Transformacja Fouriera

Piotr Rogulski

7 listopada 2023

Agenda

1. Transformacja Fouriera
2. DFT
3. FFT
4. Zastosowania transformacji Fouriera

Transformacja Fouriera

Joseph Fourier (1768–1830)

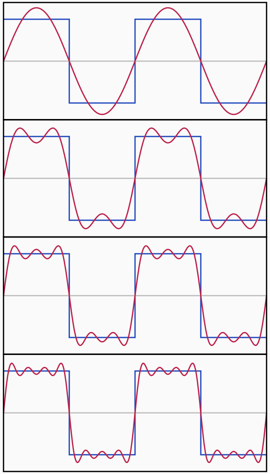
- francuski matematyk i fizyk

Joseph Fourier (1768–1830)

- francuski matematyk i fizyk
- badania wymiany ciepła („Théorie analytique de la chaleur”, 1822)

Joseph Fourier (1768–1830)

- francuski matematyk i fizyk
- badania wymiany ciepła („Théorie analytique de la chaleur”, 1822)
- rozkład funkcji okresowej na szereg trygonometryczny — **szereg Fouriera**



Transformacja Fouriera

Transformacja Fouriera

- operator liniowy

Transformacja Fouriera

- operator liniowy
- przekształca funkcję rzeczywistą na funkcję rzeczywistą
  $\mathcal{F} : (\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n) \to (\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n)$

Transformacja Fouriera

- operator liniowy
- przekształca funkcję rzeczywistą na funkcję rzeczywistą
  $\mathscr{F} : (\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n) \to (\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n)$
- przekształca funkcję w dziedzinie czasu na funkcję w dziedzinie częstotliwości

Transformacja Fouriera

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i x \xi} dx$$

Transformacja Fouriera

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi i x\xi}dx$$

W postaci n-wymiarowej:

$$\mathcal{F}(f)(\boldsymbol{\xi}) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x})e^{-2\pi i(\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\xi})}d\mathbf{x}$$

Własności transformaty Fouriera

Własności transformaty Fouriera

- liniowość: $\mathcal{F}(af + bg) = a\mathcal{F}f + b\mathcal{F}g$

Własności transformaty Fouriera

- liniowość: $\mathcal{F}(af + bg) = a\mathcal{F}f + b\mathcal{F}g$
- przesunięcie: $\mathcal{F}(f(x-a)) = e^{-2\pi i a\xi}\mathcal{F}f(\xi)$
- modulacja: $\mathcal{F}(e^{2\pi i a x}f(x)) = \mathcal{F}f(\xi - a)$

Własności transformaty Fouriera

- liniowość: $\mathcal{F}(af + bg) = a\mathcal{F}f + b\mathcal{F}g$
- przesunięcie: $\mathcal{F}(f(x-a)) = e^{-2\pi i a\xi}\mathcal{F}f(\xi)$
- modulacja: $\mathcal{F}(e^{2\pi i a x}f(x)) = \mathcal{F}f(\xi - a)$
- symetria: $\mathcal{F}(\mathcal{F}f)(x) = f(-x)$

Własności transformaty Fouriera

- liniowość: $\mathcal{F}(af + bg) = a\mathcal{F}f + b\mathcal{F}g$
- przesunięcie: $\mathcal{F}(f(x-a)) = e^{-2\pi i a\xi}\mathcal{F}f(\xi)$
- modulacja: $\mathcal{F}(e^{2\pi i a x}f(x)) = \mathcal{F}f(\xi - a)$
- symetria: $\mathcal{F}(\mathcal{F}f)(x) = f(-x)$
- konwolucja: $\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}f \cdot \mathcal{F}g$

Własności transformaty Fouriera

- liniowość: $\mathcal{F}(af + bg) = a\mathcal{F}f + b\mathcal{F}g$
- przesunięcie: $\mathcal{F}(f(x-a)) = e^{-2\pi i a\xi}\mathcal{F}f(\xi)$
- modulacja: $\mathcal{F}(e^{2\pi i a x}f(x)) = \mathcal{F}f(\xi - a)$
- symetria: $\mathcal{F}(\mathcal{F}f)(x) = f(-x)$
- konwolucja: $\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}f \cdot \mathcal{F}g$
- pochodna: $\mathcal{F}(f') = 2\pi i\xi\mathcal{F}f$

