Interpolacja wielomianowa

K. Kolanowski

26 lutego 2022

1 Wprowadzenie

Zadanie interpolacji funkcji polega na odtworzeniu funkcji na podstawie danego zbioru argumentów i wartości tej funkcji. Innymi słowy, dla danego zestawu punktów:

x	x_0	x_1	$\cdots$	x_n
y	y_0	y_1	$\cdots$	y_n

poszukujemy wielomianu p najniższego stopnia, który spełnia równanie:

$$p(x_i) = y_i \quad (0 \leqslant i \leqslant n)$$

Mówimy zatem że wielomian p interpoluje dane.

W zadaniu interpolacji wielomianowej możemy posługiwać się różnymi metodami. W niniejszym kursie poznamy metodę interpolacji Newtona, opierającą się na uogólnionej postaci wielomianu:

$$p_k(x) = \sum_{i=0}^{k} c_i \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j)$$

Zatem pierwsze wielomiany (od stopnia 0) będą miały następującą postać:

$$\begin{aligned} p_0(x) =& c_0 \\ p_1(x) =& c_0 + c_1(x - x_0) \\ p_2(x) =& c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1) \end{aligned}$$

Przy czym współczynniki c_i możemy obliczyć korzystając z różnic dzielonych. Różnicę dzieloną obliczamy korzystając ze wzoru rekurencyjnego:

$$\begin{aligned} f[x_n] =& f(x_n) \\ f[x_n, \cdots, x_{n+m+1}] =& \frac{f[x_{n+1}, \cdots, x_{n+m+1}] - f[x_n, \cdots, x_{n+m}]}{x_{n+m+1} - x_n} \end{aligned}$$

zatem:

$$\begin{aligned} f[x_0] =& f(x_0) \\ f[x_1, x_0] =& \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \\ f[x_2, x_1, x_0] =& \frac{f[x_2, x_1] - f[x_1, x_0]}{x_2 - x_0} \\ & \vdots \end{aligned}$$

Korzystając z metody różnic dzielonych, obliczamy współczynniki c_i, przy założeniu $f(x_i) = y_i$ oraz $c_i = f[x_0, \cdots, x_i]$

2 Przykład - interpolacja 1-go rzędu

Termistory służą do pomiaru temperatury, zasada ich działania opiera się na zmianie wartości rezystancji pod wpływem zmiany temperatury.

Aby zmierzyć temperaturę, producenci dostarczają krzywą kalibracji temperatury w funkcji rezystancji. Jeśli zmierzysz opór, możesz znaleźć temperaturę. Producent termistorów dokonuje kilku pomiarów za pomocą termistora wzorcowego, wyniki z takiego pomiaru przedstawiono w poniższej tabeli.

$R(\Omega)$	$T(^oC)$
1101.0	25.113
911.3	30.131
636.0	40.120
451.1	50.128

ZADANIE:
Wyznaczyć temperaturę odpowiadającą wartości R=754,8[Ω], stosując metodę różnic dzielonych Newtona i wielomian pierwszego rzędu.

ROZWIĄZANIE:
Dla interpolacji liniowej temperatura jest podawana przez:

$$T(R) = b_0 + b_1(R - R_0)$$

Ponieważ chcemy znaleźć temperaturę przy R = 754.8[Ω] i używamy wielomianu pierwszego rzędu, musimy wybrać dwa najbliższe punkty danych pomiędzy którymi znajduje się nasz punkt pomiarowy.
Wybrane dwa punkty to R = 911.3[Ω] i R = 636.0[Ω]

następnie

$$R_0 = 911.3, \quad T(R_0) = 30.131$$
$$R_1 = 636.0, \quad T(R_1) = 40.120$$

co daje

$$b_0 = T(R_0) = 30.131$$
$$b_1 = \frac{T(R_1) - T(R_0)}{R_1 - R_0} = \frac{40.120 - 30.131}{636.0 - 911.3} = -0.036284$$

stąd

$$T(R) = b_0 + b_1(R - R_0) = 30.131 - 0.036284(R - 911.3), \qquad 636.0 \leqslant R \leqslant 911.3$$

