

Metody Numeryczne

Projekt nr 3 - Aproksymacja profilu wysokoscioowego

Opis przeprowadzonego doświadczenia i założenia.

Znając wysokości tylko części punktów trasy, wysokości punktów pośrednich można określić za pomocą aproksymacji liniowej. Wykorzystano do tego metodę wielomianu Lagrange'a oraz metodę funkcji sklejanych trzeciego stopnia.

Obliczenia przeprowadzono w języku C i C++ za pomocą własnych implementacji wybranych metod aproksymacji interpolacyjnej, a także skorzystano z funkcji biblioteki `<math.h>` w celu obliczenia potęg i pierwiastków. Do rozwiązania układu równań liniowych (potrzebną przy metodzie funkcji sklejanych 3 stopnia) wykorzystano algorytm bezpośredni Gaussa własnej implementacji.

Obliczenia wykonano dla czterech zbiorów danych wysokościowych: dla profilu WETI-akademik, Mount Everest, Greenwich i kanionu Kolorado, które pobrane z serwisu geocontext.org. Każdy z nich zawierał 512 rekordów-par typu {odległość, wysokość}. Do wyznaczenia funkcji interpolujących wyznaczono punkty równolegle od siebie oddalone (co 64 lub 16 punkt co dawało odpowiednio 8 lub 32 węzły interpolacji).

Szacowanie błędu aproksymacji przeprowadzono za pomocą aproksymacji średniokwadratowej dyskretnej:

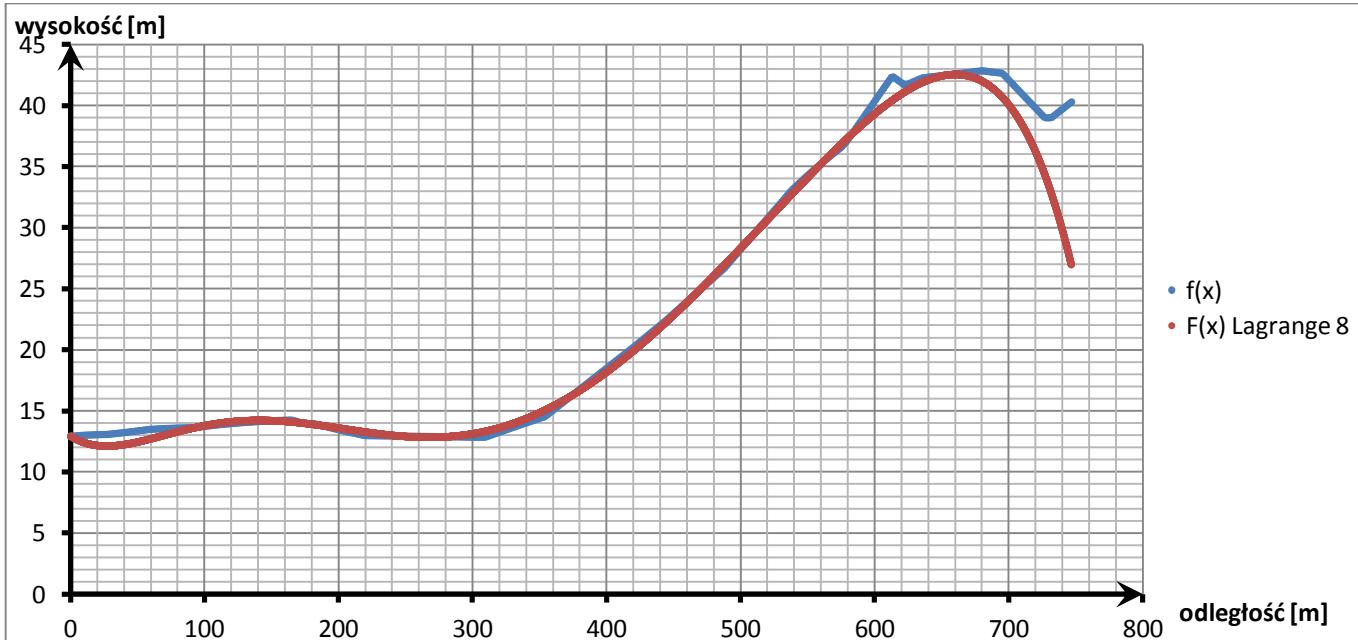
$$\|f(x) - F(x)\|_2 = \left(\sum_{i=0}^n w(x_i) (f(x_i) - F(x_i))^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \text{gdzie } w(x_i) = 1 \text{ dla } i = 1, 2, \dots, n$$

Wyniki przeprowadzonego doświadczenia.

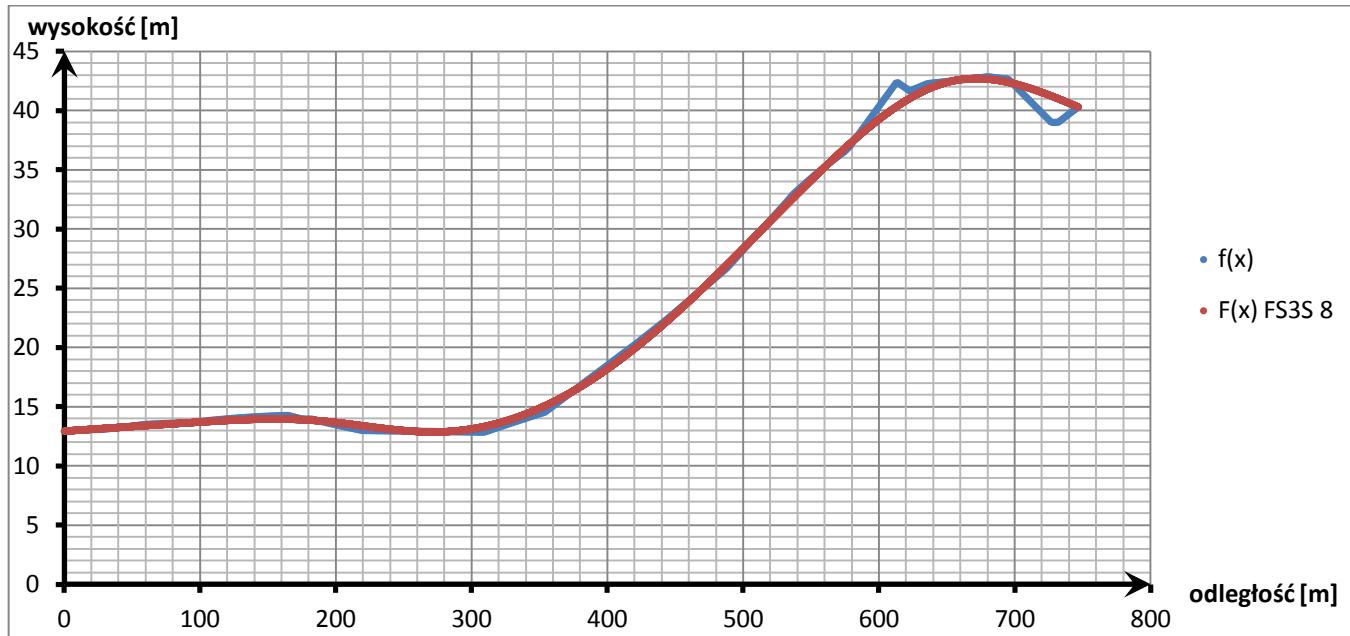
Uwaga! metodę funkcji sklejanych trzeciego stopnia odtąd skrótnie nazywać będę metodą FS3S.

