Rozwiązywanie równań nieliniowych

K. Kolanowski

26 lutego 2022

1 Wprowadzenie

W zadaniach matematyki bardzo często spotykamy się z problemem rozwiązywania skalarnych równań nieliniowych w postaci:

$$f(x) = 0$$

Jednym z typowych przykładów takiego problemu jest znajdowanie miejsc zerowych wielomianów:

$$f(x) \equiv a_n x^n + ... + a_1 x + a_0 = 0$$

Zadanie to ma wiele zastosowań praktycznych, np. znajdowanie pierwiastka kwadratowego z liczby a:

$$f(x) \equiv x^2 - a = 0$$

Innym przykładem jest znajdowanie odwrotności liczny a, bez dzielenia jej:

$$f(x) \equiv \frac{1}{x} - a = 0$$

Istnieje szereg sposobów rozwiązywania skalarnych równań nieliniowych. Część z tych metod jest bardzo wyspecjalizowana. Istnieją też pewne metody które możliwe są do łatwego zaimplementowania w postaci numerycznej. W ramach niniejszego ćwiczenia poznamy metodę bisekcji.

Metoda bisekcji (zwana również metodą równego podziału) opiera się na twierdzeniu Bolzano-Cauchy'ego, które mówi że:

Twierdzenie 1. *Jeżeli funkcja ciągła $f(x)$ ma na końcach przedziału domkniętego wartości różnych znaków, to wewnątrz tego przedziału istnieje co najmniej jeden pierwiastek równania $f(x) = 0$.*

Aby znaleźć miejsce zerowe funkcji $f(x)$ za pomocą metody bisekcji należy postępować według algorytmu:

1. Sprawdź czy
$$x_1 = \frac{a+b}{2}$$
jest pierwiastkiem równania, tzn. czy $f(x_1) = 0$ (a oraz b są to końce przedziału w którym znajduje się miejsce zerowe.

2. Jeżeli tak, to zakończ algorytm, a poszukiwanym miejscem zerowym jest x_1. Jeżeli nie stwórz dwa przedziały $[a, x_1]$ oraz $[x_1, b]$.

3. Sprawdź który przedział spełnia założenia algorytmu, tzn. $f(a)f(x_1) < 0$ lub $f(x1)f(b) < 0$. Wybierz ten z przedziałów który spełnia założenia i wróć do kroku 1.

Istnieje jeden jawny sposób zakończenia algorytmu w kroku 2. Drugim niejawnym sposobem zakończenia algorytmu jest ustalenie założonej dokładności znalezienia miejsca zerowego. Dokładność taką określa się jako:

$$\epsilon = n - m$$

gdzie n oznacza lewostronną granicę przedziału, natomiast m oznacza prawostronną granicę przedziału. Istotną cechą metody bisekcji jest jej liniowa zbieżność.

Druga metoda znajdowania miejsc zerowych skalarnych funkcji nieliniowych jest metoda Newtona. W odróżnieniu od metody bisekcji jest ona kwadratowo zbieżna, co oznacza ze z każda iteracja dokładność obliczeń zostaje podwojona.

W metodzie Newtona, podobnie jak w metodzie bisekcji, przyjmuje się następujące założenia:

- Funkcja f jest ciągła w przedziale [a, b].
- W przedziale [a, b] istnieje dokładnie jedno miejsce zerowe funkcji.
- Funkcja ma rożne znaki na końcach przedziału, tzn. $f(a)f(b) < 0$.
- Pierwsza i druga pochodna funkcji maja stały znak w przedziale [a, b].

Algorytm postępowania w metodzie Newtona jest następujący:

1. Wybierz punkt startowy x_0 (zazwyczaj a, b, 0 lub 1).
2. Wyznacz styczna w x_0 oraz jej punkt przecięcia z osia odciętych.
3. Wartość odciętej jest przybliżeniem rozwiązania funkcji. Jeżeli wartość przybliżenia jest niesatysfakcjonująca, to podstaw wartość odciętej jako punkt startowy i rozpocznij obliczenia od nowa.

