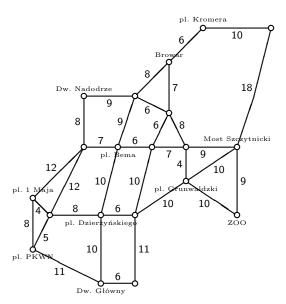
## Zadania z matematyki dyskretnej, lista nr 12

- 1. Zastosuj przeszukiwanie grafu spójnego w głąb do znajdowania wierzchołka rozcinającego, tzn. takiego którego usunięcie rozspaja graf (jeśli taki wierzchołek istnieje). Twoja procedura powinna mieć złożoność O(m+n).
- 2. Zastosuj przeszukiwanie grafu w głąb do sprawdzania, czy graf jest dwudzielny. Twoja procedura powinna mieć złożoność O(m+n).
- 3. Topologiczne porządkowanie wierzchołków. Niech G będzie digrafem acyklicznym (bez skierowanych cykli). Napisz procedurę, która w czasie O(n+m) przyporządkowuje numery wierzchołkom w taki sposób, że gdy (i,j) jest łukiem w G, to i < j.
- 4. Używając algorytmów Prima-Dijkstry i Kruskala, wyznacz najkrótszy podzbiór dróg z Rysunku poniżej taki, że po tym podzbiorze dróg można dojechać z każdego węzła tej sieci do każdego innego. Ponumeruj krawędzie tego podzbioru w kolejności, w jakiej dołączają je do niego oba te algorytmy.
- Używając algorytmu Dijkstry wyznacz drzewa najkrótszych dróg z Dw. Głównego, pl. Grunwaldzkiego i Browaru w sieci z Rys. 1. Ponumeruj krawędzie drzew w kolejności dołączania przez algorytm.



6. (Dualny algorytm chciwości) Udowodnij, że po wykonaniu kroków 1 i 2, T jest najkrótszym drzewem rozpinającym grafu G.

Krok 1: Niech 
$$c(e_1) > c(e_2) > ... > c(e_m)$$
;  
Krok 2:  $T := E(G)$ ;  
for  $e_1, e_2, ..., e_m$  do  
if  $T \setminus e_i$  jest grafem spójnym  
then  $T := T \setminus e_i$ .

- 7. Pokaż, w jaki sposób można znależć najdłuższe drzewo rozpinające grafu z wagami.
- 8. Podaj szybką implementację algorytmu Warshalla dla obliczania przechodniego domknięcia grafu o 32 wierzchołkach. Macierz sąsiedztwa zawarta jest w postaci tablicy 32 słów 32-bitowych reprezentujących kolejne wiersze. Możesz wykonywać operacje logiczne na słowach 32 bitowych.
- Zmodyfikuj tak algorytm Warshalla-Floyda, aby znajdował nie tylko długości najkrótszych drogi między parami wierzchołków, ale również te drogi.
- 10. W digrafie może istnieć wiele minimalnych dróg z wierzchołka v do u. Zmodyfikuj tak algorytm Dijkstry, żeby wyznaczał nie drzewo najkrótszych dróg, a acykliczny digraf będący sumą najkrótszych dróg z wierzchołka v do wszystkich innych.
- 11. Drzewo z dodaną jedną krawędzią nazywamy 1-drzewem. Zaproponuj (działający w rozsądnym czasie) algorytm znajdujący najkrótsze 1drzewo spinające grafu z wagami i uzasadnij jego poprawność.
- 12. Niech G będzie grafem z nieujemnymi wagami na krawędziach. Niech  $\mathrm{MST}(G)$  oznacza długość najlżejszego drzewa spinającego w G, a  $\mathrm{TSP}(G)$  oznacza długość najkrótszej drogi komiwojażera w G (komiwojażer może odwiedzać wierzchołki wielokrotnie). Wykaż, że

$$MST(G) < TSP(G) < 2 \cdot MST(G)$$
.

- 13. Dana jest sieć, w której każda krawędź poza pojemnością ma określony minimalny przepływ dla każdego łuku. Dany mamy pewien dopuszczalny przepływ f w tej sieci. Pokaż jak wyznaczyć maksymalny i minimalny przepływ w tej sieci.
- 14. (Twierdzenie Mengera) Graf jest krawędziowo k-spójny gdy jest spójny i usunięcie z niego co najwyżej k-1 krawędzi nie rozspójnia go. Używając przepływów w sieciach pokaż, że G jest krawędziowo k spójny wtedy i tylko wtedy gdy między każdymi dwoma wierzchołkami istnieje k krawędziowo rozłącznych dróg.
- 15. (Wersja wierzchołkowa Twierdzenia Mengera) Graf jest k-spójny gdy jest spójny i usunięcie z niego co najwyżej k-1 wierzchołków nie rozspójnia go. Pokaż, że G jest k-spójny wtedy i tylko wtedy gdy między każdymi dwoma niesąsiednimi wierzchołkami istnieje k wierzchołkowo rozłącznych dróg.