Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka

Lista zadań nr 4. Tydzień rozpoczynający się 28. marca

Zadania

1. Dla funkcji $f(x,y) = 0.5 \cdot (x+y)\exp\{-(x+y)\}$, gdzie $x > 0$, $y > 0$
   (a) Sprawdzić, czy zmienne losowe X, Y są niezależne.
   (b) Obliczyć momenty m_{10}, m_{01}.
2. Dana jest funkcja $f(x,y) = C\,\exp\left\{-\frac{1}{2}(x^2+2xy+5y^2)\right\}$ dla $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
   (a) Wyznaczyć stałą C.
   (b) Wyznaczyć rozkłady brzegowe.
3. Czy można tak dobrać stałą C, aby funkcja $f_{XY}(x,y) = Cxy + x + y$, dla $0 \leqslant x \leqslant 3$, $1 \leqslant y \leqslant 2$, była gęstością dwuwymiarowej zmiennej losowej?
4. Dana jest funkcja $f_{XY}(x,y) = -xy + x$ dla $0 \leqslant x \leqslant 2$, $0 \leqslant y \leqslant 1$. Sprawdzić, czy zmienne X i Y są niezależne oraz obliczyć ppb $P(1 \leqslant X \leqslant 3,\ 0 \leqslant Y \leqslant 0.5)$.
5. Załóżmy, że $X \sim U[0,1]$ i niech $Y = X^n$. Udowodnić, że $f_Y(y) = \dfrac{y^{1/n-1}}{n}$, dla $0 \leqslant y \leqslant 1$.
6. Niech $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$. Udowodnić, że $V(X) = \lambda$.
7. Niech X będzie ciągłą zmienną losową i niech $Y = F_X(X)$. Udowodnić, że $Y \sim U[0;1]$.
8. Niech $Y = X^2$ (X określona na $\mathbb{R}$). Wykazać, że
   $$f_Y(y) = \frac{f_X(\sqrt{y}) + f_X(-\sqrt{y})}{2\sqrt{y}}, \quad \text{dla } y > 0.$$
9. Zmienna losowa (X,Y) ma gęstość $f(x,y) = 1/\pi$, dla $x^2+y^2 \leqslant 1$. Obliczyć wartości $\mathrm{E}X$, $\mathrm{E}Y$, $\mathrm{E}(X \cdot Y)$. Czy zmienne X, Y są niezależne?
10. Niech $X \sim U[a;b]$. Obliczyć wartości $\mathrm{E}(X), \mathrm{V}(X)$.
11. Niech X podlega standardowemu rozkładowi Cauchy'ego, $f_X(x) = \dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$, $x \in \mathbb{R}$. Udowodnić, że $Y = \dfrac{1}{X}$ ma również standardowy rozkład Cauchy'ego.

Witold Karczewski