# Algorytmy optymalizacji dyskretnej '23
# Lista 2
# Programowanie liniowe

Piotr Zapała

April 2023

## 1 Zadanie 1

### Opis problemu

W zadaniu pierszym mamy postawiony problem pewnego przedsiębiorstwa lotniczego. Musi ono podjąć decyzję o zakupie paliwa do samolotów odrzutowych, mając do wyboru trzech dostawców. Wiemy, że samoloty tankują paliwo na czterech lotniskach, które obsługują. Wiemy również, że w przyszłym miesiącu firmy paliwowe mogą dostarczyć następujące ilości paliwa: Firma 1 - 275000 galonów, Firma 2 - 550000 galonów i Firma 3 - 660000 galonów. Zapotrzebowanie paliwa na poszczególnych lotniskach, prezentuje się w następujący sposób: na lotnisku 1 - 110000 galonów, na lotnisku 2 - 220000 galonów, na lotnisku 3 - 330000 galonów i na lotnisku 4 - 440000 galonów. Poniższa tabelka prezentuje nam ceny paliwa (w dolarach) od poszczególnych dostawców w zależności od konkretnego lotniska.

| | Firma 1 | Firma 2 | Firma 3 |
|---|---|---|---|
| Lotnisko 1 | 10 | 7 | 8 |
| Lotnisko 2 | 10 | 11 | 14 |
| Lotnisko 3 | 9 | 12 | 4 |
| Lotnisko 4 | 11 | 13 | 9 |

Tabela 1: Ceny paliw

$$
\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & 10x_{11} + 7x_{21} + 8x_{31} + 10x_{12} + 11x_{22} + 14x_{32} + \\
& 9x_{13} + 12x_{23} + 4x_{33} + 11x_{14} + 13x_{24} + 9x_{34} \\
\text{subject to} \quad & x_{11} + x_{21} + x_{31} \geqslant 110000, \\
& x_{12} + x_{22} + x_{32} \geqslant 220000, \\
& x_{13} + x_{23} + x_{33} \geqslant 330000, \\
& x_{14} + x_{24} + x_{34} \geqslant 440000, \\
& x_{11} + x_{12} + x_{13} \leqslant 275000, \\
& x_{21} + x_{22} + x_{23} \leqslant 550000, \\
& x_{31} + x_{32} + x_{33} \leqslant 660000, \\
& x_{ij} \geqslant 0 \text{ dla } i = 1, 2, 3 \text{ i } j = 1, 2, 3, 4.
\end{aligned}
$$

### Wyniki i interpretacja

Tabela 2: Plan zakupu i dostaw paliwa na lotniska

| Lotnisko | Firma 1 | Firma 2 | Firma 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | 0.0 galonów | 110000.0 galonów | 0.0 galonów |
| 2 | 165000.0 galonów | 55000.0 galonów | 0.0 galonów |
| 3 | 0.0 galonów | 0.0 galonów | 330000.0 galonów |
| 4 | 110000.0 galonów | 0.0 galonów | 330000.0 galonów |

Minimalny koszt wynosi 8525000 dolarów.

### Wnioski

a) Jaki jest minimalny łączny koszt dostaw wymaganych ilości paliwa na wszystkie lotniska?

Minimalny łączny koszt dostaw wymaganych ilości paliwa wynosi wynosi 8525000 dolarów.

b) Czy wszystkie firmy dostarczają paliwo?

Tak, każda firma realizuje jakieś dostawy paliwa.

c) Czy możliwości dostaw paliwa przez firmy są wyczerpane?

Możliwości dostaw paliwa są wczerpane w przypadku Firmy 1 oraz Firmy 3, Firma 2 nie wyczerpuje swoich dostaw.

## 2 Zadanie 3

### Opis problemu

W zadaniu trzecim mamy postawiony problem Policji w małym miasteczku, która ma pod swoim patronatem trzy dzielnice oznaczone jako $p_1$, $p_2$ i $p_3$. Każda dzielnica ma przypisaną pewną liczbę radiowozów. Mamy podaną informację, iż Policja pracuje w systemie trójzmianowym. W poniższych tabelach mamy podane informacje na temat minimalnej i maksymalnej liczby radiowozów dla każdej zmiany, w zależności od dzielnicy.

Tabela 3: Minimalne liczby radiowozów dla każdej zmiany i dzielnicy

| | Zmiana 1 | Zmiana 2 | Zmiana 3 |
|---|---|---|---|
| $p_1$ | 2 | 4 | 3 |
| $p_2$ | 3 | 6 | 5 |
| $p_3$ | 5 | 7 | 6 |

Tabela 4: Maksymnalne liczby radiowozów dla każdej zmiany i dzielnicy

| | Zmiana 1 | Zmiana 2 | Zmiana 3 |
|---|---|---|---|
| $p_1$ | 3 | 7 | 5 |
| $p_2$ | 5 | 7 | 10 |
| $p_3$ | 8 | 12 | 10 |

Dodatkowo wiemy, że przepisy wymuszają, że dla zmiany 1, 2 i 3 powinno być dostępnych, odpowiednio, co najmniej 10, 20 i 18 radiowozów. Ponadto dzielnice $p_1$. $p_2$ i $p_3$ powinny mieć przypisane, odpowiednio 10, 14 i 13 radiowozów. Policja chce wyznaczyć przydział radiowozów spełniający powyższe wymagania i minimalizujący ich całkowitą liczbę. Problem należy sformułować jako problem cyrkulacji.