DFT

Discrete Fourier Transform

Dyskretna transformacja Fouriera

- transformacja Fouriera dla funkcji dyskretnych

Dyskretna transformacja Fouriera

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-2\pi i \frac{kn}{N}}$$

Dyskretna transformacja Fouriera

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-2\pi i \frac{kn}{N}}$$

W postaci n-wymiarowej:

$$X_{\mathbf{k}} = \sum_{\mathbf{n}=\mathbf{0}}^{\mathbf{N}-\mathbf{1}} x_{\mathbf{n}} e^{-2\pi i \frac{\mathbf{k}\cdot\mathbf{n}}{\mathbf{N}}}$$

Macierz DFT

- $X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-2\pi i \frac{kn}{N}} \iff X = Wx$, gdzie $W_{kn} = e^{-2\pi i kn/N}$

Macierz DFT

- $X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-2\pi i \frac{kn}{N}} \iff X = Wx$, gdzie $W_{kn} = e^{-2\pi ikn/N}$
- Elementy W są postaci $w_{kn} = \omega^{kn}$, gdzie $\omega = e^{-2\pi i/N}$

Macierz DFT

- $X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-2\pi i \frac{kn}{N}} \iff X = Wx$, gdzie $W_{kn} = e^{-2\pi i kn/N}$
- Elementy W są postaci $w_{kn} = \omega^{kn}$, gdzie $\omega = e^{-2\pi i/N}$
- $W = \frac{1}{N} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \cdots & \omega^{N-1} \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \cdots & \omega^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega^{N-1} & \omega^{2(N-1)} & \cdots & \omega^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix}$

Macierz DFT

- $X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-2\pi i \frac{kn}{N}} \iff X = Wx$, gdzie $W_{kn} = e^{-2\pi i kn/N}$
- Elementy W są postaci $w_{kn} = \omega^{kn}$, gdzie $\omega = e^{-2\pi i/N}$
- $W = \frac{1}{N} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \cdots & \omega^{N-1} \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \cdots & \omega^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega^{N-1} & \omega^{2(N-1)} & \cdots & \omega^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix}$
- W jest macierzą Vandermonde'a dla pierwiastka z jedności: $\omega^N = 1$

FFT

Fast Fourier Transform

Dlaczego FFT?

- potrzeba szybkiego obliczania DFT
- złożoność obliczeniowa DFT: $O(N^2)$

Dlaczego FFT?

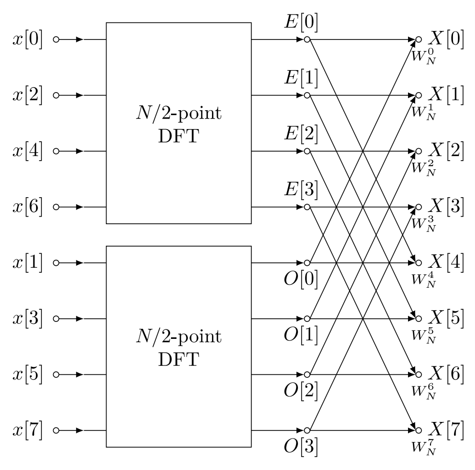
- potrzeba szybkiego obliczania DFT
- złożoność obliczeniowa DFT: $O(N^2)$
- złożoność obliczeniowa FFT: $O(N \log N)$

Algorytm Cooleya-Tukeya (1965)

- dziel i zwyciężaj
- oblicza DTF rozmiaru $N = N_1 N_2$ za pomocą DFT rozmiaru N_1 i N_2
- osiąga złożoność $O(N \log N)$ dla liczb „gładkich”

Algorytm Cooleya-Tukeya (1965)