1) Profil WETI-akademik:

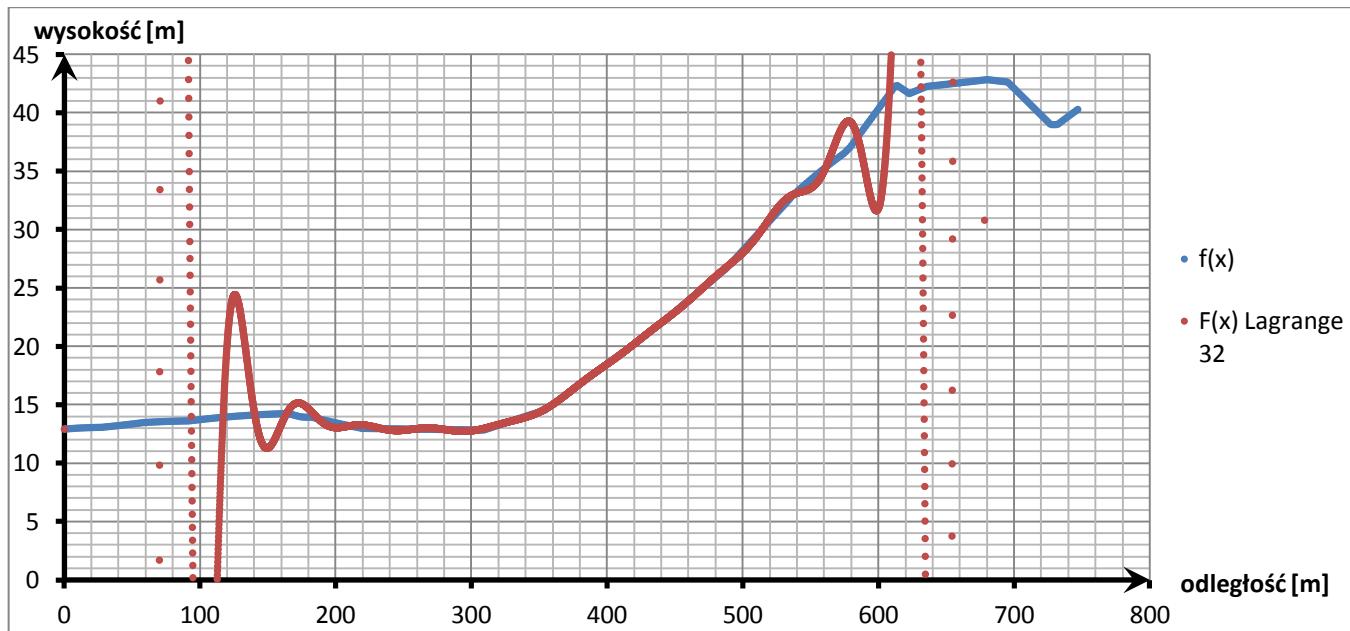
- metoda Lagrange'a dla 8 węzłów interpolacyjnych



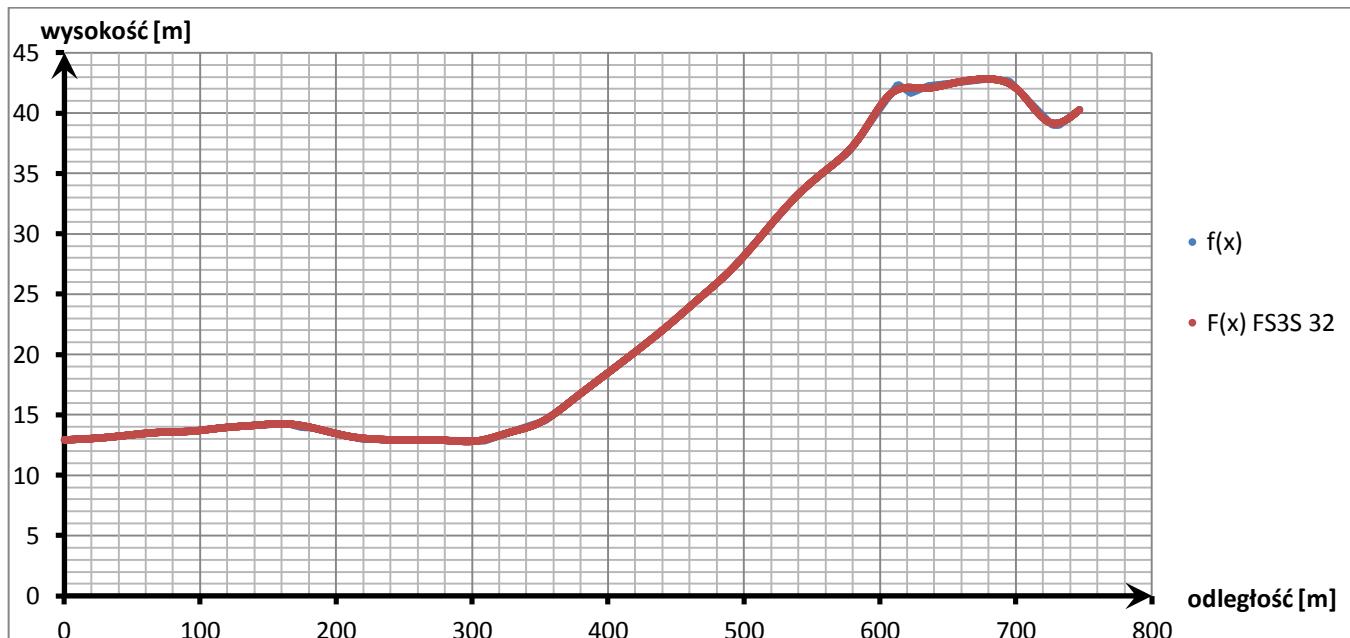
- metoda FS3S dla 8 węzłów interpolacyjnych



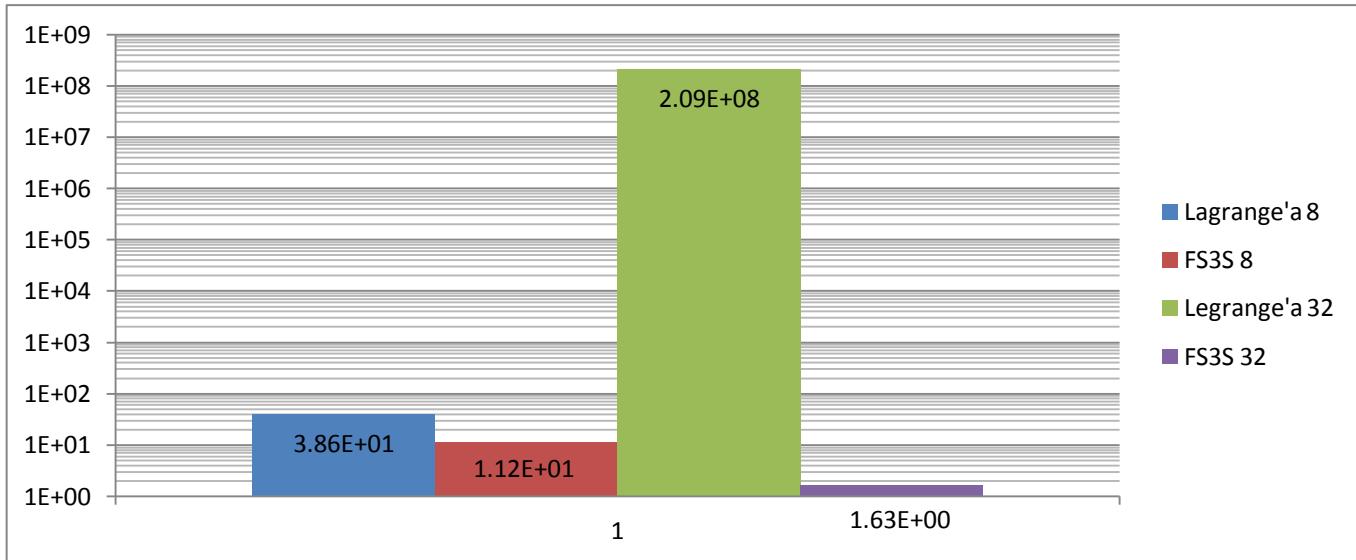
- metoda Lagrange'a dla 32 węzłów interpolacyjnych