Przy $R = 754.8$

$$T(754.8) = 30.131 - 0.036284(754.8 - 911.3) = 35.809\ [^oC]$$

Jeśli rozszerzymy

$$T(R) = 30.131 - 0.036284\,(R - 911.3), \qquad 636.0 \leqslant R \leqslant 911.3$$

otrzymujemy

$$T(R) = 63.197 - 0.036284\,R, \qquad 636.0 \leqslant R \leqslant 911.3$$

3 Przykład - interpolacja 2-go rzędu

Termistory służą do pomiaru temperatury, zasada ich działania opiera się na zmianie wartości rezystancji pod wpływem zmiany temperatury.
Aby zmierzyć temperaturę, producenci dostarczają krzywą kalibracji temperatury w funkcji rezystancji. Jeśli zmierzysz opór, możesz znaleźć temperaturę. Producent termistorów dokonuje kilku pomiarów za pomocą termistora wzorcowego, wyniki z takiego pomiaru przedstawiono w poniższej tabeli.

$R(\Omega)$	$T(^oC)$
1101.0	25.113
911.3	30.131
636.0	40.120
451.1	50.128

ZADANIE:
Wyznaczyć temperaturę odpowiadającą wartości R=754,8[Ω], stosując metodę różnic dzielonych Newtona i wielomian drugiego rzędu. Znajdź bezwzględny błąd przybliżenia dla przybliżenia wielomianowego drugiego rzędu.

ROZWIĄZANIE:
Dla interpolacji kwadratowej temperatura jest podawana przez:

$$T(R) = b_0 + b_1(R - R_0) + b_2(R - R_0)(R - R_1)$$

Ponieważ chcemy znaleźć temperaturę przy R = 754.8[Ω] i używamy wielomianu drugiego rzędu, musimy wybrać trzy najbliższe punkty danych dla punktu R = 754.8[Ω] pomiędzy którymi znajduje się nasz punkt pomiarowy. Wybrane dwa punkty to: R = 911.3[Ω], R = 636.0[Ω] i R = 451.1[Ω]

następnie

$$R_0 = 911.3, \quad T(R_0) = 30.131$$
$$R_1 = 636.0, \quad T(R_1) = 40.120$$
$$R_2 = 451.1, \quad T(R_2) = 50.128$$

co daje

$$\begin{aligned} b_0 &= T(R_0) \\ &= 30.131 \\ b_1 &= \frac{T(R_1) - T(R_0)}{R_1 - R_0} \\ &= \frac{40.120 - 30.131}{636.0 - 911.3} \\ &= -0.036284 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
b_2 &= \frac{\dfrac{T(R_2)-T(R_1)}{R_2-R_1}-\dfrac{T(R_1)-T(R_0)}{R_1-R_0}}{R_2-R_0} \\
&= \frac{\dfrac{50.128-40.120}{451.1-636.0}-\dfrac{40.120-30.131}{636.0-911.3}}{451.1-911.3} \\
&= \frac{-0.054127+0.036284}{-460.2} \\
&= 3.8771\times 10^{-5}
\end{aligned}
$$

stąd

$$
\begin{aligned}
T(R) &= b_0+b_1(R-R_0)+b_2(R-R_0)(R-R_1) \\
&= 30.131-0.036284(R-911.3)+3.8771\times 10^{-5}(R-911.3)(R-636.0)) \qquad 451.1\leqslant R\leqslant 911.3
\end{aligned}
$$

Przy $R=754.8$

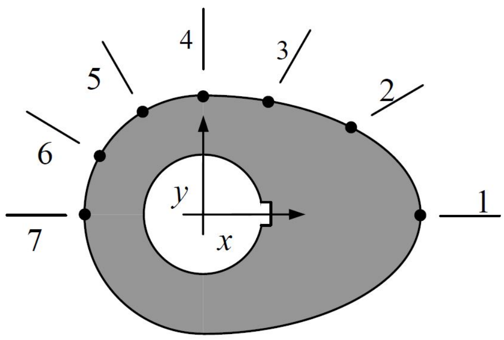
$$
\begin{aligned}
T(754.8) &= 30.131-0.036284(754.8-911.3)+3.8771\times 10^{-5}(758.8-911.3)(754.8-636.0) \\
&= 35.089\ [^oC]
\end{aligned}
$$