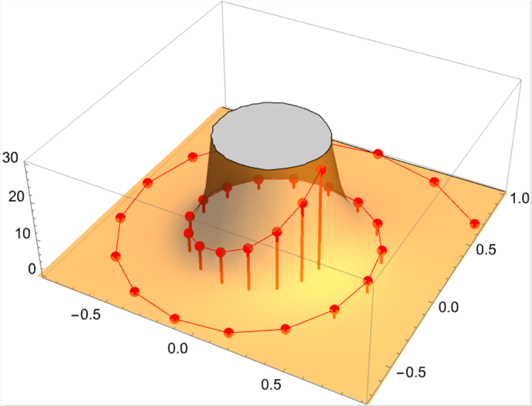
- dziel i zwyciężaj
- oblicza DTF rozmiaru $N = N_1 N_2$ za pomocą DFT rozmiaru N_1 i N_2
- osiąga złożoność $O(N \log N)$ dla liczb „gładkich”



FFT dla decymacji Radix-2

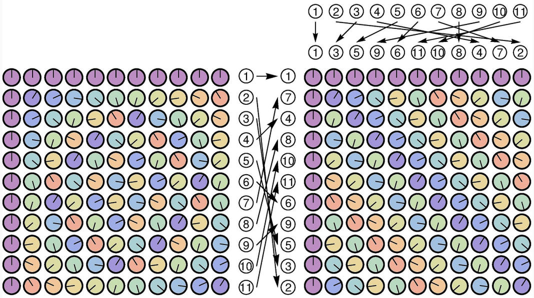
Inne algorytmy FFT

- algorytm Bluesteina — Chirp Z-transform
- algorytm Radera
- Hexagonal fast Fourier transform



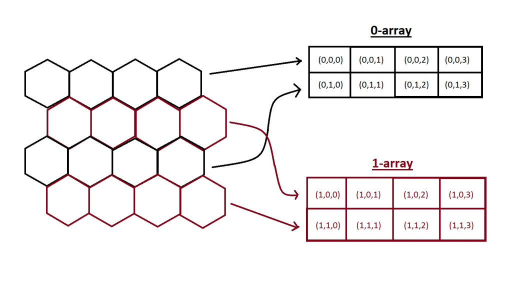
Inne algorytmy FFT

- algorytm Bluesteina — Chirp Z-transform
- algorytm Radera
- Hexagonal fast Fourier transform



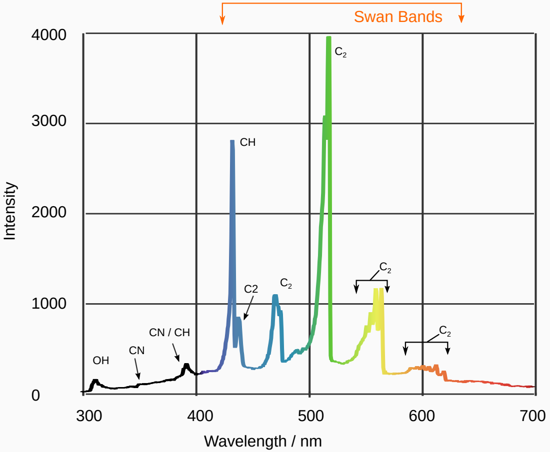
Inne algorytmy FFT

- algorytm Bluesteina — Chirp Z-transform
- algorytm Radera
- Hexagonal fast Fourier transform



