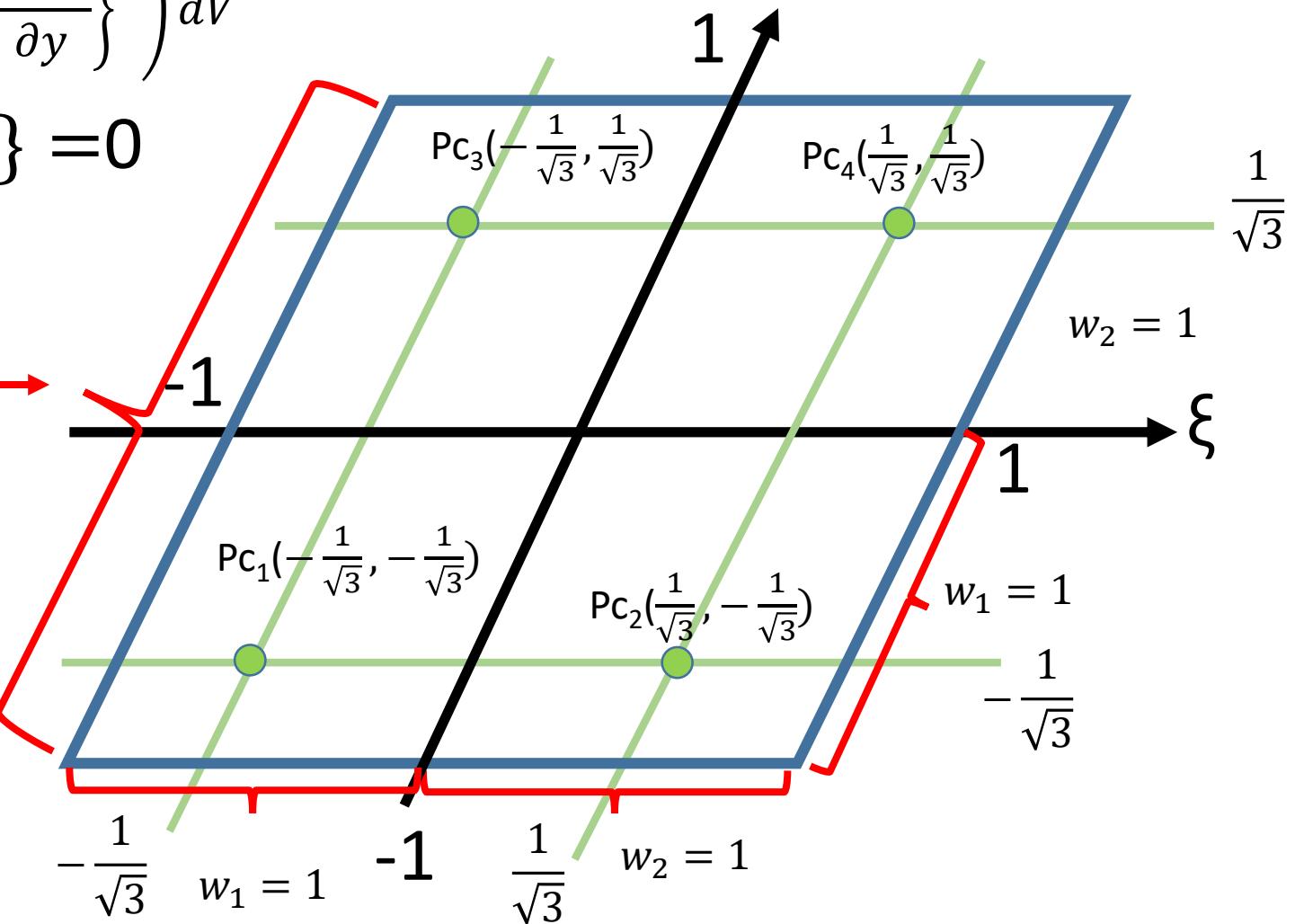
$$N1 = 0.25(1 - \xi)(1 - \eta)$$

$$N2 = 0.25(1 + \xi)(1 - \eta)$$

$$N3 = 0.25(1 + \xi)(1 + \eta)$$

$$N4 = 0.25(1 - \xi)(1 + \eta)$$

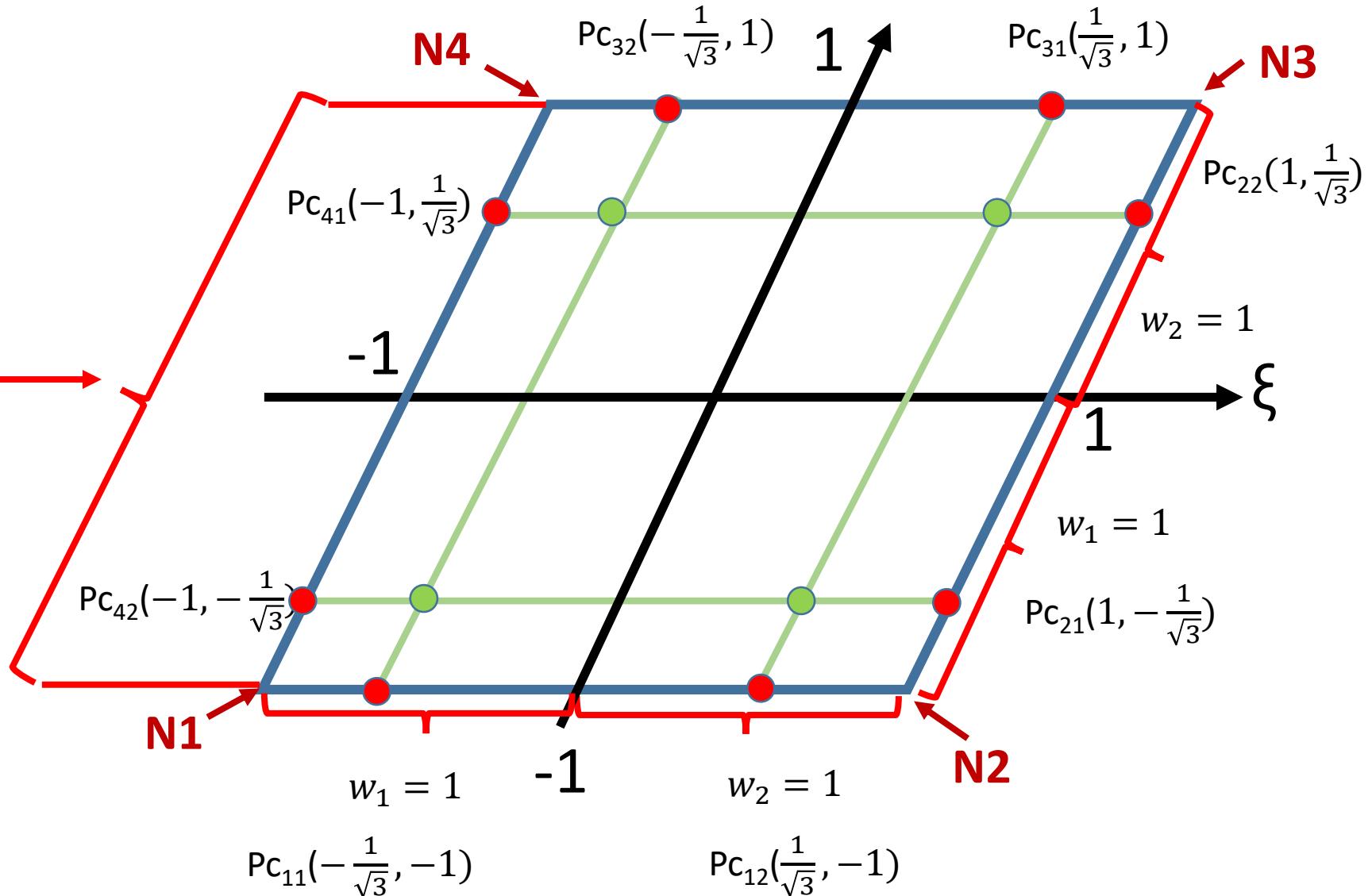
$$[H]\{t\} + \{P\} = 0$$