- metoda FS3S dla 32 węzłów interpolacyjnych

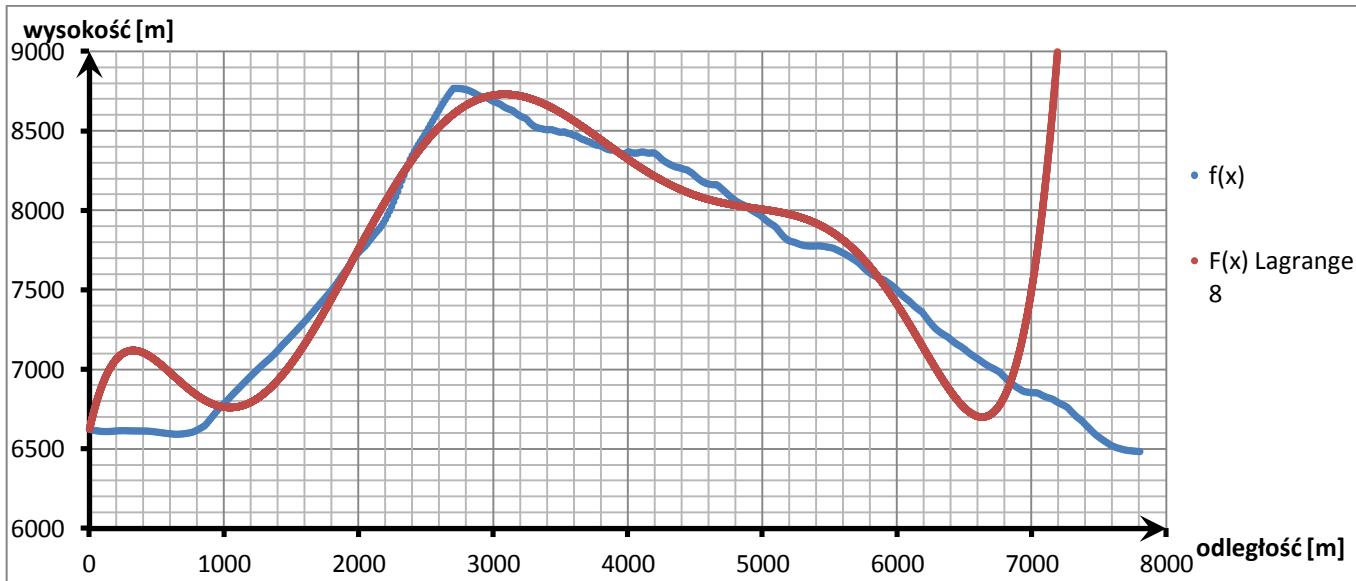


- błąd aproksymacji metod interpolacyjnych

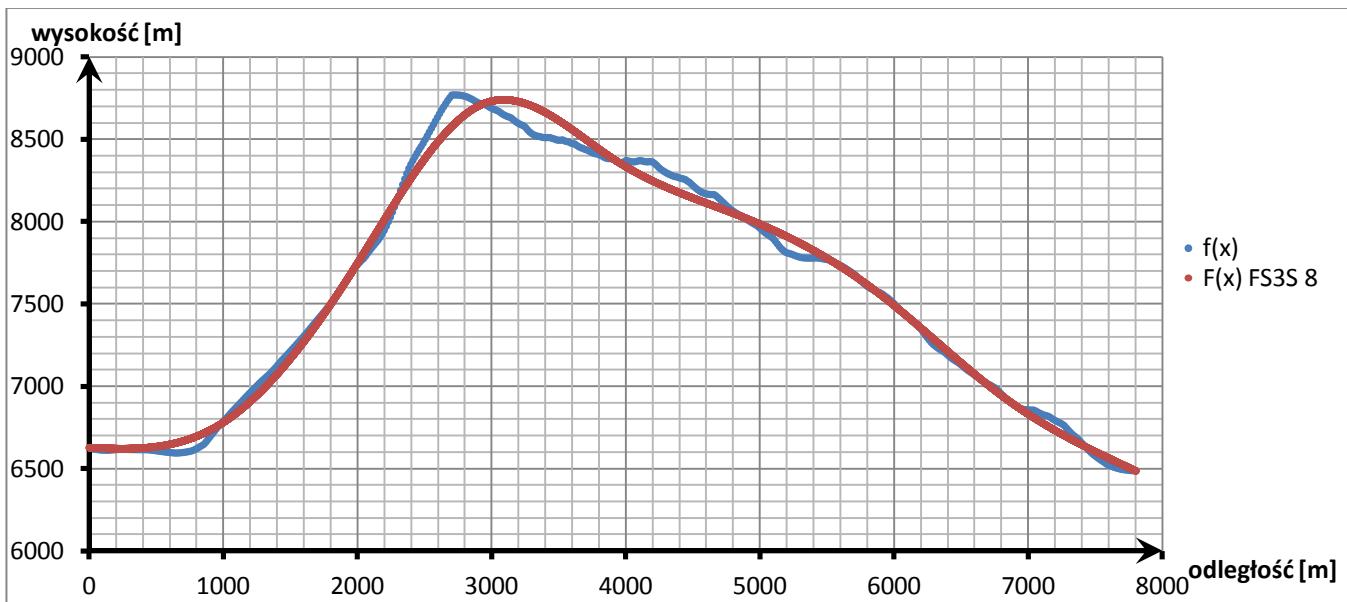


2) Profil Mount Everest

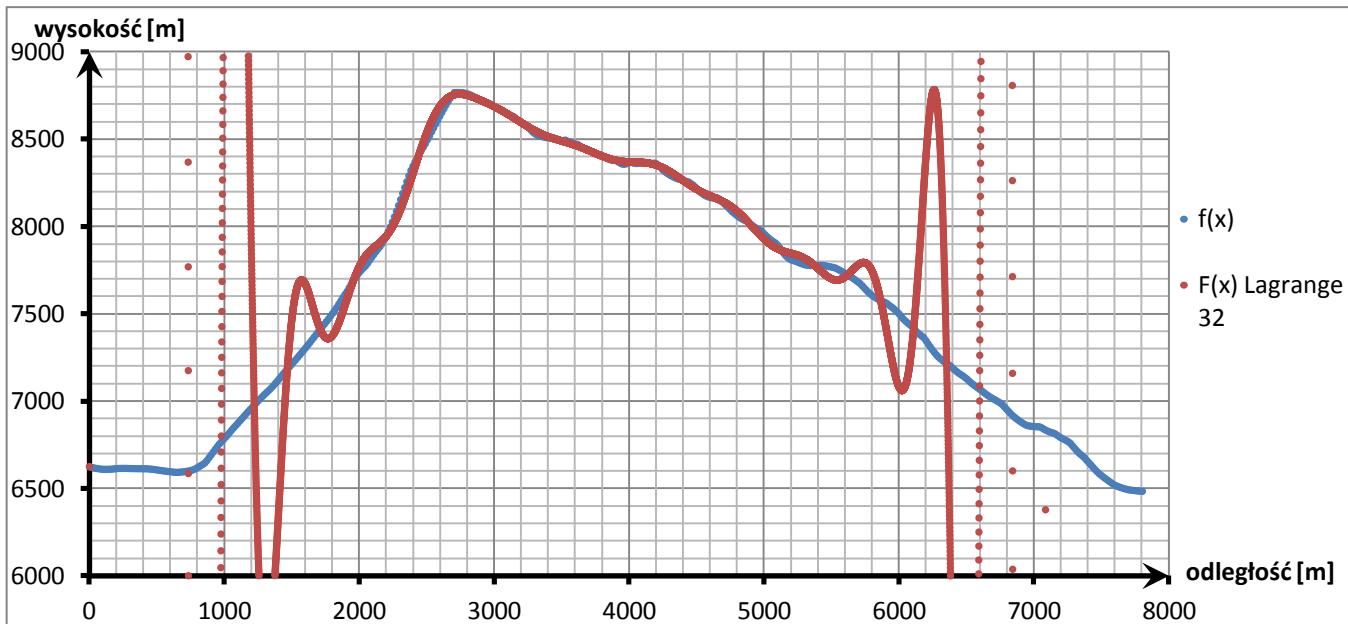