Algorytm ten można zapisać w postaci rekurencyjnej:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Pozostaje kwestia wyjaśnienia co to jest satysfakcjonujący wynik. Jeżeli założymy pewna dokładność obliczeń, wówczas algorytm możemy zakończyć przy spełnieniu jednego lub kilku warunków:

- Wartość funkcji w wyznaczonym punkcie jest bliska zeru

$$\mid f(x_k) \mid \leqslant \epsilon$$

- Odległość pomiędzy kolejnymi przybliżeniami jest dostatecznie mała

$$\mid x_{k+1} - x_k \mid \leqslant \epsilon$$

- Szacowany błąd jest dostatecznie mały

$$\frac{M}{2m}(x_k - x_{k-1})^2 \leqslant \epsilon$$

Przy czym wartości M oraz m są następujące:

$$M = \max_{x \in [a,b]} \mid f''(x) \mid$$

$$m = \min_{x \in [a,b]} \mid f'(x) \mid$$

2 Przykład

Poniżej zaprezentowano przykład implementacji algorytmu obliczania pierwiastka 3 stopnia z dowolnej liczby. Problem obliczenia wartości takiego pierwiastka można sprowadzić do znalezienia miejsca zerowego funkcji:

$$\sqrt[3]{a} = x \Leftrightarrow a = x^3$$

zatem

$$f(x) = x^3 - a$$

```
//przygotowanie obszaru roboczego
clear;
clc;
clf;
//funkcja definiujaca rownanie
function y=zadanie(x, z)
 y=x^3-z;
endfunction
//funkcja do podzialu przedzialow
function gr_c=szukanie(gr_l, gr_p)
 gr_c=gr_l+(gr_p-gr_l)/2;
endfunction
//wartosci poczatkowe zmiennych
gr_l=-2;
gr_p=2;
z=3; //w tym przykladzie bedzie pierwiastek z liczby 3
delta=10^-5;
t=linspace(gr_l,gr_p,1000);
//wykres funkcji liczonego rownania
subplot(121);
plot2d(t,zadanie(t));
wykres=gca();
wykres.x_location="origin";
wykres.y_location="origin";
//metoda bisekcji
n=1;
tn(n)=n-1;
x(n)=gr_p;
gr_c=gr_p;
//glowna petla metody bisekcji
while abs(zadanie(gr_c))>delta & abs(gr_p-gr_l)>delta
 n=n+1;
 tn(n)=n-1;
 gr_c=szukanie(gr_l,gr_p);
 yc=zadanie(gr_c);
 ya=zadanie(gr_l);
 zero=ya*yc;
 if zero<0 then
gr_p=gr_c;
 else
gr_l=gr_c;
 end
 x(n)=gr_c;
end
subplot(122);
plot2d(tn,x);
```

3 Zadania

Rozwiąż poniższe zadania, rozwiązanie w formie sprawozdania umieść na serwerze dydaktycznym eKursy w sekcji „Laboratorium 4 - oddaj sprawozdanie".

3.1 Metoda bisekcji

1. Zaimplementuj algorytm obliczania miejsc zerowych dla funkcji

$$f(x) = x^2 - 2$$

   w przedziale $[0, 3]$.

2. Przedstaw w postaci tabeli kolejne kroki przybliżeń jakie zostały otrzymane.
3. Sprawdź działanie napisanego skryptu dla różnych wartości dokładności wyniku (delta).
4. Jak zmienia się ilość wykonanych iteracji skryptu w zależności od dokładności wyniku (delta)?
5. Zaproponuj modyfikację skryptu z pkt. 1 która umożliwi wyznaczenie miejsc zerowych w przedziale $[-3, 3]$.

3.2 Metoda Newtona

1. Zaimplementuj algorytm obliczenia pierwiastka 3 stopnia z wykorzystaniem metody Newtona
2. Wybierz jedna z metod określenia dokładności obliczeń, a następnie zaimplementuj ja w algorytmie aby uzyskać warunki końcowe.
3. Zmodyfikuj program tak, aby punkt startowy algorytmu ustawiany był kolejno na liczby w zakresie od 1 do liczby podpierwiastkowej.
4. Dla jednej dowolnie wybranej liczby wylosuj cztery różne punkty startowe i wykreśl zależność pokazującą dążenie algorytmu do wyniku ($x_k = f(iteracja)$).
5. Oblicz pierwiastki 3 stopnia z liczb w zakresie od 1 do 10^5. Wykreśl krzywą ilustrującą ilość iteracji algorytmu dla każdej liczby. Czy występuje korelacja miedzy liczbą podpierwiastkowa a ilością iteracji? Przyjmij stały punkt startowy dla każdego przypadku.

3.3 Szukanie odwrotności liczby

Za pomocą metody Newtona zaimplementuj problem szukania odwrotności dowolnej liczby. W algorytmie niewolno wykonywać operacji dzielenia.
Dla czterech losowych liczb wykreśl zależność $x_k = f(iteracja)$.