## Obliczanie macierzy Hbc

$$[H_{BC}] = \int_S \alpha(\{N\}\{N\}^T) dS$$

$$q = \alpha(t - t_{amb})$$



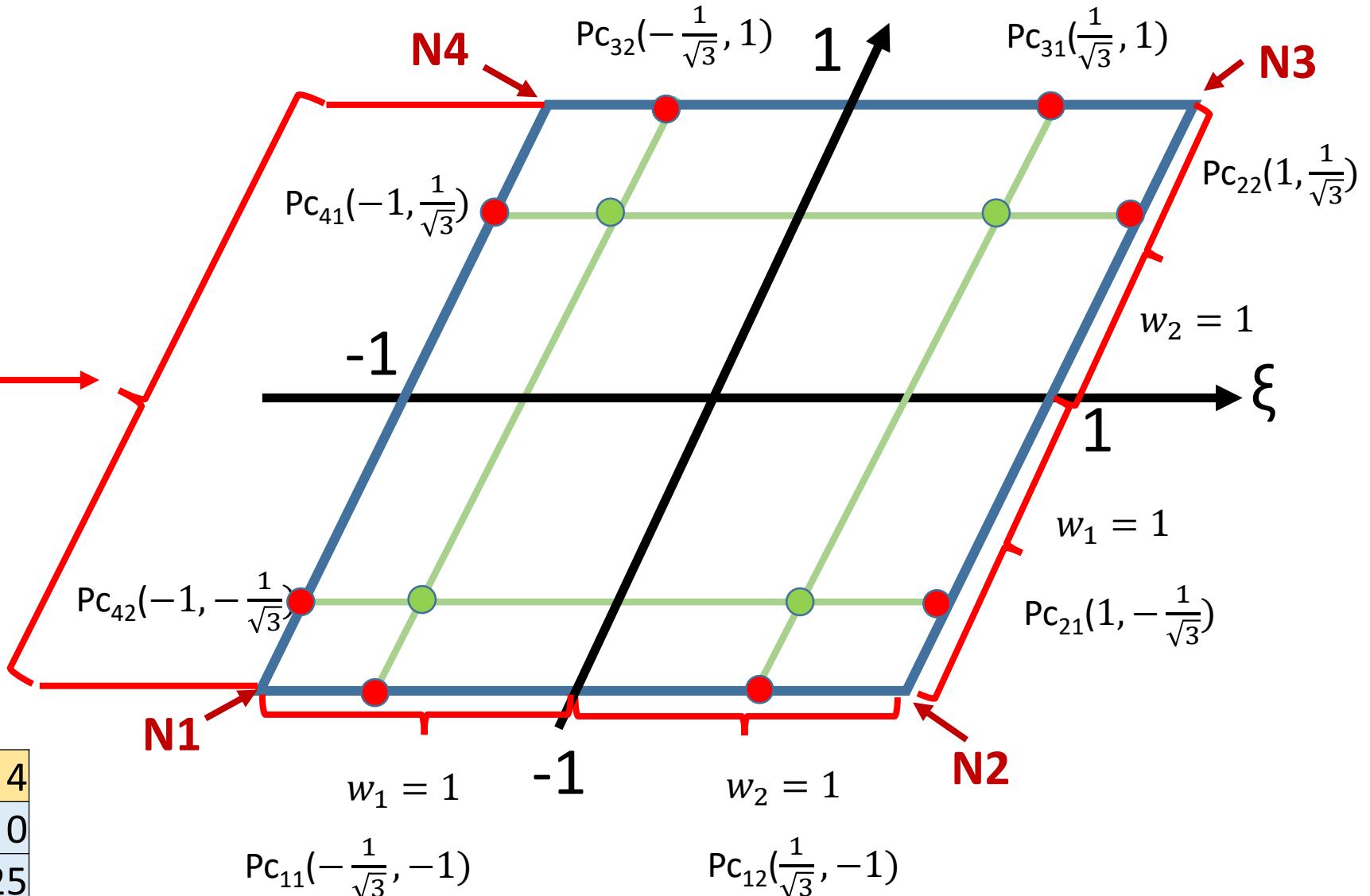
## Obliczanie macierzy Hbc

$$[H_{BC}] = \int_S \alpha(\{N\}\{N\}^T) dS$$

$$H_{BC} = H_{BC_{pc41}} + H_{BC_{pc42}}$$

$$q = \alpha(t - t_{amb})$$

ID	1	2	3	4
x	0	0,025	0,025	0
y	0	0	0,025	0,025



## Obliczanie Macierzy $H_{bc}$

$$[H_{BC}] = \int_S \alpha(\{N\}\{N\}^T) dS = \sum_{i=1}^{n_{pc}} f(pc_i) w_i \det[J]$$

$$[H_{BC}] = H_{BC_{pc41}} + H_{BC_{pc42}}$$

pc	ksi	eta	N1	N2	N3	N4
41	-1	0,5773	0,2113	0	0	0,7886
42	-1	-0,5773	0,7886	0	0	0,2113

