

Transformacja Fouriera

Piotr Rogulski

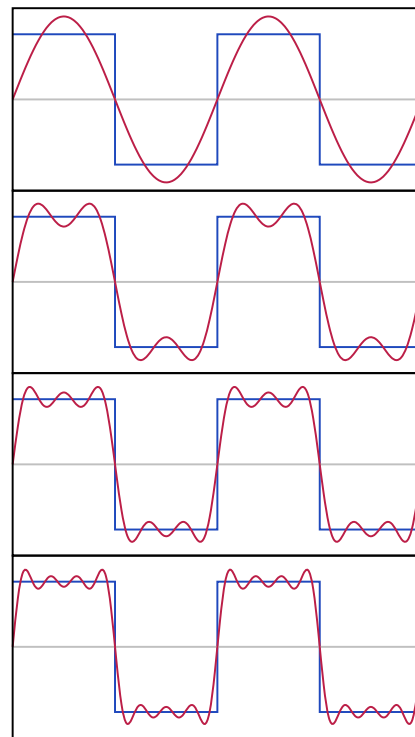
22 stycznia 2024

Spis treści

1	Rys historyczny	2
2	Transformacja Fouriera	2
2.1	Własności transformacji Fouriera	3
3	Dyskretna transformacja Fouriera	3
3.1	Macierz DFT	3
4	Szybka transformacja Fouriera	4
5	Zastosowania	6

1 Rys historyczny

Transformacja Fouriera zawdzięcza swoją nazwę Josephowi Fourierowi, który w 1822 roku opublikował swoją pracę *Théorie analytique de la chaleur* (pol. *Analityczna teoria ciepła*). W niej twierdził, że dowolną funkcję okresową można przedstawić jako sumę szeregu trygonometrycznego. O ile ta teza nie jest prawdziwa bez dodatkowych założeń, to stanowiła ona podstawę do wielu rodzajów transformacji Fouriera. Wcześniej, w 1807 roku, Fourier opublikował swoją pracę *Mémoire sur la propagation de la chaleur dans les corps solides* (pol. *Rozprawa o propagacji ciepła w ciałach stałych*), która to wprowadziła analizę Fouriera oraz szereg Fouriera. Fourier wprowadził ten szereg w celu rozwiązania równania ciepła, które jest równaniem różniczkowym cząstkowym. Później jednak okazało się, że te same metody mogą być stosowane do rozwiązywania przeróżnych problemów fizycznych i matematycznych.



2 Transformacja Fouriera

Transformacja Fouriera jest operatorem liniowym o typie $\mathcal{F} : (\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n) \rightarrow (\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n)$. Przekształca ona funkcję operującą w dziedzinie czasu na funkcję operującą w dziedzinie częstotliwości.

$$\mathcal{F}(f)(\boldsymbol{\xi}) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) e^{-2\pi i(\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\xi})} d\mathbf{x} \quad (1)$$

Ogólna postać definicji transformacji Fouriera (1) pozwala na zdefiniowanie jej dla funkcji o argumentie o dowolnym wymiarze. W wielu zastosowaniach korzysta się jednak z jednowymiarowej transformacji Fouriera:

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i x \xi} dx \quad (2)$$

2.1 Własności transformacji Fouriera

- liniowość: $\mathcal{F}(af + bg) = a\mathcal{F}f + b\mathcal{F}g$
- przesunięcie: $\mathcal{F}(f(x - a)) = e^{-2\pi i a \xi} \mathcal{F}f(\xi)$
- modulacja: $\mathcal{F}(e^{2\pi i a x} f(x)) = \mathcal{F}f(\xi - a)$
- symetria: $\mathcal{F}(\mathcal{F}f)(x) = f(-x)$
- spłot: $\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}f \cdot \mathcal{F}g$
- pochodna: $\mathcal{F}(f') = 2\pi i \xi \mathcal{F}f$

3 Dyskretna transformacja Fouriera

Podstawowa transformata Fouriera jest zdefiniowana dla funkcji ciągłych. Często jednak dostępne wartości nie mają charakteru ciągłego, lecz są próbkowane. W tym celu zdefiniowany został dyskretny odpowiednik transformacji Fouriera (DFT).

$$X_{\mathbf{k}} = \sum_{\mathbf{n}=0}^{N-1} x_{\mathbf{n}} e^{-2\pi i \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}}{N}} \quad (3)$$

W postaci jednowymiarowej:

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-2\pi i \frac{kn}{N}} \quad (4)$$

3.1 Macierz DFT

Definicja (4) pozwala na zapisanie dyskretniej transformacji Fouriera w postaci macierzowej:

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-2\pi i \frac{kn}{N}} \iff X = Wx, \quad \text{gdzie} \quad W_{kn} = e^{-2\pi i kn/N} \quad (5)$$

