Całkowanie numeryczne

K. Kolanowski

26 lutego 2022

1 Wprowadzenie

Całkowanie numeryczne używane jest do obliczenia przybliżonej wartości całki. Metod numerycznego całkowania używa się gdy nie jest możliwe obliczenie całki w sposób analityczny. W wielu systemach sterowania konieczne jest wykonanie całkowania sygnału dyskretnego na potrzeby np. regulatora PID. Wówczas konieczne jest zaimplementowanie metody numerycznego całkowania.
Istnieje szereg różnych metod całkowania numerycznego. W ramach niniejszego ćwiczenia poznamy najbardziej podstawowe.

1.1 Metoda prostokątów

Metoda prostokątów jest najprostszą metodą przybliżenia wartości całki funkcji $f(x)$ za pomocą funkcji stałej (wielomian stopnia 0). Metoda prostokątów ma następującą postać:

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)f(\frac{a+b}{2}) \tag{1}$$

Metoda ta daje dobre wyniki, jeżeli funkcja w przedziale (a, b) zmienia się w niewielkim stopniu. Metoda prostokątów zwana jest również metodą punktu środkowego.

1.2 Metoda trapezów

Rozwinięciem metody prostokątów jest metoda trapezów, w której zamiast przybliżenia funkcji podcałkowej funkcją stałą, stosowane jest przybliżanie za pomocą funkcji liniowej (wielomianem stopnia 1). Metoda trapezów ma postać:

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{2}$$

Dokładność metody trapezów (jak również metody prostokątów) można zwiększyć dzieląc przedział (a, b) na n podprzedziałów, i stosując dla każdego z nich wzór na metodę trapezów. Na koniec należy wszystkie obliczone wartości zsumować. Metoda ta nazywana jest iteracyjną i ma postać:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}\sum_{i=1}^{n}(f(x_i)+f(x_{i+1}) \tag{3}$$

gdzie $h = \frac{b-a}{n}$.

1.3 Metoda Romberga

Metoda Romberga służy do obliczenia wartości całki funkcji $f(x)$ poprzez zastosowanie ekstrapolacji Richardsona na metodzie trapezów.
Niech dany będzie zbiór argumentów $x_0, x_1, \cdots, x_{2^i}$ dzielący przedział (a, b) na 2^i równych części taki, że znane są wartości funkcji $f(x_i) = y_i$. Ponadto oznaczmy przez $h_i = \frac{b-a}{2^i}$ krok całkowania. Wówczas metodę Romberga można wyrazić wzorem rekurencyjnym:

$$\begin{cases} R_{0,i} = h_i \sum_{k=0}^{2^i-1} \left(\frac{f(x_k)+f(x_{k+1})}{2} \right) \\ R_{m,i} = \frac{4^m R_{m-1,i+1} - R_{m-1,i}}{4^m - 1} \end{cases} \tag{4}$$

Metoda Romberga generuje macierz trójkątną kolejnych przybliżeń całki:

$$\begin{array}{llll} R_{0,0} & & & \\ R_{0,1} & R_{1,0} & & \\ R_{0,2} & R_{1,1} & R_{2,0} & \\ R_{0,3} & R_{1,2} & R_{2,1} & R_{3,0} \end{array}$$

2 Zadania

Rozwiąż poniższe zadania, rozwiązanie w formie sprawozdania umieść na serwerze dydaktycznym eKursy w sekcji „Laboratorium 7 - oddaj sprawozdanie".

1. Zaimplementuj metodę prostokątów oraz trapezów dla iteracyjnego obliczania całki dowolnej funkcji. Metody zaimplementuj zgodnie z deklaracjami funkcji:

   ```
   q_rect(a, b, n, dowolna_funkcja(x));
   q_trap(a, b, n, dowolna_funkcja(x));
   ```

   gdzie: `a, b` oznacza granice całkowania, `n` ilość przedziałów całkowania, `dowolna_funkcja(x)` oznacza funkcję podcałkową.

2. Dokonaj sprawdzenia zaimplementowanych metod całkując funkcje $sin(x)$ oraz $cos(x)$ w zakresie od 0 do 2π.

3. Zaimplementuj funkcję generowanie przebiegu prostokątnego, wyrażonego wzorem:

$$f_{square}(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{sin(2\pi(2k-1)\omega t)}{(2k-1)} \tag{5}$$

4. Porównaj metody całkowania prostokątnego oraz trapezowego dla zadania całkowania funkcji prostokątnej. Całkowania dokonaj na 2 okresach funkcji prostokątnej.

5. Wykreśl przebieg funkcji prostokątnej oraz wykres całki tej funkcji dla 2 okresów.

6. Zaimplementuj funkcję całkowania za pomocą metody Romberga.

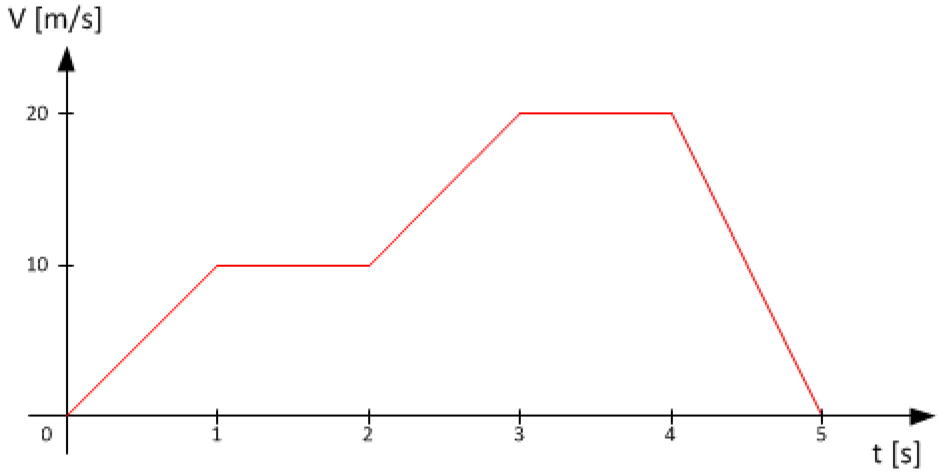
7. Sprawdź działanie tej metody dla zadania całkowania funkcji prostokątnej.

8. Zaimplementuj funkcję impulsową daną wzorem:

$$f_{pulse}(t) = \frac{\tau}{T} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} sin\left(\frac{\pi n \tau}{T}\right) cos\left(\frac{\pi n \tau}{T} t\right) \tag{6}$$

   gdzie: T oznacza okres funkcji, τ oznacza czas trwania impulsu.
   Dokonaj całkowania funkcji impulsowej za pomocą metody Romberga oraz metody prostokątów.
   Wykreśl przebieg funkcji podcałkowej oraz przebieg całek obliczonych obiema metodami.

9. Wykres chwilowej wartości prędkości pewnego robota mobilnego przedstawiono poniżej:



Zaimplementuj funkcję symulującą prędkość tego robota zgodnie z wykresem, następnie oblicz funkcję drogi tego robota.

Dodatkowo oblicz przyspieszenie chwilowe i na wspólnym wykresie umieść:

- funkcję drogi,
- prędkość chwilową robota,
- przyspieszenie chwilowe robota.