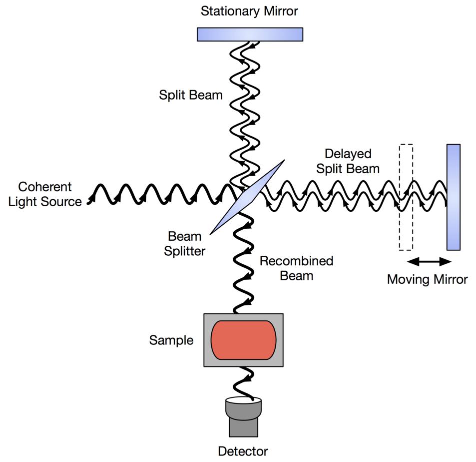
Zastosowania transformacji Fouriera

Spektroskopia fourierowska



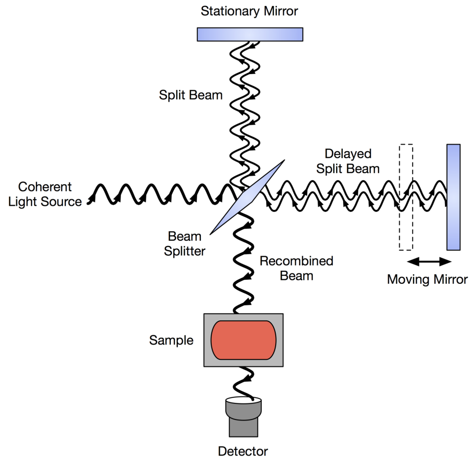
Spektrum emisyjne płomienia palnika butanowego

FTIR

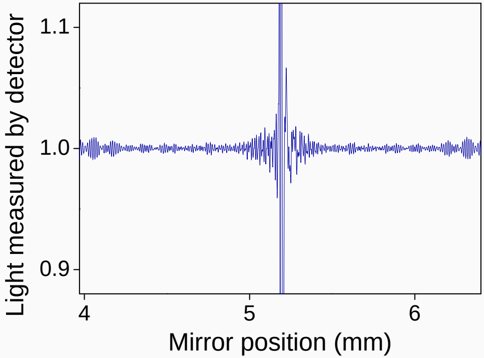


Interferometr

FTIR



Interferometr



Interferogram

Analiza równań różniczkowych

Analiza równań różniczkowych

- Transformacja Fouriera pozwala uprościć rozwiązywanie równań różniczkowych

Analiza równań różniczkowych

- Transformacja Fouriera pozwala uprościć rozwiązywanie równań różniczkowych
- Przykład: oscylator harmoniczny: $\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + 2\gamma \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 x(t) = \frac{f(t)}{m}$

Analiza równań różniczkowych

- Transformacja Fouriera pozwala uprościć rozwiązywanie równań różniczkowych
- Przykład: oscylator harmoniczny: $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + 2\gamma\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 x(t) = \frac{f(t)}{m}$
- Po transformacji obu stron: $-\omega^2 X(\omega) - 2i\gamma\omega X(\omega) + \omega_0^2 X(\omega) = \frac{F(\omega)}{m}$ gdzie $X(\omega) = \mathcal{F}(x(t))$ i $F(\omega) = \mathcal{F}(f(t))$

Analiza równań różniczkowych

- Transformacja Fouriera pozwala uprościć rozwiązywanie równań różniczkowych
- Przykład: oscylator harmoniczny: $\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + 2\gamma\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 x(t) = \frac{f(t)}{m}$
- Po transformacji obu stron: $-\omega^2 X(\omega) - 2i\gamma\omega X(\omega) + \omega_0^2 X(\omega) = \frac{F(\omega)}{m}$ gdzie $X(\omega) = \mathcal{F}(x(t))$ i $F(\omega) = \mathcal{F}(f(t))$
- Jest to równanie algebraiczne: $X(\omega) = \frac{F(\omega)}{m(\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\gamma\omega)}$

Analiza równań różniczkowych

- Transformacja Fouriera pozwala uprościć rozwiązywanie równań różniczkowych
- Przykład: oscylator harmoniczny: $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + 2\gamma\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 x(t) = \frac{f(t)}{m}$
- Po transformacji obu stron: $-\omega^2 X(\omega) - 2i\gamma\omega X(\omega) + \omega_0^2 X(\omega) = \frac{F(\omega)}{m}$ gdzie $X(\omega) = \mathcal{F}(x(t))$ i $F(\omega) = \mathcal{F}(f(t))$
- Jest to równanie algebraiczne: $X(\omega) = \frac{F(\omega)}{m(\omega_0^2-\omega^2-2i\gamma\omega)}$
- Aby otrzymać rozwiązanie w dziedzinie czasu, należy obliczyć odwrotną transformatę Fouriera

