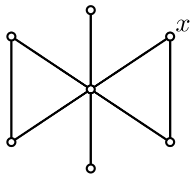
6 grudnia 2021

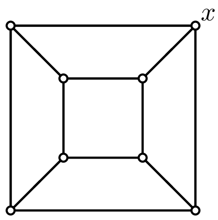
Zadania z matematyki dyskretnej, lista nr 9

1. *Problem przewoźnika.* Przewoźnikowi powierzono przewiezienie przez rzekę wilka, kozy i kosza z kapustą. Oprócz przewoźnika łódka może pomieścić tylko jeden z tych przedmiotów. Jak musi postąpić przewoźnik, jeżeli nie może pozostawić samych ani wilka z kozą, ani kozy z kapustą? Narysuj graf ilustrujący rozwiązanie tego problemu.

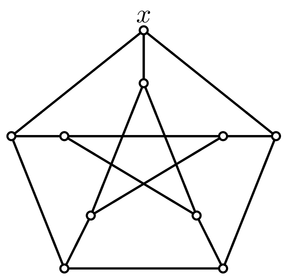
2. Oblicz rzędy grup automorfizmów (izomorfizmów na siebie) G grafu z Rys. 1 i grafu kostki 3–wymiarowej (Rys. 2). W tym celu oblicz dla każdego z nich $|G_x|$ i $|O_x|$.



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

3. Wykonaj polecenie z poprzedniego zadania dla grafu Petersena (Rys. 3).

4. Wykaż, że z dokładnością do izomorfizmu, istnieją dokładnie cztery grafy z trzema wierzchołkami i jedenaście z czterema wierzchołkami.

5. Narysuj wszystkie nieizomorficzne sześciowierzchołkowe grafy 3-regularne.

6. Przez Q_k oznaczamy graf k-wymiarowej kostki, tj. wierzchołkami w Q_k są wszystkie k-elementowe ciągi zer i jedynek, oraz dwa wierzchołki są sąsiednie wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiadające im ciągi różnią się dokładnie jedną współrzędną. Wykaż, że $n(Q_k) = 2^k$ i $m(Q_k) = k2^{k-1}$. Udowodnij, że Q_k jest grafem dwudzielnym.

7. Niech $V = \{1, 2, \ldots, n\}$. Określ liczbę nieidentycznych
   (a) grafów prostych o zbiorze wierzchołków V.
   (b) grafów o zbiorze wierzchołków V i m krawędziach, jeśli dopuszczamy pętle i krawędzie wielokrotne.
   (c) digrafów jak w poprzednim podpunkcie.

8. Udowodnij, że w dwudzielnym grafie o n wierzchołkach, liczba krawędzi jest równa co najwyżej $\lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$.

9. Udowodnij, że przynajmniej jeden z grafów $G, \bar{G}$ jest spójny ($\bar{G}$ to dopełnienie G).

10. Udowodnij, że graf prosty $G = (V, E)$ jest spójny wtedy i tylko wtedy, gdy przynajmniej dwa grafy G_v, będące wynikiem usunięcia z G wierzchołka v z przyległymi krawędziami, są spójne ($n(G) > 2$).

11. Udowodnij, że w grafie spójnym każde dwie najdłuższe drogi proste mają wspólny wierzchołek.

12. Udowodnij, że graf prosty o n wierzchołkach ma co najwyżej $\frac{(n-p)(n-p+1)}{2}$ krawędzi, gdzie p jest liczbą składowych spójności. Ile ma on co najmniej krawędzi przy p składowych spójności?

13. Każdą cząsteczkę węglowodoru o wzorze sumarycznym C_kH_{2k+2} można przedstawić w postaci grafu (spójnego). W grafie tym krawędzie oznaczają wiązania chemiczne. Każdy atom wodoru (H) związany jest z jednym innym atomem, a każdy atom węgla (C) związany jest z czterema innymi atomami. Pokaż, że graf ten dla węglowodoru C_kH_{2k+2} jest drzewem. Każde dwa nieizomorficzne grafy tego typu wyznaczają różne izomery. Ile jest różnych izomerów C_5H_{12}?

14. Niech $d_1, d_2, \ldots, d_n$ będzie ciągiem liczb naturalnych (dodatnich). Pokaż, że d_i jest ciągiem stopni wierzchołków pewnego drzewa **wtedy i tylko wtedy**, gdy
$$\sum d_i = 2(n-1).$$

15. Niech l_1 oznacza liczbę wierzchołków wiszących drzewa, a l_2 liczbę wierzchołków stopnia większego niż dwa. Pokaż, że $l_1 \geq l_2 + 2$. Opisz drzewa dla których zachodzi równość.