6 października 2021

Zadania z matematyki dyskretnej, lista nr 2

1. Niech a będzie liczbą niewymierną i n liczbą całkowitą dodatnią. Pokaż, że $\lfloor an \rfloor + \lfloor (1-a)n \rfloor = n-1$. Jak wygląda analogiczna równość dla powały?

2. Oblicz dla dowolnych naturalnych $x \in \mathbb{R}$ i $m \in \mathbb{N}$ wyrażenie $\lfloor x/m \rfloor + \lfloor (x+1)/m \rfloor + \cdots + \lfloor (x+m-1)/m \rfloor$.

3. Dla każdej z następujących zależności rekurencyjnych określ liczbę warunków początkowych niezbędnych do jednoznacznego określenia wartości elementów ciągu dla wszystkich $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$\text{(a) } a_n = na_{n-2}, \quad \text{(b) } a_n = a_{n-1} + a_{n-3}, \quad \text{(c) } a_n = 2a_{\lfloor n/2 \rfloor} + n.$$

4. Rozwiąż następujące zależności:

   (a) $f_n = f_{n-1} + 3^n$ dla $n > 1$ i $f_1 = 3$;
   (b) $h_n = h_{n-1} + (-1)^{n+1}n$ dla $n > 1$ i $h_1 = 1$;
   (c) $l_n = l_{n-1}l_{n-2}$ dla $n > 2$ i $l_1 = l_2 = 2$.

5. Rozwiąż zależności rekurencyjne

   (a) $a_0 = 1$, $a_n = 2/a_{n-1}$,
   (b) $b_0 = 0$, $b_n = 1/(1 + b_{n-1})$,
   (c) $c_0 = 1$, $c_n = \sum_{i=0}^{n-1} c_i$,
   (d) $d_0 = 1$, $d_1 = 2$, $d_n = d_{n-1}^2/d_{n-2}$.

6. Rozwiąż zależności rekurencyjne

   (a) $y_0 = y_1 = 1$, $y_n = (y_{n-1}^2 + y_{n-2})/(y_{n-1} + y_{n-2})$
   (b) $z_0 = 1$, $z_1 = 2$, $z_n = (z_{n-1}^2 - 1)/z_{n-2}$
   (c) $t_0 = 0$, $t_1 = 1$, $t_n = (t_{n-1} - t_{n-2} + 3)^2/4$

7. Rozwiąż zależności rekurencyjne

   (a) $a_0 = 1$, $a_{n+1} = (n+1)a_n + 1$,
   (b) $b_0 = 1/2$, $nb_n = (n-2)b_{n-1} + 1$,
   (c) $c_0 = 0$, $nc_n = (n+2)c_{n-1} + n + 2$,
   (d) $d_0 = 1, d_1 = 2$, $nd_n = (n-2)!d_{n-1}d_{n-2}$.

8. Rozwiąż zależność rekurencyjną $a_n = (1 + a_{n-1})/a_{n-2}$ przy warunkach początkowych $a_0 = \alpha, a_1 = \beta$. Jakie muszą być α, β, żeby ciąg a_n był określony dla wszystkich n?

9. Rozwiąż zależności rekurencyjne

   (a) $f(1) = 1$, $f(n) = f(\lfloor n/2 \rfloor) + f(\lceil n/2 \rceil) + 1$,
   (b) $g(0) = 0$, $g(n) = g(\lfloor n/2 \rfloor) + \lfloor \log_2 n \rfloor$.

10. Podwójna wieża Hanoi składa się z $2n$ krążków n różnych rozmiarów, po 2 krążki każdego rozmiaru. W jednym kroku przenosimy dokładnie jeden krążek i nie możemy kłaść większego na mniejszym. Ile kroków jest potrzebnych by przenieść wieżę z pręta A na B, gdy krążki równej wielkości nie są rozróżnialne.

11. Na płaszczyźnie danych jest n okręgów. Jaka jest maksymalna liczba obszarów, na które dzielą one płaszczyznę. Rozwiąż zadanie za pomocą odpowiedniej zależności rekurencyjnej.

12. Ile najwięcej kawałków sera można uzyskać z pojedynczego grubego kawałka za pomocą n cięć nożem? Zakładamy że każde cięcie jest wyznaczone przez płaszczyznę przecinającą kawałek sera.

13. Sprawdź, że liczby harmoniczne $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$ spełniają zależność rekurencyjną $H_n = \frac{1}{n}(H_{n-1} + H_{n-2} + ... + H_1) + 1$ dla $n > 1$.

14. Wykaż prawdziwość równości (F.Lucas, 1842-1891):

   (a) $F_0 + F_1 + F_2 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1$,
   (b) $F_1 + F_3 + F_5 + \cdots + F_{2n-1} = F_{2n}$ dla $n \geq 1$,
   (c) $F_0^2 + F_1^2 + F_2^2 + \cdots + F_n^2 = F_nF_{n+1}$, (d) $F_nF_{n+2} = F_{n+1}^2 + (-1)^{n+1}$.

15. Pokaż, że $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$. Dla jakich n mamy $F_n = \left\lfloor \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{1}{2} \right\rfloor$?