

Modelowanie komputerowe

Lista nr 1

1. Obliczyć metodą Monte Carlo objętość kuli jednostkowej, czyli kuli o promieniu równym jeden. Zastosować podejście analogiczne jak w przypadku wyznaczania liczby π .
Wskazówki. Wybrać N punktów, których każda współrzędna jest losowana z przedziału $[-1, 1]$. Tak wybrane punkty leżą w kostce sześciennej o boku równym 2. Jeśli odległość losowego punktu od początku układu współrzędnych $(0,0,0)$ jest mniejsza lub równa jeden, to taki punkt należy również do kuli. Zliczyć liczbę punktów S leżących w kuli i oszacować prawdopodobieństwo „trafienia w kulę” jako S/N . Do obliczenia objętości kuli jednostkowej wykorzystać fakt, że to prawdopodobieństwo jest równe stosunkowi objętości kuli do objętości kostki sześciennej. Wykonać obliczenia dla $N=100, 10^4$ i 10^6 .
2. Wykonać podobne obliczenia jak w zadaniu nr 1 dla hiperkuli jednostkowej w piętnastowymiarowej przestrzeni. W tym przypadku, każdy losowy punkt ma piętnaście współrzędnych i leży w hiperkostce o boku równym 2. Jaka jest objętość tej hiperkostki? Czy wyniki Monte Carlo w tym przypadku mają sens?. Żeby odpowiedzieć na to pytanie znaleźć w literaturze wzór na objętość hiperkuli jednostkowej i obliczyć dokładne prawdopodobieństwo wylosowania punktu z tej hiperkuli w zastosowanej metodzie Monte Carlo.
3. Obliczyć metodą Monte Carlo poniższą całkę stosując metodę prostego próbkowania

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-2}^2 dx e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Wskazówka. Wygenerować N losowych wartości x z przedziału $[-2, 2]$, obliczyć wartości funkcji podcałkowej w tych punktach i oszacować tę całkę jako średnią arytmetyczną wartości funkcji w punktach losowych pomnożoną przez długość przedziału całkowania. Wykonać obliczenia dla $N=100, 10^4$ i 10^6 i porównać z wynikiem z Wolfram Alpha (<https://www.wolframalpha.com/examples/math/>).

4. W talii znajduje się 100 kart ponumerowanych od 1 do 100. Po potasowaniu kart odkrywamy po jednej karcie. Za sukces uznajemy zdarzenie, że karta o numerze n zostanie odkryta jako n-ta. Napisać program do symulacji tego problemu i oszacować średnią liczbę sukcesów.