Całkowanie numeryczne II

K. Kolanowski, P. Superczyńska

26 lutego 2022

1 Wprowadzenie

Kolejne ćwiczenie laboratoryjne ma na celu poszerzyć wiedzę z zakresu całkowania numerycznego i przedstawić kolejne metody.

1.1 Metoda Monte Carlo

Metoda ta polega na wylosowaniu n punktów znajdujących się w obrębie przedziału całkowania i na tej podstawie obliczeniu średniej wartości funkcji w tym przedziale. Przykładem niech będzie obliczenie całki funkcji $f(x)$ w przedziale $\langle x_l, x_p \rangle$. Z definicji całki oznaczonej Riemana wiadome jest, że wartość całki równa jest polu obszaru pod wykresem w danym przedziale. Stąd, losując punkty i oznaczając je jako $x_1, x_2, \ldots, x_n$ to średnią wartość można obliczyć w następujący sposób

$$f_{sr} = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)}{n} \tag{1}$$

Przybliżona wartość całki uzyskiwana jest z mnożenia obliczonej wartości średniej przez długość przedziału całkowania

$$f_{sr} \cdot |x_p - x_l| \tag{2}$$

Zwiększająca się liczba punktów pomiarowych n, umożliwia bardziej równomierny rozkład w danym przedziale, a w konsekwencji bardziej dokładny wynik. Jednak nie jest to podejście idealne, gdyż należy ostrożnie zwiększać liczbę punktów, tak aby nie przekroczyć zakresu używanych zmiennych w czasie dodawania przy obliczaniu średniej. Można skorzystać wtedy z podejścia

$$f_{sr} = \frac{f(x_1)}{n} + \frac{f(x_2)}{n} + \ldots + fracf(x_n)n \tag{3}$$

jednak w tym wypadku, należy być wyczulonym na problem nakładania się zaokrągleń dzielenia przez n.

1.2 Metoda adaptacyjna Simpsona

Tak jak w poprzednim punkcie, przykładem niech będzie obliczenie całki funkcji $f(x)$ w przedziale $\langle x_l, x_p \rangle$. Z definicji całki oznaczonej Riemana wiadome jest, że wartość całki równa jest sumie pól obszarów pod wykresem krzywej w zadanym przedziale całkowania. Sumę taką można wyznaczyć w przybliżeniu dzieląc obszar całkowania na n równych części. Metody prostokątów i trapezów zakładały, że przybliżenie funkcji w przedziale jest funkcją liniową. Metoda Simpsona w każdym takim przedziale dla którego obliczana jest całka, przybliża funkcję przy pomocy paraboli. Przedział całkowy dzielony jest na n równych części, szerokość każdej z tych części wynosi

$$h = \frac{x_p - x_l}{n} \tag{4}$$

Wtedy przybliżoną całkę można obliczyć ze wzoru

$$\int_{x_l}^{x_p} f(x)dx \approx I = \left[f(x_l) + 4f\left(\frac{x_l + x_p}{2}\right) + f(x_p) \right] \frac{h}{3} \tag{5}$$

W przypadku, kiedy przedział całkowania jest duży, to można zastosować złożoną metodę Simpsona. Wtedy przedział dzielony jest na $n-1$ podprzedziałów (liczba n musi być parzysta) długości

$$h = \frac{x_p - x_l}{n-1} \tag{6}$$

Korzystając ze wzoru (5) obliczając pola dla pierwszych dwóch przedziałów i w następstwie dla kolejnych, można otrzymać

$$I = [f(x_1) + 4f(x_2) + 2f(x_3) + 4f(x_4) + \ldots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)]\,\frac{h}{3} \tag{7}$$