- metoda Lagrange'a dla 8 węzłów interpolacyjnych



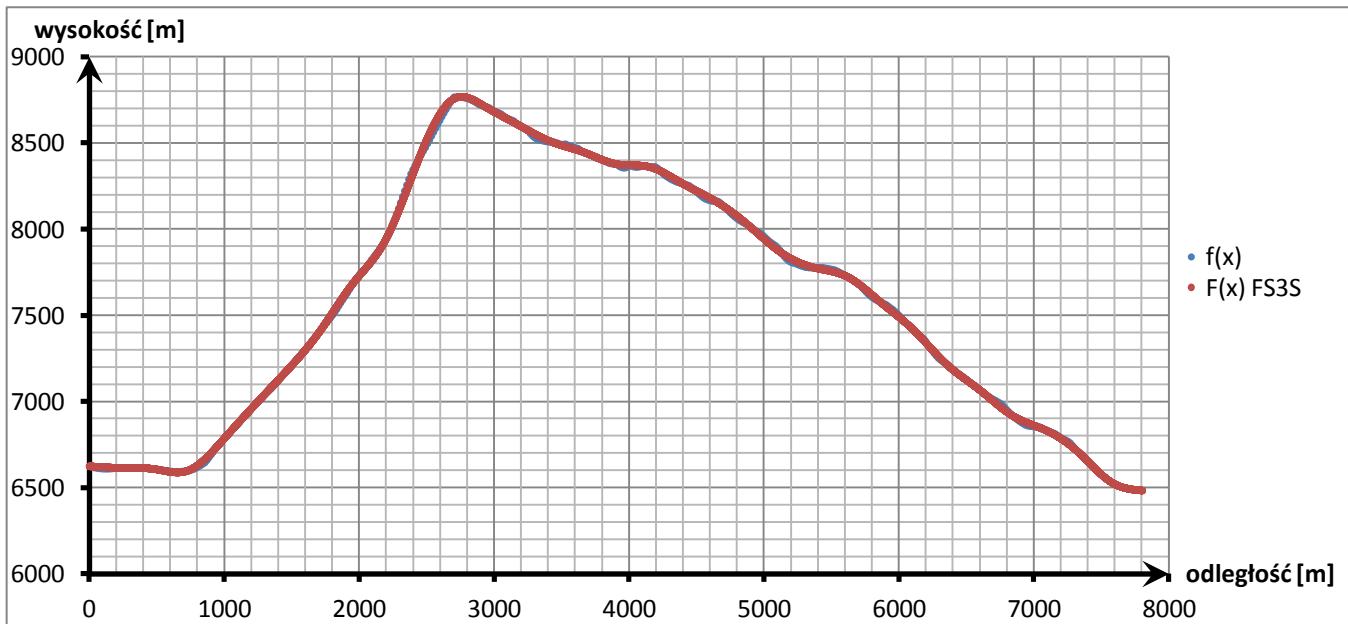
- metoda FS3S dla 8 węzłów interpolacyjnych



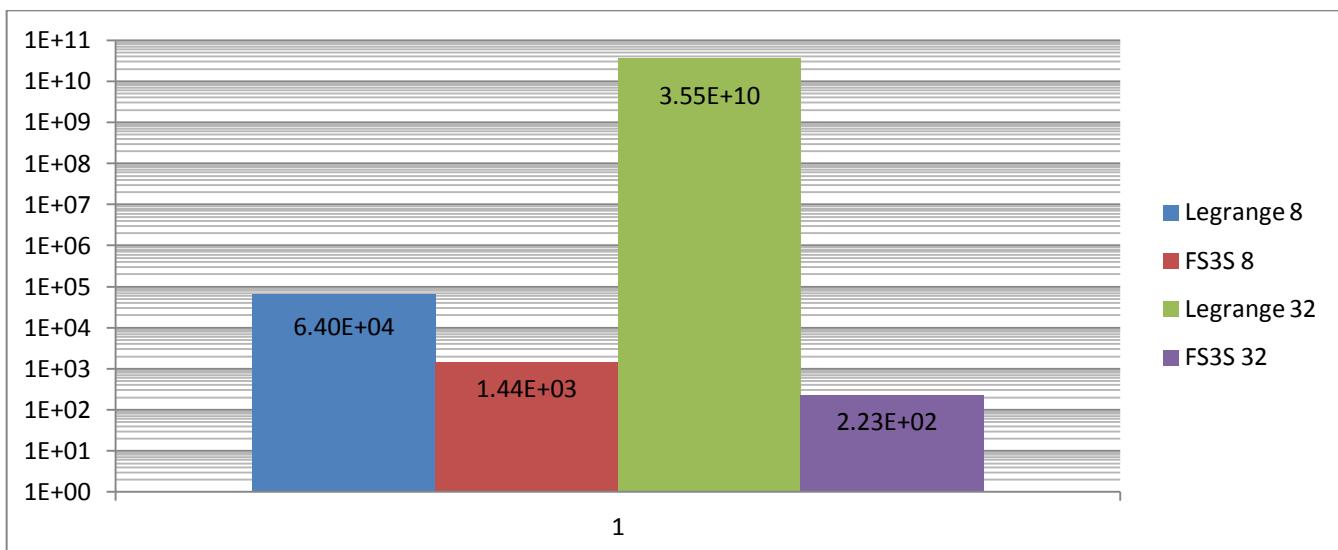
- metoda Lagrange'a dla 32 węzłów interpolacyjnych