$$N1 = 0,25(1 - \xi)(1 - \eta)$$

$$N2 = 0,25(1 + \xi)(1 - \eta)$$

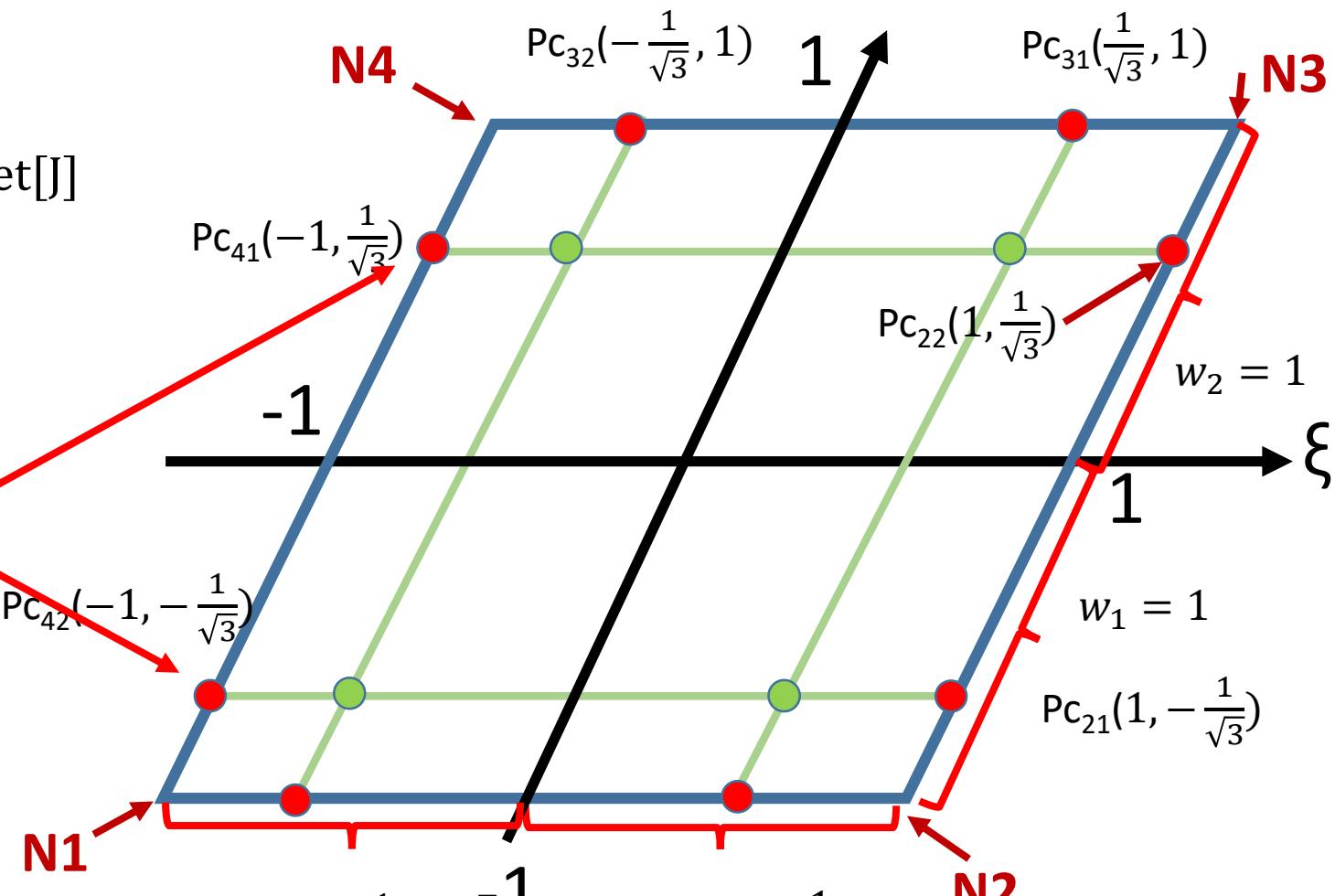
$$N3 = 0,25(1 + \xi)(1 + \eta)$$

$$N4 = 0,25(1 - \xi)(1 + \eta)$$

$$\det[J] = \frac{dx}{dKsi} = \frac{L}{2} = 0,0125$$

Obliczenia wykonano dla  $\alpha = 25$

$$[H_{BC}] = \int_S 25 \left( \begin{pmatrix} N1 \\ N2 \\ N3 \\ N4 \end{pmatrix} \{N1 \ N2 \ N3 \ N4\} \right) ds = 25 \left( w_1 * \left( \begin{pmatrix} 0,2113 \\ 0 \\ 0 \\ 0,7886 \end{pmatrix} \{0,2113 \ 0 \ 0 \ 0,7886\} \right) + w_2 * \left( \begin{pmatrix} 0,7886 \\ 0 \\ 0 \\ 0,2113 \end{pmatrix} \{0,7886 \ 0 \ 0 \ 0,2113\} \right) \right) \det[J]$$



$$[H_{BC}] = \int_S 25 \left( \begin{pmatrix} N1 \\ N2 \\ N3 \\ N4 \end{pmatrix} \{N1 \ N2 \ N3 \ N4\} \right) ds = \left( w_1 * 25 * \begin{pmatrix} 0,2113 \\ 0 \\ 0 \\ 0,7886 \end{pmatrix} \{0,2113 \ 0 \ 0 \ 0,7886\} \right) + \left( w_2 * 25 * \begin{pmatrix} 0,7886 \\ 0 \\ 0 \\ 0,2113 \end{pmatrix} \{0,7886 \ 0 \ 0 \ 0,2113\} \right) * \det[J]$$

pc1	0,21132	0	0	0,78867
0,21132	1,11645	0	0	4,16666
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0,78867	4,16666	0	0	15,5502

