

Symulacja I

K. Kolanowski, P. Superczyńska

12 maja 2020

1 Wprowadzenie

Wiele zależności opisujących otaczający nas świat wyrażonych jest w postaci równań różniczkowych. Ich rozwiązanie jest niezbędne do poznania sposobu działania układów elektrycznych, mechanicznych i wielu innych. Aby rozwiązać równanie różniczkowe konieczne jest stosowanie różnorodnych technik analizy matematycznej, które pozwalają na uzyskanie oczekiwanego wyniku. W przypadku stosowania komputera, konieczne jest użycie numerycznych metod rozwiązywania równań różniczkowych.

Metoda Rungego-Kutty jest jednym z przykładów specjalizowanej metody rozwiązywania równań różniczkowych zwyczajnych.

Metoda Rungego-Kutty znajduje zastosowanie głównie w symulacjach fizycznych, ze względu na dużą dokładność obliczeń. Obecnie istnieje wiele odmian metody Rungego-Kutty, różniących się stabilnością, jawnością, prędkością działania itp. Zazwyczaj jednak, przez algorytm Rungego-Kutty rozumiemy algorytm Rungego-Kutty 4 rzędu. Metoda Rungego-Kutty pozwala na rozwiązanie równania różniczkowego $y' = f(t, y)$ przy założeniu że znana jest wartość $y(t_0) = y_0$. Wówczas kolejne wartości funkcji y obliczamy korzystając z zależności:

$$y_{n+1} = y_n + \Delta y_n \quad (1)$$

$$\Delta y_n = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (2)$$

gdzie

$$k_1 = hf(t_n, y_n) \quad (3)$$

$$k_2 = hf(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{1}{2}k_1) \quad (4)$$

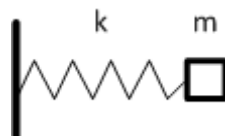
$$k_3 = hf(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{1}{2}k_2) \quad (5)$$

$$k_4 = hf(t_n + h, y_n + k_3) \quad (6)$$

$$(7)$$

2 Przykład

Rozpatrzmy obiekt umieszczony na sprężynie jak na rysunku poniżej:



Oznaczmy: x - pozycja obiektu, $v = \frac{dx}{dt}$ - prędkość obiektu, m - masa obiektu, k - współczynnik sprężystości sprężyny, b - współczynnik tłumienia sprężyny.

Siłę sprężystości obliczyć można korzystając z zależności:

$$F_{spr} = -kx \quad (8)$$

Wprowadzając do powyższego równania współczynnik tłumienia, otrzymujemy:

$$F = F_{spr} + F_{tłumienia} = -kx - bv \quad (9)$$

Po przekształceniach (korzystając z II zasady dynamiki Newtona) otrzymujemy:

$$m\ddot{x} = -kx - bv \quad (10)$$

Co można zapisać w postaci równania różniczkowego drugiego rzędu:

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}x - \frac{b}{m}\dot{x} \quad (11)$$

Aby rozwiązać powyższe równanie za pomocą metody Rungego-Kutty 4 rzędu, należy przekształcić je w układ dwóch równań różniczkowych pierwszego rzędu:

$$\dot{x} = v \quad (12)$$

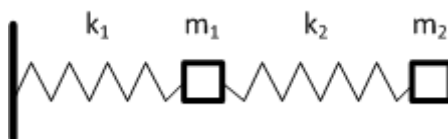
$$\dot{v} = -\frac{k}{m}x - \frac{b}{m}v \quad (13)$$

$$(14)$$

3 Zadanie

Rozwiąż poniższe zadania, rozwiązanie w formie sprawozdania umieść na serwerze dydaktycznym eKursy w sekcji „Laboratorium 9 - oddaj sprawozdanie”.

3.1 Dany jest układ dwóch mas połączonych sprężynami oraz zaczepionych w nieruchomej ścianie, jak na rysunku:



Wykorzystując skrypt załączony do zadania (umożliwiający animację ruchu masy na sprężynie oraz obliczenie równania różniczkowego z wykorzystaniem metody Eulera [1]):

1. Napisz swój skrypt umożliwiający obliczenie trajektorii ruchu obu mas dla zadanych warunków początkowych, parametrów układu oraz horyzontu czasowego symulacji.
2. Skrypt powinien generować wykres aktualnej pozycji każdej z mas w funkcji czasu.
3. Oblicz trajektorię ruchu i mas z wykorzystaniem metody Rungego-Kutty 4 rzędu.
4. Wykonaj animację ruchu sprężyn.

[1] https://www.d-booker.fr/GALERIE/public/scilab-en/excerpts/_scilab-base-en-chap1.pdf