

# Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka

## Lista zadań № 5. Tydzień rozpoczynający się 4. kwietnia

### Zadania

1.  $X$  jest zmienną losową typu dyskretnego, tzn. dane są ciągi  $\{x_i\}, \{p_i\}$  – wartości i ppb tej zmiennej. Udowodnić, że dla  $Y = aX + b$  jest  $V(Y) = a^2V(X)$ , ( $a, b \in \mathbb{R}$ ).
2. Zmienna losowa podlega standardowemu rozkładowi normalnemu, tzn.  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$ , gdzie  $x \in \mathbb{R}$ . (Skrótowo:  $X \sim N(0, 1)$ ). Znaleźć rozkład (gęstość  $f_Y(y) \equiv g(y)$ ) zmiennej  $Y = X^2$ .
3. Wykazać, że  $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ . (WSK.: W zadaniu 1.3 dokonać podstawienia  $t = x^2/2$  i porównać z zadaniem 1.6)
4. Mówimy, że zmienna losowa  $X$  podlega rozkładowi Gamma z parametrami  $b, p > 0$  jedynie wtedy gdy  $f(x) = \frac{b^p}{\Gamma(p)} x^{p-1} \exp(-bx)$ , dla  $x \in (0, \infty)$ . (Krótko:  $X \sim \text{Gamma}(b, p)$ ). Czy  $Y$  z zadania 2. ma rozkład Gamma? Jeżeli tak, podać wartości parametrów  $b, p$ .
5. **2p.** Zmienna  $(X, Y)$  ma rozkład o gęstości  $f(x, y) = xy$ , na obszarze  $[0, 2] \times [0, 1]$ . Wyznaczyć dystrybuantę tej zmiennej, czyli obliczyć  $F_{XY}(s, t) = \int_{-\infty}^s \int_{-\infty}^t xy \, dy \, dx$ .
6. **2p.**  $(X, Y)$  z poprzedniego zadania. Wyznaczyć rozkład zmiennej  $Z = X/Y$ . Obliczyć wartość oczekiwaną  $E(X)$ .
7. **2p.**  $X \sim \text{Gamma}(b, p)$ . Wykazać, że  $M_X(t) = \left(1 - \frac{t}{b}\right)^{-p}$
8.  $X_i \sim \text{Gamma}(b, p_i)$ , zmienne losowe  $X_1, X_2, \dots, X_n$  są niezależne. Wykazać, że zachodzi  $S \sim \text{Gamma}(b, \sum p_i)$ . Jaki rozkład otrzymujemy dla  $X_i \sim \text{Gamma}(1/2, 1/2)$ ?

Witold Karczewski