1.3 Kwadratury Gaussa

Metody te polegają na doborze wag i węzłów interpolacji. Zakłada się, że

$$\int_{x_l}^{x_p} w(x)f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i) \tag{8}$$

przy czym niewiadomymi są współczynniki wagowe w_i, a także współrzędne węzłów x_i. Powyższe równanie posiada $2(n+1)$ niewiadomych.
Kwadratura będzie możliwa gdy $f(x)$ będzie wielomianem co najwyżej stopnia $(2n+1)$. Niewiadome można wyznaczyć z układu $2n+2$ równań dla $n+1$ wag w_i oraz $n+1$ węzłów $x_i, i = 0, 1, \ldots, n$.
W przypadku funkcji podcałkowej przyjmującej postać wielomianu zgodnie ze wzorem

$$\int_{x_l}^{x_p} x^k dx = \sum_{i=0}^{n} w_i x_i^k \quad k = 0, 1, 2, \ldots, 2n+1 \tag{9}$$

otrzymuje się układ równań

$$\sum_{i=0}^{n} w_i x_i^k = \frac{1}{k+1}\left(x_p^{k+1} - x_l^{k+1}\right) \quad k = 0, 1, 2, \ldots, 2n+1. \tag{10}$$

Odwzorowanie przedziału x_l, x_p na osi x na unormowany przedział $-1, 1$, na pomocniczej osi ζ i odwzorowanie do niego odwrotne można opisać za pomocą wzorów

$$\zeta = \frac{2x - x_l - x_p}{x_p - x_l} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{x_l + x_p}{2} + \frac{x_p - x_l}{2}\zeta \tag{11}$$

z tego można otrzymać wzór kwadraturowy Gaussa

$$\int_{x_l}^{x_p} f(x)dx \approx \frac{x_p - x_l}{2} \sum_{i=0}^{n} \overline{w}_i f\left(\frac{x_l + x_p}{2} + \frac{x_p - x_l}{2}\zeta_i\right) \tag{12}$$

Kwadraturę dla przedziału $-1, 1$ z wagą $w(x) = 1$ nazywa się *kwadraturą Gaussa-Legendre'a*

$$I(f) = \int_{-1}^{1} f(x)dx \tag{13}$$

Poniżej przedstawione zostaną kwadratury Gaussa dla innych funkcji wagowych.

$$I(f) = \int_{-1}^{1} f(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad Gaussa - Czebyszewa \tag{14}$$

$$I(f) = \int_{-1}^{1} f(x)(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}dx \quad \alpha, \beta > -1 \quad Gaussa - Jacobiego \tag{15}$$

$$I(f) = \int_{0}^{\infty} f(x)e^{-x}dx \quad Gaussa - Laguerre'a \tag{16}$$

$$I(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-x^2}dx \quad Gaussa - Hermite'a \tag{17}$$

2 Zadanie

Rozwiąż poniższe zadania, rozwiązanie w formie sprawozdania umieść na serwerze dydaktycznym eKursy w sekcji „Laboratorium 8 - oddaj sprawozdanie".

1. Napisz skrypt umożliwiający obliczenie całki oznaczonej

$$f(x) = \frac{1}{2x^2} + 2x \tag{18}$$

korzystając z algorytmów opartych o

- metodę Monte Carlo
- metodę Simpsona

(a) Określ przedział całkowania $[x_l, x_p]$, dla którego zaistnieje słuszność otrzymanych rozwiązań funkcji pierwotnej. Uzasadnij dobór.

(b) Przedstaw wzór funkcji pierwotnej i wartości obliczone w sposób analityczny.

(c) Porównaj otrzymane wyniki w zależności od wykorzystanej metody. Zamieść skrypty pozwalające obliczyć całkę z wykorzystaniem każdej z metod.

2. Oblicz numerycznie przy użyciu kwadratury Gaussa-Legendre'a wartość całki

$$c_1 = \int_0^2 \frac{x}{4x^2 + 1} dx \tag{19}$$

Dokładną wartość można obliczyć korzystając z rozwiązania analitycznego

$$c_{1,a} = \int \frac{x}{a^2x^2 \pm c^2} dx = \frac{1}{2a^2} ln|a^2x^2 \pm c^2| \tag{20}$$

(a) Wykonaj wykres $|c_1 - c_{1,a}| = f(n)$ dla liczby węzłów $n = 2, 3, \ldots, 20$.

(b) Sprawdź ile wynosi suma współczynników kwadratury dla każdego n.

(c) Załącz wykres całkowania funkcji.