Bezwzględny błąd przybliżenia dla przybliżenia wielomianowego drugiego rzędu wynosi:

$$
\mid \varepsilon_T \mid = \mid \frac{35.089-35.809}{35.089} \mid \times 100 = 2.0543\,\%
$$

4 Przykład - interpolacja 6-go rzędu

Kształt poniższej krzywki określony jest przez siedem punktów krawędzi zewnętrznej.



Punkt	x	y
1	2.20	0.00
2	1.28	0.88
3	0.66	1.14
4	0.00	1.20
5	-0.60	1.04
6	-1.04	0.60
7	-1.20	0.00

ZADANIE:
Wyznaczyć funkcję opisującą profil krzywki stosując metodę różnic dzielonych Newtona i wielomian szóstego rzędu.

ROZWIĄZANIE:
Dla interpolacji szóstego rzędu wartość funkcji y jest określona poprzez:

$$\begin{aligned} y(x) &= b_0 + b_1(x-x_0) + b_2(x-x_0)(x-x_1) + b_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) \\ &+ b_4(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) + b_5(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4) \\ &+ b_6(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)(x-x_5) \end{aligned}$$

wykorzystując siedem punktów:

$$\begin{aligned} x_0 &= 2.20, & y(x_0) &= 0.00 \\ x_1 &= 1.28, & y(x_1) &= 0.88 \\ x_2 &= 0.66, & y(x_2) &= 1.14 \\ x_3 &= 0.00, & y(x_3) &= 1.20 \\ x_4 &= -0.60, & y(x_4) &= 1.04 \\ x_5 &= -1.04, & y(x_5) &= 0.60 \\ x_6 &= -1.20, & y(x_6) &= 0.00 \end{aligned}$$