Elementy macierzy W są postaci $w_{kn} = \omega^{kn}$, gdzie $\omega = e^{-2\pi i/N}$:

$$W = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \dots & \omega^{N-1} \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \dots & \omega^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega^{N-1} & \omega^{2(N-1)} & \dots & \omega^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix} \quad (6)$$

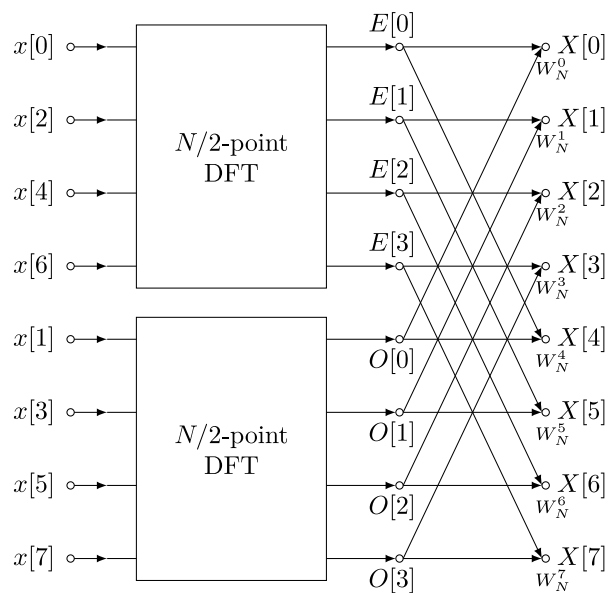
Jest to symetryczna macierz Vandermonde’a dla pierwiastka z jedności: $\omega^N = 1$. Jeżeli dodatkowo jej elementy zostaną przeskalowane przez $1/\sqrt{N}$, to otrzymamy macierz unitarną. Wtedy DFT staje się transformacją unitarną, co pozwala myśleć o niej jako o obrocie układu współrzędnych.

4 Szybka transformacja Fouriera

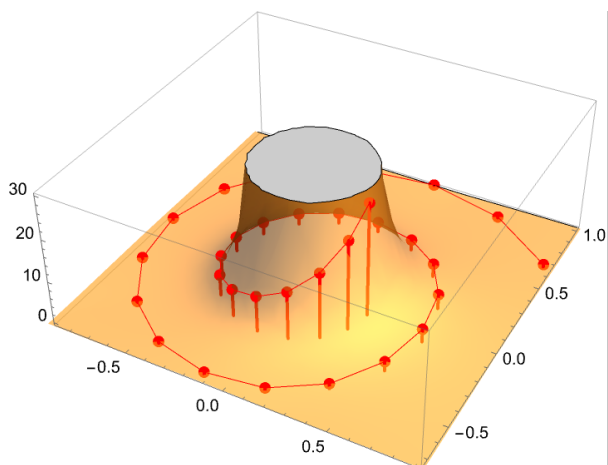
Obliczanie dyskretnej transformacji Fouriera zgodnie z definicją (4) wymaga $\mathcal{O}(N^2)$ operacji. Istnieją jednak algorytmy, które pozwalają na obliczenie DFT w lepszym czasie. Jednym z nich jest algorytm Cooleya-Tukeya z 1965 roku, który wymaga $\mathcal{O}(N \log N)$ operacji.

Jest to algorytm typu *dziel i zwyciężaj*. Pozwala on obliczyć DFT dla $N = N_1 N_2$ elementów za pomocą dwóch DFT dla N_1 i N_2 elementów. Z tego powodu najlepiej sprawuje się dla liczb „gładkich”, czyli takich, które mają wiele małych dzielników — osiąga wtedy złożoność $\mathcal{O}(N \log N)$ (patrz rys. 1).

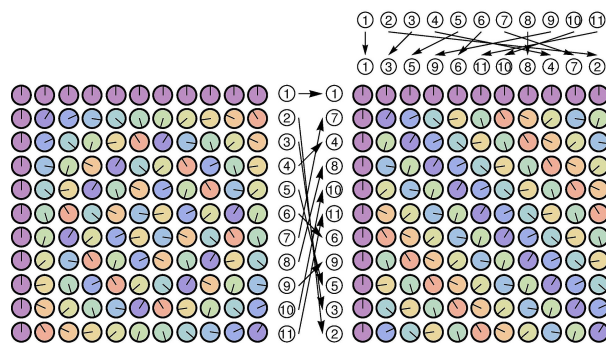
Nie jest to jednak jedyny algorytm obliczania FFT. Innym przykładem jest algorytm Bluesteina, który wykorzystuje Chirp Z-transform — polega on na próbkowaniu sygnału wzdłuż krzywych na płaszczyźnie zespolonej zamiast wzdłuż okręgów, jak w przypadku DFT (rys. 2). Istnieje także algorytm Radera, który optymalizuje operacje na macierzy DFT poprzez sprowadzenie jej do postaci cyklicznej (rys. 3).



