Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka

Lista zadań nr 8. Tydzień rozpoczynający się 27. kwietnia

Zadania

1. O zmiennej losowej X wiadomo, że
$$P(X > t) = \alpha e^{-\lambda t} + \beta e^{-\mu t}, \ \ t \geqslant 0.$$
$\alpha + \beta = 1, \ \alpha, \beta \geqslant 0, \ \lambda, \mu > 0$. Obliczyć wartość oczekiwaną X.

[Do zadań 2–4] Zmienna losowa X_n ma gęstość $f_n(x) = \dfrac{c_n}{x^{n+1}}$ dla $x \in [c_n, \infty)$.

2. Wyznaczyć c_n oraz $\mathrm{E}(X_n)$.
3. Wyznaczyć gęstość zmiennej $Z_n = \ln X_n$.
4. Dla jakich wartości m istnieje wartość oczekiwana $\mathrm{E}(X_n^{m+1})$?
5. X jest ciągłą zmienną losową określoną na przedziale $(0, a)$. Wykazać, że $\mathrm{E}(X) = \displaystyle\int_0^a (1 - F(t))\,dt$.
6. a). Dane są gęstości $\{f_i\}_{i=1}^n$ oraz ciąg skalarów $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ takich, że $\displaystyle\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1, \ \alpha_i \geqslant 0$. Wykazać, że $f(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^n \alpha_i f_i(x)$ jest gęstością pewnej zmiennej losowej.
b). Niezależne zmienne Y_1, Y_2 mają rozkład jednostajny na $[0, 1]$. Wyznaczyć gęstość zmiennej $Z = \dfrac{Y_1 + Y_2}{2}$.

[Do zadań 7–8] Zmienna losowa X podlega rozkładowi normalnemu z parametrami jak poniżej:
$$N \sim \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 38 & -5 \\ -5 & 4 \end{bmatrix} \right).$$

7. Niech $Y_1 = 3X_1 + X_2, \ Y_2 = -4X_1 + 2X_2$. Znaleźć rozkład zmiennej Y.
8. Niech $Y_1 = 2X_1 - 3X_2, \ Y_2 = 4X_1 + 2X_2$. Jaka jest wartość współczynnika korelacji ρ_{y_1,y_2}?

[Do zadań 9–11] Zakładamy, że zmienne X_1, X_2, X_3 są niezależne i mają ten sam ciągły rozkład o dystrybuancie $F(x)$ i gęstości $f(x)$. Tworzymy nowe zmienne losowe, mianowicie: $X_{(1)} = \min\{X_1, X_2, X_3\}$, $X_{(2)}$ to druga co do wielkości wartość, $X_{(3)} = \max\{X_1, X_2, X_3\}$.

9. Udowodnić, że $f_{(2)}(x) = 6 \cdot F(x) \cdot (1 - F(x)) \cdot f(x)$.

[Do zadań 10–11] Dodatkowo zakładamy, że $X_k \sim \mathrm{U}[0, a], \ \ k = 1, 2, 3$.

10. Niech $Y_1 = \dfrac{X_1 + X_2 + X_3}{3}, \ \ Y_2 = X_{(2)}, \ \ Y_3 = \dfrac{X_{(1)} + X_{(3)}}{2}$. Udowodnić, że wartości oczekiwane są takie same: $\mathrm{E}(Y_1) = \mathrm{E}(Y_2) = \mathrm{E}(Y_3) = \dfrac{a}{2}$.
Wsk.: $\mathrm{E}(Y_1)$ z własności wartości oczekiwanej, $\mathrm{E}(Y_2)$ – całkowanie, $Y_3 = \dfrac{3Y_1 - Y_2}{2}$.
11. Wykazać, że: $\mathrm{V}(Y_1) = \dfrac{a^2}{36}, \ \mathrm{V}(Y_2) = \dfrac{a^2}{20}$.
Wsk.: Wariancja sumy niezależnych zmiennych losowych, $\mathrm{E}(Y_2^2)$ poprzez całkowanie.

12. **(E2)** Niech (X, Y) oznacza wybrany losowo punkt na płaszczyźnie. Załóżmy, że współrzędne X i Y są niezależne i podlegają rozkładowi $N(0,1)$. Od zmiennej (X, Y) przechodzimy do zmiennej (R, Θ), gdzie R i Θ są współrzędnymi biegunowymi punktu (X, Y). Wykazać, że gęstość zmiennej (R, Θ) określona jest wzorem

$$g(r, \Theta) = \frac{1}{2\pi}\, r \cdot \exp\left\{-\frac{r^2}{2}\right\}, \quad \text{gdzie} \;\; 0 < \Theta < 2\pi,\; 0 < r < \infty.$$

13. **(E2)** Znaczenie zmiennej (X, Y) niech będzie takie, jak w poprzednim zadaniu. Niech

$$D = R^2 = X^2 + Y^2, \quad \Theta = \tan^{-1}\frac{Y}{X}.$$

(a) Udowodnić, że gęstość zmiennej (D, Θ) to: $f(d, \Theta) = \dfrac{1}{2}\exp\left\{-\dfrac{d}{2}\right\}\dfrac{1}{2\pi}$,
gdzie $0 < d < \infty, \quad 0 < \Theta < 2\pi$.
(b) Sprawdzić czy zmienne D i Θ są niezależne.
(c) Jaki rozkład ma zmienna D?

Witold Karczewski