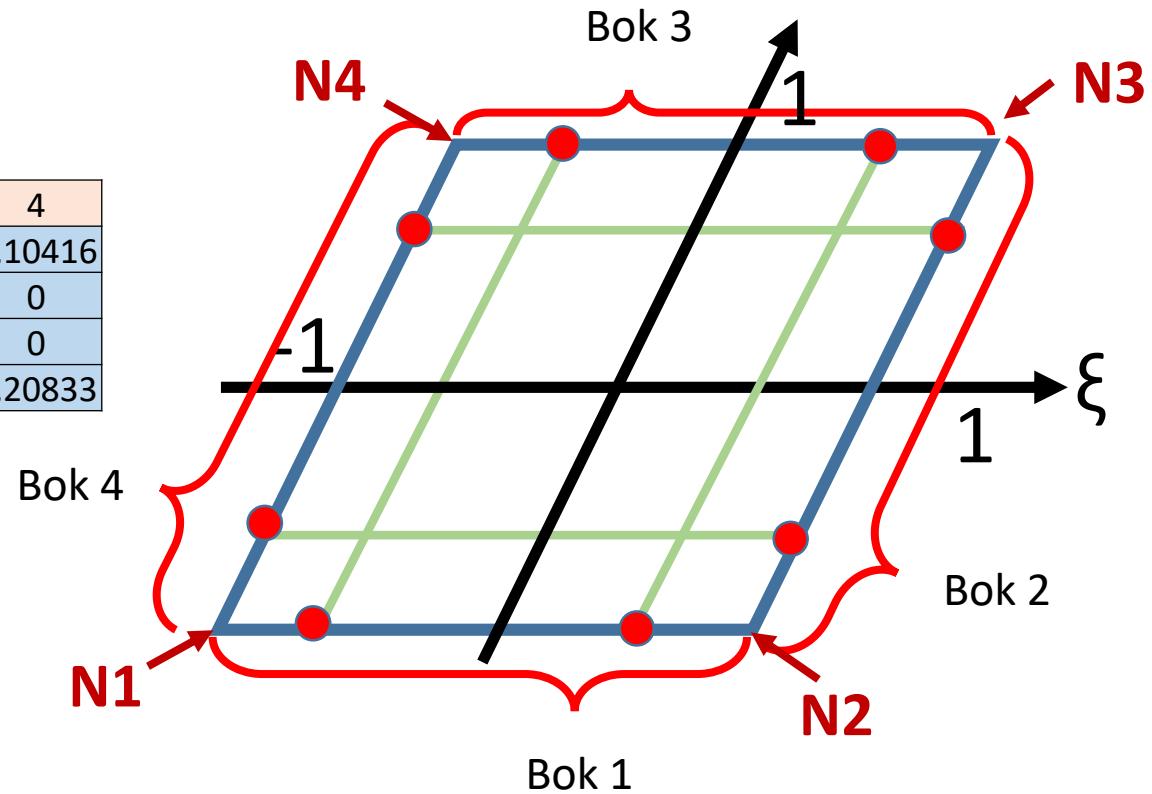
pc2	0,7886751	0	0	0,211325
0,78867	15,550211	0	0	4,16666
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0,21132	4,1666666	0	0	1,11645