- metoda FS3S dla 32 węzłów interpolacyjnych

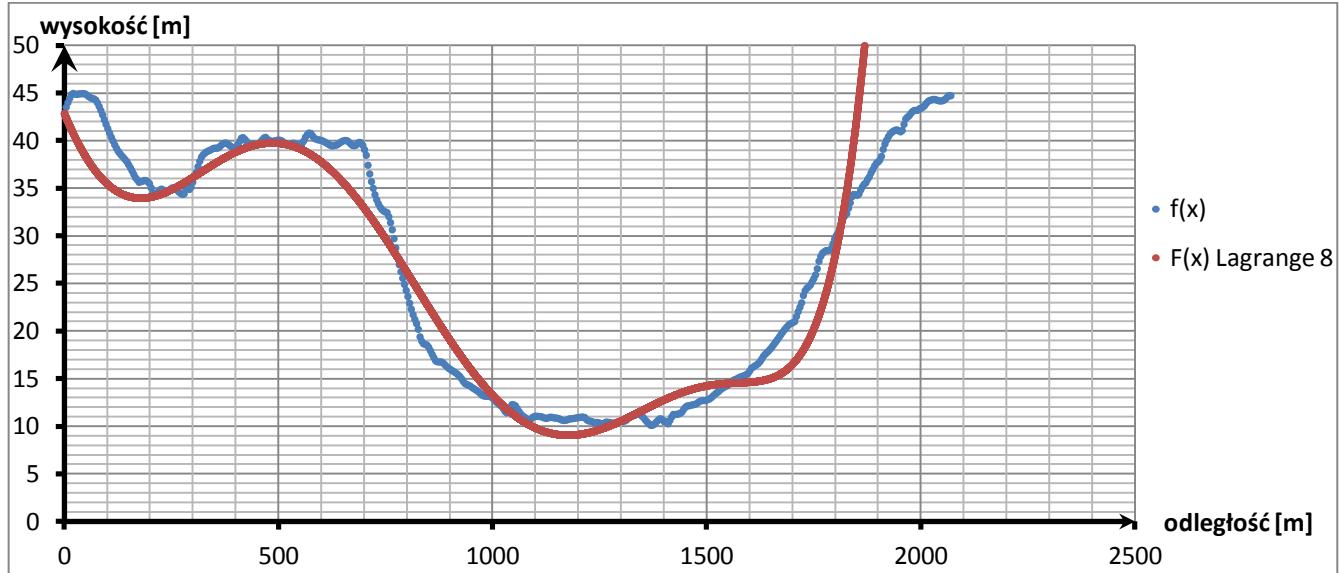


- błąd aproksymacji metod interpolacyjnych

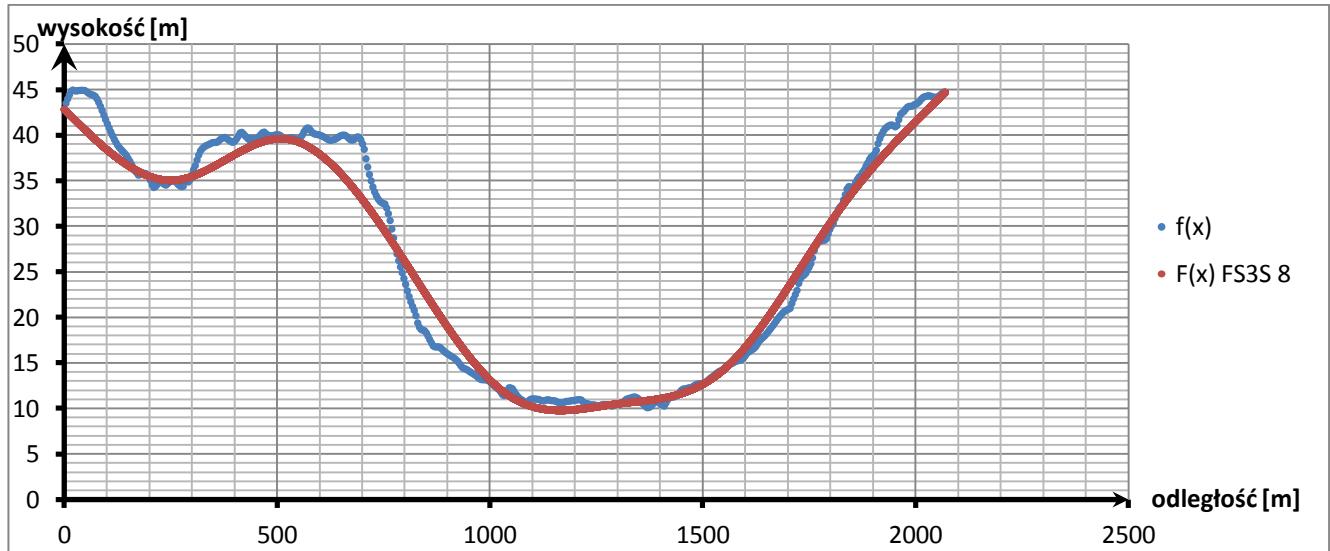


3) Profil Greenwich

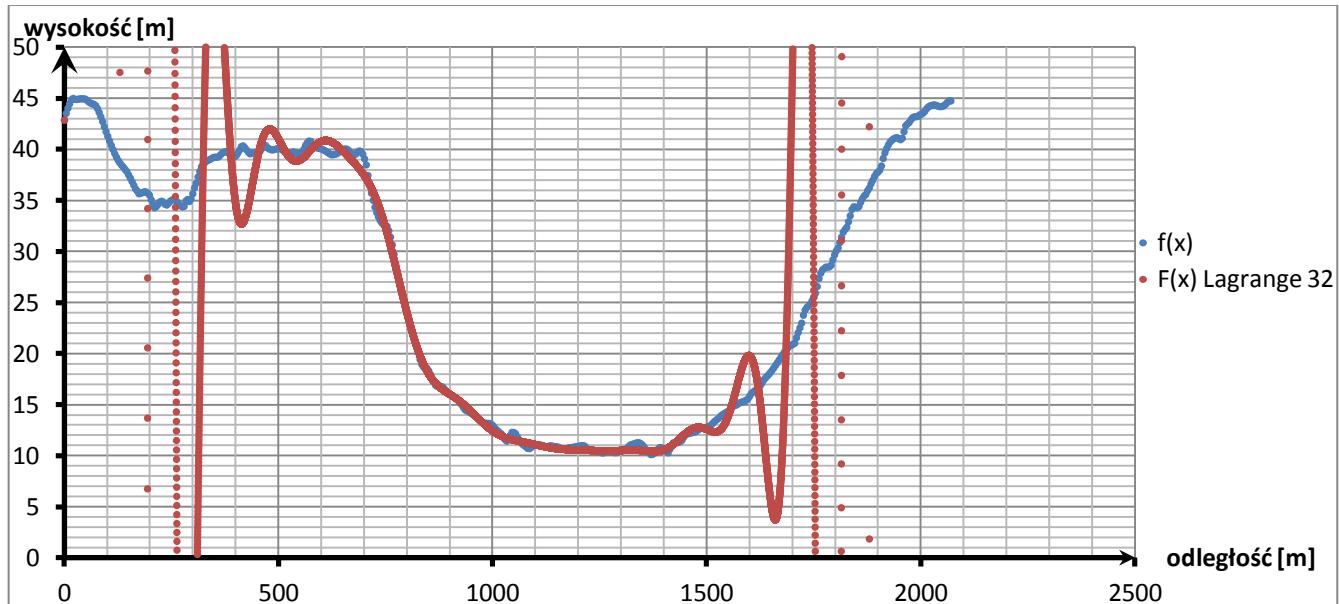
- metoda Lagrange'a dla 8 węzłów interpolacyjnych