Analiza równań różniczkowych

- Transformacja Fouriera pozwala uprościć rozwiązywanie równań różniczkowych
- Przykład: oscylator harmoniczny: $\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + 2\gamma\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 x(t) = \frac{f(t)}{m}$
- Po transformacji obu stron: $-\omega^2 X(\omega) - 2i\gamma\omega X(\omega) + \omega_0^2 X(\omega) = \frac{F(\omega)}{m}$ gdzie $X(\omega) = \mathcal{F}(x(t))$ i $F(\omega) = \mathcal{F}(f(t))$
- Jest to równanie algebraiczne: $X(\omega) = \frac{F(\omega)}{m(\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\gamma\omega)}$
- Aby otrzymać rozwiązanie w dziedzinie czasu, należy obliczyć odwrotną transformatę Fouriera
- $x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{i\omega t} d\omega$

Discrete cosine transform

- dyskretna transformacja kosinusowa

Discrete cosine transform

- dyskretna transformacja kosinusowa
- podobna do DFT, ale wykorzystuje tylko liczby rzeczywiste

Discrete cosine transform

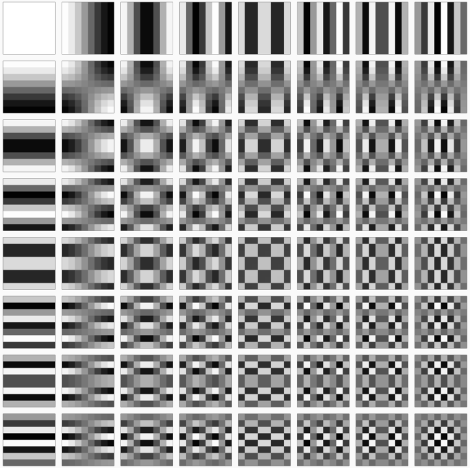
- dyskretna transformacja kosinusowa
- podobna do DFT, ale wykorzystuje tylko liczby rzeczywiste
- stosowana w kompresji JPEG, MPEG, MP3

Discrete cosine transform

- dyskretna transformacja kosinusowa
- podobna do DFT, ale wykorzystuje tylko liczby rzeczywiste
- stosowana w kompresji JPEG, MPEG, MP3

Discrete cosine transform

- dyskretna transformacja kosinusowa
- podobna do DFT, ale wykorzystuje tylko liczby rzeczywiste
- stosowana w kompresji JPEG, MPEG, MP3



Częstotliwości DCT dla obrazu JPEG

Bibliografia

Bibliografia

[1] James W. Cooley i John W. Tukey. **„An Algorithm for the Machine Calculation of Complex Fourier Series”.** W: *Mathematics of Computation* 19.90 (1965). Artykuł twórców algorytmu szybkiej transformaty Fouriera.

[2] Alan V. Oppenheim, Ronald W. Schafer i John R. Buck. ***Discrete-time Signal Processing*.** Obszerna książka o przetwarzaniu sygnałów cyfrowych. Zawiera opis transformacji Fouriera oraz algorytmów FFT. 1989.

[3] John G. Proakis i Dimitris G. Manolakis. ***Digital Signal Processing: Principles, Algorithms, and Applications*.** Analiza sygnałów cyfrowych, w tym praktyczne zastosowania transformacji Fouriera. 1996.

Bibliografia

[4] Grant Sanderson. ***But what is the Fourier Transform? A visual introduction.*** Wideo z serii 3Blue1Brown, w którym autor przedstawia intuicyjne wytłumaczenie transformacji Fouriera. 2018. URL: `https://youtu.be/spUNpyF58BY` (term. wiz. 06. 11. 2023).

[5] Edward Charles Titchmarsh. ***Introduction to the Theory of Fourier Integrals.*** Kompleksowy opis matematycznych podstaw transformacji Fouriera oraz jej zastosowań teoretycznych. 1937.