\*det[J] = 0,0125

sum	1	2	3	4
1	0,20833	0	0	0,10416
2	0	0	0	0
3	0	0	0	0
4	0,10416	0	0	0,20833

Pow_3	1	2	3	4
1	0	0	0	0
2	0	0	0	0
3	0	0	0,20833	0,10416
4	0	0	0,10416	0,20833

Pow_4	1	2	3	4
1	0,20833	0	0	0,10416
2	0	0	0	0
3	0	0	0	0
4	0,10416	0	0	0,20833



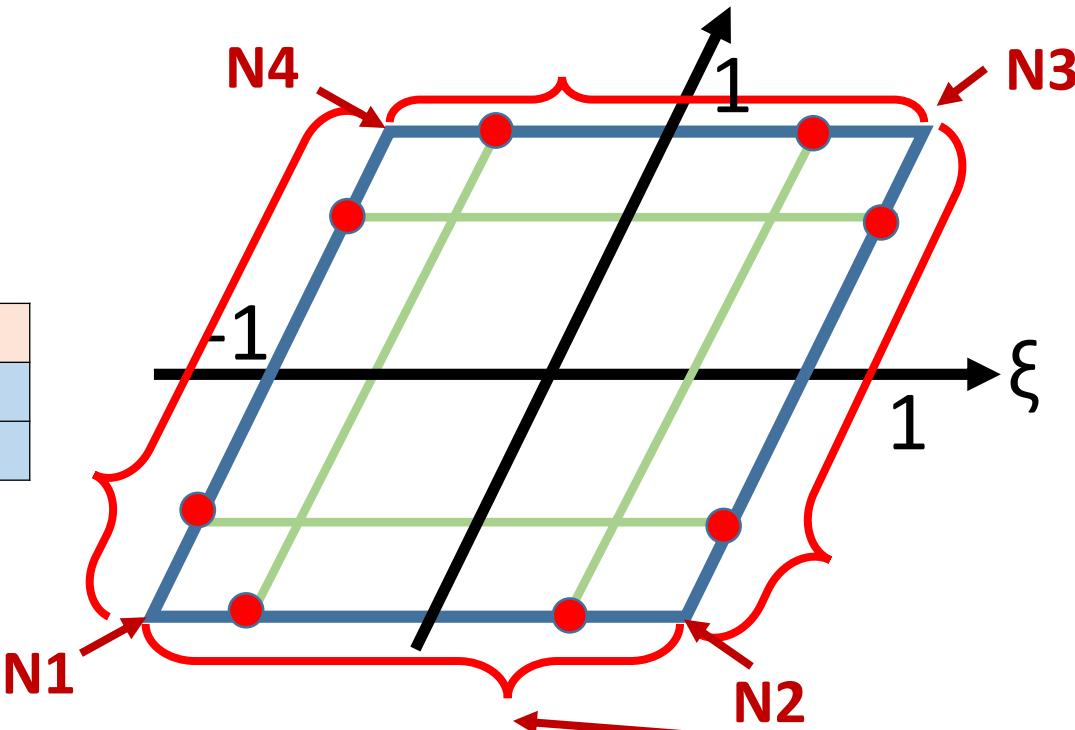
Pow_2	1	2	3	4
1	0	0	0	0
2	0	0,20833	0,10416	0
3	0	0,10416	0,20833	0
4	0	0	0	0

Pow_1	1	2	3	4
1	0,20833	0,10416	0	0
2	0,10416	0,20833	0	0
3	0	0	0	0
4	0	0	0	0

# Obliczanie Wektora P przy wykorzystaniu funkcji kształtu 1d.

sum	1	2
1	0,208333	0,104167
2	0,104167	0,208333

sum	1	2
1	0,208333	0,104167
2	0,104167	0,208333



sum	1	2
1	0,208333	0,104167
2	0,104167	0,208333

sum	1	2
1	0,208333	0,104167
2	0,104167	0,208333

Dla dolnego boku:  
 $N1=0.25*(1-\xi)(1-\eta)$   
 $\eta = -1$   
 $N1=0.25*(1-\xi)(1-(-1))$   
 Funkcja kształtu 2d zamienia się w funkcje kształtu 1d:  
 $N1=0.5*(1-\xi)$

Czytanie siatki z pliku -> tworzenie struktur danych – element, node, element uniwersalny

Implementacja pętli po elementach e:

Pobieranie wartości x oraz y węzłów elementu skońzonego e,

Pętla po punktach całkowania  $pc$  (dla 2d  $pc = 4, 9, 16\dots$  )

Obliczanie macierzy Jakobiego J, Jacobianu i macierzy odwrotnej  $J^{-1}$

dla punktu całkowania  $pc$

Obliczamy  $dN/dx$  oraz  $dN/dy$  -> Macierz H w dla punktu całkowania  $pc$

Sumujemy macierze H z punktów całkowania  $pc_1 - pc_n$  (dla 2d  $pc_n = 4, 9, 16\dots$  )

Obliczamy macierz Hbc dla każdej ściany elementu „e” i sumujemy

Struct GaussIntegration

w, pc

Struct Elem2d\_4 (element uniwersalny)

$dNdKsi[4 lub 9 lub 16(zależne od npc)][4]$   
 $dNdEta[4 lub 9 lub 16 (zależne od npc)][4]$

Struct Element

id[4]  
H[4][4]  
Hbc[4][4]