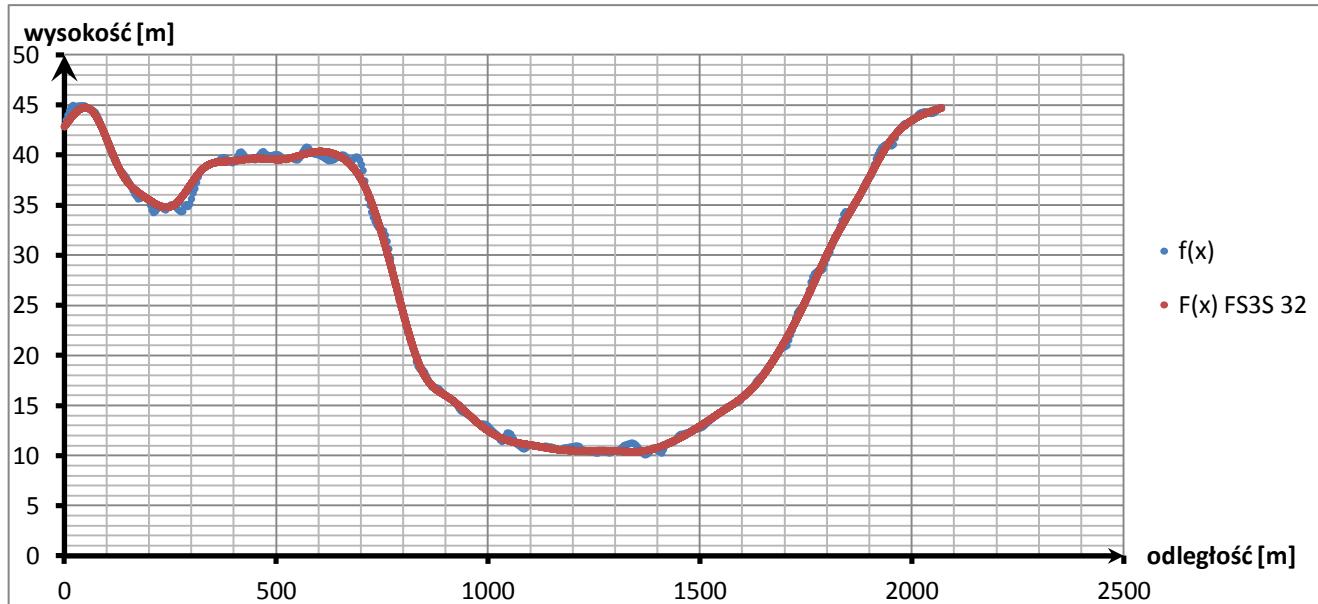
- metoda FS3S dla 8 węzłów interpolacyjnych



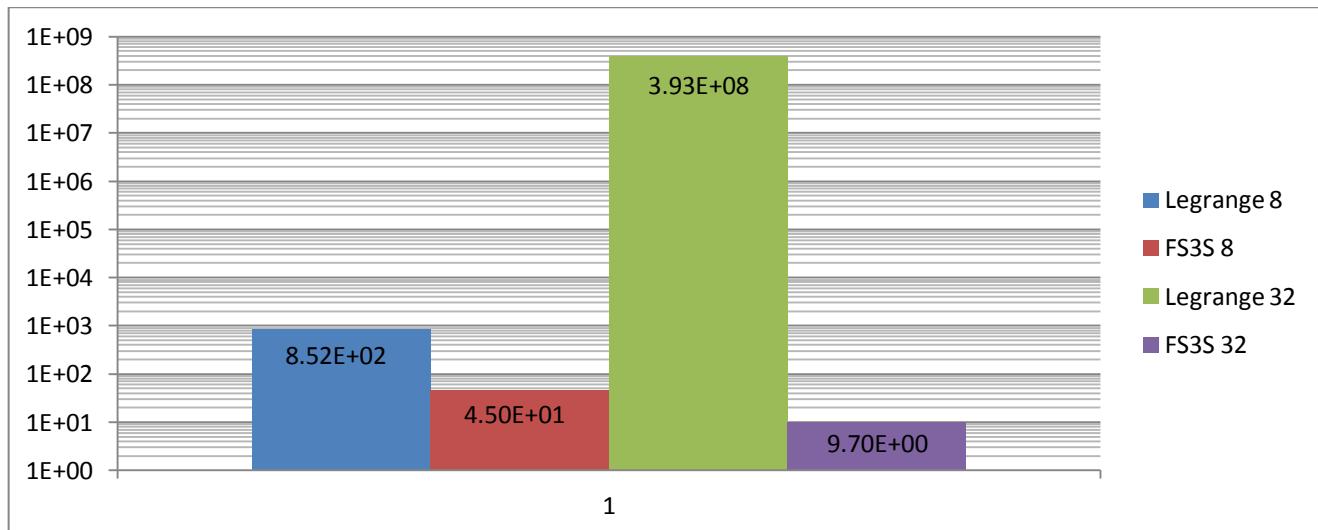
- metoda Lagrange'a dla 32 węzłów interpolacyjnych



