8 listopada 2021

Zadania z matematyki dyskretnej, lista nr 5

1. Niech $n = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_s^{n_s}$, ϕ będzie funkcją Eulera i
$$\psi(n) = \operatorname{lcm}\left(\phi\left(p_1^{n_1}\right), \phi\left(p_2^{n_2}\right), \ldots, \phi\left(p_s^{n_s}\right)\right).$$
Udowodnij, że dla $a \perp n$ zachodzi $n | a^{\psi(n)} - 1$.

2. Pokaż, że $\displaystyle\sum_{d:d|n} \phi(d) = n$.

3. Pokaż, że iloczyn dowolnych k kolejnych liczb naturalnych dzieli się przez $k!$.

4. Udowodnij następujące stwierdzenia za pomocą zasady szufladkowej
   (a) W turnieju każda drużyna gra z każdą inną dokładnie raz. W każdym momencie trwania turnieju istnieją dwie drużyny, które rozegrały tyle samo meczów.
   (b) Wśród pięciu punktów wybranych w trójkącie równobocznym o boku 1, istnieje przynajmniej jedna para punktów odległych od siebie o co najwyżej $\frac{1}{2}$.
   (c) Każdy wielościan wypukły zawiera przynajmniej dwie ściany o tej samej liczbie krawędzi.

5. Dane są liczby całkowite $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$. Pokaż, że wtedy istnieją takie i, j, że $a_i + a_{i+1} + \cdots + a_j$ jest podzielne przez n.

6. Pokaż, że w dowolnym zbiorze S złożonym z 10 liczb naturalnych mniejszych od 100, zawsze istnieją dwa podzbiory o tej samej sumie.

7. Niech $n, k, r, s \in \mathbb{N}$ i $0 \leq r, s < n$. Mamy $nk + r$ kulek rozmieszczonych w n szufladkach. Pokaż, że w pewnych s szufladkach znajduje się w sumie co najmniej $sk + \min\{r, s\}$ kulek.

8. Na szachownicy $n \times m$ dla $n \leq m$ umieszczono $m(k-1)+1$ wież. Pokaż, że istnieje takich k wież które nie atakują się wzajemnie.

9. Ile jest pięciocyfrowych numerów telefonów, w których **dokładnie jedna** cyfra występuje więcej niż jeden raz? A ile jest, gdy **przynajmniej jedna** cyfra występuje więcej niż jeden raz?

10. Ile jest różnych rozłożeń wszystkich białych i czarnych figur i pionków szachowych na szachownicy? Ile jest rozłożeń w których para gońców każdego z kolorów zajmuje pola różnych kolorów.

11. Pokaż, że liczba przedstawień n w postaci sumy k liczb naturalnych (różnych od zera) wynosi $\binom{n-1}{k-1}$, jeśli przedstawienia na różniące się kolejnością składników uważamy za różne. Ile jest przedstawień n w postaci sumy dowolnej ilości liczb naturalnych?

12. Na teren fabryki, w której pracuje n osób prowadzi k wejść. Przy każdym wejściu jest wyłożona lista obecności, na którą kolejno wpisują się pracownicy wchodzący tym wejściem w danym dniu (każdy wpisuje się na dokładnie jedną listę). Na ile sposobów mogą zostać wypełnione listy obecności w tym dniu (liczy sie również kolejność na listach)? Ile jest takich sposobów, w których żadna z list nie jest pusta?

13. Udowodnij następujące wzory
   (a) tożsamość absorpcyjna: $\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$, dla $k \neq 0$.
   (b) wzór na sumowanie po górnym wskaźniku: $\displaystyle\sum_{0 \leq k \leq n} \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}$, dla $m, n \geq 0$.

14. Podaj interpretację w terminach zbiorów następujących tożsamości
   (a) tożsamość Cauchy'ego: $\displaystyle\binom{m+n}{r} = \sum_{s=0}^{r} \binom{m}{s}\binom{n}{r-s}$
   (b) $\binom{n}{k}\binom{k}{m} = \binom{n}{m}\binom{n-m}{n-k}$.

15. Udowodnij indukcyjnie małe twierdzenie Fermata mówiące, że dla dowolnej liczby pierwszej p i naturalnej a
$$a^p \equiv a \bmod p.$$
Wsk.: rozwiń $(a+1)^p$ posługując się wzorem dwumiennym i określ kiedy $\binom{p}{i}$ dzieli się przez p.