Struct Surface

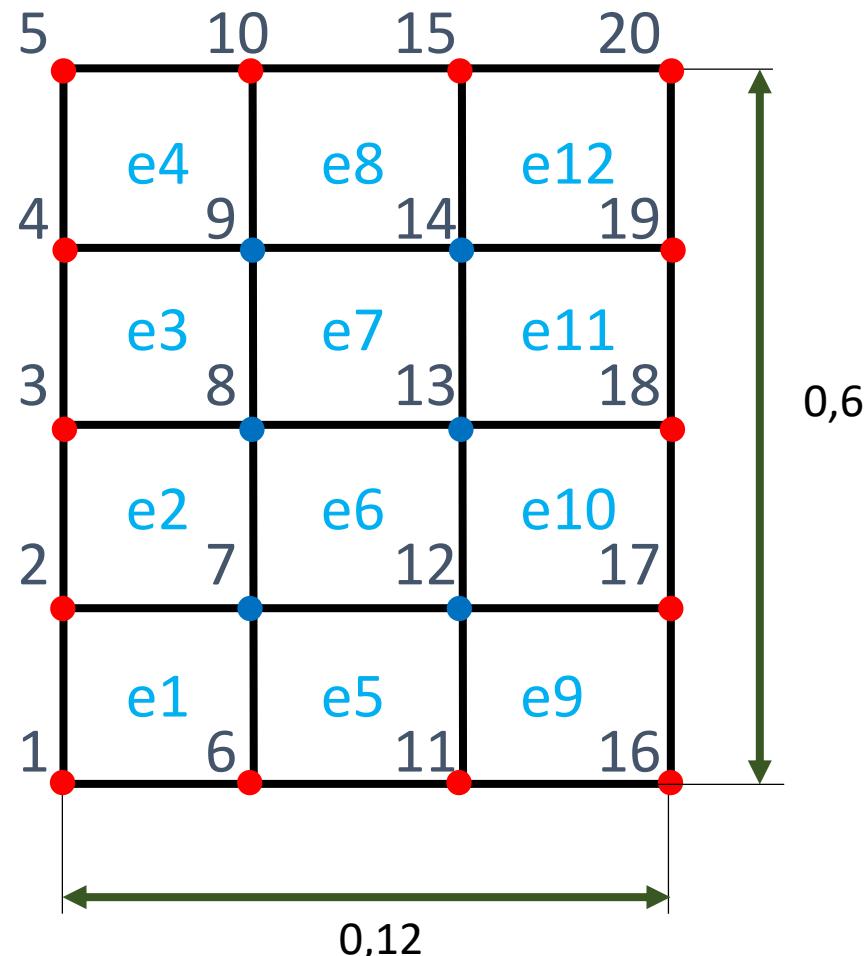
N[2 lub 3 lub 4 (npc)][4]  
Surface[4]