(a) Definicje zmiennych decyzyjnych: Niech $x_{ij}$ oznacza liczbę radiowozów przypisanych do dzielnicy $i$ i zmiany $j$, gdzie $i \in 1, 2, 3$ i $j \in 1, 2, 3$.

(b) Ograniczenia: Ograniczenia wynikające z minimalnej i maksymalnej liczby radiowozów dla każdej dzielnicy i zmiany:

$\sum_{j=1}^{3} x_{ij} \geqslant$ minimalna liczba radiowozów dla dzielnicy $i$ i zmiany $j$, dla $i \in 1, 2, 3$ i $j \in 1, 2, 3$,

$\sum_{j=1}^{3} x_{ij} \leqslant$ maksymalna liczba radiowozów dla dzielnicy $i$ i zmiany $j$, dla $i \in 1, 2, 3$ i $j \in 1, 2, 3$.

Ograniczenia wynikające z wymaganej minimalnej liczby radiowozów dla każdej zmiany:

$$\sum_{i=1}^{3} x_{ij} \geqslant 10, \text{ dla } j = 1, 2, 3,$$

$$\sum_{i=1}^{3} x_{ij} \geqslant 20, \text{ dla } j = 1, 2, 3,$$

$$\sum_{i=1}^{3} x_{ij} \geqslant 18, \text{ dla } j = 1, 2, 3.$$

Ograniczenia wynikające z wymaganej minimalnej liczby radiowozów dla każdej dzielnicy:

$$\sum_{i=1}^{3} x_{i1} \geqslant 10, \text{ dla } i = 1, 2, 3,$$

$$\sum_{i=1}^{3} x_{i2} \geqslant 14, \text{ dla } i = 1, 2, 3,$$

$$\sum_{i=1}^{3} x_{i3} \geqslant 13, \text{ dla } i = 1, 2, 3.$$

(c) Funkcja celu: Minimalizacja całkowitej liczby radiowozów:

$$\text{minimalizuj } \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} x_{ij}$$

### Wyniki i interpretacja

| | Zmiana 1 | Zmiana 2 | Zmiana 3 |
|---|---|---|---|
| Dzielnica 1 | 2 | 7 | 5 |
| Dzielnica 2 | 3 | 6 | 7 |
| Dzielnica 3 | 5 | 7 | 6 |

Minimalna liczba radiowozów wynosi 48.

## 3 Zadanie 4

### Opis problemu

W zadaniu czwartym mamy podany problem pewnej firmy przeładunkowej, na danym terenie firma składuje kontenery z cennym ładunkiem. Teren jest podzielony na $m * n$ kwadratów. Wiemy, że kontenery są składowane w wybranych kwadratach. Zakładamy, że kwadrat może być zajmowany przez co najwyżej jeden kontener. Firma musi rozmieścić kamery, żeby monitorwać kontenery. Każda kamera może obserować $k$

kwadratów w lewo, $k$ kwadratów w prawo, $k$ kwadratów w górę i $k$ kwadratów w dół. Wiemy również, że kamera nie może być umieszczona w kwadracie zajmowanym przez kontener. Naszym zadaniem jest rozmieszczenie kamer w kwadratach w taki sposób, aby każdy kontener był monitorowany przez conajmniej jedną kamerę oraz żeby liczba kamer była jak najmniejsza.

(a) Definicje zmiennych decyzyjnych:

$x_{i,j}$ - zmienna decyzyjna całkowitoliczbowa, określająca czy w kwadracie (i,j) znajduje się kamera (1 - tak, 0 - nie)

(b) Ograniczenia:

każdy kwadrat może być jednocześnie zajmowany przez co najwyżej jedną kamerę
każdy kontener musi być monitorowany przez co najmniej jedną kamerę

(c) Funkcja celu:

Minimalizacja liczby użytych kamer
Zapis modelu programowania całkowitoliczbowego:

Minimalizuj $\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{i,j}$

przy założeniach:

$$\forall i, j \in 1, ..., m \times 1, ..., n : \sum_{p=i-k \ \ p \geqslant 1}^{i+k} \sum_{q=j-k \ \ q \geqslant 1}^{j+k} x_{p,q} \geqslant 1$$

- ograniczenie zapewniające, że każdy kontener jest monitorowany przez co najmniej jedną kamerę

$\forall i, j \in 1, ..., m \times 1, ..., n : x_{i,j} \in 0, 1$ - zmienne decyzyjne są binarne