

Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka

Lista zadań nr 3. Tydzień rozpoczynający się 21. marca

Zadania

1. Zmienna losowa X ma gęstość $f(x) = 2x$ dla $x \in [0, 1]$. Wyznaczyć dystrybuantę $F(x)$ tej zmiennej oraz gęstość zmiennej $Y = X^2$.
2. Czy prawdą jest, że 13. dzień miesiąca powiązany jest z piątkiem? (1 stycznia 1601 – 31 grudnia 2000)
ZAŁOŻENIA: rok numer n jest przestępny jeżeli $n \equiv_4 0$, pod warunkiem, że $n \not\equiv_{100} 0$; dodatkowo – jeżeli $n \equiv_{400} 0$ (czyli rok 2000), to wcześniejszy warunek jest nieważny. Ile razy w 400-letnim cyklu 13-tym dniem miesiąca był poniedziałek, wtorek, ..., niedziela?

Mówimy, że zmienne X, Y są niezależne, wtedy gdy – w wypadku dyskretnym – spełniony jest warunek $P(X = x_i, Y = y_k) = P(X = x_i) \cdot P(Y = y_k)$.
3. Zmienna X ma rozkład $B(n_1, p)$ a zmienna Y rozkład $B(n_2, p)$. Zmienne są niezależne. Wykazać, że zmienna $Z = X + Y$ ma rozkład $B(n_1 + n_2, p)$.
4. Niezależne zmienne losowe X, Y mają rozkład Poissona z parametrami λ_1 i λ_2 . Wykazać, że zmienna $Z = X + Y$ ma rozkład Poissona z parametrem $\lambda_1 + \lambda_2$.
5. Zmienna losowa X ma gęstość $f(x) = 1.5 \cdot \sqrt{x}$ dla $x \in [0, 1]$. Wyznaczyć dystrybuantę $F(x)$ tej zmiennej oraz gęstość zmiennej $Y = X^2$.

Gęstość 2-wymiarowej zmiennej losowej (X, Y) to $f(x, y) = 3xy$ na obszarze ograniczonym prostymi $y = 0$, $y = x$, $y = 2 - x$.
6. Wyznaczyć gęstości brzegowe $f_1(x), f_2(y)$.
7. Obliczyć wartość oczekiwaną zmiennej brzegowej Y . Czy zmienne X, Y są niezależne? (odpowiedź uzasadnić)
8. Zmienna losowa (X, Y) ma gęstość postaci $f(x) = 30x^2y$ na obszarze ograniczonym prostymi $y = 0$, $x = 0$, $y = 2 - 2x$. Wyznaczyć gęstość brzegową $f_1(x)$ oraz wartość oczekiwaną EX .
9. Czytelnie i starannie - bez korzystania z notatek - napisać wielkie i małe greckie litery: alfę α , betę β , (d)zetę ζ , etę η , lambdę λ , chi χ , ksi ξ , fi ϕ , rho ρ .
10. (a) Niech $X \sim U[-2, 2]$. Znaleźć rozkład zmiennej $Y = |X|$.
(b) Dla $X \sim U[-1, 1]$ wyznaczyć rozkłady zmiennych $Y = X^3$, $Z = X^2$.
11. Niech X będzie zmienną o rozkładzie geometrycznym ($X \sim \text{Geom}(p)$). Udowodnić, że $V(X) = \frac{1-p}{p^2}$.