Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka

Lista zadań nr 6. Tydzień rozpoczynający się 11. kwietnia

Zadania

1. Niech $X \sim \mathrm{Geom}(p)$ (rozkład geometryczny). Wykazać, że $M_X(t) = \dfrac{pe^t}{1-qe^t}$.
2. Niech $X \sim \mathrm{Geom}(p)$. Korzystając z funkcji $M_X(t)$ obliczyć $\mathrm{E}(X)$ oraz $\mathrm{V}(X)$.
3. Dla $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ mamy $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$, $x \in \mathbb{R}$. Udowodnić, że postać $M_X(t)$ jest następująca: $M_X(t) = \exp\left(\mu t + \dfrac{1}{2}\sigma^2 t^2\right)$.
4. Zmienne $X_1, \ldots, X_n$ są niezależne i $X_k \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$. Znaleźć funkcję tworzącą momenty $M_{\bar{X}}(t)$ zmiennej $\bar{X}$ ($\bar{X}$ to średnia z $X_1, \ldots, X_n$), a następnie zidentyfikować rozkład zmiennej $\bar{X}$.

   [**Z. 5–6**] Zmienna $Z \sim \mathrm{Gamma}(b, p)$ ma MGF postaci $M_Z(t) = \left(1 - \dfrac{t}{b}\right)^{-p}$. Dodatkowo wiemy że: $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

5. Niech $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$. Znaleźć rozkład zmiennej $Y = \left(\dfrac{X-\mu}{\sigma}\right)^2$.
6. Zmienne $X_1, \ldots, X_n$ są niezależne oraz $X_k \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$. Znaleźć rozkład zmiennej $Z_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\dfrac{X_k - \mu}{\sigma}\right)^2$.

   [**Z. 7–8**] Znaleźć rozkład, któremu podlega zmienna $Z = \sum_{k=1}^{n} X_k$. O występujących w tych zadaniach zmiennych zakładamy, że są niezależne. Rozwiązujemy zadania używając "*MGFy*" (funkcje generujące momenty).

7. $X_k \sim \mathrm{Gamma}(b, p_k)$, $k = 1, \ldots, n$.
8. $X_k \sim \mathrm{B}(m_k, p)$, $k = 1, \ldots, n$.
9. Zakładamy, że zmienne $X_1, X_2, \ldots, X_n$, $Y_1, Y_2, \ldots, Y_k$ są niezależne i podlegają rozkładowi $N(0,1)$. W jaki sposób można utworzyć poniższe zmienne:
   (a) $U \sim \chi^2(k)$,
   (b) $T \sim \mathrm{t}(n)$,
   (c) $V \sim \mathrm{F}(k, n)$
10. Zmienna losowa X ma MGF o postaci $M_X(t)$. Zmienna losowa Y jest pewną funkcją zmiennej X. Co można powiedzieć o Y (założenia i od jakich zmiennych zależy Y) jeżeli:
    (a) $M_Y(t) = M_X(2t) \cdot M_X(4t)$,
    (b) $M_Y(t) = \mathrm{e}^{2t} M_X(t)$,
    (c) $M_Y(t) = 4M_X(t)$.

[Zadania 11–12] Zakładamy, że niezależne zmienne losowe X_k podlegają rozkładowi $\mathrm{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$.

$$\sum_{k=1}^{n} (X_k - \mu)^2 = \sum_{k=1}^{n} \left(X_k - \bar{\mathbf{X}}\right)^2 + n\,(\bar{\mathbf{X}} - \mu)^2. \tag{1}$$

11. **E1** Znaleźć (wraz z uzasadnieniem) rozkład zmiennej $M = \dfrac{n}{\sigma^2} \cdot (\bar{\mathbf{X}} - \mu)^2$

12. **E1** Załóżmy, że zmienne $\bar{\mathbf{X}} = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ oraz $S^2 = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \left(X_k - \bar{\mathbf{X}}\right)^2$ są niezależne. Korzystając z równania (1) udowodnić, że $\dfrac{nS^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1) \equiv \mathrm{Gamma}\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{n-1}{2}\right)$

Witold Karczewski