co daje

$$\begin{aligned}
b_0 &= y[x_0] \\
&= y(x_0) \\
&= 0.00
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_1 &= y[x_1, x_0] \\
&= \frac{y(x_1) - y(x_0)}{x_1 - x_0} \\
&= \frac{0.88 - 0.00}{1.28 - 2.20} \\
&= -0.95652
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_2 &= y[x_2, x_1, x_0] \\
&= \frac{y[x_2, x_1] - y[x_1, x_0]}{x_2 - x_0} \\
y[x_2, x_1] &= \frac{y(x_2) - y(x_1)}{x_2 - x_1} \\
&= \frac{1.14 - 0.88}{0.66 - 1.28} \\
&= -0.41935 \\
y[x_1, x_0] &= -0.95652 \\
b_2 &= \frac{y[x_2, x_1] - y[x_1, x_0]}{x_2 - x_0} \\
&= \frac{-0.41935 + 0.95652}{0.66 - 2.20} \\
&= -0.34881
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_3 &= y[x_3, x_2, x_1, x_0] \\
&= \frac{y[x_3, x_2, x_1] - y[x_2, x_1, x_0]}{x_3 - x_0} \\
y[x_3, x_2, x_1] &= \frac{y[x_3, x_2] - y[x_2, x_1]}{x_3 - x_1} \\
y[x_3, x_2] &= \frac{y(x_3) - y(x_2)}{x_3 - x_2} \\
&= \frac{1.20 - 1.14}{0.00 - 0.66} \\
&= -0.090909 \\
y[x_2, x_1] &= -0.41935 \\
y[x_3, x_2, x_1] &= \frac{y[x_3, x_2] - y[x_2, x_1]}{x_3 - x_1} \\
&= \frac{-0.090909 + 0.41935}{0.00 - 1.28} \\
&= -0.25660 \\
y[x_2, x_1, x_0] &= -0.34881 \\
b_3 &= y[x_3, x_2, x_1, x_0] \\
&= \frac{y[x_3, x_2, x_1] - y[x_2, x_1, x_0]}{x_3 - x_0} \\
&= \frac{-0.25660 + 0,34881}{0.00 - 2.20} \\
&= -0.041914
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
b_4 &= y[x_4, x_3, x_2, x_1, x_0] \\
&= \frac{y[x_4, x_3, x_2, x_1] - y[x_3, x_2, x_1, x_0]}{x_4 - x_0} \\
y[x_4, x_3, x_2, x_1] &= \frac{y[x_4, x_3, x_2] - y[x_3, x_2, x_1]}{x_4 - x_1} \\
y[x_4, x_3, x_2] &= \frac{y[x_4, x_3] - y[x_3, x_2]}{x_4 - x_2} \\
y[x_4, x_3] &= \frac{y(x_4) - y(x_3)}{x_4 - x_3} \\
&= \frac{1.04 - 1.20}{-0.60 - 0.00} \\
&= 0.26667 \\
y[x_3, x_2] &= -0.090909 \\
y[x_4, x_3, x_2] &= \frac{y[x_4, x_3] - y[x_3, x_2]}{x_4 - x_2} \\
&= \frac{0.26667 + 0.090909}{-0.60 - 0.66} \\
&= -0.28379 \\
y[x_3, x_2, x_1] &= -0.25660 \\
y[x_4, x_3, x_2, x_1] &= \frac{y[x_4, x_3, x_2] - y[x_3, x_2, x_1]}{x_4 - x_1} \\
&= \frac{-0.28379 + 0.25660}{-0.60 - 1.28} \\
&= 0.014464 \\
y[x_3, x_2, x_1, x_0] &= -0.041914 \\
b_4 &= \frac{y[x_4, x_3, x_2, x_1] - y[x_3, x_2, x_1, x_0]}{x_4 - x_0} \\
&= \frac{0.014464 + 0.041914}{-0.60 - 2.20} \\
&= -0.020135
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
b_5 &= y[x_5, x_4, x_3, x_2, x_1, x_0] \\
&= \frac{y[x_5, x_4, x_3, x_2, x_1] - y[x_4, x_3, x_2, x_1, x_0]}{x_5 - x_0} \\
y[x_5, x_4, x_3, x_2, x_1] &= \frac{y[x_5, x_4, x_3, x_2] - y[x_4, x_3, x_2, x_1]}{x_5 - x_1} \\
y[x_5, x_4, x_3, x_2] &= \frac{y[x_5, x_4, x_3] - y[x_4, x_3, x_2]}{x_5 - x_2} \\