Rysunek 1: Schemat FFT dla decymacji Radix-2



Rysunek 2: Chirp Z-transform



Rysunek 3: Algorytm Radera

5 Zastosowania

- **Spektroskopia fourierowska**

W spektroskopii fourierowskiej do analizy widm wykorzystuje się transformację Fouriera. Zamiast bezpośredniej obserwacji widma, korzysta się z interferometru. Pozwala on na badanie intensywności sygnału w zależności od częstotliwości (a więc i długości fali).

- **Analiza równań różniczkowych**

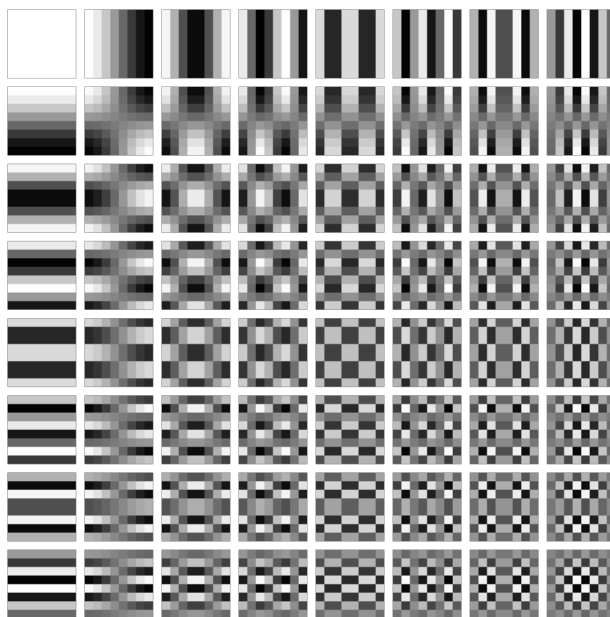
Transformacja Fouriera pozwala uprościć rozwiązywanie równań różniczkowych. Sprowadza ona równania różniczkowe do równań algebraicznych.

Przykład: oscylator harmoniczy

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2x(t) &= \frac{f(t)}{m} \\ -\omega^2X(\omega) - 2i\gamma\omega X(\omega) + \omega_0^2X(\omega) &= \frac{F(\omega)}{m}, \quad \text{gdzie } X(\omega) = \mathcal{F}(x(t)), F(\omega) = \mathcal{F}(f(t)) \\ X(\omega) &= \frac{F(\omega)}{m(\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\gamma\omega)} \\ x(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{i\omega t} d\omega\end{aligned}$$

- **Discrete cosine transform**

Dyskretna transformacja kosinusowa jest podobna do dyskretniej transformacji Fouriera. Różni się ona tym, że operuje na liczbach rzeczywistych, a nie zespolonych — nie uwzględnia zatem przesunięć fazowych. Jest ona szeroko stosowana w kompresji mediów: wiele formatów obrazów i dźwięków, takich jak JPEG, MPEG czy MP3, wykorzystuje DCT. W obrazach JPEG, dane są dzielone na bloki 8×8 pikseli, a następnie stosowana jest DCT na każdym z nich. Pozwala to zapisać każdy z kanałów RGB za pomocą współczynników funkcji bazowych pokazanych na rysunku 4.



Rysunek 4: Częstotliwości DCT dla bloku 8×8 obrazu JPEG

Bibliografia

- [1] James W. Cooley i John W. Tukey. „An Algorithm for the Machine Calculation of Complex Fourier Series”. W: *Mathematics of Computation* 19.90 (1965). Artykuł twórców algorytmu szybkiej transformaty Fouriera.
- [2] Alan V. Oppenheim, Ronald W. Schaffer i John R. Buck. *Discrete-time Signal Processing*. Obszerna książka o przetwarzaniu sygnałów cyfrowych. Zawiera opis transformacji Fouriera oraz algorytmów FFT. 1989.
- [3] John G. Proakis i Dimitris G. Manolakis. *Digital Signal Processing: Principles, Algorithms, and Applications*. Analiza sygnałów cyfrowych, w tym praktyczne zastosowania transformacji Fouriera. 1996.
- [4] Grant Sanderson. *But what is the Fourier Transform? A visual introduction*. Video z serii 3Blue1Brown, w którym autor przedstawia intuicyjne wytłumaczenie transformacji Fouriera. 2018. URL: <https://youtu.be/spUNpyF58BY> (term. wiz. 06.11.2023).
- [5] Edward Charles Titchmarsh. *Introduction to the Theory of Fourier Integrals*. Kompleksowy opis matematycznych podstaw transformacji Fouriera oraz jej zastosowań teoretycznych. 1937.