Struct node

x, y, BC

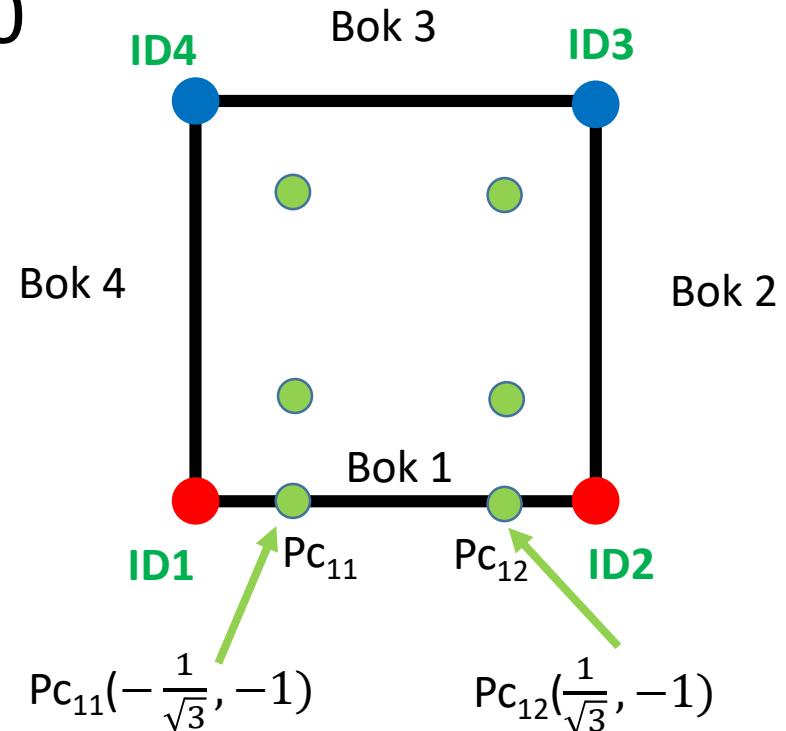
$$[H]\{t\} + \{P\} = 0$$

$$[A]\{x\} + \{B\} = 0$$



$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_1 = 0$$

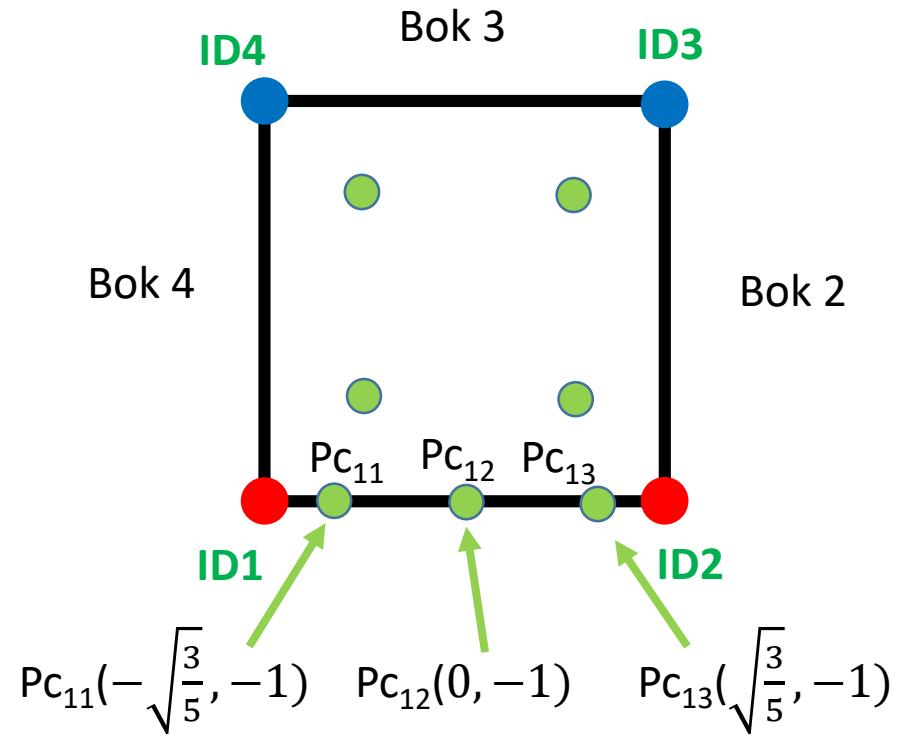
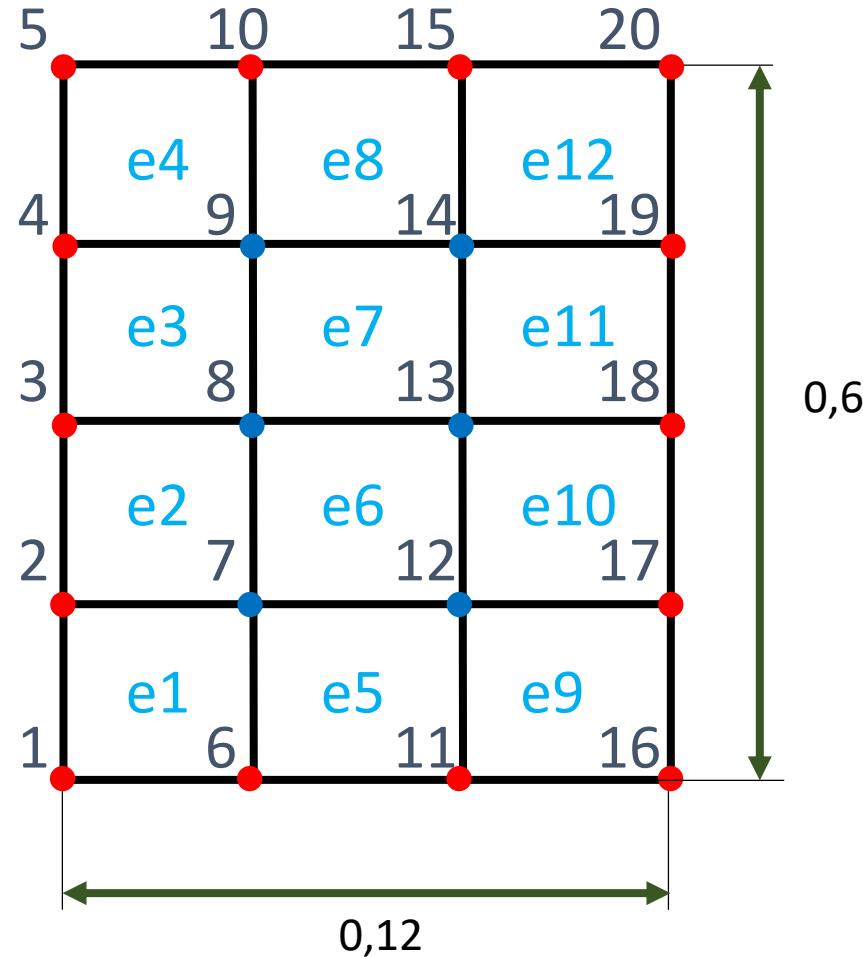
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_2 = 0$$



Struktura bok – w elemencie uniwersalnym:

- ilość punktów całkowania po powierzchni,
- współrzędne punktów całkowania,
- wartości funkcji kształtu w punktach całkowania.

pc	ksi	eta	N1	N2	N3	N4
11	-0,57735	-1	0,788675	0,211325	0	0
12	0,57735	-1	0,211325	0,788675	0	0



Struktura bok – w elemencie uniwersalnym:

- ilość punktów całkowania po powierzchni,
- współrzędne punktów całkowania,
- wartości funkcji kształtu w punktach całkowania.

pc	ksi	eta	N1	N2	N3	N4
11	-0,7746	-1	0,887298	0,112702	0	0
12	0	-1	0,5	0,5	0	0
13	0,7746	-1	0,112702	0,887298	0	0