

# Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka

## Lista zadań nr 7. Tydzień rozpoczynający się 20. kwietnia

1. Wykazać, że dla rozkładu Cauchy'ego wartość oczekiwana nie istnieje.

$$f(x) = \frac{1}{\pi \cdot (1 + x^2)}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

2. Zmienne losowe  $X_1, X_2, \dots, X_n$  są niezależne i mają ten sam rozkład. Dodatkowo,  $E(X_i) \neq 0$ .

$$\text{Znaleźć wartość oczekiwaną zmiennej } Y_k = \frac{\sum_{j=1}^k X_j}{\sum_{i=1}^n X_i}.$$

3. Załóżmy, że istnieje  $E(X^2)$ . Udowodnić, że istnieje też  $E(X)$ .

4. Dystrybucja zmiennej losowej  $X$  to  $F_X(x) = 1 - \frac{9}{x^2}$ , dla  $x \in [3, \infty)$ . Znaleźć wartość oczekiwaną i wariancję tej zmiennej.

5. Dane są niezależne zmienne losowe  $X, Y$  o rozkładzie  $U[0, 1]$ . Niech  $x, y$  będą wylosowanymi wartościami zmiennych  $X, Y$ . Odcinek  $[0, 1]$  podzielony jest zatem na trzy części (być może jedna część ma długość 0). Jakie jest prawdopodobieństwo, że z tych trzech części można utworzyć trójkąt?

[Do zadań 6–7] Niech  $(X_1, X_2)$  będzie dwuwymiarową zmienną losową o gęstości  $f(x_1, x_2) = C \cdot x^2 y^2$ , dla  $0 < x_1^2 + x_2^2 < 1$ .

6. Znaleźć wartość stałej  $C$ .

7. Znaleźć wartość oczekiwaną  $E(X_1)$ .

8. Zmienna  $(X_1, X_2)$  ma gęstość postaci  $f(x_1, x_2) = \frac{1}{\pi}$ , dla  $0 < x_1^2 + x_2^2 < 1$ . Niech  $X_1 = Y_1 \cos Y_2$ ,  $X_2 = Y_1 \sin Y_2$ , gdzie  $0 < Y_1 < 1$ ,  $0 \leq Y_2 \leq 2\pi$ . Znaleźć gęstość  $g(y_1, y_2)$  zmiennej  $(Y_1, Y_2)$ . Sprawdzić czy zmienne  $Y_1, Y_2$  są niezależne.

9. Dana jest  $n$ -wymiarowa zmienna losowa  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^T$ . Zmienną  $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)^T$  określamy następująco:

$$Y_1 = \bar{\mathbf{X}}, \quad Y_k = X_k - \bar{\mathbf{X}} \quad \text{dla } k = 2, \dots, n.$$

Znaleźć wartość Jacobianu

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial x_2}{\partial y_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial y_1} & \frac{\partial x_n}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial y_n} \end{vmatrix}.$$

[Do zadań 10–11] Boki prostokąta są niezależnymi zmiennymi losowymi  $X_1$  i  $X_2$  o rozkładzie  $U[1, 2]$ .  $Y_1 = 2X_1 + 2X_2$  jest obwodem tego prostokąta,  $Y_2 = X_1 X_2$  oznacza pole tego prostokąta.

10. **E1** Znaleźć wartości oczekiwane i wariancje zmiennych  $Y_1, Y_2$ . (Odp.: 6,  $2/3$  dla  $Y_1$ ,  $9/4$ ,  $55/144$  dla  $Y_2$ ).
11. **E1** Obliczyć wartość współczynnika korelacji  $\rho$  zmiennych  $Y_1, Y_2$ . (Odp.:  $3\sqrt{330}/55$ ).