

Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka

Lista zadań nr 2. 15. lub 17. marca

Zadania

1. Niech Σ będzie σ -ciałem zbiorów.

(a) Sprawdzić, że $\emptyset \in \Sigma$.

(b) Załóżmy, że $A_k \in \Sigma$, dla $k = 1, 2, 3, \dots$. Wykazać, że $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k \in \Sigma$.

2. Niech $\Omega = \{a, b, c\}$.

(a) Opisać σ -ciała zbiorów tej przestrzeni zdarzeń.

(b) Podać przykład funkcji X, Y takich, że X jest zmienną losową, a Y nie jest zmienną losową.

3. Niech $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ oraz $S = \{1, 4\}$. Wyznaczyć najmniejsze σ -ciało zbiorów zawierające S .

4. Wyznaczyć dystrybuantę i obliczyć wartość oczekiwaną zmiennej X o rozkładzie

x_i	2	3	4	5
p_i	0.2	0.4	0.1	0.3

5. Dystrybuanta F zmiennej losowej X określona jest następująco:

x	$(-\infty; -2]$	$(-2; 3]$	$(3; 5]$	$(5; \infty)$
$F(x)$	0	0.2	0.7	1

Podać postać funkcji gęstości $f(x)$.

6. Niech X będzie zmienną losową typu dyskretnego. Udowodnić, że $E(aX + b) = a E(X) + b$.

7. Niech X będzie zmienną losową typu ciągłego. Udowodnić, że $E(aX + b) = a E(X) + b$.

8. **2p.** Udowodnić, że $\Gamma(p) \Gamma(q) = \Gamma(p+q) B(p, q)$, gdzie $p, q \in \mathbb{R}^+$ (czyli wszystkie potrzebne całki istnieją).

9. **2p.** Sprawdzić, że

- (a) $B(p, q+1) = B(p, q) \frac{q}{p+q}$,
(b) $B(p, q) = B(p, q+1) + B(p+1, q)$.

DEF. Funkcją beta nazywamy wartość całki

$$B(p, q) = \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt, \quad p > 0, q > 0.$$