- metoda FS3S dla 32 węzłów interpolacyjnych

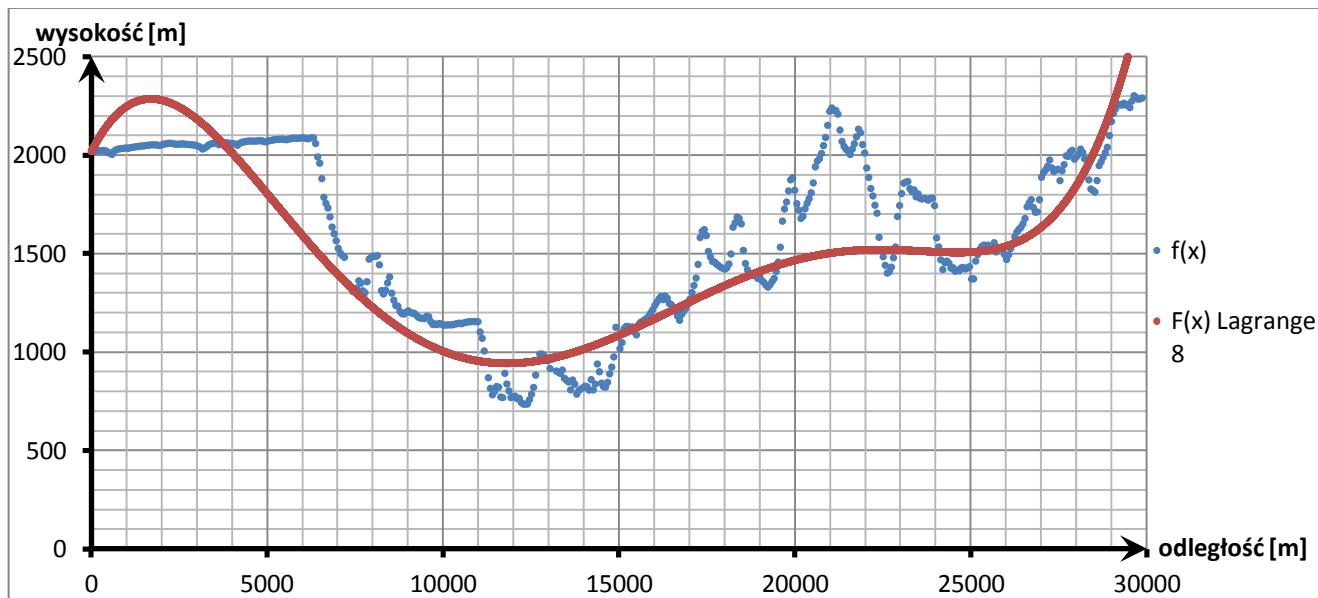


- błąd aproksymacji metod interpolacyjnych

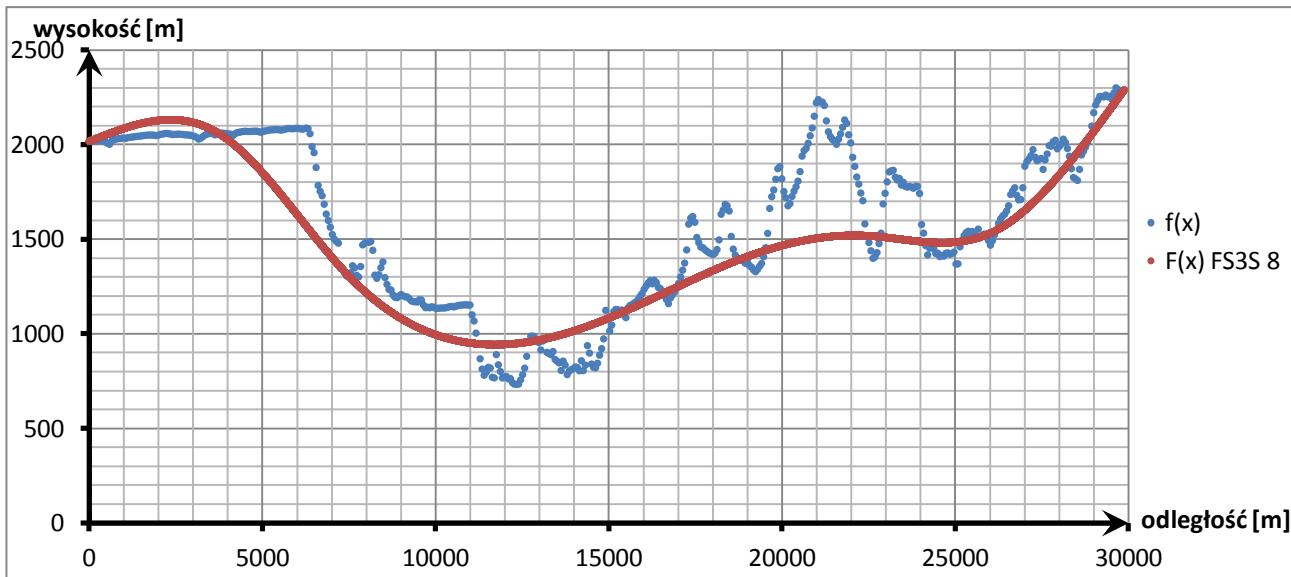


4) Profil kanion Kolorado

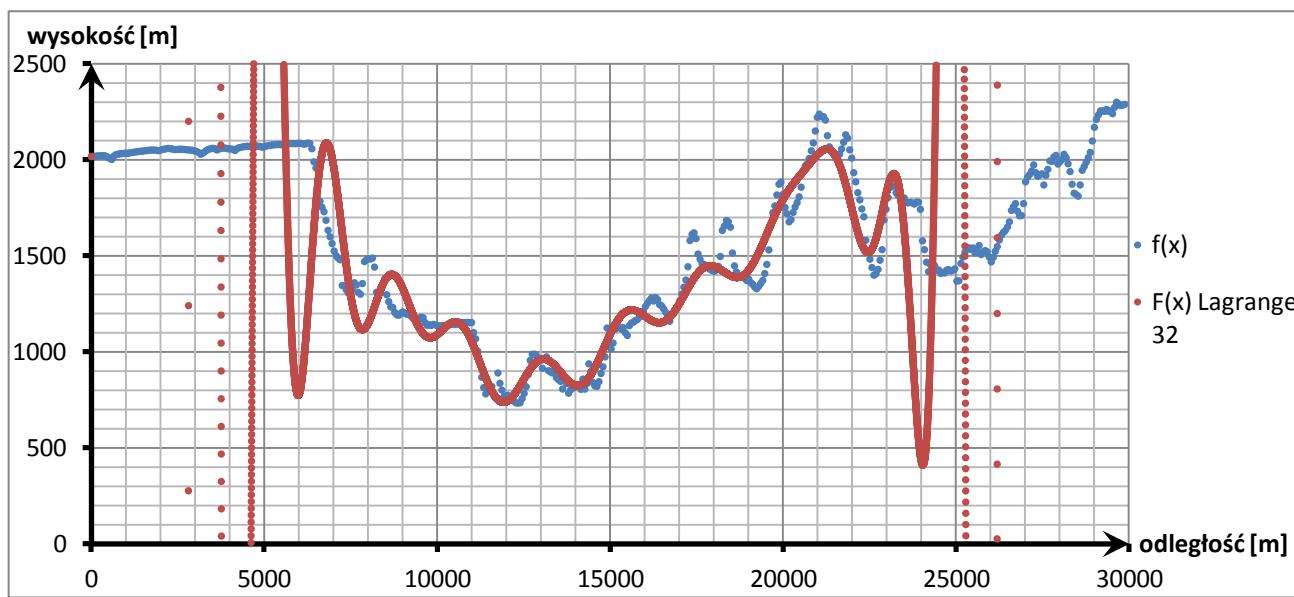
- metoda Lagrange'a dla 8 węzłów interpolacyjnych