y[x_5, x_4, x_3] &= \frac{y[x_5, x_4] - y[x_4, x_3]}{x_5 - x_3} \\
y[x_5, x_4] &= \frac{y(x_5) - y(x_4)}{x_5 - x_4} \\
&= \frac{0.60 - 1.04}{-1.04 + 0.60} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y[x_4, x_3] &= 0.26667 \\
y[x_5, x_4, x_3] &= \frac{y[x_5, x_4] - y[x_4, x_3]}{x_5 - x_3} \\
&= \frac{1 - 0.26667}{-1.04 - 0} \\
&= -0.70513 \\
y[x_4, x_3, x_2] &= -0.28379 \\
y[x_5, x_4, x_3, x_2] &= \frac{y[x_5, x_4, x_3] - y[x_4, x_3, x_2]}{x_5 - x_2} \\
&= \frac{-0.70513 + 0.28379}{-1.04 - 0.66} \\
&= 0.24785 \\
y[x_4, x_3, x_2, x_1] &= 0.014464 \\
y[x_5, x_4, x_3, x_2, x_1] &= \frac{y[x_5, x_4, x_3, x_2] - y[x_4, x_3, x_2, x_1]}{x_5 - x_1} \\
&= \frac{0.24785 - 0.014464}{-1.04 - 1.28} \\
&= -0.10060 \\
y[x_4, x_3, x_2, x_1, x_0] &= -0.020135 \\
b_5 &= y[x_5, x_4, x_3, x_2, x_1, x_0] \\
&= \frac{y[x_5, x_4, x_3, x_2, x_1] - y[x_4, x_3, x_2, x_1, x_0]}{x_5 - x_0} \\
&= \frac{-0.10060 + 0.020135}{-1.04 - 2.20} \\
&= 0.024834
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
b_6 &= y[x_6, x_5, x_4, x_3, x_2, x_1, x_0] \\
&= \frac{y[x_6, x_5, x_4, x_3, x_2, x_1] - y[x_5, x_4, x_3, x_2, x_1, x_0]}{x_6 - x_0} \\
y[x_6, x_5, x_4, x_3, x_2, x_1] &= \frac{y[x_6, x_5, x_4, x_3, x_2] - y[x_5, x_4, x_3, x_2, x_1]}{x_6 - x_1} \\
y[x_6, x_5, x_4, x_3, x_2] &= \frac{y[x_6, x_5, x_4, x_3] - y[x_5, x_4, x_3, x_2]}{x_6 - x_2} \\
y[x_6, x_5, x_4, x_3] &= \frac{y[x_6, x_5, x_4] - y[x_5, x_4, x_3]}{x_6 - x_3} \\
y[x_6, x_5, x_4] &= \frac{y[x_6, x_5] - y[x_5, x_4]}{x_6 - x_4} \\
y[x_6, x_5] &= \frac{y[x_6] - y[x_5]}{x_6 - x_5} \\
&= \frac{0.00 - 0.60}{-1.20 + 1.04} \\
&= 3.75 \\
y[x_5, x_4] &= 1 \\
y[x_6, x_5, x_4] &= \frac{y[x_6, x_5] - y[x_5, x_4]}{x_6 - x_4} \\
&= \frac{3.75 - 1}{-1.20 + 0.60} \\
&= -4.5833 \\
y[x_5, x_4, x_3] &= -0.70513
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y[x_6, x_5, x_4, x_3] &= \frac{y[x_6, x_5, x_4] - y[x_5, x_4, x_3]}{x_6 - x_3} \\
&= \frac{-4.5833 + 0.70513}{-1.20 - 0.00} \\
&= 3.2318 \\
y[x_5, x_4, x_3, x_2] &= 0.24785 \\
y[x_6, x_5, x_4, x_3, x_2] &= \frac{y[x_6, x_5, x_4, x_3] - y[x_5, x_4, x_3, x_2]}{x_6 - x_2} \\
&= \frac{3.2318 - 0.24785}{-1.20 - 0.66} \\
&= -1.6043 \\
y[x_5, x_4, x_3, x_2, x_1] &= -0.10060 \\
y[x_6, x_5, x_4, x_3, x_2, x_1] &= \frac{y[x_6, x_5, x_4, x_3, x_2] - y[x_5, x_4, x_3, x_2, x_1]}{x_6 - x_1} \\
&= \frac{-1.6043 + 0.100596}{-1.20 - 1.28} \\
&= 0.60633 \\
y[x_5, x_4, x_3, x_2, x_1, x_0] &= 0.024834 \\
b_6 &= \frac{y[x_6, x_5, x_4, x_3, x_2, x_1] - y[x_5, x_4, x_3, x_2, x_1, x_0]}{x_6 - x_0} \\
&= \frac{0.60633 - 0.024834}{-1.20 - 2.20} \\
&= -0.17103
\end{aligned}
$$

stąd

$$
\begin{aligned}
y(x) &= b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1) + b_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \\
&\quad + b_4(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) + b_5(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4) \\
&\quad + b_6(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)(x - x_5) \\
&= 0 - 0.95652(x - 2.2) - 0.34881(x - 2.2)(x - 1.28) - 0.041914(x - 2.2)(x - 1.28)(x - 0.66) \\
&\quad - 0.020135(x - 2.2)(x - 1.28)(x - 0.66)(x - 0) + 0.024834(x - 2.2)(x - 1.28)(x - 0.66)(x - 0)(x + 0.6) \\
&\quad - 0.17103(x - 2.2)(x - 1.28)(x - 0.66)(x - 0)(x + 0.6)(x + 1.04)
\end{aligned}
$$

po uproszczeniu otrzymujemy

$$
\begin{aligned}
y(x) &= 1.2 + 0.25112x - 0.27255x^2 - 0.56765x^3 \\
&\quad + 0.072013x^4 + 0.45241x^5 - 0.17103x^6 \qquad -1.20 \leqslant x \leqslant 2.20
\end{aligned}
$$

5 Zadania

Rozwiąż poniższe zadania, rozwiązanie w formie sprawozdania umieść na serwerze dydaktycznym eKursy w sekcji „Laboratorium 5 - oddaj sprawozdanie".

1. Zaimplementuj algorytm interpolacji funkcji metodą Newtona. Danymi wejściowymi algorytmu są: zakładany rząd interpolowanej funkcji, ilość punktów interpolacji, zestaw punktów (x, y).

2. Sprawdź działanie algorytmu dla poniższego zestawu punktów oraz rzędu funkcji interpolującej wynoszącego 3.

x	1	2	$4,5$	5
$f(x)$	$-10,5$	-16	$11,8125$	$27,5$

   Wykreśl funkcję na wykresie oraz nanieś punkty z tabeli powyżej.

3. Dodaj do programu z punktu 1 funkcjonalność obliczania błędu interpolacji. Błąd oblicz jako różnicę między zadaną wartością w danym punkcie (na podstawie tabeli), a wartością funkcji interpolującej w tym punkcie.

4. Dla zadanych punktów w tabeli poniżej, dokonaj interpolacji funkcji za pomocą wielomianu.

x	-2	0	1	$2,5$	4
$f(x)$	-14	9	4	$9,625$	175

   Napisz skrypt, który dokona interpolacji tej funkcji wielomianami o stopniach od 2 do 4. Dla każdego przypadku sprawdź minimalny i maksymalny błąd interpolacji. Wybierz funkcję interpolującą, która ma najmniejszy błąd, a następnie wykreśl ją w układzie współrzędnych na wykresie wraz z punktami z tabeli powyżej.

5. W eksperymencie kosmicznym wystartowała rakieta. W wyniku błędu urządzeń pomiarowych, z fazy lotu udało się zarejestrować jedynie 6 próbek pomiarów prędkości lotu. Dane zostały zestawione w tabeli:

t [s]	0	10	15	20	$22,5$	30
v [m/s]	0	$227,4$	$362,8$	$517,35$	$602,97$	$901,67$

   Wiedząc że zależność prędkości lotu w funkcji czasu dana jest wielomianem trzeciego rzędu, dokonaj interpolacji tego równania. Następnie na podstawie otrzymanego równania oblicz prędkości lotu rakiety w chwilach $t_1 = 45s$, $t_2 = 60s$ oraz $t_3 = 90s$.

6. Ramię robota dokonuje szybkiego skanu poprawności wykonanych otworów w obrabianym elemencie. Współrzędne środków wykonanych otworów dane są w tabeli, w układzie kartezjańskim:

x [mm]	y [mm]
20	72
$42,5$	71
$52,5$	60
$78,1$	50
92	35
106	50

   Ramię robota rozpoczyna ruch od punktu $x = 0$, $y = 0$. Ze względu na zmniejszenie drgań mechanicznych, ramię robota musi wykonywać ruch płynny. Dokonaj interpolacji trajektorii ruchu robota za pomocą wielomianu dowolnego stopnia. Sprawdź, czy ruch robota po zadanej trajektorii nie spowoduje przekroczenia obszaru roboczego w osi y, który wynosi $80mm$. Wygenerowaną trajektorię wraz z zaznaczoną granicą obszaru roboczego wykreśl na wykresie.