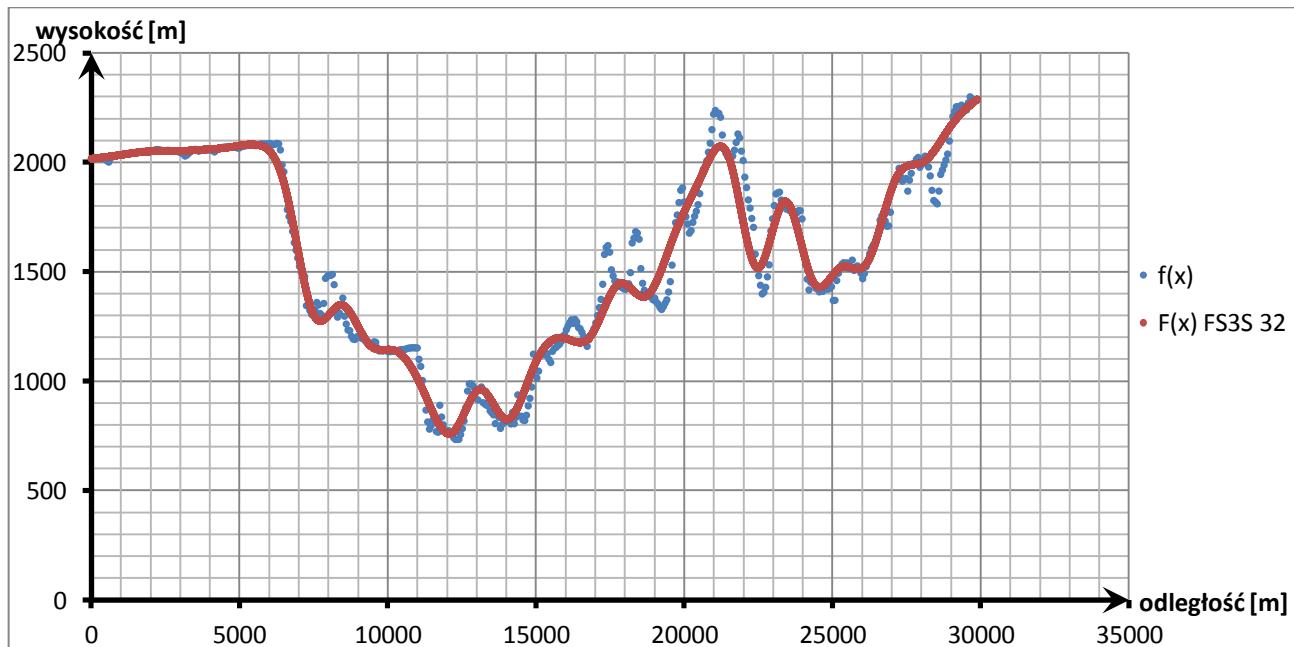
- metoda FS3S dla 8 węzłów interpolacyjnych



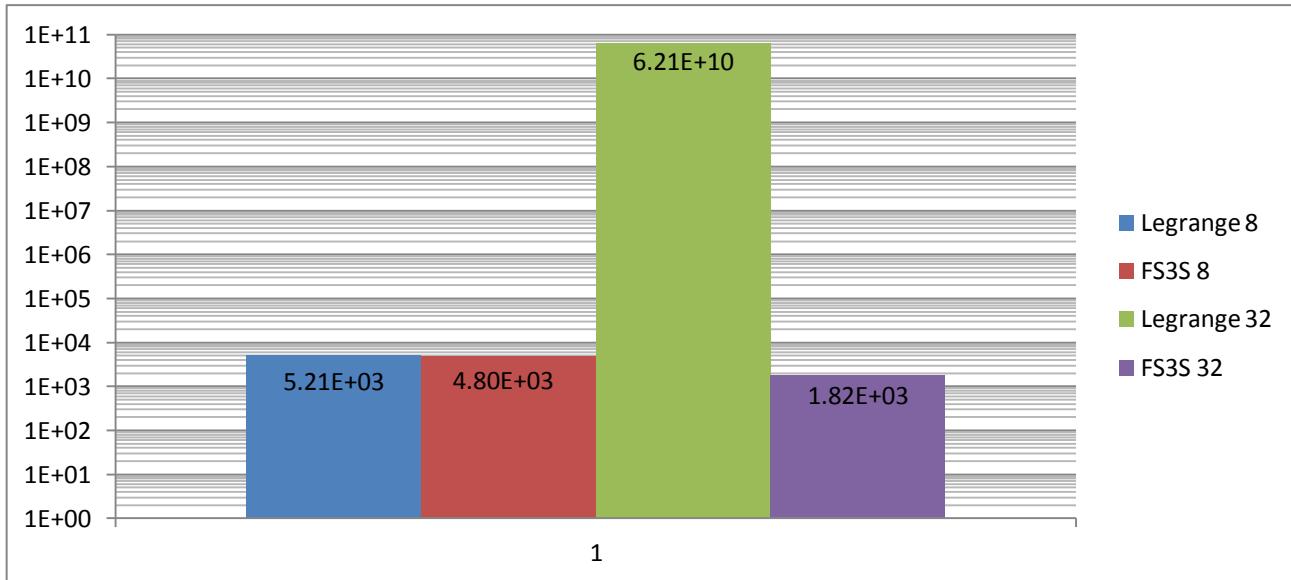
- metoda Lagrange'a dla 32 węzłów interpolacyjnych



- metoda FS3S dla 32 węzłów interpolacyjnych



- błąd aproksymacji metod interpolacyjnych



Analiza wyników i wnioski.

- Dla każdego z czterech przypadków dokładniejsza okazała się metoda interpolacji funkcjami sklejanymi 3 stopnia.
- Zwiększenie liczby węzłów dla metody interpolacji funkcjami sklejanymi 3 stopnia zmniejszało błąd aproksymacji, przez co wysokości interpolującej funkcji były bliższe wysokościom funkcji interpolowanej. Z tego powodu interpolacja funkcjami sklejanymi 3 stopnia stanowi lepsze rozwiązanie do tworzenia profili wysokościowych tras przy dużej liczbie danych o trasie.
- Z kolei zwiększenie liczby węzłów dla interpolacji Lagrange'a powodowało zwiększenie błędu aproksymacji. Choć środek przedziału interpolacji stawał się dokładniejszy, wysokości przy krańcach przedziału znacznie odbiegały od wysokości funkcji interpolowanej, co skutkowało ogólnym pogorszeniem wyników.

Zaobserwowane zjawisko to efekt Rungego, które jest typowe dla interpolacji za pomocą wielomianów wysokich stopni (stopień wzrastał wraz z kolejnymi węzłami). To powoduje, że interpolacja Lagrange'a nadaje się dla małej liczby węzłów (o ile profil wysokościowy charakteryzuje się brakiem różnic wysokości) lub do aproksymacji wysokości punktów ze środka przedziału interpolacji przy znajomości dużej liczby węzłów. Aby uniknąć tego efektu należałoby stosować interpolację w węzłach wyznaczonych przez miejsca zerowe wielomianów Czebyszewa. Należy również pamiętać, że zwiększanie liczby węzłów interpolacji powoduje znaczny wzrost złożoności obliczeniowej (złożoność interpolacji Lagrange'a dla pojedyńczego punktu to $O(n^2)$).

- Argumentem na korzyść metody interpolacji metodą Lagrange'a jest prostota jego implementacji - nie wymagała ona tak jak metoda funkcji sklejanych 3 stopnia stworzenia i rozwiązania układu równań liniowych. To również oznacza, że metoda interpolacji Lagrange'a dodatkowo nie podlega błędem wynikającym z algorytmów rozwiązywających układy równań liniowych.

- Z kolei metoda funkcji sklejanych 3 stopnia sprawdzała się w momencie obliczenia wysokości dla dużej liczby punktów - metoda ta w odróżnieniu od metody Lagrange'a wymagała jedynie jednokrotnego obliczenia parametrów do interpolującego równania dla wszystkich zadanych punktów.
- Funkcje aproksymacji interpolującej ogólnie dobrze radzą sobie z profilami bez znaczych różnic wysokości (profil WETI-akademik) - błąd aproksymacji był rzędu od 10^0 do 10^1 . Jendak wraz z większą różnorodnością topograficzną profilu, zwiększa się błąd aproksymacji. I tak, profile o monotonicznym wzroście/spadku wysokości (Mount Everest i Greenwich) powodowały wzrost błędu aproksymacji do rzędu od 10^2 do 10^3 . Natomiast profile o nagłych i nieregularnych wzrostach/spadkach wysokości (kanion Kolorado) powodowały zwrost błędu aproksymacji funkcji interpolujących do rzędu 10^3 .